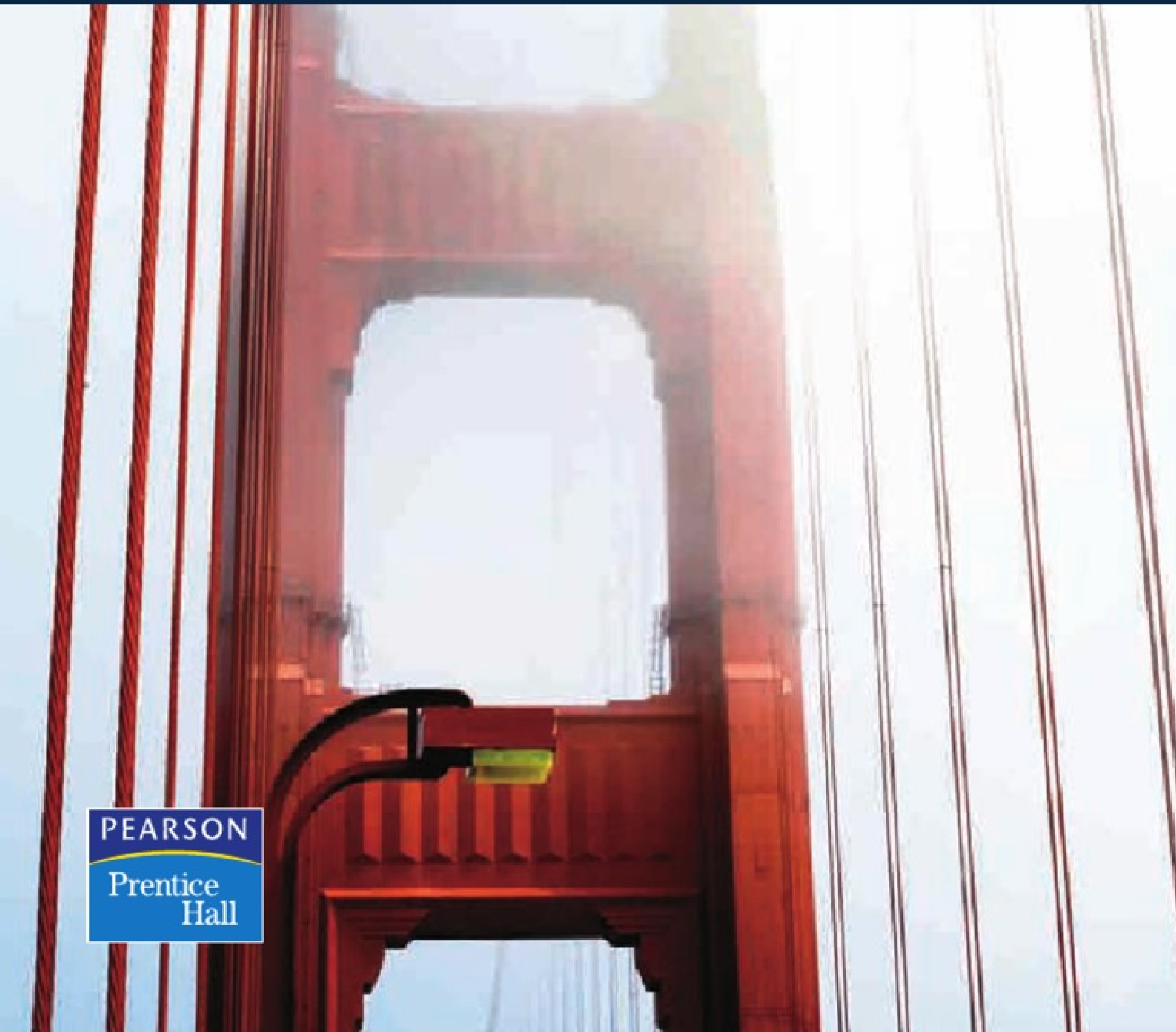
Francisco Soler
Reinaldo Núñez
Moisés Aranda

# Cálculo

## con aplicaciones



PEARSON
Prentice Hall

# Cálculo

## con aplicaciones

# Cálculo
## con aplicaciones

Francisco Soler
Reinaldo Núñez
Moisés Aranda

PEARSON
Educación

Colombia • Argentina • Bolivia • Brasil • Costa Rica • Chile • Ecuador
El Salvador • España • Guatemala • Honduras • México • Nicaragua • Panamá
Paraguay • Perú • Puerto Rico • República Dominicana • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

Francisco Soler, Reinaldo Núñez, Moisés Aranda

Cálculo con aplicaciones

Pearson Educación de Colombia, LTDA., 2008

ISBN: 978-958-699-102-5

Formato: 20 x 25.5 cm Páginas 700

Editora: María Fernanda Castillo
fernanda.castillo@pearsoned.cl
Corrección de estilo: Esteban Flamini / Alessandra Canessa
Diseño y diagramación: Víctor Goyburo

**PRIMERA EDICIÓN, 2008**



ISBN: 978-958-699-102-5

Impreso en Colombia / *Printed in Colombia*

PEARSON
Educación

# CONTENIDO

## Capítulo 4. DERIVACIÓN 231



## Capítulo 5. APLICACIONES DE LA DERIVADA 271

# Introducción

El Cálculo es una de las disciplinas que más ha contribuido al desarrollo de la ciencia y de la matemática misma, por lo que su aprendizaje debe ser una fuente que contribuya a la formación y desarrollo del pensamiento lógico, y como herramienta de trabajo para la construcción de modelos matemáticos propios de la disciplina que el estudiante trabaje.

Para el logro de estos objetivos hemos desarrollado el presente trabajo de cálculo, construyendo los conceptos básicos a partir de ejemplos prácticos e ideas que el estudiante maneja intuitivamente. Estos conceptos se presentan de una manera precisa sin caer en formalismos engorrosos.

La metodología que se desarrolla en el libro facilita el trabajo autodidacta por parte del estudiante, lo cual refuerza su proceso de formación y a su vez proporciona elementos didácticos y pedagógicos al profesor, haciendo más productiva su labor docente.

En la presente edición, se modifica la tendencia de enfatizar la enseñanza de la parte operativa y mecánica del cálculo de derivadas, límites, primitivas y problemas comunes. Se conjugan elementos teóricos del cálculo con problemas de diferentes disciplinas.

En cada capítulo se incluye: resumen, objetivos, introducción, reseña histórica, ladillos, glosario y todas las respuestas a los ejercicios y problemas planteados. Esperamos con este trabajo llenar las necesidades de nuestros estudiantes y contribuir al mejoramiento de la calidad en la enseñanza-aprendizaje del cálculo.

Como en muchos casos, por si el profesor considera necesario revisar los requisitos básicos, se presenta un capítulo de álgebra.

Consideramos de especial importancia sus sugerencias y comentarios para el mejoramiento de esta obra.

Un reconocimiento especial para el Dr. Fernando Novoa Ramírez, director del departamento de matemática de la Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, por su permanente estímulo a la cultura escrita en la universidad.

Al Dr. Antonio Merchan Abril, coordinador de cálculo en la Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, por sus valiosas sugerencias y comentarios para el éxito de esta obra.

Con gratitud a nuestros colegas y alumnos de la Universidad Sergio Arboleda y de la Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, por sus apreciaciones y sugerencias en el desarrollo de los manuscritos de esta obra.

# AUTORES

## Francisco Soler Fajardo

Especialista en Matemática Aplicada (Universidad Sergio Arboleda, Bogotá); Licenciado en Matemática (Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá); Diplomado en Tecnologías Aplicadas a la Enseñanza Virtual de la Matemática (Universidad Sergio Arboleda, Bogotá); Estudios de Postgrado en Administración Escolar (Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá); Estudios de Pregrado en Física (Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá). Vinculado durante 35 años a la enseñanza de la Matemática en universidades de Bogotá, 32 de los cuales en la Pontificia Universidad Javeriana. Además de este libro tiene publicados: *Algebra y Programación Lineal con Aplicaciones*, *Fundamentos de Matemática con Aplicaciones*, *Fundamentos de Cálculo con Aplicaciones*, *Cálculo Diferencial con Aplicaciones*, *Cálculo Integral con Aplicaciones*, *Matemática Básica con una Introducción al Cálculo*.

## Moisés Aranda Silva

Licenciado en Matemáticas (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá), Magister en Ciencias Estadística (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá), especializado en Matemática Aplicada (Universidad Sergio Arboleda, Bogotá), ha sido profesor por más de 15 años en las universidades Pontificia Universidad Javeriana y Sergio Arboleda. Además, tiene publicado un libro de *Álgebra Lineal con aplicaciones, con un enfoque geométrico y nota histórica.*

## Reinaldo Núñez

Licenciado en matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá con estudios de Maestría en: Docencia de la Matemática, UPN; en docencia e investigación universitaria de la Universidad Sergio Arboleda y en Ciencias Financieras de la Universidad Central. Investigador en educación matemática, conferencista en eventos internacionales y nacionales, consultor y asesor en educación matemática y finanzas cuantitativas. Ha sido profesor de matemáticas en enseñanza media, pregrado y posgrado, coautor de cuatro libros y artículos en revistas indexadas. Actualmente es Director de la Escuela de Matemáticas, de las Especializaciones en Matemática Aplicada y Gestión de Riesgos Financieros de la Universidad Sergio Arboleda.

# Agradecimientos

Agradecemos al equipo de profesionales de Pearson Educación y de manera muy especial al señor Peter Vargas, Gerente de la División Universitaria, por su permanente apoyo e interés en la gran cantidad de detalles asociados a la preparación de este texto de Cálculo.

Igualmente nuestro agradecimiento muy especial a los docentes de diferentes universidades, quienes con su valiosa colaboración a través de varias etapas en la elaboración de la presente obra, sus muestras de apoyo, sus críticas y sugerencias han sido de un valor invaluable para la realización.

Pontificia Universidad Javeriana
Fernando Suárez
Diego Guerrero
Fabio Molina
Héctor Linares
Irina Reyes
Ismael García
José Humberto Serrano
Juan Carlos Quintero
Julio César Melo
Liliana Angel
Liliana Barreto
Luis Alejandro Bello
Eddy Herrera
Luz Marina Moya
Martha Alvarado
Matilde Páez
Nélson Urrego
Nicolás Civetta
Rafael Castro
José Niño
Yolanda Salcedo
Yolima Umaña
Fernando Cardozo

Escuela Colombiana de Ingeniería
Ernesto Acosta
Édgar Obonaga
José Francisco Amador
Gloria Inés Bernal
Isabel Carlota López
Óscar Darío Zárate
Guiomar Lleras

Colegio de Estudios Superiores de Administración CESA
Alvaro Peña

INPAHU
Edgar Borrás

Univesidad Antonio Nariño
Lenin Reyes
Abraham Jiménez

Universidad San Martín
Jaime Preciado
Guillermo Sepúlveda
Samuel Barreto
Miguel Sandoval

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Samuel Barreto
Miguel Sandoval
Carlos Ochoa
Claudia Vela

Universidad Militar Nueva Granada
Lucio Rojas
Luis Enrique Rojas
Wilken Rodríguez
Adrián Gómez
William Becerra
Arturo Ramírez
Marta Melo
Ricardo Vega
Solón Lozada

Universidad Santo Tomas
Gloria E. Rodríguez
Héctor Ruiz
Carlos Lesmes

Universidad Central
Edel Serrano
Eva Cecilia Vargas
Ricardo Bernal
Numael Ramírez

Universidad de los Andes
José Ramón Velasco

Universidad Sergio Arboleda
Bernardo Muñoz
Jairo A. Cuervo
Alejandro Bernal
Luis Eduardo Pérez
Liza Pinzón
Lady Ibáñez
Oscar Márquez
Jorge Robayo
José Antonio Torres
Sergio Carrillo
Víctor Saúl Barrantes
Antonio Mesa
Ernesto Vargas
Iván Luna

Universidad Sergio Arboleda Santa Martha
Carlos Rocha

Universidad de la Salle
Carlos Fernando Mora

Universidad Jorge Tadeo Lozano
Eduardo Estrada
Ricardo Bernal

Universidad del Quindío
Paulo Andrés García

Universidad de la Sabana
Mauricio Restrepo

Universidad Externado de Colombia
Omar Silva
Humberto Cardozo
Luis Alfonso Mejía
Lidia García

Fundación Universitaria Los Libertadores
Diego Henry Sánchez
Jorge Aristizábal

Universidad de América
Rafael Acosta

Universidad del Bosque
Marta Corrales
Yadira Carrión

Universidad Escuela de Administración de Negocios
Jorge Augusto Pérez

Fundación del Area Andina
Mario Duarte
Rosario Granados

Universidad del Rosario
Jaime García

Universidad de Cartagena
Joaquín Luna

# Capítulo 1

# Algebra básica

## 1.1 Introducción

En este capítulo haremos un breve repaso de algunos aspectos del álgebra básica necesarios para los capítulos posteriores. Partiremos desde los axiomas de los números reales para la adición y la multiplicación, y posteriormente abordaremos los de orden que hacen de los números reales un cuerpo ordenado. Después, mencionaremos algunas de las más importantes consecuencias de estos axiomas, con énfasis en la utilidad de cada una. Se dejará para la parte final el axioma de completez, considerado el más importante de todos.

## 1.2 Nota histórica

La idea de número es tan antigua como la civilización misma. Ya hacia el año 2000 a. C., los babilonios y egipcios utilizaban fracciones en su aritmética. Los griegos descubrieron con Pitágoras (580-500 a. C.), la $\sqrt{2}$ y demostraron que no era racional (conmensurable). De allí la necesidad que hubo de dar paso a los números irracionales. Los números negativos ganaron su espacio sólo a partir del siglo XVII, pues antes se los consideraba absurdos.

La idea de una teoría rigurosa del número real se hace fuertemente necesaria cuando aparece el cálculo, particularmente en el estudio de las funciones. Con los trabajos de Richard Dedekind (1831-1916) sobre cortaduras, Karl Weierstrass (1815-1897) y Georg Cantor (1845-1918), se percibe un notable progreso en la definición de número real basada totalmente en los números racionales.

Hacia 1900, David Hilbert (1862-1943) tomó un camino muy diferente para la construcción de los números reales sin basarse en los racionales, a la vez que definía un sistema con dieciocho axiomas. Dieciséis de estos axiomas definían aquello que se conoce como un campo ordenado, mientras que los otros dos eran el axioma arquimediano y el axioma de completez.

### Objetivos

1. Identificar los axiomas que caracterizan a los números reales.
2. Entender por qué el axioma de completez es el más importante de los números reales.
3. Hacer uso de las consecuencias de los axiomas cuando sea necesario más adelante.

## 1.3 Sistemas numéricos

Existen varios métodos para introducir los diferentes sistemas de números. Aquí partimos del sistema de los números naturales como base, y vamos presentando sistemas más amplios que tengan las propiedades deseadas hasta llegar a los números reales.

Posteriormente, estudiamos el sistema de los números reales considerándolos un concepto primitivo que satisface ciertas propiedades tomadas como axiomas. Esto significa que cualquier propiedad de los números reales se puede deducir de los axiomas. Luego, se expondrán algunas de las importantes consecuencias de los axiomas que caracterizan a los números reales.

## 1.4 El sistema de los números naturales

Es el conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, que con las operaciones de adición y multiplicación cumple las propiedades asociativa, modulativa y conmutativa, además de la propiedad distributiva que relaciona las dos operaciones.

La ecuación $x + a = b$ con $a, b \in \mathbb{N}$ no siempre tiene solución en $\mathbb{N}$. Por ejemplo: no existe un número natural $x$ que satisfaga la ecuación $x + 5 = 3$.

Si deseamos que ecuaciones de este tipo tengan siempre solución, se hace necesaria la existencia de inversos aditivos. Por lo tanto, debemos ampliar el sistema de los números naturales.

## 1.5 El sistema de los números enteros

Es el conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, que con las operaciones de adición y multiplicación cumple las mismas propiedades que el sistema de los números naturales, además de contar con la existencia de inversos aditivos (propiedad invertiva de la adición). La ecuación $ax = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, no siempre tiene solución en $\mathbb{Z}$. Por ejemplo: no existe un número entero $x$ que satisfaga la ecuación $2x = 3$.

Si deseamos que ecuaciones de este tipo tengan siempre solución, se hace necesaria la existencia de inversos multiplicativos. Por lo tanto, debemos ampliar el sistema de los números enteros.

## 1.6 El sistema de los números racionales

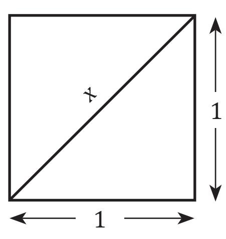
Es el conjunto $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{Z}\,;\, b \neq 0\right\}$, que con las operaciones de adición y multiplicación cumple las mismas propiedades que el sistema de los números enteros, además de contar con la existencia de inversos multiplicativos (propiedad invertiva de la multiplicación).

Cualquier número racional se puede representar en forma decimal y esta representación tiene finitas cifras decimales o infinitas cifras decimales periódicas. Por ejemplo: $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857\ldots$

Existen números con infinitas cifras decimales no periódicas. Por ejemplo: $0{,}10110011100011110000\ldots$ (un uno, un cero, dos unos, dos ceros, tres unos, tres ceros, etc.). Estos números no son racionales puesto que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros. Este hecho exige ampliar el conjunto de los números racionales, creando un nuevo conjunto que contenga los nuevos números llamados números irracionales y que se nota $\mathbb{I}$.

Una situación, que muestra que los números racionales son insuficientes para medir, se presenta al hallar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1. La medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 equivale a encontrar $x$ tal que $x^2 = 2$.

El valor de $x$ positivo tal que $x^2 = 2$ se nota $\sqrt{2}$. Existen otros números irracionales como $\pi$, e, $2\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$, etc. En los irracionales no se estudia su estructura algebraica, puesto que la suma y el producto de dos números irracionales no siempre es un número irracional.

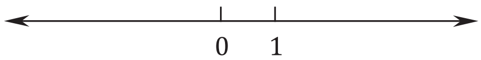



Ejemplo 1. Si $a = 3 + \sqrt{2}$ y $b = 3 - \sqrt{2}$, entonces $a + b = 6 \notin \mathbb{I}$ y $a \cdot b = 7 \notin \mathbb{I}$.

## 1.7 El sistema de los números reales

El conjunto de números que pueden representarse por expresiones decimales finitas o infinitas (periódicas [racionales] o no periódicas [irracionales]), con sus relaciones de adición y multiplicación (+, ·), y con la relación de orden menor que (<), se denomina sistema de los números reales. Se nota $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ y se simplifica $\mathbb{R}$.

La representación geométrica de los números reales se hace usualmente por medio de los puntos de una recta: se elige un punto para representar el cero y otro (que por costumbre se sitúa a la derecha del cero) para representar el 1, como se indica en la figura. Esta elección determina la escala, y a cada número real corresponde uno y sólo un punto de la recta, y recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un número real y sólo uno. Por esta razón la recta se denomina frecuentemente recta real. Es costumbre utilizar las palabras número real y punto como sinónimos.




Intuitivamente, la recta sugiere la idea de orden. Un número $a$ es mayor que $b$ si en la recta está a la derecha de $b$.

El cero parte el conjunto de los números reales en: el 0, los reales positivos $\mathbb{R}^+=\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ y los reales negativos $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

El proceso de construcción que se ha desarrollado, se sintetiza en el sistema de los números reales en forma axiomática de la siguiente manera: el conjunto de los números reales cuenta con dos operaciones llamadas adición y multiplicación, tales que para cada par de números reales $x$ e $y$, se puede formar, por un lado, la suma de $x$ e $y$, que es otro número real único designado por $x + y$; y por el otro, el producto de $x$ por $y$ designado por $xy$ o $x \cdot y$, que es otro número real único. Este número real único cumple con las propiedades o los axiomas que se detallan a continuación.

### 1.7.1 Axiomas de la adición y la multiplicación

A1. (Asociativa) $x + (y + z) = (x + y) + z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

A2. (Conmutativa) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

A3. (Modulativa) Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que para cada número real $x$ se tiene

$$0 + x = x + 0 = x$$

A4. (Existencia de inverso aditivo) Para cada número real $x$ existe un número real $-x$ tal que

$$x + (-x) = 0$$

M1. (Asociativa) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

M2. (Conmutativa) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x,\ y \in \mathbb{R}$.

M3. (Modulativa) Existe $1 \in \mathbb{R}$ $(1 \neq 0)$ tal que para cada número real $x$ se tiene:

$$1 \cdot x = x$$

M4. (Existencia del inverso multiplicativo o recíproco) Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real $x^{-1}$, tal que

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

D. (Distributiva) Para cada $x, y, z$, todos ellos números reales, se tiene que:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Esta propiedad escrita en el sentido contrario

$$x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$$

se conoce como factorización, es decir, el paso de una suma a un producto. Esta propiedad relaciona las operaciones de adición y multiplicación.

Dados dos números reales $a$ y $b$, se define $a - b = a + (-b)$. Se denomina la diferencia entre $a$ y $b$, donde $a$ es el minuendo y $b$ el sustraendo.

De manera similar, dados dos números reales $a$ y $b$, con $b \neq 0$ se define $a \div b = \frac{a}{b} = ab^{-1}$.
Se debe entender $a^2 = a \cdot a$ , y en general $a^n$ con $n \in \mathbb{N}$ se puede definir inductivamente así:

i) $a^1 = a$.

ii) $a^{(n+1)} = a^n a$, cuando $n \neq 1$.

Cuando $n$ es un entero negativo y $a \neq 0$, $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

($\mathbb{R}$, +, ·) con los axiomas anteriores tiene una estructura de cuerpo.

Nótese que $\mathbb{Q}$ con las operaciones suma y producto también tiene estructura de cuerpo.

A partir de estos axiomas, se aplica el método deductivo con el que es posible demostrar las propiedades de los números reales con respecto a la adición y a la multiplicación. A continuación se detallan algunas de ellas y sus consecuencias.

**Propiedad 1.** $-(-a) = a.$

**Propiedad 2.** $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a-b.$

Estas dos propiedades se utilizan en diferentes circunstancias en las que es necesario agrupar dos o más términos como una sola expresión para facilitar cálculos o simplificar expresiones.

Ejemplo 2. Simplificar la expresión $x-(a-b+c)$.

Solución. Como el paréntesis está precedido por el signo $(-)$, se utiliza la propiedad 2, con lo cual

$$x-(a-b+c) = x-a-(-b)-c$$

y por la propiedad 1 se tiene finalmente

$$x-a-(-b)-c = x-a+b-c$$

Ejemplo3. También se puede hacer en el sentido contrario: introducir los términos de la expresión $a-b+c$ en un paréntesis precedido por el signo menos $(-)$.

Solución. Al aplicar la propiedad 2, se obtiene:

$$a-b+c = -(-a+b-c)$$

## EJERCICIO 1.1

1. Simplifique:

    a. $x^2-\{-7xy+[-y^2+(-x^2+3xy-2y^2)]\}.$

    b. $-(a+b)+[-3a+b-\{-2a+b-(a-b)\}+2a].$

2. Introduzca los términos positivos en un paréntesis precedido por el signo más $(+)$ y los términos negativos en un paréntesis precedido por el signo menos $(-)$.

    a. $3a+5b+6c+7.$

    b. $5x-4y+8z-10.$

    c. $x-y+z-4.$

    d. $-6x-3y-4z+2.$

e. $12x + 4y - 5z - 8$.

f. $12a - 6b + 8c - 10$.

3. Introduzca todos los términos de las expresiones siguientes, con excepción del 1º, en un paréntesis precedido por el signo menos (—).

a. $4m - 2n + 3 - (-m + n) + (2m - n)$.

b. $x^2 - 3xy + [(x^2 - xy) + y^2]$.

### 1.7.1.1 Ley de los signos

**Propiedad 3.** $a(-b) = -(ab)$.

**Propiedad 4.** $(-a)(-b) = ab$.

Estas dos propiedades constituyen lo que se conoce como la ley de los signos. Algunas aplicaciones son:

Ejemplo 4. Hallar la suma entre $(5a + 7b - 6c)$ y $(-3a + 4b + 6c)$.

Solución. Al aplicar las propiedades asociativa y conmutativa de la suma tenemos

$$[5a + (-3a)] + (7b + 4b) + [(-6c) + 6c]$$

Al aplicar la propiedad distributiva y la consecuencia 3, resulta

$$[(5 + (-3)) \cdot a] + [(7 + 4) \cdot b] + [(-6 + 6) \cdot c] = 2a + 11b$$

Como se puede observar, la suma de expresiones algebraicas se reduce a la suma de los coeficientes de los términos semejantes. Algunas de sus propiedades son heredadas del conjunto de donde tomamos sus coeficientes.

Ejemplo 5. Simplificar la expresión

$$-2a - \{3a - 5b + [-7a + 8b + (-9a + 2b) - (6a - 10b)]\}$$

Solución Como la expresión tiene paréntesis de diferente tipo, eliminamos los más internos (por simplicidad), que en este caso son los ordinarios:

$$-2a - \{3a - 5b + [-7a + 8b - 9a + 2b - 6a + 10b]\}$$

Como todavía hay paréntesis de diferente tipo, eliminamos los más internos, que en este caso son los paréntesis rectangulares; después hacemos lo mismo con las llaves y finalmente reducimos términos semejantes así (el lector debe identificar en dónde se utilizan las consecuencias):

$$\begin{aligned}&-2a-\{3a-5b+[-7a+8b-9a+2b-6a+10b]\}\\&=-2a-3a+5b+7a-8b+9a-2b+6a-10b\\&=17a-15b.\end{aligned}$$

Ejemplo 6. De $4x-3y+z$, restar $2x+5z-6$

Solución. $$\begin{aligned}(4x-3y+z)-(2x+5z-6)) &= 4x-3y+z-2x-5z+6\\ &= 2x-3y-4z+6\end{aligned}$$

Ejemplo 7. Restar $-4a^3b^3-\frac{1}{10}ab+\frac{2}{3}a^2b^2-9$ de $-\frac{3}{5}ab+\frac{1}{6}a^2\,b^2-8$

Solución.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{6}a^2b^2-\frac{3}{5}ab-8\right)-\left(-4a^3b^3+\frac{2}{3}a^2b^2-\frac{1}{10}ab-9\right)\\&=\frac{1}{6}a^2b^2-\frac{3}{5}ab-8+4a^3b^3-\frac{2}{3}a^2b^2+\frac{1}{10}ab+9\\&=4a^3b^3+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)a^2b^2+\left(-\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\right)ab+(-8+9)\\&=4a^3b^3-\frac{1}{2}a^2b^2-\frac{1}{2}ab+1\end{aligned}$$

## EJERCICIO 1.2

1. Halle la suma de:

   a. $8a+3b-c$; $5a-b+c$; $-a-b-c$; $7a-b+4c$.

   b. $5a^x-3a^m-7a^n$; $-8a^x+5a^m-9a^n$; $-11a^x+5a^m+16a^n$.

2. En cada ejercicio sustraer la primera expresión de la segunda.

   a. $3x-1$; $x-10$.

   b. $3x+y-9$; $2x+y-5$.

   c. $0.25x+\frac{3}{8}y$; $-\frac{3}{14}x+1.28y$.

   d. $4\sqrt{5a}-3$; $12-3\sqrt{20a}$.

3. Encontrar la expresión que debe disminuirse en $2m - 2n + 3p$ para obtener una diferencia igual a $4m + n - 2p$.

4. Reste la suma de $5x + 6y - 8$ y $7y - 2x - 3$ de la suma de $6x - 2y + 1$ y $5x + 7y - 9$.

5. De $a^3 + a^2 - a + \frac{5}{6}$, reste $-\frac{7}{8}a^2 + \frac{9}{10}a + \frac{7}{8}$.

6. Reste $-\frac{2}{13}m^6 + \frac{1}{3}n^6 - \frac{7}{20}m^4n^2 + \frac{5}{14}m^2n^4 - \frac{3}{5}$ de $\frac{3}{10}m^4n^2 - \frac{3}{7}m^2n^4 + \frac{5}{9}n^6$.

7. ¿Qué expresión debe sumarse a la primera para obtener la segunda?

   a. $2x - y - 2$; $6x - 7y - 8$.

   b. $6x - 7y - 10$; $-8x + 13y - 6$.

   c. $m^4 + 6m^3 - 7m^2 + 8m - 9$, $2m^3 + 3m^2 - 4m - 3 + \sqrt{7}$.

8. Si la diferencia es $a^3 + 3a^2 - 2a$ y el sustraendo es $2a^3 - 2a^2 + a - 5$, halle el minuendo.

### 1.7.1.2 Exponentes

**Propiedad 5.** $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ para $m$ y $n$ naturales.

Ejemplo 8. Efectuar $(3x^2) \cdot (-5x^3y^2)$.

Solución. Al aplicar las propiedades asociativa y conmutativa de los números reales y las propiedades 4 y 5, tenemos:

$$(3x^2)(-5x^3y^2) = (3)(-5)\,x^2x^3y^2 = -15x^5y^2$$

Ejemplo 9. Efectuar $\left(\frac{5}{8}xy^{4n+2}\right) \cdot (4x^{3n+2}y^3)$.

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{5}{8}xy^{4n+2} \cdot 4x^{3n+2}y^3 &= \frac{20}{8}x^{3n+3}y^{4n+5} \\ &= \frac{5}{2}x^{3n+3}y^{4n+5} \end{aligned}$$

Ejemplo 10. Efectuar $5x^2 \cdot (3x^2 y - 7y)$.

Solución. Al aplicar la propiedad distributiva y la ley de signos, tenemos:

$$\begin{aligned} 5x^2(3x^2y - 7y) &= (5x^2)(3x^2y) + (5x^2)(-7y) \\ &= 15x^4y + (-35x^2y) \\ &= 15x^4y - 35x^2y \end{aligned}$$

Ejemplo 11. Efectuar $(3a^2 - 7b) \cdot (5a^2 + 6b)$.

Solución. Si vemos la expresión $3a^2 - 7b$ como un solo término, luego de aplicar la propiedad distributiva tenemos:

$$\begin{aligned} (3a^2 - 7b)\,(5a^2 + 6b) &= (3a^2 - 7b)\,(5a^2) + (3a^2 - 7b)\,(6b) \\ &= (15a^4 - 35a^2b) + (18a^2b - 42b^2) \\ &= 15a^4 - 17a^2b - 42b^2 \end{aligned}$$

## EJERCICIO 1.3

Efectúe en cada caso.

1. $(a^2 - 2ab + 4b^2)\,(a + 2b)$.
2. $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)\,(a - b)$.
3. $a^x - a^{x+1} + a^{x+2}$ por $a + 1$.

### 1.7.1.3 Productos notables

**Propiedad 6.** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y su dual $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ejemplo 12. $(2x + 5y^3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5y^3) + (5y^3)^2 = 4x^2 + 20xy^3 + 25y^6$.

Ejemplo 13.
$$\begin{aligned} (x^2 + 2x + y - 3)^2 &= [(x^2 + 2x) + (y - 3)]^2 \\ &= (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x)(y - 3) + (y - 3)^2 \\ &= x^4 + 4x^3 + 2x^2y - 2x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 9 \end{aligned}$$

**Propiedad 7.** $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$ y su dual
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$.

Ejemplo 14. $(3x^2+2y)^3 = (3x^2)^3 + 3(3x^2)^2(2y) + 3(3x^2)(2y)^2 + (2y)^3$
$= 27x^6 + 54x^4y + 36x^2y^2 + 8y^3$

Ejemplo 15. $(5x^{2n} - 4y^3)^3 = (5x^{2n})^3 - 3(5x^{2n})^2(4y^3) + 3(5x^{2n})(4y^3)^2 - (4y^3)^3$
$= 125x^{6n} - 300x^{4n}y^3 + 240x^{2n}y^6 - 64y^9$

Ejemplo especial 16. Un número $x$ satisface la igualdad siguiente:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

Encuentre el valor de

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

Solución.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 7 + 2 = 9$$

de donde

i) $x + \frac{1}{x} = 3$ ó ii) $x + \frac{1}{x} = -3$. Para el primer caso tenemos

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = (3)(9) = 27$$

$$x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 9 = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

Ahora

$$(7)(18) = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = 3 + x^5 + \frac{1}{x^5}$$

$$126 = 3 + x^5 + \frac{1}{x^5}$$

de donde

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$$

Para el segundo caso, véase el numeral 7 del ejercicio 1.4.

**Propiedad 8.** $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ y en general
$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})=a^n-b^n$.

Ejemplo 17. $$\begin{aligned}(x+y-z)(x-y+z) &= [x+(y-z)][x-(y-z)]\\ &= x^2-(y-z)^2\\ &= x^2-y^2+2yz-z^2\end{aligned}$$

**Propiedad 9.** $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ y en general
$(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-3}b^2-\cdots+b^{2n})=a^{2n+1}-b^{2n+1}$.

Ejemplo 18. $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3-2^3=x^3-8$

**Propiedad 10.** $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

Ejemplo 19. $(x+9)(x-7)=x^2+2x-63$

Ejemplo 20. $$\begin{aligned}(x^2-7a)(x^2-5a) &= x^4+(-7a-5a)x^2+(-7a)(-5a)\\ (x^2-7a)(x^2-5a) &= x^4-12ax^2+35a^2\end{aligned}$$

**Propiedad 11.** $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd.$

Ejemplo 21. $$\begin{aligned}(2x+1)(3x-5) &= (2\cdot 3)x^2+[2\cdot(-5)+1\cdot 3]x+1(-5)\\ &= 6x^2-7x-5\end{aligned}$$

Las propiedades de la 6 hasta la 11 se conocen usualmente como productos notables. Si bien resultan ágiles y prácticos para aprenderlos de memoria, lo que no se puede olvidar es lo que significa cada producto:

Ejemplo 22. $$\begin{aligned}(x+5)^2 &= (x+5)(x+5)\\ &= x^2+5x+5x+25\\ &= x^2+10x+25\end{aligned}$$

## EJERCICIO 1.4

En los ejercicios 1 al 6 efectúe:

1. $(2x^2 - 3y^2)^2$.
2. $(a^2 + 3)(a^2 - 3)$.
3. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)$.
4. $(a - b + c)(a + b + c)$.
5. $(2x + 5)(3x - 2)$.
6. $(3m - 2n^2)^3$.
7. Resolver el segundo caso del ejemplo especial 16.
8. Muestre que el producto de dos números de la forma $a^2+3b^2$ es de nuevo de esta misma forma.

### 1.7.1.4 Factorización

Ahora se escribirán los productos notables en el sentido contrario para obtener algunas de las populares fórmulas de factorización. Recordar la propiedad distributiva (escrita al revés).

#### 1.7.1.4.1 **Factor común**

$ab + ac = a(b + c)$

Ejemplo 23. $10 = 2\cdot 5$; $x^2 - 2x = x(x - 2)$.

Ejemplo 24. Completar: $3x^4 - 7 = 3(\quad\quad)$.

Solución. $3x^4 - 7 = 3(x^4 - 7/3)$.

Ejemplo 25. Factorizar la expresión $\frac{5}{4}x^3y^4 - \frac{3}{16}x^2y^2$ en la forma $a(b + c)$ , de tal manera que el factor $b$ + c contenga sólo coeficientes enteros.

Solución. $\frac{5}{4}x^3y^4 - \frac{3}{16}x^2y^2 = \frac{1}{16}x^2y^2(20xy^2 - 3)$

Ejemplo 26. $10b - 30ab^2 = 10b(1 - 3ab)$.

Ejemplo 27. $(x^2 + 2) \cdot (m - n) + 2(m - n) = (m - n)\,[(x^2 + 2) + 2]$
$= (m - n)\,(x^2 + 4)$

Ejemplo 28. $\frac{5}{4}x^3y^4 - \frac{3}{16}x^2y^2 = \frac{1}{16}x^2y^2\,(20xy^2 - 3).$

Ejemplo 29. Factorizar $72xy^2 - 180x^2y^3 - 120x^3y^4$.

Solución. El máximo divisor común entre 72, 180 y 120 es 12, por lo tanto el factor común es $12xy^2$, luego:

$$72xy^2 - 180x^2y^3 - 120x^3y^4 = 12xy^2\,(6 - 15xy - 10x^2y^2)$$

1.7.1.4.2 **Trinomio cuadrado perfecto**

**Propiedad 12.** $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ y su dual $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Ejemplo 30. $x^2 + 4xy + 4y^2 = x^2 + 4xy + (2y)^2 = (x + 2y)^2$.

Ejemplo 31. Factorizar $x^2 + 3x + 2$

Solución. Veamos como se utiliza en este caso un trinomio cuadrado perfecto

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= (x^2 + 2x + 1) + (x+1) \\ &= (x+1)^2 + (x+1) \\ &= (x+1)\,((x+1) + 1) \\ &= (x+1)\,(x+2) \end{aligned}$$

Ejemplo 32. Factorizar: $(x + y)^2 - 2(x + y)(a + x) + (a + x)^2$.

Solución.
$$\begin{aligned} (x+y)^2 - 2(x+y)(a+x) + (a+x)^2 &= ([x+y] - [a+x])^2 \\ &= (x + y - a - x)^2 \\ &= (y - a)^2 \end{aligned}$$

Algunas veces es posible que una expresión algebraica se pueda convertir en un trinomio cuadrado perfecto sumándole otra expresión. Si a su vez esta expresión tiene raíz cuadrada exacta, al restarla da origen a una diferencia de cuadrados.

**Propiedad 13.** $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ y su dual
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$.

### 1.7.1.4.3 Diferencia de cuadrados y algo más

**Propiedad 14.** $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$ y en general
$a^n - b^n = (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$.

Ejemplo 33. $x^{2n} - 9y^4m = (x^n)^2 - (3y^2m)^2 = (x^n + 3y^{2m})\,(x^n - 3y^{2m})$.

Ejemplo 34. 
$$\begin{aligned}(m+x)^2 - (x+2)^2 &= [(m+x)+(x+2)]\,[(m+x)-(x+2)].\\ &= (2x+m+2)\,(m-2)\end{aligned}$$

Ejemplo 35. $m^4 - 81 = (m^2+9)\,(m^2-9) = (m^2+9)\,(m+3)\,(m-3)$.

Ejemplo 36. $x^2 - 5$ no se puede factorizar si se presume que los coeficientes son números enteros. Pero si los coeficientes numéricos son números reales, tenemos que:
$x^2 - 5 = (x+\sqrt{5})\,(x-\sqrt{5})$

Ejemplo 37. $8x^3 - y^3 = (2x-y)\,(4x^2 + 2xy + y^2)$.

Ejemplo 38.
$$\begin{aligned}27x^6 - (2y-3z)^3 &= (3x^2)^3 - (2y-3z)^3\\ &= [3x^2 - (2y-3z)][(3x^2)^2 + (3x^2)(2y-3z) + (2y-3z)^2]\\ &= [(3x^2) - 2y + 3z](9x^4 + 6x^2y - 9x^2z + 4y^2 - 12yz + 9z^2).\end{aligned}$$

Ejemplo 39.

$$\begin{aligned}a^7 - 128y^7 &= a^7 - (2y)^7\\ &= (a-2y)[(a^6 + a^5(2y) + a^4(2y)^2 + a^3(2y)^3 + a^2(2y)^4 + a(2y)^5 + (2y)^6]\\ &= (a-2y)(a^6 + 2a^5y + 4a^4y^2 + 8a^3y^3 + 16a^2y^4 + 32ay^5 + 64y^6).\end{aligned}$$

### 1.7.1.4.4 Suma de cubos y algo más

**Propiedad 15.** $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ y en general
$a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-3}b^2 - \cdots + b^{2n})$.

Ejemplo 40. $27x^3 + 8y^9 = (3x + 2y^3)(9x^2 - 6xy^3 + 4y^6)$.

Ejemplo 41. Factorizar $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$.

Solución. Se debe verificar que dos de los términos del polinomio son cubos, es decir, que tienen raíces cúbicas exactas:

$x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + (2y)^3$; $a = x$ y $b = 2y$

Se debe verificar que $3a^2 b$ y $3ab^2$ son los términos restantes:

$3a^2 b = 3(x)^2 (2y) = 6x^2 y$ y $3ab^2 = 3 (x)(2y)^2 = 3x (4y^2) = 12xy^2$

Como coinciden, se obtiene que:

$x^3 + 6x^2 y + 12xy^2 + 8y^3 = (x + 2y)^3$

El siguiente subtítulo no tiene un nombre corto popular, por lo cual se debe presentar tal y como es.

### 1.7.1.4.5 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

**Propiedad 16.** $x^2 + (a + b)\, x + ab = (x + a)\, (x + b)$.

Ejemplo 42. Factorizar: $x^2 + 5x + 6$.

Solución. Se debe hallar dos números que multiplicados den 6 y sumados den 5.

$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)\, (x + 2)$

Ejemplo 43. $x^2 - 13x + 30 = (x - 10)\, (x - 3)$.

Ejemplo 44. Factorizar $x^2 + 26x + 144$.

Solución. Es poco probable que por simple inspección, como en los casos anteriores, se puedan encontrar $m$ y $n$ tales que la suma sea 26 y el producto 144. La dificultad estriba en que hay varias combinaciones de dos números cuyo producto es 144. Es necesario hacer la descomposición de 144 en factores primos y combinar sus factores hasta obtener $x^2 + 26x + 144 = (x + 18)(x + 8)$.

Ejemplo 45. $a^6+7a^3 - 44 = (a^3)^2 + 7a^3 - 44 = (a^3 + 11)\, (a^3 - 4)$.

En su forma un poco más general, la propiedad 16 se presenta así:

**Propiedad 17.** $acx^2 + (ad + bc)\, x + ab = (ax + b)\, (cx + d)$.

Ejemplo 46. Factorizar: $6x^2 - 11x - 10$.

Solución. Se multiplica el polinomio por 6 y se lo divide entre 6:

$$
\begin{aligned}
\frac{6(6x^2-11x-10)}{6} &= \frac{(6x)^2-11(6x)-60}{6} = \frac{(6x-15)\cdot(6x+4)}{6}\\
&= \frac{\cancel{3}(2x-5)\cdot\cancel{2}(3x+2)}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = x^2-11x-10\\
&= (2x-5)(3x+2)
\end{aligned}
$$

1.7.1.4.6 **Combinación de casos**

Ejemplo 47. Factorizar: $ax - bx + ay - by$.

Solución. Agrupamos $(ax - bx) + (ay - by)$, sacamos factor común de los términos y tenemos

$$
\begin{aligned}
(ax-bx)+(ay-by) &= x(a-b)+y(a-b)\\
&= (a-b)(x+y)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 48. Factorizar: $a^2 + 2ab + b^2 - 1$.

Solución. Al agrupar: $a^2 + 2ab + b^2 - 1 = (a^2 + 2ab + b^2) - 1$

$$
\begin{aligned}
(a^2+2ab+b^2)-1 &= (a+b)^2-1\\
&= ([a+b]+1)([a+b)-1)\\
&= (a+b+1)(a+b-1)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 49. Factorizar: $a^2 + ax + bx - b^2$.

Solución. Al agrupar:

$$
\begin{aligned}
a^2+ax+bx-b^2 &= (a^2-b^2)+(ax+bx)\\
&= (a+b)(a-b)+x(a+b)\\
&= (a+b)(a-b+x)
\end{aligned}
$$

Algunas veces es necesario recurrir a “bautizar” las expresiones, con el fin de visualizar mejor una factorización, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 50. Comprobar que la factorización de la expresión

$x^2 + 2xz + 2xy - 4x + z^2 + 2yz - 4z + y^2 - 4y - 5$

está dada por

$(x + y + z - 5)\ (x + y + z + 1)$.

Solución. Al agrupar la expresión dada en la siguiente forma

$(x^2 + 2xy + y^2) + (2xz + 2yz) + (-4x - 4y) + (z^2 - 4z - 5)$

factorizamos los tres primeros miembros y tenemos

$(x+y)^2 + 2z\,(x+y) - 4\,(x+y) + (z^2 - 4z - 5)$

Llamemos a $x+y=t,$ y así

$t^2 + 2zt - 4t + z^2 - 4z - 5$

Reagrupamos nuevamente

$(t^2 + 2zt + z^2) + (-4t - 4z) - 5$
Factorizamos individualmente

$(t+z)^2 - 4\,(t+z) - 5$

Ésta es una expresión cuadrática en la variable $t+z$, de tal forma que buscando dos números que sumados den $-4$ y multiplicados den $-5$, se tiene

$((t+z)-5)\,((t+z)+1)$

Finalmente, al reemplazar $t$ por $x+y$, tenemos la factorización buscada

$(x+y+z-5)(x+y+z+1)$

Ejemplo 51. Factorizar: $a^4 + 3a^2 + 4$.

Solución. En principio se verifica si es un trinomio cuadrado perfecto:

$a^4 + 3a^2 + 4 = (a^2)^2 + 3a^2 + 2^2$

El doble producto de $a^2$ y 2 es $4a^2 \neq 3a^2$. No es trinomio cuadrado perfecto. Observar que si se suma $a^2$ se obtiene un trinomio cuadrado perfecto. Como $a^2$ tiene raíz cuadrada exacta, restar ese término da origen a una diferencia de cuadrados y así permite seguir el procedimiento.

$$\begin{aligned} a^4 + 3a^2 + 4 + a^2 - a^2 &= (a^4 + 4a^2 + 4) - a^2 \\ &= (a^2+2)^2 - a^2 \\ &= [(a^2+2)+a]\cdot[(a^2+2)-a] \\ &= (a^2+2+a)\cdot(a^2+2-a) \end{aligned}$$

Ejemplo 52. Factorizar $81x^4 + 4y^4$.

Solución. $81x^4 + 4y^4 = (9x^2)^2 + (2y^2)^2$

El doble producto es $2\,(9x^2)\,(2y^2) = 36x^2y^2$. Como $36x^2y^2$ tiene raíz cuadrada exacta, se suma y resta $36x^2y^2$:

$$\begin{aligned} 81x^4 + 4y^4 &= 81x^4 + 4y^4 + 36x^2y^2 - 36x^2y^2 \\ &= (81x^4 + 36x^2y^2 + 4y^4) - 36x^2y^2 \\ &= (9x^2 + 2y^2)^2 - 36x^2y^2 \\ &= [(9x^2 + 2y^2) + 6xy][(9x^2 + 2y^2) - 6xy] \\ &= (9x^2 + 6xy + 2y^2)(9x^2 - 6xy + 2y^2) \end{aligned}$$

## EJERCICIO 1.5

1. Dado un factor encontrar el factor $B$, si consideramos coeficientes reales:

   a. $3x^2 - 9x = \sqrt{3}\, x \cdot B$.

   b. $7x^2 - 12x^2 y = 7x^2 \cdot B$.

   c. $3(m+n)^2 - 5n(m+n) = \frac{1}{15}(m+n) \cdot B$.

2. Dado $ab+ac$ halle el factor común $a$ de tal manera que el factor $b+c$ contenga sólo coeficientes enteros.

   a. $x^2y - \dfrac{4}{15}xy^2$

   b. $\dfrac{3}{25}xy^2 - \dfrac{1}{5}x^2y^3z$

   c. $\dfrac{9}{16}x^2 - \dfrac{15}{4}x^3m$

   d. $\dfrac{1}{15}x^2 + 1$

En los ejercicios del 3 al 38 factorice la expresión dada.

3. $35m^2 n^3 - 70m^3$.
4. $24a^2 xy^2 - 36x^2 y^4$.
5. $x^4 y^3 z^2 + 3x^2 y^4$.
6. $(x+1)(x-2) + 3y(x-2)$.
7. $4x^2 - 4x - 3$.
8. $a^3 - a^2 x + ax^2$.
9. $1 - 9a^2 b^4 c^6 d^8$.
10. $a^6 - 125b^{12}$.
11. $x^{12} - y^{12}$.
12. $1 - 27a^3 b^3$.
13. $4x^{2n} - \frac{1}{9}$.
14. $16x^{6m} - \frac{y^{2n}}{49}$.

15. $a^{2n}b^{4n} - \frac{1}{25}$.
16. $1 - a^{3n+6}$.
17. $36n^2 - 42n + 10$.
18. $81x^2 - 27x - 180$.
19. $9x^2 - 8xy - y^2$.
20. $x^4 - 32x^2 + 256$.
21. $x^4 - 40x^2 + 144$.
22. $x^4 - 3x^2 - 340$.
23. $x^2 + 12xy + 32y^2$.
24. $x^2 - 6xy + 9y^2$.
25. $x^2 + 5xy - 50y^2$.
26. $m^2 - 2m - 168$.
27. $m^2 - 41m + 400$.
28. $x^2 + 12x - 364$.
29. $(7a+5b)^2 - 11(7a+5b) + 30$.
30. $1 + 12a^2b^2 - 6ab - 8a^3b^3$.
31. $a^6 + 3a^4b^3 + 3a^2b^6 + b^9$.
32. $3m - 2n - 2nx^2 + 3mx^2$.
33. $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$.
34. $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$.
35. $x - x^2 + x^3 - x^4$.
36. $a^6 - 3a^4 + 8a^3 - 4a^2$.
37. $a^2 + ab + ax + bx$.
38. $ax - 2bx - 2ay + 4by$.

### 1.7.1.5 Fracciones algebraicas

Las siguientes propiedades hacen referencia a fracciones de números reales, cuyo comportamiento es el mismo que el de los números racionales. Aquí veremos algunos ejemplos con fracciones algebraicas.

**Propiedad 18.** Para $a$, $b$ números reales con $b \neq 0$, $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$.

**Propiedad 19.** Para $a, b, c$ y $d$ números reales con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{db}$.

Ejemplo 53. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{8 + 3x}{4x}$.

La forma más simple de la propiedad 19 ocurre cuando $b = d$, lo cual facilita considerablemente las cosas:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Por ello, en la mayoría de las sumas de fracciones, lo que se busca es encontrar un común denominador. Para esto, necesitamos de antemano la siguiente propiedad:

**Propiedad 20.** Para $a$, $b$, y $c$ números reales con $b \neq 0$ y $c \neq 0$, $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$.

De un lado lo que se hace es simplificar y del otro, amplificar.

Ejemplo 54. Efectuar la suma: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{5x}{6}$.

Solución. Se puede hacer directamente así:

$$\frac{x}{3} + \frac{5x}{6} = \frac{6x + 15x}{18} = \frac{21x}{18} = \frac{3(7x)}{3(6)} = \frac{7x}{6}$$

Nótese que en el penúltimo paso se utilizó la propiedad 19 (al simplificar el 3). Por otro lado, el común denominador de la expresión resulta ser el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de 3 y 6, con lo cual

$$\frac{x}{3} + \frac{5x}{6} = \frac{2(x)}{2(3)} + \frac{5x}{6} = \frac{2x}{6} + \frac{5x}{6} = \frac{7x}{6}$$

Se ha de suponer de manera implícita que todos los denominadores de las fracciones son distintos de cero.

Ejemplo 55. Efectúe y simplifique: $\dfrac{x^2}{x^2 - 36} + \dfrac{5 - x}{x^2 - 12x + 36}$.

Solución.

$$\frac{x^2}{x^2 - 36} + \frac{5 - x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{x^2}{(x + 6)(x - 6)} + \frac{5 - x}{(x - 6)^2}$$

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de $(x + 6)$, $(x - 6)$ y $(x - 6)^2$, corresponde al producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, y éste es $(x + 6)\,(x - 6)^2$, por lo cual

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{(x + 6)(x - 6)} + \frac{5 - x}{(x - 6)^2} &= \frac{x^2(x - 6)}{(x + 6)(x - 6)^2} + \frac{(5 - x)(x + 6)}{(x - 6)^2(x + 6)} \\
&= \frac{x^2(x - 6) + (5 - x)(x + 6)}{(x + 6)(x - 6)^2} \\
&= \frac{x^3 - 6x^2 + 5x - x^2 + 30 - 6x}{(x + 6)(x - 6)^2} \\
&= \frac{x^3 - 7x^2 - x + 30}{(x + 6)(x - 6)^2}
\end{aligned}$$

Para hacer una resta de fracciones, utilizamos las propiedades 19 y 20 así:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}+\left(\frac{-c}{d}\right)=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

En realidad, lo que interesa es el último resultado.

Ejemplo 56. Efectuar: $\dfrac{x^2-5}{x^2-9}-\dfrac{x-3}{x+3}$.

Solución.
$$\begin{aligned}\frac{x^2-5}{x^2-9}-\frac{x-3}{x+3} &= \frac{x^2-5}{(x+3)(x-3)}-\frac{x-3}{x+3}\\ &= \frac{x^2-5}{(x+3)(x-3)}-\frac{(x-3)((x-3))}{(x+3)(x-3)}\\ &= \frac{(x^2-5)-(x-3)(x-3)}{(x+3)(x-3)}\\ &= \frac{6x-14}{x^2-9}\end{aligned}$$

Como se había dicho antes, también podemos utilizar la propiedad 20 para simplificar. Esto sugiere que tiene que hacerse algún tipo de factorización.

Ejemplo 57. $\dfrac{9x^2-y^2}{3x+y}=\dfrac{(3x-y)(3x+y)}{(3x+y)}=3x-y$.

Ejemplo 58. $\dfrac{2x+y}{8x^3+y^3}=\dfrac{(2x+y)}{(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)}=\dfrac{1}{4x^2-2xy+y^2}$.

Ejemplo 59. $\dfrac{a^5-b^5}{a-b}=\dfrac{(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)}{a-b}=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$.

Ejemplo 60. Simplificar: $\dfrac{24x^4y^2z}{8xy^2}$.

Solución. $\dfrac{24x^4y^2z}{8xy^2}=\dfrac{24}{8}\dfrac{x^3x}{x}\dfrac{y^2}{y^2}\dfrac{z}{1}=3\cdot x^3\cdot z=3x^3z$

Ejemplo 61. Simplificar: $\dfrac{72x^3y-60x^2y^2+18xy^3}{6xy}$.

Solución. $$\frac{72x^3y-60x^2y^2+18xy^3}{6xy}=\frac{72x^3y}{6xy}+\frac{-60x^2y^2}{6xy}+\frac{18xy^3}{6xy}$$
$$=\frac{72x^2xy}{6xy}+\frac{-60xxyy}{6xy}+\frac{18xyy^2}{6xy}$$
$$=12x^2\ -\ 10xy\ +\ 3y^2$$

Ejemplo 62. Simplificar: $\frac{(2x^2+y)^2-a(3x^2+y)}{3x^2\ +y}$.

Solución. $$\frac{(3x^2+y)^2\ -\ a(3x^2+y)}{3x^2+y}=\frac{(3x^2+y)^2}{3x^2+y}-\frac{a(3x^2+y)}{3x^2+y}$$
$$=(3x^2\ +y)-a$$

**Propiedad 21.** Para *a, b, c* y *d* números reales con $b\neq0$ y $d\neq0$, $\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

Ejemplo 63. Efectúe y simplifique: $\frac{m^2-49}{m^2-64}\cdot\frac{m^3-512}{m^2-10m+21}$.

Solución. $$\frac{m^2-49}{m^2-64}\cdot\frac{m^3-512}{m^2-10m+21}=\frac{(m^2-49)(m^3-512)}{(m^2-64)(m^2-10m+21)}$$
$$=\frac{(m+7)(m-7)(m-8)(m^2+8\mathrm{m}+64)}{(m+8)(m-8)(m-7)(m-3)}$$
$$=\frac{(m+7)(m^2+8m+64)}{(m+8)(m-3)}$$

**Propiedad 22.** Para *a, b, c* y *d* números reales con $b\neq0$, $c\neq0$ y $d\neq0$, $\frac{a}{b}/\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

La propiedad 22 es conocida popularmente como "ley de la oreja".

Ejemplo 64. Efectuar y simplificar: $\frac{y-8}{y-15}/\frac{y^2-64}{y-7}$.

Solución. $$\frac{y-8}{y-15} \Big/ \frac{y^2-64}{y-7} = \frac{(y-8)(y-7)}{(y-15)(y^2-64)} = \frac{(y-8)(y-7)}{(y-15)(y+8)(y-8)} = \frac{y-7}{y^2-7y-120}$$

Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división pueden combinarse. Una forma se da cuando aplicamos la propiedad distributiva. Otra, cuando en la fracción algebraica el numerador o el denominador contienen a su vez operaciones con fracciones algebraicas. En este caso, tenemos fracciones compuestas. Para simplificar una fracción compuesta, simplificamos el numerador y el denominador de manera independiente, y finalmente simplificamos la fracción algebraica que resulte.

Ejemplo 65. Simplificar: $\dfrac{1-\dfrac{b^2}{a^2}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}$.

Solución. $$\frac{1-\dfrac{b^2}{a^2}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}} = \frac{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}{\dfrac{a^2-b^2}{ab}} = \frac{(a^2-b^2)ab}{(a^2-b^2)a^2} = \frac{b}{a}$$

## EJERCICIO 1.6

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{x^{2n}-y^{2n}}{x^n+y^n}$.
2. $\dfrac{a^{2x+2}-100}{a^{x+1}-10}$.
3. $\dfrac{(x+y)^2-z^2}{(x+y)-z}$.
4. $\dfrac{(x+y)^8}{(x+y)^4}$.
5. $\dfrac{(4xy^2z)^4}{(-2x^2yz^3)^3}$.
6. $\dfrac{x^4y^2z^7}{2x^3y^4z^7}$.
7. $\dfrac{36a^{10}\,b^7}{-12a^2\,b^8}$.
8. $\dfrac{x^3\,y\,(3x^4+5)^3}{x^4\,y^9\,(3x^4+5)^7}$.

9. $\dfrac{-30a^2b^4 - 45a^2b^3}{-15a^2b^3}$.

10. $\dfrac{2ax+ay-4bx-2by}{ax-4a-2bx+8b}$.

11. $\dfrac{2a^2b-2ab^2}{4a^3-4a^2b}$.

12. $\dfrac{8n^3-125}{25-20n+4n^2}$.

13. $\dfrac{x-4-\frac{1}{x-4}}{x-2-\frac{9}{x-2}}$.

14. $\dfrac{x^2-3}{x^2-8x+12} + \dfrac{2x-1}{x^2-8x+12} - \dfrac{x+2}{x^2-8x+12}$.

15. $\dfrac{3x-2}{2x^2-5x-3} - \dfrac{x-2}{6x^2+x-1} - \dfrac{2x+2}{3x^2-10x+3}$.

16. $\dfrac{(x-y)^2-16}{3(x-y)^2-11(x-y)-4} \cdot \dfrac{6(x-y)^2-7(x-y)-3}{2(x-y)^2+5(x-y)-12}$.

17. $\dfrac{\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}}{\frac{y}{x-y}-\frac{x}{x+y}}$.

18. $\dfrac{\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}}{\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}}$.

### 1.7.1.6 Ecuaciones

Cuando se trata de resolver ecuaciones, el siguiente resultado puede resultar muy útil.

**Propiedad 23.** Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

Ejemplo especial 66. Los números reales no nulos $a$ y $b$ satisfacen la igualdad

$$\frac{a^2b^2}{a^4 - 2b^4} = 1$$

Encontrar todos los valores tomados por la expresión

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Solución. La primera igualdad se puede escribir como

$$a^2b^2 = a^4 - 2b^4$$
$$a^4 - 2b^4 - a^2b^2 = 0$$
$$(a^2 + b^2)(a^2 - 2b^2) = 0$$

Como $a^2+b^2>0$, queda sólo la posibilidad $a^2=2b^2$ (por la propiedad 23). Con lo cual $a^2-b^2=b^2$ y $a^2+b^2=3b^2$, por lo tanto

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^2}{3b^2} = \frac{1}{3}$$

1.7.1.6.1 **Ecuaciones lineales**

Una ecuación lineal en una variable $x$ es una ecuación de la forma $ax + b=0$. Para resolverla, aplicamos propiedades de los números reales, presumiendo que $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} ax + b + (-b) &= 0 + (-b) \\ ax + 0 &= -b \\ ax &= -b \\ \frac{1}{a}ax &= \frac{1}{a}(-b) \\ 1 \cdot x &= \frac{-b}{a} \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

La ecuación de primer grado con una incógnita tiene una sola solución: $x = -\dfrac{b}{a}$.

Ejemplo 67. Resolver: $3x + 11 = 5$.

Solución. Si sumamos el inverso aditivo de 11 en cada uno de los miembros de la ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} 3x + 11 + (-11) &= 5 + (-11) \\ 3x + 0 &= 5 - 11 \\ 3x &= -6 \end{aligned}$$

Al multiplicar cada uno de los miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de 3, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot 3x &= \frac{1}{3}(-6) \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Ejemplo 68. Despejar $x$: $\dfrac{2x + a}{bx - 2} = \dfrac{2}{5}$.

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{2x + a}{bx - 2} &= \frac{2}{5} \\ 5(2x + a) &= 2(bx - 2) \\ 10x + 5a &= 2bx - 4 \\ 10x - 2bx &= -4 - 5a \\ x(10 - 2b) &= -4 - 5a \\ x &= \frac{-4 - 5a}{10 - 2b} \end{aligned}$$

## EJERCICIO 1.7

En los ejercicios del 1 al 14 resuelva la ecuación para despejar $x$.

1. $3x - 7 = 12$.
2. $7 - 9x = 34$.
3. $2x - 5 = 7x + 4$.
4. $3x + 7 = 7x + 19$.
5. $y^2 + 3 - (y + 1)(y + 2) = 0$.
6. $3(x + 1) + x^2 = x^2 + 18$.
7. $\frac{1}{4}x = 10 - x$.
8. $\frac{2}{3}x + \frac{7}{5} = \frac{9}{2}$.
9. $\frac{x}{5} + \frac{x+5}{2} = 6$.
10. $\frac{x+5}{4} - \frac{3x}{2} = x$.
11. $3ax + 5a = 7a$.
12. $2(3x + 2a) - 3(x + 3a) = 4a$.
13. $ax + b + cx = d$.
14. $\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{b}$.
15. Despejar la incógnita indicada:

    a. $A = \frac{1}{2}bh$; despejar $b$.

    b. $A=P(1 + rt)$; despejar $t$.

    c. $h = \frac{1}{2}gt^2$; despejar $g$.

    d. $F = \frac{kmM}{d^2}$; despejar $m$.

    e. $F = \frac{9}{5}C + 32$; despejar $C$.

    f. $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$; despejar $a$.

    g. $\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$; despejar $t$.

    h. $\frac{ax+b}{cx-d} = 2$; despejar $x$.

### 1.7.1.6.2 Solución de problemas

Para resolver problemas que conducen al planteamiento de ecuaciones, se sugiere seguir los siguientes pasos.

1. Determinar las incógnitas y representarlas con variables.
2. Expresar algebraicamente en términos de la(s) variable(s) la información que proporciona el problema.
3. Plantear y resolver la ecuación.
4. Verificar si la solución dada cumple las condiciones del problema.

Ejemplo 69. El interés anual producido por \$24.000 excede en \$156 al producido por \$17.000. Si la tasa anual que se aplica a los \$17.000 es el 1,8% mayor que la aplicada a los \$24.000, ¿cuál es la tasa anual de interés aplicada a cada cantidad?

Solución.

1° Determinamos las incógnitas y las representamos con variables. Sea $x$% la tasa de interés anual que aplicamos a los \$24.000, por lo tanto $(x+1{,}8)$% será la tasa de interés anual que aplicamos a los \$17.000.

2° Expresamos algebraicamente en términos de la variable la información que proporciona el problema. El interés que producen los \$24.000 es: $24.000\frac{x}{100}$, y el interés que producen los \$17.000 es $17.000\frac{x+1{,}8}{100}$.

3° Planteamos la ecuación y la resolvemos. Como el interés que producen los \$24.000 excede en \$156 a los intereses que producen los \$17.000, tenemos:

$$24.000\cdot\frac{x}{100} - 17.000\cdot\frac{x+1{,}8}{100} = 156$$

Multiplicando por 100 y resolviendo, tenemos

$$\begin{aligned} 24.000x - 17.000(x+1{,}8) &= 15.600 \\ 24.000x - 17.000x - 30.600 &= 15.600 \\ 7.000x &= 15.600 + 30.600 \\ 7.000x &= 46.200 \\ x &= 46.200/7.000 \\ x &= 6{,}6 \end{aligned}$$

6,6% es la tasa de interés de los \$24.000 y 6,6% + 1,8% = 8,4% es el interés de los \$17.000.

4° Verificamos que la solución dada cumple las condiciones del problema. La tasa de interés que se aplica a los \$17.000 (8,4%) es 1,8% mayor que la aplicada a los \$24.000 (6,6%).

Al 6,6%, \$24.000 generan un interés de $24.000\cdot 0{,}066 = 1.584$; y al 8,4%, \$17.000 generan un interés de $17.000\cdot 0{,}084 = 1.428$ y el interés de los \$24.000 excede en \$156 al de los \$17.000: $1.584 - 1.428 = 156$.

Ejemplo 70. La base de un rectángulo es 3 metros menor que el doble de la altura, y el perímetro es de 42 m. Hallar las dimensiones del rectángulo.

Solución. Sea $x$ la altura. Como la base es 3 metros menor que el doble de la altura, la base es $(2x - 3)$. Como el perímetro es 42, planteamos la ecuación: $2x + 2(2x - 3) = 42$, de donde tenemos:

$$\begin{aligned} 2x + 4x - 6 &= 42 \\ 6x &= 48 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

La altura del rectángulo es de 8 m y la base es $2(8) - 3 = 13$. Dejamos al lector la verificación de la solución.

Ejemplo 71. ¿Qué número debe sumarse al numerador y al denominador de la fracción 25/73 para que resulte una fracción igual a 3/7?

Solución. Sea $x$ el número que hay que sumar, luego $\dfrac{25+x}{73+x}=\dfrac{3}{7}$, de donde

$$\begin{aligned} 7(25+x) &= 3(73+x) \\ 175+7x &= 219+3x \\ 7x-3x &= 219-175 \\ 4x &= 44 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

El número que debe sumarse tanto al numerador como al denominador es 11.

Ejemplo 72. El denominador de una fracción simple excede al numerador en 9. Si se suma 4 al numerador y 5 al denominador, la fracción es 2/3. Encontrar la fracción.

Solución. Sea $x$ el numerador de la fracción; entonces el denominador de la fracción es $x+9$. Por lo tanto la fracción es $\dfrac{x}{x+9}$. Al sumar 4 al numerador y 5 al denominador, obtenemos la fracción $\dfrac{x+4}{x+14}$. Como esta fracción es igual a $\dfrac{2}{3}$, planteamos la ecuación:

$$\frac{x+4}{x+14}=\frac{2}{3}$$

Resolviendo la ecuación tenemos que $x=16$, y la fracción es $\dfrac{16}{25}$.

Ejemplo 73. El dígito de las decenas de un número de dos cifras excede en 3 al de las unidades. Si el número se divide entre la suma de sus dígitos, el cociente es 6 y el residuo es 7. Hallar el número.

Solución. Sea $x$ el dígito de las unidades, por lo tanto $(x+3)$ es el dígito de las decenas. La cantidad que representa el número es:

$$(x+3)\cdot 10^1 + x\cdot 10^0 = 11x+30$$

La suma de los dígitos es $(x+3)+x = 2\,x+3$. Como el cociente entre el número $(11x+30)$ y la suma de los dígitos $(2x+3)$ es 6 y el residuo es 7, planteamos la ecuación:

$$\frac{11x+30}{2x+3}=6+\frac{7}{2x+3}$$

Si resolvemos la ecuación, tenemos que $x=5$, por lo tanto el número es 85.

Ejemplo 74. Si $A$ es capaz de realizar un trabajo en 3 días y $B$ puede realizarlo en 6 días, ¿cuánto demorarán efectuando juntos ese trabajo?

Solución. $A$ puede efectuar 1/3 del trabajo en 1 día. $B$ puede efectuar 1/6 del trabajo en 1 día. $A$ y $B$ juntos pueden hacer $1/x$ del trabajo en 1 día. Planteamos la ecuación

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$$

Al resolver la ecuación tenemos que $x = 2$. Por consiguiente, $A$ y $B$ emplearán 2 días para llevar a cabo el trabajo juntos.

Ejemplo 75. Un tanque se puede llenar, abriendo una llave, en 15 horas y se puede desocupar, abriendo un desagüe, en 20 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el tanque si la llave y el desagüe se abren simultáneamente?

Solución. La llave llena 1/15 del tanque en 1 hora. El desagüe desocupa 1/20 del tanque en 1 hora. Abriendo ambos simultáneamente, se llena $1/x$ del tanque en 1 hora. Planteamos la ecuación, teniendo en cuenta que en una hora la cantidad de líquido que hay en el tanque es igual a la que entra de la llave menos la que sale por el desagüe. Es decir:

$$\frac{1}{15}-\frac{1}{20}=\frac{1}{x}$$

Resolvemos la ecuación: $x = 60$. Por consiguiente, el tanque se llena en 60 horas.

Ejemplo especial 76. Un condenado quedaría en libertad al alcanzar el final de una escalera de 100 escalones. Pero no puede avanzar a su antojo, puesto que está obligado a subir un solo escalón cada día de los meses impares y a bajar un escalón cada día de los meses pares. Comienza el 1 de enero de 2001. ¿Qué día quedaría en libertad?

Solución. Se puede observar que el primer año va a moverse entre los escalones 1 y 36. El 36 lo alcanza el día 31 de julio. El 31 de diciembre de ese año llegará al escalón 3. En general, si un 31 de diciembre está en el escalón $n$, el año siguiente se mueve entre los escalones $n$+1 y $n$+36 y termina en el $n$+3, si ese año siguiente no es bisiesto. O bien, se mueve entre los escalones $n$+1 y $n$+35, y termina en el $n$+2, si ese año siguiente es bisiesto. Hacemos cuentas y vemos que el 31 de diciembre de 2024 llegará al escalón 66, tras haber pasado el 31 de julio de ese mismo año por el escalón 99 como punto más elevado. A partir de ahí, se observa lo siguiente respecto al año 2025: el 31 de enero termina en el escalón 97, el 28 de febrero en el 69 y el 31 de marzo termina finalmente en el 100.

## EJERCICIO 1.8

1. Halle un número tal que:

   a. su doble aumentado en 17 es igual a 71;
   b. su triple disminuido en 11 es igual a 64.

2. Halle dos números tales que:

   a. uno es la cuarta parte del otro y su suma es 250;
   b. el triple del menor excede al doble del mayor en 50 y su suma es 350;
   c. el menor es los 3/5 del mayor y su suma es 800.

3. Halle tres números tales que:

   a. sean enteros consecutivos y su suma sea 540;
   b. sean pares consecutivos y su suma sea 510.

4. Una persona tiene:

   a. $3.400 en monedas de $50 y $100. Si tiene en total 47 monedas, ¿cuántas monedas tiene de cada denominación?
   b. $99.000 en billetes de $1.000, $5.000 y $10.000; si tiene 26 billetes, y la cantidad de billetes de $1.000 es el doble de la de $5.000, ¿cuántos billetes tiene de cada denominación?

5. Usted invierte en bonos y acciones así:

   a. Invierte en total 84 millones de pesos. Si la tasa de interés mensual de los bonos es del 2,59% y la tasa de interés de las acciones es del 3,99%, y si la inversión total dejó una rentabilidad del 3,09% mensual, ¿cuánto invirtió en bonos y cuánto en acciones?
   b. Invierte en total 400 millones de pesos. La tasa de interés mensual de los bonos es del 2,79% y la tasa de interés de las acciones es del 3,09%. Si la inversión total dejó una rentabilidad mensual de $11’760.000, ¿cuánto invirtió en bonos y cuánto en acciones?

6. $A$ puede caminar cierta distancia en 20 minutos, y $B$ puede caminar la misma distancia en 30 minutos. Si $A$ parte 5 minutos después de $B$, ¿cuánto tiempo habrá estado caminando $B$, antes de que lo alcance $A$?

7. Se desea construir una caja abierta de base cuadrada. Si la altura es de 20 cm y la capacidad es de 12.500 $cm^3$, y si el $cm^2$ de la base tiene un costo de $12 y el de las caras laterales es $10, halle el costo de la caja.

8. Si el precio de venta de un lápiz es de $144 y el porcentaje de utilidad sobre el costo es igual al precio de costo, halle el precio de costo.

9. $A$ tarda 5 horas más que $B$ en realizar un mismo trabajo. Si trabajando juntos tardan 6 horas, ¿en cuánto tiempo hace cada uno el trabajo?

10. Un condenado quedaría en libertad al alcanzar el final de una escalera de 99 escalones. Pero no puede avanzar a su antojo, puesto que está obligado a subir un solo escalón cada día de los meses impares y a bajar un escalón cada día de los meses pares. Comienza el 1 de enero de 2001. ¿Qué día quedaría en libertad?

## 1.7.2 Axiomas de orden

Este grupo de axiomas se refiere a un concepto por el que se establece un orden entre los números reales. Según este orden, se puede decidir si un número real es mayor o menor que otro. Se introducen aquí las propiedades de orden como un conjunto de axiomas referentes al nuevo concepto primitivo de positivo, para definir después los conceptos de "mayor que" y "menor que", a partir del concepto de positivo.

Supondremos que existe un cierto subconjunto $\mathbb{R}^+$ de $\mathbb{R}$, llamado conjunto de números positivos. Los siguientes tres son los axiomas de orden, que hacen de $\mathbb{R}^+$ un cuerpo ordenado.

01. Si $x$ e $y$ pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces: $x + y$ y $x \cdot y$ pertenecen a $\mathbb{R}^+$ (la suma y el producto de números reales positivos son positivos).

02. Para todo número real $x \neq 0$, o bien $x \in \mathbb{R}^+$ o bien $-x \in \mathbb{R}^+$, pero no ambas.

03. $0 \notin \mathbb{R}^+ +$

Ahora podemos definir los símbolos <, >, ≤, ≥, llamados respectivamente "menor que", "mayor que", "menor o igual que", y "mayor o igual que", de la manera siguiente:

$$\begin{array}{lll} x < y & \text{significa que} & y - x \ \text{ pertenece a } \mathbb{R}^+ \\ y > x & \text{significa que} & x < y \\ x \leq y & \text{significa que} & x < y \ \text{ ó } \ x = y \\ y \geq x & \text{significa que} & x \leq y \end{array}$$

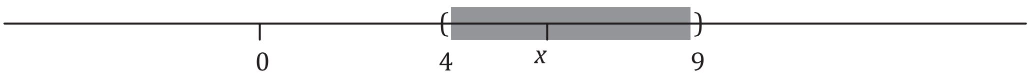
Por lo tanto, se tiene que $x > 0$ si y sólo si $x$ es positivo. Si $x < 0$ se dice que $x$ es negativo. Si $x \geq 0$ se dice que $x$ es no negativo.

El par de desigualdades simultáneas $x < y$ y $y < z$ se escriben frecuentemente en la forma más breve $x < y < z$. Interpretación análoga se da al par de desigualdades simultáneas $x \leq y$ y $y \leq z$, que se escribe así: $x \leq y \leq z$.

### 1.7.2.1 Intervalos

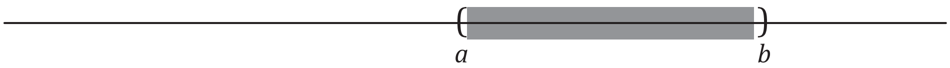
La representación geométrica de los números reales nos permite tener una imagen de lo siguiente:

i) Si $x$ está entre dos números reales, por ejemplo 4 y 9, se nota que $4 < x < 9$, y se representa así:




ii) El conjunto de todos los números reales comprendidos entre $a$ y $b$, que pueden ser

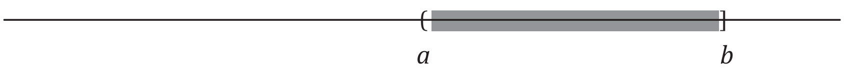
a. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, se denomina un intervalo abierto.




b. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, se denomina un intervalo cerrado.


c. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, se denomina un intervalo cerrado en $a$ y abierto en $b$.


d. $(a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, se denomina un intervalo abierto en $a$ y cerrado en $b$.



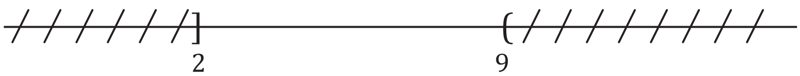

### 1.7.2.2 Operaciones entre intervalos

Como los intervalos son conjuntos de números reales podemos desarrollar las operaciones entre conjuntos.

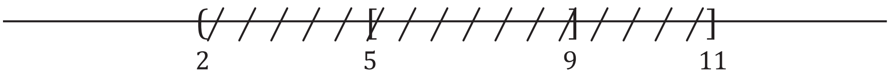
Ejemplo 77. Dados $A$=(2, 9], $B$=[5, 11], y $C$=[11, 18). Hallar $A^c$; $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cap C$; $B \cap C$.

Solución. Como $A = (2, 9] = \{x \mid x > 2 \ \text{ y } \ x \leq 9\}$, tenemos que

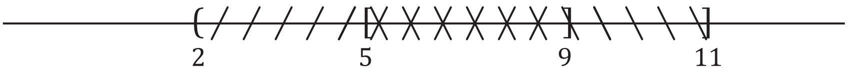
$A^c = \{x \leq 2 \text{ o } x > 9\} = (-\infty, 2] \cup (9, \infty)$



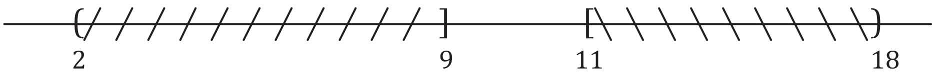
$A \cup B = (2, 9] \cup [5, 11] = (2, 11]$



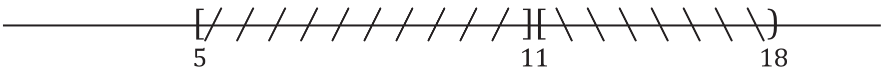

$A \cap B = (2, 9] \cap [5, 11] = [5, 9]$




$A \cap C = (2, 9] \cap [11, 18) = \Phi$




$B \cap C = [5, 11] \cap [11, 18) = \{11\}$




Ejemplo 78. Dados $A = (0, 1] \cup [5, 11]$ y $B = [-1, 1/2) \cup (6, \infty)$, hallar $A^c$; $A \cup B$; $A \cap B$.

Solución.

$A^c = (-\infty, 0] \cup (1, 5) \cup (11, \infty)$
$A \cup B = ((0,1] \cup [5, 11]) \cup ([-1,1/2) \cup (6,\infty)) = [-1, 1] \cup [5,\infty)$
$A \cap B = (0,1/2) \cup (6,11]$

El lector puede comprobar los anteriores resultados haciendo los respectivos gráficos.

## EJERCICIO 1.9

1. Exprese en la notación de intervalos, y represente en la recta real, los siguientes conjuntos:

a. $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 3\}$.

b. $\{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$.

c. $\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 5\}$.

d. $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 10\}$.

e. $\{x \in \mathbb{R} : 6 < x \leq 13\}$.

f. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -9\}$.

2. Exprese como conjunto los siguientes intervalos:

   a. $(-\infty, 3]$.

   b. $(-9, -5)$.

   c. $[-2, \infty)$.

   d. $[0, 5)$.

3. En los ejercicios siguientes represente en la recta real la expresión dada como un intervalo, y expréselo en notación de conjuntos.

   a. $\{x \in \mathbb{R} : x < 5 \text{ ó } x \leq -5\}$.

   b. $\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ y } x > -2\}$.

   c. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 6 \text{ y } x > 1\}$.

   d. $\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ y } x > 1\}$.

4. Efectúe:

   a. $[1, 2] \cap [-2, 3)$.

   b. $(0, \infty) \cup (-5, 0]$.

   c. $(-\infty, -2)^c \cap [-1, \infty)^c$.

   d. $((-3, 4)^c \cap (3, 7))^c$.

   e. $(-3, 5]^c \cap [-6, 8)$.

   f. $((-3, 1) \cup (4, 7))^c \cap (-1, 1]$.

5. Represente en la recta real cada uno de los conjuntos siguientes:

   a. $[-1, 2)^c$.

   b. $(-\infty, -1) \cap (-\infty, -4)$.

   c. $[3, 10] \cup (7, 9)$.

   d. $(0, 5) \cup (2, 7)$.

   e. $(0, \infty) \cap (2, \infty)$.

   f. $[3, 9) \cup (9, 12)$.

### 1.7.2.3 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado en la variable $x$ es una expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. Si se multiplica cada miembro por $a$, se tiene

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ (ax)^2 + abx + ac &= 0 \\ (ax)^2 + abx &= -ac \end{aligned}$$

Al sumar en cada miembro $b^2/4$

$$\begin{aligned} (ax)^2 + abx + b^2/4 &= -ac + b^2/4 \\ (ax + b/2)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4} \\ (ax + b/2)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4} &= 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

siempre que $b^2 - 4ac \geq 0$. Estas dos soluciones o raíces se recogen en la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La existencia y el número de soluciones dependen de la expresión $b^2 - 4ac$. Esta expresión se denomina discriminante y se nota por $D$.

Según sea el discriminante $D$, tenemos tres casos.

i) Si $D > 0$, entonces existen dos soluciones reales y diferentes.

Ejemplo 79. Resolver: $6x^2 - 5x - 6 = 0$.

Solución. En esta ecuación $a = 6$; $b = -5$; $c = -6$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-6)}}{2 \cdot 6} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{169}}{12} \end{aligned}$$

de donde se obtienen

$$x_1 = \frac{5+13}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{5-13}{12} = \frac{-8}{12} = \frac{-2}{3}$$

ii) Si $D=0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$, es decir, tenemos una solución real con multiplicidad de 2: $x = -\dfrac{b}{2a}$

Ejemplo 80. Resolver: $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

Solución. En esta ecuación $a = 9$; $b = -12$; $c = 4$ .

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{2 \cdot 9} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{0}}{18} \end{aligned}$$

de donde se obtienen

$$x_1 = x_2 = \frac{12+0}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

iii) Si $D < 0$, no existe solución en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 81. Resolver: $4x^2 + 20x + 41 = 0$.

Solución. En esta ecuación, $a = 4$; $b = 20$; $c = 41$, luego

$$\begin{aligned} x &= \frac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 41}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 656}}{8} \\ &= \frac{-20 \pm \sqrt{-256}}{8} \end{aligned}$$

no existe en el conjunto de los números reales, porque $\sqrt{(-256)} \notin \mathbb{R}$.

Ejemplo especial 82. Sean $a, b, c$ números reales no nulos con $a \neq b$. Suponga que las ecuaciones $x^2 + ax + bc = 0$ y $x^2 + bx + ac = 0$ tienen una raíz común. Verificar que las restantes raíces satisfacen la ecuación $x^2 + cx + ab = 0$.

Solución. Sean $x_1$ y $x_2$ las raíces de la ecuación $x^2 + ax + bc = 0$ y $x_1$ y $x_3$ las raíces de la ecuación $x^2 + bx + ac = 0$; es decir:

$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + ax + bc$ y $(x - x_1)(x - x_3) = x^2 + bx + ac$.

$x_1$ debe satisfacer la ecuación $x^2 + ax + bc - (x^2 + bx + ac) = 0$, de donde resulta:

$$\begin{aligned}(a - b)\, x_1 - (a - b)\, c &= 0\\ (a - b)\,(x_1 - c) &= 0\\ x_1 &= c, \text{ pues } a - b \neq 0\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}(x-c)(x-x_2) &= x^2+ax+bc & \text{y} && (x-c)(x-x_3) &= x^2+bx+ac\\ x^2+(-c-x_2)x+cx_2 &= x^2+ax+bc & \text{y} && x^2+(-c-x_3)+cx_3 &= x^2+bx+ac\\ cx_2 &= bc & \text{y} && cx_3 &= ac\\ x_2 &= b & \text{y} && x_3 &= a\end{aligned}$$

Tenemos que verificar que $x^2 + cx + ab = (x - x_2)(x - x_3) = (x - b)(x - a) = 0$. Pero

$$\begin{aligned}(x-b)(x-a) &= 0\\ x^2+(-b-a)x+ab &= 0\end{aligned}$$

es decir, debemos ver que $-b - a = c$. Pero $c$ satisface la ecuación $x^2 + ax + bc = 0$, es decir,

$$\begin{aligned}c^2+ac+bc &= 0\\ c(c+a+b) &= 0\\ c+a+b &= 0, \text{pues } c \text{ es positivo}\\ c &= -b-a\end{aligned}$$

con lo cual se tiene el resultado deseado.

Existen otras ecuaciones cuya solución conduce a resolver una ecuación de segundo grado. Se denominan ecuaciones con radicales.

Ejemplo 83. Resolver: $\sqrt{(5x + 1)} = \sqrt{(x + 1)} + 2$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{5x+1})^2 &= (\sqrt{x+1}+2)^2\\
5x+1 &= x+1+4\sqrt{x+1}+4\\
5x-x+1-1-4 &= 4\sqrt{x+1}\\
4x-4 &= 4\sqrt{x+1}\\
x-1 &= \sqrt{x+1}\\
(x-1)^2 &= (\sqrt{x+1})^2\\
x^2-2x+1 &= x+1\\
x^2-3x &= 0\\
x(x-3) &= 0
\end{aligned}
$$

de donde $x=0$ ó $x=3$; al verificar estos valores encontramos que $x=3$ es solución, pero con $x=0$, resulta

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5\cdot 0+1} &= \sqrt{0+1}+2\\
\sqrt{1} &= \sqrt{1}+2
\end{aligned}
$$

Como sólo se consideran raíces positivas, tenemos que $1\neq 3$, y por lo tanto $x=0$ no es solución.

Ejemplo especial 84. Analizar la existencia de soluciones para la ecuación

$$\sqrt{(x^2-p)}+2\sqrt{(x^2-1)}=x$$

según los valores del parámetro real $p$, y resolverla siempre que sea posible.

Solución. Si $p<0$ entonces $\sqrt{(x^2-p)}>x$ y como $2\sqrt{(x^2-1)}>0$, la ecuación no tiene solución. Por tanto se debe tener $p\geq 0$. Al despejar uno de los miembros de la ecuación y elevar al cuadrado a ambos lados, tenemos

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{x^2-1} &= x-\sqrt{x^2-p}\\
4x^2-4 &= x^2-2x\sqrt{x^2-p}+x^2-p\\
2x\sqrt{x^2-p} &= -2x^2+4-p
\end{aligned}
$$

Elevamos nuevamente al cuadrado:

$$
\begin{aligned}
4x^2(x^2-p) &= 4x^4-4x^2(4-p)+16-8p+p^2\\
4x^4-4x^2p &= 4x^4-16x^2+4x^2p+16-8p+p^2\\
0 &= 16x^2-8x^2p-16+8p-p^2\\
8x^2(2-p) &= (p-4)^2\\
x &= \frac{|p-4|}{\sqrt{8(2-p)}}
\end{aligned}
$$

Una nueva restricción es que $p < 2$, así pues

$$x = \frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$$

Sustituimos en la ecuación original

$$\sqrt{\frac{(4-p)^2}{8(2-p)} - p} + 2\sqrt{\frac{(4-p)^2}{8(2-p)} - 1} = \frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$$

o de manera equivalente

$$\sqrt{\frac{(4-3p)^2}{8(2-p)}} + 2\sqrt{\frac{p^2}{8(2-p)}} = \frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$$

de donde

$$\frac{|4-3p|}{\sqrt{8(2-p)}} + \frac{2p}{\sqrt{8(2-p)}} = \frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$$

por lo tanto

$$|4-3p| + 2p = 4-p$$
$$|4-3p| = 4-3p$$

de donde se sigue que $4 - 3p \geq 0$, con lo cual $0 \leq p \leq 4/3$.

## EJERCICIO 1.10

En los ejercicios del 1 al 16 resuelva la ecuación dada.

1. $x^2 - 4x + 2 = 0$.
2. $6x^2 - 5x - 6 = 0$.
3. $x^2 + 5x + 3 = 0$.
4. $x^2 - 8x + 3 = 0$.
5. $x^2 - 6x + 13 = 0$.
6. $9x^2 - 6x + 10 = 0$.
7. $x^3 - 1 = 0$.
8 $x^2 - 2bx + b^2 + m^2$.
9. $x^6 - 64 = 0$.
10. $x^4 - 81 = 0$.
11. $\sqrt{(x+2)} + \sqrt{(9x+7)} = 7$.
12. $\sqrt{(x+2)} - \sqrt{(x+7)} = -1$.
13. $\sqrt{(x^2 - 3x + 4)} = 2$.
14. $\sqrt{(x+2)} + \sqrt{(2x+5)} = 5$.
15. $\sqrt{(x+6)} + x - 6 = 0$.
16. $\sqrt{(x+3)} - \sqrt{(x+8)} + 1 = 0$.
17. Halle una ecuación que tenga como solución:
    a. $x = 3$ ó $x = -5$;
    b. $x = 1/2$ ó $x = -2/3$;
    c. $x = -5$ y con multiplicidad de 2;
    d. $x = 2 + \sqrt{2}$ ó $x = 2 - \sqrt{2}$.
18. Encuentre los números $x$ tales que

$$x = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/2}$$

### 1.7.2.4 Desigualdades de primer grado

Las siguientes dos propiedades son útiles cuando se trata de resolver desigualdades.

**Propiedad 24.** Si $x < y$, entonces $x + z < y + z$.

**Propiedad 25.** Si $x < y$ y $z > 0$, entonces $xz > yz$. Y su versión dual: si $x < y$ y $z < 0$, entonces $xz < yz$.

Al resolver la desigualdad $a_1 x + a_0 > 0$ ($a_1 \neq 0$), se tiene que

$$\begin{aligned} a_1x + a_0 &> 0 \\ a_1x + a_0 + (-a_0) &> 0 + (-a_0) \\ a_1x &> -a_0 \end{aligned}$$

Si $a_1 > 0$ entonces $x > -\frac{a_0}{a_1}$, por lo tanto $x \in \left(-\frac{a_0}{a_1}, \infty\right)$.
Si $a_1 < 0$ entonces $x < -\frac{a_0}{a_1}$, por lo tanto $x \in \left(-\infty, -\frac{a_0}{a_1}\right)$.

Ejemplo 85. Resolver $2x + 7 > 15$.

Solución.

$$\begin{aligned} 2x + 7 + (-7) &> 15 + (-7) \\ 2x &> 8 \end{aligned}$$

Como $2 > 0$,

$$\frac{1}{2} \cdot 2x > \frac{1}{2} \cdot 8$$

$x > 4$, es decir, $x \in (4, \infty)$

Ejemplo 86. Resolver $-2x + 9 > 17$.

Solución.

$$\begin{aligned} -2x + 9 + (-9) &> 17 + (-9) \\ -2x &> 8 \end{aligned}$$

Como $-1/2 < 0$ entonces $-\frac{1}{2}(-2x) < -\frac{1}{2} \cdot 8$

$x < -4$ es decir $x \in (-\infty, -4)$

Ejemplo 87. Resolver: $-3x + 7 > 0$ y $5x + 7 > 0$.

Solución.

$-3x + 7 > 0$ y $5x + 7 > 0$
$x < 7/3$ y $x > -7/5$
$x \in (-\infty, 7/3) \cap (-7/5, \infty) = (-7/5, 7/3)$

### 1.7.2.5 Desigualdades de segundo grado

Las siguientes dos propiedades se utilizan en la solución de ciertas desigualdades.

**Propiedad 26.** Si $xy > 0$, entonces i) $x > 0$ y $y > 0$
ii) $x < 0$ y $y < 0$.

**Propiedad 27.** Si $x\,y < 0$, entonces i) $x > 0$ y $y < 0$
ii) $x < 0$ y $y > 0$.

Como se puede apreciar, estas propiedades presuponen factorizar y comparar con el cero. Para resolver $ax^2 + bx + c > 0$, se debe considerar:

1. Si $ax^2 + bx + c$ tiene discriminante $D = b^2 - 4ac \geq 0$, se puede factorizar sobre los reales:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2}\right)$$

Ejemplo 88. Resolver $x^2 - 3x - 10 > 0$.

Solución. $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)\,(x + 2) > 0$

Como tenemos dos factores $x - 5$ y $x + 2$, para que su producto sea positivo o mayor que cero, es necesario que ambos factores sean positivos o ambos factores sean negativos, según la propiedad 25; es decir,

$$((x-5) > 0 \ \text{ y } \ (x+2) > 0)) \ \text{ o } \ ((x-5) < 0 \ \text{ y } \ (x+2) < 0\,))$$
$$(x > 5 \ \text{ y } \ x > -2) \ \text{ o } \ (x < 5 \ \text{ y } \ x < -2)$$


$$x \in (5, \infty) \ \text{ o } \ x \in (-\infty, -2)$$
$$x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty)$$

Existe un método gráfico que consiste en determinar el intervalo para el cual cada uno de los factores es positivo. El complemento de este intervalo, desde luego, corresponde al intervalo en el que el factor es negativo o cero; veamos:

Ejemplo 89. Resolver $x^2 - 3x - 10 > 0$.

Solución. $(x-5)(x+2) > 0$

¿Cuándo $x - 5 > 0$? Si $x - 5 > 0$, entonces $x > 5$. Es decir, $x - 5$ es positivo cuando $x > 5$. ¿Cuándo $x + 2 > 0$? Si $x + 2 > 0$, entonces $x > -2$. Es decir, $x + 2$ es positivo cuando $x > -2$. Graficamos y tenemos:

| | $-2$ | $5$ | |
|---|---|---|---|
| $(x-5)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(x+2)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(x+2)(x-5)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Observemos que $(x - 5)(x + 2)$ es positivo en $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$.

Los valores en los que cambia de signo la desigualdad se denominan valores críticos y corresponden a las raíces del polinomio.

2. Si el discriminante de la expresión cuadrática es negativo, es decir, $b^2 - 4ac < 0$, la cuadrática es irreducible y en este caso se tendría que:

   i) si $a > 0$, entonces $ax^2 + bx + c > 0$ para todo $x$ real;
   ii) si $a < 0$, entonces $ax^2 + bx + c < 0$ para todo $x$ real.

**Ejemplo 90.** $x^2 + 4 > 0$ se cumple para cualquier número real.

**Ejemplo 91.** $-x^2 + 6x > 10$ no tiene solución en los reales.

**Ejemplo 92.** Resolver: $\dfrac{7 - x}{x^2 - 9} \geq 0.$

**Solución.**

$$\frac{7 - x}{(x + 3)(x - 3)} \geq 0$$

¿Cuándo $7 - x > 0$? Si $7 - x > 0$ tenemos que $-x > -7$; por lo tanto $x < 7$. Es decir, $7 - x$ es positivo cuando $x < 7$. ¿Cuándo $x + 3 > 0$? Si $x + 3 > 0$, entonces $x > -3$. Es decir, $x + 3$ es positivo cuando $x > -3$. ¿Cuándo $x - 3 > 0$? Si $x - 3 > 0$, entonces $x > 3$. Es decir, $x - 3$ es positivo cuando $x > 3$. Graficamos y tenemos:

| | $-3$ | $3$ | $7$ | |
|---|---|---|---|---|
| $(7 - x)$ | + | + | + | − |
| $(x - 3)$ | − | − | + | + |
| $(x + 3)$ | − | + | + | + |
| $\dfrac{(7 - x)}{(x - 3)(x + 3)}$ | + | − | + | − |

Por lo tanto, el conjunto solución es : $(-\infty, -3) \cup (3, 7]$

## EJERCICIO 1.11

Resuelva las siguientes desigualdades:

1. $2x + \dfrac{6-3x}{4} < 4$.
2. $3x + 8 \geq \dfrac{3x+2}{4} + \dfrac{2-x}{5}$.
3. $2x - 1 > 7 - 2x$ ó $2x < -4$.
4. $(2x + 4 < 0$ ó $5x > 20)$; y $(x > -5$ y $3x - 17 < 4)$.
5. $(x + 7)(x - 2) \geq 0$.
6. $(2x - 9)(x + 1) < 0$.
7. $(5x - 7)^2 > 0$.
8. $x^2 + 7x < 8$.
9. $x^3 - x < 0$.
10. $x^4 - 3x^3 + 2x^2 > 0$.
11. $\dfrac{1}{x} < x$.
12. $x + \frac{1}{x} \geq 1$.
13. $\frac{(x+4)(x-1)}{3x-4} \geq 1$.
14. $\dfrac{(x+1)^2}{x} > 0$.
15. $\dfrac{x-2}{x+1} < 3$ y $\dfrac{3-x}{x-2} < 5$.
16. $\dfrac{x+2}{x-1} < 7$ ó $\dfrac{3x}{x-2} \geq 7$.
17. $x(3x - 1) - (3x - 2)(x + 1) > 2$; y $x(2x - 1) - (x + 4)(2x + 3) \leq 0$.

### 1.7.2.6 Problemas de aplicación

Ejemplo 93. El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce a \$60.000 cada artículo. Gasta \$40.000 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo y tiene costos fijos de \$3’000.000 a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos 1’000.000 a la semana.

Solución. Sea $x$ el número de artículos producidos y vendidos a la semana. El costo total de producir $x$ unidades es de \$3’000.000 más \$40.000 por artículo, es decir:

$$\text{Costo total} = 40.000x + 3'000.000$$

El ingreso obtenido por vender $x$ unidades a \$60.000 cada una es de $60.000x$.

$$\begin{aligned} \text{Utilidad} &= \text{Ingreso total} - \text{Costo total} \\ \text{Utilidad} &= 60.000x - (40.000x + 3'000.000) \\ \text{Utilidad} &= 20.000x - 3'000.000 \end{aligned}$$

Como deseamos obtener una ganancia de al menos 1'000.000 al mes, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} 20.000x - 3'000.000 &\geq 1'000.000 \\ 20.000x &\geq 4'000.000 \\ x &\geq 200 \end{aligned}$$

En consecuencia, el fabricante deberá producir y vender al menos 200 unidades cada semana. Nótese que la variable $x$ es discreta: $x \in \{200, 201, 202, 203, ...\}$.

Ejemplo 94. El administrador de una fábrica debe decidir el hecho de producir sus propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo a proveedores externos a $1.100 cada uno. La fabricación de los empaques incrementaría los costos generales de la empresa en $800.000 al mes, y el costo de material y de mano de obra es de $600 por cada empaque. ¿Cuántos empaques deberá utilizar la empresa al mes, para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?

Solución. Sea $x$ el número de empaques utilizados por la empresa al mes. El costo de adquirir $x$ empaques a $1.100 cada uno es $1.100x$. Como el costo de fabricar $x$ empaques es de $600 cada uno, y los costos fijos para su fabricación son de $800.000 al mes, el costo total de fabricación es $600x+800.000$. Para justificar la fabricación de los empaques en la empresa misma, el costo de fabricación en la empresa debe ser menor que el costo de adquisición a proveedores; es decir,

$$\begin{aligned} 1.100x &> 600x + 800.000 \\ 1.100x - 600x &> 800.000 \\ 500x &> 800.000 \\ x &> 1.600 \end{aligned}$$

En consecuencia, la empresa debe requerir al menos 1.601 empaques al mes para justificar su fabricación.

Ejemplo 95. La edición de una revista mensual tiene un costo de $6.050 cada una. El ingreso por ventas es de $7.000 el ejemplar. Si se venden más de 20.000 revistas, por cada revista adicional a las 20.000 se reciben $1.050 por publicidad. ¿Cuántos ejemplares deberán publicarse y venderse al mes para asegurar una utilidad de por lo menos 40'000.000?

Solución. Sea $x$ el número de revistas producidas y vendidas. Como la utilidad por revista es 7.000—6,050=950, si se venden 20.000 revistas, la utilidad es de 19'000.000. Como se quiere asegurar una utilidad de por lo menos 40'000.000, tenemos que: $x > 20.000$.

$$\begin{aligned} \text{Ingreso total} &= 7.000x + 1.050(x - 20.000) \\ &= 8.050x - 21'000.000 \\ \text{Costo Total} &= 6.050x \\ \text{Utilidad} &= \text{Ingreso Total} - \text{Costo Total} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(8.050x - 21‘000.000) - 6.050x &> 40‘000.000\\ 2.000x &> 61‘000.000\\ x &> 30.500\end{aligned}$$

Luego se deben vender al menos 30.501 revistas al mes para asegurar una utilidad que sobrepase los 40’000.000.

## EJERCICIO 1.12

1. Un fabricante puede vender todas las unidades de un artículo que produce a \$7.600 cada una. Si tiene unos costos fijos de \$4’700.000 y unos costos variables por unidad de \$4.400, ¿cuántos artículos debe producir para obtener utilidad?

2. El costo $C$ de producir $x$ artículos, incluyendo los costos fijos y los costos variables, está dado por la fórmula $C = 20x + 16.000$. ¿Cuántos artículos se pueden producir, si el costo debe ser menor que \$17.100?

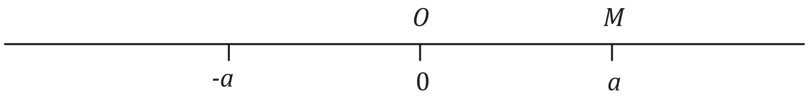
3. Una compañía vende un producto al precio unitario $p = 600 - 0{,}5x$ pesos, donde $x$ es el número de unidades del producto vendido. ¿Cuántas unidades se deben vender para que el ingreso por la venta de este producto sea mayor que \$100.000?

4. El costo de publicar cada ejemplar de un periódico semanal es de \$350. Los ingresos del representante de ventas son de \$300 por ejemplar y los ingresos de publicidad corresponden al 40% de los ingresos obtenidos por ventas que excedan los 200.000 ejemplares. ¿Cuántos periódicos se deberán publicar cada semana para obtener utilidades semanales de al menos \$1’000.000?

5. Una firma industrial fabrica un producto con precio unitario de venta de \$16.000 y un costo unitario de \$12.000. Si los costos fijos son de \$48’000.000, determine el número mínimo de unidades que se deben vender para que la compañía obtenga utilidad.

### 1.7.2.7 Valor absoluto

En los 10 axiomas vistos hasta ahora sobre los números reales, se hace referencia a las características algebraicas de los números reales. Otro concepto importante es el de distancia. Como geométricamente la representación de los números reales se hace por puntos de una recta, se elige un punto $O$ para representar el cero y otro a la derecha del cero para representar el 1. Esta elección determina la escala y de acuerdo con esta escala, dado un punto $M$ le asignamos el número real $a$. Si $a$ es positivo, el número real que le corresponde geométricamente mide la longitud del segmento $OM$ y la distancia entre $O$ y $M$. Observe que la distancia entre 0 y $a$ es la misma que entre 0 y $-a$; este hecho geométrico sugiere la siguiente definición:




**Definición 1.** Si $a$ es un número real, el valor absoluto de $a$, que se nota $|a|$, se define como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 96. $|-7| = -(-7) = 7$, pues $-7$ es negativo.

Ejemplo 97. $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$, pues $3 - \pi$ es negativo.

Ejemplo 98. $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$, pues $2 - \sqrt{2}$ es positivo.

**Propiedades**

0. $|x| \geq 0$ y $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
1. $|x| = |-x|$.
2. $|x - y| = |y - x|$.
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $y \neq 0$.
5. $|x+y| \leq |x| + |y|$. (Desigualdad triangular)
6. $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$. Vale también si cambiamos $<$ por $\leq$.
7. $|x| > a$ si y sólo si $x < -a$ ó $x > a$. Vale también si cambiamos $>$ por $\geq$.
8. Si $a \geq 0$, $|x| = a$ si y sólo si $x = a$ ó si $x = -a$.
9. $|x| < |y|$ si y sólo si $x^2 < y^2$. Vale también si cambiamos $<$ por $\leq$.

Las propiedades 0, 2 y 5 caracterizan plenamente lo que se conoce como una distancia o métrica, en este caso sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 99. Hallar $x$ si $|2x-7|=5$.

Solución. Si $|2x-7|=5$ esto significa que $2x-7=5$ ó $2x-7=-5$, según la propiedad 8. Si sumamos a cada lado 7, tenemos: $2x=12$ ó $2x=2$. Multiplicamos a cada lado por $1/2$ y obtenemos $x=6$ ó $x=1$.

Ejemplo 100. Resolver $|2x+5|=9$.

Solución. Nuevamente por la propiedad 8, de $|2x+5|=9$, se desprende que:

$$2x+5=9 \text{ ó } 2x+5=-9$$
$$x=2 \text{ ó } x=-7.$$

El conjunto solución de la ecuación es $\{2,-7\}$.

Ejemplo 101.

$$\begin{aligned} |(-4)\cdot 7| &= |(-4)|\cdot|7| \\ |-28| &= 4\cdot 7 \\ 28 &= 28 \end{aligned}$$

## EJERCICIO 1.13

1. Encuentre los valores de las siguientes expresiones:

a. $|8|+|-3|$.

b. $|-9|\cdot|3|$.

c. $\frac{|360|}{|-12|}$.

d. $\frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|}{\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|}$.

e. $\frac{\left|\frac{a}{b}\right|}{\left|-\frac{a}{b}\right|}, a\neq 0, b\neq 0$.

f. $\frac{|-6-12|}{|6+3|}$.

2. Halle los valores de $x$ tales que:

a. $|x-3|=2$.

b. $|x-3|=12$.

c. $|3x+1|=3$.

d. $|x+1|=5$.

e. $|2x+7|=9$.

f. $|3x-6|=18$.

### 1.7.2.8 Desigualdades con valor absoluto

Ejemplo 102. Resolver $|2x - 5| < 7$.

Solución. De acuerdo a la propiedad 6 del valor absoluto, si tomamos $x$ como $2x - 5$ y $a$ como 7, $|2x - 5| < 7$ es equivalente a:

$$\begin{aligned} -7 &< 2x - 5 < 7 \\ -7 + 5 &< 2x < 7 + 5 \\ -2 &< 2x < 12 \\ -1 &< x < 6 \\ x &\in (-1,6) \end{aligned}$$

Ejemplo 103. Resolver: $|7 - 3x| \geq 8$.

Solución. Por la propiedad 7 del valor absoluto, $|7 - 3x| \geq 8$ significa que:

$$\begin{array}{rlcrl} 7 - 3x & \geq 8 & \text{ó} & 7 - 3x & \leq -8 \\ -3x & \geq 8 - 7 & \text{ó} & -3x & \leq -8 - 7 \\ -3x & \geq 1 & \text{ó} & -3x & \leq -15 \\ 3x & \leq -1 & \text{ó} & 3x & \geq 15 \\ x & \leq -1/3 & \text{ó} & x & \geq 5 \end{array}$$

$$x \in \left(\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[5, \infty\right)\right)$$

Ejemplo 104. Resolver: $\left|\dfrac{x-4}{2x-3}\right| < 2$.

Solución. Nótese que se debe tener $x \neq 3/2$, con lo cual, resolver la desigualdad previa sería equivalente a resolver

$|x - 4| < 2\,|2x - 3| = |4x - 6|$

y con la propiedad 9 del valor absoluto, tenemos que resolver

$(x - 4)^2 < (4x - 6)^2$

de donde

$$\begin{aligned} (x-4)^2 - (4x-6)^2 &< 0 \\ (x - 4 - (4x - 6))(x - 4 + (4x - 6)) &< 0 \\ (-3x + 2)(5x - 10) &< 0 \end{aligned}$$

y esta última desigualdad se resuelve fácilmente por el método gráfico: $-3x + 2>0$ siempre que $x < 2/3$; y $5x - 10 > 0$ siempre que $x > 2$; de tal forma que el gráfico nos queda así:

| | 2/3 | 2 | |
|---|---|---|---|
| $(-3x + 2)$ | + | − | − |
| $(5x - 10)$ | − | − | + |
| $(-3x + 2)(5x - 10)$ | − | + | − |

con lo cual tenemos que la solución de la desigualdad es $(-\infty, 2/3) \cup (2, \infty)$.

Ejemplo 105. Resolver: $|x - 4| + |x - 2| > 3$.

Solución. Consideremos los siguientes casos:

i) Supongamos que $x - 4 \geq 0$ y $x - 2 \geq 0$; es decir, $x \geq 4$. Esto significa que la solución que obtengamos abajo está restringida al hecho de que $x \geq 4$. En este caso, la desigualdad se transforma en

$$\begin{aligned} (x-4)+(x-2) &> 3 \\ 2x-6 &> 3 \\ x &> 9/2 \end{aligned}$$

pero como $x \geq 4$, la solución en este caso es $(9/2, \infty)$.

ii) Supongamos que $x - 4 \geq 0$ y $x - 2 \leq 0$; en este caso no hay soluciones.

iii) Supongamos que $x - 4 \leq 0$ y $x - 2 \geq 0$; es decir, $x \leq 2$. La desigualdad original se convierte en

$$\begin{aligned} -(x-4)+(x-2) &> 3 \\ 2 &> 3 \end{aligned}$$

pero esto último es absurdo; es decir, que para este caso no hay solución.

iv) Supongamos que $x - 4 \leq 0$ y $x - 2 \leq 0$; es decir $2 \leq x \leq 4$. La desigualdad original se convierte en

$$\begin{aligned} -(x-4)-(x-2) &> 3 \\ -2x+6 &> 3 \\ -2x &> -3 \\ x &< 3/2 \end{aligned}$$

pero recordemos que $2 \leq x \leq 4$. Después de intersectar estos dos conjuntos, $(-\infty, 3/2)$ y $[2, 4]$, llegamos a que la solución es el conjunto vacío. La solución final sería la unión de las soluciones dadas desde i) hasta iv), que para nuestro caso sería $(9/2, \infty)$.

**Solución alternativa.**

Nótese que al final de cuentas resultaron tres casos. Éstos se pueden obtener así: igualamos cada miembro de los valores absolutos a cero; dan como resultado $x = 2$ ó $x = 4$, y éstos determinan tres intervalos de la recta real:

$x \leq 2;\ \ 2 \leq x \leq 4; x \geq 4$

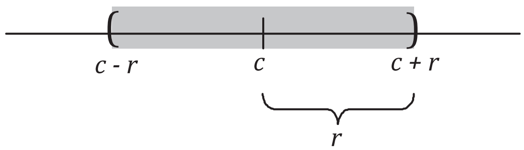
que son los casos en los que se analiza la desigualdad.

## Bolas

Un intervalo abierto $(a, b)$ puede verse como la solución de una desigualdad de la forma $|x - c| < r$, la cual recibe el nombre de bola abierta con centro en $c$ y de radio $r$. Se escribe así:

$$B\,(c; r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\}$$

En otras palabras, $B\,(c; r)$ no es más que el intervalo $(c - r, c + r)$ y gráficamente es




Volvemos a nuestro intervalo $(a, b)$, y lo expresamos como una bola abierta: $r$ sería la longitud del intervalo dividida por 2; así $r = \frac{b-a}{2}$ y el centro sería el punto medio entre $a$ y $b$; es decir, $c = \frac{a+b}{2}$. La bola abierta también se puede interpretar como el conjunto de puntos que equidistan de $c$ en menos que $r$. También se puede definir una bola cerrada con centro en $c$ y de radio $r$ así:

$$B\,[c; r] = \{x \in \mathbb{R} : |\, x - c \,| \leq r\} = [c - r, c + r]$$

Ejemplo 106. Expresar el conjunto de los $x$ que satisface $|2x - 5| < 7$ como una bola abierta.

Solución. $|2x + 5| < 7$, al dividir por 2 a ambos lados de la desigualdad tenemos:

$$\left|x + \frac{5}{2}\right| < \frac{7}{2} \text{ que equivale a } \left|x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right| < \frac{7}{2}$$

Es decir, el centro es $-\,5/2$ y el radio $r = 7/2$. En otras palabras, la bola abierta es la solución de la desigualdad original; esto es, el intervalo:

$$B\left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right) = (-5/2 - 7/2, -5/2 + 7/2) = (-6, 1)$$

El lector puede comprobar efectivamente que la solución de $|2x - 5| < 7$ es justamente el intervalo $(-\,6, 1)$.

## EJERCICIO 1.14

1. Resuelva y exprese la solución en forma de intervalo:

   a. $|x - 3| < 2$.

   b. $|2x + 5| < 3$.

   c. $|3 - 7x| \leq 6$.

   d. $|12 + 5x| \leq 1$.

   e. $x \leq |x|$.

   f. $|x| \leq x$.

   g. $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| < 4$.

   h. $|x+3| \leq |2\ x\ 6|$.

   i. $|3-2x| \leq |x+4|$.

   j. $|2x - 4| + 3 \geq x$.

   k. $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \geq 2$.

   l. $|(x + |x - 1|)| + |x| < 3$.

2. En cada una de las siguientes desigualdades exprese el conjunto de los $x$ que las satisfacen en términos de bolas.

   a. $|x - 3| > 2$.

   b. $|x - 3| \leq 2$.

   c. $|12x + 5| \leq 1\ 3$.

   d. $|x + 1| > 5$.

   e. $|2x + 7| < 9$.

   f. $|3x - 6| \geq 18$.

## 1.7.3 Intervalos y el axioma de completez

Hasta aquí, los axiomas que cumplen los números reales no los distinguen de los números racionales, puesto que éstos cumplen también los doce axiomas vistos. En realidad, esa diferencia la marca el axioma más importante de los números reales: el axioma de completez, también llamado "del extremo superior". Este axioma no lo satisface $\mathbb{Q}$. Dicho sea de paso, este axioma garantiza la existencia de números irracionales. Antes mencionaremos algunos conceptos previos. La siguiente propiedad es de origen geométrico.

**Propiedad arquimediana:** Si $a$ es un número real cualquiera, y $x > 0$, existe un número entero positivo $n$ tal que $nx > a$.

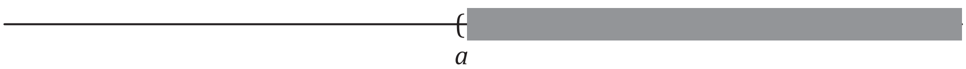
En términos geométricos, significa que dado un número real $a$ y un segmento de longitud $x$, por muy grande que sea $a$ y por pequeño que sea el segmento de longitud $x$, existe un entero n tal que $n$ veces $x$ supera la longitud de $a$.

## Conjuntos acotados

**Definición 2.** Sea $A$ un conjunto de números reales no vacío. $A$ es acotado superiormente, si existe un número real $b$ tal que para cualquier elemento $x$ de $A$ se tiene que $x \leq b$; de manera análoga se define un conjunto acotado inferiormente. $A$ es acotado si lo es superior e inferiormente.

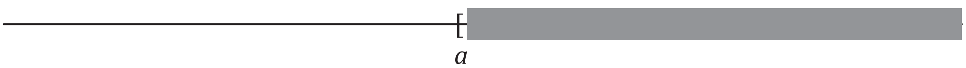
Puede verse que si $A$ es acotado, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq b$ para todo $x \in A$. Todo conjunto finito $A$ es acotado: basta tomar como cota superior al mayor elemento de $A$ (máx$A$) y como cota inferior al menor elemento de $A$ (mín$A$).

Ejemplo 107. Los números reales mayores que un número real $a$. Este conjunto, que se nota $(a, \infty)$, se denomina intervalo infinito abierto en $a$ y es acotado inferiormente.



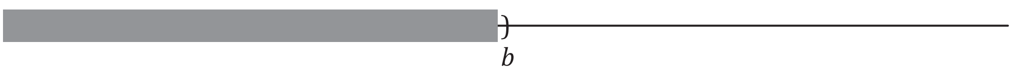

Ejemplo 108. Todo número real mayor o igual que un número real $a$. Este conjunto se nota $[a, \infty)$; se denomina intervalo infinito cerrado en $a$ y es acotado inferiormente.

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ x \geq a\}$$



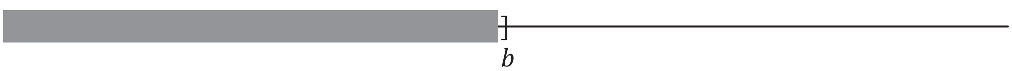

Ejemplo 109. Todo número real menor o igual que un número real $b$. Este conjunto se nota $(-\infty, b]$; se denomina intervalo infinito cerrado en $b$ y acotado superiormente.

$$(-\infty, b]=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$




Ejemplo 110. Los números reales menores que un número real $b$. Este conjunto se nota $(-\infty, b)$; se denomina intervalo infinito abierto en $b$ y acotado superiormente.

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$$



Ejemplo 111. Para el intervalo $(-\infty, 5)$, algunas cotas superiores son el 5, el 8 y la $\sqrt{703}$.

Ejemplo especial 112. ¿Existe algún conjunto finito de números reales $M$ que contenga al menos dos elementos distintos y que cumpla la propiedad de que para dos números $a$, $b$ cualesquiera de $M$, el número $2a-b^2$ sea también un elemento de $M$?

Solución (del estudiante español Víctor González Alonso de Burgos)

Como $M$ es finito, necesariamente estará acotado. Sea $x = \text{mín}M$ e $y = \text{máx}M$. Si se tuviera $x \leq 0$, entonces:

$$2x \leq x$$
$$2x - k^2 < x, \text{ para cualquier } k \in M$$

Pero $2x - k^2 \in M$, lo cual contradice el hecho de que $x$ es el mínimo de $M$. Por lo tanto, debe tenerse $x > 0$ y $0 < x < y$. Del razonamiento anterior, se deduce necesariamente que

i) $x \leq 2x - y^2 \leq y$ ii) $x \leq 2y - y^2 \leq y$

De la primera desigualdad de i) se tiene que

$$x \leq 2x - y^2$$
$$0 \leq x - y^2$$
$$y^2 \leq x < y$$

y esto último se tiene si $y \in (0, 1)$. De la segunda desigualdad de ii) se tiene que

$$2y - y^2 \leq y$$
$$y \leq y^2$$

Esta última desigualdad implica que $y \in [1,\infty)$. Como i) y ii) deben tenerse al mismo tiempo, no existe ningún $y$ que sea máximo de $M$, por lo tanto $M$ no es acotado y por ende no puede ser finito.

**Definición 3.** Si existe una cota superior $b$ que está en $A$, se dice que $b$ es el máximo de $A$.

Ejemplo 113. En el intervalo $(1, 7]$, 7 es el máximo. En el intervalo $(-\infty, 5)$ no existe un máximo. ¿Por qué?

**Definición 4.** La menor cota superior de $A$ se denomina el supremo de $A$ o cota superior mínima y se nota $Sup(A)$.

En otras palabras, $a$ es una cota superior mínima de $A$ si i) $a$ es cota superior de $A$ y ii) $a \leq b$ para cualquier otra cota superior $b$ de $A$. También se puede utilizar otra versión muy cómoda: $a$ es una cota superior mínima de $A$ si i) $a$ es cota superior de $A$ y ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $a - \varepsilon < x$. Se puede ver que si $A$ tiene Sup, éste es único.

**Definición 5.** La mayor cota inferior de $A$ se denomina el ínfimo de $A$ o cota inferior máxima y se nota $Inf(A)$.

Ejemplo 114. $A = (-\infty, 5)$; $Sup\ (A) = 5$.

Ejemplo 115. $B = (1, 7]$; $Sup\ (B) = 7$.

## C12 Axioma de completez

Todo conjunto no vacío de números reales que sea acotado superiormente tiene supremo.

Ejemplo 116. $A = (0, \sqrt{2})$; $Sup\ (A) = \sqrt{2}$.

Ejemplo 117. En los números racionales, este axioma no se cumple; por ejemplo, el conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\ y x^2 < 2\}$$

es acotado en $\mathbb{Q}$. Una cota superior es 2 y una inferior es 0; sin embargo, puede verse (no es fácil) que no existe en $\mathbb{Q}$ una cota superior mínima. El mismo ejemplo visto en $\mathbb{R}$ tiene cota superior mínima, que se denomina $\sqrt{2}$.

***Nota:*** *En la práctica se trabaja con números racionales finitos y el grado de aproximación que se desee; esto es posible por el hecho de que entre dos números reales hay infinitos números racionales. Teóricamente, este hecho se explica diciendo que los números racionales son un conjunto denso en los reales.*

Se puede demostrar que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene ínfimo.

Ejemplo especial 118. Encuentre el *Sup* del conjunto $A = \left\{\frac{3n-4}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Solución: $\frac{3n-4}{n+1} = 3 - \frac{7}{n+1} < 3$, para todo $n$. Por lo tanto 3 es una cota superior de $A$; veamos que $3 = SupA$. Dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m\varepsilon > 7$, de donde

$$\varepsilon > \frac{7}{m} > \frac{7}{m+1}$$

y así

$$-\varepsilon < -\frac{7}{m+1}$$

$$3 - \varepsilon < 3 - \frac{7}{m+1}$$

Es decir, hemos encontrado un elemento de $A$ mayor que $3 - \varepsilon$, a saber, $3 - \frac{7}{m+1}$, lo que implica que $3 = Sup(A)$.

Ejemplo 119. Encuentre el *Sup* y el *Inf* del conjunto $A = \{x : x^2 + x < 1\}$.

Solución. En realidad, $A$ es el conjunto solución de la desigualdad $x^2 + x < 1$, lo cual equivale a resolver $x^2 + x - 1 < 0$, de donde al factorizar:

$$\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0$$

Esta desigualdad tiene como solución el intervalo abierto:

$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

así pues, $Inf(A) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ y $Sup(A) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ejemplo 120. Encuentre el *Inf* del conjunto $(B) = \{x^2 + x + 1 : x \in \mathbb{R}\}$.

Solución. $x^2 + x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \geq \frac{5}{4}$ para todo $x$

pues $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$; de donde $\frac{5}{4}$ es una cota inferior y este valor se obtiene precisamente cuando $x = \frac{1}{2}$; es decir, $\frac{5}{4}$ es el valor mínimo de $x^2+x+1$. Por lo tanto $Inf(B) = \frac{5}{4}$.

## EJERCICIO 1.15

Encuentre una cota superior y una cota inferior, si existen, para cada uno de los siguientes conjuntos:

1. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 10\}$.
2. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x < 10\}$.
3. $\{x \in \mathbb{R} : 3 < 1 - x^2 < 10\}$.
4. $\{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ ó } x > 1\}$.

Encuentre el *Sup* y el *Inf* de cada uno de los siguientes conjuntos:

5. $A = \left\{ \dfrac{n-4}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$
6. $B = \left\{ \dfrac{1}{(3-2^n)} : n \in \mathbb{N} \right\}$
7. $C = \left\{ \dfrac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
8. $D = \{ x - x^2 : x \in \mathbb{Q} \}$

### 1.7.3.1 Otras operaciones

#### 1.7.3.1.1 Potenciación

Si $a$ es un número real y $n$ un número natural, ya habíamos visto lo que significaba $a^n$. Veamos algunas otras propiedades de esta notación.

**Propiedades**

1. Si $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

La potencia nula del número cero no se define y la expresión $0^0$ se considera indeterminada.

2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ .
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

4. $a^n \div a^m = a^{n-m}$; en particular $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

5. Si $a = b$ entonces $a^n = b^n$.

   En la propiedad 5, la proposición recíproca no se cumple, por ejemplo,

   $(-5)^2 = 5^2$ y $-5 = 5$.

### 1.7.3.1.2 **Radicación**

¿Cómo definir $a^{1/n}$?

Si $x^n = a$, hallar $x$.

Si extendemos las propiedades de la potenciación con exponentes naturales a exponentes racionales, tendremos lo siguiente:

$$(x^n)^{1/n} = x^1 = x$$

lo que sugiere que:

$$\text{si } x^n = a, \text{ entonces } (x^n)^{1/n} = x = a^{1/n}$$

Sin embargo, para $n$ par:

i. Si $a$ es negativo $x = a^{1/n}$ no existe; por ejemplo, $x^2 = -1$ no tiene solución real.

ii. Si $(x^n)^{1/n}$ existe, puede no ser único; por ejemplo:

$$[(5^2)]^{1/2} \text{ puede ser } 5 \text{ ó } -5.$$

Para garantizar la existencia y unicidad de $a^{1/n}$, definamos $a^{1/n}$ para números reales positivos.

**Definición 6.** Si $a > 0$, $a^{1/n}$ existe y se nota $\sqrt[n]{a}$, que se denomina la raíz $n$−ésima de $a$.

**Propiedades de la radicación**

Con estas restricciones, las propiedades de la radicación son las mismas que se tienen para la potenciación con exponente entero.

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$

Como $m \cdot n$ es múltiplo de $m$ y $n$, podemos reemplazar $m \cdot n$ por el $m.c.m.$ entre $m$ y $n$.

Ejemplo 121. $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[6]{a} = \sqrt[12]{a^3\cdot a^2} = \sqrt[12]{a^5}$.

2. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$.

Ejemplo 122. $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{30}$.

3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = (a)^{\frac{1}{m\cdot n}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$.

Ejemplo 123. $\sqrt[7]{\sqrt{15}} = \sqrt[14]{15}$.

## EJERCICIO 1.16

1. Efectúe y simplifique:
   a. $(5^2)^5 - [(-4^4)^3]$.
   b. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(2\,\frac{2}{3}\right)^{-3} - (0{,}25)^2$.
   c. $7^3\cdot 7^{-2} + \frac{5-3^0}{4^2}$.
   d. $(3^{-4})\cdot\left[\frac{2}{(-3)^2} \div (-0{,}5)^2\right]$.

2. Exprese en potencia racional:
   a. $\sqrt[5]{3^2}$.
   b. $3\cdot\sqrt[7]{3}$.
   c. $\sqrt[9]{3^2\cdot 5^4}$.
   d. $\sqrt[9]{2\cdot\sqrt{3}}$.

3. Exprese en radical:
   a. $(2a^2)^{2/7}$.
   b. $(a^{3/2})^{5/2}$.
   c. $(3/5)^{5/3}$.

4. Simplifique:
   a. $\sqrt{4^2+3^2}$.
   b. $\sqrt{(0{,}25)^{-1}}$.
   c. $\sqrt[4]{64}$.

5. Introduzca bajo el signo radical el factor racional:
   a. $5\cdot\sqrt[3]{3}$.
   b. $2\cdot\sqrt[5]{3}$.
   c. $0{,}5\cdot\sqrt{(0{,}2)^{-1}}$.

6. Efectúe y simplifique:
   a. $-2\sqrt{9}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$.
   b. $\sqrt{5\sqrt{48}} - \sqrt{40\sqrt{12}} + \sqrt{15\sqrt{27}}$.
   c. $\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}$.
   d. $(4\sqrt{3}-\sqrt{27})^2$.
   e. $\sqrt{7+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{13}}$.
   f. $\sqrt[6]{20}\cdot\sqrt[9]{72}\cdot\sqrt[8]{92}$.

7. Simplifique y reduzca los términos semejantes:

   a. $7\sqrt{5x^3} + x\sqrt{20x} + x\sqrt{2x} - 2x\sqrt{72x}$.

   b. $x \cdot \sqrt[3]{2x} - 3 \cdot \sqrt{x} + \sqrt[3]{16x^4} - 5 \cdot \sqrt{256x}$.

8. Efectúe y simplifique:

   a. $2\sqrt{x} \,.\, 7\sqrt{x}$.

   b. $5\sqrt{x}.\, 8\sqrt{x}$.

   c. $5 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{2x}$.

   d. $\sqrt{2x}\,(\sqrt{x} + 1)$.

   e. $\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{2x-1}$.

   f. $\sqrt{2x+5} \cdot \sqrt{2x-5}$.

   g. $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x-9}$.

   h. $\sqrt[3]{5x} \cdot \sqrt[3]{25x^2}$.

9. Efectúe y simplifique:

   a. $(3 + \sqrt{x}\,) \cdot (3 - \sqrt{x}\,)$.

   b. $(2 + \sqrt{x}\,) \cdot (2 - \sqrt{x}\,)$.

   c. $(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1)$.

   d. $(\sqrt[3]{x} - 9) \cdot (\sqrt[3]{x} + 9)$.

   e. $(\sqrt{1+x})^2$.

   f. $(1 + \sqrt{x})^2$.

   g. $(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3})^2$.

   h. $(\sqrt{x} + 3 + 7\sqrt{x} - 5)^2$.

   i. $\dfrac{\sqrt{a}}{\frac{\sqrt{(a-b)^3}}{(x+1)^2} - \frac{a-b}{x+1}} - \dfrac{\sqrt{a^2-ab}}{\frac{\sqrt{(a-b)^3(x-1)}}{x^2-1} - a + b}$

10. Completar:

    a. Si $a > 1$ y $n > 1$, entonces $a^n >$_____.

    b. Si $a > 1$ y $n > m$, entonces $a^m$_____$a^n$.

    c. Si $0 < a < 1$ y $n > 1$, entonces $a$_____$a^n$.

    d. Si $0 < a < 1$ y $n > m$, entonces $a^m$_____$a^n$.

    e. Si $a > 1$ y $n < 0$, entonces $a^n >$_____.

11. Encuentre el mayor número que puede construirse con tres "2" solamente; después, lo mismo, con tres "4"solamente.

### 1.7.3.1.3 **Racionalización**

Algunas veces es necesario transformar expresiones irracionales en racionales. Este proceso de transformación se denomina racionalización, y se fundamenta en las siguientes propiedades:

i. $\sqrt[n]{x^r} \cdot \sqrt[n]{x^s} = \sqrt[n]{x^{r+s}}$ y $\sqrt[n]{x^n} = x$, para $x \geq 0$.

ii. $(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}\,a + \ldots + x\,a^{n-2} + a^{n-1}) = x^n - a^n$.

Ejemplo 124. $(\sqrt{x} - a)(\sqrt{x} + a) = x - a^2$.

Ejemplo 125. Racionalizar $\sqrt{x+h} - \sqrt{h}$.

Solución. Sean $a = \sqrt{(x+h)}$ y $b = \sqrt{h}$ ; aplicamos el producto notable

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Es decir, multiplicamos la expresión dada por $\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}} = 1$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+h} - \sqrt{h} &= (\sqrt{x+h} - \sqrt{h}).\tfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}} \\ &= \tfrac{x+h-h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}} = \tfrac{x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}}\end{aligned}$$

Ejemplo 126. $\underbrace{\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}\right)}_{(a-b)} \underbrace{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}\right)}_{(a^2+a\cdot b+b^2)} = \underbrace{\left(\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{2^3}\right)}_{(a^3-b^3)} = x - 2.$

Ejemplo 127. Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$.

Solución. En este caso necesitamos obtener en el denominador una quinta potencia de una raíz quinta; para ello multiplicamos la expresión dada por

$\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}} = 1$, es decir, $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$.

Ejemplo 128. Efectuar y simplificar: $\frac{x}{1+\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

Solución. Al racionalizar el denominador de cada uno de los sumandos tenemos:

$$\frac{x}{1+\sqrt{x}}.\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x+1}}.\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \quad \begin{aligned}&= \frac{x - x\sqrt{x}}{1-x} + \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1} \\ &= \frac{(x - x\sqrt{x})(x+1) + 2\sqrt{x+1}(1-x)}{1-x^2}\end{aligned}$$

Para lo único que resultan útiles estas racionalizaciones es para cuando se desean determinar ciertos límites, como se verá más adelante.

## Potencias con exponente irracional

**¿Cómo hallar $3^{\sqrt{2}}$?**

$a^x$ ha sido definido para $x$ racional. Una manera de hacerlo para $x$ real, consiste en hacer uso del axioma del extremo superior. Sea $a$ un número real positivo mayor que 1 y $u \in \mathbb{R}$. Consideremos el conjunto

$$E_u(a) = \{a^r : r \in \mathbb{Q} \text{ y } r \leq u\}$$

Puede verse que $E_u(a)$ es un conjunto no vacío y acotado, con lo cual podemos definir

$$a^{u} = Sup\, E_u(a)$$

Esta definición produce el mismo resultado cuando u es racional.

Para las potencias con exponente irracional son válidas las propiedades vistas anteriormente.

Ejemplo 129. $7^{\sqrt{5}} \cdot 7^5 = 7^{\sqrt{5}+5}$; $\frac{5^{\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $\left[(\sqrt{7})^4\right]^{\pi} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{4\pi} = 7^{2\pi}$.

## EJERCICIO 1.17

1. Encuentre el factor de racionalización de:
   a. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}$.
   b. $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$.
   c. $\sqrt{x} - 2$.
   d. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{9}$.
   e. $\sqrt[3]{x+h} + \sqrt[3]{x}$.
   f. $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}$.
   g. $\sqrt[4]{x+2}$.
   h. $\sqrt[3]{2+\sqrt{x}}$.
   i. $\sqrt[7]{x^3}$.

2. Racionalice el denominador y simplifique:
   a. $\frac{3}{\sqrt{x+3}}$.
   b. $\frac{2}{\sqrt[4]{4x}}$.
   c. $\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$.
   d. $\frac{\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1-a^2}}$.
   e. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}}$.

3. Racionalice el numerador:
   a. $\frac{2\sqrt{x}-3}{4x-9}$.
   b. $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$.
   c. $\frac{\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{a(x+a)}+\sqrt[3]{a^2}}{x}$.
   d. $\frac{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt[3]{3}}{x-1}$.

1.7.3.1.4 **Logaritmos**

Dados los números reales positivos $a$ y $b$, hallar un número real $x$ tal que $a^x = b$.

Si $a = 1$ y $b = 1$ $(1^x = 1)$, cualquier número real $x$ es solución.

Si $a = 1$ y $b \neq 1$ $(1^x = b)$, no existe solución.

Analicemos el caso en que $a \neq 1$. Para cualesquiera $a$ y $b$ números reales positivos, si $a \neq 1$, existe un único número real $x$ tal que $a^x = b$; $x$ se denomina logaritmo en base $a$ de $b$ y se nota $\log_a b$.

$$a^x = b \quad \text{si y sólo si} \quad x = \log_a b$$

Ejemplo 130. $\log_x 64 = 2$ significa que $x^2 = 64$.

Si $a \leq 0$ ó $a = 1$ ó $b \leq 0$, entonces $\log_a b$ no está definido.

Ejemplo 131. $\log_{-2}(-32) = 5$ no tiene sentido.

**Propiedades**

En cada uno de los siguientes enunciados, $x$, $M$ y $N$ son números positivos.

1. $a^{\log_a x} = x$.

2. $\log_a M = \log_a N$ si y sólo si $M = N$.

3. Si $a^r = M$ tenemos que $M^{(1/r)} = a$, es decir, $r = \log_a M$ y $1/r = \log_M a$, por lo tanto: $\log_a M \cdot \log_M a = 1$.

4. $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$.

   Partimos de la propiedad $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; tenemos que $M = a^r$ y $N = a^s$; es decir, $r = \log_a M$ y $s = \log_a N$; reemplazamos en $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; esto significa que $M \cdot N = a^{r+s}$; es decir, $\log_a (M \cdot N) = r + s$.

5. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

   $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ significa que $\frac{M}{N} = a^{r-s}$; es decir, $\log_a \frac{M}{N} = r - s$.

6. $\log_a (M^n) = n \cdot \log_a M$

   $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ significa que $M^s = a^{r \cdot s}$; es decir, $r \cdot s = \log_a M^s = s \cdot r$.

7. Si $a^x = a^y$ entonces $x = y$.

8. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

   Esta propiedad nos permite calcular cualquier logaritmo en términos de alguna base conocida; de ahí que se necesite estudiar en profundidad solamente el logaritmo en alguna base. Usualmente se acostumbra a trabajar en la base $e$, lo que conduce al logaritmo natural.

Ejemplo 132. $2^{\log_2(mn)} = mn$.

Ejemplo 133. Si $\log_2 M = \log_2 23$, entonces $M = 23$.

Ejemplo 134. Si $(1,5)^x = 225$, entonces: $\log_a (1,5)^x = \log_a 225$.

Ejemplo 135. Calcule $\log_{32} 2$.

Solución. Como $\log_{32} 2 \cdot \log_2 32 = 1$, tenemos que $\log_{32} 2 = 1/\log_2 32 = 1/5$.

Ejemplo 136. $\log_3 81 \cdot 243 = \log_3 81 + \log_3 243 = 4 + 5 = 9$.

Ejemplo 137. $\log_5 125^4 = 4 . \log_5 125 = 4 \cdot 3 = 12$.

Ejemplo 138. Hallar el valor de $x$ en la ecuación $2 \cdot \log_5 x = \log_5 50$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_5 x &= \log_5 50 \\ \log_5 x^2 &= \log_5 50 \\ x^2 &= 50 \\ x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \quad \text{ó} \quad x &= -5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$x = -5 \cdot \sqrt{2}$ se descarta como solución de la ecuación inicial, ya que $x$ debe ser positiva para que $\log_5 x$ exista.

Ejemplo 139. Aplicando propiedades, expresar $x$ en términos de $y$, en la igualdad

$3 \cdot \log_5 x - 2 \log_5 y = 1$.

Solución.

$$\begin{aligned} \log_5 x^3 - \log_5 y^2 &= 1 \\ \log_5 \frac{x^3}{y^2} &= 1 \\ \frac{x^3}{y^2} &= 5^1 \\ x^3 &= 5y^2 \\ x &= \sqrt[3]{5y^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 140. Si $\log_a \sqrt{\frac{x}{y^3}} = 3$ y $\log_a \sqrt{\frac{y}{x}} = -9$, calcular: $\log_x y$.

Solución. Al aplicar las propiedades de los logaritmos, tenemos:

$$\log_a \sqrt{\frac{x}{y^3}} = \frac{1}{2}\log_a \frac{x}{y^3} = \frac{1}{2}\log_a x - \frac{3}{2}\log_a y = 3 \quad \text{y}$$

$$\log_a \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{2}\log_a \frac{y}{x} = -\frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y = -9$$

Planteamos y resolvemos el sistema

$$\begin{array}{ll} 1) & \frac{1}{2}\log_a x - \frac{3}{2}\log_a y = 3 \\ 2) & -\frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y = -9 \\ \hline & -\log_a y = -6 \end{array}$$

Tenemos que $\log_a y = 6$. Reemplazamos en 2) y tenemos que:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}6 &= -9 \\ -\frac{1}{2}\log_a x &= -9 - 3 \\ -\frac{1}{2}\log_a x &= -12 \\ \log_a x &= 24 \end{aligned}$$

luego

$$\log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}$$

$$\log_x y = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

**Nota:** *Los logaritmos de base 10 se denominan decimales y en lugar de la designación $\log_{10} M$, se escribe log M. Los logaritmos de base e (e es un número irracional, cuyo valor aproximado es 2.718281828459045...) se denominan naturales, y en lugar de la designación $\log_e N$, se escribe ln N.*

## EJERCICIO 1.18

1. Halle el valor de $x$:

   a. $4^x = 1/32$.
   b. $(1/3)^2x = 27$.
   c. $(1/2)^{-2x} = 16$.

2. Verifique si la afirmación es verdadera o falsa; si es falsa dé condiciones para que sea verdadera:

   a. La raíz cúbica de un número positivo siempre es menor que el número.
   b. $x^2 > x$ para cualquier número positivo $x$.

3. Escriba las siguientes expresiones en notación logarítmica:

   a. $5^0 = 1$.
   b. $4^{-2} = 1/16$.
   c. $8^{2/3} = 4$.
   d. $p^x = t$.
   e. $a^{m+n} = w$.
   f. $(a + b)^n = c$.
   g. $(a^2)^x = y + z$.
   h. $x^2 = 64$.
   i. $10^{-2} = 0{,}01$.

4. Escriba las siguientes expresiones en notación exponencial:

   a. $\log_2 32 = 5$.
   b. $\log_x b = 4$.
   c. $\log_3 (1/9) = 1$.
   d. $\log_{25} 5 = m$.
   e. $\log_2 (m+n) = y$.
   f. $\log_{(m+n)} B = -3$.

5. Verifique si las siguientes igualdades se cumplen:

   a. $\log_{10} 10 = 1$.
   b. $\log_2 1/8 = 1/3$.
   c. $\log_3 (-9) = -2$
   d. $\log_{(1/2)} 16 = -4$.
   e. $\log_2 (1/8) = -3$.
   f. $\log_{10} (0{,}0001) = -4$.

6. Simplifique:

   a. $b^{\log_b 3}$.
   b. $b^{2\log_b 2}$.
   c. $3^{\frac{1}{2}\log_3 81}$.

7. Halle el valor de $x$:

   a. $\log_x 64 = 3$.
   b. $\log_5 x = -2$.
   c. $3^{\log_3 x} = 1/4$.
   d. $\log_2 8^2x = 4x - 8$.
   e. $\log_2 (\log 2\,(x+3)) = 3$.
   f. $\log_x x^x = 6$.
   g. $\log_b x = \log_b 2 + 3 \log_b 2 - \log_b 24$.
   h. $4^{5^{x+4}} = 100$.

8. En cada caso si $x > 0$, verifique si se cumple la igualdad:

   a. $\log(3x^4 + 6x^2) = \log 3 + 2\log x + \log(x^2 + 2)$.
   b. $\ln \frac{49x^3}{13} = 2\ln 7 + 3\ln x - \ln(13)$.

9. Exprese el logaritmo dado en función de logaritmos de expresiones más sencillas:

   a. $\log\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$.
   b. $\log_b\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)$.
   c. $\ln\left(\frac{x(x+2)^2}{(x-2)^4}\right)$.
   d. $\log_b\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x^2}\right)$.

10. Cuál es el valor de $z$, si se sabe que

$$\log_a y = 6;\ \log_a \sqrt{\frac{z}{y}} = \log_a \sqrt[3]{\frac{y}{z^2}}.$$

### 1.7.3.1.5 Más ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Consideraremos ahora ecuaciones exponenciales y logarítmicas como:

$e^{2x+3} = 1$; $a^x = b$; $3^{x^2-2} = \sqrt[3]{243}$; $\ln(2x + 3) + \ln(x - 1) = 1$.

Para resolver estas ecuaciones utilizamos las propiedades de la potenciación y logaritmación en los números reales.

Recordemos que para $a$, $b$, $m$ y $n$ números reales positivos, se tiene lo siguiente:

$$a=b \text{ si y sólo si } \log_n a=\log_n b,$$
$$a=b \text{ si y sólo si } a^n=b^n,$$
$$a^n=a^m \text{ si y sólo si } n=m.$$

Ejemplo 141. Resolver: $e^{2x+3} = 1$.

Solución.

$$\begin{aligned} e^{2x+3} &= 1 \\ 2x + 3 &= \ln(1) \\ 2x+3 &= 0 \\ x &= -3/2 \end{aligned}$$

Ejemplo 142. Resolver: $a^x = b$; $a > 0$ y $b > 0$.

Solución.

$$\begin{cases} a^x = b \\ x = \log_a b \end{cases}$$

Solución alternativa. Aplicando ln a ambos lados, tenemos

$$\begin{aligned} \ln(a)^x &= \ln(b) \\ x\ln(a) &= \ln(b) \\ x &= \ln(b)/(\ln(a) \end{aligned}$$

Ejemplo 143. Resolver: $3^{x^2-2} = \sqrt{243}$.

Solución.

$$\begin{aligned} 3^{x^2-2} &= \sqrt{243} \\ x^2-2 &= \log_3 (243)^{1/3} \\ x^2-2 &= \frac{1}{3}(\log_3 3^5) \\ x^2-2 &= 5/3 \\ x^2-11/3 &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$x = \sqrt{11}/3 \quad \text{ó} \quad x = -\sqrt{11}/3$$

Ejemplo 144. Resolver: $2 \log (2x + 3) - \log (x - 1) = 1$.

Solución.

$$\begin{aligned} 2\log (2x + 3) - \log(x-1) &= 1 \\ \log(2x + 3)^2 - \log(x-1) &= 1 \\ \log [(2x+3)^2/(x-1)] &= 1 \\ ((2x+3)^2)/(x-1) &= 10^1 \\ 4x^2 + 12x + 9 &= 10x - 10 \\ 4x^2+2x+19 &= 0 \end{aligned}$$

El problema se reduce a resolver una ecuación de segundo grado.

Ejemplo 145. Hallar $n$ en la ecuación $F = P\,(1 + i)^n$.

Solución.

$$\begin{aligned} F &= P\,(1+i)^n \\ (1+i)^n &= F/P \\ \ln(1+i)^n &= \ln (F/P) \\ n \ln(1+i) &= \ln (F) - \ln (P) \\ n &= (\ln (F) - \ln (P))/(\ln(1+i)) \end{aligned}$$

Ejemplo 146. Resolver $e^{2x}-5e^x-36=0$.

Solución. Observemos que

$e^{2x} = (e^x)^2$; al reemplazar, tenemos

$$e^{2x} - 5e^x - 36 = (e^x)^2 - 5(e^x) - 36$$

Esta presentación hace evidente el cambio de variable $e^x = z$, por lo que se resuelve así:

$e^{2x} - 5e^x - 36 = 0$. Esto es equivalente a resolver $z^2 - 5z - 36 = 0$, de donde se obtiene

$$(z - 9)(z + 4) = 0$$

$$z = 9 \quad \text{ó} \quad z = -4$$

Para $z = 9$, tenemos $e^x = 9$, por lo tanto $x = \ln(9)$. Para $z = -4$, tenemos $e^x = -4$, por lo tanto $x = \ln(-4)$ no existe.

## EJERCICIO 1.19

1. Resuelva la ecuación exponencial dada:
   a. $3^{x+1} = 81$.
   b. $2^{x+2} = 4^{x-1}$.
   c. $e^{2x} - 2e^{-2x} - 1 = 0$.
2. Resuelva la ecuación logarítmica dada:
   a. $\log x - \log(x-2) = \log 2$.
   b. $\log x + \log(x-1) = \log 6$.
   c. $\ln 12 - \ln(x-1) = \ln(x-2)$.
   d. $\log(x-2) + \log(x-1) = \log 6$.
   e. $\log|x+3| = \log 14 - \log|x-2|$.
   f. $\log|x| + \log|x-2| = \log 1$.

# 1.8 (Sección opcional) Números complejos

El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ se define así:

$$\mathbb{C} = \{a + bi / a, b \in \mathbb{R}, \text{ e, } i^2 = -1\}$$

Si $z = a + bi$, $a$ se denomina la parte real de $z$ y se nota $\mathrm{Re}(z) = a$; $b$ se denomina la parte imaginaria de $z$ y se nota $\mathrm{Im}(z) = b$. Cualquier número real $a$ definido en parte real lo podemos expresar como el número complejo $a + 0i$. Es también conveniente designar el número complejo $0 + bi$ como $bi$.

Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, tenemos $z = w$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Podemos hacer de $\mathbb{C}$ un cuerpo si definimos la suma y el producto de dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ de manera natural, así

$$z + w = (a + c) + (b + d)\, i$$
$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$

Puede verse que el cero complejo (módulo de la suma) es $0 = 0 + 0i$, que se denota por 0, y el módulo del producto es $1 = 1 + 0i$, que simplemente se denota por 1. Si $z = a + bi \neq 0$, su inverso multiplicativo $z^{-1}$ está dado por $z^{-1} = (a - bi)/(a^2 + b^2)$. Si $z = a + bi$, su conjugado se define por $\bar{z} = a - bi$, y claramente $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. También se dice que $a + bi$ y $a - bi$ son pares conjugados.

# 1.9 Preguntas tipo GRE (Graduate Record Examination)

Usted debe comparar las columnas $A$ y $B$. Marque
($A$) si la cantidad $A$ es mayor;
($B$) si la cantidad $B$ es mayor;
($C$) si las dos cantidades son iguales;
($D$) si la información no permite relacionarlas.

| Columna A | Columna B |
|---|---|
| 1. $(-6)^4$ | $(-6)^5$ |
| 2. $^3\sqrt{1000}$ | 9,8 |
| 3. $\sqrt{(a^2+b^2)}$ | $a+b$ |
| 4. $3^{3^3}$ | $(3^3)^3$ |

En cada una de las siguientes preguntas seleccione la mejor respuesta.

5. Una persona hace 16 pasos completos en 10 segundos. A esta tasa, ¿cuántos pasos hará en 72 segundos?

   (A) 45.
   (B) 78.
   (C) 86.
   (D) 90.
   (E) 115.

6. La solución de la desigualdad $|x| \leq x$ es

   (A) R.
   (B) $R^-$.
   (C) R+.
   (D) 0.
   (E) {1}.

7. La simplificación de $(^2\sqrt{24}\ )-\sqrt{4^2})$ es

   (A) 2.
   (B) −2.
   (C) 0.
   (D) $^2\sqrt{4}$.
   (E) $^2\sqrt{2}$.

8. El máximo del conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x - x^2\}$ es

   (A) 1/2.
   (B) 1/4.
   (C) 1.
   (D) 0.
   (E) No existe.

9. La solución de la ecuación $1 = \log_2 (\log_3 x)$ está dada por

   (A) 2.
   (B) 3.
   (C) 1.
   (D) $3^2$.
   (E) $2^3$.

10. Una simplificación de la suma $(4^x+4^x)$ es

   (A) $4^{x+1}$.
   (B) $4^{2x}$.
   (C) $2^{2x+1}$.
   (D) $4^{x2}$.
   (E) $2^{4x}$.

## 1.10 Resumen

$(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ es un cuerpo ordenado completo; es decir, es un conjunto dotado de dos operaciones binarias, adición y multiplicación, una relación de orden y además satisface el axioma de completez:

*A*1. (Asociativa) $x + (y + z) = (x + y) + z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$A2$. (Conmutativa) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

$A3$. (Modulativa) Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que para cada número real $x$ se tiene:

$$0 + x = x + 0 = x$$

$A4$. (Existencia de inverso aditivo) Para cada número real $x$ existe un número real $-x$ tal que

$$x + (-x) = 0$$

$M5$. (Asociativa) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$M6$. (Conmutativa) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

$M7$. (Modulativa) Existe $1 \in \mathbb{R}$ $(1 \neq 0)$ tal que para cada número real $x$ se tiene:

$$1 \cdot x = x$$

$M8$. (Existencia del inverso multiplicativo o recíproco). Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real $x^{-1}$, tal que

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

$D9$. (Distributiva)Para cada $x, y, z$ números reales se tiene que

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$O10$. Si $x$ e $y$ pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces $x + y$ y $x \cdot y$ pertenecen a $\mathbb{R}^+$. (La suma y el producto de números reales positivos es positivo).

$O11$. Para todo número real $x \neq 0$, ó $x \in \mathbb{R}^+$ ó $-x \in \mathbb{R}^+$, pero no ambos.

$O12$. $0 \notin \mathbb{R}^+$

$C13$. (Axioma de completez). Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene *Sup*.

De estos axiomas se desprenden las siguientes propiedades entre otras:

1. $-(-a) = a$.
2. $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$.
3. $a(-b) = -(ab)$.
4. $(-a)(-b) = ab$.
5. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ para $m$ y $n$ naturales.
6. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y su dual $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

7. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$ y su dual

   $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$.

8. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ y en general

   $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + b^{n-1}) = a^n - b^n$.

9. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ y en general

   $(a+b)(a^{2n} - a^{2n-1} b + a^{2n-3} b^2 - \ldots + b^{2n}) = a^{2n+1} - b^{2n+1}$.

10. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$.

11. $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + ab$.

12. Si $x < y$, entonces, $x + z < y + z$.

13. Si $x < y$ y $z > 0$, entonces $xz > yz$. Y su versión dual

    si $x < y$ y $z < 0$, entonces $xz < yz$.

14. Si $xy > 0$, entonces *i*) $x > 0$ y $y > 0$, ó

    *ii*) $x < 0$ y $y < 0$.

15. Si $xy < 0$, entonces *i*) $x > 0$ y $y < 0$, ó

    *ii*) $x < 0$ y $y > 0$.

**Factorización**

1. Factor común: $ab + ac = a(b+c)$.

2. Trinomio cuadrado perfecto:

   $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$; y su dual $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

3. $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ y su dual
   $a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$.

4. Diferencia de cuadrados:

   $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ y en general
   $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + b^{n-1})$.

5. Suma de cubos y algo más:

   $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ y en general
   $a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1} b + a^{2n-3} b^2 - \ldots + b^{2n})$.

6. Trinomio de la forma $ax^2+bx+c$:

   $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$.

7. $acx^2 + (ad+bc)x + ab = (ax+b)(cx+d)$.

**Fracciones algebraicas**

1. Para $a$, $b$ números reales con $b \neq 0$, $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

2. Para $a$, $b$, $c$ y $d$ números reales con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{db}$.

3. Para $a$, $b$, y $c$ números reales con $b \neq 0$ y $c \neq 0$, $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

4. Para $a$, $b$, $c$ y $d$ números reales con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

5. Para $a$, $b$, $c$ y $d$ números reales con $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$, $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

**La ecuación cuadrática**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tiene soluciones

$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

siempre que $b^2 - 4ac \geq 0$.

**Valor absoluto**

Si $a$ es un número real, el valor absoluto de $a$, que se nota $|a|$, se define como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

**Propiedades**

0. $|x| \geq 0$ y $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

1. $|x| = |-x|$.

2. $|x - y| = |y - x|$.

3. $|xy| = |x|\,|y|$.

4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $y \,/\!= 0$.

5. $|x + y| \leq |x| + |y|$. (Desigualdad triangular)

6. $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$. Vale también si cambiamos $<$ por $\leq$.

7. $|x| > a$ si y sólo si $x < -a$ ó $x > a$. Vale también si cambiamos $>$ por $\geq$.

8. Si $a \geq 0$, $|x| = a$ si y sólo si $x = a$ ó $x = -a$.

9. $|x| < |y|$ si y sólo si $x^2 < y^2$. Vale también si cambiamos $<$ por $\leq$.

## Bolas

Bola abierta con centro en $c$ y de radio $r$:

$$B(c; r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\} = (c - r, c + r)$$

Bola cerrada con centro en $c$ y de radio $r$:

$$B[c; r] = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| \leq r\} = [c - r, c + r]$$

### Conjuntos acotados

Sea $A$ un conjunto de números reales no vacío. $A$ es acotado superiormente si existe un número real $b$ tal que para cualquier elemento $x$ de $A$ se tiene que $x \leq b$; de manera análoga se define un conjunto acotado inferiormente. $A$ es acotado si lo es superior e inferiormente. A la menor cota superior de $A$ se denomina el supremo de $A$ o cota superior mínima y se nota $Sup(A)$. A la mayor cota inferior de $A$ se denomina el ínfimo de $A$ o cota inferior máxima y se nota $Inf(A)$.

### Potenciación

1. Si $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

2. $a^n\, a^m = a^{n+m}$.

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

5. $a^n \div a^m = a^{n-m}$, en particular $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

6. Si $a = b$ entonces $a^n = b^n$.

**Radicación**

Si $a > 0$, $a^{\frac{1}{n}}$ existe y se nota $\sqrt[n]{a}$ , que se denomina la raíz $n$-ésima de $a$.

## Propiedades

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$

2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$

3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = (a)^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

**Logaritmos**

Para $a > 0$, $a^x = y$ si y sólo si $x = \log_a y$.

## Propiedades

En cada uno de los siguientes enunciados $x$, $M$ y $N$ son números positivos.

1. $a^{\log_a x} = x$.

2. $\log_a M = \log_a N$ si y sólo si $M = N$.

3. Si $a^r = M$ tenemos que $M^{1/r} = a$, es decir, $r = \log_a M$ y $1/r = \log_M a$, por lo tanto: $\log_a M \cdot \log_M a = 1$.

4. $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$.

5. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$.

6. $\log_a (M^n) = n \cdot \log_a M$

7. Si $a^x = a^y$ entonces $x = y$.

8. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

## GLOSARIO

Número real: Número que puede representarse por expresiones decimales finitas o infinitas periódicas o infinitas no periodicas, junto con las operaciones $(+, \cdot)$, la relacion de orden menor que $(<)$, se denomina el sistema de los números reales.

Intervalo: Conjunto $I$ de números reales que satisfacen la siguiente propiedad: si $x$ e $y \in I$ y $x<z<y$ entonces $z \in I$.

Bola abierta: Intervalo abierto (todo intervalo abierto es de la forma $(c-r, c+r)$, donde $c$ es el centro de la bola y $r>0$ es su radio).

Conjunto acotado: Conjunto para el cual existe $c>0$, tal que $|x| \leq c$ para todo elemento $x$ del conjunto.

Axioma de completez: Principal axioma de los números reales que garantiza la existencia de números irracionales: *todo subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene supremo.*

Número complejo: Número de la forma $a+b\boldsymbol{i}$, donde $a$ y $b$ son números reales e $\boldsymbol{i}^2=-1$.

# Capítulo 2

# Funciones

## 2.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos uno de los conceptos más importantes en matemáticas: el de función. En especial, abordaremos las funciones de valor y variable reales, sus operaciones, sus gráficas, etc. En las aplicaciones se verá claramente que los modelos matemáticos vienen dados generalmente por funciones. La parte gráfica se tratará de explorar al máximo para poder brindar más claridad en los conceptos.

## 2.2 Nota histórica

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) fue el primero en utilizar la palabra función en 1673, aunque su definición no fue suficientemente clara. Pero en 1748, Leonhard Euler (1707-1783) convierte el concepto de función en el centro de su obra *Introductio in analysis infinitorum*, definiéndola así:

> *Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera, de una cantidad variable y de números o cantidades constantes.*

El problema radicaba en cuál era el significado de “expresión analítica”, concepto que si bien Leibniz no definía, suponía que el lector entendería como expresiones construidas con las operaciones básicas de adición, multiplicación, radicación, potencias, etc. Euler dividió las funciones en dos tipos: algebraicas y trascendentes (exponenciales, logarítmicas, etc.). Sin embargo, a pesar de todo este avance conceptual, Euler hacía una distinción entre la función y su representación, lo que llevaba a confusiones.

Debemos observar que a pesar de que no se tuviera una definición precisa de función, esto no impedía que se evolucionara en esta dirección. De hecho, se trabajaba con series de potencias, la expansión de una función en serie de Taylor, límites, continuidad, etc. En matemáticas siempre ha sucedido lo mismo: los grandes desarrollos acontecen primero, luego se define la teoría. Euler decía que primero estaba la idea y después venía el establecimiento de su teoría.

Posteriormente, Agustín Cauchy (1789-1857), como gran exponente del rigorismo matemático, volvió en 1821 sobre el concepto de función. En éste destacaba la dependencia entre las variables y cubría así el caso de las funciones explícitas y las implícitas, tan comunes en las soluciones de muchas ecuaciones diferenciales. No obstante, después de muchas acaloradas discusiones respecto a lo que era o no una función, y con la necesidad de que ésta cubriera todos los casos, Edouard Goursat (1858-1936) dio una definición moderna en 1923. Es la que aparece con más frecuencia en los libros de texto:

Se dice que $y$ es una función de $x$, si a un valor de $x$ le corresponde un único valor de $y$. Se indica esta correspondencia mediante la ecuación $y = f(x)$.

### Objetivos

1. Entender las diferentes representaciones de una función.
2. Aplicar cuando sea necesario el álgebra básica en problemas relacionados con funciones.
3. Plantear modelos matemáticos.

## 2.3 Funciones

Si tenemos un conjunto $X$ no vacío, a $x$ se la denomina variable definida en $X$, lo cual significa que podemos identificarla con cualquier elemento de $X$. Al conjunto $X$ se lo denomina dominio de la variable.

En los números reales, los intervalos son el dominio más importante de una variable. En este caso, decimos que $x$ **es una variable continua.**

En particular, el dominio de una variable continua puede ser todos los números reales $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, o los reales positivos $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

El dominio de una variable puede tener un número infinito no numerable de elementos, por ejemplo el intervalo (2, 5); o un número infinito numerable, por ejemplo los números naturales. El conjunto $X$ puede ser finito; por ejemplo, si $X$ representa el número de unidades que se venden de un artículo, en este caso $X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Cuando el dominio de la variable $X$ es un conjunto finito o infinito numerable, decimos que $x$ **es una variable discreta**.

**Definición 1.** Dados los conjuntos $X$ y $Y$ (pueden ser iguales), una **función $f$ de $X$ en $Y$** es una regla o ley, de acuerdo con la cual a cada valor de $x$ (variable independiente) del conjunto $X$ se le asigna un único valor bien determinado $y$ (variable dependiente) del conjunto $Y$.

$y = f(x)$ representa el valor de la función $f$ evaluada en $x$. Se dice también que $y$ es la imagen de $x$, dada por $f$ (o que $x$ es la preimagen de $y$).

Al conjunto $X$ se lo denomina **dominio** de la función; se nota $Dm(f)$. Al conjunto $Y$ se lo denomina **codominio** de la función y se nota $CDm(f)$. Los valores de $Y$ que toma la variable y se denominan recorrido o rango de la función, y se nota $Rec(f)$.

Al recorrido de una función se lo denomina también conjunto de **imágenes** y al dominio, conjunto de **preimágenes.**

**Definición 2.** Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas en un conjunto $X$; $f = g$ si para cualquier $x$ en el conjunto $X$ se tiene que $f(x) = g(x)$.

Ejemplo 1. Sean $f$ y $g$ definidas como $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2$; $f = g$ para todo elemento del dominio.

Ejemplo 2. Sean $f$ y $g$ definidas como $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$; $f = g$, para $X = \mathbb{R} - \{1\}$.

Ejemplo 3. Sean $f$ y $g$ definidas como $f(x) = |x|$ y $g(x) = -x$; $f = g$, si $x \in (-\infty, 0]$; sin embargo $f \neq g$ si extendemos el dominio a $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4. Dada la función $f$ definida como $y = f(x) = x^2$ con $x \in \mathbb{R}$, calcular:

a. $f(2)$ y $f(-2)$; b. La preimagen de 9; c. $Dm(f)$ y $Rec(f)$.

Solución.

a. $f(2)=2^2=4$ y $f(-2)=(-2)^2 = 4$

b. Hallar la preimagen de 9 significa hallar los valores de $x$ para los cuales $f(x) = 9$ , es decir, $x^2 = 9$. Resolvemos la ecuación y tenemos:

$$\begin{aligned} x^2-9 &= 0\\ (x+3)(x-3) &= 0\\ x &= -3\\ x &= 3 \end{aligned}$$

c. Como $x^2 = x \cdot x$ y esta operación está definida para cualquier número real, se tiene que $Dm(f) = \mathbb{R}$. Por las propiedades de los números reales se tiene que $x \cdot x = x^2 \geq 0$, y que cualquier número $y \geq 0$ se puede expresar de la forma $y = x^2$, por lo tanto $Rec(f) = [0, \infty)$.

Ejemplo 5. Dada la función $f$ de variable discreta definida en los números enteros como $U = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2.000x - 100.000$, calcular:

a. $f(2)$ y $f(-2)$;

b. La preimagen de 1.900.000;

c. $Dm(f)$.

Si la función $f$ representa utilidad en función del número de unidades vendidas, calcular y explicar cada resultado.

d. $Dm(f)$.

e. $f(0)$ y $f(200)$.

f. ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener una utilidad de \$1'400.000?

Solución. a. $f(2) = -\frac{1}{2}(2)^2 + 2.000(2) - 100.000 = -96.002$

$$f(-2) = -\frac{1}{2}(-2)^2 + 2.000 \cdot (-2) - 100.000 = -104.002$$

b. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2.000x - 100.000 = 1'900.000$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 + 2.000x - 100.000 &= 1'900.000 \quad (\text{multiplicando por } -2)\\ x^2 - 4.000x + 200.000 &= -3'800.000\\ x^2 - 4\,000x + 200.000 + 3'800.000 &= 0\\ x^2 - 4.000x + 4'000.000 &= 0\\ (x-2.000)^2 &= 0\\ x &= 2.000 \end{aligned}$$

c. Como la función $f$ se define para $x$ con operaciones definidas en los números enteros, entonces $Dm(f) = \mathbb{Z}$.

d. El número de unidades vendidas es en este caso un número entero mayor o igual a cero, por lo tanto $Dm(f) = Z^{+} \cup \{0\} = \mathbb{N}$.

e. $f(0) = -\frac{1}{2}(0)^2 + 2.000 \cdot (0) - 100.000 = -100.000$. Esto significa que si no venden unidades se tiene una pérdida de 100.000 que usualmente se identifica con los costos fijos.

$f(200) = -\frac{1}{2}(200)^2 + 2.000 \cdot (200) - 100.000 = 280.000$. Esto significa que la venta de 200 unidades genera una utilidad de 280.000.

f. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2.000x - 100.000 = 1'400.000$ (multiplicando por –2)

$$x^2 - 4.000x + 200.000 = -2'800.000$$
$$x^2 - 4\,000x + 3'000\,000 = 0$$
$$(x - 3.000) \cdot (x - 1.000) = 0$$
$$x = 3.000 \text{ ó } x = 1.000.$$

**Ejemplo 6.** Sea $X$ el conjunto de los números dígitos y $f$ la función que asigna a cada dígito el número de letras del nombre del dígito. Expresar explícitamente las imágenes.

**Solución.** $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

El nombre del dígito 0 (cero) tiene 4 letras por lo tanto $f(0) = 4$; $f(1) = 3$; $f(2) = 3$; $f(3) = 4$; $f(4) = 6$; $f(5) = 5$; $f(6) = 4$; $f(7) = 5$; $f(8) = 4$; $f(9) = 5$. El conjunto de imágenes de $f$ es $Rec(f) = \{3, 4, 5, 6\}$.

**Ejemplo 7.** Hallar el dominio de $f$ definida como $f(x) = x^2 + 3x + 5$.

**Solución.** En esta función se combinan operaciones definidas en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto $Dm(f) = \mathbb{R}$.

**Ejemplo 8.** Hallar el dominio de $f$ definida como $K = f(C) = C + 273$, si la función se considera la conversión de grados centígrados °$C$ a grados Kelvin °$K$.

**Solución.** En principio, se considera que esta función está definida en todos los reales, pero como la temperatura mínima en la naturaleza es –273 °$C$, se establece de antemano que el dominio de esta función es $Dm(f) = (-273, \infty)$.

La temperatura $C = -273$, $K = 0$ se conoce como el cero absoluto.

***Para tener en cuenta:***

*Es usual decir "dada la función f(x)..." lo cual es un error. f(x) es un elemento del recorrido de la función (la imagen de x). La función es f.*

***Para tener en cuenta:***

*Cuando una función $f$ está definida por $y = f(x)$, se dice entonces que $f$ está explícitamente definida (expresada) en términos de $x$.*

En todos los ejemplos anteriores y en la mayoría de los que siguen ocurre esto.

## EJERCICIO 2.1

1. Dadas $f, g, h$, definidas como $f(x) = -x^2 + 9$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $h(x) = 5x$, evalúe:

   a. $f(9)$.

   b. $h(3a + 2)$.

   c. $g(x^2 + 3)$.

   d. $g(f(x + 5))$.

   e. $f(g(2\sqrt{2})$.

   f. $g(f(-2))$.

2. Calcule $f(3)$, $f(-5)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(2x + 5)$, para cada una de las siguientes funciones definidas como:

   a. $f(x) = x + 3$.

   b. $f(x) = -x^2 + 3x + b$.

   c. $f(x) = \ln(3x + 1)$.

   d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

   e. $f(x) = e^{1/(x-3)}$.

   f. $f(x) = (1 - x^2)^2$.

3. Dadas las funciones definidas como:

   $$f(x) = \frac{x + 3}{2x - 5}$$

   $$g(x) = x^2 - 6x;$$

   $$h(x) = 2^{x^2 - x}.$$

Determine las preimágenes de:

a. 3 dada por $f$.

b. $-8$ dada por $g$.

c. $-13$ dada por $g$.

d. $1/2$ dada por $h$.

e. $4$ dada por $h$.

f. $1/4$ dada por $h$.

4. Defina un conjunto $X$ con dos elementos y un conjunto $Y$ con tres elementos.

   a. ¿Cuántas funciones de $X$ en $Y$ se pueden construir?

   b. ¿Cuántas funciones de $Y$ en $X$ se pueden construir?

## 2.4 Funciones de variable y valor reales

A las funciones cuyo dominio y recorrido son el conjunto de los números reales, se las denomina funciones reales de variable real; es decir, si $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

$f$ es una función de valor y variable real.

En adelante sólo consideraremos este tipo de funciones, a menos que se diga otra cosa.

### 2.4.1 Funciones polinómicas

El tipo más sencillo de función de variable real es la **polinómica** (o sencillamente "polinomio"):

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0; \text{ con } a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, n$$

Tiene como dominio $\mathbb{R}$. Si $a_n \neq 0$, se dice que $n$ es el **grado** de $f$.

Dentro de las funciones polinómicas tenemos:

- La función ***constante*** definida como $y = f(x) = k$; tiene como recorrido $Rec(f) = \{k\}$.

- La función ***lineal*** definida como $y = f(x) = mx + b$; cuando $m \neq 0$, tiene como recorrido $Rec(f) = \mathbb{R}$ (ya que si $m = 0$, se tiene una función constante).

  En particular, $y = I(x) = x$ define la función ***idéntica***.

- La función ***cuadrática*** definida como $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$; su recorrido depende de los parámetros $a$, $b$ y $c$. Por ejemplo, si $a > 0$, el recorrido es el intervalo $\left[-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}, \infty\right)$.

Uno de los aspectos más importantes de las funciones polinómicas, como se verá más tarde, es determinar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Explícitamente, si $f(c) = 0$, se dice que $c$ es una raíz de la ecuación polinómica $f(x) = 0$, ó simplemente un cero de $f$.

Análogamente, así como funciona el algoritmo de la división en números enteros, también se tiene un resultado en funciones polinómicas: si $f(x)$ (dividendo) y $g(x)$ (divisor) son funciones polinómicas con $g \neq 0$, existen funciones polinómicas $q(x)$ (cociente) y $r(x)$ (residuo) tales que

$$f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$$

donde el grado de $r$ es menor que el grado de $g$.

Ejemplo 9. Efectuar $2.758 \div 25$.

Solución. $2.758 \div 25$ es equivalente a $(2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8) \div (2 \cdot 10 + 5)$. El proceso algorítmico es:

$$\begin{array}{r|l}
2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8 & 2 \cdot 10 + 5 \\ \cline{2-2}
-2 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^2 \qquad\qquad\quad & 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 \\ \cline{1-1}
2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8 & \\
-2 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10 \quad\;\; & \\ \cline{1-1}
8 &
\end{array}$$

El procedimiento acaba cuando la potencia de 10 del residuo es menor que la mayor potencia de 10 del divisor. Este procedimiento lo podemos extender a las funciones polinómicas: en lugar de trabajar con potencias de 10, lo hacemos con una variable cualquiera. Si en el ejemplo anterior reemplazamos 10 por $x$ tenemos:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 + 7x^2 + 5x + 8 & 2x + 5 \\ \cline{2-2}
-2x^3 - 5x^2 \qquad\qquad & x^2 + x \\ \cline{1-1}
2x^2 + 5x + 8 & \\
-2x^2 - 5x \quad\;\; & \\ \cline{1-1}
8 &
\end{array}$$

Ejemplo 10. Dividir $8x^3 - 36x^2 + 54x - 30$ entre $2x - 3$.

Solución. Para efectuar la división, los polinomios deben estar ordenados de acuerdo al grado.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 8x^3 - 36x^2 + 54x - 30 & 2x - 3 \\ \cline{3-3}
 & \underline{-8x^3 + 12x^2} & 4x^2 - 12x + 9 \\
 & -24x^2 + 54x & \\
 & \underline{+24x^2 - 36x} & \\
 & 18x - 30 & \\
 & \underline{-18x + 27} & \\
 & -3 &
\end{array}$$

El cociente es $Q(x) = 4x^2 - 12x + 9$ y el residuo es $r(x) = -3$.

El caso que interesa es cuando $g(x) = x - a$, de donde resulta:

$$f(x) = (x - a)\, q(x) + r$$

La función residuo sería un polinomio constante (grado cero). Claramente, $f(a) = r$; es decir, al dividir $f$ por $x - a$, el residuo es simplemente $f(a) = r$. Esto es lo que se conoce como:

**Teorema 1 (del residuo).** Si $f$ es una función polinómica y $f(x) = (x - a)\, q(x) + r$, entonces $f(a) = r$.

Ejemplo 11. Hallar el residuo que se obtiene al dividir la función polinómica $f$ definida por $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 5$ y la función lineal $g$ definida por $g(x) = x - 3$.

Solución. Hallamos $f(a) = (3)^3 + 5(3)^2 - 3(3) + 5 = 68$. Por lo tanto el residuo es 68.

Y la situación más interesante ocurre cuando $f(a) = 0$, lo que conduce al

**Teorema 2 (del factor).** Si $f$ es una función polinómica y $f(x) = (x - a)\, q(x) + r$, entonces $f(a) = 0$ si y sólo si $r = 0$.

El teorema del factor nos dice que $a$ es un cero de $f$ si y sólo $(x - a)$ es un factor (lineal) de $f$ (o simplemente, si $f$ es divisible por $x - a$); es decir

$$f(x) = (x - a)\, g(x)$$

En otras palabras, si encontramos un cero de $f$, podemos parcialmente factorizar $f$. De ahí la importancia de encontrar los ceros de una función polinómica (tarea que no es sencilla de llevar a cabo, pero que gracias a la tecnología y al análisis numérico se ha facilitado).

Ejemplo 12. $f(x) = x^n - a^n$ es divisible entre $(x - a)$ con $n \in \mathbb{N}$. En efecto, $f(a) = a^n - a^n = 0$.

Ejemplo 13. $f$ definida por $f(x) = x^n - a^n$ es divisible entre $x + a$ si $n$ es un par cualquiera. En efecto, como $n$ es par, $(-a)^n = a^n$ y $f(a) = a^n - a^n = 0$.

Sea $f$ una función polinómica (en adelante nos referiremos a $f$ sencillamente como el polinomio $f$) de grado $n$, con coeficientes enteros. De la definición de cero de un polinomio $f$, se deduce que este cero es una raíz de la ecuación polinómica $f(x) = 0$. Por lo tanto, determinar las raíces de tal ecuación es equivalente a hallar los ceros del polinomio $f$. En la determinación de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, se tiene en cuenta la multiplicidad de la raíz del polinomio $f(x)$. Por ejemplo, el polinomio $f(x) = x^2 - 2x + 1$, tiene un cero en $x_1 = 1$ con multiplicidad dos; por lo tanto la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene una única raíz o solución $x_1 = 1$, con multiplicidad dos.

Ejemplo 14. Resolver $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

Solución. Factorizamos:

$$(x^2 - 9)(x^2 + 4) = 0$$
$$(x + 3)(x - 3) = 0$$

de donde $x = -3$ ó $x = 3$.

Ejemplo 15. Resolver: $x^3 = 8$.

Solución.

$$x^3 = 8$$
$$x^3 - 8 = 0$$
$$(x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

de donde $x - 2 = 0$ ó $x^2 + 2x + 4 = 0$, con lo cual $x = 2$. Los ceros del otro polinomio no son reales.

Ejemplo 16. Hallar los ceros del polinomio $p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$.

Solución. Factorizamos:

$$x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$
$$x(x-1)^3 = 0$$
$$x(x-1)(x-1)(x-1) = 0$$

de donde $x = 0$; ó $x = 1$; ó $x = 1$; ó $x = 1$. Tenemos dos soluciones (ceros) $x = 0$ ó $x = 1$, con multiplicidad 3.

Ejemplo especial 17. Sean $a$, $b$, y $c$ números reales; probar que si el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene tres ceros reales, entonces $3b \leq a^2$ ó, de manera equivalente, que $a^2 - 3b \geq 0$.

Solución. Sean $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ los ceros de $p$; sin pérdida de generalidad podemos suponer $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ de tal forma que:

$$p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\, x - \alpha\beta\gamma$$

de donde, $a = -(\alpha+\beta+\gamma)$ y $b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ y $c = -\alpha\beta\gamma$. Ahora:

$$\begin{aligned} a^2 - 3b &= (\alpha + \beta + \gamma)^2-3(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma \\ &= (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)+(\gamma^2 + \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma) \\ &= (a - \beta)^2 + (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) \geq 0. \end{aligned}$$

Ejemplo especial 18. Sean $a$ y $b$ los ceros del polinomio $f(x) = 3x^2 + 3mx + m^2-1$ con $m \in \mathbb{R}$. Probar que $f(a^3) = f(b^3)$, o bien $f(a^3) - f(b^3) = 0$.

Solución. $f(x) = 3(x - a)(x - b) = 3x^2 - 3x\,(a + b)+ 3ab = 3x^2 + 3mx + m^2 -1,$

de donde comparamos coeficiente a coeficiente y tenemos:

$$a + b = -m \text{ y } ab = \frac{m^2-1}{3}$$

Así pues:

$$\begin{aligned} f(a^3)-f(b^3) &= (3a^6 + 3ma^3 + m^2-1)-(3b^6 + 3mb^3 + m^2 - 1) \\ &= 3(a^6-b^6) + 3m\,(a^3-b^3) \\ &= 3(a^3-b^3)(a^3 + b^3) + 3m(a^3-b^3) \\ &= 3(a^3-b^3)(a^3 + b^3 + m) \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned} (a^3+b^3) + m &= [(a + b)^3 - 3ab\,(a+b)] + m \\ &= -m^3-3\left(\frac{m^2-1}{3}\right)(-m) + m \\ &= -m + m = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(a^3) - f(b^3) = 0$.

Observamos en los ejemplos resueltos que las ecuaciones de grado $n$ con coeficientes en los números reales tienen a lo más $n$ soluciones o exactamente $n$. Si tenemos en cuenta la multiplicidad de las soluciones, esta propiedad es un caso particular del Teorema Fundamental del álgebra.

Ejemplo 19. Efectuar $(p_3 x^3 + p_2 x^2 + p_1 x + p_0) \div (x - a)$.

Solución. Aplicamos el método de coeficientes indeterminados. Observamos que existen un polinomio $q(x)$ de grado dos, $q(x) = q_2 x^2 + q_1 x + q_0$, y una constante $r$ tales que:

$$\begin{aligned} p_3 x^3 + p_2 x^2 + p_1 x + p_0 &= (q_2 x^2 + q_1 x + q_0)(x - a) + r \\ &= q_2 x^3 + (q_1 - aq_2)\, x^2 + (q_0 - aq_1)\, x + (r - aq_0) \end{aligned}$$

| | | |
|---|---|---|
| $p_3 = q_2$ | por lo tanto | $q_2 = p_3$ |
| $p_2 = q_1 - aq_2$ | por lo tanto | $q_1 = p_2 + aq_2$ |
| $p_1 = q_0 - aq_1$ | por lo tanto | $q_0 = p_1 + aq_1$ |
| $p_0 = r - aq_0$ | por lo tanto | $r = p_0 + aq_0$ |

Observemos que $q_2 = p_3$ y con este coeficiente $q_2$ hallamos $q_1$; con $q_1$ hallamos $q_0$ y con $q_0$ hallamos $r$. Este procedimiento lo podemos esquematizar así:

$$\begin{array}{cccc|l} p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \underline{a} \\ + & aq_2 & aq_1 & aq_0 & \\ \hline q_2 & q_1 & q_0 & r & \end{array}$$

Este esquema, que simplifica estos cálculos. se denomina ***división sintética*** (***Regla de Ruffini***).

Ejemplo 20. Hallar el cociente $q(x)$ y el residuo $r\ (x)$ al dividir $f(x) = 3x^3 - 8x + 1$ entre $g(x) = x + 2$.

Solución. Al expresar $x + 2$ en la forma $x - a$, tenemos que $x + 2 = x-(-2)$; es decir $a = -2$.

$$\begin{array}{cccc|l} 3 & 0 & -8 & 1 & \underline{-2} \\ & 3(-2) & -6(-2) & 4(-2) & \\ \hline 3 & -6 & 4 & -7 & \end{array}$$

Observemos que 0 es el coeficiente de $x^2$. El primer coeficiente 3 se multiplica por –2 para obtener –6, que sumamos con 0 para obtener –6. A continuación, multiplicamos —6 por –2 para obtener 12 y lo sumamos con –8 para obtener 4. Finalmente, se multiplica 4 por –2 para obtener –8, y lo sumamos con 1 para obtener el residuo –7. En consecuencia,

$$3x^3 - 8x + 1 = (3x^2 - 6x + 4)(x + 2) + (-7)$$

Ejemplo 21. Dividir $p(x) = x^5 - 6x^2 - 4x^3 - 9$ entre $x + 3$. Del resultado de la división, deducir el valor $p(-3)$.

Solución.

$$\begin{array}{cccccc|l} 1 & 0 & -4 & -6 & 0 & -9 & \underline{-3} \\ & -3 & 9 & -15 & 63 & -189 & \\ \hline 1 & -3 & 5 & -21 & 63 & -198 & \end{array}$$

Observemos que

$$x^5 - 6x^2 - 4x^3 - 9 = (x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 21x + 63)(x + 3) + (-198)$$

Por lo tanto $p(-3) = 0 + (-198)$. El valor de $p(-3)$ es igual al residuo que se obtiene al dividir $p(x)$ entre $x + 3$.

Ejemplo 22. Si $x - 3$ es un factor de $p(x) = 3x^3 - 4x^2 - kx - 33$, hallar $k$.

Solución. Efectuando la **división sintética** tenemos que:

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -4 & -k & -33 & \underline{3} \\ & 9 & 15 & 3(-k+15) & \\ \hline 3 & 5 & -k+15 & -3k+12 & \end{array}$$

Como $x - 3$ es un factor de $p(x) = 3x^3 - 4x^2 - kx - 33$, por el teorema del factor se deduce que $-3k + 12 = 0$, de donde $k = 4$.

## EJERCICIO 2.2

1. Utilice la división sintética para encontrar $q(x)$ y $r$ tales que

$$f(x) = (x-a)\, q(x) + r.$$

   a. $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 10x + 7$ y $a = 2$.

   b. $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 7x + 16$ y $a = -1$.

   c. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x + 11$ y $a = 1/2$.

2. Si $f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$, emplee la división sintética para determinar $f(-10)$, $f(-5)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$, y $f(10)$. ¿Cuáles son los factores de $f(x)$?

3. Si $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x + k$, determine $k$ tal que $f(3) = -2$.

4. En cada uno de los casos determine el valor de $k$ que satisfaga la condición dada:

   a. $x-2$ sea un factor de $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + kx - 20$.

   b. Al dividir $f(x) = x^{100} - kx^3 + 4$ entre $x + 1$, el residuo sea 2.001.

5. Muestre que $x-1$ es un factor de $f(x) = 14x^{99} - 65x^{56} + 51$.

6. Demuestre que el polinomio $f(x) = x^n + a^n$ es divisible entre $(x + a)$, si $n$ es impar.

### 2.4.1.1 Teorema de las raíces racionales

Si todos los coeficientes de un polinomio de grado $n$, donde $n \geq 1$, son números enteros, y $a$ que es un cero de dicho polinomio es también un número entero, entonces el número $a$ es divisor del término independiente del polinomio. Por lo tanto, pueden ser raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros sólo los divisores del término independiente del polinomio.

Ejemplo 23. Hallar las raíces enteras del polinomio $f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$.

Solución. Como 45 es el término independiente, las posibles raíces enteras son los divisores de 45, es decir el conjunto $\{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 9; \pm 15; \pm 45\}$.

Utilizando el teorema del residuo verifiquemos cuáles de estos términos son raíces:

$f(1) = 1^3 - 1^2 - 21(1) + 45 = 24$; $x = 1$ no es raíz.
$f(-1) = 64$; $x = -1$ no es raíz.
$f(3) = 3^3 - 2^3 - 21(3) + 45 = 0$; $x = 3$ es un cero de $f$, es decir, $f(x) = (x - 3)\, q(x)$.

Hallamos $q(x)$ por división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & -21 & 45 & \underline{3} \\ & 3 & 6 & -45 & \\ \hline 1 & 2 & -15 & 0 & \end{array}$$

Luego $f(x) = (x-3)(x^2 + 2x - 15)$.

Observemos que si queda determinada una raíz $x_1 = a$ del polinomio $f(x)$, dicho polinomio puede ser escrito en la forma $f(x) = (x - a)\, q\,(x)$, donde los coeficientes del polinomio $q(x)$ se calculan con facilidad por división sintética. Para hallar otras raíces del polinomio $f(x)$, encontramos las raíces del polinomio $q(x)$. Es posible que el polinomio $q(x)$ tenga como raíz el mismo número $a$:

$$q(x) = x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$$

Por lo tanto:

$$f(x) = (x-3)(x-3)(x + 5) = (x-3)^2\,(x + 5)$$

Si la raíz $a$ se repite $m$ veces decimos que $a$ es un cero con multiplicidad $m$. En el ejemplo anterior, $x = 3$ es una raíz con multiplicidad 2.

**Teorema 3 (de las raíces racionales).** Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ es un polinomio con coeficientes enteros y $p/q$ es una ***raíz racional irreducible*** de $f(x) = 0$, entonces $p$ es un divisor de $a_0$ y $q$ es un divisor de $a_n$.

Ejemplo 24. Hallar las raíces racionales de $f(x) = 24x^3 - 2x^2 - 5x + 1 = 0$.

Solución. Si $p/q$ es un cero racional de $f(x)$, por el teorema de las raíces racionales $p$ es un divisor de $a_o = 1$ y $q$ es un divisor de $a_n = 24$; por lo tanto los posibles valores de $p/q$ son:

$\pm 1$, $\pm 1/2$; $\pm 1/3$; $\pm 1/4$; $\pm 1/6$; $\pm 1/8$; $\pm 1/12$; $\pm 1/24$.

Verificando algunos de estos valores por la división sintética, tenemos:

$$\begin{array}{rrrr|l} 24 & -2 & -5 & 1 & \underline{-1} \\ & -24 & 26 & -21 & \\ \hline 24 & -26 & 21 & -20 & \end{array}$$

Como $f(-1) = -20$, entonces $x = 1$ **no es raíz racional.**

$$\begin{array}{rrrr|l} 24 & -2 & -5 & 1 & \underline{1} \\ & 24 & 22 & 17 & \\ \hline 24 & 22 & 17 & 18 & \end{array}$$

Como $f(1) = 18$, entonces $x = -1$ **no es raíz racional.**

$$\begin{array}{rrrr|l} 24 & -2 & -5 & 1 & \underline{-1/2} \\ & -12 & 7 & -1 & \\ \hline 24 & -14 & 2 & 0 & \end{array}$$

Como $f(-1/2) = 0$, entonces $x = -1/2$ **es raíz racional** y:

$$f(x) = (x + 1/2)\,(24x^2 - 14x + 2)$$

Para hallar otras raíces del polinomio $f(x)$, encontramos las raíces del polinomio $24x^2 - 14x + 2$. Para este polinomio los posibles valores de $p/q$ son:

$\pm 1/2$; $\pm 1/3$; $\pm 1/4$; $\pm 1/6$; $\pm 1/8$; $\pm 1/12$.

Verificamos con estos valores y tenemos que las otras raíces son $x = 1/3$ y $x = 1/4$; por lo tanto:

$$f(x) = 24x^3 - 2x^2 - 5x + 1 = (2x + 1)(3x - 1)(4x - 1).$$

Nótese que tratar de verificar los candidatos $(p/q)$ del teorema de las raíces racionales puede ser dispendioso. Sin embargo, los siguientes dos teoremas pueden simplificar esto en algo.

**Teorema 4.** Sea $f$ una función polinómica de grado mayor o igual que uno, y sea:

$$f(x) = (x - a)\, g(x) + r$$

Si $r$ y los coeficientes de $g$ son todos no negativos, entonces $f$ no puede tener ceros positivos mayores que $a$.

En este caso se dice que $a$ es una cota superior para los ceros positivos de $f$.

Ejemplo especial 25. Probar que $\sqrt[7]{36}$ no es racional.

Solución. El teorema de las raíces racionales nos provee un método sencillo para verificar la irracionalidad de muchas raíces de números naturales. Sea $x = \sqrt[7]{36}$, de donde obtenemos $x^7 - 36 = 0$. Es decir, queremos examinar los ceros de la función polinómica $f(x) = x^7 - 36$. Los posibles ceros racionales de la función polinómica $f(x) = x^7 - 36$ son:

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 12;\ 36$$

Pero $f$ no puede tener ceros negativos pues $x^7 - 36 < 0$ para $x$ negativos. Esto descarta cualquiera de los candidatos negativos, y así quedan sólo los candidatos positivos. Examinemos el 2:

$$\begin{array}{cccccccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & \underline{2} \\ & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 92 & \end{array}$$

La última fila representa los coeficientes de $g$ y $r$, que son positivos. Esto significa, de acuerdo al teorema 4, que $f$ no puede tener raíces positivas mayores que 2 (es una cota superior para los ceros positivos de $f$); por lo tanto, no es necesario verificar las candidatas restantes positivas. Nótese que 1 tampoco es un cero de $f$ (obsérvese que $f(1) = -35$). Luego $f$ no tiene raíces racionales. Pero $f(\sqrt[7]{36}) = 0$, de donde $\sqrt[7]{36}$ no puede ser racional. Nótese que también por el ejemplo anterior, $\sqrt[7]{36} < 2$.

Ejemplo especial 26. Sea $x$ un número real tal que $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Demostrar que tanto $x$ como $x^2$ son irracionales.

Solución. Puede verse que $x$ no puede ser un racional por el teorema de las raíces racionales; luego $x$ debe ser irracional. Para ver la irracionalidad de $x^2$ es suficiente ver que:

$$x(x^2 + 10) = 20 - 2x^2$$

de donde

$$x = (20 - 2x^2)/(x^2 + 10)$$

Si $x^2$ fuera racional también lo sería $x$, lo cual es una contradicción.

El teorema 4 también nos permite analizar los ceros negativos de una función polinómica: los ceros negativos de $f(x)$ serán los ceros positivos de $f(-x)$ (o también los ceros positivos de $-f(-x)$). Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 27. Analice los ceros negativos de la función polinómica

$$f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 23x - 10$$

Solución. Para esto analizamos los ceros positivos de la función

$$\begin{aligned} g(x) = -f(-x) &= -(5(-x)^3 + 7(-x)^2 - 23(-x) - 10) \\ &= -(-5x^3 + 7x^2 + 23x - 10) \\ &= 5x^3 - 7x^2 - 23x + 10 \end{aligned}$$

Las posibles raíces racionales positivas de la ecuación polinómica

$$5x^3 - 7x^2 - 23x + 10 = 0$$

son 1/5, 2/5, 1, 2, 5 y 10. Examinemos algunas de ellas para ver qué pasa:

$$\begin{array}{rrrr|l} 5 & -7 & -23 & 10 & \underline{1} \\ & 5 & -2 & -25 & \\ \hline 5 & -2 & -25 & -15 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|l} 5 & -7 & -23 & 10 & \underline{2} \\ & 10 & 6 & -34 & \\ \hline 5 & -3 & -17 & 24 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 5 & -7 & -23 & 10 & \underline{5} \\ & 25 & 90 & 335 & \\ \hline 5 & 18 & 67 & 345 & \end{array}$$

Como la última fila de la última es positiva, significa esto, de acuerdo al teorema 4, que $g$ no puede tener ceros positivos mayores que 5; lo cual significa que $f$ no puede tener ceros negativos menores que $-5$ (esto es, $-5$ es una cota inferior para los ceros negativos de $f$).

Antes de mencionar los siguientes dos teoremas es necesario introducir el siguiente concepto: un cambio de signo de un polinomio $f$ ocurre cuando dos coeficientes consecutivos tienen signos opuestos (el polinomio debe estar ordenado de la potencia mayor a la menor o viceversa).

Ejemplo 28. $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + x^3 + 7x^2 - x + 10$ tiene cuatro cambios de signo. En efecto, si colocamos los signos de los coeficientes en el siguiente arreglo (+,—,+,+,—,+), los cambios son del primero al segundo, del segundo al tercero, del cuarto al quinto y del quinto al sexto. $g(x) = x^4 + x^2 - 1$ tiene un único cambio de signo (nótese que no interesa si algún coeficiente es cero; esto no afecta los cambios de signo).

El siguiente teorema es algo bien extraño por su contenido. Fue mencionado en 1637 por Descartes y demostrado por primera vez en 1728 por I. A. Segner.

**Teorema 5 (Regla de los signos de Descartes).** Sea $f$ una función polinómica con coeficientes reales y el término constante no nulo. Entonces, el número de ceros positivos reales de $f$ es igual al número de cambios de signo de $f$, o bien es menor que ese número en un entero par.

Automáticamente, se obtiene su dual. El número de ceros negativos reales de $f$ es igual al número de cambios de signo de $f(-x)$, o bien es menor que ese número en un entero par.

Ejemplo 29. $f(x)=2x^5-5x^4+x^3+7x^2-x+10$ tiene cuatro cambios de signo. Es decir, que $f$ debe tener cuatro ceros reales positivos o dos ceros reales positivos o ninguno. $f(-x) = -2x^5 - 5x^4 - x^3 + 7x^2 + x + 10$ tiene un cambio de signo, lo que significa que tiene exactamente un cero real negativo.

Ejemplo 30. $g(x) = x^4 + x^2 - 1$ tiene un único cambio de signo, por lo tanto $g$ tiene exactamente un cero real positivo. $g(-x) = x^4 + x^2 - 1$ tiene un único cambio de signo; por lo tanto $g$ tiene un único cero real negativo.

Ejemplo 31. La función definida por $f(x) = x^7 - 36$, que se vio en un ejemplo anterior, tiene un único cambio; por lo tanto, un único cero real positivo (a saber $\sqrt[7]{36}$). $f(-x) = -x^7 - 36$ no tiene ningún cambio de signo; por lo tanto, ningún cero real negativo.

Recientemente apareció una *generalización de la regla de Descartes* hecha por V. Komornik (véase *Another Short Proof of Descartes's Rule of Signs*, The American Mathematical Monthly; Nov 2006; 113, 9; pág. 829), que se da a continuación.

**Teorema 6.** Sea $p(x) = a_0 x^{b_0} + a_1 x^{b_1} + ... + a_n x^{b_n}$ una función con coeficientes reales $a_0, a_1, ..., a_n$ no nulos y exponentes reales $b_0, b_1, ..., b_n$ que satisfacen $b_0 > b_1 > ... > b_n$. Entonces $p$ no puede tener más raíces positivas (aún contando la multiplicidad) que el número de cambios de signo en la sucesión $a_0, a_1, ..., a_n$.

Nótese que la función que aparece en el teorema 6 se generaliza a potencias reales cualesquiera.

### 2.4.1.2 (Sección opcional) Teorema fundamental del álgebra

Aunque en este texto no hemos estado interesados en los números complejos, la garantía de que una función polinómica (real o compleja) siempre tiene ceros (complejos) está dada por:

**Teorema 7 (Teorema fundamental del álgebra).** Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ es un polinomio con coeficientes complejos y de grado positivo, entonces $f$ tiene al menos un cero complejo.

En realidad, se puede ver que todo polinomio de grado $n$ positivo tiene exactamente $n$ raíces complejas. Cuando los coeficientes del polinomio $f$ son reales y $z$ es un cero de $f$ entonces $z$ también lo es. En este caso se dice que los ceros de $f$ aparecen por pares conjugados.

Hemos de mencionar que hay una versión compleja del teorema de las raíces racionales que apareció en el 2003, obra de los matemáticos S. Barrs, J. Braselton y L. Braselton (véase *A Rational Root Theorem for Imaginary Roots*, The College Mathematics Journal; Nov. 2003; 34, 5). Aquí se supondrá que el lector está familiarizado con los números complejos.

**Teorema 8 (de las raíces racionales imaginarias).** Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, es un polinomio con coeficientes enteros. Si $x = \alpha + \beta i = \frac{p}{r} + \frac{q}{r} i$ es una ***raíz racional imaginaria*** de $f(x) = 0$, donde α y β son racionales, y $p$, $q$ enteros, entonces $r^2$ es un divisor de $a_n$ y $p^2 + q^2$ es un divisor de $a_0$.

Debe tenerse en cuenta que si $\alpha + \beta i$ es una raíz de $f$, también lo es $\alpha - \beta i$; es decir, que $(x-(\alpha + \beta i))$ y $(x - (\alpha - \beta i))$ son factores de $f$ (debido al teorema del factor); así mismo

$$(x-(\alpha + \beta i))\,(x - (\alpha - \beta i)) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$$

es un factor de $f$.

Ejemplo 32. $g(x) = x^4 + 4 = g(-x)$ no tiene ningún cambio de signo, por lo tanto $g$ no tiene ceros reales positivos ni negativos según la regla de Descartes (o sea que los cuatro ceros que tiene deben ser complejos puros). Los divisores de 4 de la forma $p^2 + q^2$ (con $p$, $q$ racionales) son: $1 = 0^2 + 1^2$, $2 = 1^2 + 1^2$, $4 = 0^2 + 2^2$. Los divisores de 1 de la forma $r^2$ son $1^2$. Las posibles raíces racionales complejas de $g(x)=0$ (por pares conjugados) son:

$$\pm i,\ 1 \pm i,\ -1 \pm i,\ \pm 2i$$

y los posibles factores de $g$, respectivamente, son

$$x^2 + 1,\ x^2 - 2x + 2,\ x^2 + 2x + 2,\ x^2 + 4$$

Haciendo las divisiones de $g$ por cada uno de estos polinomios los factores resultantes son:

$$x^2 - 2x + 2 \quad \text{y} \quad x^2 + 2x + 2$$

De donde

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

## EJERCICIO 2.3

1. Determine las raíces de los siguientes polinomios:

   a. $f(x) = -x^4 + 16.$

   b. $f(x) = x^2 + x - 2.$

   c. $f(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 2).$

   d. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5).$

   e. $f(x) = x^4 - 16.$

   f. $f(x) = (x-1)^2 - 9.$

2. Utilizando el Teorema del factor y la división sintética, factorice los siguientes polinomios:

   a. $f(x) = x^4 - x^2 - 12.$

   b. $f(x) = x^3 + 6x - 20.$

   c. $f(x) = x^4 - 11x^2 - 18x - 8.$

   d. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$

3. Halle las raíces racionales de cada uno de los siguientes polinomios:

   a. $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 2.$

   b. $f(x) = x^3 + 2x - 12.$

   c. $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24.$

   d. $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + 17x - 10.$

4. Factorice los siguientes polinomios:

   a. $f(x) = 24x^3 - 2x^2 - 5x + 1.$

   b. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6.$

   c. $f(x) = 60x^3 - 7x^2 - 6x + 1.$

   d. $f(x) = 15x^3 + 16x^2 - x - 2.$

5. Encuentre los ceros de las siguientes funciones:

   a. $g(x) = e^{3x} - 3e^{2x} + 4e^{x} - 4$.  b. $h(x) = 2e^{4x} + e^{3x} + e^{2x} + 11e^{x} - 6$.

6. Demuestre que los siguientes números son irracionales:

   a. $\sqrt{3}$.  b. $\sqrt[3]{18}$.

   c. $\sqrt{2} - \sqrt{5}$.  d. $\sqrt{n}$, si $n$ no es un cuadrado.

## 2.4.2 Funciones racionales

La función racional es la definida como $r(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios con coeficientes reales, y $g(x) \neq 0$. Sin embargo, conocer aquellos puntos donde $g$ puede ser cero nos ofrecerá mucha información acerca del comportamiento de $r$, como se verá más adelante.

Ejemplo 33. $r(x) = (x^2 + x + 1)/(x^2 - 4))$ es una función racional definida en $\mathbb{R} - \{2, -2\}$.

## 2.4.3 Otros tipos de funciones

En general, las expresiones algebraicas (enteras, polinómicas, racionales, irracionales) definen funciones de variable real. Estas funciones se denominan *algebraicas*.

Otras operaciones entre números reales permiten definir funciones, por ejemplo:

$y = f(x) = a^x$, en particular, $y = e^x$
$y = \log_a x$, $a > 0$, en particular $y = \ln(x)$
$y = \operatorname{sen}(x)$

Las funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas se consideran *funciones elementales*.

Existen otros tipos especiales de funciones de variable real como son:

i. La función de *Dirichlet* que se define como:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es un número racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional} \end{cases}$$

ii. La función signo de $x$:

$$y = f(x) = sign\,(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

iii. La función parte entera de $x$, definida como $y = [\![y]\!] = n$, si $n \leq x < n + 1$, donde $n \in \mathbb{Z}$; por ejemplo: $f(3, 7) = [\![y]\!] = 3$; $f(-4, 23) = [\![y]\!] = -5$.

iv. Sea $D(n)$ el número de divisores primos de $n$. $D$ es una función de $n$, en la cual $n$ varía en los números enteros positivos. Aunque no existe una expresión matemática que permita calcular $D(n)$, para cualquier $n$ del dominio es posible calcular $D(n)$. Por ejemplo, 210 tiene como divisores primos a 2, 3, 5 y 7; por lo tanto, el número de divisores primos de 210 es cuatro; es decir, $D(210) = 4$.

Las funciones tratadas hasta ahora han sido funciones de valor real en una variable real, pero es muy común tratar con funciones de valor real en varias variables reales. Por ejemplo, la función $f$ definida por:

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xz + 2xy - 4x + z^2 + 2yz - 4z + y^2 - 4y - 5$$

es una función real que depende de tres variables reales $x, y, z$.

## 2.5 Gráfica de una función

Al representar en el plano cartesiano la función $y = f(x)$, asignamos a $x$ los valores sucesivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y obtenemos los valores correspondientes de $y$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Estos valores determinan en el plano los puntos cuyas coordenadas son $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_n, y_n)$.

Se denomina gráfica de la función definida como $y = f(x)$, al conjunto de puntos en el plano $(x, y)$, donde $y = f(x)$.

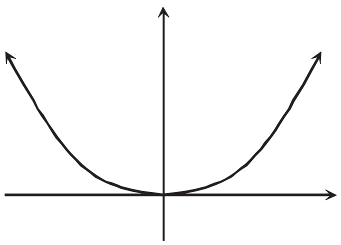
$$\text{Graf}\,(f) = (x, y)|\ y = f(x), x\ Dm(f).$$

Geométricamente, a la Graf $(f)$ se la denomina curva. La gráfica sólo ilustra las propiedades de la función, mas no las demuestra. Debe notarse que en muchos contextos, una función $f$ se define como un conjunto de pares ordenados $(x, y)$ tales que si $(x, y)$ y $(x, z)$ pertenecen a $f$ entonces $y = z$; en este caso Graf $(f)$ es la representación gráfica de todos los pares ordenados que constituyen $f$.

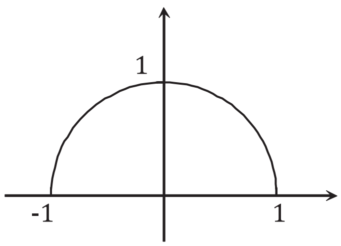
***Para tener en cuenta:***

*La gráfica de una función la construimos usualmente representando en el plano algunos de sus puntos, y con estos puntos la aproximamos a una curva suave. Esta aproximación en principio es un acto de fe, puesto que no se ha determinado que la curva sea suave.*

Ejemplo 34. La función $f$ dada por $f(x) = x^2$, tiene como dominio $\mathbb{R}$, y como recorrido el intervalo $[0, \infty)$. El dominio de $f$ es $\mathbb{R}$, lo que significa que cualquier línea vertical al eje $X$ cruza la gráfica. Que el recorrido de $f$ es $[0, \infty)$ equivale a decir que cualquier línea paralela al eje $X$ cruza la gráfica de $f$ si y sólo si corta al eje $Y$ para los $y \geq 0$.

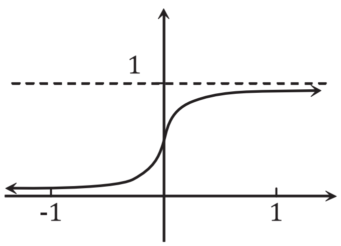


Ejemplo 35. La función $f$, dada por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, tiene como dominio $[-1, 1]$ y recorrido $[0, 1]$.




Ejemplo 36. Trazar la gráfica de una función $f$ que tenga por dominio $\mathbb{R}$ y recorrido $(0, 1)$.

Solución. Nótese que la gráfica dada se "acuesta" asintóticamente sin tocar las rectas horizontales $y = 0$ y $y = 1$, porque el recorrido así lo exige. Éste es tan sólo un ejemplo de una posible gráfica de una función, ya que existen muchas.




Una función $f: X \to \mathbb{R}$ está definida a trozos cuando se puede definir en la forma:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in X_1 \\ f_2(x), & \text{si } x \in X_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & \text{si } x \in X_n \end{cases}$$

En este caso se tiene que $Dom(f) = X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$, y $X_i \cap X_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$, es decir que los $X_k$ deben ser disyuntos dos a dos.

Ejemplo 37. Sea $f$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \in (-1, 0] \\ x-2, & \text{si } x \in [1, 3] \\ 1, & \text{si } x \in (3, \infty) \end{cases}$$

Encontrar:

a. El dominio de $f$.

b. $f(2)$, $f(5)$ y $f(-1)$.

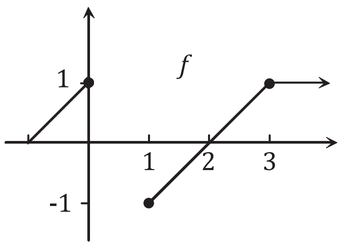
Solución.

a. $\text{Dom}(f) = (-1, 0] \cup [1, 3] \cup (3, \infty) = (-1, 0] \cup [1, \infty)$.

b. Como $2 \in [1, 3]$ (es decir que $x = 2$) satisface la segunda condición.

$x \in [1, 3]$), $f(2) = 2 - 2 = 0$. 5 está en el intervalo $(3, \infty)$ y allí $f$ es constante (siempre vale 1) por tanto $f(5) = 1$. Por otro lado $-1$ no pertenece al dominio de la función (no está en ninguno de los tres intervalos donde $f$ está definida), es decir, $f(-1)$ no está definida.

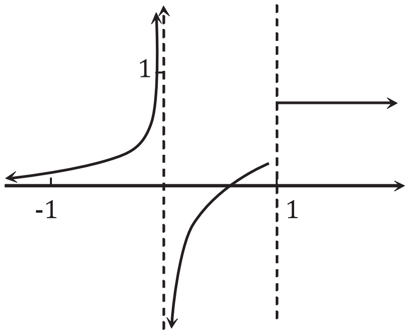
La gráfica de $f$ se bosqueja a continuación.




Los siguientes ejemplos corresponden a gráficas de funciones definidas a trozos.

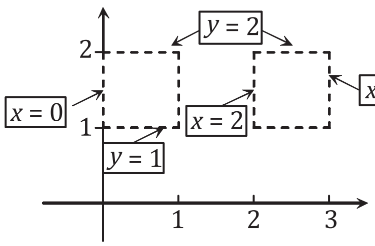
Ejemplo 38. Trazar la gráfica de una función $f$ que tenga por dominio $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ y recorrido $\mathbb{R}$.

Solución. El lector puede comprobar que la gráfica siguiente cumple con los requerimientos.



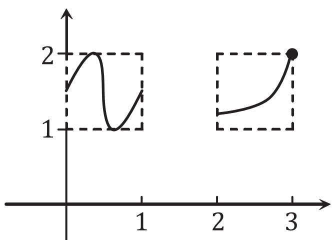

Ejemplo 39. Trazar la gráfica de una función $f$ que tenga por dominio $(0, 1) \cup (2, 3]$ y recorrido $(1, 2)$.

Solución. i) La gráfica de $f$ debe estar contenida en los cuadritos punteados que se muestran a continuación.




ii) De acuerdo con el dominio, la gráfica de $f$ no puede tocar los extremos de los cuadrados en $x = 0$, 1 y 2 pero sí en $x = 3$. En concordancia con el recorrido, no puede tocar los extremos de los cuadrados en $y = 1$ ni en $y = 2$.

iii) Una posible gráfica (claro que sin incluir los cuadrados) puede ser:




Una función cuadrática $f$ está definida por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Su gráfica es una parábola que abre hacia arriba cuando $a$ es positivo y abre hacia abajo cuando $a$ es negativo.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

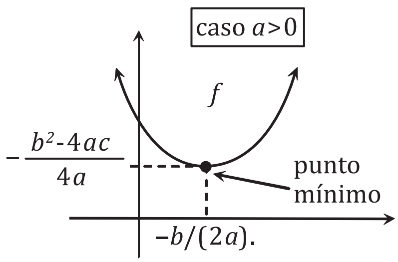
Si $a$ es positivo, $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, y en este caso, el menor valor que puede tomar $f(x)$ ocurre cuando $x=-\dfrac{b}{2a}$ y $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$. En otras palabras, si $a>0$ entonces:

$$f(x) \geq -(b^2-4ac)/4a \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

y se dice que $f$ tiene un punto mínimo en $x=\dfrac{-b}{2a}$. Análogamente, si $a$ es negativo, $f$ tiene un punto máximo en $x=-\dfrac{b}{2a}$. De aquí podemos concluir lo siguiente:

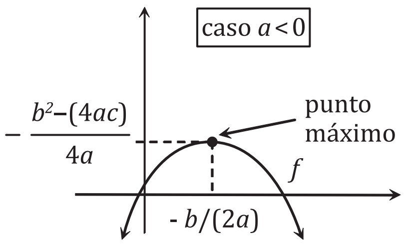
i) Si $a>0$, entonces:

$$Rec(f)=\left[-\frac{b^2-4ac}{4a},\infty\right)$$




ii) Si $a<0$, entonces

$$Rec(f)=\left(-\infty,-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$$




Como se había visto, cuando $b^2-4ac \geq 0$, los ceros de la función cuadrática en el eje $X$ están dados por:

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Si $b^2-4ac<0$, la función no corta al eje $X$.

Cuando se trata, en general, de gráficas de polinomios y funciones racionales, los ceros de la función junto con el método gráfico que se hizo para desigualdades nos proporcionan buenas herramientas para hacer un bosquejo de la función.

Ejemplo 40. Bosquejar la gráfica de la función polinómica $f$ definida por

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 1)$$

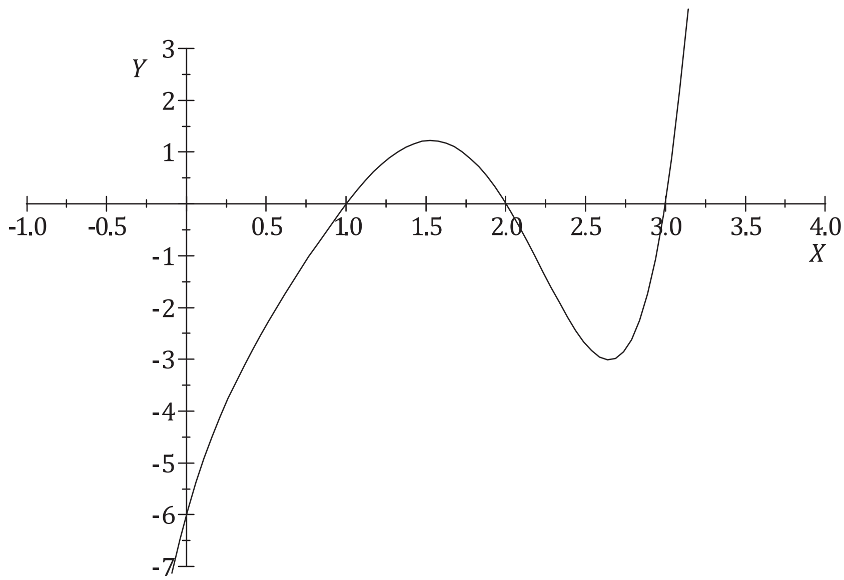
Solución. Los ceros de $f$ están dados por 1, 2, y 3 (éstos son los puntos donde la gráfica $f$ corta al eje $X$). Si recurrimos al método gráfico para resolver desigualdades (sin tener en cuenta ninguna desigualdad), tenemos:

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| $(x - 1)$ | $-$ | + | + | + |
| $(x + 2)$ | $-$ | $-$ | + | + |
| $(x - 3)$ | $-$ | $-$ | $-$ | + |
| $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 1)$ | $-$ | + | $-$ | + |

Aquí no se ha tenido en cuenta el término $x^2 + 1$, pues éste siempre es positivo y no afecta al signo de $f$. En la última fila, en la cual estamos interesados, los signos $-$ y + indican que la gráfica de $f$ está por debajo y encima del eje $X$, respectivamente en aquellos intervalos:

| **Intervalo** | $(-\infty, 1)$ | $(1, 2)$ | $(2, 3)$ | $(3, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| **Signo de $f$** | $-$ | + | $-$ | + |
| **Posición de gráfica respecto del eje $X$** | abajo | arriba | abajo | arriba |

Así un bosquejo rudimentario de $f$ está dado por la gráfica siguiente; por ahora no sabemos si la forma de las curvas es la que corresponde.



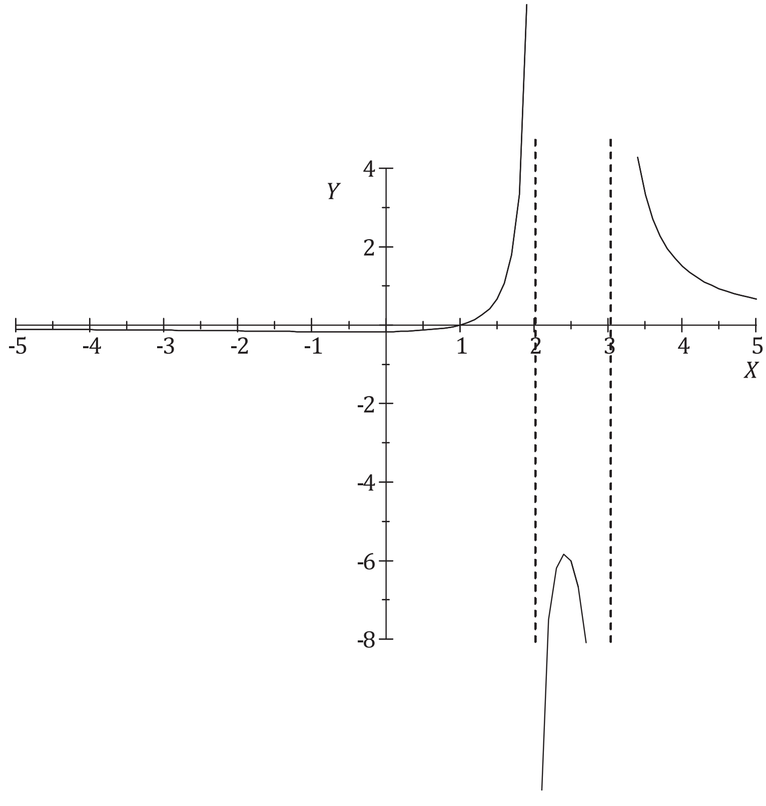
Ejemplo 41. Bosquejar la gráfica de la función racional $r$ definida por

$$r(x) = \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$$

Solución. $r$ es cero cuando cuando $x = 1$ y su dominio está dado por $r - \{2, 3\}$. Recurrimos de nuevo al método gráfico, que es el mismo de la función $f$ del ejemplo anterior:

| **Intervalo** | $(-\infty, 1)$ | $(1, 2)$ | $(2, 3)$ | $(3, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| **Signo de $g$** | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| **Posición de gráfica respecto del eje $X$** | abajo | arriba | abajo | arriba |

Sin embargo, en los alrededores de los puntos que no hacen parte del dominio, se dan las siguientes características: cuando se toman valores de $x$ muy cercanos a 2 pero menores que 2, sus imágenes (signo de $g$ positivo) se hacen grandes positivos (pues el denominador de $r$ se hace muy pequeño con respecto a su numerador). La situación ahora cambia si se toman valores muy cercanos a 2 pero mayores que 2: sus imágenes (signo de $g$ negativo) se hacen grandes en valor absoluto; algo similar ocurre en los alrededores de 3. Se han dibujado dos líneas punteadas en $x = 2$ y en $x = 3$, que se denominan asíntotas verticales de $g$ (no hacen parte de la gráfica); aparte de mostrar la separación de la curva en tres pedazos, la función $g$ seguirá muy de cerca estas líneas en la medida en que $x$ se aproxime a 2 y a 3 respectivamente. La gráfica de $g$ se bosqueja a continuación:



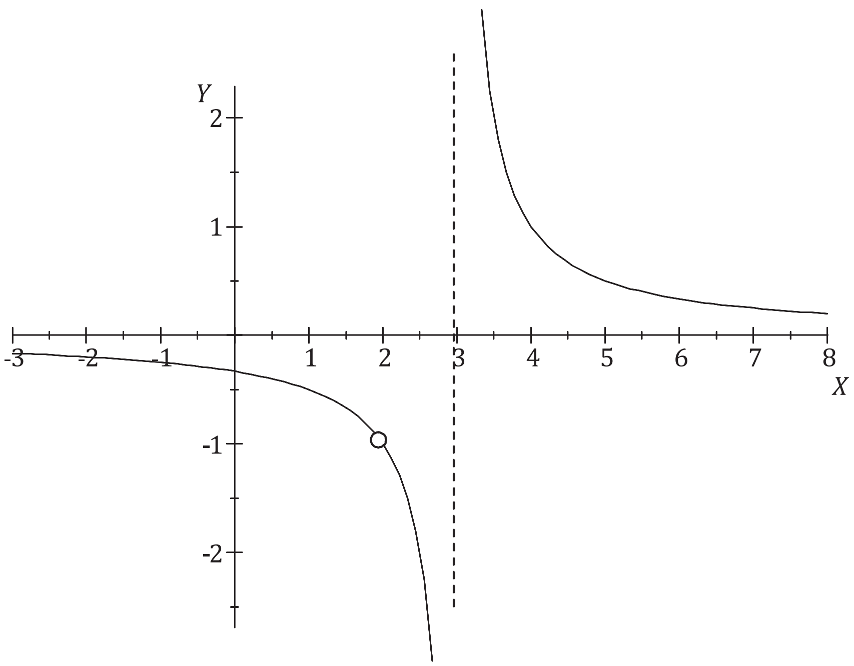
Ejemplo 42. Bosquejar la gráfica de la función racional $s$ definida por:

$$s(x) = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)}$$

Solución. $s$ nunca es cero, pues el único posible candidato sería $x = 2$ y éste no está en su dominio, que está dado por $\mathbb{R} - \{2, 3\}$. Como $x \neq 2$, $s$ estaría dada por

$$s(x) = \frac{1}{x-3}$$

En este caso $s$ tiene signo positivo si $x \in (3, \infty)$ y $s$ tiene signo negativo si $x \in (-\infty, 2) \cup (2, 3)$; no olvidemos que $x = 2$ no hace parte del dominio de $s$. Sin embargo, alrededor del punto $x = 3$, tiene las siguientes características: cuando se toman valores de $x$ muy cercanos a 3 pero menores que 3, sus imágenes se hacen grandes en valor absoluto (pues el denominador de $s$ se hace muy pequeño con respecto a su numerador). Ahora, si se toman valores muy cercanos a 3 pero mayores que 3, sus imágenes se hacen grandes. Adicionalmente, cuando $x$ toma valores exageradamente grandes (en valor absoluto), sus imágenes se hacen exageradamente pequeñas (cercanas a cero); es decir, la gráfica de $s$ tiende a pegarse o a acostarse sobre el eje $X$. La gráfica se rompe no sólo en $x = 3$ sino tambien en $x = 2$, pero lo hace de manera diferente, como se bosqueja a continuación:



## EJERCICIO 2.4

1. En cada uno de los siguientes ejercicios, trace la gráfica de dos funciones que cumplan con las exigencias pedidas.

   a. $Dm(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = \mathbb{R}$.

   b. $Dm(f) = (0, 1)$ y $Rec(f) = (2, 3)$.

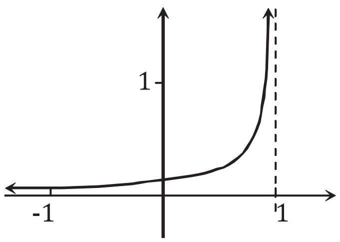
   c. $Dm(f) = (-\infty, 0)$ y $Rec(f) = [0, \infty)$.

   d. $Dm(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = (0, 1) \cup (2, 4]$.

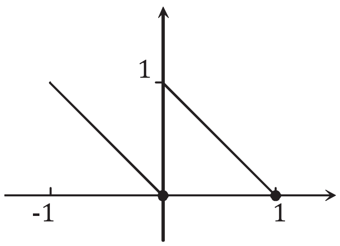
   e. $Dm(f) = [-1, 0] \cup [1, 2]$ y $\mathrm{Rec}(f) = [0, 1]$.

2. Dadas las siguientes gráficas, encuentre su dominio y recorrido. Algunas de ellas están definidas a trozos. Identifíquelas.

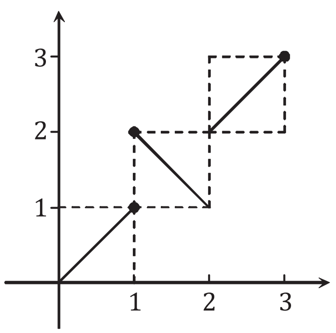
   a.




   b.




   c.



3. Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones definidas como aparecen a continuación.

   a. $f(x) = x + 3$.

   b. $f(x) = [\![y]\!]$.

   c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   d. $f(x) = x^3$.

   e. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

## 2.6 Álgebra de funciones

Al igual que combinamos níumeros reales mediante la adición, sustracción, multiplicación y división, podemos extender este procedimiento a los valores de $f(x)$ y $g(x)$ y obtener los valores $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) \div g(x)$; con $g(x) \neq 0$ estos valores permiten definir otras funciones de variable real así:

### 2.6.1 Adición de funciones

Observemos que la adición de números reales induce una adición de funciones. Si $f$ y $g$ son funciones, la función suma de $f$ con $g$, denotada por $f + g$, se define como:

$$\underbrace{(f + g)}_{\substack{\text{suma}\\ \text{de}\\ \text{funciones}}}(x) = \underbrace{f(x) + g(x)}_{\substack{\text{suma}\\ \text{de}\\ \text{reales}}}$$

### 2.6.2 Multiplicación de funciones

Observemos que la multiplicación de números reales induce una multiplicación de funciones. La función multiplicación de $f$ con $g$, denotada por $f \cdot g$, se define como:

$$\underbrace{(f \cdot g)}_{\substack{\text{multiplicación}\\ \text{de}\\ \text{funciones}}}(x) = \underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{\substack{\text{multiplicación}\\ \text{de}\\ \text{reales}}}$$

En particular, si $f(x) = k$, $(k \cdot g)(x) = k \cdot g(x)$.

Observemos que +, $\cdot$ indican la adición y multiplicación entre funciones, mientras que +, · indican la adición y multiplicación entre números reales.

Se supone que $f(x)$ y $g(x)$ existen, es decir $x \in Dm(f)$ y $x \in Dm(g)$; por lo tanto estos valores están definidos para los valores de $x$ en $Dm(f) \cap Dm(g)$.

De acuerdo a cómo se combinen las operaciones de números reales que definen las funciones, éstas pueden presentar restricciones para algunos valores, entre los cuales tenemos:

## 2.6.3 Cociente de funciones

Si $f$ y $g$ son funciones, la función cociente de $f$ con $g$, denotada por $f/g$, se define como:

$$\underbrace{\left(\frac{f}{g}\right)}_{\substack{\text{cociente}\\ \text{de}\\ \text{funciones}}}(x) = \frac{f(x)}{\underbrace{g(x)}_{\substack{\text{cociente}\\ \text{de}\\ \text{reales}}}}$$

En este caso $Dm(f/g) = Dm(f) \cap Dm(g) \cap \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$.

Ejemplo 43. Hallar el dominio de $f$ definida como $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x^2+7x-18}$.

Solución. Resolvemos la ecuación $x^2 + 7x - 18 = 0$. Se tiene que $x = -9$ ó $x = 2$; por lo tanto $Dm(f) = \mathbb{R} - \{-9, 2\}$.

Ejemplo 44. Hallar el dominio de $f$ definida como $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+4}$.

Solución. La ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene solución en los reales; por lo tanto $Dm(f) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 45. Dadas $f$ y $g$ definidas como $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 1$, defina las funciones: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $f/g$, $7 \cdot f$.

Solución.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2+1) + (x-1) = x^2 + x$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2+1) - (x-1) = x^2 - x + 2$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2+1)(x-1) = x^3 - x^2 + x - 1$$
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = (x^2+1)/(x-1) \text{ con } g(x) \neq 0, \text{es decir}, x \neq 1$$
$$(7 \cdot f)(x) = 7 \cdot f(x) = 7(x^2+1) = 7x^2 + 7$$

Ejemplo 46. Dadas $f$ y $g$ definidas como:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{si } x\in(-1,0] \\ x-2, & \text{si } x\in[1,3] \\ 1, & \text{si } x\in(3,\infty) \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} x^2+x, & \text{si } x\in(-2,1) \\ 2x+3, & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

defina las funciones: $f+g$, $f\cdot g$, $f/g$, $3\cdot f$.

Solución. Debemos inicialmente encontrar la intersección de los dos dominios, $Dom(f)\cap Dom(g)$. Una manera sencilla de hacer esto consiste en trazar la recta real y colocar cada uno de los puntos extremos de los intervalos donde las funciones $f$ y $g$ están definidas; es decir, los extremos en este caso son: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$. Estos puntos separan la recta en siete intervalos abiertos disyuntos dos a dos y luego determinan el valor de cada una de las funciones en dichos intervalos.

| **Intervalo** | $(-\infty,-2)$ | $(-2,-1)$ | $(-1,0)$ | $(0,1)$ | $(1,2)$ | $(2,3)$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Valor de *f*** | ☠ | ☠ | $x+1$ | ☠ | $x-2$ | $x-2$ | $1$ |
| **Valor de *g*** | ☠ | $x^2+x$ | $x^2+x$ | $x^2+x$ | ☠ | $2x+3$ | $2x+3$ |

En los espacios donde se ha colocado ☠ la función no está definida. Así la intersección de los dominios contendrá los intervalos donde las dos funciones estén definidas. En este caso: $(-1,0)$, $(2,3)$, $(3,\infty)$. En seguida, determinamos los valores de $f$ y $g$ en cada uno de los extremos de los intervalos:

| | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Valor de *f*** | ☠ | ☠ | $0+1$ | $0-2$ | $2-2$ | $1$ |
| **Valor de *g*** | ☠ | $(-1)^2+(-1)$ | $0^2+0$ | ☠ | $2(2)+3$ | $2(3)+3$ |

De lo cual se sigue que la intersección de los dominios contendrá también los puntos 0, 2 y 3. Es decir que $Dom(f)\cap Dom(g)=(-1,0]\cup[2,3)\cup[3,\infty)=(-1,0]\cup[2,\infty)$. Resumimos:

| **Intervalos** | $(-1,0]$ | $[2,3)$ | $[3,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| **Valor de *f*** | $x+1$ | $x-2$ | $1$ |
| **Valor de *g*** | $x^2+x$ | $2x+3$ | $2x+3$ |

De donde los valores de $f+g$ y $fg$ se obtienen fácilmente de la tabla:

| **Intervalos** | (−1, 0] | [2, 3) | [3, ∞) |
|---|---|---|---|
| **Valor de $f$** | $x+1$ | $x-2$ | 1 |
| **Valor de $g$** | $x^2+x$ | $2x+3$ | $2x+3$ |
| **Valor de $(f+g)$** | $(x+1)+(x^2+x) = x^2+2x+1$ | $(x-2)+(2x+3) = 3x+1$ | $1+(2x+3) = 2x+4$ |
| **Valor de $(fg)$** | $(x+1)(x^2+x) = x^3+2x+1$ | $(x-2)+(2x+3) = 2x^2-x-6$ | $1(2x+3) = 2x+3$ |

Explícitamente:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+2x+1, & \text{si } x \in (-1,0] \\ 3x+1, & \text{si } x \in [2,3) \\ 2x+4, & \text{si } x \in [3,\infty) \end{cases}$$

$$(fg)(x) = \begin{cases} x^3+2x^2+x, & \text{si } x \in (-1,0] \\ 2x^2-x-6, & \text{si } x \in [2,3) \\ 2x+3, & \text{si } x \in [3,\infty) \end{cases}$$

Para encontrar $f/g$, se debe tener en cuenta que $g(x) \neq 0$ en $Dom(f) \cap Dom(g) = (-1,0] \cup [2,3) \cup [3,\infty)$. Para ello, solucionamos $g(x)=0$. Observamos si $g$ se anula en algún punto de los intervalos que hacen parte del dominio intersección:

Si $x \in (-1,0]$, $g(x) = x^2+x = x(x+1)$, y se anula cuando $x(x+1)=0$; es decir, cuando $x=0$ ó $x=-1$; como $x=0 \in (-1,0]$, la función $f/g$ no está definida en 0; luego $f/g$ está definida en $(-1,0)$.

Si $x \in [2,3)$, $g(x) = 2x+3$, y se anula cuando $2x+3=0$; es decir, cuando $x=-3/2$; como $x=-3/2 \notin [2,3)$, luego la función $f/g$ está definida en $[2,3)$.

Análogamente, si $x \in [3,\infty)$, $g(x)=2x+3$, y se anula cuando $x=-3/2$; pero $x=-3/2 \notin [3,\infty)$. Luego la función $f/g$ está definida en $[3,\infty)$.

Finalmente, la función $f/g$ está definida así:

$$(f/g)(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+x} = \dfrac{x+1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \in (-1,0) \\ \dfrac{x-2}{2x+3}, & \text{si } x \in [2,3) \\ \dfrac{1}{2x+3}, & \text{si } x \in [3,\infty) \end{cases}$$

La función $3f$ está definida por

$$(3f)(x) = \begin{cases} 3x + 3, & \text{si } x \in (-1, 0] \\ 3x - 6, & \text{si } x \in [1, 3] \\ 3, & \text{si } x \in (3, \infty) \end{cases}$$

## 2.6.4 Composición de funciones

Si tenemos dos funciones $f$ y $g$, y evaluamos $f$ en $x$, $x \in Dm(f)$, obtenemos $f(x) \in Rec(f)$; si $f(x) \in Dm(g)$ podemos evaluar $g$ en $f(x)$, y obtenemos $g(f(x))$ que pertenece al $Rec(g)$. En esencia lo que hacemos es tomar un elemento $x$, aplicarle una función, y a ese resultado aplicarle otra función (que puede ser la misma). Esta operación, si está definida, podemos seguir aplicándola sucesivamente cuantas veces sea necesario.

Ejemplo 47. Supongamos una producción en serie que toma un insumo $x$ y lo somete sucesivamente a los procesos $f_1, f_2, f_3, f_4$. Obtenemos como producto final:

$$f_4(f_3(f_2(f_1(x)))).$$

Ejemplo 48. Un capital $x$ expresado en pesos se coloca en un banco que capta en dólares. Si el banco paga un interés anual del 5% y la devaluación del peso con respecto al dólar es del 16% anual, expresar en pesos el valor del capital $x$ en un año (supongamos que un dólar equivale hoy a 2.500 pesos colombianos).

Solución. Tenemos $x$ pesos. Lo expresamos en dólares mediante la función definida como: $z = f(x) = x \div 2.500$; los $z$ dólares colocados en el banco durante un año a una tasa de interés del 5% anual serán $u = g(z) = 1{,}05z$. Finalmente los $u$ dólares los convertimos en pesos a un cambio que por el efecto del 16% de devaluación es $2.500(1{,}16) = 2.900$; se convierten en $y = h(u) = 2.900u$, es decir, $y = h(u)$; como $u = g(z)$ tenemos $y = h(g(z))$. Como $z = f(x)$ tenemos:

$$y = h(g(f(x))) = 2.900 \cdot 1{,}05(x \div 2.500) = 1{,}2185x.$$

---

**Definición 3 .** Sean $X$, $Y$, $Z$ conjuntos no vacíos; $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$, funciones. Definimos $h: X \to Z$ como $h(x) = z$, si existe $y \in Y$ tal que $y = f(x)$ y $z = g(y)$. La función $h$ se llama función compuesta de $f$ con $g$ y se nota:

$$h = g \circ f \text{ definida por } h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

---

Ejemplo 49. Sean $f$ y $g$ definidas por $f(x) = x + 2$, para $0 \leq x \leq 1$, y $g(x) = 3x + 1$ para $4 \leq x \leq 5$, respectivamente. El dominio de $f$ en este caso está dado por $[0, 1]$, por la misma definición de la función; el recorrido de $f$ está dado por $[2, 3]$, como se puede verificar fácilmente. Sin embargo, $g \circ f$ no está definida porque $[2, 3]$ no es igual al dominio de $g$, $[4, 5]$.

Ejemplo 50. Sean $f$ y $g$ funciones definidas como $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 2x - 5$. Evaluar:

a. $(f \circ g)(7)$.

b. $(g \circ f)(3a)$.

c. $(f \circ f \circ g)(x)$.

Solución. a. $(f \circ g)(7) = f(g(7))$; como $g(7) = 2(7) - 5 = 9$, se tiene que:

$$(f \circ g)(7) = f(9) = 9^2 + 3 = 84$$

b. $(g \circ f)(3a) = g(f(3a))$; pero $f(3a) = (3a)^2 + 3 = 9a^2 + 3$, por lo tanto

$$(g \circ f)(3a) = g(9a^2 + 3) = 2(9a^2 + 3) - 5 = 18a^2 + 1$$

c. $(f \circ f \circ g)(x) = f(f(g(x))) = f(f(2x - 5))$; pero

$$f(2x - 5) = (2x - 5)^2 + 3 = 4x^2 - 20x + 28$$

por lo tanto

$$(f \circ f \circ g)(x) = f(4x^2 - 20x + 28) = (4x^2 - 20x + 28)^2 + 3$$

Ejemplo 51. Sea $s$ la función definida como $y = s(x) = \dfrac{2}{(3x+1)^2}$. Expresarla como la compuesta de dos o más funciones.

Solución. Al evaluar $s(x)$, hallamos primero $3x + 1$; a esta expresión la elevamos al cuadrado, y con la expresión que resulta hacemos el cociente entre 2 y ella; es decir, podemos definir las funciones:

$$z = f(x) = 3x + 1, \quad u = g(z) = z^2, \quad y = h(u) = \frac{2}{u}$$

tales que

$$y = h(u) = h(g(z)) = h(g(f(x)))$$

Por lo tanto $s = h \circ g \circ f$.

Ejemplo 52. Sean $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = 2x + 3$. Verifique que $f \circ g \neq g \circ f$.

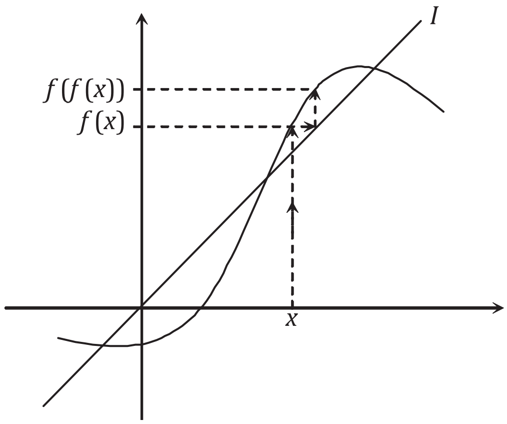
Solución. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 5) = 2(x^2 + 5) + 3$

luego $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 13$, y

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 3) = (2x + 3)^2 + 5$$
$$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 12x + 14$$
$$(g \circ f) \neq (f \circ g)$$

La composición de funciones no es commutativa.

Gráficamente, la composición de una función $f$ consigo misma se puede tratar de la siguiente manera: en un mismo plano trazamos las gráficas de $f$ y de la función identidad $I$. Para un $x$ dado en el dominio de $f$, hallamos su imagen bajo $f$, $f(x)$. Nos movemos horizontalmente hasta encontrar la gráfica de la función identidad, la cual se encontrará a la izquierda o la derecha (¡pero no a ambos lados!), y desde allí subimos o bajamos hasta encontrar la gráfica de $f$. Esta altura será la correspondiente a $f(f(x))$. Esta visualización gráfica es muy útil en sistemas dinámicos, donde se requiere calcular $x$, $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, ..., etc. De manera similar podemos encontrar gráficamente $(g \circ f)(x)$, para dos gráficas de funciones dadas (con la función idéntica de por medio). La gráfica siguiente aclara la situación descrita.




## EJERCICIO 2.5

1. Sean $f$ y $g$ definidas así: $f(x) = 2x + 5$ y $g(x) = k - 3x$.

   a. Calcule: $(f + g)(3)$; $(f - g)(2)$; $(f \cdot g)(-2)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(-5)$.

   b. Defina para $x$ : $f + g$; $f - g$; $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$.

2. Sean $f$ y $g$ funciones definidas así:

$$f(x)=\begin{cases}3x+1, & \text{si } x<-1\\ x^2, & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 2x, & \text{si } x>2\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{si } x<1\\ x-2, & \text{si } x\in[1,3]\\ 3, & \text{si } x>4\end{cases}$$

a. Encuentre el dominio de $f$ y el dominio de $g$.

b. Calcule: $f(3)$, $f(1)$, $g(2)$ y $g(0)$.

c. Defina para $x: f+g; f\cdot g; \dfrac{f}{g}$.

3. Si $f(x)=2x^2+6$ y $g(x)=7x+2$. Encuentre:

a. $(g\circ f)(4)$.

b. $(f\circ f)(3)$.

c. $(g\circ g)(2)$.

d. $(f\circ g)(5)$.

e. $(g\circ f)(5)$.

f. $(f\circ f)(x)$.

g. $(g\circ f)(x)$.

h. $(f\circ g)(x)$.

i. $(g\circ g)(x)$.

j. $(g\circ f\circ g)(x)$.

4. Verifique que $(f\circ f\circ f)(x)=x$ si $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$.

5. Dada la función $f$, exprésela como la composición de dos o más funciones, donde $f$ está definida como:

a. $f(x)=\sqrt[5]{3x-7}$.

b. $f(x)=\dfrac{1}{(3x^4-2x+4)^4}$.

c. $f(x)=\text{In}^3\,(2x-1)2$.

d. $f(x)=\dfrac{e^x-x}{\sqrt{x^2+1}}$.

6. Determine cuáles de los siguientes puntos están sobre la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

   a. (1, 2).

   b. (2, 5/2).

   c. (−1, 0).

   d. (−2, −5/2).

   e. (3, 10/3).

7. En cada una de las siguientes funciones simplifique la expresión $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}, h \neq 0$.

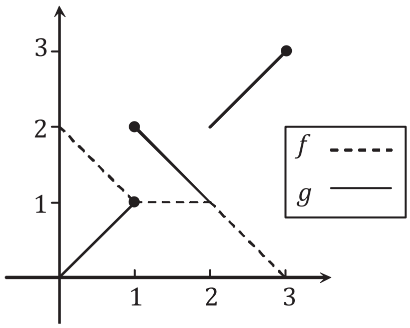
   a. $f(x) = mx + b$.

   b. $f(x) = x^2$.

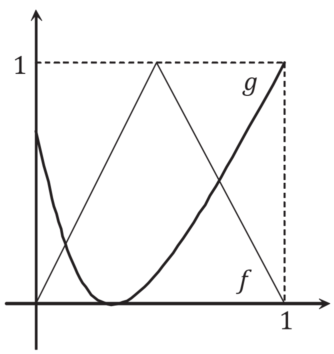
   c. $f(x) = \sqrt{x}$.

   d. $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

8. Dadas las gráficas de $f$ y $g$, encuentre y trace las gráficas aproximadas de $f + g$ y $f - g$.




9. Dadas las gráficas de $f$ y $g$, bosquejar la gráfica de $f \circ g$ y de $g \circ f$.



10. Consideremos $\mathcal{F}$ como el conjunto de funciones definidas en $X$

    $\mathcal{F} = \{f \mid f : X \to X\}$

    Verifique o demuestre que $(\mathcal{F}, \circ)$ cumple las propiedades:

    a. Asociativa.

    b. Modulativa.

    c. ¿Bajo qué condiciones se cumple la propiedad invertiva?

## 2.7 Dominio y recorrido de algunas funciones especiales

Cuando definimos la función $f$ como $y = f(x)$, se considera que ya está definido su dominio. Éste último, o bien se indica explícitamente, o debe establecerse de antemano. Sin embargo, cuando no se indica su dominio, se supone que es un subconjunto "más grande" de números reales para los cuales está definida la función.

De las propiedades de los números reales podemos deducir que las funciones polinómicas y exponenciales se pueden calcular en cualquier número real. La función $f$ definida como $f(x) = \ln(x)$, se calcula sólo en los reales positivos.

i. La función $f$ definida por $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, para $n$ par.

   Esta función está definida para $g(x) \geq 0$.

Ejemplo 53. Hallar el dominio de $f$ definida como $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$.

Solución. Se debe llegar a que $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2) \geq 0$. Resolvemos y tenemos que $x \in (-\infty, -5] \cup [2, \infty)$. Por lo tanto $Dm(f) = (-\infty, -5] \cup [2, \infty)$.

Ejemplo 54. Hallar el dominio de $f$ definida como $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 3}$.

Solución. Para que $f(x)$ esté definida se debe cumplir que $x \geq 0$ y $x \neq 3$, por lo tanto:

$$Dm(f) = [0, \infty) \cap (\mathbb{R} - \{3\}) = [0, \infty) - \{3\}$$

Ejemplo 55. Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{\dfrac{7 - x}{x^2 - 4}}$.

Solución. Para que $f(x)$ esté definida se debe cumplir que $\dfrac{7-x}{x^2-4} \geq 0$. Resolvemos y tenemos que:

$$Dm(f) = (-\infty, -2) \cup (2, 7]$$

ii. $f(x) = \ln(g(x))$

Recordemos que la función logaritmo está definida en los reales positivos; por lo tanto:

$$Dm(f) = \{x \in \mathbb{R} |\ g(x) > 0\}.$$

Ejemplo 56. Hallar el dominio de $f$ definida como $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

Solución. $f$ está definida si $4 - x^2 > 0$. Si resolvemos la inecuación, tenemos que $Dm(f) = (-2, 2)$.

En lo que se refiere al recorrido de una función definida como $y = f(x)$, éste se calcula con base en el dominio ya establecido.

El recorrido de una función se determina por la propia ley (fórmula) que define la función, mientras que el dominio se fija por las condiciones o por el sentido del problema a resolver.

Cuando definimos una función como $y = f(x)$, el $Rec(f)$ se forma con los valores que toma $y$. Por lo tanto, para hallar el recorrido expresamos $x$ en función de $y$, y hallamos los valores de $y$ para los cuales $x$ está definida. Para hallar el recorrido consideraremos algunas funciones en que sea posible expresar $x$ en función de $y$.

Ejemplo 57. Hallar el recorrido de $f$ definida como $y = f(x)\ \dfrac{2x+5}{x-3}$.

Solución.

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+5}{x-3} \\ y(x-3) &= 2x+5 \\ xy - 3y &= 2x+5 \\ xy - 2x &= 3y+5 \\ x(y-2) &= 3y+5 \\ x &= \frac{3y+5}{y-2} \end{aligned}$$

Debemos encontrar los valores de $y$ para los cuales $y - 2 = 0$; esto ocurre cuando $y = 2$; por lo tanto, $Rec(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

Ejemplo 58. Hallar el recorrido de $f$ definida como $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Suponemos que $y$ toma la raíz principal o positiva.

Solución. El recorrido se toma para valores de $y$ mayores o iguales que cero donde $x$ esté definida.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2-1} \\ y^2 &= x^2-1 \\ x &= \sqrt{y^2+1} \\ y^2 &+ 1 \geq 0 \end{aligned}$$

Esta desigualdad en particular se cumple para cualquier valor de $y$ mayor o igual a cero; por lo tanto, $Rec(f) = [0, \infty)$.

Ejemplo 59. Hallar el recorrido de $f$ definida por $y = f(x) = \sqrt{x^2+4}$. Se supone que $y$ toma la raíz positiva.

Solución.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2+4} \\ y^2 &= x^2+4 \\ x &= \sqrt{y^2-4} \\ y^2 &- 4 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolvemos la inecuación y tenemos que $y \in (-\infty, -2 \cup 2, \infty)$; pero los valores positivos de $y$ para los cuales $x$ está definida son $[2, \infty)$; por lo tanto, $Rec(f) = [2, \infty)$.

## 2.8 Funciones definidas implícitamente

Si $f$ está definida explícitamente por $y = f(x) = \sqrt{4-x^2}$, entonces se tiene la ecuación $x^2 + y^2 = 4$. Se dice que la función está definida implícitamente por la ecuación anterior. En general, se dice que una función $f$ está definida implícitamente por una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ si y sólo si para todo $x \in Dom(f)$ se cumple que $F(x, f(x)) = 0$.

Algún comentario se debe hacer con respecto al término "definida", puesto que la ecuación no caracteriza a la función, en el sentido de que puede haber muchas funciones que están definidas por una misma ecuación. En el ejemplo dado, la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ "define" implícitamente dos funciones (soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, al despejar $y$) típicas con el mismo dominio, a saber $f_1$ y $f_2$, definidas respectivamente por:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{4-x^2}, \ \text{para} -2 \leq x \leq 2 \\ f_2(x) &= -\sqrt{4-x^2}, \ \text{para} -2 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Claramente, se tiene que cada una satisface la ecuación. Por ejemplo para $f_1$, se tiene $x^2 + (f_1(x))^2 = 4$, para todo $x \in \text{Dom}(f)$). No obstante, la ecuación también define implícitamente a $g$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} & \text{si } x \text{ es racional con } x \in [-2,2] \\ -\sqrt{4 - x^2} & \text{si } x \text{ es irracional con } x \in [-2,2] \end{cases}$$

y así se pueden construir otras funciones bien raras.

En el ejemplo anterior resultó fácil resolver $y$ en la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, y obtener una de las varias funciones definidas por ésta. En general, no resulta sencillo saber si una ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente alguna función, y en caso de que exista, el problema es a cuál define. En cálculo avanzado, el *teorema de la función implícita* asegura la existencia de dicha función bajo algunos supuestos fuertes. Por ejemplo, se puede demostrar que existe una función $f$ que está definida por la ecuación $F(x, y) = e^y + y - xe^x - 1 = 0$, y que satisface $f(0) = 0$; pero no es posible obtenerla despejando $y$ en la ecuación.

Nótese que si una función $f$ está definida explícitamente por la ecuación $y = f(x)$, entonces también está definida implícitamente por la ecuación $y - f(x) = 0$.

## EJERCICIO 2.6

1. Halle el dominio de $f$ donde:

   a. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

   b. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 3\right)$.

   c. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^3 + 27}$.

   d. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x + 3}}{x - 2}$.

   e. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{3 - x}}$.

   f. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 2x - 35}}$.

g. $f(x) = \dfrac{x+7}{e^{2x-9}-1}$.

h. $f(x) = \dfrac{\ln(2x+3)}{e^{2x}-7e^{x}+12}$.

2. Sean las funciones $f$ y $g$ definidas como $f(x) = -x^2 + 9$ y $g(x) = \sqrt{x^2-9}$. Determine:

   a. El dominio de $f$.

   b. El dominio de $g$.

   c. $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

3. Para cada una de las siguientes funciones halle el dominio y el recorrido:

   a. $y = \dfrac{2}{x} - 1$.

   b. $y = \sqrt{x+4}$.

   c. $y = \dfrac{2}{x(x-1)}$.

   d. $y = \sqrt{1-x^2}$.

   e. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$.

   f. $y = \dfrac{x}{x\,(x-1)}$.

   g. $y = x^2 + 2x + 5$.

   h. $y = |x| - 2$.

4. Encuentre en cada caso una función que esté definida implícitamente por la ecuación dada.

   a. $\dfrac{x+2}{y-1} = 2$.

   b. $\sqrt{x+y} = x$.

   c. $y^2 - 2xy + 1 = x^2$.

## 2.9 Intersecciones con los ejes

Los puntos del eje $X$ tienen por coordenadas $(a, 0)$, donde $a$ es cualquier número real. Por lo tanto, una función $f$ definida por $y = f(x)$ **se intersecta con el eje $X$ si y sólo si** $f(x) = 0$. De manera análoga, los puntos del eje $Y$ tienen por coordenadas $(0, b)$, donde $b$ es cualquier número real; por lo tanto, una función $f$ definida por $y = f(x)$ **se intersecta con el eje $Y$ si y sólo si** $x = 0$. Se obtiene así el punto $(0, f(0))$.

Ejemplo 60. Hallar la intersección con los ejes de la función $f$ definida como:

1. $f(x) = x^2 - 3x - 10$.

**Con el eje $X$**

$x^2 - 3x - 10 = 0$, resolvemos la ecuación y tenemos que $x = 5$ ó $x = -2$; por lo tanto las intersecciones con el eje $X$ son los puntos $(-2, 0)$ y $(5, 0)$.

**Con el eje $Y$**

$f(0) = -10$; la intersección con el eje $Y$ es el punto $(0,-10)$.

2. $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

**Con el eje $X$**

$x^2 + 6x + 10 = 0$; no tiene soluciones reales ($x = -3 \pm i$); por lo tanto la función no intersecta al eje $X$.

**Con el eje $Y$**

Calculamos $f(0)$ . $f(0) = 10$; la intersección con el eje $Y$ es el punto $(0, 10)$.

3. $f(x) = e^{2x-1}$.

**Con el eje $X$**

$e^{2x-1} = 0$; resolvemos la ecuación y tenemos que $2x - 1 = \ln(0)$; como $\ln(0)$ no está definido, la función no intersecta al eje $X$.

**Con el eje $Y$**

$f(0) = e^{-1}$; la intersección con el eje $Y$ es el punto $(0, e^{-1})$.

4. $f(x) = x \cdot \ln(3 - x)$.

**Con el eje *X***

$x \cdot \ln(3 - x) = 0$; resolvemos la ecuación y tenemos que $x = 0$ ó $\ln(3 - x) = 0$. Resolvemos $\ln(3 - x) = 0$, tenemos que $3 - x = e^0 = 1$, de donde $x = 2$. Por lo tanto los cortes con el eje $X$ son $(0, 0)$ y $(2, 0)$.

**Con el eje *Y***

$f(0) = 0 \cdot \ln(3) = 0$; la intersección con el eje $Y$ es el punto $(0, 0)$.

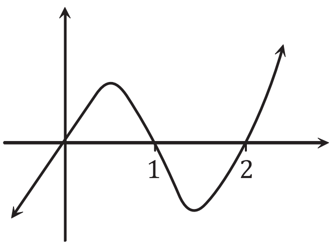
Ejemplo 61. Hallar la intersección con los ejes y bosquejar la gráfica de la función $f$ definida como $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

Solución. $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x - 1)(x - 2)$. De donde $f(0) = 0$, y $f$ se anula cuando $x = 0$ ó $x = 1$ ó $x = 2$. Así pues, el corte con el eje $Y$ es el punto $(0, 0)$ y los cortes con el eje $X$ están en los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(2, 0)$. Las funciones polinómicas tienen la virtud de ser continuas en todo $\mathbb{R}$. Intuitivamente, esto significa que su gráfica no presenta interrupciones: su gráfico es un solo trazo. Esto permite localizar la gráfica cuando se tienen los puntos de corte con el eje $X$. Un análisis de los signos de la expresión $y = x(x - 1)(x - 2)$ da como resultado lo siguiente (recuerde el método gráfico para desigualdades):

| **Intervalo** | $(-\infty, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| **Signos de $x\,(x - 1)\,(x - 2)$** | — | + | — | + |

Esto significa que la gráfica de $f$ se encuentra por debajo del eje $X$ en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, 2)$, puesto que $y$ es negativo en dichos intervalos. Análogamente, la gráfica de $f$ se encuentra por encima del eje $X$ en los intervalos $(0, 1)$ y $(2, \infty)$, ya que $y$ es positivo allí. Un bosquejo de la gráfica se muestra en la página siguiente.

Hasta ahora no se sabe si en verdad la gráfica tiene una sola cresta en el intervalo $(1, 2)$; sólo se conoce que en este intervalo es positiva y que tiene que pasar por 0 y por 1 en el eje $X$. Lo mismo ocurre para $x > 2$: no se sabe si sigue esta tendencia o si en algíun momento se agacha.




En el ejemplo anterior y en muchos otros casos, encontrar los puntos de corte con el eje $X$ puede resultar fácil (claro, en caso de que la función los tenga). Pero como en general, esto no es así, el uso de métodos numéricos (con la ayuda de un computador) constituye una esperanza alentadora, puesto que se obtienen buenas aproximaciones.

## EJERCICIO 2.7

Halle la intersección con los ejes de cada una de las siguientes funciones y si es posible trace su gráfica:

1. $f(x) = x^3 + x$.
2. $f(x) = \ln(2x - 6)$.
3. $f(x) = e^2x + e^x - 20$.
4. $f(x) = x^{-2} - x^{-1}$.
5. $f(x) = x^4 - 4x^3$.
6. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 4}$.
7. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + x - 6}$.
8. $f(x) = \dfrac{2}{3x - 2}$.
9. $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$.
10. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

## 2.10 Función inversa

Dada una función $f$ que asigna a cada $x$ del dominio un $y$, se puede pensar en la regla inversa al elemento $y$; le asignamos $x$, y tenemos que averiguar si esta nueva regla determina una función. Pero esto no siempre ocurre. Por ejemplo, la regla $f$ que asigna a cada $x$ su cuadrado $x^2$, tiene la propiedad $f(1) = 1 = f(-1)$. En este caso, la regla inversa le asignaría al número 1 tanto el 1 como $-1$; por tal motivo no sería función.

Como estamos interesados en aquellas reglas inversas que mantengan la propiedad de ser inversas, se requiere que $f$ satisfaga una condición extra: que sea *inyectiva*.

**Definición 4.** Una función $f$ definida de $X$ en $Y$ es uno a uno o inyectiva, si para cualquier $x_1$ y $x_2$ de $X$ se cumple que:
si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ o equivalentemente: si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

Ejemplo 62. Determinar si es uno a uno cada una de las siguientes funciones definidas como:

a. $f(x) = x^2$, si $x \in \mathbb{R}$.

b. $f(x) = x^2$, si $x \in \mathbb{R}^+$.

c. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}$.

d. Sea $X$ el conjunto de los números dígitos y $f$ la función que asigna a cada dígito el número de letras del nombre del dígito.

Solución. a. Como se había visto, $f$ no es uno a uno, ya que $f(-1) = f(1) = 1$. Dos elementos diferentes del dominio tienen la misma imagen. Si no tenemos esta referencia práctica, partiendo de la definición tenemos que si:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2),\ x_1 \neq 0 \quad \text{y} \\ x_1^2 &= x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ (x_1 + x_2)\cdot(x_1 - x_2) &= 0 \\ x_1 = -x_2 \ &\text{ó}\ x_1 = x_2 \end{aligned}$$

En particular, existe $x_1 = -x_2 \neq x_2$.

b. Partiendo de la definición tenemos que si $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ (x_1 + x_2)\cdot(x_1 - x_2) &= 0 \\ x_1 = -x_2 \ &\text{ó}\ x_1 = x_2 \end{aligned}$$

$x_1 = -x_2$ no es solución porque $-x_2 \notin Dm(f)$. La única solución es $x_1 = x_2$, lo que significa que $f$ es uno a uno.

c. Si $f(x_1) = f(x_2)$ tenemos que $\dfrac{2x_1 + 3}{x_1 - 2} = \dfrac{2x_2 + 3}{x_2 - 2}$, resolvemos:

$$\begin{aligned} (2x_1 + 3)\cdot(x_2 - 2) &= (x_1 - 2)\cdot(2x_2 + 3) \\ 2x_1 \cdot x_2 - 4x_1 + 3x_2 - 6 &= 2x_1 \cdot x_2 - 4x_2 + 3x_1 - 6 \end{aligned}$$

Cancelando $2x_1 x_2$ y $-6$ a cada lado de la igualdad, se tiene:

$$\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 &= -\ 4x_2 + 3x_1 \\ -7x_1 &= -7x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

lo que significa que $f$ es uno a uno.

d. Recordemos que $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; el nombre por ejemplo, del dígito 0, cero, tiene 4 letras; por lo tanto $f(0) = 4$ y $f(3) = 4$, lo que significa que $f$ no es uno a uno.

**Definición 5.** Una función $f$ definida de $X$ en $Y$ es una función sobreyectiva (o sobre), si para cualquier $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $y = f(x)$.

En muchos problemas suponemos que el conjunto $Y$ se restringe al recorrido de $f$, y en este caso $f: X \to f(X)$ es siempre sobreyectiva.

**Definición 6.** Una función $f$ definida de $X$ en $Y$ es biyectiva si es uno a uno y sobreyectiva.

Si $f$ es una función uno a uno y sobre definida de $X$ en $Y$ como $y = f(x)$, la ecuación $y = f(x)$ para $x$ tiene solución única; en este caso estamos expresando $x$ en función de $y$, es decir, $x = g(y)$, donde $g$ es una función definida de $Y$ en $X$. La función $g$ se denomina la función inversa de $f$ y se nota $f^{-1}$.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{f^{-1}} & X \\ x & \mapsto & y = f(x) & \mapsto & x = f^{-1}(y) \end{array}$$

Observemos que si $y = f(x)$ y $x = g(y)$, tenemos $y = f(g(y))$ y $x = g(f(x))$; es decir,

$$f \circ g = I_Y \quad \text{y} \quad g \circ f = I_X$$

notaremos

$$g = f^{-1} \quad \text{y} \quad f = g^{-1}$$

Ejemplo 63. Si $f(x) = 3x + 7$, demostrar que $g(x) = \dfrac{x-7}{3}$ es su inversa.

Solución. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x-7}{3}\right) = 3\left(\dfrac{x-7}{3}\right) + 7 = x$

y

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+7) = \dfrac{(3x+7)-7}{3} = x$

por lo tanto $g = f^{-1}$.

Si $y = f(x)$, $x$ es la variable independiente, $y$ es la variable dependiente; en $f^{-1}$, $x$ se convierte en la variable dependiente, e $y$ en la variable independiente. Es decir, si $y = f(x)$, al intercambiar $x$ por $y$, e $y$ por $x$ tenemos que $y = f^{-1}(x)$.

Ejemplo 64. Hallar la función inversa de $f$ definida como $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-3}$.

Solución. Sea $y = \dfrac{2x+5}{x-3}$; al intercambiar las variables tenemos $x = \dfrac{2y+5}{y-3}$, donde $y = f^{-1}(x)$.

Despejamos:

$$\begin{aligned} x(y-3) &= 2y+5 \\ xy-3x &= 2y+5 \\ xy-2y &= 3x+5 \\ y(x-2) &= 3x+5 \\ y &= \frac{3x+5}{x-2} \end{aligned}$$

por lo tanto la función inversa $f^{-1}$ está definida como

$$y = f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{x-2}$$

Verifiquemos que $(f^{-1}) \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$:

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\frac{2x+5}{x-3}\right) &= \frac{3\left(\frac{2x+5}{x-3}\right)+5}{\left(\frac{2x+5}{x-3}\right)-2} \\ &= \frac{\frac{6x+15}{x-3}+\frac{5}{1}}{\frac{2x+5}{x-3}-\frac{2}{1}} \\ &= \frac{\frac{6x+15+5x-15}{x-3}}{\frac{2x+5-2x+6}{x-3}} \\ &= \frac{11x(x-3)}{11(x-3)} = x \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{-1} \circ f = I$.

Ejemplo 65. Hallar la función inversa de $f$ definida como $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ con $x \geq 2$ . Considerar la raíz positiva.

Solución. $y = \sqrt{x^2-4}$ , $y = f(x)$

Al intercambiar las variables tenemos $x = \sqrt{y^2-4}$, donde $y = f^{-1}(x)$.

Despejamos $y$:

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2-4 \\ y^2 &= x^2+4 \\ y &= \sqrt{x^2+4} \end{aligned}$$

Por lo tanto la función inversa $f^{-1}$ está definida como $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x^2+4}$.

Ejemplo 66. Hallar la función inversa de $f$ definida como $f(x) = x^2$.

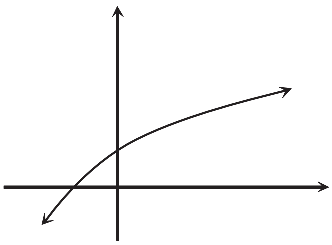
Solución. Como $f$ no es uno a uno, $f^{-1}$ no existe. Observe que al resolver la ecuación $y = x^2$ para despejar $x$, tenemos que ésta no tiene solución única a menos que consideremos sólo la raíz positiva o sólo la raíz negativa. Esto significa que $f^{-1}$ existe si restringimos el $Dm(f)$ a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, en este caso, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$; o a $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$, y en este caso $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

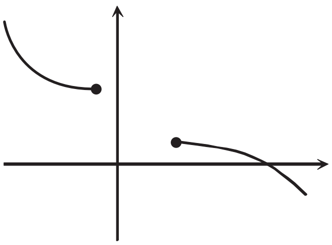
***Para tener en cuenta***

*En los ejemplos anteriores hemos podido resolver (contando con suerte) la ecuación $y = f(x)$ para despejar x, pero esto no siempre es posible. Puede verse que la función $y = f(x) = x + e^x$ es inyectiva y por tanto $f^{-1}$ existe, pero no es posible expresarla de manera explícita; es decir, no es posible despejar x en dicha ecuación.*

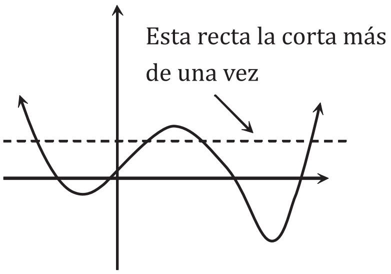
Cuando se tiene acceso a la gráfica de $f$, se puede determinar intuitivamente si es inyectiva. Ser inyectiva significa que para cualquier $y$, si $y \in \text{Rec}(f)$, éste debe ser la imagen de uno y sólo un punto $x \in Dm(f)$. Esto significa que si trazamos cualquier recta paralela al eje $X$ que pase por el recorrido de $f$, ésta cortará la gráfica de $f$ en un único punto si y sólo si $f$ es inyectiva.

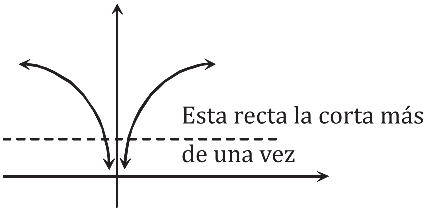
Las siguientes gráficas corresponden a funciones inyectivas:





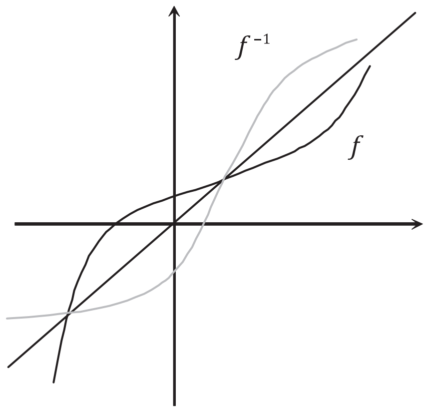
Las siguientes gráficas corresponden a funciones no inyectivas:



Cuando se tiene la gráfica de una función $f$ biyectiva, se puede trazar en el mismo plano la gráfica de su inversa $f^{-1}$, reflejando el gráfico de $f$ a través de la recta $y = x$ (la función identidad), puesto que de esta manera se obtendrán los puntos $(y, x)$ del gráfico de $f^{-1}$.

La gráfica siguiente muestra la situación descrita.




## EJERCICIO 2.8

En los ejercicios del 1 al 10 determine en cada caso si la función es uno a uno y en tal caso encuentre su inversa.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2. $g(x) = -x^2 + 4$.

3. $h(x) = \dfrac{x-4}{2x+3}$.

4. $r(x) = 2^x$.

5. $f(x) = 3x + 7$.

6. $f(x) = x^3 + 1$.

7. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$.

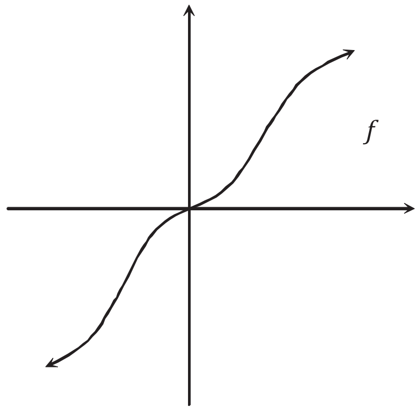
8. $f(x) = 2^{2x+1}$.

9. $f(x) = \ln(x-9)$.

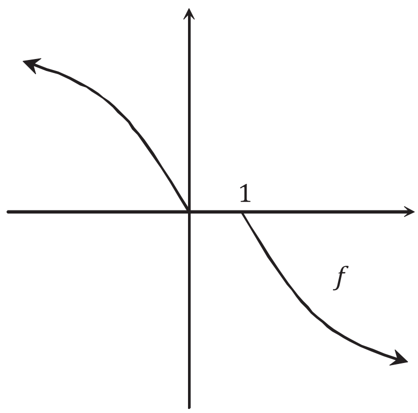
10. $f(x) = e^{-x^2}$.

11. En cada una de las siguientes gráficas de funciones biyectivas, trace la función inversa.

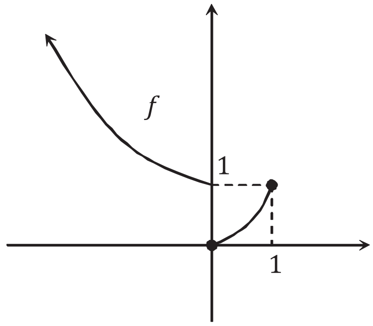
a.



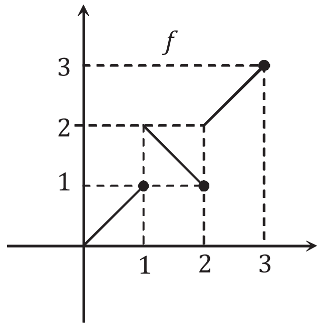

b.



c.




d.




12. Sean los conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$, y $Z = \{2, 4, 6\}$.

   a. Construya una función de $Y$ en $X$ que sea sobreyectiva.

   b. Construya una función de $Z$ en $Y$ que no sea uno a uno y no sea sobreyectiva.

   c. Construya una función de $Z$ en $Y$ que no sea biyectiva.

   d. ¿Es posible construir una función $f$ de $X$ en $Y$ que sea uno a uno?

   e. ¿Es posible construir una función $f$ de $X$ en $Y$ que sea sobreyectiva?

   f. ¿Es posible construir una función $f$ de $X$ en $Y$ que sea uno a uno y sobre?

   g. ¿Es posible construir una función $f$ de $X$ en $Z$ que sea uno a uno?

   h. ¿Es posible construir una función $f$ de $X$ en $Z$ que sea sobreyectiva?

   i. ¿Es posible construir una función $f$ de $X$ en $Z$ que sea uno a uno y sobre?

   j. ¿Es posible construir una función $f$ de $Y$ en $Z$ que sea sobreyectiva?

   k. ¿Es posible construir una función $f$ de $Y$ en $Z$ que sea uno a uno y sobre?

# 2.11 Otros tipos de funciones

## 2.11.1 Funciones pares e impares

Se dice que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ es simétrico respecto del origen de coordenadas, si $-x \in X$ para cualquier $x \in X$.

Ejemplo 67. $\mathbb{R}$; $[-a, a]$; $\mathbb{R} - \{0\}$, $\{ x : |x| \geq a \}$ son conjuntos simétricos.

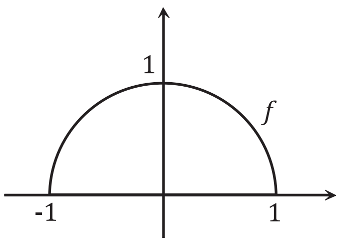
**Definición 6.**
i) Una función $f$ definida en un conjunto simétrico $X$ respecto del origen de coordenadas es **par**, si $f(x) = f(-x)$ para cualquier $x \in X$.
ii) Una función $f$ definida en un conjunto simétrico $X$ respecto del origen de coordenadas es **impar**, si $f(-x) = -f(x)$ para cualquier $x \in X$.

Obsérvese que una función par no puede ser inyectiva, pues $x \neq -x$ y $f(x) = f(-x)$.

Ejemplo 68. Verifique que $f$ definida como $y = \sqrt{1 - x^2}$ es par.

Solución. $Dm(f) = -1, 1$ es simétrico y $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$; por lo tanto $f$ es par.

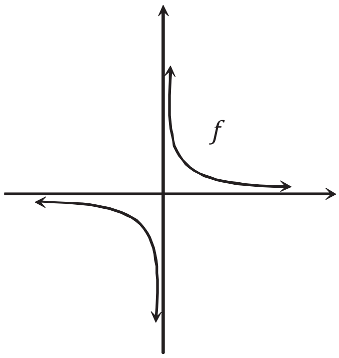
Observemos que si $y = f(x)$ es par, su gráfica es simétrica respecto del eje $Y$, es decir, si $(x, y) \in \text{Graf}(f)$ entonces $(-x, y) \in \text{Graf}(f)$.




Ejemplo 69. Verifique que $f$, definida como $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$, es impar.

Solución. $Dm(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ es simétrico y $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$; por lo tanto $f$ es impar.

Observe que cualquier función impar $y = f(x)$ es simétrica respecto al origen de coordenadas; es decir, si $(x, y) \in \text{Graf}(f)$ entonces $(-x, -y) \in \text{Graf}(f)$.




Existen funciones que no son pares ni impares, como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 70. Sea $f(x) = y = 2^x$.

$$f(-x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}, \frac{1}{2^x} \neq 2^x,$$

Es decir, $f(-x) \neq f(x)$; por lo tanto $f$ no es par. Por otro lado,

$$-f(x) = -(2^x), -(2^x) \neq \frac{1}{2^x}$$

Es decir, $-f(x) \neq f(-x)$; por lo tanto $f$ no es impar. Así $f$ no es ni par ni impar.

***Para tener en cuenta***
*Toda función f definida en un conjunto X simétrico respecto del origen de coordenadas puede ser representada como la suma de dos funciones g y h, cada una de las cuales está definida en el mismo conjunto X, y una de las cuales (g) es par y la otra (h) es impar; a saber:*

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \; h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

## 2.11.2 Funciones acotadas

**Definición 7.** i) Una función $f$ definida en $X$ es acotada inferiormente, si existe un número $m$ tal que $m \leq f(x)$, para todo $x \in X$. El número $m$ recibe el nombre de cota inferior de $f$.

ii) Una función $f$ definida en $X$ es acotada superiormente, si existe un número $M$ tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in X$. El número $M$ recibe el nombre de cota superior de $f$.

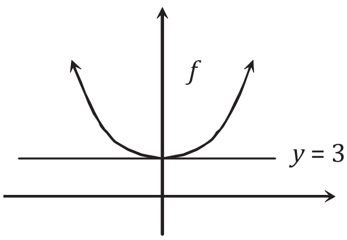
ii) Una función $f$ definida en $X$ es acotada, si existe un número $c$ tal que $|f(x)| \leq c$, para todo $x \in X$. El número $c$ recibe el nombre de cota de $f$.

---

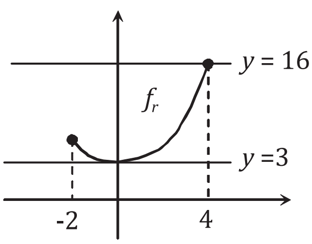
Gráficamente, si $m \leq f(x)$ para todo $x \in X$, significa que la gráfica de $f$ está por encima de la recta $y = m$, en todo $x \in X$. Análogamente, $f(x) \leq M$ para todo $x \in X$ significa que la gráfica de $f$ está por debajo de la recta $y = M$ en todo $x \in X$. Finalmente, si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in M$, la gráfica de $f$ se encuentra entre las rectas $y = m$ y $y = M$.

Obsérvese que si una función $f$ es acotada, también lo es inferiormente y superiormente (y también recíprocamente), ya que $—c \leq f(x) \leq c$.

Ejemplo 71. Sea $f$ definida por $f(x) = x^2 + 3$. $f$ es acotada inferiormente, puesto que $3 \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, pero no es acotada superiormente. Nótese que la gráfica de $f$ está por encima de la recta $y = 3$. Cualquier otro número menor o igual que 3 hubiese servido como cota superior para $f$.

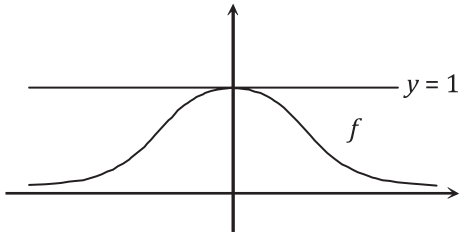



Ejemplo 72. En el ejemplo anterior la función $f$ no es acotada superiormente. Sin embargo, si obligamos a $f$ a tomar sus valores de $x$, por ejemplo, en el intervalo $[-2, 4]$, (en otras palabras, restringimos a $f$), esta nueva función $f_r$ no sólo es acotada inferiormente por 3 sino que también es acotada superiormente, por ejemplo, por 16, es decir, $3 \leq f_r(x) \leq 16$, para todo $x \in [-2, 4]$. La gráfica ilustra mejor esta situación.



Si $m$ o $M$ existen, no necesariamente pertenecen al recorrido de la función. Por otro lado, debemos notar que determinar si una función es acotada (en cualquiera de las tres formas) no es un trabajo sencillo en general. De ahí que si se tiene acceso a la gráfica podría resultar sencillo hablar acerca de su acotabilidad. No obstante, si una función $f$ es continua en un intervalo cerrado y acotado $I$, entonces la función es acotada, como se verá más tarde.

Ejemplo 73. Sea $f$ definida por la ecuación $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $M = 1$ es una cota superior para $f$; $f(0) = 1$ y $m = 0$ es una cota inferior, pero no existe $x$ tal que $f(x) = 0$.

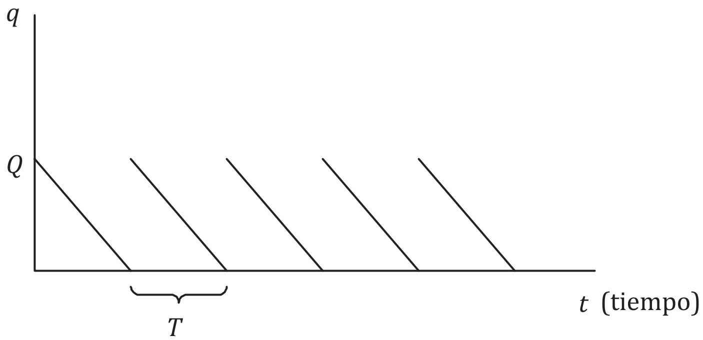



## 2.11.3 Funciones periódicas

Una función definida como $y = f(x)$ se llama periódica, si existe $T > 0$ tal que para cualquier $x$ del dominio, $f(x + T) = f(x)$. El menor de estos $T$ se denomina período de la función. Una función periódica nunca es inyectiva. ¿Por qué?

Ejemplo 74. $f(x) = \text{sen}(x)$ es periódica porque $sen(x + 2\pi) = sen(x)$, para cualquier número real $x$; $2\pi$ es el **período**.

Ejemplo 75. El modelo clásico de inventarios *CEP* (cantidad económica de pedido), donde $Q$ es el nivel óptimo de pedido para minimizar los costos y $T$ es el tiempo de reabastecimiento, es decir, el tiempo en que este inventario $Q$ se reduce a cero, genera una función periódica $f$ tal que $q = f(t)$, donde $f(t + T) = f(t)$, con $t > 0$.



## EJERCICIO 2.9

1. Verifique si la función dada es par, impar o ni lo uno ni lo otro.

   a. $f(x) = |x| + 3$.

   b. $f(x) = \text{sign}(x)$.

   c. $f(x) = e^{|x|}$.

   d. $f(x) = \frac{1}{x}$.

   e. $f(x) = x^2 + x$.

   f. $f(x) = x^3 - x$.

2. Para cada una de las siguientes funciones, haga el análisis (*Dom*, *Rec*, intersecciones con los ejes, si es par, impar y si es uno a uno).

   a. $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

   b. $f(x) = e^{-|x|}$.

   c. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

   d. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

   e. $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

   f. $f(x) = x^2 + x$.

3. En cada caso bosqueje la gráfica de una función que cumpla las condiciones exigidas.

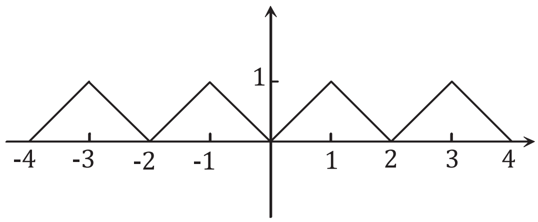
   a. $Dm(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = \mathbb{R}^+$ y sea 1 a 1.

   b. $Dm(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $Rec(f) = (0, \infty)$. ¿Es posible que sea uno a uno?

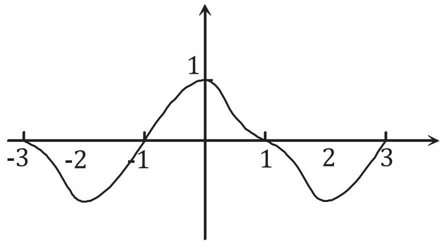
   c. $Dm(f) = (a, \infty)$, $Rec(f) = (-\infty, b)$, corta al eje $X$ en el punto $(0, 0)$. ¿Es posible que sea uno a uno?

4. Dada la gráfica de $f$, determine: $Dm(f)$, $Rec(f)$. ¿Es uno a uno? ¿Es par? ¿Acotada? ¿Periódica?

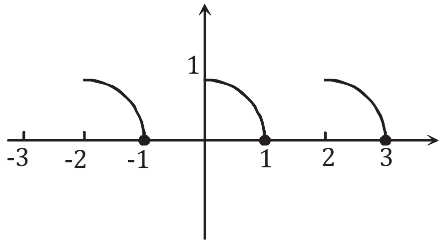
a.



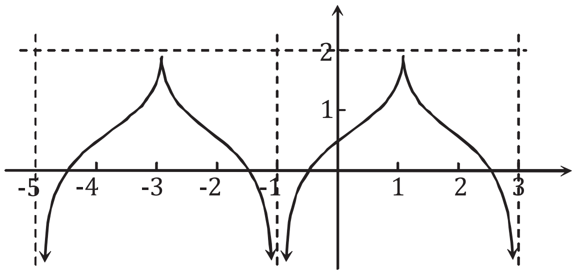

b.




c.




d.




5. Verifique las siguientes afirmaciones:

a. La suma de funciones pares es par.

b. La suma de funciones impares es impar.

c. La composición de funciones pares es par.

## 2.12 Modelos matemáticos

Hasta ahora se han construido funciones de variable real partiendo de las operaciones básicas entre números reales (funciones elementales). Combinando estas funciones, obtenemos nuevas funciones como $f \pm g$, $f \,.\, g$, $f \circ g$, $f^{-1}$, etc., de acuerdo a conveniencias matemáticas o gustos particulares. Pero la necesidad de cuantificar situaciones prácticas motiva la construcción de funciones que las expliquen. A estas funciones las denominamos modelos matemáticos.

### 2.12.1 Representación del modelo

De acuerdo a como haya sido construida la función que explica el modelo, la representación del modelo es usualmente:

***1. Una fórmula***, por ejemplo $y = f(x) = x^2 - 7x + 1$. En estos casos, se maneja el concepto de variable dependiente e independiente. Gracias al desarrollo de la geometría analítica y el cálculo, hacemos un análisis de la función y obtenemos una representación gráfica que permita una mejor comprensión de la fórmula.

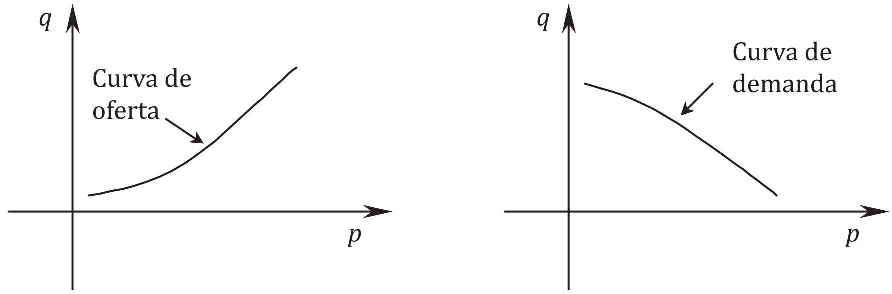
Ejemplo 76. El ingreso de la venta de un producto depende del número de unidades y del precio unitario; si el precio unitario es de \$10.000 y el número de unidades vendidas es $x$, el ingreso $I(x)$ es $I(x) = 10.000x$.

***2. Una tabulación:*** Es posible que se tengan algunos valores de la función, que hayan sido obtenidos a través de la experiencia (datos históricos). En este caso, lo más aconsejable es la tabulación y la representación gráfica de estos valores.

A partir de esta información, se construye la fórmula o el modelo matemático. Este procedimiento es objeto de estudio de la estadística, entre otras, y no lo abordaremos aquí.

***3. Una representación semántica o cualitativa:*** conociendo el comportamiento o algunas propiedades de la función, o algunos valores (condiciones iniciales) del fenómeno que se esté estudiando, bosquejar el gráfico de la función.

Ejemplo 77. Sabemos que la cantidad $q$ de un artículo que se fabrica y vende depende de su precio unitario $p$. Los fabricantes y consumidores reaccionan de manera diferente a los cambios de precios, lo que genera dos funciones. Éstas se denominan *curva de oferta*, que representa, dependiendo del precio, las cantidades que los fabricantes están dispuestos a ofrecer (a mayor precio se producen más artículos); y *curva de demanda*, que representa, dependiendo del precio, las cantidades que los consumidores están dispuestos a comprar (a menor precio se consumen más artículos). Con esta descripción, una representación gráfica es:




La costumbre (cosas de economistas) es que la variable independiente $p$ esté en el eje vertical y la variable dependiente $q$ en el eje horizontal.

*¿Cuál de todas estas tres representaciones es la más apropiada? En principio esto depende de las conveniencias o de las necesidades. Lo natural es utilizar la que mejor información proporcione y a partir de ésta construir las otras.*

## 2.12.2 Construcción de modelos matemáticos

Construir un modelo matemático es partir de alguna información que tengamos del fenómeno que queramos explicar y encontrar la función o conjunto de funciones que lo expliquen.

Ejemplo 78. El costo de franqueo de una carta en función de su peso en gramos está dado por la función $f$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 100, & \text{si} \quad 0 < x \leq 50 \\ 200, & \text{si} \quad 50 < x \leq 100 \\ 300, & \text{si} \quad 100 < x \leq 150 \end{cases}$$

Las situaciones prácticas también llevan a **combinar** los valores de dos o más funciones (que son números reales) y a obtener **nuevos modelos**.

### 2.12.2.1 Funciones de ingreso, costo y utilidad

**Para ingresos:** $R(x) = mx$ , donde $R$ es la función ingreso; $x$ representa el número de unidades vendidas, y $m$ representa el ingreso por unidad o precio de venta.

**Para costos: Costo total** = **Costos variables** + **Costos fijos** o sea, $C(x) = mx + b$, donde $C$ es la función de costo total; $x$ representa el número de unidades producidas, $m$ representa el costo por unidad, $mx$ representa los costos variables, y $b$ los costos fijos.

**Para utilidad: Utilidad** = **Ingresos — Costos totales,** es decir, $U(x) = mx + b$, donde $U$ es la función utilidad, $x$ representa el número de unidades producidas y vendidas, $m$ representa la utilidad por unidad vendida, y $b$ la pérdida cuando no se venden unidades. Este valor corresponde a los costos fijos.

Si el costo total $C(x)$ de producción es mayor a los ingresos $R(x)$, hay pérdida (al producir $x$ unidades); si los ingresos son mayores a los costos, hay ganancia.

Cuando los ingresos son iguales a los costos, es decir, $R(x) = C(x)$, o equivalentemente, $U(x) = 0$, el valor de $x$ que cumple esta igualdad genera el punto $(x, R(x))$, que se denomina punto de equilibrio.

Ejemplo 79. Si $p(x)$ representa el precio unitario de un artículo para una demanda de $x$ unidades, el ingreso por las $x$ unidades está dado por la expresión $R(x) = x \cdot p(x)$.

Ejemplo 80. Si un artículo se produce en dos fábricas y $f(x)$ representa la cantidad producida en una de las fábricas y $g(x)$ la producida en la otra, donde $x$ representa el número de días, la participación porcentual de la primera fábrica en un número de días $x$ está dada por:

$$h(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} 100\%$$

### 2.12.2.2 Modelos lineales

Como habíamos notado, una función lineal $f$ está definida por la ecuación $f(x) = mx + b$. La gráfica de esta función es una línea recta: $m$ es la pendiente o inclinación de la recta y el punto $b$ es el punto de corte con el eje $Y$. Dados dos puntos distintos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ de la gráfica de una función lineal $f$, se puede ver que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$$

de tal forma que

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

Cuando se da la pendiente $m$ y un punto $(x_1, y_1)$ de la gráfica de $f$, la función está definida por

$$f(x) = m(x - x_1) + y_1$$

Debe notarse que rectas verticales no representan la gráfica de ninguna función. Sin embargo, si esta recta cruza al eje $X$ en $a$, la ecuación de la recta vertical está dada por $x = a$.

Ejemplo 81. El costo de procesar un kilo de café es de US \$0,50 y los costos fijos diarios son de US \$300.

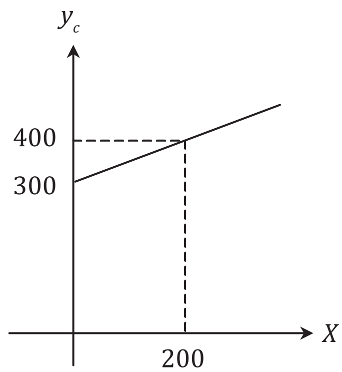
a. Hallar la ecuación de costo y su representación gráfica.

b. Hallar el costo de procesar 1.000 kilos de café en un día.

c. Con un presupuesto de US $2.000, ¿cuántos kilos se pueden procesar diariamente?

Solución. a. Si $C(x)$ representa el costo en dólares de procesar $x$ kilos de café por día, de acuerdo al modelo lineal tenemos que $m = 50$ centavos de dólar, o sea US $0,50, y los costos fijos diarios son $b = 300$; por lo tanto $C(x) = 0.5x + 300$.

Para hacer la gráfica de la ecuación, como se trata de una recta es suficiente encontrar dos puntos; si reemplazamos $x = 0$ y $x = 200$ en $C$, tenemos $C = 300$ y $C = 400$ respectivamente, que corresponden a los puntos (0, 300) y (200, 400). Por tanto la gráfica que se obtiene es:




b. Sustituyendo $x$ por 1.000 en $C$ tenemos:

$C(1000) = 0{,}5(1000) + 300 = 800$. Por lo tanto el costo de procesar 1.000 kilos de café al día es de US $ 800.

c. Para un presupuesto de US $2.000, reemplazamos en $C(x) = 0.5x + 3000$ y tenemos:

$$\begin{aligned} 2.000 &= 0.5x + 300 \\ 0.5x &= 1.700 \\ x &= 3.400 \text{ kilos} \end{aligned}$$

Ejemplo 82. Si definimos las funciones de ingreso $R$, de costo $C$ y de utilidad $U$, como $R(x)=250x$, $C(x) = 150x + 200.000$ y $U(x) = R(x) - C(x)$, tenemos que $U(x) = 100x - 200.000$, donde $x$ es el número de unidades producidas y vendidas. Determinar:

a. ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener un ingreso de $2’000.000?

b. ¿Cuántas unidades se producen con un capital de $1’850.000?

c. ¿Cuántas unidades se deben producir y vender para obtener una utilidad de $500.000?

d. Halle el punto de equilibrio.

Solución. Observemos que en cada una de las preguntas a, b y c, conocemos el valor de $R(x)$, $C(x)$ y $U(x)$. Necesitamos hallar una expresión para calcular el valor de $x$ (el número de unidades); es decir, necesitamos $R^{-1}(x)$, $C^{-1}(x)$, $U^{-1}(x)$; por lo tanto:

a. Si $y = R(x) = 250x$, entonces $R^{-1}(x) = \frac{x}{250}$. Para obtener un ingreso de 2'000.000 necesitamos vender $R^{-1}(2'000.000) = \frac{2'000.000}{250} = 8.000$ unidades.

b. Si $y = C(x) = 150x + 200.000$, entonces $C^{-1}(x) = \frac{x - 200.000}{150}$. Con \$1'850.000 producimos:

$C^{-1}(1'850.000) = \frac{1'850.000 - 200.000}{150} = 11.000$ unidades.

c. Si $y = U(x) = 100x - 200.000$, entonces $U^{-1}(x) = \frac{x + 200.000}{100}$. Para obtener una utilidad de \$500.000 necesitamos producir y vender:

$U^{-1}(500.000) = \frac{500.000 + 200.000}{100} = 7.000$ unidades.

d. Para encontrar el punto de equilibrio, resolvemos la ecuación $U(x) = 100x - 200.000 = 0$, donde $x = 2.000$. Significa que se deben producir y vender 2.000 unidades, que generan unos ingresos iguales a los costos $R(2.000) = C(2.000) = 500.000$. El punto de equilibrio es la pareja (2.000, 500.000).

Ejemplo 83. El costo de fabricar 10 artículos al día es de US \$350, mientras que fabricar 20 artículos del mismo tipo cuesta US \$600. Suponiendo un modelo de costo lineal, determine la ecuación para calcular el costo total diario.

Solución. Si $x$ representa el número de artículos que se fabrican diariamente y $C(x)$ su costo, tenemos que cuando $x = 10$, $C(10) = 350$ dólares, y cuando $x = 20$, $C(x) = 600$ dólares. Estos valores corresponden a los puntos $P_1(10, 350)$ y $P_2(20, 600)$. Con estos puntos hallamos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{600 - 350}{20 - 10} = 25$$

Reemplazamos en la ecuación de la recta punto—pendiente:

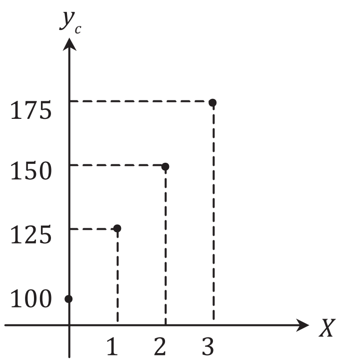
$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

y tenemos que $y - 350 = 25(x - 10)$; luego $y = 25x - 250 + 350$; por lo tanto:

$$Y = C(x) = 25x + 100$$

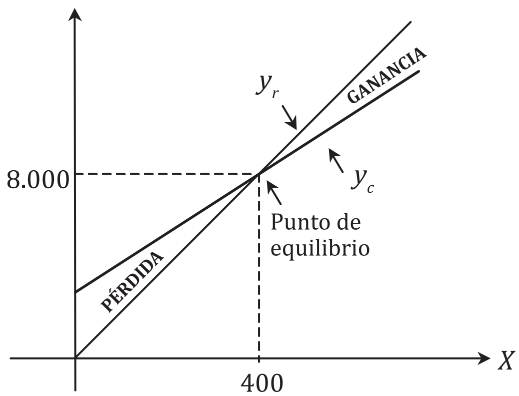
Si la cantidad de artículos es un número entero, la gráfica de esta función está determinada por puntos sobre la recta $y = 25x + 100$ para valores de $x$ enteros no negativos.

| Tabla | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 |




Ejemplo 84. Para un fabricante de relojes, el costo de mano de obra y materiales por reloj es de US \$15 y los costos fijos son de US \$200 al día. Si vende cada reloj a US \$20, ¿cuántos relojes debe producir y vender cada día para obtener ganancias?

Solución. Sea $x$ el número de relojes producidos y vendidos cada día. Los costos totales de producir $x$ relojes son $C(x) = 15\,x + 200$. Como cada reloj se vende en US \$20, los ingresos que se obtienen al vender $x$ relojes son $R(x) = 20x$. El número de relojes que se debe vender diariamente para tener el punto de equilibrio se tiene cuando $20x = 15x + 2000$, de donde $x = 400$. Por lo tanto, se deben vender más de 400 relojes diarios para obtener ganancias.



Ejemplo 85. A una compañía le cuesta US \$75 producir 10 unidades diarias de cierto artículo y US \$120 producir 25 unidades diarias del mismo artículo.

a. Determine la ecuación de costo si es lineal, e interprete los coeficientes.

b. ¿Cuál es el costo de producir 20 artículos al día?

Solución. a. Si $x$ representa el número de artículos que se fabrican diariamente y $C(x)$ su costo, tenemos que cuando $x = 10$, $C(10) = 75$ dólares; y cuando $x = 25$, $C(25) = 120$ dólares. Estos valores corresponden a los puntos $P_1(10, 75)$ y $P_2(25, 120)$. Con estos puntos hallamos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{120 - 75}{25 - 10} = 3$$

Reemplazamos en la ecuación de la recta $y = mx + b$. Sabemos que $m = 3$; por lo tanto, $y = 3x + b$. Como la recta pasa por el punto (10, 75), reemplazamos y tenemos $75 = 3(10) + b$, de donde $b = 45$. La ecuación de costo total es:

$$Y = C(x) = 3x + 45$$

Donde $m = 3$ representa el costo de producir una unidad, y $b = 45$, los costos fijos diarios.

b. Si $x = 20$ artículos, entonces $C(20) = 3\,(20) + 45 =$ US \$105.

Ejemplo 86. Los costos totales semanales para producir $x$ artículos están dados por $C(x) = 2.800x + 600.000$. Cada artículo se vende a \$4.000.

a. Halle el punto de equilibrio

b. Si se tiene un pedido fijo de 600 unidades, ¿cuál debería ser el precio $p$ para garantizar que esta cantidad de pedido dé el punto de equilibrio?

Solución. a. Los ingresos totales son $R(x) = 4.000x$; la cantidad de equilibrio se tiene cuando $4.000x = 2.800x + 600.000$, de donde $x = 500$, $R(500) = C(500) = \$2'000.000$. El punto de equilibrio es la pareja (500, 2'000.000).

b. A un precio $p$, los ingresos de vender $x$ unidades son $R(x) = x \cdot p$. Si la cantidad de equilibrio es $x = 600$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 600 \cdot p &= 2.800(600) + 600.000 \\ 600 \cdot p &= 2'280.000 \\ p &= 3.800 \end{aligned}$$

Ejemplo 87. Los costos totales diarios en miles de pesos de producir $x$ sillas son $y_c = 25x + 600$.

a. Si cada silla se vende a US \$40, ¿cuál es el punto de equilibrio?

b. Si el precio de venta se incrementa a US \$55 por silla, ¿cuál es el nuevo punto de equilibrio?

c. Si se sabe que al menos 150 sillas pueden venderse al día, ¿qué precio deberá fijarse con el objeto de que no hayan pérdidas ni ganancias?

Solución. a. Si cada silla se vende a US \$40, el ingreso obtenido por la venta de $x$ sillas es $R(x) = 40x$, y el punto de equilibrio es $40x = 25x + 600$; luego $x = 40$ sillas. $R(40) = C(40) = 1.600$.

b. Si el precio de venta se incrementa a US \$55 por silla, el ingreso es $R(x) = 55x$, y el nuevo punto de equilibrio se obtiene cuando $55x = 25x + 600$; luego $x = 20$ sillas. $R(20) = C(20) = 1.100$.

c. Sea $p$ dólares el precio fijado a cada silla, entonces $R(x) = 150p$ (ingreso), y el costo $y_c = 25\,(150) + 600$, entonces $y_c = 4.350$. En el punto de equilibrio, $150p = 4.350$, entonces $p = 29$.

### 2.12.2.3 Depreciación lineal

Cuando una empresa compra equipo o maquinaria registra el valor de tal equipo como un activo en su balance general. Al pasar los años este valor decrece porque el equipo lentamente se desgasta o se hace obsoleto. Esta reducción en el valor de un activo se conoce como depreciación. Uno de los métodos ordinarios para calcular la depreciación es reducir el valor del equipo (depreciarlo) en una cantidad constante cada año, de tal manera que el valor se reduzca a un valor cero o de salvamento al término de la vida útil estimada para el equipo. Este método de depreciación se denomina depreciación en línea recta. Para su cálculo tenemos que si $V_0 = V(0)$ es el valor inicial del equipo, $n$ es la vida útil en años del equipo, $V(x)$ es el valor del equipo en $x$ años, $0 \leq x \leq n$, y

$$m = \frac{V(n) - V_0}{n}$$

es la depreciación constante por año. Se tiene que $V(x) = mx + V_0$. El valor $V(n)$ corresponde al valor del equipo cuando ha terminado su vida útil. Éste se denomina valor de salvamento. Si $V(n) = 0$, decimos que el equipo se deprecia totalmente.

Ejemplo 88. Una empresa compra maquinaria por US \$150.000; se espera que la vida útil de la maquinaria sea de 12 años con un valor de salvamento cero.

a. Determine la depreciación por año.

b. Halle $V(x)$, valor de la maquinaria después de $x$ años.

c. Defina una función para calcular el valor depreciado después de $x$ años.

Solución.

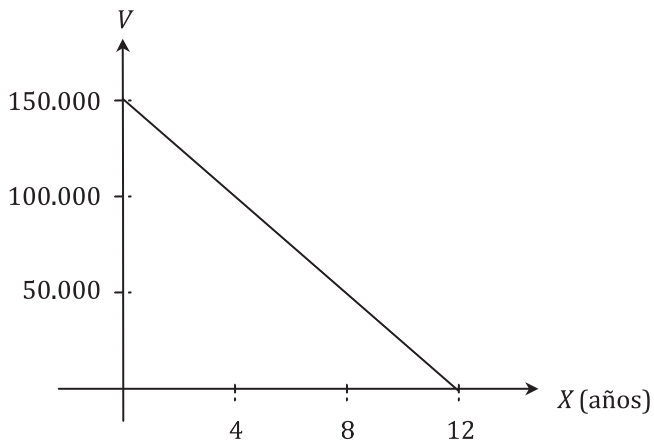
a. Depreciación por año: $m = \dfrac{0 - 150.000}{12} = -12.500.$

b. Valor después de $x$ años:

$$V(x) = -12.500x + 150.000 \text{ dólares.}$$

c. El valor depreciado después de $x$ años es:

$$D(x) = 12.500x$$




Ejemplo 89. Una empresa compró maquinaria nueva por US $15.000, que se deprecia linealmente en US $750 al año y tiene un valor de salvamento de US $2.250.

a. ¿Cuál es la vida útil de la maquinaria?

b. Halle $V(x)$ y el valor de la maquinaria después de 6 años de uso.

Solución. a. Tenemos $m = -750$; $V_0 = 15.000$; $V(n) = 2.250$, reemplazando en $m = \frac{V(n)-V_0}{n}$, nos queda que la vida útil, $n$, es $n = \dfrac{V(n) - V_0}{m}$.

$$n = \frac{2.250 - 15.000}{-750} = 17 \text{ años}$$

b. $V(x) = -750x + 15.000$; $V(6) = -750(6) + 15.000 = \text{US } \$10.500$.

### 2.12.2.4 Funciones lineales de oferta y demanda

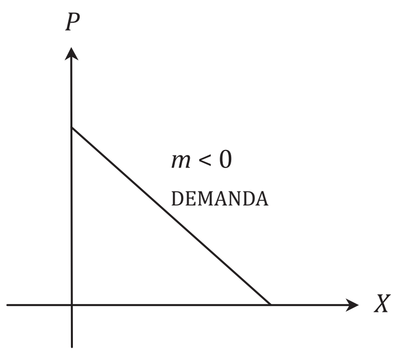
Las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en algunos análisis económicos.

**Ecuación de demanda:** La cantidad $x$ de cualquier artículo que será adquirida por los consumidores depende del precio del artículo. Una ecuación que indique la cantidad de artículos que los consumidores están dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, se denomina ecuación o ley de la demanda.

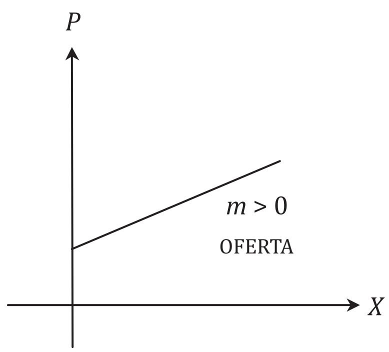
La ley más simple es una función lineal, definida por $p = mx + b$; en donde $p$ es el precio por unidad del artículo en que cierta cantidad $x$ puede venderse, $x$ es la cantidad demandada, $x \geq 0$, $m$ es la variación del precio por cada unidad adicional que se demande. Como a mayor precio menor demanda, el valor de $m$ es negativo. $b$ es el mayor valor de $p$ y significa que para valores menores a $p$, los consumidores están dispuestos a demandar el artículo. La gráfica de una ley de demanda se llama curva de demanda.

**Ecuación de la oferta:** La cantidad $x$ de cualquier artículo que un fabricante está dispuesto a ofrecer depende del precio del artículo. La ecuación que indica la cantidad ofrecida a varios niveles de precios, se denomina ecuación o ley de la oferta.

La ley mas simple es una función lineal, definida por $p = mx + b$. En donde $p$ es el precio por unidad del artículo en que cierta cantidad $x$ puede venderse, $x$ es la cantidad ofrecida, $x \geq 0$, $m$ es la variación del precio por cada unidad adicional que se ofrece. Como a mayor precio mayor oferta, el valor de $m$ es positivo. $b$ es el menor valor de $p$ y significa que para valores mayores a $p$, el productor está dispuesto a ofrecer el artículo. La gráfica de una ley de oferta se llama curva de oferta.




Curva de demanda lineal
$p$: precio; $x$:unidades demandadas




Curva de oferta lineal
La oferta aumenta al subir el precio

*Nota:* *Si el precio por unidad de un artículo aumenta, entonces la demanda disminuye. (Ver gráfica de demanda).*

Si el precio por unidad disminuye entonces la demanda aumenta.

### 2.12.2.5 Punto de equilibrio del mercado

Si el precio de un artículo es demasiado alto, los consumidores no lo adquirirán, mientras que si es demasiado bajo los proveedores no lo venderán. En un mercado competitivo, cuando el precio por unidad depende sólo de la cantidad demandada y ofrecida, siempre existe una tendencia del precio a ajustarse por sí mismo, de modo que la cantidad demandada por los consumidores sea igual a la cantidad ofertada por los proveedores. Se dice que el punto de equilibrio del mercado ocurre en un precio en el que la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. Esto corresponde al punto de intersección de las curvas de la oferta y la demanda.

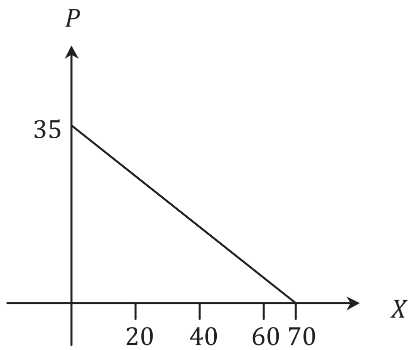
Ejemplo 90. (Demanda) Se demandan 20 afeitadoras al día, a un precio de US \$25 cada una, y 30 afeitadoras a un precio de US \$20. Determine la ecuación de demanda suponiendo que sea lineal.

Solución. Sea $x$ la cantidad demandada (abscisa $x$) y sea $P$ el precio (ordenada $y$); entonces,

$P_1$ (20, 25) y $P_2$ (30, 20), o sea, $m = \dfrac{20-25}{30-20} = -0{,}5$). Luego:

$m = -0{,}5$. Como $p = mx + b$, entonces $25 = -0{,}5(20) + b$;

$b = 35$; y $p = -0.5x + 35$, que es la ecuación de demanda requerida.




Ejemplo 91. Se demandan 200 unidades de cierto artículo a US \$30 por unidad, y 250 unidades a US \$27 por unidad. La ecuación de oferta para tal artículo es $6p = x + 48$.

a. Determine la ecuación de demanda, suponiéndola lineal.

b. Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio.

c. Determine el precio y la cantidad de equilibrio, si se ha fijado un impuesto de US \$3,4 sobre el artículo. ¿Cuál es el incremento en el precio y la disminución en la cantidad demandada?

d. ¿Qué subsidio por unidad incrementaría la demanda en 24 unidades?

Solución. a. $P_1$ (200, 30) y $P_2$ (250, 27); entonces $m = \dfrac{27-30}{250-200} = -0{,}06$ ; como $y - y_1 = m(x - x_1)$, entonces $p - 30 = -0{,}06(x - 200)$, es decir, $p = 30 + 12 - 0.06x$, o sea $p = 42 - 0{,}06x$.

b. $\dfrac{x+48}{6} = 42 - 0{,}06x$; entonces $x = 150$ artículos y $p = 33$ dólares.

c. $P_1 - 3.4 = \dfrac{x_1 + 48}{6}$, luego $6P_1 - 20.4 = x_1 + 48$. $6P_1 = x_1 + 68.4$;

entonces $P_1 = \frac{x_1 + 68.4}{6}$, o sea $42 - 0.06\,x_1 = \dfrac{x_1 + 68.4}{6}$. Así,

$252 - 0.36x_1 = x_1 + 68.4$; luego, $252 - 68.4 = 1.36x_1$, o sea,

$x_1 = \dfrac{183.6}{1.36}$. Entonces $x_1 = 135$, luego $P_1 = \dfrac{135 + 68.4}{6}$, entonces:

$P_1 =$ US \$33,90.

d. Ecuación de oferta: $6p = x + 48$, $P_2 = \dfrac{x_2 + 48}{6}$.

Ecuación de demanda: $P = 42 - 0.06x_2$, entonces, $x_2 = 150 + 24 = 174$, entonces $P_2 = 42 - 0.06\,(174)$, entonces $P_2 = 42 - 10.44$, entonces $P_2 = 31.56$.

En oferta:

$P_2 = \dfrac{x + 48}{6}$, entonces, $31{,}56 = \dfrac{x_2 + 48}{6} - t$, entonces,

$t = \dfrac{174 + 48}{6} - 31.56$, luego $t = 37 - 31.56$, es decir:

$t =$ US \$5,44 en subsidio incrementará la demanda en 24 unidades.

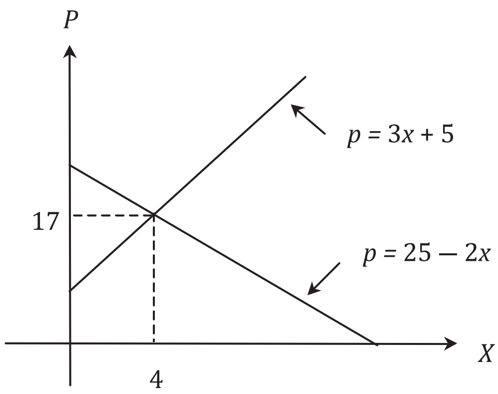
Ejemplo 92. Determine el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de las funciones de oferta y demanda siguientes:

Demanda: $p = 25 - 2x$.

Oferta: $p = 3x + 5$.

Solución. Tenemos que $3x + 5 = 25 - 2x$, es decir que la cantidad de equilibrio es de $x = 4$ unidades.

Ahora sustituimos en la ecuación de demanda, $p = 25 - 2(4) = 17$, que es el precio de equilibrio.




Ejemplo 93. Si las ecuaciones de demanda $D$ y oferta $S$ son respectivamente

$$D : 3p + 5x = 22 \qquad \text{y} \qquad S : 2p - 3x = 2,$$

determine los valores de $x$ y $p$ en el punto de equilibrio del mercado.

Solución. Resolviendo el sistema de ecuaciones respecto a $x$ y $p$, entonces $x = 2$ y $p = 4$. Sustituimos el valor de $p$ en la ecuación de demanda ($D$), y obtenemos que el punto de equilibrio del mercado ocurre cuando $p = 4$ y $x = 2$.

## EJERCICIO 2.10

1. Halle la ecuación de la recta que:

   a. Pasa por el punto $(7, 9)$, con $m = -5$.

   b. Pasa por el punto $(3, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-1, -3)$ y $(8, 7)$.

   c. Pasa por el punto $(-4, 3)$ y es paralela a la que pasa por los puntos $(0, -3)$ y $(-6, 1)$.

   d. Pasa por el punto $(5, 7)$ y es paralela a $3x + 5y + 25 = 0$.

   e. Pasa por $(-1, 3)$ y es paralela a $4x + 2y = 7$.

   f. Pasa por $(-2, 5)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(1, k)$ y $(k, 1)$.

   g. Pasa por $(-1, 6)$ y es perpendicular a la recta $5x + 2y - 5 = 0$.

2. Los costos fijos mensuales para producir un artículo son de $4’000.000 y los costos por unidad de $5.000; el precio de venta por unidad es de $10.000. Halle:

    a. Las ecuaciones de costos e ingresos en función del número de unidades y represéntelas en un mismo plano.

    b. El punto de equilibrio.

    c. La función de utilidad.

    d. ¿Cuántas unidades se deben producir y vender para obtener una utilidad mensual de $1’500.000?

3. Si $p$ representa el precio unitario de un producto y $q$ el número de unidades de ese producto, dadas las ecuaciones $p + q = 100$ y $p - q = 20$.

    a. Identifique cuál corresponde a oferta y cuál a demanda. Explique que significan sus coeficientes.

    b. Explique para $p = 40$ y $p = 80$. ¿Qué sucede?

    c. Halle el punto de equilibrio y represente en un mismo plano las dos ecuaciones.

4. Una máquina se adquiere por $12’000.000 y se deprecia en 15 años. Halle:

    a. el valor de la máquina y su depreciación acumulada en función de $t$;

    b. el valor de la máquina y la depreciación acumulada dentro de 7 años.

5. Los costos fijos de un producto son $5’000.000 mensuales y el costo por unidad $6.000. El precio unitario de venta es $11.000.

    a. Exprese el costo total y el ingreso en función del número de unidades.

    b. Halle el punto de equilibrio.

    c. Exprese la utilidad en función del níumero de unidades vendidas e interprete los coeficientes.

    d. ¿Cuántas unidades se deben producir y vender para obtener una utilidad de $2’000.000?

6. Cuando se producen y venden 500 unidades de un producto se tiene una pérdida de \$400.000; cuando se producen y venden 1.000 unidades se tiene una ganancia de \$600.000. Si los costos variables por unidad son \$1.000.

   a. Exprese el costo total y el ingreso en función del número de unidades.

   b. Halle el punto de equilibrio.

   c. ¿Qué utilidad tengo cuando vendo 2.500 unidades?

   d. ¿Cuántas unidades se deben producir y vender para obtener una utilidad de \$500.000?

7. Dadas las ecuaciones $2p + q = 240$ y $p - q = 30$.

   a. Identifique cuál corresponde a oferta y cuál a demanda. Explique qué significan sus coeficientes.

   b. Explique para $p = 40$ y $p = 100$ qué sucede.

   c. Halle el punto de equilibrio y represente en un mismo plano las dos ecuaciones.

8. Las ecuaciones $q + 2p = 200$ y $q + 4p = 40$ corresponden a ecuaciones de oferta y demanda. Identifique cada una, encuentre el punto de equilibrio y represéntelas gráficamente.

9. Una máquina que se compra por un valor de \$18’000.000 se deprecia linealmente en 15 años.

   a. Exprese el valor de la máquina en función del tiempo.

   b. Calcule el valor de la máquina al final del cuarto año.

   c. ¿En cuántos años la maquinaria tendrá un costo de \$12’000.000?

10. Los costos fijos de fabricación de un artículo son de US \$300 a la semana y los costos totales por fabricar 20 unidades del mismo artículo a la semana son de US \$410. Determine la relación entre el costo total y el número de unidades producidas, si se supone que es lineal. ¿Cuál será el costo de fabricar 30 unidades a la semana?

11. La demanda mensual de un artículo es de 4.000 unidades; los costos fijos mensuales para producirlo son de \$5’000.000, el precio de venta del artículo es de \$6.250 y el costo variable es el 60% del precio de venta.

    a. Calcule la utilidad.

    b. Si el productor aspira a obtener una utilidad mínima del 20% sobre los costos totales, ¿se justifica producir?

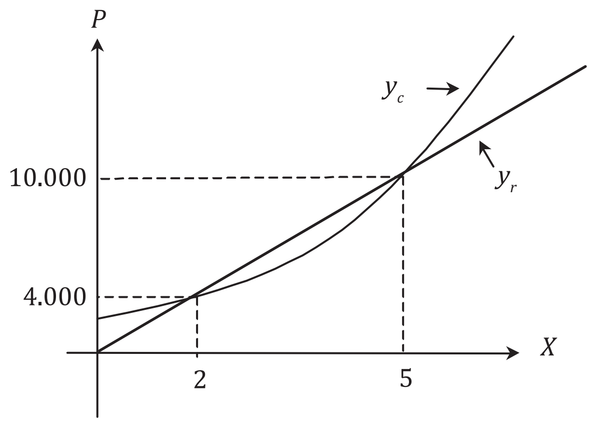
### 2.12.2.6 Modelos cuadráticos

Ejemplo 94. Una compañía de dulces vende sus cajas de chocolates a US \$2 cada una. Si $x$ es el número de cajas producidas a la semana en miles de unidades, entonces los costos de producción están dados por:

$$y_c = 1000 + 1300\,x + 100x^2 \text{ dólares.}$$

Determine el nivel de producción en que la compañía está en el punto de equilibrio.

Solución. Los ingresos por vender $x$ miles de cajas a US \$2 cada una son: $y_r$=2000$x$, porque 2(1.000) = 2.000; entonces el punto de equilibrio viene dado por $y_c = y_r$; de allí $2.000x = 1.000 + 1.300x + 100x^2$, $x^2 - 7x + 10 = 0$; luego, $(x-2)(x-5)=0$, es decir, $x = 2$ y $x = 5$. Por lo tanto, hay dos puntos de equilibrio: la compañía puede decidir fabricar 2.000 cajas a la semana con ingresos y costos iguales a US \$4.000 si $x = 2$, o puede fabricar 5000 cajas con $x = 5$, con ingresos y costos de US \$10.000.




Ejemplo 95. Una empresa de alquiler de TV cobra una cuota de 15 dólares por cliente, si sirve a 1.000 clientes o menos. Si el servicio se presta a más de 1.000 clientes, por cada cliente que exceda ese número, la cuota disminuirá en 1 centavo para cada uno de los clientes. ¿Cuántos clientes proporcionan el ingreso máximo para la empresa?

Solución. Sea $t$ el número de clientes adicionales (a los 1.000), de tal forma que tendríamos en total 1.000 + $t$ clientes que pagarían cada uno 15 –0.01 $t$; el ingreso total sería

$$I = (1.000 + t)(15 - 0{,}01t) = -0{,}01t^2 + 5t + 15.000$$

En este caso $I$ es una función cuadrática con $a$ =–0.01, $b$ = 5 y $c$ =15.000; como a es negativo, $I$ tiene máximo en:

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{-0{,}02} = 250, \text{ y en este caso}$$

$$I = (1.000 + 250)(15 - 0{,}01(250)) = 15.625$$

En otras palabras, el ingreso máximo es de \$15.625, y esto ocurre cuando hay 1.000 + 250 = 1.250 clientes.

## EJERCICIO 2.11

1. La demanda mensual de un producto tiene un comportamiento lineal: se sabe que a un precio de \$5.000 la unidad, se demandan 6.000 unidades mensuales y por cada \$500 que se rebaje el precio, la demanda crece en 1.000 unidades. Los costos fijos son de \$8’000.000 mensuales y los costos variables de \$3.000.

   a. Exprese la utilidad en función del número de unidades demandadas.

   b. Represente gráficamente esta función.

   c. ¿Cuántas unidades se deben producir para que la utilidad sea máxima?

2. Dadas las ecuaciones de oferta y demanda: $25p + q^2 = 269$ y $5p - 2q = 1$.

   a. Identifique: ¿cuál corresponde a la oferta y cuál a la demanda?

   b. Halle el punto de equilibrio y represente en un mismo plano las dos ecuaciones.

   c. Si $p = 7$ ¿qué ocurre?

3. Dadas las ecuaciones $p = q^2 + 4q + 3$ y $p = -q^2 + 33$.

   a. Identifique cuál corresponde a la oferta y cuál a la demanda.

   b. Explique para $q = 2$ y para $q = 5$, ¿qué sucede?

   c. Halle el punto de equilibrio y represente en un mismo plano las dos ecuaciones.

4. Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio de las curvas de demanda y oferta siguientes:

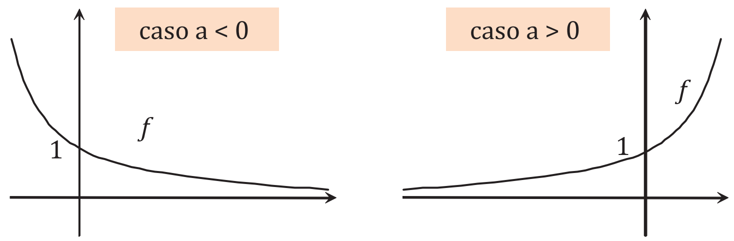
   a. $D: 2p + 3z = 100$ y $S: p = 1/10\, x + 2$.

   b. $D: p^2 + x^2 = 25$ y $S: p = x + 1$.

### 2.12.2.7 Modelos exponenciales

Una función exponencial $f$ tiene la forma $f(x) = a^x$, donde a es una constante positiva. Cuando $0 < a < 1$ la gráfica de $f$ es decreciente, y si $a > 1$, la gráfica de $f$ es creciente. En este caso el dominio de la función es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $(0, \infty)$.

función exponencial




Cuando $f(x) = A_0\, e^{kx}$ se dice que $f$ tiene un crecimiento (decrecimiento) exponencial (o continuo) si $k > 0$ $(k < 0)$.

Una de las mejores aplicaciones donde se involucran los exponentes y logaritmos es el interés compuesto o en forma más general el crecimiento exponencial. Suponga que un capital inicial $P_0$ se invierte a una tasa de interés $i$ por período:

al final del primer período, el nuevo capital será $P_1 = P_0 + P_0\, i = P_0\,(1 + i)$;

y si este último $(P_1)$ se invierte de nuevo, tendremos $P_2 = P_1 + P_1\, i = P_1\,(1 + i) = P_0\,(1+i)^2$;

y si continuamos de esta manera, después del $n$–ésimo período se tendrá $P_n = P_0\,(1+i)^n$.

---

*En resumen:*

*Para una tasa de crecimiento i por período, la población (inicial) $P_0$ en n períodos es:*

$$P_n = P(n) = P_0 \cdot (1 + i)^n$$

---

Ejemplo 96. 1. Suponga que se invierten \$2’500.000 a una tasa de interés anual del 8%. Hallar el capital al cabo de:

a. un año; b. dos años; c. $n$ años.

Solución. En este caso $P_0 = 2’500.000$ e $i = 8\% = 0{,}08$.

a. Equivale a hallar el 8% por encima de 2’500.000, por lo tanto el capital en un año es: $P(1) = 2’500.000(1{,}08) = 2’700.000$.

b. Equivale a hallar el 8% por encima de $P(1)$:
$P(2) = P(1) \cdot (1{,}08) = P_0\,(1{,}08)^2$.

c. $P(n) = P_0\,(1{,}08)^n = 2’500.000\,(1{,}08)^n$.

Ejemplo 97. ¿En cuántos años se duplica una población $P$, si crece anualmente en un 10%?

Solución. $P_0 = P$; $P_n = 2P$; $i = 0{,}1$ (10%); $n = ?$. Reemplazando tenemos

$$2P = P\cdot(1{,}1)^n$$

Al cancelar $P$ nos queda $(1{,}1)^n = 2$; calculamos el logaritmo natural a cada lado

$$\ln(1{,}1)^n = \ln 2$$

y aplicamos propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned} n\cdot\ln(1{,}1) &= \ln 2 \\ &= \frac{\ln 2}{\ln(1{,}1)} \\ &= 7{,}27 \text{ años } = 7 \text{ años } 3 \text{ meses } 7\text{días} \end{aligned}$$

Ejemplo 98. ¿En qué porcentaje anual crecerá una población de 5’000.000, si se estima que en 5 años es de 7’000.000?

Solución. $P_0 = 5'000.000$; $P_n = 7'000.000$; $n = 5$; $i = ?$; reemplazando tenemos

$$7'000.000 = 5'000.000\,(1 + i)^5$$

y simplificando

$$\begin{aligned} 5(1+i)^5 &= 7 \\ (1+i)^5 &= 7/5 \\ 1+i &= (1{,}4)^{1/5} \\ i &= 1{,}0696 - 1 \\ i &= 0{,}0696 = 6{,}96\% \text{ anual} \end{aligned}$$

Ejemplo 99. El valor futuro de un capital de 5’000.000, colocado a un interés compuesto del 3% mensual, depende del número de meses que esté colocado. Si $x$ representa el número de meses tenemos:

$$f(x) = 5'000.000\,(1{,}03)^x$$

En particular, si el capital se coloca durante un año, tenemos que $x = 12$, y $f(12) = 5'000.000(1{,}03)^{12} = 7'128.804{,}43$.

Ejemplo 100. Considere el valor presente de \$1 colocado a una tasa de interés $i$ compuesto anual. Calcular el valor futuro a un año si se capitaliza:

a. anualmente; b. semestralmente; c. diariamente;

d. hora a hora; e. minuto a minuto; f. continuamente.

Solución. a. El período de interés es anual, el interés es $i$, el número de períodos es 1 año, así el valor futuro es

$$P(t) = (1 + i)$$

b. El período de interés es semestral, como el año tiene dos semestres, el interés es $i/2$ (semestral), el número de períodos es 2 semestres, así el valor futuro es

$$P(t) = (1 + i/2)^2.$$

c. El período de interés es diario, como el año tiene 365 días, el interés es $i/365$ (diario), el número de períodos es 365 días, así el valor futuro es

$$P(t) = (1 + i/365)^{365}.$$

d. El período de interés es hora a hora, como el año tiene 8760 horas, el interés es $i/8760$ (por hora), el número de períodos es 8760 horas, así el valor futuro es

$$P(t) = (1 + i/8760)^{8760}$$

e. El período de interés es minuto a minuto, como el año tiene 525.600 minutos, el interés es i/525.600 (por minuto), el número de períodos es 525.600 minutos, así el valor futuro es

$$P(t) = (1 + i/525\,600)^{525.600}.$$

f. Hasta ahora lo que ha ido cambiando es el período de capitalización. Lo que se ha hecho no es más que dividir el año en $n$ períodos y en tal caso el valor futuro es

$$P(t)=(1+i/n)^n$$

lo que se quiere ver es qué sucede cuando $n$ es infitamente grande ($n \to \infty$) y se puede demostrar que en tal caso, el valor futuro es

$$P(t) = e^i$$

y se dice que la capitalización es continua.

En general, un valor presente $P_0$ a una tasa anual $i$ capitalizable continuamente tiene un valor futuro al cabo de $t$ años de

$$P(t) = P_0e^{it}$$

## EJERCICIO 2.12

1. Halle el valor futuro en un año de $1 colocado a una tasa de interés compuesto anual del 36% capitalizable:

   a. trimestralmente; b. mensualmente;

   c. diariamente; d. continuamente.

2. El número de bacterias en un cultivo crece exponencialmente. Si inicialmente están presentes en un cierto cultivo 5.000 bacterias y 30 minutos después están presentes 20.000, halle la tasa de crecimiento por minuto y cuántas bacterias estarán presentes al final de una hora.

3. Está previsto que dentro de $t$ años, la población de un cierto país será de $P(t) = 50\ e^{0,02}t$ millones de habitantes.

   a. ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

   b. ¿En cuántos años se duplica la población?

4. ¿Cuánto dinero se debe invertir en una cuenta en dólares que paga un interés anual del 7% compuesto continuamente, para que dentro de 10 años el saldo sea de US $40.000?

5. El valor $V$ de una máquina se deprecia exponencialmente en un 8% anual; después de 10 años su valor es de $20’000.000. Exprese el valor de la máquina en función del tiempo en años y con base en está función calcule en cuántos años se deprecia la maquinaria, si tiene un valor de salvamento del 20% del valor inicial. Encuentre un modelo para la depreciación acumulada.

6. Bogotá tiene 7 millones de habitantes hoy y un crecimiento del 3,5% anual. ¿En cuántos años la pob0.15lación:

   a. se duplica? b. crece en un 80%? c. será de 20 millones?

7. En el ejercicio anterior calcule la población de Bogotá en:

   a. 2 años; b. 9 años.

8. Determine el valor futuro de $1’000.000 colocados al 1,4% mensual durante dos años, si el interés es compuesto.

9. Si se tiene un capital de $1'000.000 calcule:

   a. ¿En cuánto tiempo se duplica, si gana un interés del 2.5% mensual?
   b. ¿En cuánto tiempo se duplica, si gana un interés del 2% mensual durante los seis primeros meses y del 3% los restantes?
   c. ¿Qué interés trimestral reconoce si en un año genera unos intereses de 360.000?
   d. ¿Qué interés mensual paga si en un año genera intereses por $160.000?

10. Si el salario mínimo es hoy de $196 dólares y tiene un crecimiento estimado del 9,5% anual, calcule:

    a. El salario en 5 años.
    b. ¿En cuántos años el salario será de 1.000 dólares?

### 2.12.2.8 Otros modelos

Ejemplo 101. (Análisis del punto de equilibrio no lineal) El costo de producir $x$ artículos al día está dado en dólares por $y_c = 1.000 + 20\sqrt{x} + 8x$. Si cada artículo puede venderse a US $20, determine el punto de equilibrio.

Solución. $y_c = 1.000 + 20\sqrt{x} + 8x;\ y_r = 20x$

$y_r = y_c$, entonces $20x = 1.000 + 20\sqrt{x} + 8x$

$12x - 20\sqrt{x} - 1.000 = 0$ (dividiendo por 4)

$3x - 5\sqrt{x} - 250 = 0$ (multiplicando y dividiendo por 3)

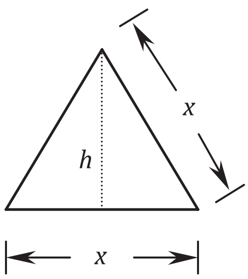
$$\frac{(3\sqrt{x}\,)^2 - 5(3\sqrt{x}\,) - 750}{3}$$

$(3\sqrt{x} - 30)\ (3\sqrt{x} + 25) = 0$

$3\sqrt{x} = 30$; entonces $\sqrt{x} = 10$; luego $x = 100$ artículos

Ejemplo 102. Expresar el área de un triángulo equilátero en función de su lado $x$.

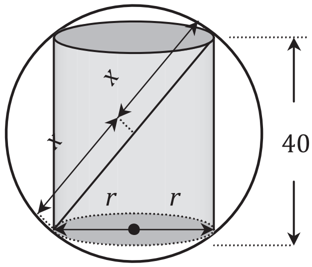
Solución.



El área del triángulo es: $A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h$; para expresar $A$ en función de $x$, debemos escribir $h$ en función de $x$.

Utilizando el teorema de Pitágoras: $h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2$, entonces $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ; reemplazando en la expresión de $A$, tenemos que $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

Ejemplo 103. Un cilindro de 40 centímetros de altura está inscrito en una esfera de radio $x$. Determinar el volumen del cilindro en función del radio de la esfera.




Solución. El volumen de un cilindro en función de su altura y su radio está dado por $V = \pi r^2 h$. Como $h = 40$, se tiene que $V = 40\pi r^2$. Se quiere expresar $V$ en función de $x$, entonces expresamos $r$ en función de $x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras

$$(2r)^2 + (40)^2 = (2x)^2$$

tenemos

$$r^2 = x^2 - 400;$$

reemplazando en $V$, tenemos que $V = 40\pi\,(x^2 - 400)$.

## EJERCICIO 2.13

En los ejercicios del 1 al 6 construir el modelo matemático de acuerdo a la información dada.

1. El área de un rectángulo de 20 m de perímetro, en función de la base $x$.

2. El costo promedio de $x$ unidades, si el costo de $x$ unidades está dado por la función $C$, definida como $C(x) = 350x + 24.500$.

3. Una población actual $P_0$ en función del tiempo $t$ en años, si tiene un crecimiento anual del 4%.

4. El ingreso de $x$ unidades si el precio unitario es $p = \dfrac{200}{1 + 0{,}05x}$.

5. El área de un cuadrado inscrito en un círculo de radio $r$.

6. El área de un rectángulo de base $x$ y perímetro igual a 200.

7. Se construye una caja sin tapa de 50 cm de altura, con una base cuadrada de lado $x$. Si cada $cm^2$ de material de la base tiene un costo de \$500, y cada $cm^2$ del material de las caras laterales tiene un costo de \$300, exprese en función de $x$:

   a. El volumen de la caja.

   b. El costo del material.

8. Exprese el área de un rectángulo de base $x$, inscrito en una semicircunferencia de 10 cm de radio.

9. Exprese el área de un rectángulo de base $x$ inscrito en una circunferencia de radio $R$, dado.

10. La suma de dos números es 25. Si uno de los números es $x$, exprese la suma de los cuadrados de los números en función de $x$.

11. La diferencia de dos números es 12. Si el número mayor es $x$, exprese el cuadrado de la suma de sus recíprocos en función de $x$.

12. Con una hoja cuadrada de 1 m de lado se construye una caja abierta, recortando un cuadrado de lado $x$ en cada uno de sus cuatro vértices. Exprese el volumen de la caja en función de $x$.

13. Una hoja contiene 352 $cm^2$ impresos, con 4 cm de márgenes superior e inferior y 2 cm a cada lado. Si el lado superior de la página es $x$ cm, exprese el área de la hoja en función de $x$.

14. Con un alambre de 100 cm de longitud se construyen un cuadrado y un triángulo equilátero; si el perímetro del cuadrado es $x$, exprese la suma de las áreas del cuadrado y el triángulo en función de $x$.

15. Resuelva el problema anterior si en lugar del triángulo se construye una circunferencia.

16. Un tanque de forma cilíndrica, con tapas de $r$ cm de radio, tiene una capacidad de 10 litros. Exprese el área total del tanque en función de $r$. (1 litro equivale a 1 $dm^3$).

17. Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son $2p - x = 10$ y $p = 8000/(x + 370)$, donde $p$ es el precio por unidad en miles de dólares y $x$ es el número de unidades vendidas al mes.

   a. Encuentre el punto de equilibrio.

   b. Determine el ingreso total recibido por el fabricante en el punto de equilibrio.

## 2.13 Ejercicios de repaso

1. La demanda de un producto tiene un comportamiento lineal. Se sabe que a un precio de \$5.000 la unidad se demandan 4.000 unidades y por cada \$1.000 que se rebaje en el precio, la demanda crece en 500 unidades.

   a. Halle la ecuación de demanda.

   b. ¿Qué precio máximo se estaría dispuesto a pagar?

   c. Para un precio de \$4.500, ¿cuál es la demanda?

   d. Para una demanda de 5.250 unidades, ¿cuál debe ser el precio unitario?

2. Una máquina se deprecia linealmente en 10 años; en cinco años la depreciación acumulada es de 20 millones y la máquina tiene un valor de salvamento del 20% de su valor inicial.

   a. Exprese el valor de la máquina en función del tiempo.

   b. Calcule el valor de salvamento.

   c. ¿En cuántos años la máquina tendrá un costo de \$26'000.000?

3. El costo variable de fabricar una silla es de US \$7 y los costos fijos son de US \$150 al día. Determine el costo total $y_c$ de fabricar $x$ sillas al día. ¿Cuál es el costo de fabricar 100 sillas al día?

4. A una compañía le cuesta US \$75 producir 10 unidades de cierto artículo al día y US \$120 producir 25 unidades del mismo artículo al día.

   a. Determine la ecuación de costo suponiendo que es lineal.

   b. ¿Cuál es el costo de producir 20 artículos al día?

   c. ¿Cuál es el costo variable y el costo fijo por artículo?

5. Una compañía ofrece recepciones a grupos a un costo de US \$10 por persona, más un cargo extra de US \$150. Encuentre el costo $y_c$ que fijaría la compañía a $x$ personas.

6. El costo variable de producir cierto artículo es de US \$0,90 por unidad y los costos fijos son de US \$240 al día. Cada artículo se vende a US \$1,20. ¿Cuántos artículos habrá que producir y vender para garantizar que no haya utilidad ni pérdida?

7. Los costos fijos de producción de cierto artículo son de US \$5.000 mensuales y los costos variables son de US \$3,50 por unidad. Si el productor vende cada uno a US \$6:

a. Encuentre el punto de equilibrio.

b. Determine el número de unidades que deben producirse y venderse al mes para obtener una utilidad de US $1.000 mensuales.

c. Obtenga la pérdida cuando sólo se producen y venden 1.500 unidades al mes.

8. El costo de producir $x$ artículos está dado por $y_c = 2{,}8x + 600$ y cada artículo se vende a US $4:

   a. Encuentre el punto de equilibrio.

   b. Si se sabe que al menos 450 unidades se venderán, ¿cuál debería ser el precio fijado a cada artículo para garantizar que no haya pérdida?

9. El costo de producir $x$ artículos al día está dado por $y_c = 80 + 4x + 0{,}1x^2$. Si cada artículo se vende a US $10, determine el punto de equilibrio.

10. Una empresa compró maquinaria por US $15.000. Si se deprecia linealmente en US $750 al año y tiene un valor de salvamento de US $2.250, ¿por cuánto tiempo estará la maquinaria en uso? ¿Cuál será el valor $V$ de la maquinaria después de $t$ años de uso? ¿Y después de 6 años de uso?

11. Un fabricante de jabones encuentra que las ventas son de 10.000 paquetes a la semana, cuando el precio es de US $1,20 por paquete, pero que las ventas se incrementan a US $12.000 cuando el precio se reduce a US $1,10 por paquete. Determine la relación de demanda, suponiendo que es lineal.

12. A un precio de US $2,50 por unidad, una empresa ofrecerá 8.000 artículos al mes; y a US $4,00 cada unidad, la misma empresa producirá 14.000 artículos al mes. Determine la ecuación de oferta, suponiendo que es lineal.

13. Un comerciante puede vender 200 unidades de cierto artículo al día a US $30 por unidad, y 250 unidades a US $27 por unidad. La ecuación de oferta para tal artículo es $6p = x + 48$.

    a. Determine la ecuación de demanda para el artículo suponiendo que es lineal.

    b. Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio.

14. Un fabricante tiene costos fijos de US $3.000 y costos variables de US $25 por unidad. Encuentre la ecuación que relaciona los costos a la producción. ¿Cuál es el costo de producir 100 unidades?

15. Una compañía tiene costos fijos de US $2.500 y los costos totales para producir 200 unidades son de US $3.300.

    a. Suponiéndola lineal, escriba la ecuación costo–producción.

b. Si cada artículo producido se vende a US \$5,25, encuentre el punto de equilibrio.

c. ¿Cuántas unidades deberá producir y vender de modo que resulte una utilidad de US \$200?

16. Halle el modelo matemático para expresar:

a. Grados Kelvin (°K) en función de grados Fahrenheit (°F). Si $x$ representa °F, recordemos que $z = f(x) = 5/9(x-32)$ expresa grados centígrados (°C) en función de °F; mientras que $y = g(z) = z + 273$, expresa °K en función de °C.

b. El área $A$ de un cuadrado en función de su diagonal $d$.

c. El volumen de una esfera en función del tiempo $t$, si el radio de la esfera crece en función del tiempo, según la relación $r = t + \sqrt{2t}$.

## 2.14 Preguntas tipo GRE (Graduate Record Examination)

1. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x$, el conjunto de los $x$ para los cuales $g(x) > f(x)$ está dado por

(A) $(0, 1)$

(B) $(-1, 1)$

(C) $(-, 0)$

(D) $\mathbb{R}$

(E) $\varnothing$

2. Considere la función polinómica $f(x) = 9x^5 + ax^3 + b$, con $a$ y $b$ enteros. Indique cuál de los siguientes números reales no puede ser un cero de $f$:

(A) $1/9$

(B) $-5$

(C) $1/4$

(D) $1/3$

(E) $9$

3. Si $f$ es biyectiva y $f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, entonces $f^{-1}(x)$ es:

   (A) $x$

   (B) $\frac{1}{x}$

   (C) $\frac{1}{f(x)}$

   (D) indefinida

   (E) 9

4. ¿Para cuántas funciones $f$ con dominio en $[-1, 1]$ se cumple que $(f(x))^2 = x^2$?

   (A) una

   (B) dos

   (C) tres

   (D) cuatro

   (E) infinitas

5. ¿En cuántos puntos se intersectan la funciones definidas por $f(x) = 4^x$ y $g(x) = x^4$ )?

   (A) uno

   (B) dos

   (C) tres

   (D) cuatro

   (E) ninguno

6. Sea $f$ definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$; ¿cuántos valores hay para los cuales $f(x) = 5$?

   (A) uno

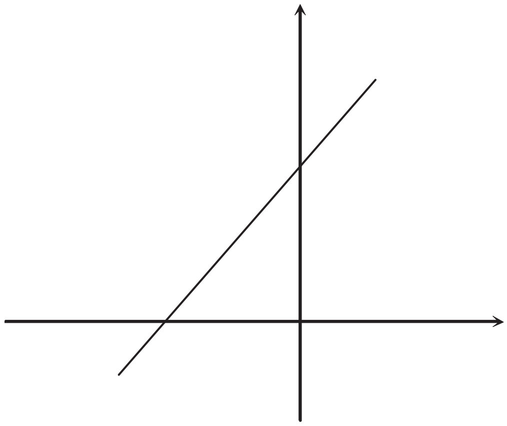
   (B) dos

   (C) tres

   (D) cuatro

   (E) ninguno

7. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones no puede representar la siguiente gráfica?



(A) $y = x + 1$

(B) $y = x - 1$

(C) $y = 2x + 1$

(D) $y = x + 3$

(E) $y = x + 2$

8. ¿Cuál de las siguientes funciones es acotada?

(A) $y = x^2$

(B) $y = 1/x$

(C) $y = x$

(D) $y = 1/(x^2+1)$

(E) $y = x^3+x$

## 2.15 Resumen

### Funciones

Dados los conjuntos $X$ y $Y$, una función $f$ de $X$ en $Y$ es una regla o ley de acuerdo con la cual a cada valor de $x$ (variable independiente) del conjunto $X$ se le asigna un único valor bien determinado $y$ (variable dependiente) del conjunto $Y$. $y = f(x)$ representa el valor de la función $f$ evaluada en $x$, se dice también que $y$ es la imagen de $x$, dada por $f$ (o que $x$ es la preimagen de $y$). Al conjunto $X$ se lo denomina dominio de la función y se nota $Dm(f)$. Al conjunto $Y$ se lo denomina codominio de la función y se nota $Cdm(f)$. Los valores de $Y$ que toma la variable $y$ se denominan recorrido o rango de la función, que se nota $Rec(f)$. Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas en un conjunto $X$; $f = g$, si para cualquier $x$ en el conjunto $X$ se tiene que $f(x) = g(x)$.

### Funciones polinómicas

Una función polinómica $f$ está definida como

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0;\ \text{con } a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

y tiene como dominio $\mathbb{R}$. Si $a_n \neq 0$, se dice que $n$ es el grado de $f$. Algunos tipos especiales son los siguientes:

1. La función constante definida como $y = f(x) = k$ tiene como recorrido $Rec(f) = \{k\}$.

2. La función lineal definida como $y = f(x) = mx + b$, cuando $m \neq 0$, tiene como recorrido $Rec(f) = \mathbb{R}$ (ya que si $m = 0$, se tiene una función constante).

3. La función cuadrática definida como $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$; su recorrido depende de los parámetros $a$, $b$ y $c$. Por ejemplo, si $a > 0$, el recorrido es el intervalo $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}, \infty\right)$.

Explícitamente, si $f(c) = 0$, se dice que $c$ es una raíz de la ecuación polinómica $f(x) = 0$ o simplemente un cero de $f$.

**Teorema 1 (del Residuo).** Si $f$ es una función polinómica y $f(x) = (x-a)q(x) + r$, entonces $f(a) = r$.

**Teorema 2 (del Factor).** Si $f$ es una función polinómica y $f(x) = (x-a)q(x) + r$, entonces $f(a) = 0$ si y sólo si $r = 0$.

**Teorema 3 (de las raíces racionales).** Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ es un polinomio con coeficientes enteros y $p/q$ es una raíz racional irreducible de $f(x) = 0$, entonces $p$ es un divisor de $a_0$ y $q$ es un divisor de $a_n$.

**Teorema 4 (Regla de los signos de Descartes).** Sea $f$ una función polinómica con coeficientes reales y el término constante no nulo, entonces el número de ceros positivos reales de $f$ es igual al número de cambios de signo de $f$, o bien, es menor que ese número, en un entero par.

**Teorema 5 (Teorema fundamental de álgebra ).** Si $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, es un polinomio con coeficientes complejos y de grado positivo, entonces $f$ tiene al menos un cero complejo.

## Gráfica de una función

Se denomina gráfica de la función definida como $y = f(x)$ al conjunto de puntos en el plano $(x, y)$ donde $y = f(x)$.

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in \text{Dm}(f)\}.$$

Geométricamente, a la Graf $(f)$ se la denomina curva. La gráfica sólo ilustra las propiedades de la función, mas no las demuestra. Debe notarse que en muchos contextos una función $f$ se define como un conjunto de pares ordenados $(x, y)$ tales que si $(x, y)$ y $(x, z)$ pertenecen a $f$, entonces $y = z$; en este caso Graf$(f)$ es la representación gráfica de todos los pares ordenados que constituyen $f$.

## Algebra de funciones

**Adición de funciones.** Si $f$ y $g$ son funciones, la función suma de $f$ con $g$, denotada por $f + g$, se define como

$$\underbrace{(f+g)}_{\substack{\text{suma}\\ \text{de}\\ \text{funciones}}}(x) = \underbrace{f(x)+g(x)}_{\substack{\text{suma}\\ \text{de}\\ \text{reales}}}$$

**Multiplicación de funciones.** La multiplicación de $f$ con $g$, denotada por $f \cdot g$, se define como

$$\underbrace{(f \cdot g)}_{\substack{\text{multiplicación} \\ \text{de} \\ \text{funciones}}}(x) = \underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{\substack{\text{multiplicación} \\ \text{de} \\ \text{reales}}}.$$

En particular, si $f(x) = k$, $(k \cdot g)(x) = k \cdot g(x)$.

**Cociente de funciones.** Si $f$ y $g$ son funciones, la función cociente de $f$ con $g$, denotada por $\dfrac{f}{g}$, se define como

$$\underbrace{\left(\frac{f}{g}\right)}_{\substack{\text{cociente} \\ \text{de} \\ \text{funciones}}}(x) = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\substack{\text{cociente} \\ \text{de} \\ \text{reales}}}$$

**Composición de funciones.** Sean $X$, $Y$, $Z$ conjuntos no vacíos, $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ funciones. Definimos $h: X \to Z$ como $h(x) = z$ si existe $y \in Y$ tal que $y = f(x)$ y $z = g(y)$. La función $h$ se llama función compuesta de $f$ con $g$ y se nota

$$h = g \circ f \text{ definida por } h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

## Funciones definidas implícitamente

Se dice que una función $f$ está "definida" implícitamente por una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ si y sólo si para todo $x \in Dom(f)$ se cumple que $F(x, f(x)) = 0$.

## Función inversa

Una función $f$ definida de $X$ en $Y$ es uno a uno o inyectiva, si para cualquier $x_1$ y $x_2$ de $X$ se cumple que, si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ o equivalentemente: si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$. Una función $f$ definida de $X$ en $Y$ es una función sobreyectiva (o sobre), si para cualquier $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Una función $f$ definida de $X$ en $Y$ es biyectiva si es uno a uno y sobreyectiva. Si $f$ es una función biyectiva definida de $X$ en $Y$ como $y = f(x)$, la ecuación $y = f(x)$ para $x$ tiene solución única; en este caso estamos expresando $x$ en función de $y$, es decir, $x = g(y)$, donde $g$ es una función definida de $Y$ en $X$. La función $g$ se denomina función inversa de $f$ y se nota $f^{-1}$.

## Funciones acotadas

Una función $f$ definida en $X$ es acotada inferiormente, si existe un número $m$ tal que $m \leq f(x)$ para todo $x \in X$. El número $m$ recibe el nombre de cota inferior de $f$. $f$ definida en $X$ es acotada superiormente, si existe un número $M$ tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in X$. El número $M$ recibe el nombre de cota superior de $f$. $f$ definida en $X$ es acotada, si existe un número $c$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$. El número $c$ recibe el nombre de cota de $f$.

## Funciones periódicas

Una función definida como $y = f(x)$ se llama periódica, si existe $T > 0$ tal que para cualquier $x$ del dominio, $f(x + T) = f(x)$. El menor de estos $T$ se denomina período de la función.

## GLOSARIO

Función: Una función $f$ de $X$ en $Y$ es una regla que a cada valor de $x$ de $X$ le asigna un único valor $y$ de $Y$.

Función polinómica: Una función polinómica $f$ es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0;\ \text{con } a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, \dots, n.$$

Si $a_n \neq 0$, se dice que $n$ es el grado de $f$.

Teorema fundamental del álgebra: Teorema que garantiza la existencia de raíces de cualquier ecuación polinómica de grado mayor o igual que uno.

Punto de equilibrio: Punto de intersección de las curvas de oferta y demanda.

Función acotada: Una función $f$ definida en $X$ es acotada si existe un número $c$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$.

Gráfica de una función: Se denomina gráfica de la función definida como $y = f(x)$ al conjunto de puntos en el plano $(x, y)$, donde $y = f(x)$.

$$\text{Gráf}(f) = \{(x, y) |\ y = f(x),\ x \in Dm(f)\}.$$

# Capítulo 3

# Análisis de funciones

## 3.1 Introducción

El concepto de función es básico en la formación matemática de cualquier estudiante y para cualquier disciplina, su formalización está mediada por un gran desarrollo histórico y por su potencia como herramienta de modelación matemática.

Como estrategia metodológica, partiremos de la representación gráfica de una función de variable real y valor real; esta representación permite intuitivamente establecer si una función en un punto es: continua, creciente o decreciente, cóncava hacia arriba o hacia abajo; en general, establecer su comportamiento.

Una vez que se establezcan las características o propiedades de una función a partir de su gráfica, definiremos los conceptos de límite, continuidad, crecimiento, concavidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión.

### Objetivos

1. Determinar en un punto, dada la gráfica de una función: continuidad, crecimiento, decrecimiento, concavidad, puntos críticos.
2. Extender este análisis a cualquier intervalo o subconjunto del dominio de la función.

## 3.2 Continuidad en un punto

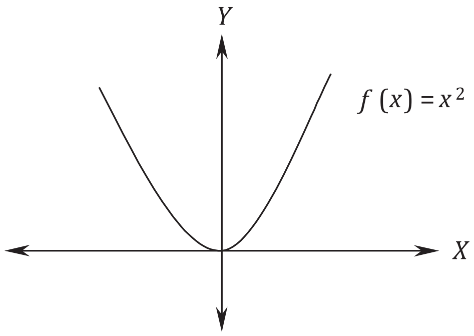
Sean $a$, $b$ números reales con $a < b$. Recordemos que un intervalo abierto es cualquiera de los siguientes conjuntos: $(a, b)$, $(a, \infty)$, $(-\infty, b)$. Tienen la característica de ser conjuntos conexos (sin rupturas). Por ejemplo: $(0, 5)$, $(-9, 2)$, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, son conexos; en cambio, $\mathbb{R}-\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ no es conexo porque tiene una ruptura en $x = 0$.

Recordemos además que el intervalo $(a, b)$ es un conjunto acotado que tiene *sup* e *inf* pero no tiene máximo ni mínimo. El intervalo $(a, \infty)$ tiene *inf* pero no *sup*, es acotado inferiormente y no es acotado superiormente; el intervalo $(-\infty, \infty)$ no tiene *sup* ni *inf*, ni es acotado.

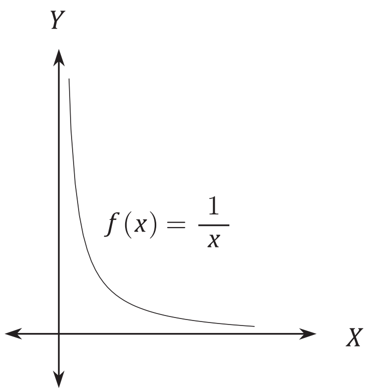
**Definición preliminar.** Intuitivamente, una función $f$ definida en un intervalo $(a, b)$ es continua en $x \in (a, b)$, si alrededor del punto de la gráfica $(x, f(x))$ se puede trazar parte de la gráfica sin levantar el lápiz.

$f$ es continua en un intervalo abierto $(a, b)$ si es continua en cada valor de $x$, $x \in (a, b)$.

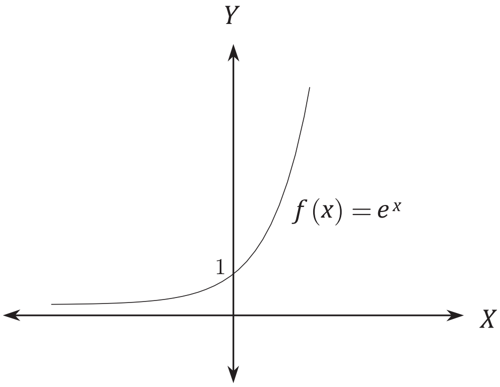
Ejemplo 1. $f$ definida como $y = f(x) = x^2$ es continua en todo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.



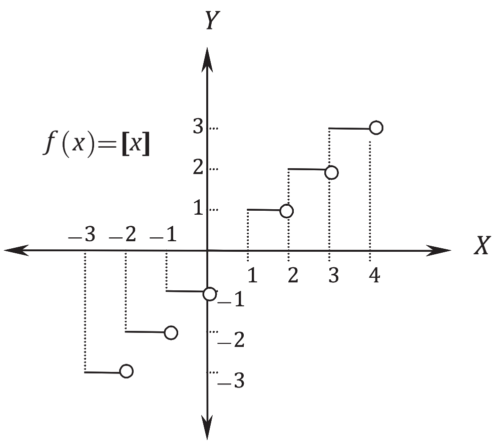

Ejemplo 2. $f$ definida como $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x > 0$, es continua en cualquier intervalo $(a, b)$ con $0 \le a \le b$.



Ejemplo 3. $f$ definida como $f(x) = e^x$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

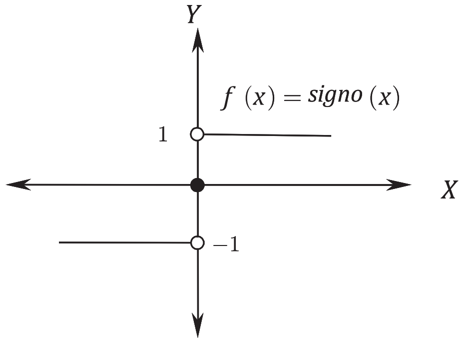



Ejemplo 4. $f(x) = [x] = n$, con $n \leq x < n + 1$ y $n \in$ Z está definida en todos los reales pero no es continua para valores enteros de $x$ que pertenezcan a intervalos abiertos. Observe que si un intervalo abierto no contiene valores enteros, la función es continua en todos los puntos de ese intervalo.



Ejemplo 5. $f(x) = signo(x)$ está definida en todos los reales; el único valor de $x$ en el que la función no es continua es en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{si } x > 0 \\ 0, \text{si } x = 0 \\ -1, \text{si } x < 0 \end{cases}$$




Observe que $f$ es continua en $x \neq 0$.

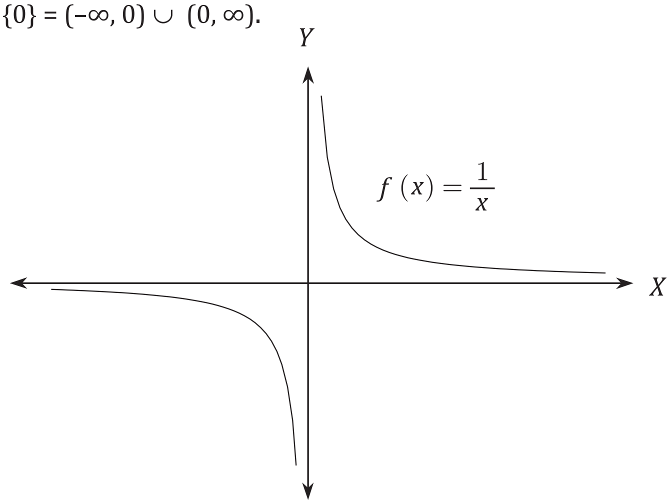
Ejemplo 6. $f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ -x, \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ se tiene que Dom$f = \mathbb{R}$ y $f$ sólo es continua en $x = 0$. ¿Por qué?

Se deja al lector la realización de la correspondiente gráfica.

## 3.3 Continuidad en un conjunto no conexo

En la sección anterior, el concepto de continuidad de una función fue considerado para funciones cuyo dominio es un intervalo (conjuntos **conexos**); cuando el dominio es un conjunto que **no es conexo**, por ejemplo $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R}-\{0\}$, la definición intuitiva sigue siendo válida.

Ejemplo 7. $f$ definida como $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en todo su dominio: $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.



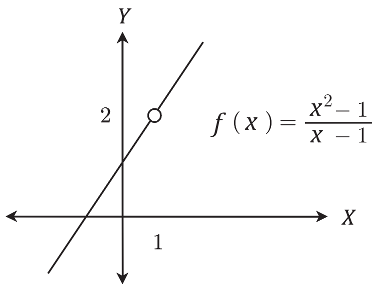
**Observe que:**

1. En $x = 0$, la función no está definida; por lo tanto, no tiene sentido hablar de continuidad en $x = 0$.

2. No es posible definir $f$ en $x = 0$ de tal manera que $f$ sea continua en $x = 0$.

Se acostumbra a denominar erróneamente estos casos como discontinuidades no evitables.

Ejemplo 8. $f$ definida como $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, con $x \neq 1$, es continua en su dominio $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, que es un conjunto no conexo con *ruptura* en $x = 1$. No tiene sentido decir que $f$ no es continua en $x = 1$, porque $1 \notin \mathrm{dom} f$. Es posible extender el dominio de la función y definirla en $x = 1$; sólo si definimos $f(1) = 2$, $f$ será continua en $x = 1$; en este caso, $f$ sería continua en todo $\mathbb{R}$.

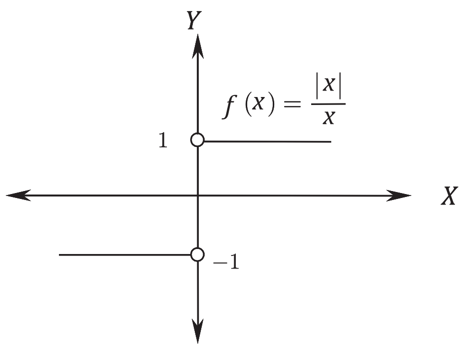



En estos casos se acostumbra a decir erróneamente que en $x = 1$ existe una discontinuidad evitable.

**Observe que:**

1. Si definimos $f(1) \neq 2$, la extensión de $f$ no sería continua en $x = 2$.

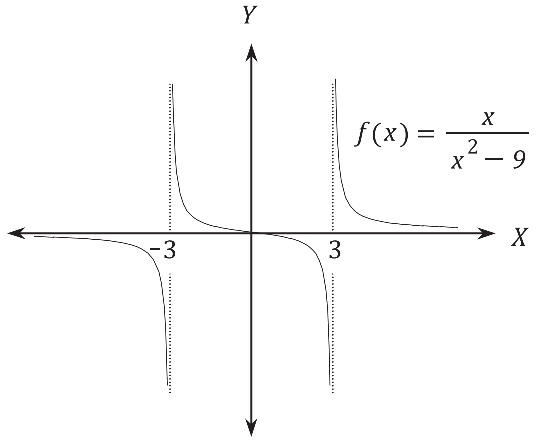
Ejemplo 9. $f$ definida como $f(x) = \frac{|x|}{x}$ es continua en su dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, que es no conexo. En $x = 0$, la función no está definida y no es posible definirla en $x = 0$ de tal forma que sea continua.



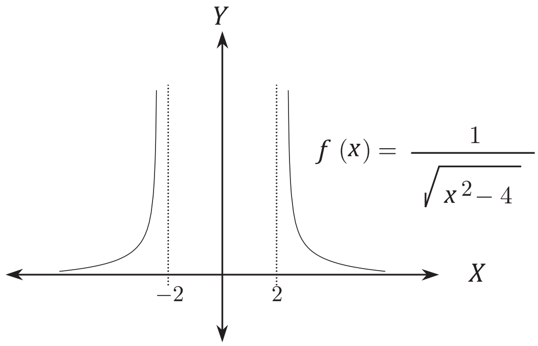
Ejemplo 10. Sea $f$ definida como $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$; $f$ es continua en su dominio:

$$(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty) = \mathbb{R}-\{-3, 3\},$$

el cual es un conjunto no conexo. No es posible definir $f$ en $x = 3$, ni en $x = -3$, de tal manera que su extensión sea continua en esos puntos.




Ejemplo 11. Sea $f$ definida como $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ ; es continua en su dominio $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. No tiene sentido hablar de continuidad en $[-2, 2]$ porque la función no está definida en ese intervalo.



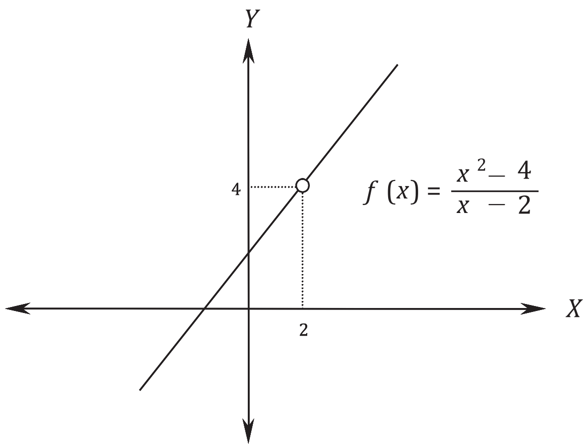

En los ejemplos 6, 7, 8 y 9, la función no está definida en un conjunto finito de puntos, mientras que en el ejemplo 10, no está definida en el intervalo $[-2, 2]$.

Las funciones de los ejemplos 7, 8 y 9 ***son todas continuas en su dominio***, independiente de que en algunos casos haya una ruptura para uno o más valores de $x$. En el ejemplo 10, la ruptura es un intervalo. Como usualmente en los textos de cálculo se define la continuidad en conjuntos conexos, las funciones anteriores se consideran erróneamente ***no continuas*** para los valores de $x$ que no pertenecen al dominio y donde hay rupturas puntuales.

Cuando se tienen rupturas en un valor, algunas veces es posible definir la función en ese punto, como en el ejemplo 8, de tal manera que la extensión de la función sea continua en un intervalo abierto que contenga ese punto. En estos casos, siguiendo la costumbre, se dice que se tiene una ***discontinuidad evitable***. En los casos en que no es posible, se dice que se tiene una ***discontinuidad no evitable***.

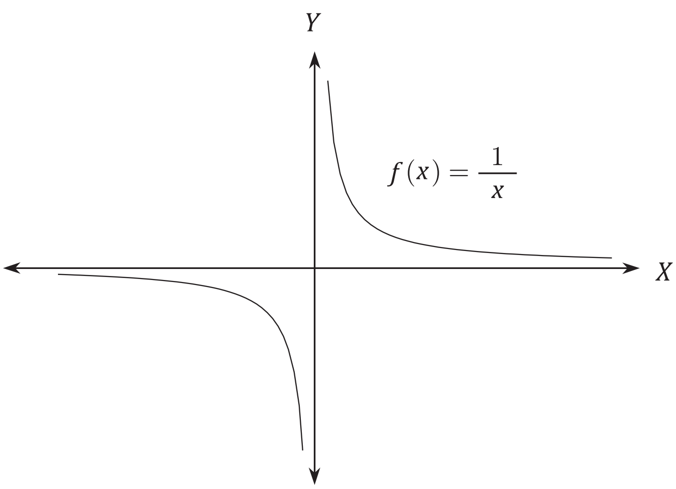
Observe que en el ejemplo 8, en $x = 1$, se tiene una discontinuidad evitable; en los ejemplos 6, 7 y 9 se tienen discontinuidades ***no evitables***.

Ejemplo 12. $f$ definida como $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ no está definida en $x = 2$. En $x = 2$ se tiene una **discontinuidad evitable**, porque se puede definir $f$ en $x = 2$ como $f(2) = 4$, de tal manera que $f$ sea continua en $x = 2$.

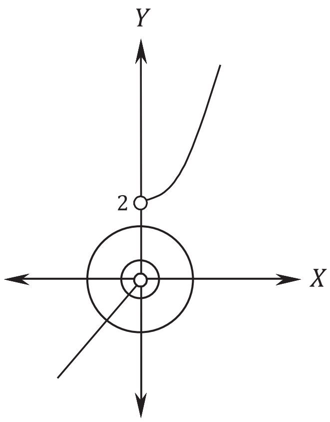



En los siguientes ejemplos, 13, 14 y 15 con $Dom(f) = \mathbb{R}-\{0\}$, se tiene una ***discontinuidad no evitable***, porque no es posible definir $f$ en $x = 0$ de tal manera que $f$ sea continua en $x = 0$.

Ejemplo 13.

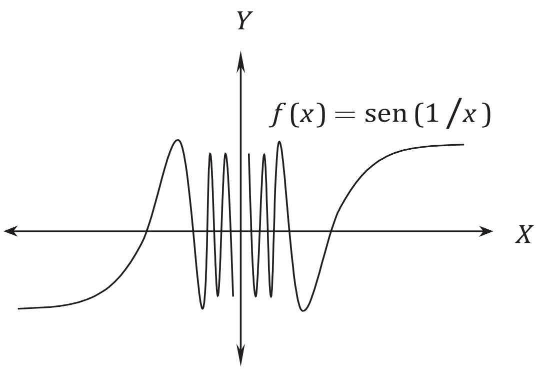


Ejemplo 14. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$




Si definimos $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ se tiene que $Dom f = \mathbb{R}$ y $f$ no es continua en $x = 0$.

Ejemplo 15. $f(x) = \text{sen}(1/x)$.

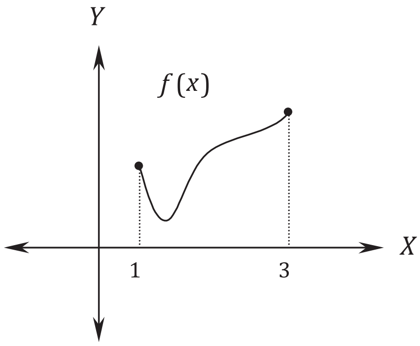



No está definido en $x = 0$, se tiene una discontinuidad no evitable.

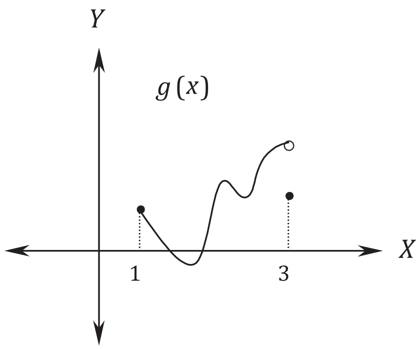
## 3.4 Continuidad en un intervalo cerrado

Recordemos que un intervalo cerrado es cualquiera de los siguientes conjuntos $[a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty, b]$, que tienen la característica de ser conjuntos conexos. Si además de ser cerrado, el intervalo es acotado, se dice que el conjunto es compacto; por ejemplo, el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 16.




Ejemplo 17.




En ambos ejemplos se tiene que el dominio de la función es el conjunto cerrado y acotado $[1, 3]$. La función es continua en el intervalo abierto $(1, 3)$.

En el ejemplo 16, se observa que la función es continua en $[1, 3]$, mientras que la función del ejemplo 17 no es continua en $x = 3$.

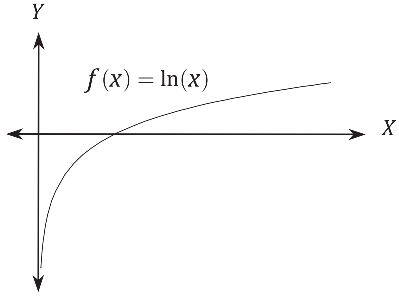
¿Cómo definir la continuidad en los extremos $x = a$ y $x = b$?

Intuitivamente, una función $f$ definida en un intervalo $(a, b)$ es continua en $x = a$, si a partir del punto $(a, f(a))$, se puede trazar hacia la derecha de $x$ parte de la gráfica sin levantar el lápiz. De manera análoga, $f$ es continua en $x = b$ si a partir del punto $(b, f(b))$ se puede trazar hacia la izquierda de $x$ parte de la gráfica sin levantar el lápiz.

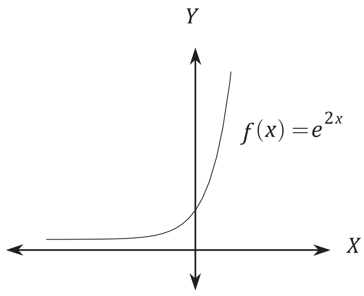
## 3.5 Función creciente y función decreciente

Una función $f$, definida como $y = f(x)$, es ***creciente*** en un intervalo $X$ (conjunto conexo), si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$ para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$ de $X$. Análogamente, $y = f(x)$ definida en $X$ es ***decreciente*** en este conjunto, si para cualquier $x_1$ y $x_2$ de $X$, se tiene que si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

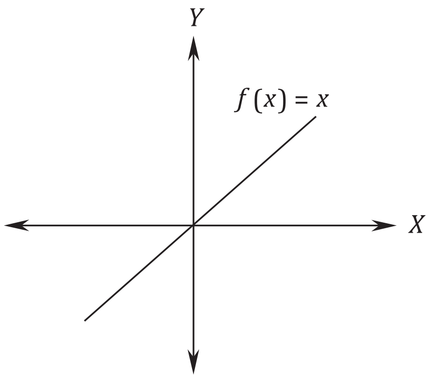
Ejemplo 18. $f(x) = \ln(x)$ es creciente.



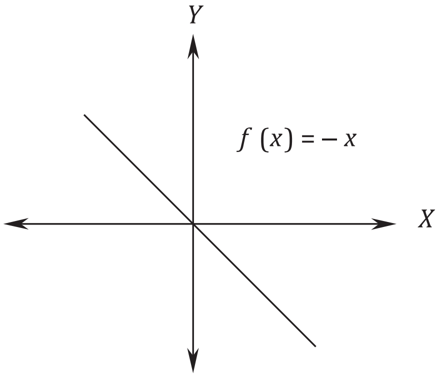

Ejemplo 19. $f(x) = e^{2x}$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.



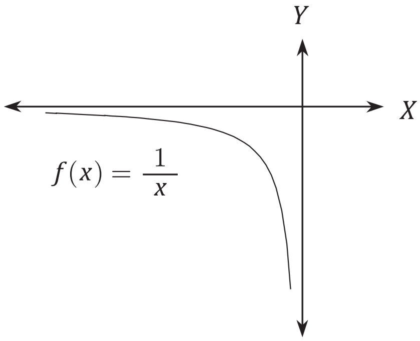

Ejemplo 20. $f(x) = x$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.



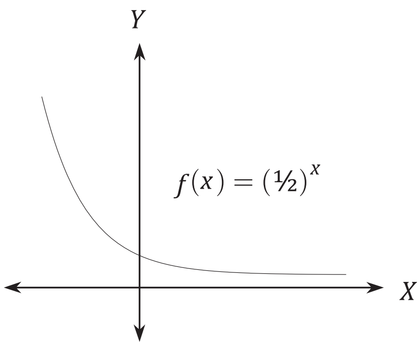
Ejemplo 21. $f(x) = -x$ es decreciente en todo $\mathbb{R}$.




Ejemplo 22. $f(x) = \frac{1}{x}$ con $x \in (-\infty, 0)$ es decreciente.

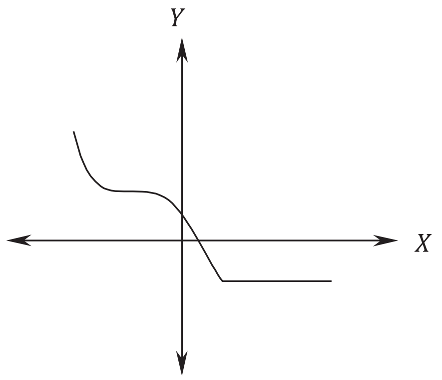



Ejemplo 23. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ con $x \in \mathbb{R}$ es decreciente en todo $\mathbb{R}$.

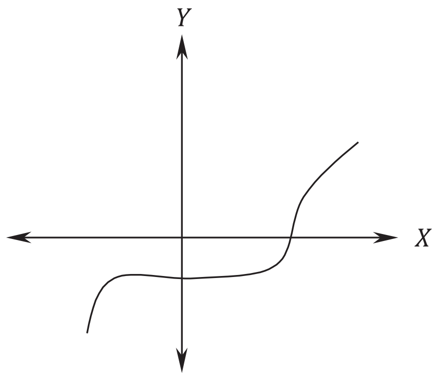



**Definición 1.** Una función $f$ definida como $y = f(x)$, se denomina no decreciente en un conjunto $X \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \leq f(x_2)$ para cualquier par de números $x_1$, $x_2$ en $X$; análogamente, $y = f(x)$ se denomina no creciente en este conjunto, si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \geq f(x_2)$ para cualquier par de números $x_1$, $x_2$ en $X$.

Ejemplo 24. Función no creciente.

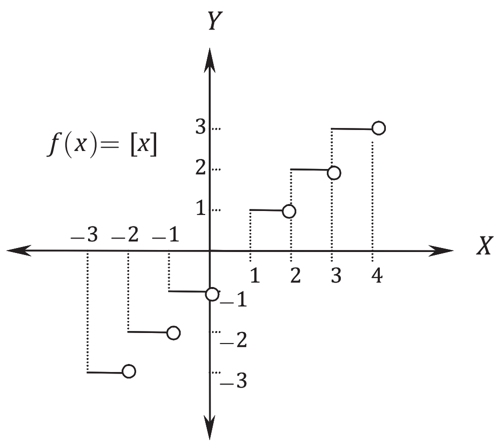



Ejemplo 25. Función no decreciente:

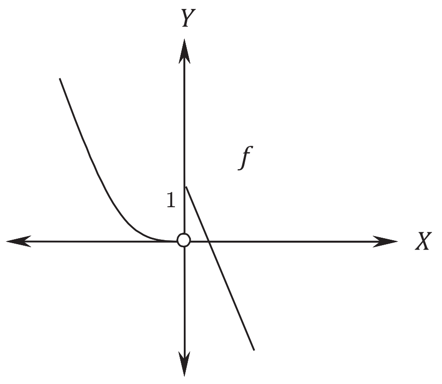



Las funciones crecientes, decrecientes, no crecientes y no decrecientes reciben el nombre de funciones monótonas. Las funciones crecientes y decrecientes se denominan estrictamente monótonas.

Ejemplo 26. $f(x) = [\![x]\!]$, $f$ es no decreciente.

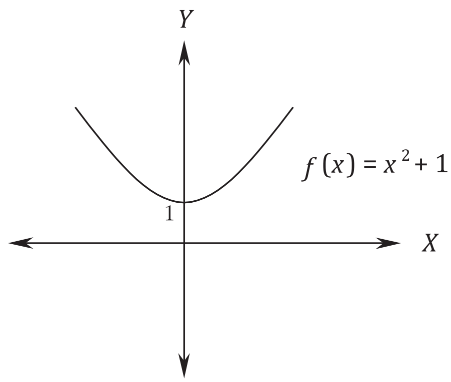


Ejemplo 27. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0 \\ -2x+1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es no monótona. Pero $f$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$.

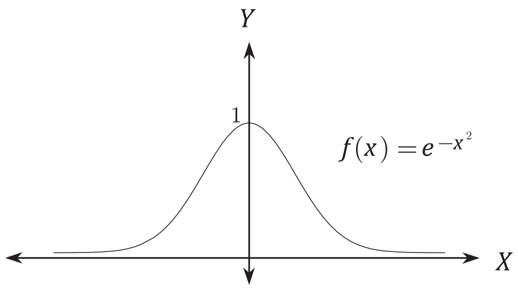



Una función continua definida en un intervalo $(a, b)$ puede ser creciente en algún intervalo contenido en $(a, b)$, y decreciente en otro intervalo contenido también en $(a, b)$.

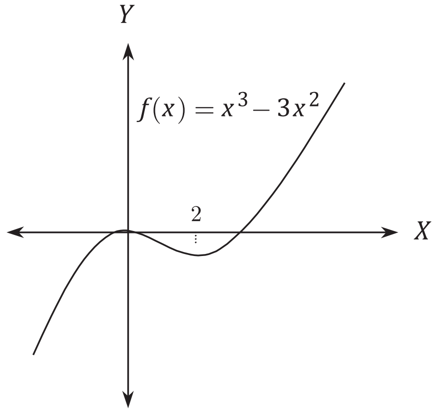
Ejemplo 28. Sea $f(x) = x^2 + 1$. $f$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.




Ejemplo 29. Sea $f$ definida como $f(x) = e^{-x^2}$. $f$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.

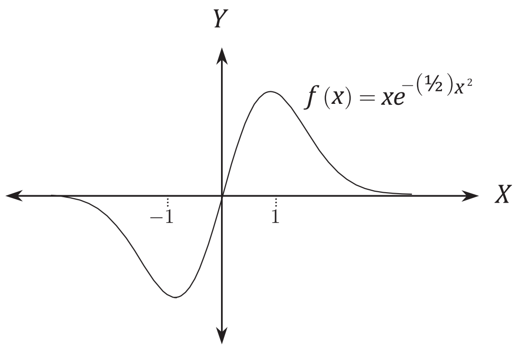


Ejemplo 30. Sea $f$ definida como $f(x) = x^3 - 3x^2$. $f$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y en el intervalo $(2, \infty)$ y decreciente en $(0, 2)$.

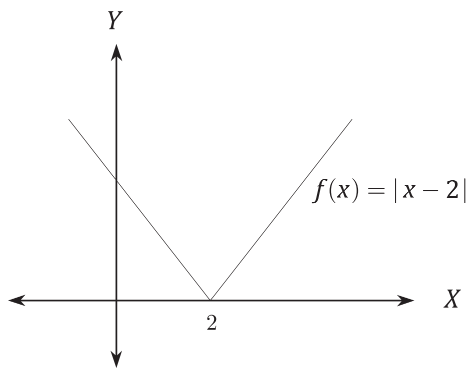



Es un error decir que $f$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. ¿Por qué?

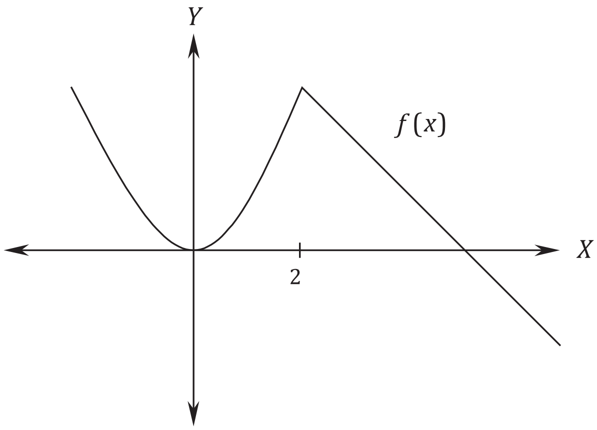
Ejemplo 31. Sea $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$. $f$ es creciente en el intervalo $(-1, 1)$ y decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$.




Ejemplo 32. Sea $g$ definida por $g(x) = |x-2|$. $g$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$ y creciente en $(2, \infty)$.



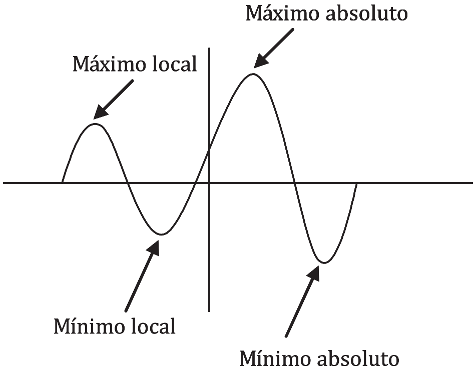
Ejemplo 33. Sea $f$ definida como $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 2 \\ -x+6, & \text{si } x > 2 \end{cases}$; $f$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y en el intervalo $(2, \infty)$ y creciente en el intervalo $(0, 2)$.




**Nota:** *Observe que los intervalos donde la función es* ***creciente*** *o* ***decreciente*** *se consideran en el dominio de la función, es decir, sobre el eje X. Además estos intervalos son abiertos.*

**Definición 2.** Sea $f$ definida sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y $c \in A$. El punto $(c, f(c))$ se denomina punto máximo (absoluto) de $f$ sobre $A$, si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in A$. Análogamente, $(c, f(c))$, $c \in A$, se denomina punto mínimo (absoluto) si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in A$.

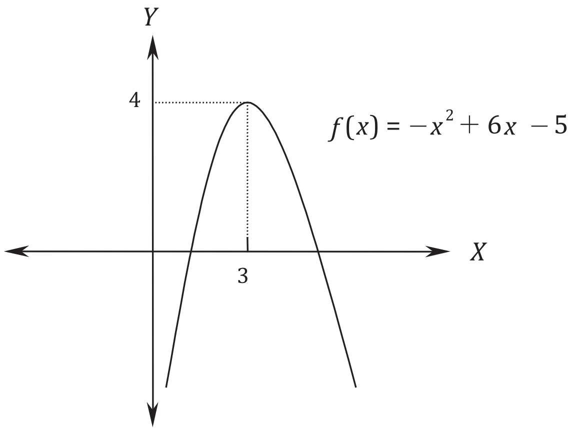
Una función puede no tener puntos máximos ni mínimos, como es el caso de la función $f$ definida por $f(x) = x^3$ sobre $\mathbb{R}$. Pero si la definimos solamente sobre el conjunto $A = [-1, 1]$, la situación es otra: $-1 \leq x^3 \leq 1$ para todo $x \in [-1, 1]$. Esta desigualdad equivale a $f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$. En otras palabras, $(-1, -1)$ es un punto mínimo de $f$ y $(1, 1)$ es un punto máximo de $f$ sobre $[-1, 1]$. De esta manera, los máximos o mínimos de una función dependen del conjunto donde se definan.



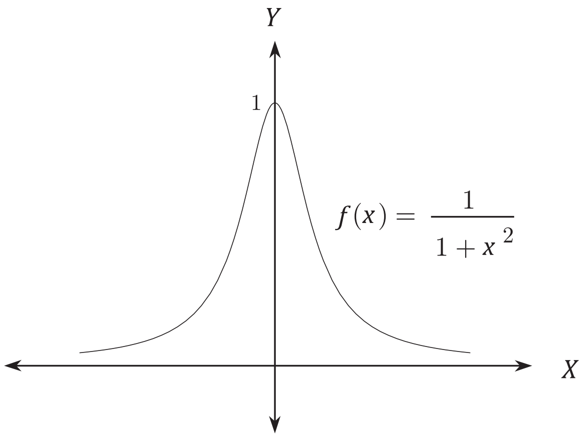

En algunas funciones existen puntos que sin ser máximos ni mínimos, tienen otra característica: resultan serlo de manera local. Evidentemente, los máximos o mínimos de una función también son locales (aunque estamos interesados en máximos locales y mínimos locales de una forma muy particular: sobre intervalos abiertos).

**Definición 3.** Un punto $(c, f(c))$ es un máximo local o relativo si existe un intervalo abierto $(a, b) \subseteq \text{Dom } f$ tal que $c \in (a, b)$ y $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

Ejemplo 34. Sea $f$ definida como $f(x) = -x^2+6x-5$. El punto $(3, 4)$ es un punto **máximo relativo o local**, lo cual significa que existe un intervalo abierto $(a, b) \subseteq Dom(f)$ que contiene el 3 tal que $f(x) \leq f(3) = 4$, para todo $x$ en $(a, b)$; el valor $f(3) = 4$ es un valor **máximo relativo o local**; como a su vez, $f(x) \leq f(3)$ para todo $x$ del $Dom(f)$, decimos que $f(3) = 4$ es el **valor máximo absoluto.**

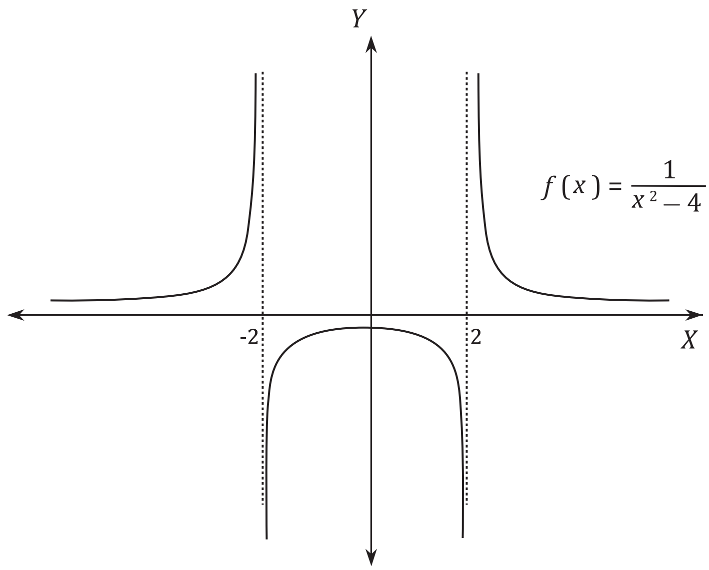



Ejemplo 35. Sea $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

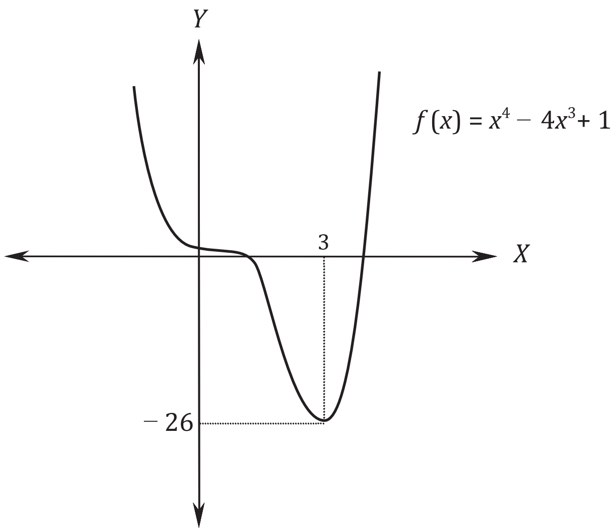



El punto $(0, 1)$ es un **máximo relativo** y a su vez **máximo absoluto**, porque $f(0) = 1 \geq f(x)$ para todo $x \in Dom(f) = \mathbb{R}$.

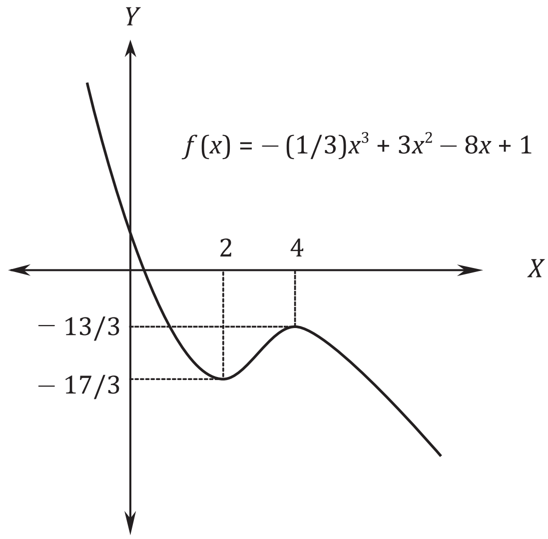
Ejemplo 36. Sea $h(x) = \frac{1}{x^2-4}$. $Dom(h) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. El punto $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ es un máximo local; observe que no es máximo absoluto, porque, por ejemplo, $f(3) = \frac{1}{3^2-4} = \frac{1}{5}$, que es mayor que $f(0) = -\frac{1}{4}$.



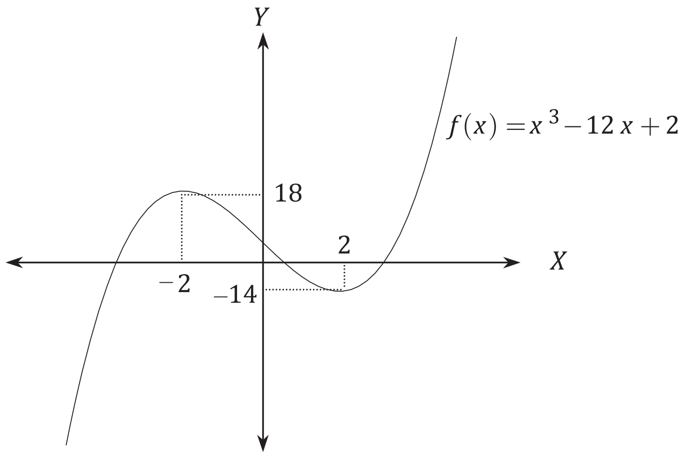

Ejemplo 37. Sea $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$. El punto $(3, -26)$ es un punto **mínimo relativo o local** y a su vez es el **mínimo absoluto.**



Ejemplo 38. Sea $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 1$. El punto $\left(2, -\frac{17}{3}\right)$ es un mínimo relativo o local y el punto $\left(4, -\frac{13}{3}\right)$ es un máximo relativo o local; $\left(2, -\frac{17}{3}\right)$ no es mínimo absoluto porque, por ejemplo, $f(6) = -11 < -\frac{17}{3}$. $\left(4, -\frac{13}{3}\right)$ no es máximo absoluto porque existe, por ejemplo, $f(0) = 1 > -\frac{13}{3}$.




Ejemplo 39.

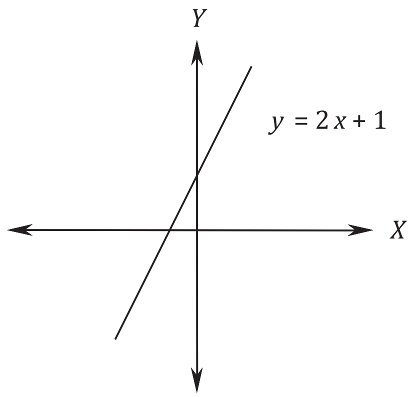



Sea $f(x) = x^3 - 12x + 2$. El punto $(2, -14)$ es un **mínimo relativo** y el punto $(-2, 18)$ es un **máximo relativo.** $(2, -14)$ no es mínimo absoluto y $(-2, 18)$ no es máximo absoluto.

## 3.6 Concavidad de una función

Dada $f$, una función continua en un intervalo abierto $(a, b)$, se ha observado su crecimiento o decrecimiento. Cabe preguntarse, ¿cómo es su crecimiento o decrecimiento en ese intervalo? Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 40. Considere la función $f$ definida por $y = f(x) = 2x+1$.

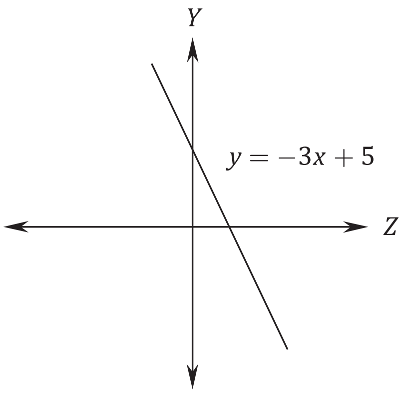



Tomamos para $x$ los valores: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 3, x_6 = 4$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_i - 1)}{x_i - x_{i-1}}$ que mide la variación de $y$ con respecto a $x$. Se tiene que cada vez que $x$ varía en 1, la variación de $y$ con respecto a $x$ es constante, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$. La tabla 1 muestra algunos de estos cálculos:

**Tabla 1**

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ |
|---|---|---|
| −1 | −1 | |
| 0 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 5 | 2 |
| 3 | 7 | 2 |
| 4 | 9 | 2 |

Ejemplo 41. Considere la función $f$ definida por $y = f(x) = -3x+5$.

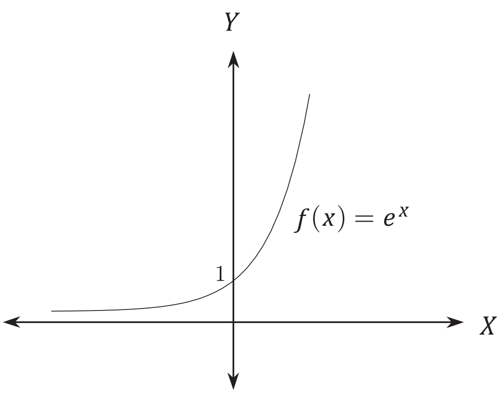



Tomamos para $x$ los valores: $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 2, x_6 = 3$. Tenemos que cada vez que $x$ varía en 1, la variación de $y$ con respecto a $x$ es constante, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -3$. En la tabla 2 se muestra este hecho.

**Tabla 2**

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ |
|---|---|---|
| –2 | 11 | |
| –1 | 8 | –3 |
| 0 | 5 | –3 |
| 1 | 2 | –3 |
| 2 | –1 | –3 |
| 3 | –4 | –3 |

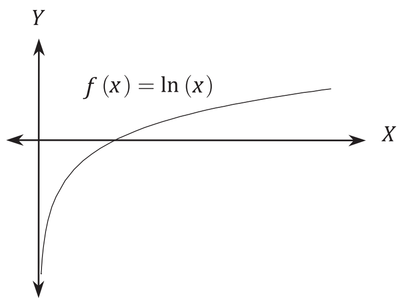
Ejemplo 42. Considere la función $f$ definida por $y = f(x) = e^x$. Tomamos para $x$ los valores: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 3$; tenemos:



| Tabla 3 | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | $f(x_i)$ | $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ |
| –1 | 0,3676 | |
| 0 | 1 | 0,6321 |
| 1 | 2,7182 | 1,7182 |
| 2 | 7,3890 | 4,6708 |
| 3 | 20,0859 | 12,6965 |

Se observa que la función es creciente y a su vez el crecimiento de $y$ con respecto a $x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es creciente (cada vez crece más).

Ejemplo 43. Considere la función $f$ definida por $y = f(x) = \ln x$.

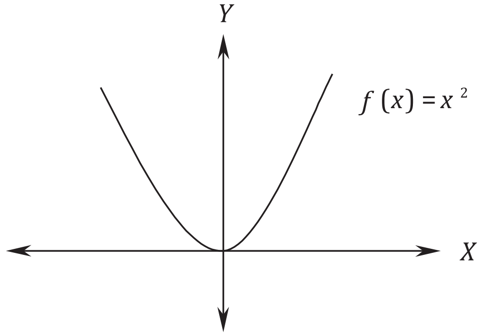



Tomamos para $x$ los valores: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$; tenemos:

| Tabla 4 | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | $f(x_i)$ | $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ |
| 1 | 0 | |
| 2 | 0,6931 | 0,6931 |
| 3 | 1,0986 | 0,4055 |
| 4 | 1,3862 | 0,2872 |
| 5 | 1,6094 | 0,2232 |
| 6 | 1,7917 | 0,1823 |

Se observa que la función es creciente, pero la variación de su variación $\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ es decreciente (cada vez crece menos).

Ejemplo 44. Considere la función $f$ definida por $y = f(x) = x^2$.



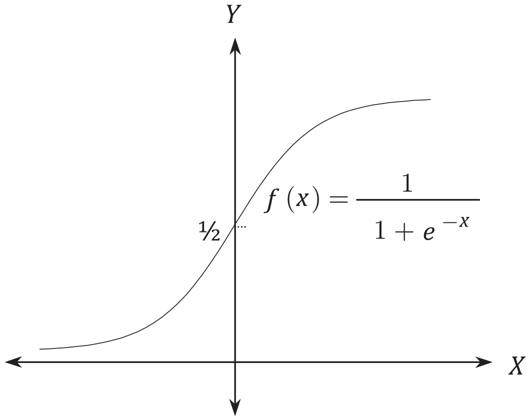

| Tabla 5 | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | $f(x_i)$ | $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ |
| –3 | 9 | |
| –2 | 4 | –5 |
| –1 | 1 | –3 |
| 0 | 0 | –1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 3 |
| 3 | 9 | 5 |

Esta función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$; observe sin embargo, que su crecimiento es siempre creciente y constante, $\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 2$.

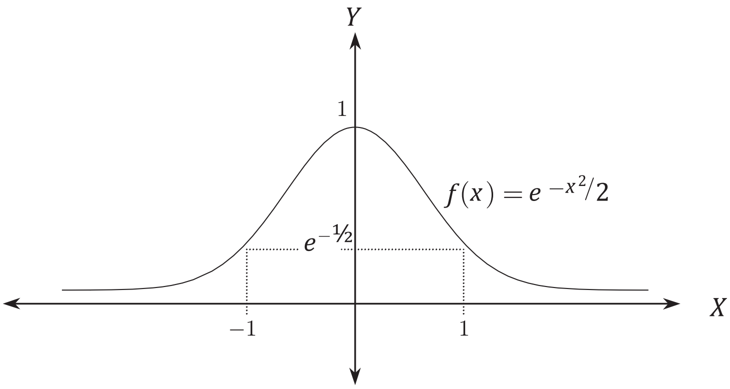
**Definición 4.** Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto $(a, b)$ creciente. Si su variación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es creciente en $(a, b)$, se dice que $f$ es **cóncava hacia arriba**, y si $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es decreciente en $(a, b)$, se dice que $f$ es **cóncava hacia abajo**.

Es posible que una función sea cóncava hacia arriba en un intervalo y cóncava hacia abajo en otro intervalo.

Ejemplo 45. Sea una función logística $f$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. $f$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $(0, \infty)$.




Ejemplo 46. Sea $y = f(x) = e^{-x^2/2}$. Su gráfica se denomina *campana de Gauss.*




$f$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$; y $f$ es cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$.

**Definición 5.** Los puntos donde la función "cambia" de concavidad se denominan *puntos de inflexión*.

En la gráfica del ejemplo 45, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ es el punto de inflexión.

En la gráfica del ejemplo 46, existen dos puntos de inflexión: $(-1, e^{-1/2})$ y $(1, e^{-1/2})$.

## EJERCICIO 3.1

1. Para cada caso, bosqueje la gráfica de una función que cumpla las condiciones dadas.

 a. $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = \mathbb{R}^+$, decreciente y cóncava hacia arriba. ¿Es $f$ uno a uno? ¿Está definido $f$ 1–1 en anteriores capítulos?

 b. $Dom(f) = \mathbb{R}-\{0\}$, $Rec(f) = (0, \infty)$, creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, \infty)$ y cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$.

 c. $Dom(f) = (a, \infty)$, $Rec(f) = (-\infty, b)$, uno a uno, pasa por el punto $(0, 0)$, cóncava hacia abajo en todo el dominio.

 d. $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = (0, 1)$, creciente $(0, \infty)$ y decreciente $(-\infty, 0)$.

 e. $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = (0, 1)$, creciente, cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}^-$ y cóncava hacia abajo en $\mathbb{R}^+$.

 f. $Dom(f) = \mathbb{R}-\{0\}$, $Rec(f) = \mathbb{R}^+$, decreciente en $(0, \infty)$, creciente en $(-\infty, 0)$, y cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$.

 g. $Dom(f) = \mathbb{R}-\{0\}$, $Rec(f) = \mathbb{R}-2$, creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$.

 h. $Dom(f) = \mathbb{R}-\{0\}$, $Rec(f) = \mathbb{R}^+$, creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$.

 i. $Dom(f) = \mathbb{R}--1,1$, $Rec(f) = \mathbb{R}$, máximo local en $(0, 0)$.

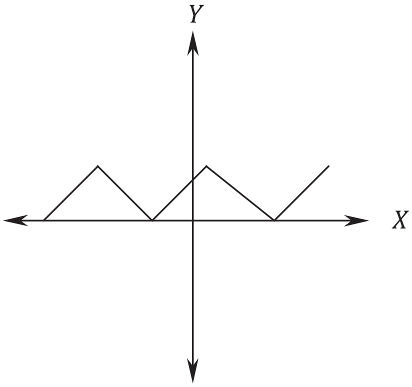
 j. $Dom(f) = (-1, 1)$, $Rec(f) = \mathbb{R}$, cóncava hacia arriba en $(-1, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, 1)$. Bajo estas condiciones, ¿$f$ es siempre uno a uno? ¿Es $f$ siempre decreciente?

 k. $Dom(f) = (-1, 1)$, uno a uno y acotada, ¿puede $f$ tener máximo?.

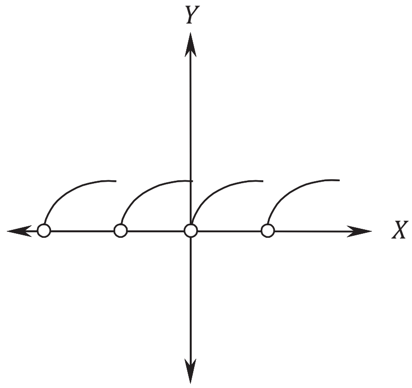
 l. $Dom(f) = (-1, 1)$, uno a uno y no acotada.

2. Analice la continuidad de las siguientes funciones dadas sus gráficas.

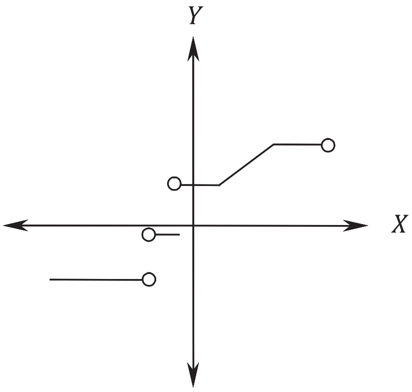
a.



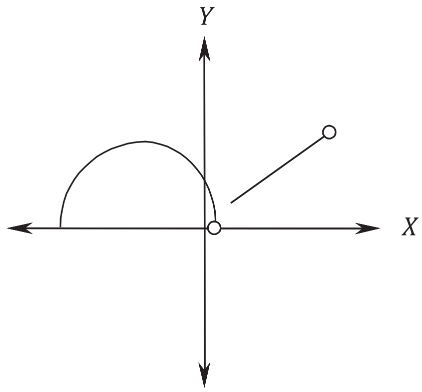

b.



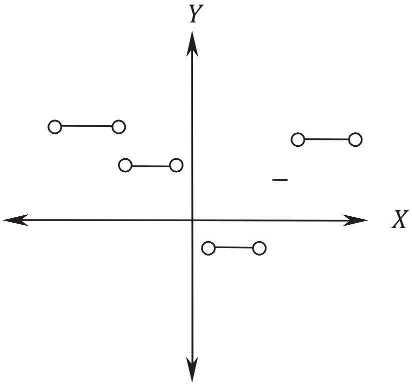

c.



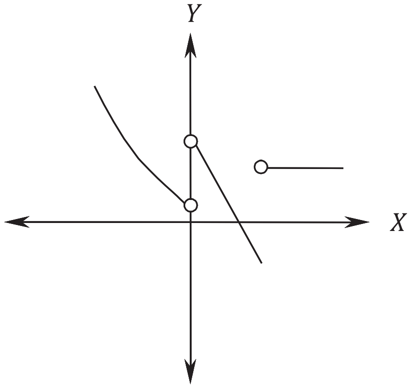

d.




e.

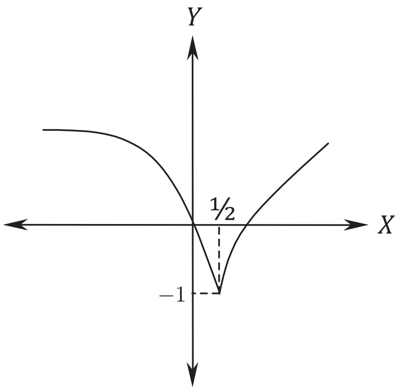


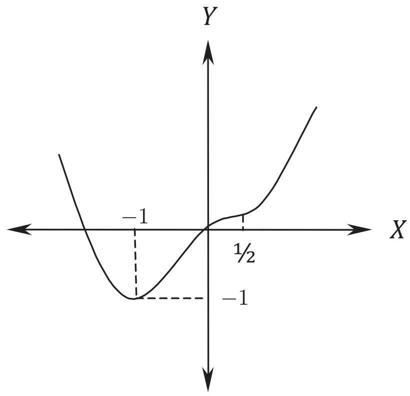

f.

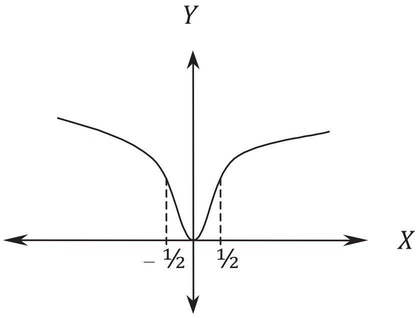


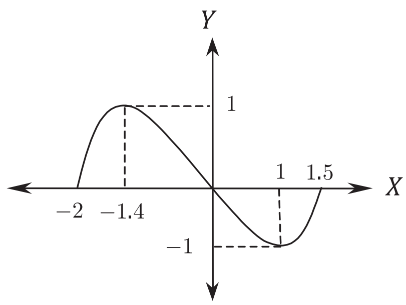
3. Dadas las siguientes gráficas de funciones, determine:

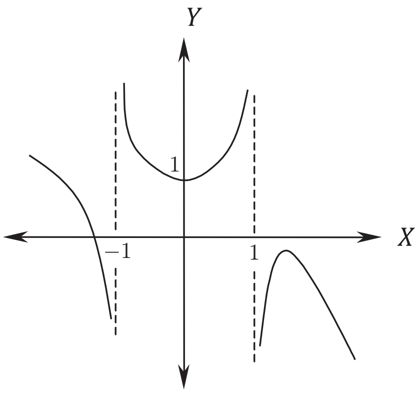
   a. Dominio.
   b. Recorrido.
   c. Si la función es uno a uno.
   d. Intervalos donde la función es creciente y donde es decreciente. Intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.
   e. Puntos máximos, mínimos y de inflexión (si existen).

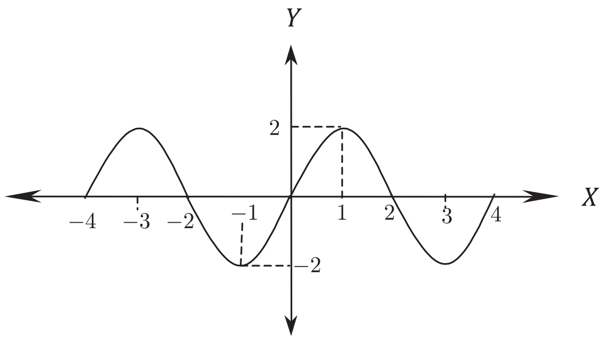


4. Sea una función $f$ continua en un intervalo abierto $(a, b)$. Para cada una de las afirmaciones siguientes, escriba si es verdadera o falsa y justifique su respuesta.

   a. Si $f$ es uno a uno, entonces $f$ no tiene máximos ni mínimos locales.

   b. Si $f(x_1) < 0$ y $f(x_2) > 0$ con $x_1, x_2 \in (a, b)$, entonces existe $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$.

   c. Si el punto $(r, f(r))$ es un mínimo relativo o local y $r \in (a, b)$, entonces $f(r)$ es un mínimo absoluto.

   d. Si el punto $(r, f(r))$ es un máximo absoluto y $r \in (a, b)$, entonces $f(r)$ es un máximo relativo.

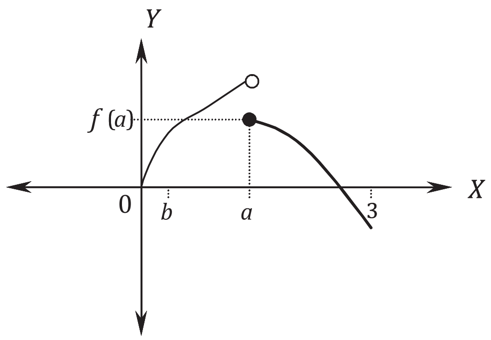
5. Utilice el programa Derive, una calculadora graficadora o tabulación, para representar cada una de las siguientes funciones; de acuerdo a la gráfica, determine: dominio, recorrido, intervalos donde la función es creciente, decreciente, puntos máximos y mínimos relativos (si existen). ¿Están definidos en capítulos anteriores?

   a. $f(x) = -x^4+2x^2-1$;
   b. $f(x) = |x|+|x-3|$;
   c. $f(x) = |x|-3$;
   d. $f(x) = \sqrt{(x^2-1)}$;
   e. $f(x) = x^3-3$;
   f. $f(x) = x^3-9x$;
   g. $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}$;
   h. $f(x) = 2^{|x|}$;
   i. $f(x) = 3^{x2}$ ;
   j. $r(x) = x^3 - 3x - 1$;
   k. $g(x) = \frac{1}{4-x^2}$;
   l. $h(x) = x^3 - 12x$;
   m. $y = 12 + 2x^2 - 4$;
   n. $r(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$;
   o. $y = \frac{4x}{x^2-4x+3}$.

## 3.7 Análisis de funciones no continuas

**1. *f* está definida en un intervalo abierto**

Dada la gráfica de $f$:



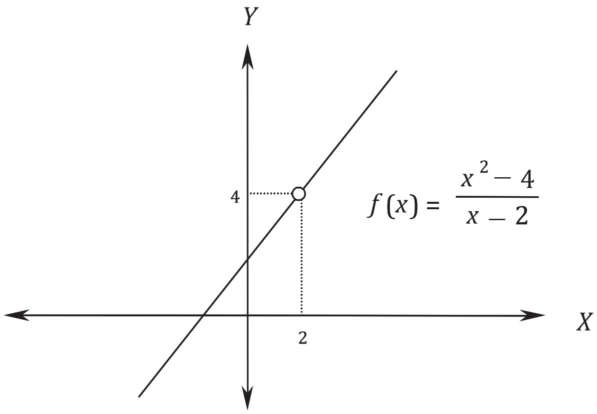
$f$ está definida en el intervalo abierto $(0, 3)$. De acuerdo a la definición intuitiva, $f$ definida en $x = a$ no es continua en el punto $(a, f(a))$ porque no es posible desplazarse en ambos sentidos.

Observe que $f$ es continua en otros valores de $x \in (0, 3)$; por ejemplo, en $x = b$, $f$ es continua.

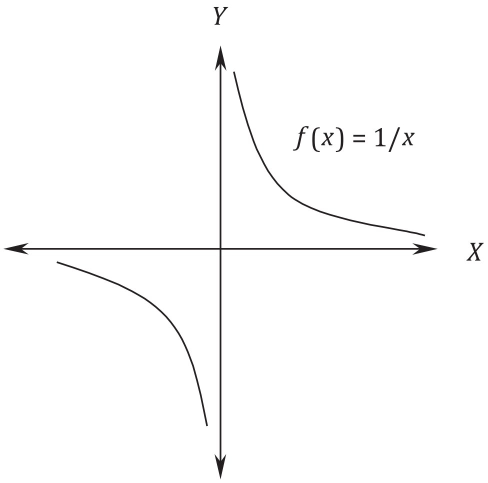
### 2. Continuidad en conjuntos no conexos

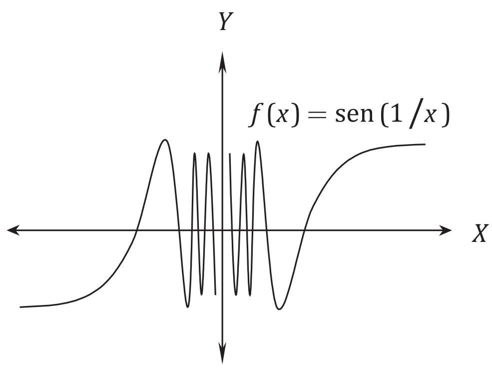
Aunque formalmente estas funciones son continuas en su dominio, por costumbre se considera que una función no es continua en los valores de $x$ en los que $f$ no está definida; en este caso se dice que $f$ presenta discontinuidad evitable o no evitable.

Ejemplo 47. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ no es continua en $x = 2$. Como ya vimos, $f$ no está definida en $x = 2$; sin embargo, si definimos $f(2) = 4$, se tiene que $f$ es continua en $x = 2$. En este caso, decimos que se tiene una discontinuidad evitable.

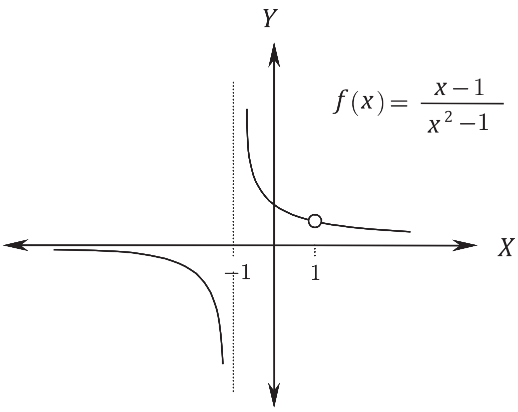



Ejemplo 48. Las funciones definidas por $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, no están definidas en $x = 0$ y no es posible definir $f(0)$ de tal manera que $f$ sea continua en $x = 0$. En este caso, decimos que se tiene una discontinuidad no evitable en $x = 0$.



Ejemplo 49. Sea $f(x) = f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$.



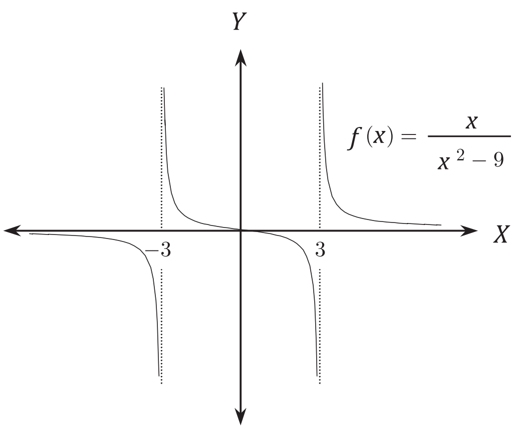

$f$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ y una discontinuidad no evitable en $x = -1$.

## 3.8 Límites

Hasta ahora se ha presentado un desarrollo intuitivo a partir de gráficas, de conceptos tales como continuidad, no continuidad (discontinuidad evitable, discontinuidad no evitable), función creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

Para presentar un desarrollo analítico de estos conceptos es necesario construir y definir la noción de límite. Consideraremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 50. Sea $f$ definida por $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$; $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$. En $x = -3$ y $x = 3$, se obtienen las indeterminaciones $\frac{-3}{0}$ y $\frac{3}{0}$.



Para ver el comportamiento de $f$ alrededor de $x = -3$ y $x = 3$, evaluamos la función en valores próximos a $x = -3$ y a $x = 3$, tanto por la izquierda como por la derecha. Para $x = -3$, evaluemos $f(x)$ en $x = -2{,}99$, $x = -2{,}999$ y $x = -2{,}9999$ ($x$ se aproxima a $-3$ por la derecha, se nota $x \to -3^+$):

$$f(-2{,}99) = \frac{-2{,}99}{(-2{,}99)^2 - 9} = 49{,}9$$
$$f(-2{,}999) = \frac{-2{,}999}{(-2{,}999)^2 - 9} = 499{,}9$$

$$f(-2{,}9999) = \frac{-2{,}9999}{(-2{,}9999)^2 - 9} = 4.999{,}9$$

Observe que cuando $x \to -3^+$, $f$ toma valores tan grandes como se quiera. Esto se expresa diciendo que $f(x)$ tiende a infinito y se nota $f(x) \to \infty$.

Resumimos: tenemos que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to -3^+$.

Para $x = -3$, evaluemos $f$ en $x = -3{,}01$, $x = -3{,}001$ y $x = -3{,}0001$ ($x$ se aproxima a $-3$ por la izquierda; se nota $x \to -3^-$):

$$f(-3{,}01) = \frac{-3{,}01}{(-3{,}01)^2 - 9} = -50{,}08$$

$$f(-3{,}001) = \frac{-3{,}001}{(-3{,}001)^2 - 9} = -500{,}08$$

$$f(-3{,}0001) = \frac{-3{,}0001}{(-3{,}0001)^2 - 9} = -5.000{,}08$$

Observe que cuando $x \to -3^-$, $f(x) \to -\infty$.

Para $x = 3$, evaluemos $f$ en $x = 2{,}99$, $x = 2{,}999$ y $x = 2{,}9999$ ($x$ se aproxima a 3 por la izquierda y se nota $x \to 3^-$):

$$f(2{,}99) = \frac{2{,}99}{(2{,}99)^2 - 9} = -49{,}9165$$
$$f(2{,}999) = \frac{2{,}999}{(2{,}999)^2 - 9} = -499{,}9166$$
$$f(2{,}9999) = \frac{2{,}9999}{(2{,}9999)^2 - 9} = -4.999{,}9166$$

Observe que cuando $x \to 3^-$, $f$ toma valores negativos tan grandes como se quiera (en valor absoluto). Esto se expresa diciendo que $f$ tiende a menos infinito y se nota $f(x) \to -\infty$.

Resumimos, tenemos que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 3^-$.

Para $x = 3$, evaluemos $f$ en $x = 3{,}01$, $x = 3{,}001$ y $x = 3{,}0001$ ($x$ se aproxima a 3 por la derecha y se nota $x \to 3^+$):

$$f(3{,}01) = \frac{3{,}01}{(3{,}01)^2 - 9} = 50{,}0831$$

$$f(3{,}001) = \frac{3{,}001}{(3{,}001)^2 - 9} = 500{,}0831$$

$$f(3{,}0001) = \frac{3{,}0001}{(3{,}0001)^2 - 9} = 5.000{,}0831$$

Observe que cuando $x \to 3^+$, $f(x) \to \infty$.

**Nota.** *Cuando una de las siguientes situaciones ocurre, se dice que la función f tiene una discontinuidad infinita en x = a:*

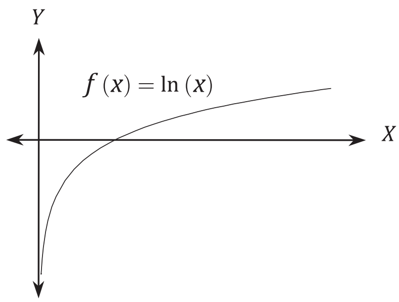
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ ó } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \text{ ó } \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

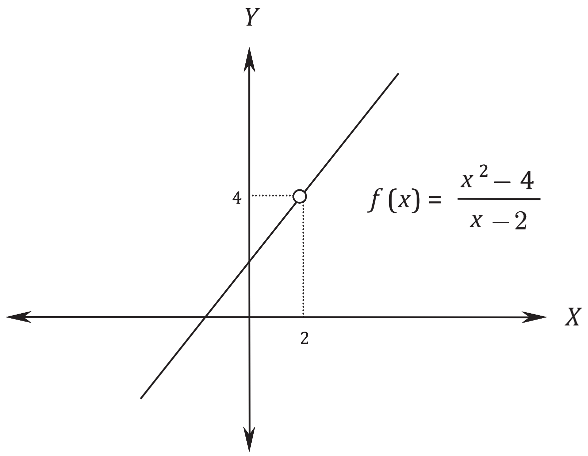
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \text{ ó } \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

También se dice que $x = a$ es una asíntota vertical de $f$ (y además $f$ no es acotada).

Ejemplo 51. En la función $f$ definida como $f(x) = \ln x$, cuyo dominio es $(0, \infty)$, ocurre que cuando $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$. La gráfica ayuda a ver este hecho de manera clara.



Ejemplo 52. Sea $f$ definida como $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. $Dm(f) = \mathbb{R}-\{2\}$.




En $x = 2$, $f$ no está definida, pero tenemos una discontinuidad evitable. Evaluemos $f$ en $x = 1{,}9$; $x = 1{,}99$ y $x = 1{,}999$.

$$f(1{,}9) = \frac{(1{,}9)^2 - 4}{1{,}9 - 2} = 3{,}9$$

$$f(1{,}99) = \frac{(1{,}99)^2 - 4}{1{,}99 - 2} = 3{,}99$$

$$f(1{,}999) = \frac{(1{,}999)^2 - 4}{1{,}999 - 2} = 3{,}999$$

Observe que cuando $x \to 2^-$, $f$ toma valores cada vez más próximos a 4.

Se observa que $f(x) \to 4$ cuando $x \to 2^-$.

Ahora evaluemos $f$ en $x = 2{,}01$; $x = 2{,}001$ y $x = 2{,}0001$.

$$f(2{,}01) = \frac{(2{,}01)^2 - 4}{2{,}01 - 2} = 4{,}01$$

$$f(2{,}001) = \frac{(2{,}001)^2 - 4}{2{,}001 - 2} = 4{,}001$$

$$f(2{,}0001) = \frac{(2{,}0001)^2 - 4}{2{,}0001 - 2} = 4{,}0001$$

Se observa que $f(x) \to 4$ cuando $x \to 2^+$.

Nótese que $f(x) \to 4$, cuando $x \to 2$, bien sea por la izquierda o por la derecha; se nota:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

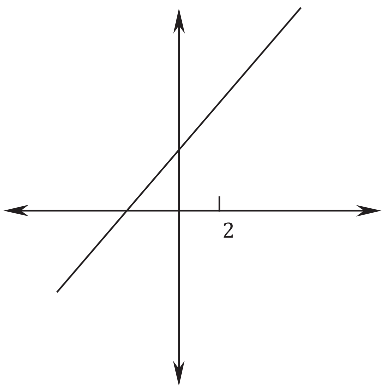
**$x \to 2$, significa que $x \to 2^-$ y $x \to 2^+$; es decir, para que en una función el límite, cuando $x \to a$, exista, los límites laterales, cuando $x \to a^+$, $x \to a^-$, deben ser iguales y finitos.**

Algebraicamente, en $x = 2$ se obtiene la indeterminación 0/0. Esto significa que $x = 2$ es raíz de los polinomios del numerador y del denominador; por lo tanto, si factorizamos y simplificamos, tenemos:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2,\ x \neq 2$$

Observe que podemos extender el Dm$f$ a todo $\mathbb{R}$, definiendo $f(2) = 4$, de tal forma que $f$ resulte continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 4 \quad, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

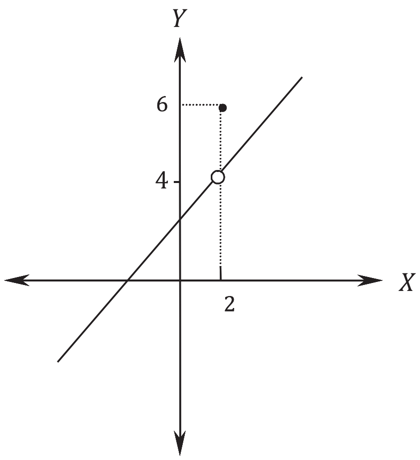



Ejemplo 53. Sea $f(x) = x+2$. $f$ es continua en todo su dominio; en particular en $x = 2$ se puede ver que:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

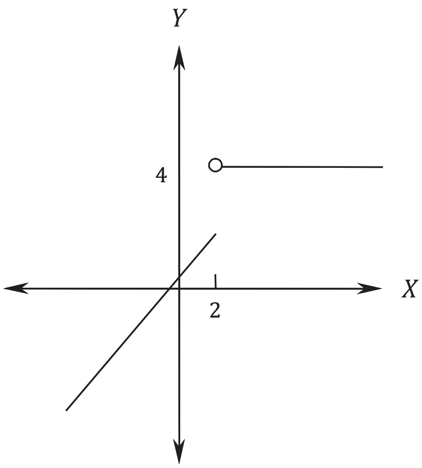
El valor del límite coincide con $f(2)$.

Ejemplo 54. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 6 & \text{, si } x = 2 \end{cases}$




$f$ no es continua en $x = 2$, pues existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$, pero es diferente de $f(2)$.

Ejemplo 55. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 2 \\ 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$




$f$ está definida en $x = 2$ pero no es continua en $x = 2$, porque cuando $x \longrightarrow 2$ se tiene que:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

En los ejemplos 52, 53 y 54, se puede observar que podemos hacer $f$ tan cercano como queramos a un único valor, por ejemplo a 4, si hacemos que $x$ tienda a 2, pero $x \neq 2$ . En estos casos se dice que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ **existe**.

En el ejemplo 55, se puede ver intuitivamente que $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

Expresado informalmente, una función $f$ tiene límite $L$ cuando $x$ tiende a $a$. Esto significa que $f(x)$ se puede hacer tan cercano a $L$ como se quiera, haciendo que $x$ esté suficientemente cerca de $a$. Esta visión informal permite entender mejor la siguiente definición que tardó años en presentarse.

**Definición 6 (de límite).** Una función $f$ tiende hacia el límite $L$ en $x = a$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esta definición es tan sofisticada que no es fácil de manejar. Presentamos algunos ejemplos sencillos (la dificultad siempre está en encontrar el famoso $\delta$ que satisfaga la definición).

Ejemplo 56. A partir de la definición de límite probar que:

$$\lim_{x\to 3} (3x-8) = 1$$

Solución. **Paso 1.**

Si dado $\varepsilon>0$ ya conoce el $\delta$, vaya al paso número 2, y si no continúe. Dado un $\varepsilon>0$, se trata de encontrar un procedimiento o fórmula para encontrar el $\delta$. Veamos.

Sea $\varepsilon>0$ , debemos hallar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-3| < \delta$, entonces $|(3x-8) - 1| < \varepsilon$ y

$$\begin{aligned} |(3x-8)-1| &< \varepsilon \\ |3x-9| &< \varepsilon \\ |3(x-3)| &< \varepsilon \\ |x-3| &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Como por hipótesis se debe tener que $|x-3|<\delta$, escogemos $\delta = \varepsilon/3$.

**Paso 2. Prueba formal**

Sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, es decir, $\varepsilon = 3\delta$. Si $0 < |x-3| < \delta$ tenemos que ver $|(3x-8)-1| = |3x-9| < \varepsilon$. Si $|x-3|<\delta$, se tiene que $3|x-3| < 3\delta = \varepsilon$, por lo tanto, $|3x-9|<\varepsilon$ que era lo que se quería demostrar.

Ejemplo 57. Probar que $\lim_{x\to a} (mx+b) = ma+b,\ m\neq 0$.

Solución. **Paso 1.**

Sea ε > 0, debemos encontrar un δ > 0 tal que: si $0 < |x-a| < \delta$, entonces:

$$\begin{aligned} |(mx+b)-(ma+b)| = |m(x-a)| &< \varepsilon \\ |m||x-a| &< \varepsilon \\ |x-a| &< \frac{\varepsilon}{|m|} \end{aligned}$$

Como por hipótesis se tiene que $|x-a|<\delta$, escogemos $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$. El lector puede hacer la prueba formal. En particular, si $f(x) = x$, se tiene:

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

Ejemplo 58. Probar que $\lim\limits_{x\to 1} (-3x+7) = 4$.

Solución. Dado ε > 0, tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ (con base en el ejemplo anterior) y vamos al paso número 2.

En los ejemplos anteriores, se puede verificar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ejemplo 59. Probar que $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{2x^2-5x-3}{x-3}\right) = 7$.

Solución. **Paso 1.**

Dado ε > 0, debemos encontrar δ > 0 tal que:

si $0<|x-3|<\delta$, entonces:

$$\begin{aligned} \left|\frac{2x^2-5x-3}{x-3} - 7\right| &< \varepsilon, \text{para todo } x \neq 3 \\ \left|\frac{2x^2-12x+18}{x-3}\right| &< \varepsilon \\ |2(x-3)| &< \varepsilon \\ |x-3| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Como por hipótesis se tiene que $|x-3| < \delta$, hacemos $\delta = \varepsilon/2$.

**Paso 2.**

A cargo del lector.

En este ejemplo, observe que $f$ no está definida en $x = 3$, pero el límite existe.

### 3.8.1 Propiedades de los límites

1. Si el límite existe, éste es único.

2. $\lim_{x\to a} c = c$.

3. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$ se tiene que:

3.1. $\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$.

3.2. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$.

**Demostración de 3.2**

Sea $\varepsilon > 0$; en particular tomemos $\varepsilon/2 > 0$.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existe $\delta_1 > 0$, tal que:
si $0 < |x-a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$; y como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, existe $\delta_2 > 0$, tal que:

si $0 < |x-a| < \delta_2$, entonces $|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, por lo tanto, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces:

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)-(L+M)| &= |f(x)-L+g(x)-M| \\ &\leq |f(x)-L| + |g(x)-M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $0<|x-a|<\delta$, se tiene que $|f(x)+g(x)-(L+M)|<\varepsilon$; es decir:

$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = L + M = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

3.3 $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

3.4 $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

## 3.8.2 Algunos límites notables

1. Función polinómica.

   Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, entonces $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

   En efecto, como se tiene que $\lim\limits_{x \to c} x = c$, aplicamos la propiedad 3.3:

   $$\lim_{x \to c} x^n = c^n;$$

   Aplicamos las propiedades 2, 3.1 y 3.2 para demostrar el resultado.

Ejemplo 60. $\lim\limits_{x \to 5} (x^2 - 3x + 7) = 5^2 - 3(5) + 7 = 17$

2. Si $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe, se tiene que:

   $$\lim_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n \text{ si } n \in \mathbb{Z}$$

   Esta propiedad se puede extender para $n$ negativo, si $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq 0$.
   Para $n = p/q \in \mathbb{Q}$ es necesario que $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$, si $q$ es par.

Ejemplo 61. $\lim\limits_{x \to 3} (\sqrt{x^2 - 2x + 1}) = \sqrt{\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 2x + 1)} = \sqrt{4} = 2$

Sea $n \in Z^+$.

a. Si $n$ es impar se tiene que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty; \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty.$$

b. Si $n$ es par entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \infty.$$

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0.$

## EJERCICIO 3.2

1. Utilice la definición de límite para probar que:

a. $\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4)=6$;

b. $\lim_{x\to 2}(3x-5)=1$;

c. $\lim_{x\to 9}\sqrt{x}=3$;

d. $\lim_{x\to 2}|x|=|2|$;

e. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$;

f. $\lim_{x\to 2}(x^2-3x-4)=-6$;

g. $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-1}=1$.

2. Aplique propiedades y calcule:

a. $\lim_{x\to 1}\sqrt{3x^2+13}=$

b. $\lim_{x\to c}\frac{|x|}{x}$; $c\neq 0$

c. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2}=$

d. $\lim_{x\to 2}(2x^2-3x+7)^3=$

e. $\lim_{x\to c}|x|=$

f. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=$

3. Si $\lim_{x\to a}f(x)=7$ y $\lim_{x\to a}g(x)=3$, calcule:

a. $\lim_{x\to a}(3f(x)-g(x))=$

b. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)^2}=$

c. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)^3}{g(x)^2}=$

d. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)^2}{g(x)^2}=$

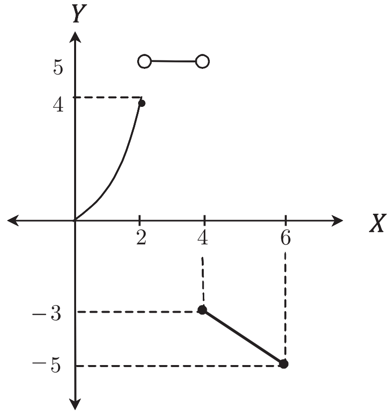
e. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)-3}=$

f. $\lim_{x\to a}\sqrt[4]{f(x)^2\,g(x)^3}=$

## 3.8.3 Límites laterales

Ahora analizamos los límites laterales cuando $x\to a^+$ ó cuando $x\to a^-$. Estos casos se consideran cuando $\lim_{x\to a}f(x)$ no existe, o cuando se quiere analizar una función $f$ definida en $(a, b)$ (o en $[a, b]$) en los extremos $x = a$ ó $x = b$.

Ejemplo 62. Sea $f$ la función tal que $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 2; \\ 5, & \text{si } 2 < x < 4; \\ -x+1, & \text{si } 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$ según el gráfico que se presenta




El límite cuando $x \to 2$ no existe; sin embargo, se observa que cuando $x \to 2^-$, entonces $f(x) \to 4$; y cuando $x \to 2^+$, $f(x) \to 5$; en estos casos se tiene que:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe.

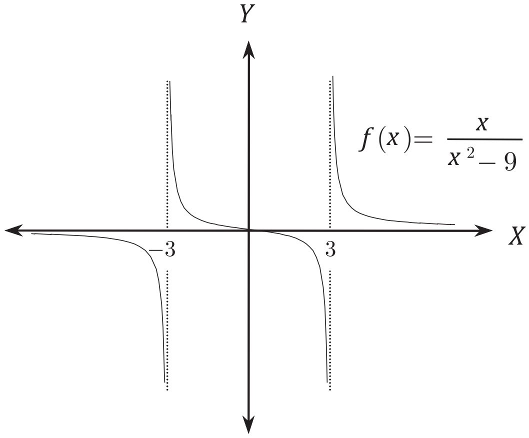
## 3.8.4 Definición de límite lateral

1. Sea $f$ una función definida en un intervalo $(a, b)$; $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $a < x < a + \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $b - \delta < x < b$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

### 3.8.5 Límites infinitos

Ejemplo 63.




Para $f$ definida como:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

encontramos que en $x = -3$ y $x = 3$, se tienen las indeterminaciones $\frac{-3}{0}$ y $\frac{3}{0}$ (véase ejemplo 50). Al evaluar la función en valores ***próximos*** a $x = -3$ y a $x = 3$, tanto por la izquierda como por la derecha (la gráfica muestra claramente este comportamiento), encontramos que:

$$\boldsymbol{f(x) \to +\infty \text{ cuando } x \to -3^{+} \text{ y } f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to -3^{-}.}$$

$$\boldsymbol{f(x) \to +\infty \text{ cuando } x \to 3^{+} \text{ y } f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to 3^{-}.}$$

En estos casos tenemos límites infinitos y se notan como:

$$\lim_{x \to -3^{-}} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to -3^{+}} f(x) = +\infty$$

En general, si en $x = a$, $f$ tiene una indeterminación de la forma $k/0$, con $k \neq 0$, la recta $x = a$ es una ***asíntota vertical.***

Ejemplo 64. La función $f$ definida como $f(x) = \ln x$ tiene como asíntota vertical la recta $x = 0$. Véase el ejemplo 51.

Si el dominio de una función es un intervalo infinito, para el análisis de la función es necesario determinar qué ocurre con $f(x)$ cuando $x \to -\infty$ ó cuando $x \to \infty$.

Ejemplo 65. $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ cuando $x \to -\infty$, evaluamos $f$, por ejemplo en $x = -100$ y $x = -1.000$. Obtenemos $f(-100) \approx -0{,}01$ y $f(-1.000) \approx -0{,}001$. Cuando $x \to \infty$, evaluamos $f$, por ejemplo en $x = 100$ y $x = 1.000$; obtenemos:

$$f(100) \approx 0{,}01 \quad \text{y} \quad f(1000) \approx 0{,}001$$

Resumimos:

$$\boldsymbol{f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty \text{ y } f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to \infty.}$$

En estos casos, el límite al infinito existe y se expresa como:

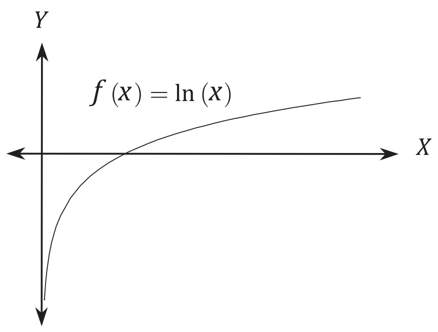
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

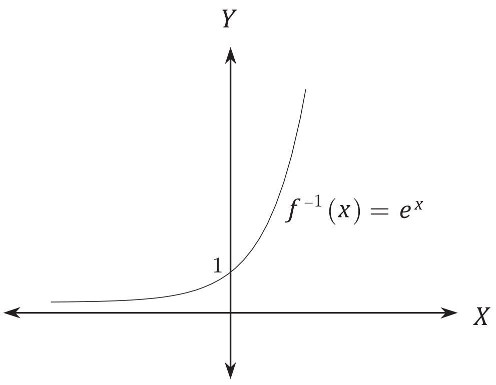
En general, si $f(x) \to k$ cuando $x \to -\infty$, ó $f(x) \to k$ cuando $x \to \infty$, la recta $y = k$ se llama **asíntota horizontal.**

Los siguientes límites se usarán más tarde:

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty; \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0;$$
$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

No intentaremos dar prueba alguna de estos hechos, más bien nos conformaremos con su interpretación gráfica, con la cual resulta fácil recordarlos. No olvidemos que si $f$ está dada por $f(x) = \ln x$, su inversa $f^{-1}$ está dada por $f^{-1}(x) = e^x$, de tal forma que sería suficiente conocer el comportamiento de estos límites en una de las dos funciones para conocer el de la otra. Por ejemplo, cuando $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$, lo cual significa que cuando $y = f(x) \to \infty$, entonces $f^{-1}(y) = x \to \infty$. Asímismo, cuando $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$, lo que significa que cuando $y \to -\infty$, $f^{-1}(y) \to 0$.

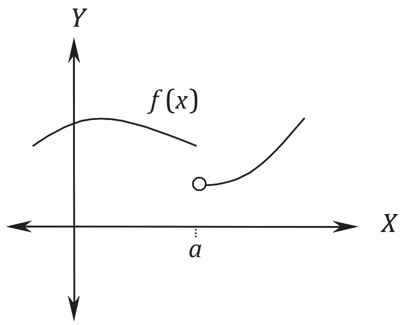


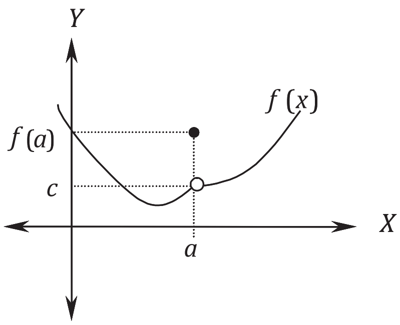
# 3.9 Continuidad de una función

## 3.9.1 Continuidad en un punto

Gráfica 1




Gráfica 2




Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto que contiene a $a$. De acuerdo al análisis gráfico, $f$ no es continua en $x = a$ cuando:

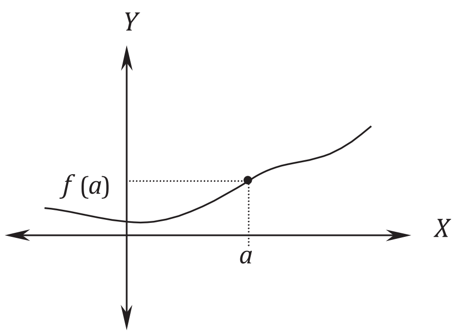
i. En $x = a$ se tiene que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe y no hay forma de redefinir $f$ en $x = a$ para que exista el límite (ver gráfica 1).

ii. En $x = a$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, pero no coincide con $f(a)$. Pero si definimos $f(a)$ igual al $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, $f$ es continua en $x = a$ (ver gráfica 2).

**Definición de continuidad en un punto.** Una función $f$ definida en un intervalo abierto que contiene el valor $a$, es continua en $x = a$ si y sólo si:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; en otras palabras,

si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.



Nótese que $|x-a|<\delta$ y $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, significa tener el intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$ y el intervalo abierto $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$, respectivamente.

En términos de estos intervalos, la proposición: si $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, significa que:

si $x \in (a-\delta,\ a+\delta)$ entonces $f(x) \in (f(a)-\varepsilon,\ f(a)+\varepsilon)$; es decir, la imagen de $(a-\delta,\ a+\delta)$ está contenida en el intervalo $(f(a)-\varepsilon,\ f(a)+\varepsilon)$.

De manera equivalente, $f$ es continua en $a$ si cualquier intervalo abierto con centro en $f(a)$ contiene la imagen de algún intervalo abierto con centro en $a$.

**Definición 7.** Una función $f$ es continua en un intervalo abierto $(a, b)$ si es continua en cada uno de los puntos de dicho intervalo.

Ejemplo 66. Las funciones polinómica, exponencial, logarítmica y valor absoluto son continuas.

**Propiedades**

Si $f$ y $g$ son continuas en $x = a$, se tiene que las siguientes funciones son continuas en $x = a$:

1. $f \pm g$;
2. $f \cdot g$;
3. $f/g$, si $g(a) \neq 0$.

**Continuidad en el intervalo cerrado [*a, b*]**

$f$ es continua en $[a, b]$ si:

i. $f$ es continua en $(a, b)$;

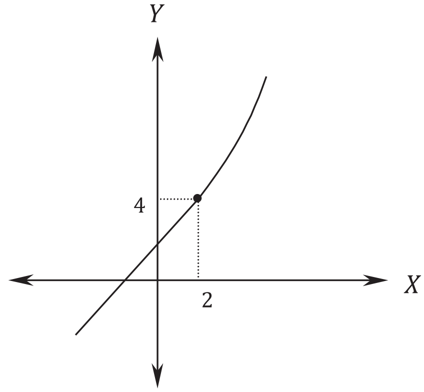
ii. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Para determinar si $f$ definida en $x = a$ es continua, es necesario tener algún procedimiento para calcular su límite.

1. Si $f$ es continua en $x = a$ el límite coincide con $f(a)$.

Ejemplo 67. $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$, ¿es continua en $x = 2$?

Solución.




$f(2) = 2 + 2 = 4$. Para algún intervalo abierto que contiene el 2, la función está definida de manera diferente, por lo tanto, se deben calcular los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x+2) = 4$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x^2 = 4$;

por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$, de donde se sigue que $f$ es continua en $x = 2$.

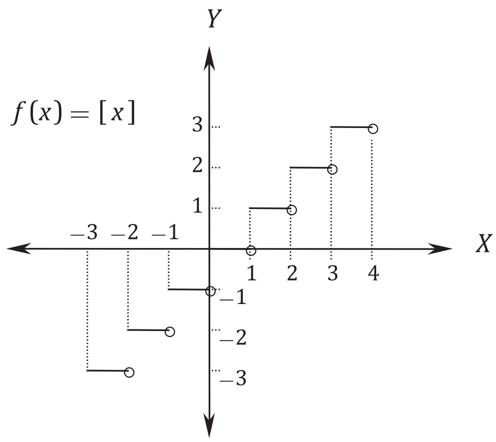
2. Si $f$ no es continua en $x = a$ puede ocurrir que:

   i. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no exista;

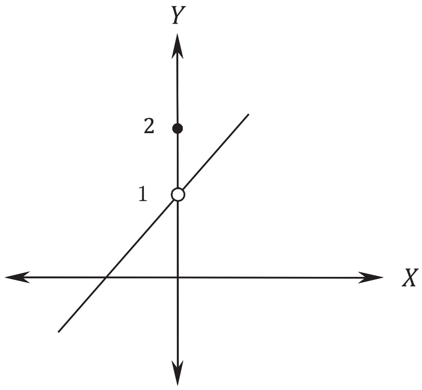
   ii. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ exista pero no coincida con $f(a)$.

   Cuando ocurre el caso *i* se habla de una discontinuidad no evitable, y cuando ocurre el caso *ii* la discontinuidad es evitable. Los ejemplos siguientes ilustran estas situaciones.

Ejemplo 68. $f(x) = [\![x]\!]$ no es continua en $x \in \mathbb{Z}$. En particular, en $x = 2$ se tiene que $f(2) = 2$, pero $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe porque los límites laterales (en 2) son diferentes: $\lim\limits_{x\to 2^-} [\![x]\!] = 1$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} [\![x]\!] = 2$. La discontinuidad en este caso es no evitable.



Ejemplo 69. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \neq 0 \\ 2, & \text{si } x = 0 \end{cases}$, no es continua en $x = 0$.




Solución. En efecto, $\lim_{x \to 0} x + 1 = 1$ (existe), pero $f(0) = 2$. La discontinuidad es evitable; podemos redefinir $f$ para que resulte continua en $x = 0$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En general, cuando $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $f(a) \neq L$ (o $f(a)$ no está definida) se puede redefinir $f$ para que resulte continua en $x = a$ de la siguiente forma:

$$f_r(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq a \\ L, & \text{si } x = a \end{cases}.$$

Nótese que la función redefinida $f_r$ no es la misma función original $f$.

Ejemplo 70. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ en $x = 3$, se tiene la indeterminación $\frac{0}{0}$, pero

$$\lim_{x \to 3} \left( \frac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 3 + 3 = 6$$

**existe.** Tenemos una discontinuidad evitable porque si definimos $f(3) = 6$, $f$ es continua en $x = 3$.

---

***Nota:*** *Cuando en x = a, f(a) es una indeterminación de la forma 0/0, usualmente se puede simplificar f(x), aunque esto no significa que el límite exista.*

---

## 3.10 Cálculo de límites

Ejemplo 71. Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Solución. Racionalizamos el numerador:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 72. Calcular $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Solución. Hallamos el m.c.m. de los índices de los radicales, que es 6, y hacemos la sustitución de $x = z^6$; cuando $x \to 64$ se tiene que $z^6 \to 64$ y $z \to \sqrt[6]{64} = 2$, luego:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} &= \lim_{z\to 2}\frac{\sqrt{z^6}-8}{\sqrt[3]{z^6}-4} = \lim_{z\to 2}\frac{z^3-8}{z^2-4}\\ &= \lim_{z\to 2}\frac{(z-2)(z^2+2z+4)}{(z-2)(z+2)} = \lim_{z\to 2}\frac{z^2+2z+4}{z+2}\\ &= \frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+2}=\frac{4+4+4}{4}=\frac{12}{4}=3\end{aligned}$$

Ejemplo 73. Calcular:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}$.

b. $\lim\limits_{y\to-\infty} a^x$, si $a > 0$.

Solución.

a. Hacemos la sustitución $y = -x$. Cuando $x \to \infty$, $y \to -\infty$, así que:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$$

b. Consideraremos dos casos:

i) Si $a > 1$, $\ln a > 0$ y:

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln a}$$

hacemos la sustitución $y = x\ln a$; tenemos que cuando $x \to \infty$, $y \to \infty$, así que:

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln a} = \lim_{y\to\infty} e^y = \infty$$

ii) Si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$ y:

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln a};$$

de nuevo, hacemos la sustitución $y = x\ln a$; tenemos que cuando $x \to \infty$, $y \to -\infty$, así que:

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln a} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$

Resumimos:

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & \text{si } a > 1 \\ 0\,, & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Ejemplo 74. Sea $f(x) = \frac{|x|}{x}$. En $x = 0$, $f$ no está definida.

Simplificamos y tenemos:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

por lo tanto el límite no existe. En este caso $f$ tiene una discontinuidad no evitable en $x = 0$.

Ejemplo 75. Sea $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. $f$ no está definida en $x = 2$ y se tiene la indeterminación $\frac{k}{0}$, $k \neq 0$. Al dar valores a $x$ próximos a 2 por la izquierda y por la derecha, se tiene que:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty.$$

Por lo tanto, en $x = 2$ se tiene una asíntota vertical y el límite no existe.

Consideraremos ahora algunos límites al infinito con funciones racionales, definidas por $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, con $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo 76. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x-3}{x^3-2x^2+3x-1}$.

Solución.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x-3}{x^3-2x^2+3x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}-\frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{0+0+0}{1-0+0-0} = \frac{0}{1} = 0$$

Esto último se debe a que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{k}{x^n} = 0$.

## EJERCICIO 3.3

1. Sea $f$ continua en $(a, b)$. Verifique si se cumplen las siguientes afirmaciones, y en caso de que no se cumplan, dé un contraejemplo.

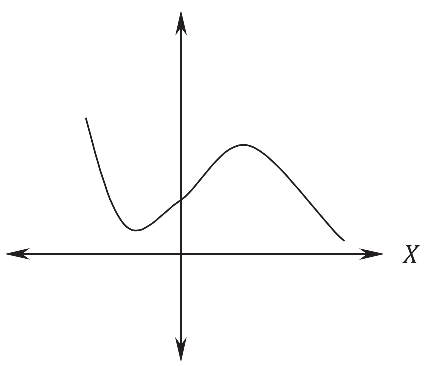
   a. $f$ es acotada.

   b. Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existen, se tiene que $Rec(f)$ tiene *sup* e *inf*; $f$ toma un valor máximo y un valor mínimo.

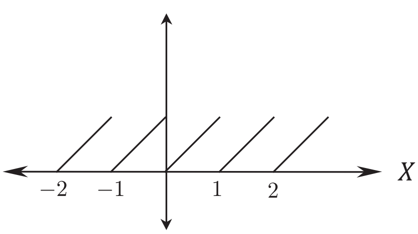
2. Resuelva el ejercicio anterior si $f$ es continua en $[a, b]$.

3. En cada una de las siguientes gráficas, analice la continuidad de la función.

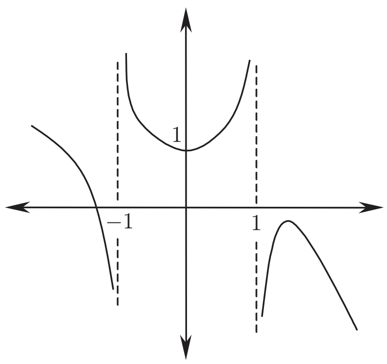
a.



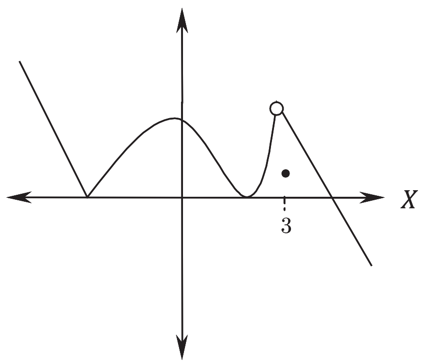

b.



c.




d.




4. Represente gráficamente las siguientes funciones y localice sus puntos de discontinuidad. Use la notación de límite para describir el comportamiento de las funciones alrededor a cada uno de sus puntos de discontinuidad:

a. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{si } 1 < x < 3 \\ 3, & \text{si } 3 \leq x < 5 \end{cases}$

b. $f(x)=\frac{1}{x+2}$

c. $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$

d. $f(x)=\begin{cases} x, & \text{si } x < 2 \\ -\frac{2}{3}x+6, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

e. $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

f. $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \leq 2 \\ x-1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

g. $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$

h. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ 9 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

i. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

j. $f(x)=\begin{cases} -2x+4, & \text{si } x < 1 \\ x^2+1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

k. $f(x)=\frac{x}{x^2}$

l. $f(x)=\begin{cases} 1/x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

m. $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

n. $f(x)=\begin{cases} 2, & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3}, & \text{si } 3 < x < 5 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

5. Si $Dom(f) = \mathbb{R}$, $f(0) = 2$ y $f(2) = -1$, ¿se puede afirmar que:

   a. $f$ intersecta el eje $X$ en el intervalo $(0, 2)$?

   b. si $f$ es continua, intersecta el eje $X$ en el intervalo $(0, 2)$?

   c. si $f$ intersecta el eje $X$, entonces es continua en el intervalo $(0, 2)$?

6. a. Sea $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x < 3 \\ 2ax, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

   ¿Qué valor se le debe asignar a $a$ para que $f$ sea continua en $x = 3$?

   b. Si $f(x) = \frac{x^2-16}{|x-4|}$, ¿es $f$ continua en $x = 4$?

   c. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5}, & \text{si } x \neq 5 \\ -10, & \text{si } x = 5 \end{cases}$ ¿Es $f$ continua en $x = 5$?

7. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -2$, y $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$, evalúe los siguientes límites:

   a. $\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x)$;  b. $\lim\limits_{x\to a} g(x)^2$;  c. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$;

   d. $\lim\limits_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)}$;  e. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)}$;  f. $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(f(x)+g(x))^2}$.

8. En cada caso encuentre dos funciones $f$ y $g$ tales que:

   a. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existan y se cumpla que $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x))$ exista.

   b. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no exista y se cumpla que $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x))$ exista.

Evalúe los siguientes límites:

9. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{3x^2-13x-10}{2x^2-7x-15}$.  10. $\lim\limits_{z\to 10} \frac{1}{z-10}$.  11. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$.

12. $\lim\limits_{x\to \infty} [\sqrt{x^2+100x} - x]$.  13. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$.  14. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$.

15. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{2-\sqrt{x+3}}$.  16. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{\sqrt{x^2+11}}$.  17. $\lim\limits_{x\to 9} \frac{9-x}{\sqrt{x}-3}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$.  19. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$.  20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+3x}$.

21. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{(t+a)^2}-\sqrt[3]{a^2}}{t}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt[3]{3}}{x-1}$.

23. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$.

24. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$.

26. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x^3-729}{\sqrt{x}-3}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{4+x}-2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

30. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h+1}-1}{h}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}$.

32. $\lim\limits_{s\to 1}\frac{s^3-1}{s-1}$.

33. $\lim\limits_{t\to \frac{3}{2}}\sqrt{\frac{8t^3-27}{4t^2-9}}$.

34. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}\right)$.

35. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{n^2-5n+1}{3n+7}$.

36. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{2n^2-n+3}{n^3-8n+5}$.

37. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$.

38. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{2n+3}{n+\sqrt{n}}$.

39. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{4n^3+2n^2+n}{3n^3+n^2}$.

40. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x+10}{x+\sqrt{x}}$.

41. $\lim\limits_{n\to \infty}\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}$.

42. $\lim\limits_{y\to \infty}\frac{(y+1)^2}{y^2+1}$.

43. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$.

44. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$.

45. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

46. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2+1}{x^2-1}$.

47. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right)$.

48. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+1}$.

49. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.

50. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

51. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

52. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

53. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

54. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

55. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

56. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

57. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

58. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$.

59. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

60. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

61. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

62. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

63. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

64. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

65. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

66. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

67. $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x(x+a)}-x$.

68. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

69. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

70. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]$.

71. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$.

72. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$.

73. $\lim\limits_{x\to 3} (7x-6)$.

74. $\lim\limits_{x\to 10} \frac{5}{x-1}$.

75. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3x-9}{x-3}$.

76. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{4x}{x+3}+\frac{12}{x-3}\right)$.

77. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-3-2x^2}{1+3x}$.

78. $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x^2+x-56}{x^2-11x+28}$.

79. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-x+3)}{x^2+x-2}$.

80. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$.

81. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x+\frac{5}{x}\right)$.

82. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^2-5x}{x}$.

83. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(1-x)}{3x^2}$.

84. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$.

85. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-3\sqrt{x}}{1+9\sqrt{x}}$.

86. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$.

87. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2x^2+x-6}{x+2}$.

88. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2+x-12}$.

89. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-7x+12}$.

90. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+\sqrt{x}-2}{x^3-1}$.

91. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-4x}{x^3-3x^2+2x}$.

92. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$.

93. $\lim\limits_{x\to 0} 2^{x^2}$.

94. $\lim\limits_{x\to 0} 2^{-1/x^2}$.

95. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x+1}{2^x-1}$.

96. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$.

97. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x^{45}-x^9+2}{3x^{45}+x^{29}-19}$.

98. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

99. $\lim\limits_{x\to -a} \frac{x^4-a^4}{x^3+a^3}$.

100. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5}$.

101. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \left[\frac{2x^2+5x-3}{6x^2-7x+2}\right]$.

102. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right]$.

103. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt[3]{\frac{2+5x-3x^3}{x^2-1}}$.

104. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x+3}{(1/x)+(1/3)}$.

105. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-6x+3}{16x^3+8x-7}$.

106. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

107. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sqrt{(1+h)}}-1\right]$.

108. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^3-6x^2+x-3}{x-3}$.

## 3.10 Resumen

Intuitivamente, una función $f$ definida en un intervalo $(a, b)$ es continua en $x \in (a, b)$, si alrededor del punto de la gráfica $(x, f(x))$ se puede trazar parte de la gráfica sin levantar el lápiz. $f$ es continua en un intervalo abierto $(a, b)$ si es continua en cada valor de $x$, $x \in (a, b)$.

### Funciones monótonas y estrictamente monótonas

Una función $f$ definida como $y = f(x)$ es creciente en un intervalo $X$ (conjunto conexo) , si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$, para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$ de $X$. Análogamente, $y = f(x)$ definida en $X$ es decreciente en este conjunto, si para cualquier $x_1$ y $x_2$ de $X$, se tiene que si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Una función $f$ definida como $y = f(x)$ se denomina no decreciente en un conjunto $X \subseteq Dom(f)$, si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \leq f(x_2)$ para cualquier par de números $x_1$, $x_2$ en $X$. Análogamente, $y = f(x)$ se denomina no creciente en este conjunto, si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \geq f(x_2)$ para cualquier par de números $x_1$, $x_2$ en $X$. Las funciones crecientes, decrecientes, no crecientes y no decrecientes reciben el nombre de funciones monótonas. Las funciones crecientes y decrecientes se denominan estrictamente monótonas.

### Máximos locales y mínimos locales de una función

Sea $f$ definida sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y $c \in A$. El punto $(c, f(c))$ se denomina punto máximo (absoluto) de $f$ sobre $A$ si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in A$. Análogamente, $(c, f(c))$, $c \in A$, se denomina punto mínimo (absoluto), si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in A$. El valor $f(c)$ se denomina valor máximo (mínimo) de $f$ sobre $A$.

Dado un punto $(c, f(c))$ con $c \in (a, b)$, se denomina punto máximo relativo o máximo local si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Análogamente, $(c, f(c))$, $c \in (a, b)$, se denomina punto mínimo relativo o mínimo local si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

### Concavidad de una función

Sea $f$ una función continua y definida en un intervalo abierto $(a, b)$. Si su variación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es creciente en $(a, b)$, se dice que $f$ es cóncava hacia arriba; si $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es decreciente en $(a, b)$, se dice que $f$ es cóncava hacia abajo.

Los puntos donde la función cambia de concavidad se denominan puntos de inflexión.

**Límites**

Informalmente, una función $f$ tiene límite $L$ cuando $x$ tiende a $a$ si $f(x)$ se puede hacer tan cercano a $L$ como se quiera, haciendo que $x$ esté suficientemente cerca de $a$. De manera rigurosa, significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$; se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

**Algunas propiedades de los límites**

Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = M$ y $k$ es una constante, entonces:

1. $\lim_{x \to c} (f+g)(x) = L+M$.

2. $\lim_{x \to c} (fg)(x) = LM$.

2’. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x) = kL$.

3. $\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$, siempre que $M \neq 0$.

4. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n$ si $n \in$ Z.

**Límites laterales**

1. Sea $f$ una función definida en un intervalo $(a, b)$; $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $a < x < a + \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

2. $\lim_{x \to b^-} f(x) = L$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $b - \delta < x < b$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

**Continuidad de una función en un punto**

Una función $f$ definida en un intervalo abierto que contiene el valor $a$ es continua en $x = a$ si sólo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. En otras palabras, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Una función $f$ es continua en un intervalo abierto $(a, b)$ si es continua en cada uno de los puntos de dicho intervalo.

**Propiedades de las funciones continuas**

Si $f$ y $g$ son continuas en $x = a$, se tiene que las siguientes funciones son continuas en $x = a$:

1. $f \pm g$

2. $f \cdot g$

3. $f/g$, si $g(a) \neq 0$

**Continuidad en el intervalo cerrado [*a, b*]**

$f$ es continua en $a$, $b$ si:

i. $f$ es continua en $(a, b)$;

ii. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

## GLOSARIO

Función continua: una función $f$ definida en un intervalo $(a, b)$ es continua en $c \in (a, b)$, si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Función creciente: Una función $f$, definida en un intervalo $I$ es creciente en $I$ si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$, para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$ de $I$.

Función decreciente: Una función $f$, definida en un intervalo $I$ es creciente en $I$ si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$, para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$ de $I$.

Función no decreciente: Una función $f$, definida en un intervalo $I$ es creciente en $I$ si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \leq f(x_2)$, para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$ de $I$.

Función no creciente: Una función $f$, definida en un intervalo $I$ es creciente en $I$ si $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \geq f(x_2)$, para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$ de $I$.

Funciones monótonas: Una función $f$ definida en un intervalo $I$ si se cumple alguna de las siguientes propiedades: creciente, decreciente, no creciente o no decreciente.

Máximo de una función: Sea $f$ definida sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y $c \in A$, el punto $(c, f(c))$ se denomina un punto máximo (absoluto) de $f$ sobre $A$ si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in A$.

Mínimo de una función: Sea $f$ definida sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y $c \in A$, el punto $(c, f(c))$ se denomina un punto mínimo (absoluto) de $f$ sobre $A$ si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in A$.

Concavidad de una función: Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto $(a, b)$ creciente. Si su variación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es creciente en $(a, b)$, se dice que $f$ es cóncava hacia arriba, y si $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es decreciente en $(a, b)$, se dice que $f$ es cóncava hacia abajo.

Punto de inflexión: Puntos donde la función cambia de concavidad se denominan puntos de inflexión.

Límites de una función: Una función $f$ tiene límite $L$ cuando $x$ tiende a $a$, significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

# Capítulo 4

# Derivación

## 4.1 Introducción

En este capítulo se introduce el concepto de la recta tangente a una curva, aunque como se verá, es un concepto muy riguroso desde el punto de vista del cálculo: requiere de límites. Históricamente, la derivada aparece en la física como la velocidad instantánea (variación instantánea de la posición con respecto al tiempo). Aquí veremos de manera más detallada el aspecto geométrico y se mencionarán los teoremas más importantes que permiten, en la mayoría de los casos, encontrar la derivada de una función sin recurrir a su definición original.

### Objetivos

1. Entender el concepto de derivada.
2. Manejar con destreza el álgebra de derivadas.
3. Saber interpretar los diferentes tipos de variación.

## 4.2 Variación de una variable

Si $x$ representa una variable real que toma valores en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$, la variación de $x$ entre $x_1$ y $x_2$ se define por $\Delta x = x_2 - x_1$. Esta variación también se denomina *absoluta*. Si comparamos $\Delta x$ con respecto al valor inicial $x_1$, $\frac{\Delta x}{x_1}$, tenemos una variación *relativa*, que porcentualmente se expresa: $\Delta x\% = \frac{\Delta x}{x_1}100\%$.

Ejemplo 1. Si el salario $s$ de un trabajador se incrementa de \$500.000 a \$600.000, la variación absoluta de $s$ es $\Delta s = s_2 - s_1 = 600.000 - 500.000 = 100.000$, la variación relativa es $\Delta s/s_1 = 100.000/500.000 = 0{,}20$, y la variación porcentual $\Delta s\,\% = 0{,}20 \times 100\,\% = 20\,\%$. Esto significa que aumentó (variación positiva) en un 20 % su salario.

## 4.3 Variación de una función

Si tenemos una función $f$ definida en el intervalo $[x_1, x_2]$, mientras la variable independiente $x$ varía entre $x_1$ y $x_2$, la variable dependiente $y$ lo hace entre $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, es decir, la variación de $y = f(x)$ en el intervalo $[x_1, x_2]$ es:

$$y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

Ejemplo 2. Si $y = f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ representa grados Fahrenheit en función de grados centígrados, calcule la variación de $y$ si $x$ varía en el intervalo $[0, 5]$, e interprete el resultado.

Solución. $\Delta x = 5 - 0 = 5$; $\Delta y = f(5) - f(0) = 41 - 32 = 9$.

Significa que mientras la temperatura en grados centígrados crece 5 grados, la temperatura en grados Fahrenheit crece o tiene un incremento en 9 grados.

Ejemplo 3. Si $y = f(x) = -x^2 + 2x$, calcule la $\Delta y$ en el intervalo $[0, 5]$.

Solución. $\Delta x = 5 - 0 = 5$; $\Delta y = f(5) - f(0) = -15 - 0 = -15$.

En el intervalo $[0, 5]$, $x$ tiene un incremento de 5, en tanto que la variable $y = f(x)$ disminuye en 15. Observe que la variación de $y$ es negativa.

## 4.4 Variación promedio

Para una función $f$ puede ocurrir que haya intervalos diferentes donde ella esté definida, tales que la variación de $x$ sea igual y la variación de $y$ sea diferente. También es posible encontrar dos funciones tales que para un mismo intervalo sus variaciones sean diferentes.

Ejemplo 4. Para $y = f(x) = x^2$, si calculamos $\Delta y$ en los intervalos de igual longitud $[0, 2]$ y $[2, 4]$, tenemos $\Delta y = 4$ para $[0, 2]$ y $\Delta y = 12$ para $[2, 4]$.

Ejemplo 5. Para las siguientes funciones definidas como $y = f(x) = 2x + 1$ y $y = g(x) = x^2 + 4x + 8$, sus variaciones para un mismo intervalo, por ejemplo $[0, 2]$, son $\Delta f(x) = 4$ y $\Delta g(x) = 12$.

Ejemplo 6. Si dos móviles $A$ y $B$ recorren una misma trayectoria $Y$ en diferentes tiempos (supongamos que $A$ tarda menos tiempo que $B$), observe que la variación del desplazamiento es igual para ambos, sin embargo, la variación del tiempo es diferente. Si consideramos solo el tiempo que tarda $A$ en recorrer la trayectoria, tenemos una misma variación de tiempo para $A$ y $B$, pero el desplazamiento de $A$ es mayor que el de $B$.

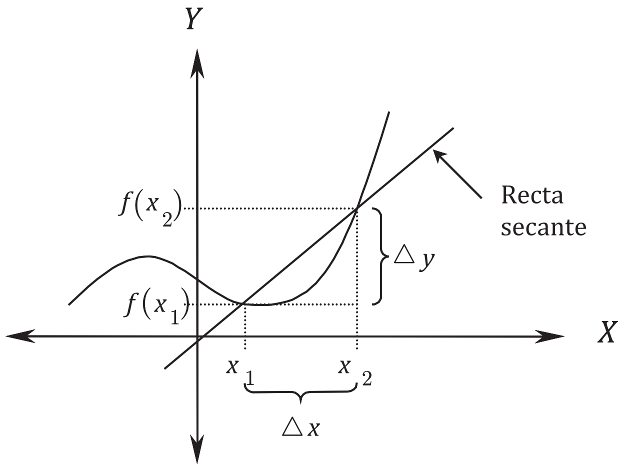
Para reflejar las diferencias en cada uno de estos casos se puede observar que $\Delta y$ no aporta información suficiente y que es necesario en principio comparar su variación con respecto a $x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que representa la **variación de $y$ con respecto a $x$** en un intervalo $[x_1, x_2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si fijamos $x = x_1$; tenemos que $x_2 = x + \Delta x$, y:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Geométricamente, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Esta recta se denomina recta secante a la gráfica de $f$ en esos dos puntos.




Ejemplo 7. La población $p$ de cierta ciudad en función del tiempo $x$ expresado en años, está dada por $p(x) = 500.000(1, 2)^x$. Hallar la variación promedio de $p$ con respecto a $x$ durante los primeros cinco años; luego entre los cinco y los diez años.

Solución. Hallar la variación promedio durante los primeros cinco años es equivalente a calcular $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ en el intervalo [0, 5]:

$$p_1 = p(0) = 500.000(1,2)^0 = 500.000$$
$$p_2 = p(5) = 500.000(1,2)^5 = 1'244.160$$

Por lo tanto:

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{1'244.160 - 500.000}{5 - 0} = 148.832$$

$\frac{\Delta p}{\Delta x} = 148.832$ significa que durante los cinco primeros años la población $p$ está creciendo a un ritmo promedio anual de 148.832 habitantes. Por otro lado, hallar la variación promedio entre los cinco y los diez años es calcular $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ en el intervalo [5, 10]:

$$p_1 = p(5) = 500.000(1,2)^5 = 1'244.160$$
$$p_2 = p(10) = 500.000(1,2)^{10} = 3'095.868$$

y así:

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{3'095.868 - 1'244.160}{10 - 5} \cong 370.342$$

lo que significa que entre el año quinto y el décimo la población $p$ está creciendo a un ritmo promedio anual de aproximadamente 370.342 habitantes.

Ejemplo 8. Hallar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si $y = f(x) = x^2 + 3x - 7$.

Solución.
$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 7 - (x^2 + 3x - 7)}{\Delta x}\\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x - 7 - x^2 - 3x + 7}{\Delta x}\\ &= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta x}{\Delta x}\\ &= \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 3)}{\Delta x}\\ &= 2x + \Delta x + 3\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 3$$

En particular, si el intervalo es en notación de intervalo: [2, 7], tenemos $x = 2$ y $\Delta x = 5$, y:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(2) + 5 + 3 = 12.$

Ejemplo 9. Hallar $\Delta y$, $\Delta y/\Delta x$, si $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Solución. $\Delta y = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x + \Delta x}}{\sqrt{x + \Delta x}.\sqrt{x}}$

Racionalizamos el numerador:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x + \Delta x})}{\sqrt{x + \Delta x}\,.\sqrt{x}} \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x})}\\ &= \frac{x - (x + \Delta x)}{\sqrt{x + \Delta x}\,.\sqrt{x}\ (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}\\ &= \frac{x - x - \Delta x}{\sqrt{x + \Delta x}\ \ \sqrt{x}\ (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}\\ &= \frac{-\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x}\ \ \sqrt{x}\ (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\sqrt{x + \Delta x}\ \sqrt{x}\ (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{x + \Delta x}\ \sqrt{x}\ (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

Ejemplo 10. Dada $f$ definida como $f(x) = x^2 + x - 6$, hallar la pendiente de la recta secante en $x_1 = -2$ y $x_2 = 5$.

Solución. Como $f(-2) = -4$, se tiene el punto $(-2, -4)$; como $f(5) = 24$, se tiene el punto $(5, 24)$; de donde $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{24-(-4)}{5-(-2)} = 4$.

## 4.5 Valor promedio por unidad

Un caso particular de variación promedio se da en muchos problemas en que una función, por ejemplo $C$, expresa totales en función de $x$ donde $x \in \mathbb{Z}^+$. En este caso, el valor promedio por unidad es el total dividido entre el número de unidades. Si $C(x)$ mide el total correspondiente a $x$ unidades, el valor promedio por unidad está dado por: $\tilde{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$.

Ejemplo 11. Si $C(x) = -0{,}05x^2 + 100x + 500$ representa el costo total de producir $x$ unidades de un producto, calcular:

a. El costo de producir 10 unidades; 11 unidades; la unidad No. 11.

b. El costo de producir 100 unidades; 101 unidades; la unidad No. 101.

c. Costo promedio de $x$ unidades; de 10 unidades; de 100 unidades.

Solución.

a. $C(10) = -0{,}05(10)^2 + 100(10) + 500 = 1.495$
$C(11) = -0{,}05(11)^2 + 100(11) + 500 = 1.593{,}95$

El costo de producir la unidad No. 11, es decir, una unidad adicional a partir de $x = 10$, es: $C(11) - C(10) = 98{,}95$.

b. $C(100) = -0{,}05(100)^2 + 100(100) + 500 = 10.000$
$C(101) = -0{,}05(101)^2 + 100(101) + 500 = 10.089{,}95$

El costo de producir la unidad No. 101, es decir, una unidad adicional a partir de $x = 100$, es: $C(101) - C(100) = 89{,}95$.

Observe que el costo de producir una unidad adicional, conocido como costo marginal, disminuye cuando se producen más unidades.

c. Costo promedio de $x$ unidades:

$$\tilde{C}(x) = \frac{(-0{,}05x^2 + 100x + 500)}{x}$$

$$= -0{,}05x + 100 + \frac{500}{x}.$$

Observe que cuando más cantidades se producen, el costo promedio por unidad disminuye, hay que calcularlo.

Para $x = 10$ unidades $\quad \tilde{C}\,(10) = -0.05\,(10) + 100 + \frac{500}{10} = 149.5$

Para $x = 100$ unidades $\quad \tilde{C}\,(100) = -\,0.05\,(100) + 100 + \frac{500}{100}$

$$\tilde{C}\,(100) = 100$$

## EJERCICIO 4.1

1. Para cada una de las siguientes funciones, calcule lo siguiente:

   $\Delta y$ (variación absoluta de $y$), $\frac{\Delta y}{y}$ (variación relativa de $y$) y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (variación promedio de $y$ con respecto a $x$), si $x$ varía en el intervalo [1, 4].

   a. $f(x) = 3x + 5$; b. $f(x) = x^2 + 2x + 1$; c. $f(x) = \frac{1}{x}$;

   d. $f(x) = \log_2(x)$; e. $f(x) = \frac{1}{x-4}$; f. $f(x) = x^2 - 5x + 4$;

   g. $f(x) = -x^3 + 5$; h. $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

2. Encuentre $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ si:

   a. $f(x) = 5x + 3$; b. $f(x) = x^2 + 3x + 2$; c. $f(x) = \frac{1}{x}$;

   d. $f(x) = \sqrt{x}$; e. $f(x) = \frac{1}{x^2}$; f. $f(x) = x + 1/x$;

   g. $f(x) = \sqrt[3]{x}$; h. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$; i. $f(x) = \frac{1}{x+4}$;

   j. $f(x) = \sqrt{x+5}$; k. $f(x) = k$.

3. Calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en el intervalo [1, 6] para cada una de las funciones definidas en el ejercicio 2.

4. Dada $f$, una función definida en todo $\mathbb{R}$ como $y = f(x)$, si se tiene que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $k>0$ y $f(0) = 0$.

   a. Verifique que se tiene una proporcionalidad directa.

   b. $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$. Demuestre que la proporcionalidad directa se puede expresar como $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$.

5. La función definida como $y = \frac{k}{x}$ expresa una proporcionalidad inversa. Si $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, demuestre que la proporcionalidad inversa se puede expresar como $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$.

6. En cada uno de los siguientes casos, exprese la relación de proporcionalidad entre las variables dadas.

   a. La longitud $l$ del rectángulo de área fija con respecto a su altura $h$.

   b. El volumen $V$ de un cubo de lado $l$ con respecto al lado.

   c. El volumen $V$ de un cilindro es directamente proporcional a su altura y al cuadrado de su radio $r$, donde la constante de proporcionalidad es π.

7. Sea $C(x) = -0{,}005x^2 + 10.000x + 1.000.000$ el costo total de producir $x$ unidades en una semana. Si se producen 500 unidades, calcule:

   a. Su costo total y promedio;

   b. El costo de producir la unidad 501.

8. Una compañía de dulces ha determinado el costo total diario para producir $x$ cajas de chocolates como $-\frac{1}{2}x^2 + 100x + 2.000$. Encuentre el costo total, el promedio de producir 100 cajas, el costo de la caja No. 100 y el costo marginal para $x = 100$.

9. Dadas la función de costo lineal $C(x) = ax + b$ ($a>0$, $b>0$) y la función de costo cuadrática $C(x) = ax^2 + bx + c$, con $a>0$, $b>0$, $c>0$, halle cuál es la variación promedio para cada una de ellas, si $x$ varía de $x_1$ a $x_1 + \Delta x$.

10. Un capital de $10’000.000 se invierte en una entidad financiera durante dos años, pagando un interés trimestral del 5 %.

    a. Exprese el valor futuro $y$ de este capital en función del tiempo $x$ expresado en trimestres.

    b. Halle la variación promedio de $y$ con respecto a $x$ durante el primer año y durante el segundo año. Compare estos resultados y explique su diferencia.

11. Una población $p$ de cierta ciudad, en función del tiempo $x$ expresado en años, está decreciendo a una tasa continua del 10 % anual.

    a. Expresar la población en función del tiempo $x$.

    b. Hallar la variación promedio de $p$ con respecto a $x$ durante los primeros cinco años y luego entre los cinco y diez años. Compare estos resultados.

12. Si $C(x) = -0{,}5x^2 + 10.000x + 5.000$ representa el costo total de producir $x$ unidades de un producto, calcular:

    a. El costo de producir $x$, 10, 100 y 1.000 unidades.

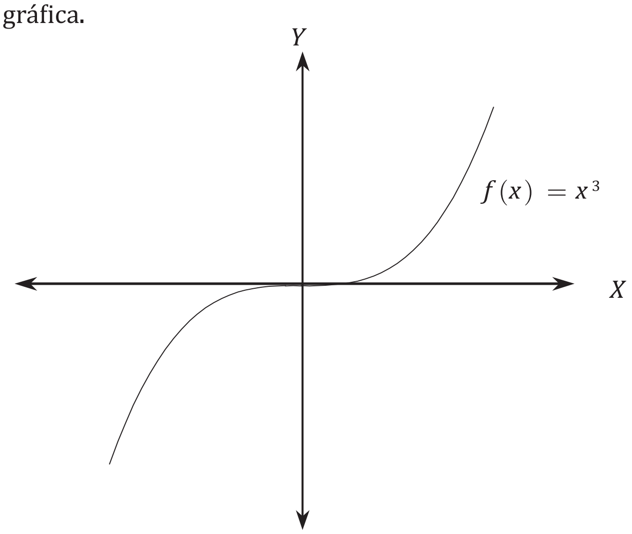
    b. El costo promedio al producir 10, 100 y 1.000 unidades.

    c. El costo marginal para $x$, 10, 100 y 1.000 unidades. En cada caso explique los resultados.

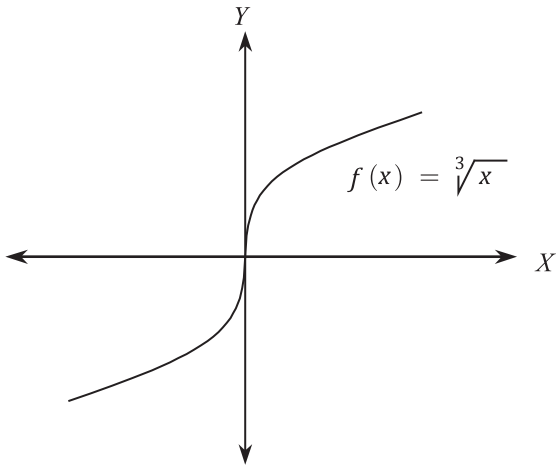
## 4.6 La derivada

Sea $f$ una función continua en un intervalo $(a, b)$; para $x \in (a, b)$ sea $(x, f(x)) \in$ Graf$(f)$. ¿Será posible trazar una recta *tangente* (no secante) a $(x, f(x))$ para algún intervalo que contenga a $x$? Si existe, ¿cómo definirla y calcularla?; ¿será única? Si suponemos que la recta existe, sólo se tiene una información: el punto $(x, f(x))$. Se necesita la pendiente. En principio, de ser posible, con puntos cercanos a $(x, f(x))$ encontramos la pendiente de rectas secantes y a partir de un **proceso de aproximación** de estas rectas se trata de encontrar la pendiente de la recta tangente. Un intento sería buscar en la gráfica una recta que pase por $(x, f(x))$, para algún intervalo que contiene a $x$, que no sea secante, es decir, que no intersecte otro punto de la gráfica en ese intervalo. Esta explicación intuitiva no es del todo satisfactoria.

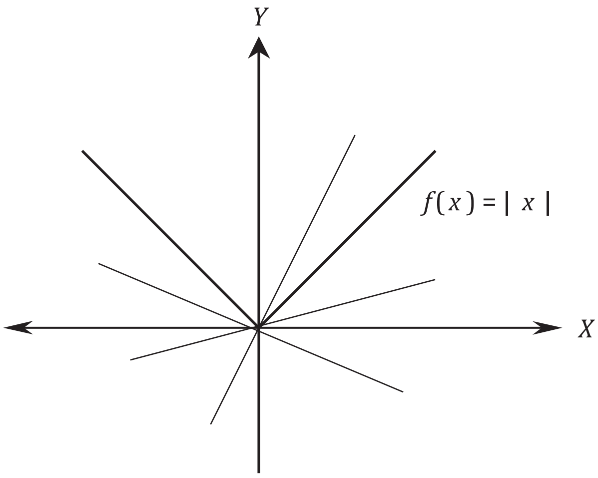
Ejemplo 12. Si $f(x) = x^3$, en $x = 0$ la recta que cumple esta condición no es precisamente tangente en el sentido *usual*, pero no es una recta secante porque no contiene dos puntos de la gráfica.



Ejemplo 13. Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$ la recta es $x = 0$ y la pendiente de tal recta **no existe**.




Ejemplo 14. Si $f(x) = |x|$, en $x = 0$ no es posible establecer un proceso de aproximación con rectas secantes. Existen **infinitas rectas** que pasan por (0, 0) y no son secantes.




Ejemplo 15. Si $f$ es una función lineal, la recta tangente en cualquiera de sus puntos es ella misma.

## 4.7 Concepto de derivada

Cuando la recta tangente en $(x, f(n))$ existe, es única, esta se obtiene por un proceso de aproximación de las rectas secantes o la recta tangente.

**Definición 1.** Una función $f$ definida como $y = f(x)$ es derivable en $x$ si existe

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

$f'(x)$ se denomina derivada de $f$ calculada en $x$.

Observe que este límite es un número real único. En esencia, estamos asignando a un valor de $x$ un único número real $f'(x)$; por lo tanto, $f'$ define una nueva función, la derivada de $f$. Si $y = f(x)$, $f'(x)$ se nota como $\frac{dy}{dx}$ (notación de Leibniz). También como $y'$ ó $Df(x)$ (notación de Lagrange).

**Definición 2.** Se dice que $f$ es una función derivable en un intervalo $(a, b)$ si es derivable para todo $x$ en $(a, b)$.

Ejemplo 16. Hallar $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2$;  b. $f(x) = mx + b$;

c. $f(x) = \sqrt[3]{x}$;  d. $f(x) = |x|$.

Solución. a.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x \end{aligned}$$

Observe que $f'$ es una función y además es continua.

b. $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) + b - (mx + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m\Delta x}{\Delta x} = m$. Es decir, la derivada de una función lineal en cualquier punto coincide con su pendiente.

c. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$; al racionalizar el numerador se tiene:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\left[(\sqrt[3]{x+\Delta x})^2 + \sqrt[3]{(x+\Delta x)\cdot x} + (\sqrt[3]{x})^2\right]}{\left[(\sqrt[3]{x+\Delta x})^2 + \sqrt[3]{(x+\Delta x)\cdot x} + (\sqrt[3]{x})^2\right]} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x \cdot \left[(\sqrt[3]{x+\Delta x})^2 + \sqrt[3]{(x+\Delta x)\cdot x} + (\sqrt[3]{x})^2\right]} \\
&= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}
\end{aligned}$$

Observe que $f'$ es una función que no está definida en $x = 0$. Se tiene la indeterminación $1/0$ (derivada infinita).

d. Recordemos que $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,

por lo tanto tenemos que $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

En $x = 0$, $f'(x)$ no existe porque:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -1 \neq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 1$$

Observe que $f$ es continua en $x = 0$; sin embargo, $f'(0)$ no existe, lo cual significa que si una función es continua en $x = a$, la función no es necesariamente derivable en $x = a$. La proposición recíproca sí se cumple. Veamos:

**Teorema 1.** Si una función $f$ es derivable en $x = a$, entonces $f$ es continua en $x = a$.

Demostración.

Tenemos que llegar a que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, lo cual equivale a demostrar que:

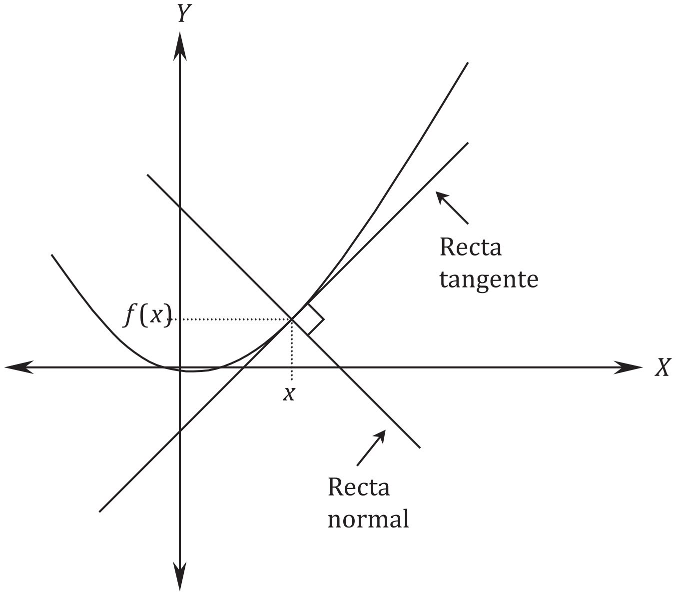
$$\lim_{\Delta a \to 0} f(a + \Delta a) - f(a) = 0$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta a \to 0} f(a + \Delta a) - f(a) &= \lim_{\Delta a \to 0} \frac{f(a+\Delta a) - f(a)}{\Delta a} \Delta a \\
&= \lim_{\Delta a \to 0} \frac{f(a+\Delta a) - f(a)}{\Delta a} \lim_{\Delta a \to 0} \Delta a \\
&= f'(a) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

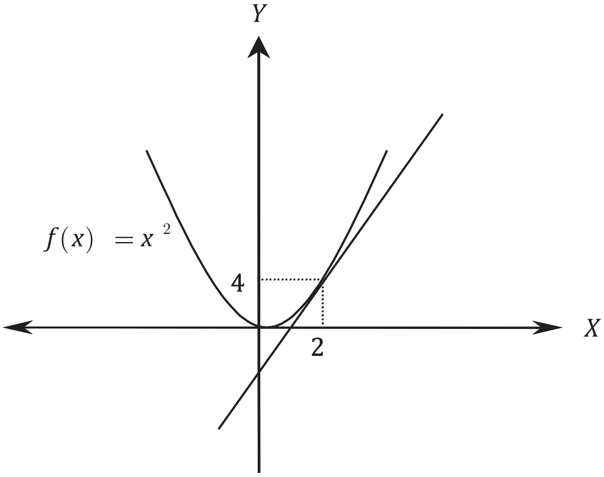
## 4.8 Recta tangente y recta normal

La derivada de una función $f$ calculada en $x$, $f'(x)$, representa geométricamente la pendiente de una recta que pasa por el punto de la gráfica $(x, f(x))$; esta recta se denomina *recta tangente* a la curva en ese punto. La recta perpendicular a la recta tangente en el punto $(x, f(x))$ se denomina *recta normal*.




Ejemplo 17. Hallar la ecuación de la recta tangente de la función $f$ definida como $f(x) = x^2$ en el punto $(2, 4)$.

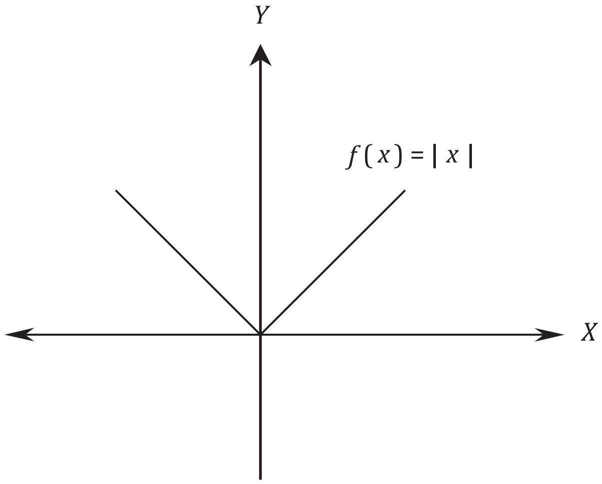
Solución.




Como $f'(x) = 2x$, tenemos que la pendiente de la recta tangente es $m = f'(2) = 4$ en $x = 2$, el punto $(2, 4) \in$ Graf $(f)$, por lo tanto la recta tangente es $y = 4x - 4$.

Ejemplo 18. Hallar la ecuación de la recta tangente de la función definida como $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

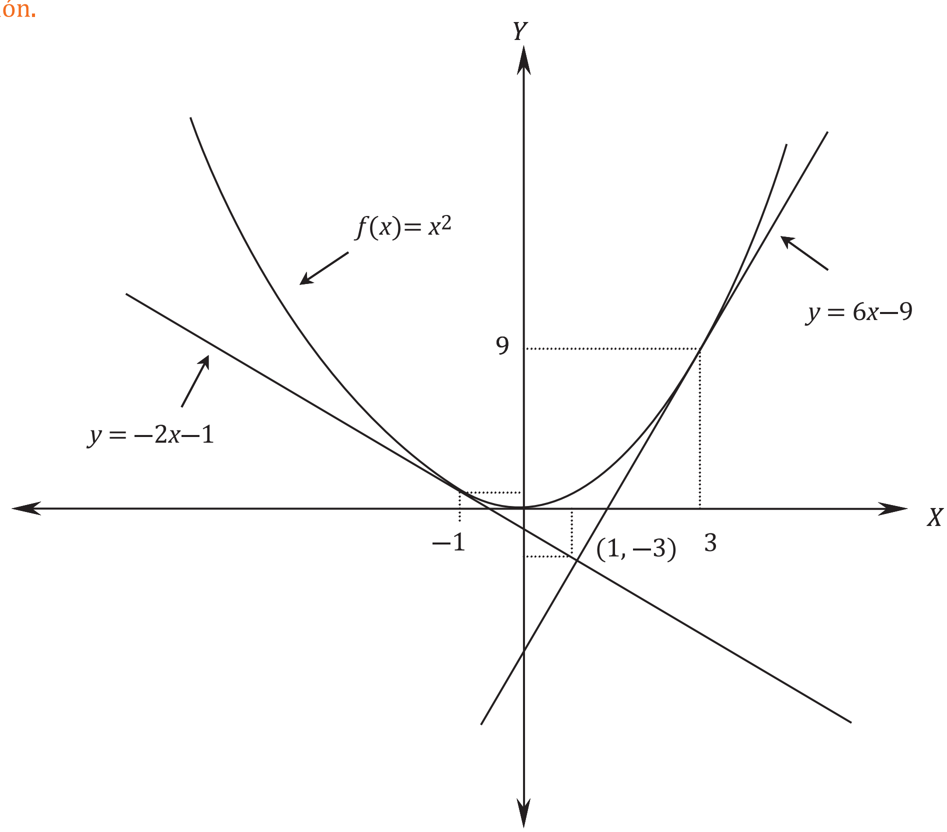
Solución.




Como $f'(0)$ no existe, la recta tangente de $f$ no existe en $(0, 0)$.

Ejemplo 19. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(1, -3)$ y son tangentes a la función definida como $f(x) = x^2$.

Solución.



El punto $(1, -3) \notin \text{Graf}(f)$, por lo tanto debemos encontrar puntos $(x, x^2)$ de la gráfica de $f$ tales que:

$$m = \frac{x^2+3}{x-1} = f'(x) = 2x$$

es decir,

$$\frac{x^2+3}{x-1} = 2x$$

Resolvemos la ecuación y tenemos que $x = 3$ y $x = -1$.

Para $x = 3$, $y = 9$ y $m = f'(3) = 6$; por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

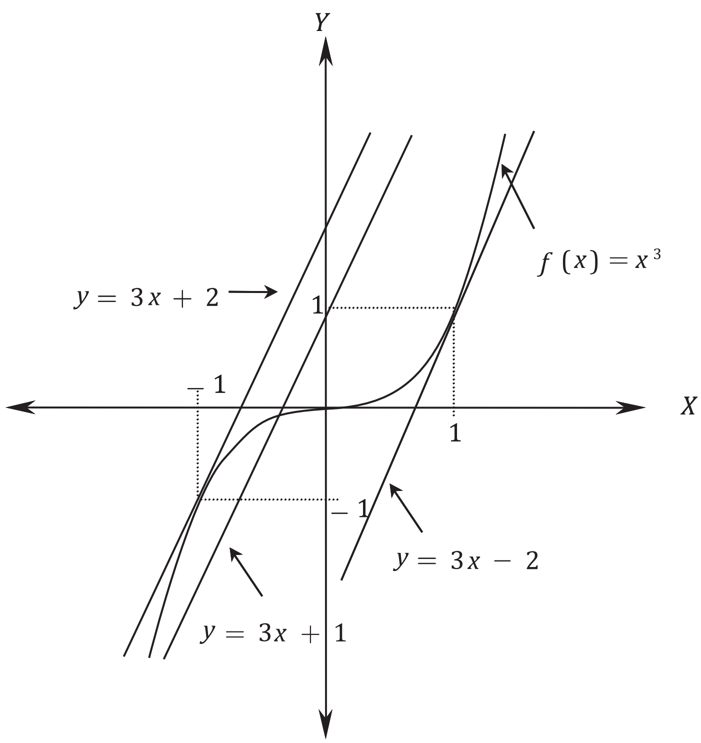
$$y = 6(x-3) + 9 = 6x - 9.$$

Para $x = -1$, $y = 1$ y $m = f'(-1) = -2$; por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y = -2(x+1) + 1 = -2x - 1.$$

Ejemplo 20. Hallar la ecuación de una recta que sea tangente a la gráfica de $y = x^3$ y sea paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$.

Solución.



La pendiente de la recta tangente es $m = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$. Como esta recta es paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$ (que es equivalente a $y = 3x + 1$), que tiene pendiente 3, se necesita que $m = 3 = 3x^2$ (dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente); resolvemos la ecuación y tenemos dos soluciones: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Para $x = 1$, $y = 1^3 = 1$, la ecuación de la tangente es:

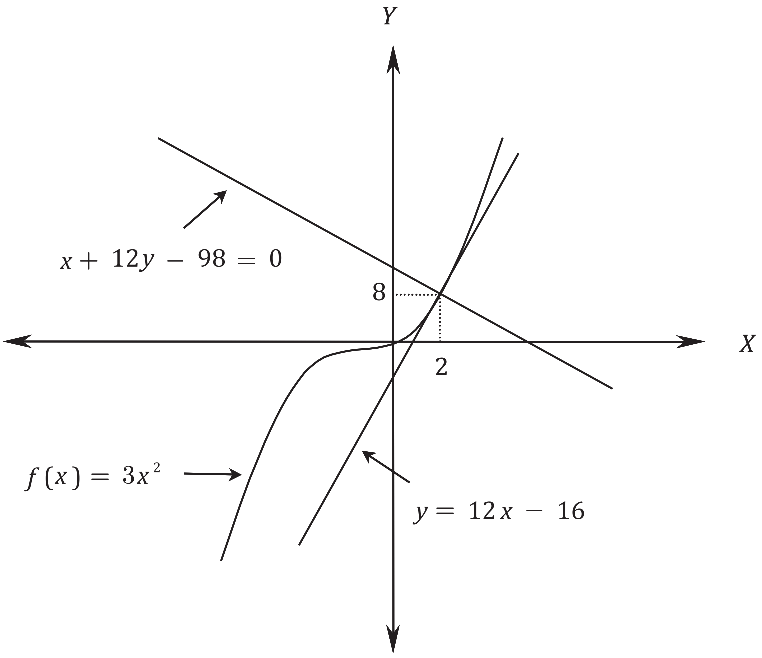
$$\begin{aligned} y - 1 &= 3(x - 1) \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}$$

Para $x = -1$, $y = (-1)^3 = -1$, la ecuación de la tangente es:

$$\begin{aligned} y + 1 &= 3(x + 1) \\ y &= 3x + 2 \end{aligned}$$

**Ejemplo 21.** Hallar la ecuación de la recta tangente y la recta normal a $y = x^3$ en $x = 2$.

**Solución.** En $x = 2$, $y = 8$, el punto de la gráfica es $(2, 8)$. $f'(x) = 3x^2$, por lo tanto la pendiente de la recta tangente es $m = f'(2) = 3(2)^2 = 12$. Recordemos que cuando dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es $-1$; por lo tanto la pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{12}$.




La ecuación de la recta tangente es:

$$\begin{aligned} y - 8 &= 12(x - 2) \\ y &= 12x - 16 \end{aligned}$$

La ecuación de la recta normal es:

$$\begin{aligned} y - 8 &= -\frac{1}{12}(x - 2) \\ x + 12y - 98 &= 0 \end{aligned}$$

## 4.9 Teoremas básicos

Sean $u = f(x)$ y $v = g(x)$ funciones derivables en $(a, b)$ y $c \in \mathbb{R}$. Para todo $x$ en $(a, b)$ se cumple que:

**1.** $\boldsymbol{\frac{d}{dx}(cu)\ c = \frac{du}{dx}}$

Demostración.

Sea $y = c\,u = cf(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{c(f(x+\Delta x) - f(x))}{\Delta x}\\ &= \frac{c\,\Delta u}{\Delta x}\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\Delta u}{\Delta x} = c\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c\,\frac{du}{dx}$$

**2.** $\boldsymbol{\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}}$

Demostración.

Sea $y = u + v = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x}\\ &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}=\frac{d(u\ +\ v)}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\\ &= \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

**3.** $\boldsymbol{\frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}}$

Demostración.

Sea $y = u \cdot v = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(f\cdot g)(x\ +\Delta x)-f(x)\,g(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x)-f(x)\,g(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

Sumamos y restamos la expresión $g(x)f(x + \Delta x)$, y tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x)-f(x)\,g(x)+g(x)\,f(x+\Delta x)-g(x)\,f(x+\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-g(x)+g(x)f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= f(x+\Delta x)\,\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

Cuando $\Delta x \to 0$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x)\,g'(x)+g(x)\,f'(x)$$

Aquí se utilizó el hecho de que como $f$ es derivable en $x$, $f$ es continua en $x$; por esto es que $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$.

**4.** $\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}}$

Demostración.

Si $y=\frac{1}{v(x)}$, $v(x)\neq 0$, se puede demostrar que $\left(\frac{1}{v}\right)'(x)=-\frac{v\prime(x)}{v^2(x)}$.

En efecto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{v(x+\Delta x)} - \frac{1}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{v(x) - v(x+\Delta x)}{\Delta x} \frac{1}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, se tiene que $v'(x) = -v'(x)\ \frac{1}{v^2(x)} = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

Para obtener la derivada de $\frac{u}{v}$ se expresa $\frac{u}{v} = u\ \frac{1}{v}$ y se aplica la derivada del producto.

## 4.10 La derivada como coeficiente de variación

En la función lineal $y = f(x) = mx + b$, se tiene que $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; si $x$ y $y = f(x)$ representan magnitudes, y por ejemplo $m = 3$, significa que $y$ **varía 3 veces más que $x$**. Al generalizar esta idea se tiene que si $x$, $y$ son magnitudes y $y = f(x)$ es derivable en $x$, $\frac{dy}{dx}$ representa el coeficiente de variación (instantánea) de $y$ con respecto a $x$. Si $y$ representa el desplazamiento de una partícula en función del tiempo $x$, $\frac{dy}{dx}$ representa la velocidad instantánea.

Ejemplo 22. Hallar el coeficiente de variación del área de un cuadrado con respecto a su lado. Evaluarlo en $x = 5$ y $x = 10$.

Solución. La función $A$ definida como $A(x) = x^2$, representa el área del cuadrado en función del lado $x$.

$$A'(x) = \frac{dA}{dx} = 2x$$

representa la razón con que varía $A$ al variar $x$. En $x = 5$, $A'(5) = 10$; es decir que cuando el lado del cuadrado es 5 su área varía 10 veces más que el lado. En $x = 10$, $A'(10) = 20$; cuando mayor es el lado más rápido crece su área.

### EJERCICIO 4.2

1. Halle $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 5x + 3$; b. $f(x) = x^2 + 3x + 2$; c. $f(x) = \frac{1}{x}$;

d. $f(x) = \sqrt{x}$; e. $f(x) = \frac{1}{x^2}$; f. $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

g. $f(x) = \sqrt[3]{x}$;   h. $f(x) = \frac{1}{x^3}$;   i. $f(x) = \frac{1}{x+4}$;

j. $f(x) = \sqrt{x+5}$;   k. $f(x) = k$.

2. Halle $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones definidas como $y = f(x)$, a partir de la definición de derivada.

a. $y = \sqrt{x+1}$;   b. $y = 2\sqrt{x}$;   c. $y = 4x^{3/2}$;

d. $y = -\sqrt{x}$;   e. $y = r^2$;   f. $y = 14x^{-1/2}$;

g. $y = x^2 + r^{1/2}$;   h. $y = x + \frac{1}{x}$;   i. $y = \frac{x+1}{x}$;

j. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;   k. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$;   l. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

3. a. Estime $f'(x)$ si $f(x) = \ln(x)$ para $x = \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, 5$.

b. Si $f(x) = e^x$, calcule $f(1), f(2), f(3), f(4), f'(1), f'(2), f'(3), f'(4)$.

4. Si $u = x^2 + 5x + 3$ y $v = \sqrt{x+1}$, halle $u'$ y $v'$. Con base en estos resultados, halle la derivada de $u\,v$, $u/v$, $v/u$, $u + v$ y $u^2$.

5. Si $f'(x) = x^2 + 5$ y $g'(x) = -x^3 + x^2 - 5$, calcule la derivada de las funciones $2f + 3g$, $g - f$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$.

6. Halle la ecuación de la recta tangente y la recta normal de:

a. $y = x^2 + 2x - 1$ en el punto $(2, 7)$;   b. $y = 7x^3$ en el punto $(1, 7)$;

c. $y = e^x$ en el punto $(0, 1)$.

d. Si $y = mx + b$, demuestre que $\frac{dy}{dx}$ es la pendiente; es decir $\frac{dy}{dx} = m$.

7. Halle la ecuación de una recta que sea tangente a $y = x^3 + 3$ y sea paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$.

8. Halle la ecuación de una recta que sea tangente a la gráfica de $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ y sea paralela a la recta $x + 2y - 6 = 0$.

9. Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a $y = 4x - x^2$ y que pasan por el punto $(2, 5)$.

10. Se traza una recta tangente a la curva $y = x^3 - x$ en el punto $(-1, 0)$. ¿En qué otro punto intersecta esta recta a la curva?

11. Halle los valores de las constantes $a$, $b$ y $c$, de la función definida por $y = ax^2 + bx + c$, de tal forma que pase por el punto $(1, 2)$ y sea tangente a la recta $y = x$ en el origen.

12. Calcule $c$ para que la curva $y = x^2 + c$ sea tangente a la recta $y = x$.

13. Determine una ecuación de la tangente a la curva $y = x + \frac{1}{x}$ en $x = 2$.

14. Halle el coeficiente de variación del volumen de una esfera respecto al radio, cuando $r = x$; $r = 2$; $r = 6$. Explique los resultados.

15. Halle el coeficiente de variación del volumen de un cilindro respecto:

    a. De su radio $r$ cuando $r = x$; $r = 2$; $r = 4$. Explique los resultados.

    b. De su altura $h$ cuando $h = x$, $h = 2$, $h = 4$. Explique los resultados.

16. ¿En qué otro punto intersecta a la curva la recta que es normal a $y = x^2 + 2x - 3$ en el punto $P(1, 0)$?

## 4.11 Derivadas de funciones elementales

Consideramos como funciones elementales combinaciones algebraicas de:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \text{ para } n \in \mathbb{Z}, \\ g(x) &= \ln(x), \\ h(x) &= e^x, \\ i(x) &= \operatorname{sen}(x), \\ k(x) &= \cos(x). \end{aligned}$$

**1.** Si $y = x^n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{nx^{n-1}}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \end{aligned}$$

como $n \in \mathbb{Z}^{+}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x+\Delta x)-x(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-1}\,x+\ldots+(x+\Delta x)x^{n-2}+x^{n-1}}{\Delta x}\\ &= \frac{\Delta x(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}\,x+\ldots+(x+\Delta x)\,x^{n-2}\;+x^{n-1}}{\Delta x}\\ &= (x\;+\Delta x)^{n-1}+(x\;+\Delta x)^{n-2}\,x+\ldots+(x\;+\Delta x)\,x^{n-2}+x^{n-1}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= x^{n-1}+x^{n-2}\,x+\ldots+x\,x^{n-2}+x^{n-1}\\ &= \underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\ldots+x^{n-1}+x^{n-1}}_{n\ \text{veces}} = nx^{n-1}\end{aligned}$$

**Nota.** *El resultado de* $\frac{d}{dx}(x^{n}) = nx^{n-1}$ *se puede extender para cualquier número real n, como lo veremos más adelante.*

Ejemplo 23. $\frac{d}{dx}(x^{5}) = 5x^{4}; \frac{d}{dx}(x) = 1x^{0} = 1\cdot 1 = 1.$

Ejemplo 24. $\frac{d}{dx}(x) = 1x^{0} = 1\cdot 1 = 1.$

Ejemplo 25. $f(x) = c$ es una recta con pendiente $m = 0$ y $f'(x) = 0$.

Ejemplo 26. $\frac{d}{dx}(r^{2}) = 0.$

**2.** Si $y = \ln(x)$, $x > 0$ entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

Para la demostración tendremos en cuenta los siguientes resultados, cuya justificación no está al alcance del libro:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n} = e^{k} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x\;+\Delta x)-\;f(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{\ln(x\;+\Delta x)\;-\ln(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{\ln\left(\frac{x\;+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\\ &= \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\\ &= \ln\left(1+\frac{1/x}{1/\Delta x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \ln\left(1 + \frac{1/x}{1/\Delta x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

Cuando $\Delta x \to 0^+$, se tiene que $\frac{1}{\Delta x} \to \infty$, por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\frac{1}{\Delta x} \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1/x}{1/\Delta x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln\left[\lim_{\frac{1}{\Delta x} \to \infty} \left(1 + \frac{1/x}{1/\Delta x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right]$$

Para $n = \frac{1}{\Delta x}$ y $k = \frac{1}{x}$ tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \ln\left[\lim_{\frac{1}{\Delta x} \to 0^+} \left(1 + \frac{1/x}{1/\Delta x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right] = \ln(e^{1/x}) = \frac{1}{x}$$

Análogamente, el resultado se tiene si $\Delta x \to 0^-$ .

Si $y = f(x) = \log_a x$, por propiedad del logaritmo se tiene que $\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$, por lo tanto:

$y' = \frac{1}{x \ln(a)}$ ó $y' = \frac{\log_a e}{x}$; así:

**2′.** Si $y = \log_a (x)$, $x > 0$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln a}$.

**3.** Si $y = e^x$, entonces $\frac{dy}{dx} = e^x$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\
&= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\
&= e^x
\end{aligned}$$

**3′.** $y = a^x = e^{x\ln a}$, se tiene que $\frac{dy}{dx} = a^x \ln(a)$.

## 4.12 Derivadas de funciones algebraicas

Las funciones algebraicas son básicamente las polinómicas:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

y las racionales:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)\neq 0$ son funciones polinómicas. Al aplicar las propiedades de la derivada y la fórmula de la derivada de $y = x^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$, se puede calcular la derivada de cualquier función racional.

Ejemplo 27. Hallar la derivada de $y = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 2$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x^3 - 4x^2 + 5x + 2) &= \frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(2)\\ &= 2\frac{d}{dx}(x^3) - 4\frac{d}{dx}(x^2) + 5\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2)\\ &= 2(3x^2) - 4(2x) + 5(1) + 0\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = y' = 6x^2 - 8x + 5$$

Ejemplo 28. Hallar la derivada de $y = (x^3 + 8x^2 - 1)(x^2 - x - 1)$.

Solución. Hacemos $u = x^3 + 8x^2 - 1$, $u' = 3x^2 + 16x$, $v = x^2 - x - 1$ y $v' = 2x - 1$; aplicamos la derivada de un producto $(u\,v)' = u\,v' + v\,u'$, y tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^3 + 8x^2 - 1)(x^2 - x - 1) &= (x^3 + 8x^2 - 1)(2x - 1)\\ &\quad +(x^2 - x - 1)(3x^2 + 16x)\\ &= 5x^4 + 28x^3 - 27x^2 - 18x + 1\end{aligned}$$

Otra forma de resolver el ejercicio consiste en efectuar la multiplicación y derivar cada uno de sus términos.

Ejemplo 29. Hallar la derivada de $y = \frac{3x^2 - 2}{x^2 + 1}$.

Solución. Hacemos $u = 3x^2 - 2$, $u' = 6x$, $v = x^2 + 1$ y $v' = 2x$.

Aplicamos la derivada de un cociente $\frac{u}{v} = \frac{v\,u\prime - u\,v\prime}{v^2}$; tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+1)6x-(3x^2-2)2x}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{6x^3+6x-6x^3+4x}{(x^2+1)^2},\\ &= \frac{10x}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 30. Hallar $y = \frac{1}{x^2+1}$.

Solución. Hacemos $u = 1$, $u' = 0$, $v = x^2 + 1$ y $v' = 2x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)(0)-(1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Ejemplo 31. Verificar que la derivada de $f(x) = x^{-n}$ es $-nx^{-n-1}$, donde $n$ es un entero positivo.

Solución.

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Aplicamos la derivada de un cociente y tenemos:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{x^n(0) - nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

## 4.13 Derivada de funciones combinadas

Dadas las funciones $f$ y $g$, por combinación se entiende el hecho de construir otras funciones como pueden ser $f \pm g, f \cdot g, f/g, f \circ g, f^{-1}$ (si existe). Para hallar la derivada de $f \pm g, f \cdot g, f/g$, se aplican las propiedades de la derivada.

Ejemplo 32. Hallar la derivada de $f(x) = x^2\, e^x$.

Solución. Al aplicar la derivada de un producto tenemos:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x\,(2 + x)$$

## EJERCICIO 4.3

1. Hallar $f'(x)$ para:

a. $f(x) = x\,e^x$; b. $f(x) = x\ln(x)$; c. $f(x) = (x^2+1)^{-1}$;

d. $f(x) = a^x\ (\ln(x))^2$; e. $f(x) = x^3\ 2^x\ \ln(x)$; f. $f(x) = \frac{x\ln x\ e^x}{x+1}$;

g. $f(x) = \frac{x^2+5x+1}{x^2-2}$; h. $f(x) = \frac{1}{e^x(x^3+4x+2)}$; i. $f(x) = (3x^2+5x+e^x)^2$;

j. $f(x) = \frac{x\ \ln e^x}{x+1}$.

2. Halle la ecuación de la recta tangente y la recta normal a $y = f(x)$, si se tiene que:

a. $y = x^2\ e^x$ en $x = 0$; b. $y = x\ln(x)$ si $y' = 1$;

c. $y = \frac{x}{x^2+1}$ en $x = 1$; d. $y = \frac{1}{x^2+1}$ en el punto $(0,1)$;

e. $y = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$; f. $y = \frac{1}{x}$ si $y' = -\frac{1}{25}$.

3. Si $f(x) = -x^2+2$ y $g(x) = x\,e^x$, calcule:

a. $(f+g)'(x)$; b. $(f^2\ g)'(x)$; c. $(f/g)'(x)$;

d. $1/(f+g)(x)'$; e. $(g^2(x)/f(x))'$; f. $(2g^2+3f)'(x)$.

4. Si $u = u(x)$ y $v = v(x)$, demuestre que:

$$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{dx} \quad \left[\text{sugerencia: } \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}\right].$$

## 4.14 Derivada de la función compuesta (regla de la cadena)

Sean $h, f$ y $g$ funciones derivables en $x$, y $y = h(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x))$. ¿Cómo calcular $h'(x)$? Si consideramos $h'(x)$ como la variación de $h(x)$ con respecto a $x$, intuitivamente tenemos $f'(g(x))$, que representa la variación de $f(g(x))$ con respecto a $g(x)$. $g'(x)$ representa la variación de $g(x)$ con respecto a $x$. Si $f(g(x))$ varía $f'(g(x))$ veces, $g(x)$ y $g(x)$ varía $g'(x)$ veces $x$, entonces $f(g(x))$ varía $f'g((x)) \cdot g'(x)$ veces $x$. Por lo tanto, el coeficiente de variación de $f(g(x))$ con respecto a $x$ es:

Si $g$ es derivable en $x$ y $f$ es derivable en $g(x)$, entonces $h = f \circ g$ es derivable en $x$, $y$:

$$h'(x) = f(g(x))' = \frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x))\, g'(x)$$

Otra presentación se tiene expresando $y = h(x)$ como $f(u)$ donde $u = g(x)$ y $g$ una función derivable en $x$. Veamos:

$h'(x) = \frac{dy}{dx}$, multiplicamos por $\frac{du}{du}$, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

En esta expresión estamos considerando la derivada como un cociente donde $dx$ y $dy$ corresponden a las diferenciales de $x$ y de $y$, concepto que presentaremos en detalle en el capítulo 6. Bajo las mismas condiciones podemos extender el anterior procedimiento si la función $h$ resulta de componer tres o más funciones; por ejemplo, si $y = h(x) = (f \circ g \circ j)(x)$, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx}$$

donde $y = f(v)$, $v = g(u)$ y $u = j(x)$.

Ejemplo 33. Hallar $y'$ si $y = (g(x))^n$; $n \in \mathbb{Z}$ y $g$ es una función derivable.

Solución. Hacemos $u = g(x)$, $\frac{du}{dx} = g'(x)$. Si $y = u^n$, $\frac{dy}{dx} = n\,u^{n-1} = n\,g(x)^{n-1}$.

$$\frac{d}{dx} g(x)^n = ng(x)^{n-1} \cdot g'(x).$$

Ejemplo 34. Hallar $y'$ si $y = (x^3 + 2x + 2)^4$.

Solución. Hacemos $g(x) = x^3 + 2x + 2$, tenemos que $y = g(x)^4$. Aplicamos el resultado del ejemplo anterior y obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = 4(x^3 + 2x + 2)^3 \cdot (3x^2 + 2).$$

Ejemplo 35. Hallar $y'$ si $y = e^{2x2-5}$.

Solución. Hacemos $u = 2x^2 - 5$, $\frac{du}{dx} = 4x$

luego,

$$y = e^u, \frac{dy}{dx} = e^u = e^{2x^2-5}$$

Así que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^{2x^2-5} \cdot 4x = 4x \cdot e^{2x^2-5}$$

Ejemplo 36. Hallar $y'$ si $y = \ln^4(3x - 4)^3 = [\ln(3x - 4)^3]^4$

Solución. Sustituimos

$$u = 3x - 4, \frac{du}{dx} = 3$$
$$v = u^3, \frac{dv}{du} = 3u^2 = 3(3x-4)^2$$
$$w = \ln(v), \frac{dw}{dv} = 1/v = 1/u^3 = 1/(3x-4)^3$$
$$y = w^4, \frac{dy}{dw} = 4w^3 = 4\ln^3(v) = 4\ln^3(3x-4)^3$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4\ln^3(3x-4)^3 \cdot \frac{1}{(3x-4)^3} \cdot 3(3x-4)^2 \cdot 3$$

Así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{36}{(3x-4)} \cdot \ln^3(3x-4)^3$$

Ejemplo 37. Hallar $y'$ si $y = \sqrt{(2x^2 - 5) \cdot e^{3x-2}}$.

Solución. Hacemos $u = (2x^2 - 5) \cdot e^{3x-2}$ para hallar $\frac{du}{dx}$ y aplicamos la derivada de un producto:

$$w = 2x^2 - 5, \text{ entonces } \frac{dw}{dx} = 4x$$
$$v = e^{3x-2}, \text{ entonces } \frac{dv}{dx} = e^{3x-2} \cdot 3$$

luego:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{d(wv)}{dx} \\ &= v\frac{dw}{dx} + w\frac{dv}{dx} \\ &= 4xe^{3x-2} + (2x^2-5) \cdot 3e^{3x-2} \\ &= e^{3x-2}(6x^2 + 4x - 15) \end{aligned}$$

como $y = u^{1/2}$, entonces:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2u^{1/2}}$$

de donde se sigue que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{e^{3x-2}(6x^2+4x-15)}{2\sqrt{(2x^2-5)\,e^{3x-2}}}$$

Cuando la variable $x$ aparece como base o exponente, o cuando la expresión que define una función se refiere a productos, cocientes y potencias, se sugiere usar la función logaritmo natural.

Ejemplo 38. Sea $y = f(x) = x^x, x > 0$, hallar $f'(x)$.

Solución. Aplicamos ln a cada lado:

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \ln(x^x) \\ &= x\ln(x); \end{aligned}$$

derivamos:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= x \cdot \frac{1}{x} + \ln(x), \\ f'(x) &= f(x)(1 + \ln(x)) \end{aligned}$$

y como $f(x) = x^x$, se tiene que:

$$f'(x) = x^x(1 + \ln(x))$$

Ejemplo 39. Sea $y = f(x) = \frac{(2x-5)^3(5x^3+7)^4}{\sqrt{3x+7}(3x^4+7)^3}$; hallar $f'(x)$.

Solución. Aplicamos la función ln a cada lado de la igualdad y tenemos que:

$$\ln(f(x)) = \ln\left(\frac{(2x-5)^3\,(5x^3+7)^4}{\sqrt{3x+7}\,\,(3x^4+7)^3}\right)$$

Aplicamos propiedades:

$$\begin{aligned} \ln(f(x)) &= \ln(2x-5)^3\,(5x^3+7)^4 - \ln(\sqrt{3x+7}\,(3x^4+7)^3) \\ &= \ln(2x-5)^3 + \ln(5x^3+7)^4 - \ln(3x+7)^{1/2} - \ln(3x^4+7)^3 \\ &= 3\ln(2x-5) + 4\ln(5x^3+7) - \tfrac{1}{2}\ln(3x+7) - 3\ln(3x^4+7), \end{aligned}$$

Derivamos a cada lado:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3\frac{1}{2x\ -5}2 + 4\frac{1}{5x^3+7}15x^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{3x\ +\ 7}3 - 3\frac{1}{3x^4+7}12x^3$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\left[\frac{6}{2x-5} + \frac{60x^2}{5x^3\ +\ 7} - \frac{3}{2(3x\ +\ 7)} - \frac{36x^2}{3x^4+7}\right] \\ &= \frac{(2x-5)^3\,(5x^3+7)^4}{\sqrt{3x+7}\,(3x^4+7)^3}\left[\frac{6}{2x-5} + \frac{60x^2}{5x^3\ +\ 7} - \frac{3}{2(3x\ +\ 7)} - \frac{36x^2}{3x^4+7}\right]. \end{aligned}$$

## 4.15 Derivada de la función inversa

Si una función $f$ es uno a uno y continua en un intervalo $(a, b)$, existe su inversa $f^{-1}$. Si $f$ es derivable en $(a, b)$, ¿cómo calcular $f^{-1}$?

Si $f^{-1}$ es la inversa de $f$, se tiene $(f \circ f^{-1})(x) = x$, por lo tanto:

$$\frac{d(f(f^{-1}(x))}{dx} = 1$$

$$f'(f^{-1}(x))\,(f^{-1})'(x) = 1$$

Por lo tanto,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$(f^{-1})'(x)$ existe si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

Si notamos $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$; utilizamos la notación de Leibniz y las derivadas son:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y).$$

Reemplazamos $x$ por $y$ en la ecuación $f'(f^{-1}(x))\,(f^{-1})'(x) = 1$; tenemos:

$$f'(f^{-1}(y))\,(f^{-1})'(y) = 1$$

de donde se obtiene que:

$$f'(x)(f^{-1})'(y) = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} = 1$$

es decir,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Ejemplo 40. Dada $y = f(x) = a^x$ con $a > 0$, hallar $f'(x)$.

Solución.

$$x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1/y}{\ln a} = \frac{1/a^x}{\ln a}$$

Expresado en términos de $x$ tenemos que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = a^x \ln a$$

## EJERCICIO 4.4

1. Halle la derivada de la función $f$ definida como:

i. $y = \frac{(4x^4 + 17)^3}{(6 - 2x + x^6)^2}$;

ii. $f(t) = \left(\frac{3t-5}{t+4}\right)^2$;

iii. $P(z) = \left(\frac{16}{11z^7 - 30}\right)^2$;

iv. $g(x) = \frac{x(x+1)(x+2)}{(3x - -13)^3}$;

v. $y = \frac{1}{x^4\sqrt{2x-6}}$;

vi. $y = \sqrt{(14x^3 - 3x + 8)^3}$;

vii. $y = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$;

viii. $v = \left(\frac{2p-3}{3p-2}\right)^3$;

ix. $y = (2x-1)^2(x+3)^3$;

x. $u = \sqrt{\frac{3v-1}{v^2+3}}$;

xi. $y = \sqrt{1 - \sqrt{1+x}}$;

xii. $y = \sqrt{\left[\frac{5x+6}{1-x^2}\right]^3}$;

xiii. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt[2]{x}}$;

xiv. $y = \frac{1}{5}(x^2 + x + 3)\sqrt{x^2 + x + 3}$;

xv. $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$;

xvi. $g(t) = \frac{\sqrt{2} + 6t}{t}$;

xvii. $f(r) = \sqrt{\frac{r-1}{r+1}}$;

xviii. $f(t) = \sqrt[3]{\frac{t^2-1}{t^2+1}}$;

xix. $y = (1 - x^2)^{1/2}$;

xx. $y = (x^3 - 3x)^4$;

xxi. $y = (x-1)^3\,(x+2)^4$;

xxii. $y = (x-1)^2\,(x^2+1)^{-3}$;

xxiii. $y = \frac{x}{x^2+1}$;

xxiv. $y = (x^2 - x)^{-2}$;

xxv. $y = \frac{1}{(x^2-9)^{1/2}}$;

xxvi. $y = \frac{x}{(x+1)^{1/2}}$;

xxvii. $y = \frac{2x}{(x^3+10)^3}$;

xxviii. $y = \left(\frac{x^2+10}{x}\right)^{10}$;

xxix. $y = \frac{(x^2+1)^{1/2}}{(2x+4)^{1/4}}$;

xxx. $y = x^3\,(x^2 + 3)^{-1}$.

2. Determine $\frac{dy}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones:

a. $x = \sqrt{1 - 2y}$; b. $x = (2 - 3y^2)^3$; c. $x = y\sqrt{a^2 + y^2}$;

d. $x = y\sqrt{a + by}$; e. $x = \ln(ay^2 + b)$; f. $x = y^2 e^{-y}$;

g. $y = u^6$; $u = 1 + 2\sqrt{x}$; h. $y = u^2 \ln(x)$; $u = ax^2$.

3. Halle la derivada que se indica:

a. Si $y = x^4 + 5$ y $x = \log z$, encuentre $\frac{dy}{dz}$.

b. Si $u = \ln(y + 4)$ y $y = x^2$, encuentre $\frac{du}{dx}$.

c. Si $x = ye^{-y}$ y $y = e^t$, encuentre $\frac{dx}{dt}$.

d. Si $s = \sqrt{t^2 + 1}$ y $t = e^z$, encuentre $\frac{ds}{dt}$.

e. Si $u = \ln(y)$ y $y = \text{In}(x)$, encuentre $\frac{du}{dx}$.

f. Si $y = e^t + 6$ y $t = \ln(x^2 - 6x)$, encuentre $\frac{dy}{dx}$.

4. Halle la primera derivada de la función que se indica:

a. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; b. $y = \ln^3(x)$; c. $y = 10^{x^2+3x+1}$;

d. $s = \frac{a+bt+ct^2}{\sqrt{t}}$; e. $z = a^{2y}$; f. $y = \log(1-2t)$;

g. $y = \ln\left(\frac{1-4x}{1+4x}\right)$; h. $r = \log(a^2 - x^2)^3$; i. $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$;

j. $y = \log(x^3 - 3x)^{1/3}$; k. $y = 2\ln\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}\right)$; l. $y = x\, e^{-1/2}$;

m. $y = \frac{(x+1)^6}{(x^2+2x+2)^3}$; n. $y = \log(b - x^3)^2$; o. $y = \frac{(x+1)^6}{2}$;

p. $y = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2$; q. $y = 2\ln(x^3 + 4x^2)^{1/4}$.

## 4.16 Derivación implícita

Usualmente las funciones de variable real se expresan de la forma $y = f(x)$, donde $y$ es la variable dependiente y $x$ es la variable independiente; en muchos problemas prácticos, como algunos que se plantean con ecuaciones diferenciales, la solución que se obtiene es una función expresada de la forma $g(x, y) = c$, y no es posible en algunos casos expresarla de la forma $y = f(x)$. Este hecho lleva a clasificar las funciones en:

**Explícitas:** Cuando se expresan de la forma $y = f(x)$.

**Implícitas:** Cuando se expresan de la forma $g(x, y) = c$.

Ejemplo 41. La ecuación:

$$x^3y^2 + \frac{5}{yx} + e^{x/y} + 4x - 7y = 9$$

no se puede expresar de la forma $y = f(x)$.
Cualquier función expresada explícitamente se puede expresar implícitamente. Si $y = f(x)$, hacemos $g(x, y) = y - f(x) = 0$.

Ejemplo 42. a. $y = 3x + 7$ se puede expresar como $y - 3x - 7 = 0$;
b. $y = \sqrt{9 - x^2}$ se puede expresar como $x^2 + y^2 = 9$.

## 4.17 Derivada de una función definida implícitamente

Si $y = f(x)$ está expresada en la forma implícita $g(x, y) = 0$, en esencia tenemos una combinación de funciones; por lo tanto, para hallar $\frac{dy}{dx}$ se aplican las propiedades del cálculo de derivadas, sin perder de vista que $y$ está en función de $x$.

Ejemplo 43. Hallar $(y^3)'$ si $y = f(x)$.

Solución. $y^3 = f(x)^3$, entonces $(y^3)' = 3\,f(x)^2\ f'(x) = 3y^2\ \frac{dy}{dx}$.

Ejemplo 44. Si $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$, hallar $\frac{dy}{dx}$.

Solución 1.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(x^2 + y^2 - 25) &= 0 \\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

Observe que la derivada es a su vez una función definida implícitamente.

Solución 2. $g(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$

define implícitamente dos funciones:

$$y_1 = f(x) = \sqrt{25 - x^2} = (25 - x^2)^{1/2}$$
$$y_2 = g(x) = -\sqrt{25 - x^2} = -(25 - x^2)^{1/2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Pero como $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$, tenemos que:

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{x}{y_1} \text{ y } \frac{dy_2}{dx} = -\frac{x}{y_2}$$

Ejemplo 45. Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $xy^2 - x^2 + y = 0$.

Solución.

$$x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x) - 2x + 1\frac{dy}{dx} = 0$$
$$x\,2y\frac{dy}{dx} + y^2\,1 - 2x + \frac{dy}{dx} = 0$$
$$2xy\frac{dy}{dx} + y^2 - 2x + \frac{dy}{dx} = 0$$
$$2xy\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2x - y^2$$
$$\frac{dy}{dx}(2xy + 1) = 2x - y^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y^2}{2xy + 1}$$

Ejemplo 46. Hallar los puntos en que la función $x^2 + xy + y^2 = 7$ corta el eje $X$, y mostrar que las tangentes a la curva en estos puntos son paralelas.

Solución. Para hallar cortes con el eje $X$, hacemos $y = 0$; tenemos:

$$x_1 = \sqrt{7} \text{ y } x_2 = -\sqrt{7},$$

y los puntos son respectivamente $(\sqrt{7}, 0)$ y $(-\sqrt{7}, 0)$.

Si las rectas tangentes son paralelas, sus pendientes deben ser iguales. El valor de la pendiente es la derivada calculada en los puntos conocidos.

$\frac{d}{dx}(x^2 + xy + y^2 - 7) = 0$

$2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x\ +\ y}{x\ +2y}$

En el punto $(-\sqrt{7}, 0)$, tenemos:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(-\sqrt{7})+0}{-\sqrt{7}+0} = -2$

En el punto $(\sqrt{7}, 0)$, tenemos:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\sqrt{7}+0}{\sqrt{7}\ +0} = -2$

Ejemplo 47. Si $r$ es un número racional, demostrar que $\frac{d}{dx}(x^r) = r\ x^{r-1}$.

Solución.

Como $r$ es racional, se puede expresar en la forma $\frac{p}{q}$, donde $p$ y $q$ son enteros.

Sea $y = x^r = x^{p/q}$, lo que equivale a $y^q = x^p$. Si derivamos tenemos:

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}}\\ &= \frac{p}{q}\ \frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} = \frac{p}{q}x^{p-1-p+p/q}\\ &= \frac{p}{q}x^{p/q-1} = r\ x^{r-1}\end{aligned}$$

En general, si $y = x^r$ con $r \in \mathbb{R}$, $y = e^{r\ln x}$; así:

$$y' = e^{r\ln x}\frac{r}{x} = x^r\frac{r}{x} = rx^{r-1}$$

Vemos que la fórmula que habíamos utilizado cuando el exponente era un entero positivo funciona de la misma manera para cualquier real.

## 4.18 Derivadas de orden superior

Dada una función $f$ definida como $y = f(x)$, si existe $f'(x)$ recordemos que $f'$es también una función; si existe la derivada de $f'$, ésta se denomina segunda derivada de $f$ y se nota $f''$; ésta a su vez es una función.

Si este procedimiento se puede repetir sucesivamente $n$ veces obtenemos la $n$–ésima derivada de $f$ ó derivada superior de orden $n$, que se nota:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f}{dx^n} = y^{(n)}(x)$$

Ejemplo 48. Si $y = f(x) = e^{x^2}$, hallar $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Solución.

$$y' = 2x\,e^{x^2},$$
$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = 2e^{x^2} + 2x\,e^{x^2}\,2x = 2e^{x^2}(1+2x^2)$$

Ejemplo 49. Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, si $x^2 - y^2 = 25$.

Solución.

$$\frac{d}{dx}(x^2 - y^2 - 25) = 0$$
$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Para hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$, hacemos $u = x, u' = 1, v = y$ y $v' = \frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{y \cdot 1 - x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}\\ &= \frac{y - x\left(\dfrac{x}{y}\right)}{y^2}\\ &= \frac{\dfrac{y^2 - x^2}{y}}{y^2}\\ &= \frac{y^2 - x^2}{y^3}\end{aligned}$$

Como $x^2 - y^2 = 25$, reemplazamos y tenemos que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{25}{y^3}$$

Ejemplo 50. Hallar $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, si $(x+y)^2 + (x+y)^3 = a^2$.

Solución.

$$\frac{d}{dx}[(x+y)^2 + (x+y)^3 - a^2] = 0$$

$$2(x+y)\frac{d}{dx}(x+y) + 3(x+y)^2\frac{dy}{dx}(x+y) = 0$$

$$2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) + 3(x+y)^2\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\left(1+\frac{dy}{dx}\right)(2(x+y) + 3(x+y)^2) = 0$$

$$1+\frac{dy}{dx} = 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

y así:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

## EJERCICIO 4.5

1. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones por el método de derivación implícita.

   a. $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$;

   b. $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$;

   c. $y = x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4}$;

   d. $(x+y)^3 + (x-y)^3 = x^4 + y^4$;

   e. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$;

   f. $xy^2 + e^{4y} - (y/x) = 0$;

   g. $x + y^3 - 2xy^4 + x^3 = 1$.

2. Por el método de derivación implícita halle $\frac{d^2y}{dx^2}$ en cada caso:

   a. $x^2 + y^2 = 1$;

   b. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$;

   c. $y^2 = x^3$;

   d. $x^2 y^2 = b$;

   e. $x + y - xy = 2$;

   f. $x^3 y^3 + x^2 y^2 = a$;

   g. $x^3 y^2 = a$;

   h. $xy^2 + y^2 = a$;

   i. $(x+y)^2 + (x+y)^3 = a^2$.

3. Halle la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la curva:

   a. $16x^4 + y^4 = 32$, en el punto (1, 2).

   b. $9x^3 - y^3 = 1$, en el punto (1, 2).

   c. $x^2 + xy + y^2 - 3y = 10$, en el punto (2, 3).

   d. $(xy)^{1/3} = 14x + y$, en el punto (2, − 32).

   e. $x^3 y + y^3 x = 2$, en el punto (1, 1).

   f. $x^2 y^2 + 3xy = 10y$, en el punto (2, 1).

   g. $x^{2/3} - y^{2/3} - 2y = 2$, en el punto (1, − 1).

   h. $\sqrt{y} + xy^2 = 5$, en el punto (4, 1).

4. Determínense las normales a la curva $xy + 2x - y = 0$, que sean paralelas a la recta $2x + y = 0$.

5. Por el método de derivación implícita, halle $\frac{dy}{dx}$ si:

   a. $4x^2 + 9y^2 = 36$;

   b. $xy = 4$;

   c. $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ con $a$ y $b$ constantes;

   d. $xy^2 - x + 16 = 0$;

   e. $x^3 - 3x^2 y + 19xy = 0$;

   f. $4x^3 + 11xy^2 - 2y^3 = 0$;

   g. $\sqrt{xy} + 3y = 10x$;

   h. $6x - \sqrt{2xy} + xy^3 = y^2$.

6. Halle las derivadas de segundo y tercer orden de cada una de las siguientes funciones:

   a. $f(x) = e^x$;

   b. $f(x) = e^{-x}$.

   c. $f(x) = 2 + e^x$;

   d. $f(x) = 3 + e^{-x}$;

   e. $f(x) = 2 - 3e^x$;

   f. $f(x) = 3 - 2e^x$;

   g. $f(x) = 5 - 3e^{-x}$;

   h. $f(x) = 3 - 5e^{-x}$;

   i. $f(x) = \ln(e^2 x)$;

   j. $f(x) = \ln(x^3)$;

   k. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$;

   l. $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$;

   m. $f(x) = e^{\ln(x) + 2\ln(3x)}$;

   n. $f(x) = (x^2 + 3x + 5)e^{6x}$.

## 4.19 Resumen

**Variación absoluta de una variable:** Si $x$ representa una variable real que toma valores en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$, la variación absoluta de $x$ entre $x_1$ y $x_2$ se define por $\Delta x = x_2 - x_1$.

**Variación de una función:** Sea una función $f$ definida en el intervalo $x_1, x_2$. La variación de $y = f(x)$ en el intervalo $x_1, x_2$ es $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

**Variación de $y = f(x)$ con respecto a $x$ en un intervalo $[x_1, x_2]$:** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Una función $f$ es **derivable** en $x$ si existe el límite $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$. En tal caso, $f'(x)$ se llama **derivada** de $f$ en $x$ y representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(x, f(x))$. La recta que es perpendicular a la recta tangente se denomina recta normal a $f$ en el punto $(x, f(x))$.

El siguiente cuadro resume algunas de las derivadas de funciones más usuales en el texto:

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $c$ | $0$ |
| $x^r$ | $rx^{r-1}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x\ln a}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $a^x\ln a$ |

**Álgebra de derivadas:** Si $f$ y $g$ son funciones derivables en $x$ entonces:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

2′. $(cf)'(x) = cf'(x)$, donde $c$ es una constante.

3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, con $g(x) \neq 0$.

**Regla de la cadena:** Si g es derivable en $x$ y $f$ es derivable en $g(x)$, entonces $f\circ g$ es derivable en $x$ y $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

**Derivada de la función inversa:** Sea $f$ una función uno a uno continua en un intervalo $(a, b)$ y suponga que $f$ es derivable en $f^{-1}(x)$ con $f'(f^{-1}(x))\neq 0$. Entonces $f^{-1}$ es derivable en $x$ y:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

## GLOSARIO

Variación absoluta de una variable: Si $x$ representa una variable real que toma valores en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$, la variación absoluta de $x$ entre $x_1$ y $x_2$ se define por $\Delta x = x_2 - x_1$.

Variación de una función: Sea una función $f$ definida en el intervalo $[x_1, x_2]$. La variación de $y = f(x)$ en el intervalo $[x_1, x_2]$ es $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

Variación de $y = f(x)$ con respecto a $x$ en un intervalo $[x_1, x_2]$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Costo promedio por unidad: Si $C$ expresa el costo total en función de $x$ donde $x \in \mathbb{Z}^+$, el costo promedio por unidad está dado por: $C(x) = \frac{C(x)}{x}$.

Derivada de una función $f$ en un punto $x$: Es el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ siempre que dicho límite exista.

Recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(a, f(a))$: Recta que tiene como pendiente $f'(a)$ y que pasa por el punto $(a, f(a))$; es decir, $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Recta normal a la gráfica de $f$ en el punto $(a, f(a))$: Recta perpendicular a la recta tangente en el punto $(a, f(a))$; es decir, $y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$.

# Capítulo 5

# Aplicaciones de la derivada

## 5.1 Introducción

En muchos problemas prácticos, el modelo matemático que los explica es una función. Esto significa que para estudiar el problema es necesario determinar el comportamiento de la función. Algunas de las preguntas de interés son: ¿qué valores optimizan el modelo?; ¿tiene la función un valor máximo, un valor mínimo?; ¿la función es creciente, es decreciente?; ¿qué comportamiento tiene el crecimiento o el decrecimiento (concavidad)? La derivada es la herramienta matemática que permite dar respuesta a estas preguntas.

### Objetivos

1. Hallar los extremos relativos de una función continua, mediante el criterio de la primera derivada.
2. Trazar gráficas de funciones continuas.
3. Hallar los extremos relativos de una función mediante la prueba de la segunda derivada.
4. Hallar límites que involucren el infinito.
5. Representar gráficamente funciones racionales.
6. Hallar los extremos absolutos mediante el criterio de máximos y mínimos.
7. Resolver problemas de valor máximo y mínimo mediante el uso del cálculo.

## 5.2 Reseña histórica

Siguiendo el trabajo de muchos matemáticos que durante siglos consideraron los problemas de determinación de áreas de regiones acotadas por curvas, y que buscaron la manera de encontrar los valores máximos o mínimos de ciertas funciones, dos genios de la última mitad del siglo XVII, Isaac Newton y Gottfried Leibniz crearon la maquinaria del cálculo. Con ella se produjo el inicio del análisis matemático moderno, que pasó a ser objeto de aplicación en un número creciente de otras disciplinas.

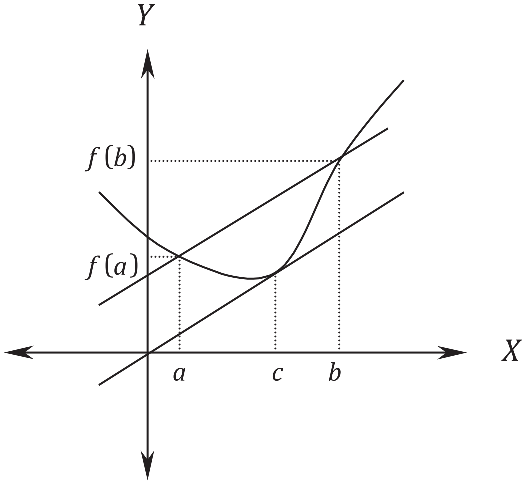
El problema del máximo o mínimo, el del área, y los problemas relacionados con encontrar tangentes y determinar volúmenes ya habían sido abordados y solucionados para varios casos especiales durante años. Aunque cada caso prácticamente había sido solucionado, a veces por los griegos o por sus sucesores islámicos, la solución requería una construcción ingeniosa. Nadie había desarrollado un algoritmo que permitiera resolver estos problemas fácilmente en nuevas situaciones. Éstas no ocurrían a menudo entre los griegos o los islámicos, ya que estos matemáticos tenían pocos modos de describir nuevas curvas o sólidos en los que hubiera que calcular tangentes, áreas o volúmenes. Pero con el advenimiento de la geometría analítica en la mitad del siglo XVII, de pronto se hizo posible construir todos los tipos de curvas nuevas y de sólidos. Después de todo, cualquier ecuación algebraica determinaba una curva, y un nuevo sólido podía ser formado, por ejemplo, haciendo girar una curva alrededor de cualquier línea en su plano.

Con infinidad de nuevos ejemplos para tratar, los matemáticos del siglo XVII buscaron y descubrieron nuevas formas de encontrar máximos, construir tangentes, y calcular áreas y volúmenes. Estos matemáticos no estaban, sin embargo, preocupados por funciones, sino por curvas definidas por alguna relación entre dos variables. En el proceso de encontrar tangentes, a menudo consideraban otros aspectos geométricos de las curvas.

### 5.2.1 Algunos teoremas básicos

**Teorema del valor medio.** Si $f$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, existe al menos un número $c$ en $(a, b)$ tal que:

$$\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$




Observemos que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ corresponde a la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$; es decir, corresponde a la variación promedio de $f$ en el intervalo $[a, b]$. Si $f(x)$ corresponde a una ecuación de movimiento, el teorema significa que la velocidad instantánea $f'(x)$ en algún momento coincide con la velocidad promedio. Esto ocurre en el momento $x = c$.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = 5 - 4x^2$. Hallar todos los valores de $c$ en $(1, 4)$ tales que:

$$f'(c) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1}$$

Solución. La pendiente de la recta secante que pasa por $(1, f(1))$ y $(4, f(4))$ es:

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{-59-1}{4-1} = -20$$

Como $f$ satisface las condiciones del teorema del valor medio, existe al menos un $c \in (1, 4)$ tal que $f'(c) = -20$. Resolvemos $f'(c) = -20$; tenemos:

$$f'(c) = -8c = -20$$
$$c = 5/2$$

Ejemplo 2. Encuentre el número $c$ que cumple las condiciones del teorema del valor medio para $f(x) = 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[1, 4]$.

Solución.

$$f'(x) = (2)\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

y

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$$

Como $f$ es continua en [1, 4] y derivable en (1, 4), si aplicamos el teorema del valor medio tenemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3}$$
$$c = \frac{9}{4}$$

Ejemplo 3. Dada $f(x) = x^3 - x^2 - x+1$, para $x$ el intervalo $[-1, 2]$, encuentre los valores de $c$ que satisfacen las condiciones del teorema del valor medio.

Solución.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

y

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{3-0}{2+1} = 1$$

Si aplicamos el teorema del valor medio, tenemos:

$$3c^2 - 2c - 1 = 1$$
$$3c^2 - 2c - 2 = 0$$

Resolvemos la ecuación y tenemos dos soluciones: $c_1 = -0{,}55$ y $c_2 = 1{,}22$. Ambas soluciones están en el intervalo $(-1, 2)$.

Ejemplo 4. Un automóvil pasó por la caseta $A$ a las 10:00 h y por la caseta $B$, la cual se encuentra a 175 km de $A$, a las 11:30 h. En la caseta $B$ se presentó un oficial de tránsito con el automovilista y le dijo: "Señor, usted sabe que la velocidad máxima permitida en esta carretera es de 95 km/h y usted excedió tal velocidad; por lo tanto tendré que levantarle una infracción". ¿En qué se basa el oficial para hacerle tal afirmación al automovilista?

Solución. Llamemos $x = f(t)$ a la ecuación de movimiento del automóvil, con $x$ en kilómetros y $t$ en horas. Supongamos que esta función es continua y derivable para $t \geq 0$. Lo que hizo el oficial para poder asegurarle al conductor del automóvil que había excedido el límite de velocidad fue averiguar a qué hora había pasado el automóvil por la caseta $A$ rumbo a la caseta $B$ y el tiempo que tardó en hacer este recorrido. Aplicó el teorema del valor medio a la función $x = f(t)$ en el intervalo [10, 11.5] tomando $x_0 = f(10) = 0$ y $x_1 = f(11.5) = 175$. Con este teorema se aseguró de que al menos en un instante entre las 10 y las 11.5 horas, la derivada $f'(t)$, que es la velocidad instantánea del automóvil, fue:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{175 - 0}{11.5 - 10} = 116.667 \text{ km/h}$$

Ejemplo 5. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, y además $f'(x) = 0$ para todo $x$ entre $a$ y $b$, entonces $f(x) = K$ (una constante).

Solución. La función $f(x)$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio. Por lo tanto cualesquiera sean $x_1$ y $x_2$ tales que $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$, existe un número $c$

con $x_1 < c < x_2$, y $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$;

pero $f'(c) = 0$, por consiguiente $f(x_2) - f(x_1) = 0$, y así:

$f(x_2) = f(x_1) = K$ para alguna constante $K$.

**Teorema de Rolle.** Un caso particular del teorema del valor medio es cuando $f(a) = f(b)$. En ese caso tenemos que si $f$ es continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b)$, y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número $c$ en $(a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Ejemplo 6. Dada $f$ definida como $f(x) = x^2+2x - 15$, encuentre las raíces del polinomio y muestre que se cumple el teorema de Rolle.

Solución. Hallamos las raíces del polinomio $x^2+2x - 15$:

$x^2+2x - 15 = 0$
$(x+5)(x - 3) = 0$
$x_1 = -5 \quad x_2 = 3$

Tenemos $f(-5) = f(3) = 0$; como $f$ es derivable en el intervalo $(-5, 3)$ se cumplen las condiciones del teorema; es decir, existe $c \in (-5, 3)$ tal que $f'(c) = 0$. Veamos:

$f'(c) = 2c + 2 = 0$
$c = -1$, y $-1 \in (-5, 3)$

## EJERCICIO 5.1

1. Verifique que la función $f$ satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo dado. En el caso de que se cumplan las condiciones, halle los valores de $c$.

a. $f(x) = x^2, [-2, 1]$;

b. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}, [0, 1]$;

c. $f(x) = \frac{x}{x+1}, \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$;

d. $f(x) = |x|, [-1, 1]$;

e. $f(x) = 3x + 2, [-2, 2]$;

f. $f(x) = \frac{x^3}{3}, [-2, 2]$;

g. $f(t) = \frac{t+3}{t-3}, [-1, 4]$;

h. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \left[\frac{3}{2}, 5\right]$;

i. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \left[-1, \frac{1}{2}\right]$;

j. $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x - 4), [-1, 2]$;

k. $f(x) = x^2 + 2x + 1, [-1, 4]$;

l. $f(x) = \frac{1}{x}, [1, 5]$;

m. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, [-5, 5]$;

n. $f(x) = \sqrt[3]{x}, [-1, 1]$;

o. $f(x) = 5, [-1, 1]$.

2. Encuentre, si existen, los valores $c$ tales que $f'(c) = 0$, y establezca intervalos $[a, b]$ donde se pueda aplicar el teorema de Rolle.

a. $f(x) = x^2 - 2x$;

b. $f(x) = x^2 - 3x + 2$;

c. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;

d. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$;

e. $f(x) = |x| - 1$;

f. $f(x) = \frac{x+1}{x}$;

g. $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 1$;

h. $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$;

i. $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$;

j. $f(x) = (x - 3)(x + 1)^2$.

3. Utilizando el teorema de Rolle demuestre que la ecuación:

a. $6x^4 - 7x + 1 = 0$ tiene un máximo de dos raíces reales;

b. $6x^5 + 13x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real;

c. $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

4. Muestre que si una función $f$ es derivable en $\mathbb{R}$, y $-1 \leq f'(x) \leq 1$, entonces se tiene que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ para todo $x_1$ y $x_2$.

5. Dada la función $f$ definida como $y = x^{2/3}$, muestre que el teorema del valor medio no se cumple para $x$ en el intervalo $[-8, 28]$. Explique por qué.

## 5.3 Formas indeterminadas y la Regla de L'Hôpital

Un límite de la forma $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ donde $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = c$. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x} = \infty \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

De ahí el nombre de indeterminaciones (puede resultar cualquier cosa). Existen otras formas indeterminadas que requieren de métodos más complicados. Por fortuna, hay una técnica para calcular muchos límites que presentan ciertas indeterminaciones, llamada Regla del Marqués de L'Hôpital (aunque la regla fue descubierta por su maestro J. Bernoulli).

**Teorema (Regla de L'Hôpital).**
Sea $(a, b)$ un intervalo abierto que contiene a $c$. Sean $f$ y $g$ funciones definidas y derivables en $(a, b)$, excepto posiblemente en $c$. Si $g'(x)\neq 0$ para $x\neq c$ y $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en $x = c$, entonces $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ siempre que $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista, o sea $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.

Ejemplo 7. Calcular $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$.

Solución. La forma indeterminada es $0/0$. Aplicando la Regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{5-1}}}{2(5)} = \frac{1}{40}$$

La Regla de L'Hôpital puede aplicarse más de una vez si las condiciones lo permiten y lo exigen.

Ejemplo 8. Calcular el límite $\lim_{x\to 0} \frac{x+1-e^x}{x^2}$.

Solución. La forma indeterminada es $0/0$. Aplicando la Regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1-e^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x}$$

De nuevo este último límite tiene la forma indeterminada $0/0$, luego:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2}=-\frac{1}{2}$$

Un límite de la forma $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ donde $\lim\limits_{x\to c}(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to c}g(x)=\infty$, tiene la forma indeterminada $\infty/\infty$ en $x=c$. Para resolver esta forma indeterminada también se aplica la Regla de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$, siempre que $\lim\limits_{x\to c}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$ exista, o sea $\lim\limits_{x\to c}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}=\infty$.

Además, la Regla de L'Hôpital se aplica cuando las formas indeterminadas $0/0$, $\infty/\infty$, aparecen en límites laterales o límites al infinito.

Ejemplo 9. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{\ln x}$.

Solución. La forma indeterminada es $\infty/\infty$. Luego,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}xe^x=\infty$$

Otras formas indeterminadas son $\infty-\infty$, $0\,.\,\infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$, las cuales se transforman algebraicamente en $0/0$ ó $\infty/\infty$ para poder aplicar la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 10. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$.

Solución. En este caso la indeterminación es de la forma $0\cdot(-\infty)$, la cual se puede convertir a una de las usuales formas indeterminadas $0/0$ ó $\infty/\infty$ (por facilidad a $-\infty/\infty$) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}x\ln x &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{x^2}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}-x=0\end{aligned}$$

Ejemplo 11. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

**Solución.** En este caso la indeterminación es de la forma $1^{\infty}$, la cual se puede convertir a una de las usuales formas indeterminadas $0/0$ ó $\infty/\infty$.

Utilizando la identidad $u = e^{\ln u}$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}ln(1+x)}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1\,ln(1+x)}{x}} \text{ Ahora tenemos la forma indeterminada } \infty\cdot 0$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(1+x)}{x}} \text{ Tiene la forma indeterminada } \frac{0}{0}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}} \text{ Aplicamos la Regla de L'Hôpital.}$$

y obtenemos $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

La Regla de L'Hôpital no es infalible: hay ocasiones en que aplicarla sucesivamente empeora el problema.

**Ejemplo 12.** Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

**Solución.** La indeterminación tiene la forma $0/0$. Pero si aplicamos la Regla de L'Hôpital, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^2}\,e^{-\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

que a su vez tiene la misma forma indeterminada. Aplicamos de nuevo la regla; obtenemos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}$$

El problema continúa y cada vez empeora más; así que de esta manera no lograremos eliminar la indeterminación.

Sin embargo, si cambiamos la forma de la indeterminación por otra $(\infty/\infty)$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

Las formas indeterminadas $1^\infty$, $\infty^0$ y $0^\infty$, aparecen en funciones con base variable y exponente variable. Cuando nos encontremos con ellas, recurrimos a la derivada logarítmica para hallar sus derivadas, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 13.

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$; ya sabemos que este límite es $e$.

Solución. Por sustitución directa se llega a la forma indeterminada $1^\infty$. Veamos cómo calcularlo con la regla de L'Hôpital. Para comenzar suponemos que el límite existe y es igual a $y$.

Tomamos logaritmos naturales en ambos lados:

$$ln\ y = ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$$

Al ser continua la función logaritmo natural, podemos reescribir la ecuación así:

$ln\ y = \lim_{x\to\infty}\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[x\ ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$, o lo que es equivalente:

$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{ln\left[1+\frac{1}{x}\right]}{\frac{1}{x}}\right\} = \frac{0}{0}$. Luego por la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\left[ln\ \left[1+\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right]}{\frac{1}{x}}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)}\right]}{-\frac{1}{x^2}}\right\} =$$

$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)}\right]$, y por lo tanto $ln\ y = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)}\right] = 1$. Por definición de logaritmo, $\ln y = 1$ es $e$; luego $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Hemos identificado como indeterminadas las formas:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

Hay formas de aspecto similar que son, sin embargo, determinadas, tales como:

$$\infty+\infty \to \infty,\ -\infty-\infty \to -\infty,\ 0^\infty \to 0,\ 0^{-\infty} \to \infty$$

## EJERCICIO 5.2

1. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hôpital?

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-4}{2x+1}=\lim_{x\to 2}\frac{6x}{2}=6$$

2. Halle los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x^b-1}$;

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$;

c. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$;

d. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{e^x}{x^3}$;

e. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6^x-2^x}{x}$;

f. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$;

g. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln(1+e^x)}{4x}$;

h. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}$;

i. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2-1)e^{-x^2}$;

j. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln x}{\ln(\ln x)}$;

k. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+x^2/2}{x^2}$;

l. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-x^2/2}{x^2}$;

m. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+x^2/2}{x^3}$;

n. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-x^2/2}{x^3}$.

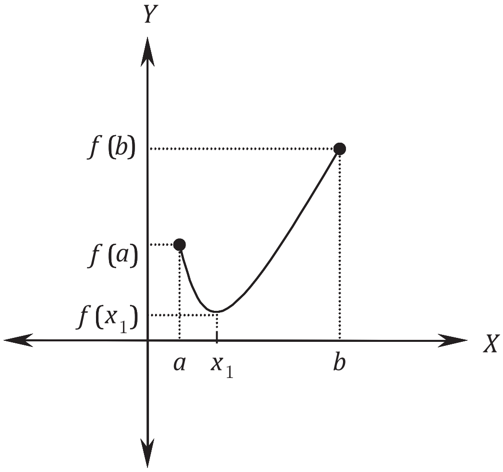
## 5.4 Extremos de una función

Sea $f$ definida en un conjunto $S$ y $c \in S$.

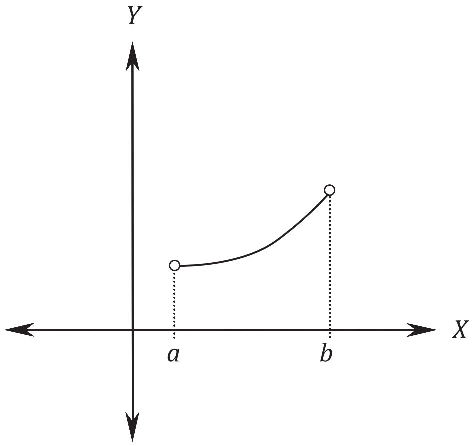
1. $f(c)$ es el mínimo absoluto de $f$ en $S$ si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in S$.

2. $f(c)$ es el máximo absoluto de $f$ en $S$ si $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in S$.

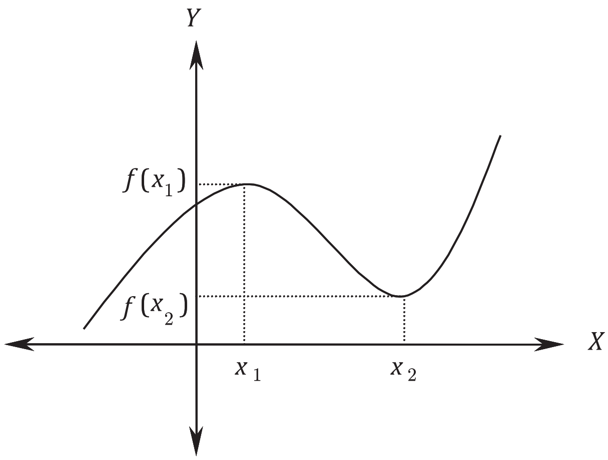
El mínimo y el máximo de una función en un intervalo se llaman valores extremos de la función en ese intervalo.




Gráfica 1




Gráfica 2




Gráfica 3

De acuerdo con las gráficas, se puede observar que:

1. Si $f$ es continua en un intervalo cerrado, entonces $f$ tiene valor máximo y mínimo en el intervalo (gráfica 1).

2. Si $f$ es continua en $[a, b]$, los extremos pueden ocurrir en $x = a$ ó $x = b$, ó en puntos interiores del intervalo. Por ejemplo, en la gráfica 1 el valor máximo es $f(b)$ y el valor mínimo es $f(x_1)$.

3. Es posible que una función no tenga valores extremos en un intervalo. Por ejemplo, en la gráfica 2, $f$ no tiene valores extremos en el intervalo $(a, b)$.

### 5.4.1 Máximos y mínimos relativos o locales

1. Si existe un intervalo abierto $(a, b)$ que contenga a $c$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x$ en $(a, b)$, el número real $f(c)$ es un máximo relativo o local.

Ejemplo 14. En la gráfica 3, $f(x_1)$ es un máximo local.

2. Si existe un intervalo abierto $(a, b)$ que contenga a $c$, tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo $x$ en $(a, b)$, el número real $f(c)$ es un mínimo relativo o local.

Ejemplo 15. En la gráfica 3, $f(x_2)$ es un mínimo local.

Ejemplo 16. Es claro que para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$1 \leq 1 + x^2$$

de donde se sigue que:

$$\frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

Es decir, si consideramos la función $f$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, se tiene que $f(x) \leq 1$ para todo $x$. Pero por otro lado, se tiene que:

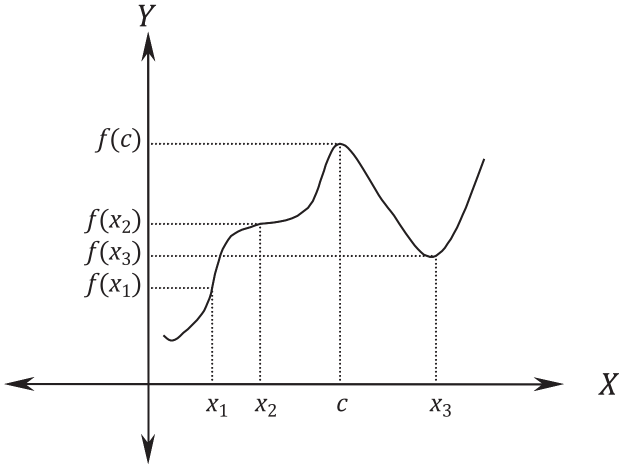
$$f(0) = 1 \geq \frac{1}{1+x^2}$$

lo que significa que $f(0) = 1$ es el valor máximo (absoluto) de $f$ sobre $\mathbb{R}$.

**Definición de punto crítico.** Si $f$ está definida en $c$, se dice que $c$ es un número crítico de $f$ si $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no está definida en $c$. A la pareja ordenada $(c, f(c))$ se la denomina punto crítico.

Observe que los máximos o mínimos locales se dan sólo en números críticos. Si $f$ tiene un extremo relativo en $x = c$, entonces $c$ es un número crítico de $f$. La proposición recíproca no es cierta; es decir, es posible que $f'(x)$ sea cero o no exista, y que $f(x)$ no sea un máximo o un mínimo local.

Por ejemplo: en la gráfica, en $x_2$, $f'(x_2) = 0$, y en $x_1$, $f'(x_1)$ no existe. $f(x_1)$ y $f(x_2)$ ni son máximos ni mínimos locales.




## 5.4.2 Cálculo de los extremos de una función en un intervalo cerrado *a*, *b*

Si $f$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, para hallar los extremos:

i. Se buscan los valores $c$ del intervalo $(a, b)$ en los que $f'(c)$ sea cero o no exista (números críticos).

ii. Se evalúa $f$ en cada número crítico que pertenezca al intervalo $(a, b)$, y en $x = a$, $x = b$, que son los valores extremos del intervalo.

iii. El menor de tales valores es el mínimo (absoluto), y el mayor es el máximo (absoluto).

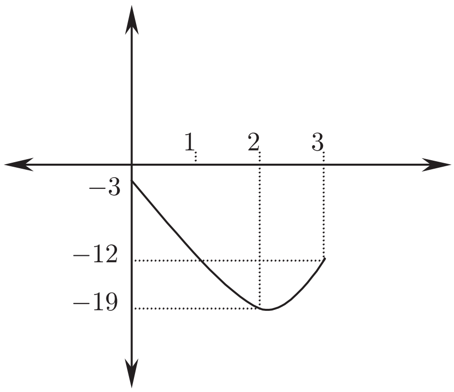
Ejemplo 17. Hallar los extremos de $f(x) = x^3 - 12x - 3$ para $x \in [0, 3]$.

Solución. Hallamos $f'(x)$ y la igualamos a cero.

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$
$x^2 - 4 = 0$
$x = -2$ y $x = 2$

Consideramos sólo $x = 2$, que pertenece al intervalo $[0, 3]$. Evaluamos $f$ en los extremos del intervalo $x = 0$, $x = 3$, y en el punto interior del intervalo $x = 2$ . $f(0) = -3$; $f(2) = -19$; $f(3) = -12$.

Los valores extremos de $f$ restringida al intervalo [0, 3] son: máximo $f(0) = -3$ y mínimo $f(2) = -19$.




Ejemplo 18. Hallar los valores extremos de la función $f$ dada por:

$f(x) = \frac{1}{x}$ para $x \in [1, 2]$.

Solución. Notemos que $f$ es continua en el intervalo cerrado [1, 2]. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'$ existe y no se anula en ningún punto $x$ de su dominio. Por lo tanto, $f$ no tiene puntos críticos. Evaluamos $f$ en los extremos del intervalo:

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{y} \quad f(2) = \frac{1}{2}$$

De donde podemos decir que los valores máximo y mínimo de $f$ sobre el intervalo [1, 2] son: $f(1) = 1$ y $f(2) = \frac{1}{2}$, respectivamente.

Ejemplo 19. Halle los extremos de la función $f$, dada por $f(x) = e^x - x$, en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución. La función $f$ es continua (pues es diferencia de dos funciones continuas). La derivada de $f$ existe para todo $x$ y está dada por $f'(x) = e^x - 1$. Resolviendo $f'(x) = 0$, tenemos:

$e^x - 1 = 0$ entonces $e^x = 1$ y $x \cdot \ln e = \ln 1$ es decir,
$x \cdot 1 = 0$ o sea $x = 0$;

Luego $x = 0$ es un número crítico de $f$, y en este caso $f(0) = 1$. Evaluamos $f$ en los extremos del intervalo. Obtenemos $f(-1) = e^{-1} + 1 \approx 1{,}363$ y $f(1) = e^1 - 1 \approx 1{,}715$. Al comparar estos tres valores $(f(0), f(-1), f(1))$, podemos decir que la función $f$ sobre el intervalo $[-1, 1]$ tiene un valor máximo de $f(1)$ y un valor mínimo de $f(0)$.

Ejemplo 20. Las ganancias totales de la compañía Acrosonic por la fabricación y venta de $x$ unidades del sistema de sonido modelo $F$ están dadas por:

$P(x) = -0{,}02x^2+300x - 200.000$ dólares para $0 \leq x \leq 20.000$.

¿Cuántas unidades de este sistema debe producir a fin de maximizar las ganancias?

Solución. Para hallar el máximo absoluto de $P$ en $[0, 20.000]$, primero se hallan los puntos críticos:

$P'(x) = -0{,}04x + 300$
$P'(x) = 0$ para $x = 7.500$

A continuación evaluamos $P(x)$ en $x = 7.500$ y en los extremos del intervalo $[0, 20.000]$:

$P(0) = -200.000$
$P(7500) = 925.000$
$P(20.000) = -2'200.000$

Luego el valor máximo absoluto de la función $P$ es 925.000. Así al producir 7.500 unidades, Acrosonic obtendrá una ganancia máxima de \$925.000.

Ejemplo 21. Hallar los valores extremos de la función $f$ dada por $f(x) = |x|$ sobre el intervalo $[-1, 2]$.

Solución. $f$ es una función continua en $[-1, 2]$; sin embargo, no es derivable en $x = 0$. Por lo tanto, éste es un número crítico de $f$, de donde $f(0) = 0$. Además la derivada de $f$ está dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

de lo cual se sigue que $f$ no se anula en ningún punto $x$. En los extremos del intervalo, $f$ toma los valores $f(-1) = 1$ y $f(2) = 2$. Comparamos éstos con el valor crítico $f(0) = 0$. Obtenemos que $f$ tiene como valor máximo $f(2) = 2$ y como valor mínimo $f(0) = 0$.

Ejemplo 22. Hallar los valores extremos de $f(x) = \ln(1+x^2)$ sobre el intervalo $[1, 2]$.

Solución. $f$ es una función continua. Es la compuesta de dos funciones continuas $h$ y $g$ definidas como $h(x) = \ln(x)$ y $g(x) = 1 + x^2$, sobre $[1, 2]$. La derivada de $f$ existe para todo $x$ y está dada por $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Para hallar los números críticos resolvemos la ecuación:

$$\frac{2x}{1+x^2} = 0$$

De donde:

$x = 0$,

Pero $0 \notin [1, 2]$, por lo tanto no lo consideramos. Así que los extremos de $f$ deben estar sobre los extremos del intervalo $[1, 2]$: $f(1) = \ln 2 \approx 0{,}693$ y $f(2) = \ln 5 \approx 1{,}609$. Éstos son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de $f$ sobre el intervalo $[1, 2]$.

## EJERCICIO 5.3

1. Represente gráficamente en el intervalo dado y halle los puntos críticos de cada una de las siguientes funciones definidas como:

   a. $f(x) = 2x + 1; x \in (0, 5]$;
   b. $f(x) = x^2 + 3; x \in (1, 4)$;
   c. $f(x) = x^2 - 6x - 7; x \in [1, 4]$;
   d. $f(x) = -x^2 + 10x - 21, x \in [2, 6]$;
   e. $f(x) = x^4 + 1; x \in (-1, 3]$;
   f. $f(x) = e^{|x|}; x \in [-2, 5]$.

2. Halle los valores extremos de $f$ definida como:

   a. $f(x) = -x^2 + 3; x \in (-1, 3]$;
   b. $f(x) = \ln(x); x \in [1, e^3]$;
   c. $f(x) = x^3 - 3x; x \in (-2, 2)$;
   d. $f(x) = 1/x; x \in [-1, 1]$;
   e. $f(x) = 1/x; x \in [1, 3]$;
   f. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x; x \in [-4, 4]$;
   g. $f(x) = x^3 - 3x + 3; x \in [1, 3]$;
   h. $f(x) = x^{1/3}; x \in [-2, 1)$;
   i. $f(x) = 3 + x^{3/2}; x \in [-1, 8]$;
   j. $f(x) = 2 + 4x - x^4; x \in [0, 2]$.

3. Halle los puntos críticos de $f$ definida como:

   a. $f(x) = -x^2+4x$;
   b. $f(x) = 2xe^x$;
   c. $f(x) = x^3 - 3x$;
   d. $f(x) = \sqrt[3]{x}$;
   e. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$;
   f. $f(x) = |x|$;
   g. $f(x) = x^3 - 3x+3$;
   h. $f(x) = x^{1/3}$;
   i. $f(x) = 3+x^{3/2}$;
   j. $f(x) = 2+4x - x^4$;
   k. $f(x) = |9 - x^2|$;
   l. $f(x) = e^{-x^2}$;
   m. $f(x) = x^3 - 3x^2+3x+7$.

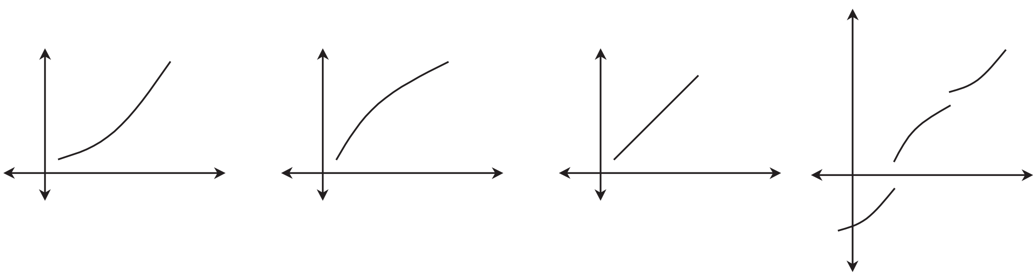
4. Dada $f$ recuerde que $f'$ es una función. Halle los puntos críticos de $f'$:

a. $f(x) = -x^2+4x+5$;
b. $f(x) = xe^{-x}$;
c. $f(x) = x^3 - 3x$;
d. $f(x) = \ln(x)$;
e. $f(x) = 1/3\, x^3 - x^2 - 3x$;
f. $f(x) = |x|$;
g. $f(x) = x^3 - 3x+3$;
h. $f(x) = x^{1/3}$;
i. $f(x) = 3+x^{3/2}$;
j. $f(x) = 2+4x+x^4$;
k. $f(x) = 3x - 1$;
l. $f(x) = x^4+1$;
m. $f(x) = x^3 - 3x^2+3x$;
n. $f(x) = e^{-x^2/2}$;
o. $f(x) = 2/(x^2+1)$.

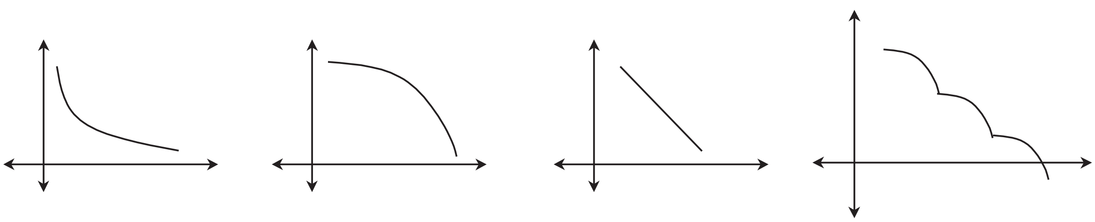
## 5.5 Función creciente y función decreciente

**Definición 1.** Una función $f$ se dice creciente en un conjunto $S$ si para todo $x_1, x_2$ de $S$, se tiene que $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$.
Una función $f$ se dice decreciente en $S$ si para todo $x_1, x_2$ de $S$, se tiene que $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$.

Gráficas de funciones crecientes:



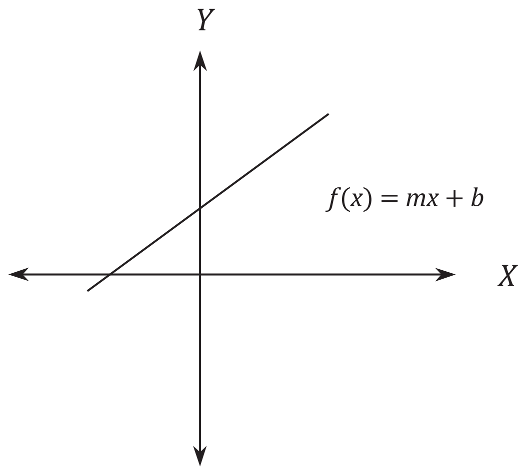
Gráficas de funciones decrecientes:



Ejemplo 23. $f$ definida como $f(x) = mx + b$, es creciente en todo $\mathbb{R}$ si $m > 0$.

**Solución.** Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, y $x_1 < x_2$. Tenemos que:
$mx_1 < mx_2$ (por ser $m > 0$)
$mx_1 + b < mx_2 + b$
$f(x_1) < f(x_2)$.

Por lo tanto, $f$ es creciente.

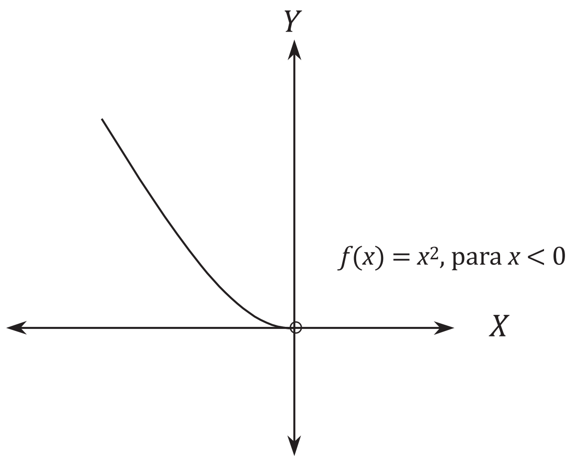



**Ejemplo 24.** $f$ definida como $f(x) = x^2$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

**Solución.** Sean $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$; es decir, $x_1 < 0$ y $x_2 < 0$. Si $x_1 < x_2$, tenemos que $-x_1 > -x_2$. Como $-x_1 > 0$ y $-x_2 > 0$,

$(-x_1)(-x_1) > (-x_2)(-x_2)$
$x_1^2 > x_2^2$
$f(x_1) > f(x_2)$

Por lo tanto, $f$ es decreciente.



Ejemplo 25. Sea $f$ la función de Dirichlet.

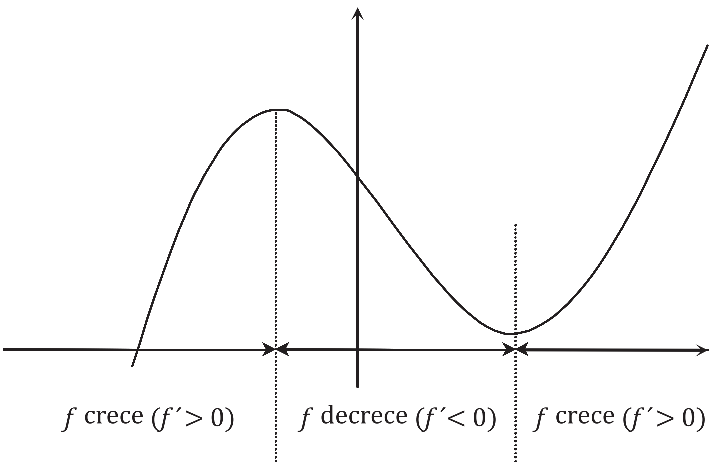
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

No existen intervalos abiertos de la forma $(a, b)$ para los cuales la función sea creciente o decreciente. Puesto que siempre es posible encontrar dos números racionales distintos $q$, $p$ en $(a, b)$ tales que $q<p$, en tal caso se tiene que $f(q) = f(p)$. En realidad, lo que sucede es que esta función no es inyectiva, por lo cual no puede ser ni creciente ni decreciente.

**Teorema 1.** (Derivada y crecimiento de una función) Sea $f$ derivable en el intervalo $(a, b)$.

i. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f$ es creciente en $(a, b)$.
ii. Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f$ es decreciente en $(a, b)$.
iii. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f$ es constante en $(a, b)$.

Recordemos que si $f$ es derivable en el intervalo abierto $(a, b)$, entonces $f$ es continua en $(a, b)$.




Ejemplo 26. Determinar los intervalos en que $f$ definida como $f(x) = x^3 - 6x^2+7$ es:

i. creciente. ii. decreciente.

**Solución.** $f$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y también derivable en todo $\mathbb{R}$. Hallamos los números críticos (igualando a cero la derivada de $f$):

$f'(x) = 3x^2 - 12x$
$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0$
$3x(x - 4) = 0$

De donde:

$x = 0$ y $x = 4$.

Éstos son los dos únicos puntos en los cuales se anula la derivada. Como $f$ es continua (es una función polinómica), debe tener un solo signo en cada uno de los intervalos:

$(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ y $(4, \infty)$.

Si $f$ tuviera signos opuestos (positivo y negativo) en alguno de estos intervalos, $f$ se anularía en otro punto distinto de los anteriores, lo cual no es posible.

Como $f$ tiene un solo signo en el intervalo $(-\infty, 0)$, basta considerar cualquier punto del intervalo para ver allí el comportamiento de $f'$. Por ejemplo, si $x = -1$, se obtiene:

$f'(-1) = 3(-1)(-1 - 4) = 15 > 0$

Esto significa que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0)$. Aplicamos el teorema anterior: $f$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 0]$. Análogamente, tomemos un número en el intervalo $(0, 4)$; por ejemplo, $x = 1$. Reemplazamos en $f'$ y tenemos que:

$f'(1) = 3(1)(1 - 4) = -9 < 0$

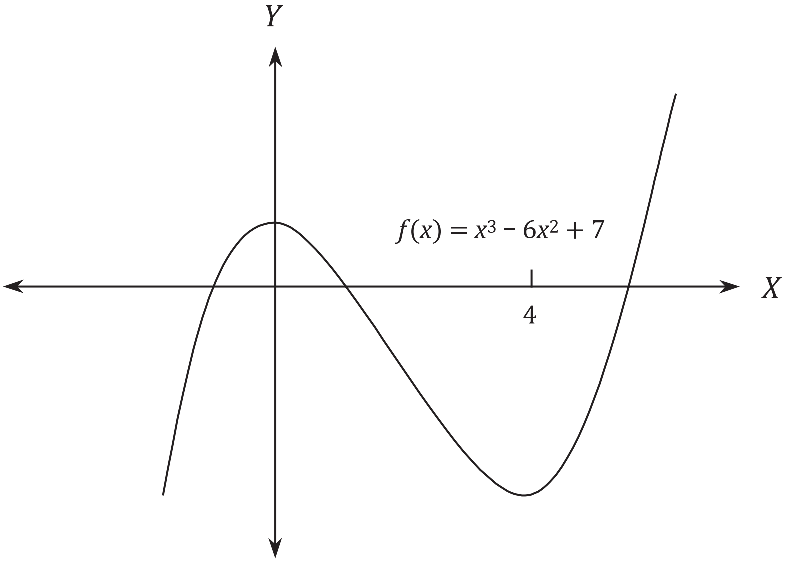
Podemos decir que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 4)$, con lo cual $f$ es decreciente en el intervalo $[0, 4]$. Finalmente, tomemos $x = 5 \in (4, \infty)$:

$f'(5) = 3(5)(5 - 4) = 15 > 0$

de donde $f'(x)>0$ para todo $x \in (4, \infty)$, con lo cual $f$ es creciente en el intervalo $[4, \infty)$. La siguiente tabla resume toda esta información:

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, 4)$ | $(4, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | – | + |
| $f$ | crece | decrece | crece |

Podemos decir entonces que:
en $(-\infty, 0)$ $f$ es creciente;
en $(0, 4)$ $f$ es decreciente;
en $(4, \infty)$ $f$ es creciente.




Ejemplo 26. Determinar los intervalos en que $f$ definida como $f(x) = x^3$, es:

i. creciente. ii. decreciente.

Solución. $f$ es una función continua (pues es una función polinómica). Ahora, $f'(x) = 3x^2$ (la derivada existe para todo $x \in \mathbb{R}$); la derivada de $f$ es cero cuando:

$3x^2 = 0$
$x = 0$

luego los intervalos que debemos analizar son:

$(-\infty, 0), (0, \infty)$

como $f'(x) = 3x^2 > 0$ en cada uno de estos intervalos, se tiene que $f$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$. Ahora, tomemos $a \in (-\infty, 0]$ y $b \in [0, \infty)$ con $a < b$; entonces se tiene que:

$$a^3 < 0 \leq b^3$$

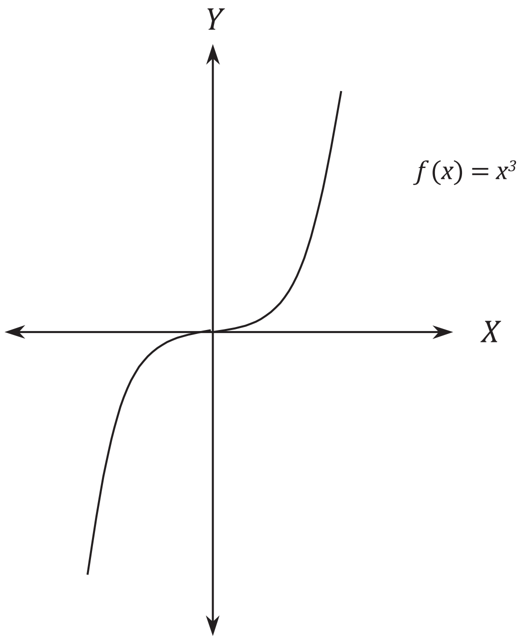
o bien:

$$a^3 \leq 0 < b^3$$

de donde $a^3 < b^3$. Esto implica que $f$ es creciente en $\mathbb{R}$. En este ejemplo realmente se han analizado cuatro casos:

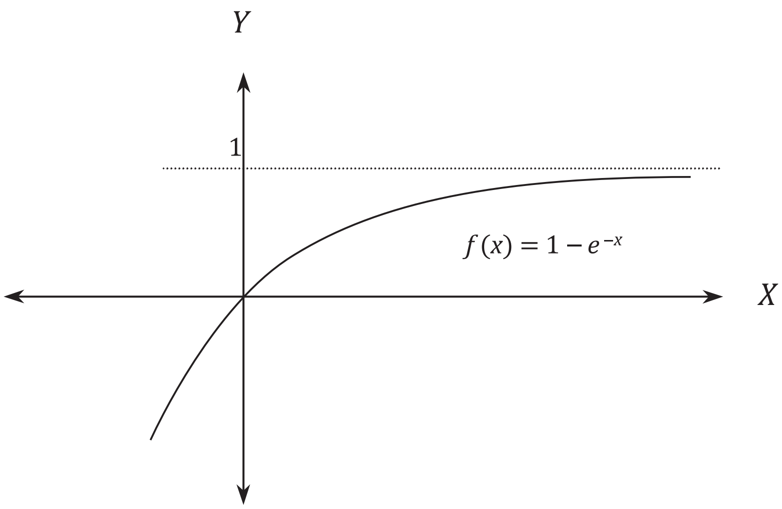
$a < 0 \leq b$
$a \leq 0 < b$
$a < b \leq 0$
$0 \leq a < b$

El lector puede decir en dónde se ha analizado cada uno de ellos.




Ejemplo 27. Determinar los intervalos donde $f$ definida como $f(x) = 1 - e^{-x}$ es creciente.

Solución. $f$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y también derivable. $f'(x) = e^{-x}$ es positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde se sigue que $f$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.




Nótese que:

$$\lim_{x\to\infty} (1 - e^{-x}) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty;$$

lo que significa que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f$.

Ejemplo 28. Hallar los intervalos para los cuales $f$ dada por $f(x) = \ln(1+x^2)$ es:

a. creciente; b. decreciente.

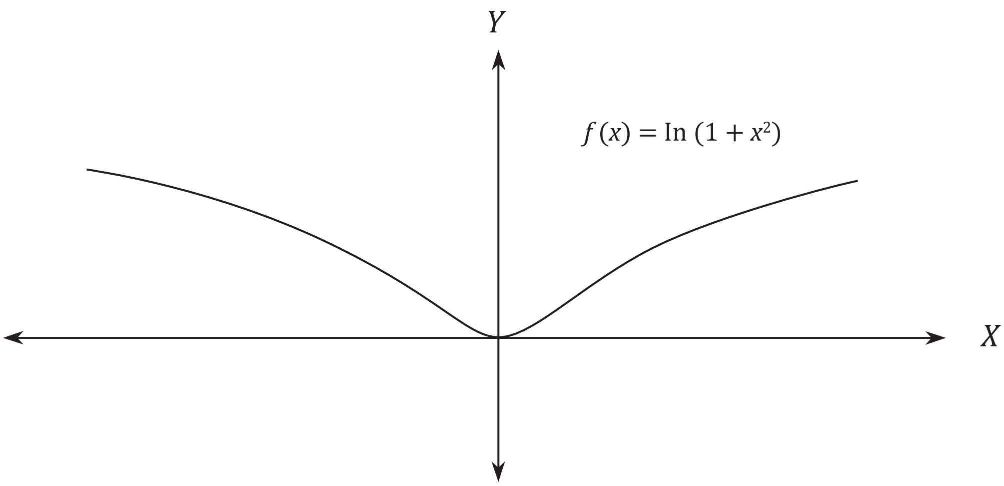
Solución. En el ejemplo 22, habíamos dicho que el único número crítico de $f$ era $x = 0$. Luego, los intervalos en los cuales vamos a analizar el comportamiento de $f'$ (en cuanto a su signo) son:

$(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

Si elegimos un punto apropiado en cada uno de estos intervalos y evaluamos luego en $f'$, podemos obtener lo siguiente:

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | decrece | crece |

de donde podemos decir que $f$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$.




Ejemplo 29. Hallar los intervalos para los cuales $f$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ es:

a. creciente; b. decreciente.

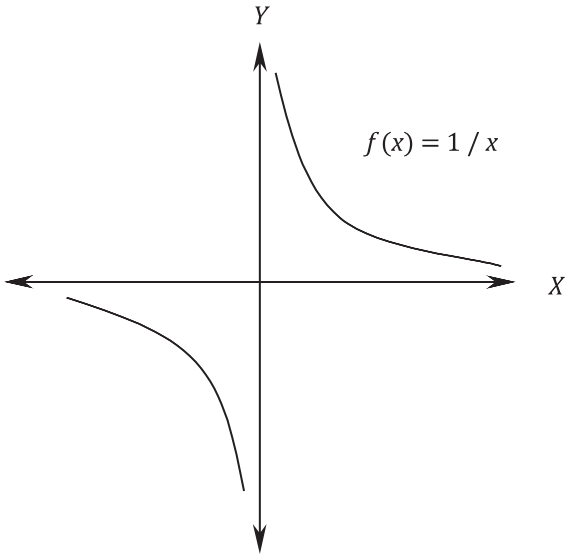
Solución. $f$ es una función continua en su dominio Dm($f$) = $\mathbb{R} - \{0\}$. $f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

$f$ no tiene números críticos; no obstante, como $0 \notin$ Dm($f$), nos vemos forzados a decir que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 0)$, y que también $f'(x) < 0$ para todo $x \in (0, \infty)$. Con lo cual podemos afirmar que:

$f$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$;
$f$ es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.

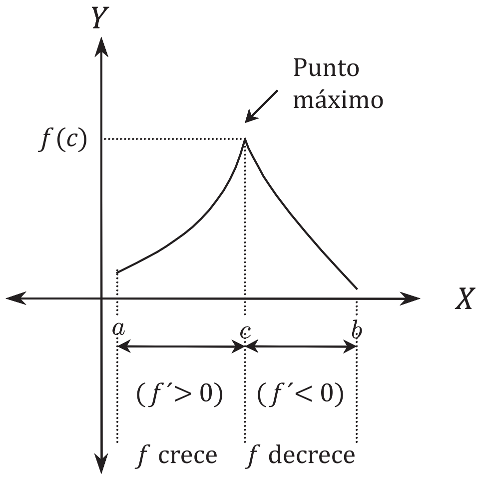
¿Podemos entonces decir que $f$ es decreciente en $\mathbb{R} - \{0\}$? La gráfica puede decir bastante:



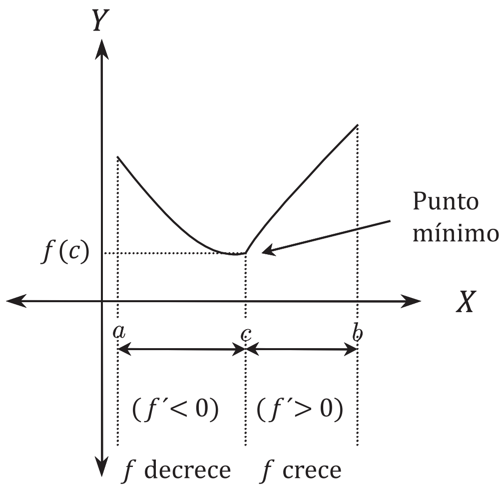

## 5.6 La primera derivada y los puntos críticos

Si $f$ es continua en $c$, y $c$ es un número crítico de $f$ (es decir, $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe), y $c$ está en el intervalo $(a, b)$ en el cual $f$ es derivable excepto posiblemente en $c$, el comportamiento (del signo) de la derivada en este intervalo cumple alguna de las siguientes características:

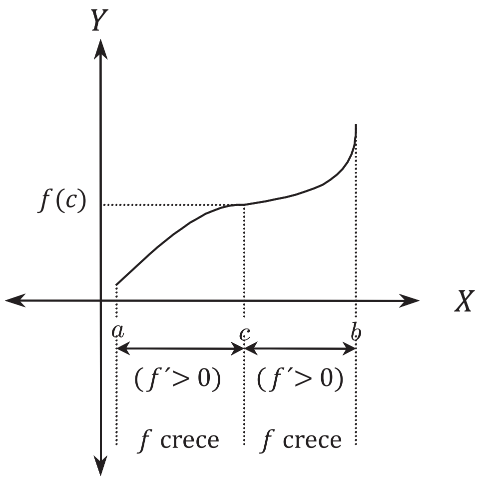
1. $f'(x)>0$ para todo $x$ con $a<x<c$ y $f'(x)<0$ para todo $x$ con $c<x<b$; es decir, $f$ cambia de creciente a decreciente en $x = c$. Entonces $f(c)$ es un máximo relativo (o local) de $f$ sobre $(a, b)$. Véase la gráfica siguiente.



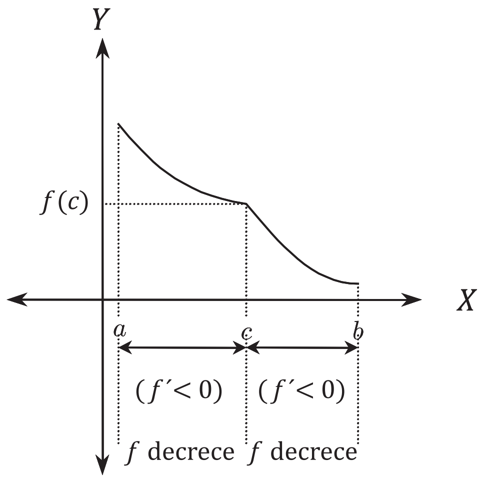

2. $f'(x) < 0$ para todo $x$ con $a<x<c$ y $f'(x) > 0$ para todo $x$ con $c<x<b$; es decir, $f$ cambia de decreciente a creciente en $x = c$. Entonces $f(c)$ es un mínimo relativo (o local) de $f$ sobre $(a, b)$. Véase la gráfica siguiente.



3. $f'(x)>0$ (ó $f'(x)<0$) para todo $x$ con $a<x<c$, y $f'(x)>0$ (ó $f'(x)<0$) para todo $x$ con $c<x<b$; es decir, $f$ no cambia de signo, entonces $f(c)$ no es mínimo ni máximo relativo. Véanse las gráficas 1 y 2:




Gráfica 1




Gráfica 2

Ejemplo 30. Hallar los puntos máximo y mínimo locales de $f(x) = x^3 - 12x - 3$.

Solución. $f$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Hallamos $f'(x)$ y la igualamos a cero (para encontrar los puntos críticos):

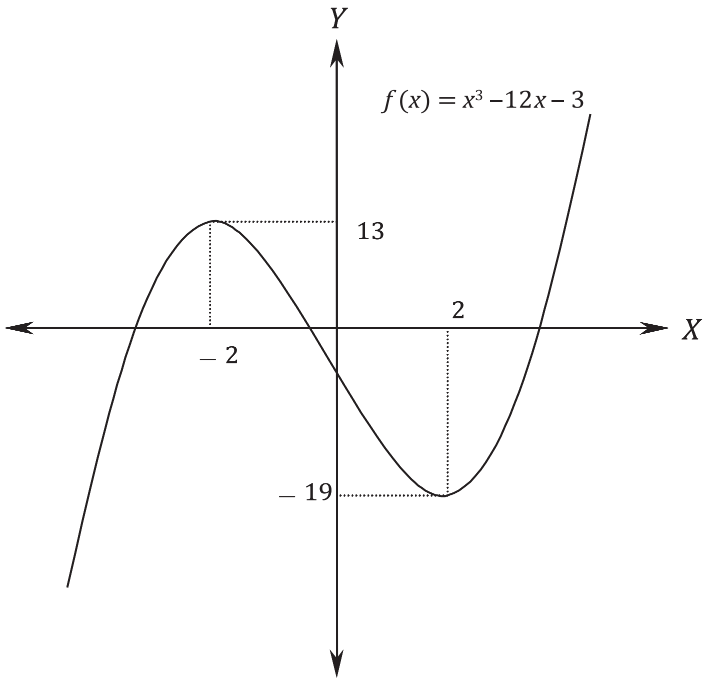
$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$
$x^2 - 4 = 0$
$x = -2$ y $x = 2$

Para el número crítico $x = -2$, $f(-2) = 13$, y para $x = 2$, $f(2) = -19$. Luego, los puntos críticos son $(-2, 13)$ y $(2, -19)$. Analizamos el comportamiento de $f'$ (los signos de $f'$) alrededor de estos números críticos:

$f'(-3) = 15>0$, luego $f$ es creciente en el intervalo $(-\infty, -2)$; $f'(-1) = -9<0$, luego $f$ es decreciente en el intervalo $(-2, 2)$; $f'(3) = 15>0$, luego $f$ es creciente en el intervalo $(2, \infty)$. La siguiente tabla resume esta información:

| | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | – | + |
| $f$ | crece | decrece | crece |

Por lo tanto, la función "cambia" de creciente a decreciente en $x = -2$. Aplicando el criterio anterior, $f(-2) = 13$ es un máximo relativo o local, y $(-2, 13)$ es el punto máximo relativo o local. Por otro lado, la función "cambia" de decreciente a creciente en $x = 2$. Por lo tanto, $f(2) = -19$ es el mínimo relativo o local y $(2, -19)$ es un punto mínimo relativo o local.




Ejemplo 31. Hallar los puntos máximo y mínimo de la función $f$ definida por:

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } \ x \leq -1 \ \text{ ó } \ x \geq 1 \\ 1 - x^2, & \text{si } \ -1 < x < 1. \end{cases}$$

Solución. $f$ es una función continua en $\mathbb{R}$ (puesto que es el resultado de la compuesta de dos funciones continuas, ¿cuáles?). Sin embargo, $f$ no es derivable en el punto $x = -1$, ni en $x = 1$. Veamos primero cuando $x = 1$; debemos evaluar:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)}{h}$$

Pero debido al comportamiento de $f$ alrededor de $x = 1$, conviene analizar los límites laterales:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h + h^2}{h} = 2$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 - (1+h)^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-2h - h^2}{h} = -2$$

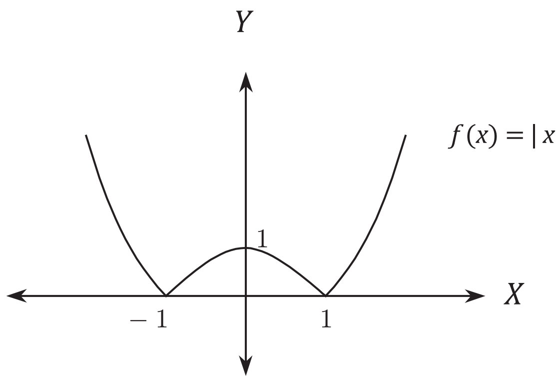
De donde concluimos que $f$ no es derivable en $x = 1$. Análogamente, podemos ver que $f$ no es derivable en $x = -1$. En cualquier otro punto, puede verse que la función es derivable y:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < -1 \text{ ó } x > 1 \\ -2x, & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$$

Por otro lado $f'(x) = 0$ siempre que $-2x = 0$; es decir, cuando $x = 0$. Por lo tanto, los números críticos de $f$ son $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$. Y los puntos críticos son $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. En la siguiente tabla aparece el análisis de los signos de $f'$ en los intervalos determinados por los números críticos:

| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | decrece | crece | decrece | crece |

con lo cual podemos decir que $(-1,0)$ y $(1, 0)$ son los puntos mínimos de $f$ (y también son absolutos), y que $(0, 1)$ es un punto máximo relativo de $f$.




Ejemplo 32. Hallar los puntos máximo y mínimo relativos de la función $f$ definida como $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$.

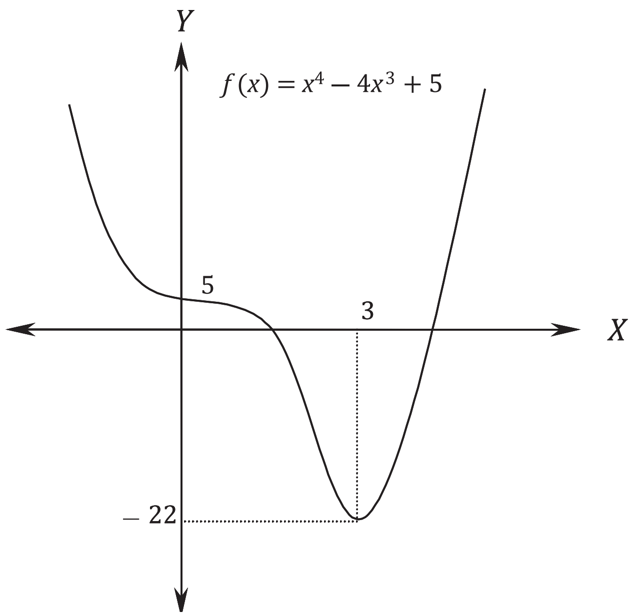
Solución. $f$ está definida en todo $\mathbb{R}$. Hallamos $f'(x)$ y la igualamos a cero.

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$
$4x^2(x - 3) = 0$
$x = 0$ y $x = 3$.

Si $x = 0$, $f(0) = 5$ y cuando $x = 3$, $f(3) = -22$. Luego, los puntos críticos son $(0, 5)$ y $(3, -22)$. Al analizar el comportamiento de $f'$ alrededor de los números críticos, tenemos: $f'(-1) = -16 < 0$; luego, $f$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$; $f'(2) = -16 < 0$; luego, $f$ es decreciente en el intervalo $(0, 3)$; y $f'(4) = 64 > 0$; luego, $f$ es creciente en el intervalo $(3, \infty)$. Resumimos:

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, 3)$ | $(3, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | – | – | + |
| $f$ | decrece | decrece | crece |

La función "cambia" de decreciente a creciente en $x = 3$; por lo tanto, $f(3) = -22$ es el mínimo relativo o local, y $(3, -22)$ es el punto mínimo relativo. En $x = 0$, la derivada no cambia de signo, por lo tanto en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo. Sin embargo $f(0) = 5$ es un número crítico y $(0, 5)$ es un punto crítico.




¿Cómo determinar las características del punto $(0, 5)$?

Recordemos que $f'$ es a su vez una función continua ($f'(x) = 4x^3 - 12x^2$). Para $x = 0$ tenemos: $f'(-1) = -16$, $f'(0) = 0$, $f'(1) = -8$; esto parece indicar que $f'$ pasa de ser creciente en el intervalo $(-1, 0)$ a ser decreciente en el intervalo $(0, 1)$.

Con estos resultados, se sugiere hacer el análisis de la función $f'$.

# 5.7 Concavidad

## 5.7.1 Análisis de la función *f* ´

Sea *f* una función derivable y creciente en un intervalo abierto $(a, b)$. La gráfica de *f* puede presentar cualquiera de las siguientes características:

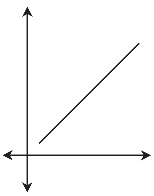


Fig. 1

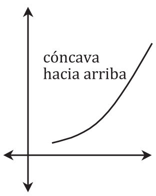



Fig. 2

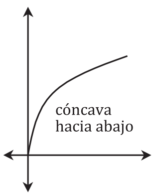



Fig. 3

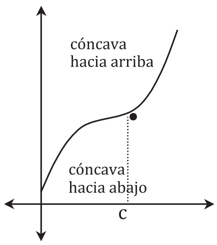



Fig. 4

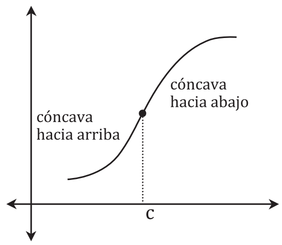



Fig. 5

1. En la figura 1, *f* es una función lineal, $f'$ es una función constante y $f'(x) \neq 0$ para cualquier $x$.

2. En la figura 2, se puede observar que las pendientes de las rectas tangentes crecen cuando crece *f*; es decir, $f'$ es creciente. En este caso, decimos que la función es cóncava hacia arriba. Si $f'$ es derivable tenemos que *f* es cóncava hacia arriba en $x = c$ si $f''(c)>0$.

3. En la figura 3, se puede observar que las pendientes de las rectas tangentes decrecen cuando crece *f* ; es decir, $f'$ es decreciente. En este caso, decimos que la función es cóncava hacia abajo. Si $f'$ es derivable tenemos que *f* es cóncava hacia abajo en $x = c$, si $f''(c)<0$.

4. En la figura 4, se observa que existe $c$ tal que $f'(c) = 0$; si $x>c$ , *f* es cóncava hacia arriba y si $x<c$, *f* es cóncava hacia abajo.

   Si $f''$ existe en $x = c$, $f''(c) = 0$. ¿Por qué?

5. En la figura 5, se observa que existe $c$ tal que $f'(c)$ no existe; si $x<c$, *f* es cóncava hacia arriba y si $x>c$, *f* es cóncava hacia abajo.

   Si $f''$ existe en $x = c$, $f''(c) = 0$.

**Definición 2.** Si *f* es una función continua en un intervalo $(a, b)$ y derivable en $(a, b)$, excepto en un número finito de puntos, y $f''$ es continua, los puntos en los que la función *f* cambia de concavidad se denominan puntos de inflexión.

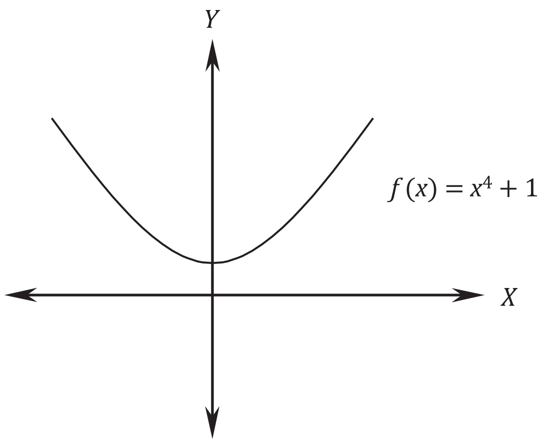
Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f$, entonces $f''(c) = 0$, ó $f''$ no está definida en $x = c$. El recíproco no es cierto; es posible que $f''(c) = 0$ y $(c, f(c))$ no sea un punto de inflexión.

Ejemplo 33. Para $f(x) = x^4+1$, $f''(0) = 0$. El punto $(0, 1)$ no es punto de inflexión.

Solución. $f'(x) = 4x^3$ y $4x^3 = 0$ cuando $x = 0$, así que $(0, f(0)) = (0, 1)$ es un punto crítico. Analizando el comportamiento de $f'$ tenemos que:

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | decrece | crece |

La función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$. Si aplicamos el criterio de la primera derivada, se tiene que $(0, 1)$ es un punto mínimo y no un punto de inflexión.




## 5.7.2 Segunda derivada y puntos críticos

Sea $f$ una función tal que $f'(c) = 0$ y $f''$ existe en un intervalo abierto que contiene a $c$.

1. Si $f''(c)>0$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo o local.

2. Si $f''(c)<0$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo o local.

3. Si $f''(c) = 0$ entonces el criterio no decide; sin embargo observe que si $f''(c) = 0$, se tiene que $(c, f'(c))$ es un punto crítico de $f'$. Aplicando el criterio de la segunda derivada a $f'$ tenemos que:

   Si $f'''(c)<0$, $f'(c)$ es un máximo de $f'$; es decir, la función $f$ cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo y $(c, f(c))$ es un punto de inflexión.

Si $f'''(c)>0$, $f''(c)$ es un mínimo de $f'$; es decir, la función cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba y $(c, f(c))$ es un punto de inflexión.

Si $f'''(c) = 0$, el criterio no decide.

Ejemplo especial. Sean $a_1,\ldots,a_n$ números reales no todos cero. Muestre que la ecuación:

$$\sqrt{1 + a_1 x} + \cdots \sqrt{1 + a_n x} = n$$

tiene como máximo una raíz real no nula.

Solución. Nótese que $f_i(x) = \sqrt{1 + a_i x}$ es cóncava. Por lo tanto:

$$f(x) = \sqrt{1 + a_1 x} + \cdots \sqrt{1 + a_n x}$$

es cóncava. Como $f'(x)$ existe, hay a lo sumo un punto sobre la curva tal que $f'(x) = 0$. Suponga que existe más de una raíz no nula de la ecuación $f(x) = n$. Como $x = 0$ es también una raíz, tenemos tres raíces reales $x_1 < x_2 < x_3$. Al aplicar el teorema del valor medio a $f$ sobre los intervalos $x_1, x_2$ y $x_2, x_3$, podemos encontrar dos puntos distintos donde $f'$ es cero, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, debe existir como máximo una raíz no nula para la ecuación $f(x) = n$.

**Resumimos:**

Si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión.

Si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) = 0$, el criterio no decide y se sugiere aplicar el concepto de la primera derivada y los puntos críticos.

Ejemplo 34. Utilice el criterio de la segunda derivada para hallar los puntos máximo y mínimo relativos de $f(x) = x^3 - 12x - 3$.

Solución.

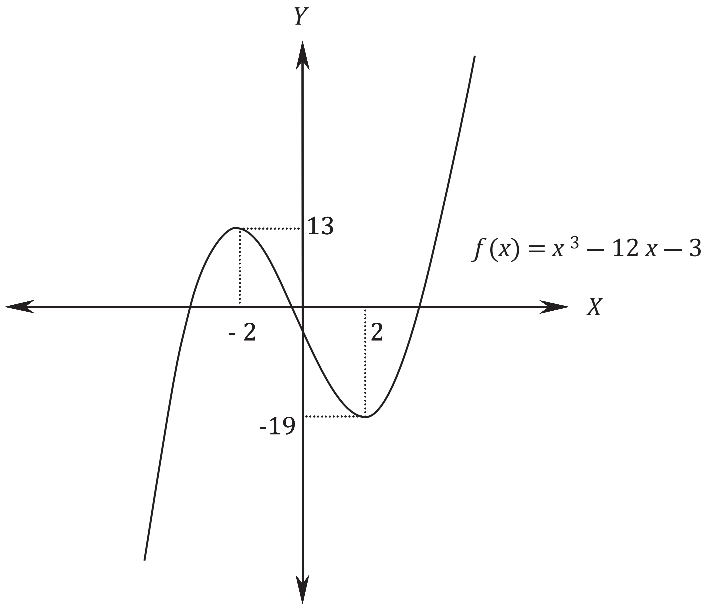
i. Como $f'$ está definida en $\mathbb{R}$, hacemos $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$
$3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 0$
$3(x - 2)(x + 2) = 0$

de donde:

$x = -2$ ó $x = 2$.

Encontramos los valores $f(-2) = 13$ y $f(2) = -19$, y obtenemos los puntos críticos $(-2, 13)$ y $(2, -19)$.




ii. Hallamos $f''(x)$ y se calcula $f''(-2)$ y $f''(2)$. $f''(x) = 6x$, $f''(-2) = -12 < 0$, significa que en $x = -2$, $f$ tiene un valor máximo local 13. La pareja $(-2, 13)$ es el punto máximo local. $f''(2) = 12 > 0$. Significa que en $x = 2$, $f$ tiene un valor mínimo local $-19$, y la pareja $(2, -19)$ es el punto mínimo local.

iii. Hallamos los puntos de inflexión; para ello hacemos $f''(x) = 6x = 0$. Con esto se tendría $6x = 0$, de donde $x = 0$. En $x = 0$, $f(0) = -3$. Por otro lado, $f'''(x) = 6$, de donde $f'''(0) = 6 \neq 0$. Entonces, podemos decir que $(0, -3)$ es un punto de inflexión.

Hacemos un análisis de los signos de $f'$ y $f''$. Obtenemos:

| | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | — | + |
| $f$ | crece | decrece | crece |

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f''$ | — | + |
| $f$ | cóncava hacia abajo | cóncava hacia arriba |

Como $\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R}$, podemos decir entonces:

1. $f$ es creciente en el intervalo $(-\infty, -2)$ y en el intervalo $(2, \infty)$;
2. $f$ es decreciente en el intervalo $(-2, 2)$;
3. $f$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 0)$;
4. $f$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(0, \infty)$;

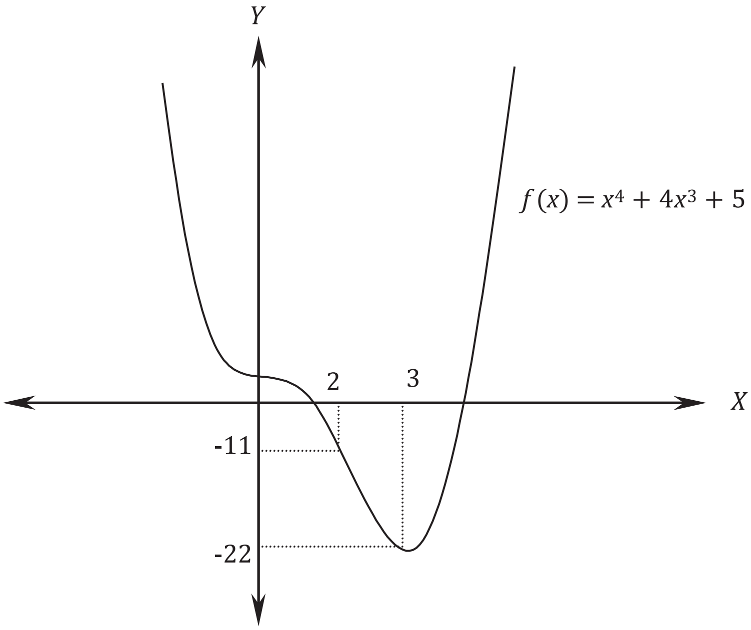
Ejemplo 35. Utilizar el criterio de la segunda derivada. Hallar los puntos máximo y mínimo relativos de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$.

Solución.

i. Como $f$ está definida en todo $\mathbb{R}$, hacemos $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$
$4x^2(x - 3) = 0$
$x = 0$ y $x = 3$

Encontramos los valores: $f(3) = -22$ y $f(0) = 5$, y obtenemos los puntos críticos $(3, -22)$ y $(0, 5)$.




ii. Hallamos $f''(x)$ y calculamos $f''(3)$ y $f''(0)$. $f''(x) = 12x^2 - 24x$, $f''(3) = 36 > 0$, significa que en $x = 3$, $f$ tiene un valor mínimo local $-22$, y la pareja $(3, -22)$ es el punto mínimo local. $f''(0) = 0$; el criterio de la segunda derivada no decide.

Calculamos $f'''(x)$ en $x = 0$. $f'''(x) = 24x - 24$ y $f'''(0) = -24$. Como $f'''(0) \neq 0$, el punto $(0, 5)$ es un punto de inflexión. Como además $f'''(0) < 0$, en el punto $(0, 5)$ la función $f$ cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo.

iii. Hallamos los puntos de inflexión, haciendo $f''(x) = 0$:

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 0$
$12x(x - 2) = 0$
$x = 0$, $x = 2$

$x = 0$ ya se estudió por ser $f'(0) = 0$. En $x = 2$, $f(2) = -11$, así que $(2, -11)$ es un punto de inflexión. Como $\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R}$, si determinamos los puntos críticos podemos decir que:

1. $f$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 3)$.
2. $f$ es creciente en el intervalo $(3, \infty)$.
3. $f$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, 0)$ y en el intervalo $(2, \infty)$.
4. $f$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(0, 2)$.

Ejemplo 36. Utilizar el criterio de la segunda derivada. Hallar los puntos máximo y mínimo relativos de $f(x) = \ln(1+x^2)$. También analizar la concavidad de $f$.

Solución. Habíamos visto en el ejemplo 22 que $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, y que el número crítico de $f$ está dado por $x = 0$. Derivamos por segunda vez, y obtenemos:

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

de donde $f''(0) = 2 > 0$, por lo tanto el punto $(0, 0)$ es un punto mínimo (absoluto) de $f$. Por otro lado, $f''(x) = 0$ siempre que

$2 - 2x^2 = 0$

de donde:

$x = 1$ ó $x = -1$

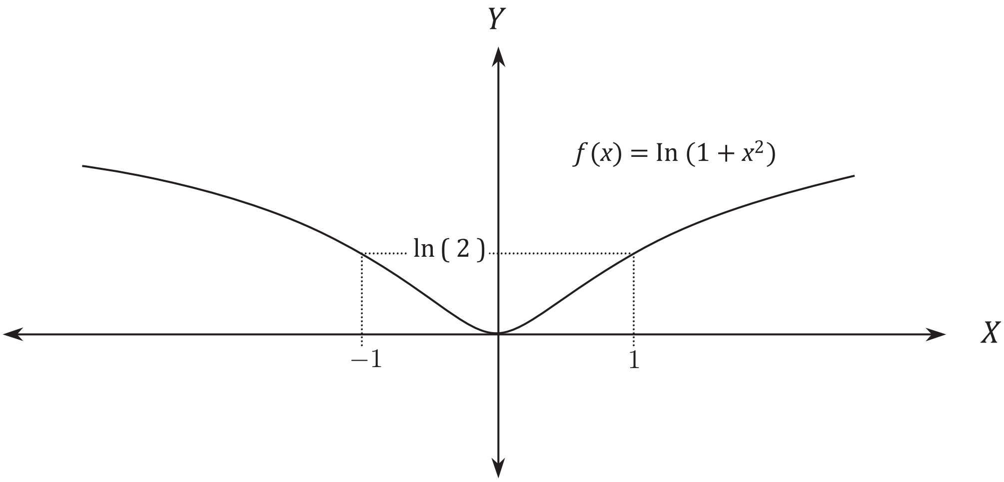
así que los intervalos que debemos considerar son:

$(-\infty, 1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$;

analizamos el comportamiento de $f''$ en cada uno de estos intervalos y tenemos que:

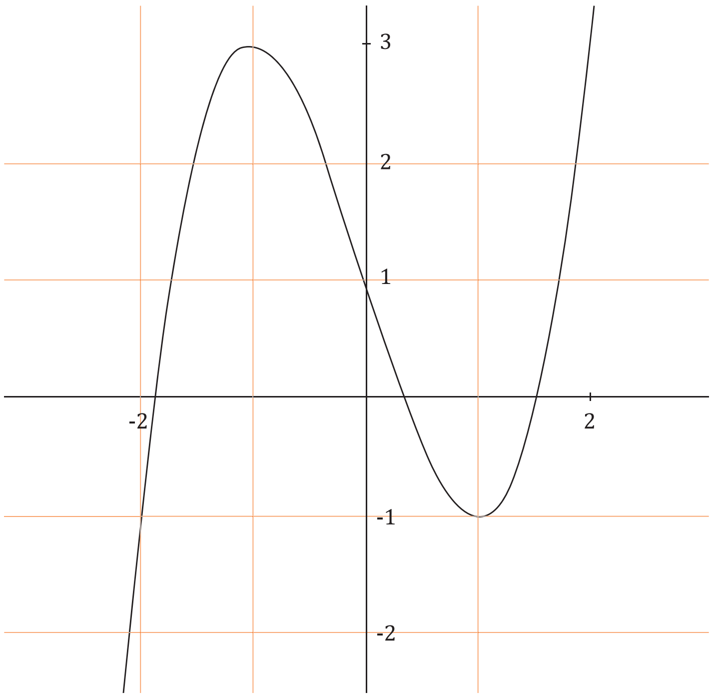
| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $f$ | cóncava hacia abajo | cóncava hacia arriba | cóncava hacia abajo |

Por lo tanto, $(-1, \ln 2)$ y $(1, \ln 2)$ son los puntos de inflexión de $f$ (nótese que en ellos hay un cambio de concavidad).




Ejemplo 37. Sea $f$ definida por $f(x) = x^3 - 3x+1$. Encuentre el número de raíces reales distintas de la ecuación $f(f(x)) = 0$.

Solución. $f'(x) = 3x^2 - 3$ la cual tiene puntos críticos $(-1, 3)$ y $(1, -1)$. Pero $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$. Por lo tanto, los ceros de $f$ están en los intervalos $(-2, -1)$, $(0, 1)$ y $(1, 2)$. Si contamos el número de veces que $f$ pasa por cada intervalo, ésa será la respuesta. De hecho $f$ pasa por $(-2, -1)$ una sola vez (cuando $x < -2$); pasa por $(0, 1)$ tres veces (cuando $-2 < x < -1$, $0 < x < 1$ y $1 < x < 2$) y finalmente pasa por $(1, 2)$ tres veces también. Por lo tanto el número de raíces de la ecuación es 7.



## 5.7.3 Criterio de la *n*–ésima derivada para el extremo relativo de la funcion de una variable

Si la primera derivada de una función $f(x)$ en $x_0$ es $f'(x_0) = 0$, y si el primer valor no cero de derivada en $x_0$ encontrado en la derivación sucesiva es el de la $n$–ésima derivada $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, entonces el valor $f(x_0)$ será:

a) un máximo relativo si $n$ es un número par y $f^{(n)}(x_0) < 0$;
b) un mínimo relativo si $n$ es un número par y $f^{(n)}(x_0) > 0$;
c) un punto de inflexión si $n$ es impar.

Ejemplo 38. Determine por medio del criterio de la $n$–ésima derivada si los puntos críticos de la función $f(x) = (7 - x)^4$ son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión.

Solución. Puesto que $f'(x) = -4(7 - x)^3$ es cero cuando $x = 7$, tomamos $x = 7$ como el número crítico para la prueba, con $f(7) = 0$ como valor de la función.

Por derivación sucesiva obtenemos:

$f''(x) = 12(7 - x)^2$, de modo que $f''(7) = 0$

$f'''(x) = -24(7 - x)$, $f'''(7) = 0$

$f^{(4)}(x) = 24$ $f^{(4)}(7) = 24$

Puesto que 4 es un número par y como $f^{(4)}(7) = 24$ es positivo, concluimos que el punto $(7, 0)$ representa un mínimo relativo.

## EJERCICIO 5.4

1. Demuestre que si $f$ es derivable en $(a, b)$ y $f'(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$, entonces $f$ es creciente en $(a, b)$.

2. Halle los intervalos para los cuales la función $f$ es creciente o decreciente, cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo, si $f$ está definida como:

a. $f(x) = x^3+3x^2 - 9x+1$;
b. $f(x) = x^4+4x^3+5$;
c. $f(x) = 2xe^{-x}$;
d. $f(x) = -x^3+12x+2$;
e. $f(x) = -x^3+3x^2 - 1$;
f. $f(x) = \ln(x)$;
g. $f(x) = |x^2 - 4|$;
h. $f(x) = e^{-x^2/2}$;

i. $f(x) = x^4+1$;

j. $f(x) = 2x+1$;

k. $f(x) = e^{|x|}$;

l. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

3. Halle los máximos locales, mínimos locales y puntos de inflexión de:

a. $f(x) = -x^2+3$;

b. $f(x) = e^x$;

c. $f(x) = x^3 - 3x$;

d. $f(x) = 1/x$;

e. $f(x) = 2xe^{-x}$;

f. $f(x) = |x|$;

g. $f(x) = e^{x^{-2}}$;

h. $f(x) = x^{1/3}$;

i. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$;

j. $f(x) = 10+x^{3/2}$;

k. $f(x) = 2+4x - x^4$;

l. $f(x) = x^3 - 3x^2+3x+7$;

m. $f(x) = x^3 - 3x+3$;

n. $f(x) = |9 - x^2|$.

4. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones y use el criterio de la $n$–ésima derivada para determinar si representan máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión.

a. $f(x) = x^6+5$;

b. $f(x) = (x - 1)^3+16$;

c. $f(x) = (3 - x)^6+7$;

d. $f(x) = (x - 2)^4$;

e. $f(x) = (5 - 2x)^4+8$.

## 5.7.4 Trazado de gráficas

Consideremos funciones cuyo dominio es un intervalo en el cual $f$ es continua y además es derivable excepto posiblemente en un número finito de puntos. En estos casos el procedimiento es:

1. Determinar los intervalos donde $f$ es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo; hallar los puntos críticos y determinar los máximos y mínimos locales.

2. Determinar el comportamiento de $f$ en los valores extremos del dominio; por ejemplo, si $\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R}$, hallar los límites en el infinito.

Ejemplo 39. Bosquejar la gráfica de $f$ definida como $f(x) = x^4 - 4x^3+7$.

Solución. 1. Como $f$ es una función polinómica, $Dm(f) = \mathbb{R}$, $f$ es derivable en todo su dominio. Hallamos $f'(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

Resolvemos la igualdad:

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$
$4x^2(x - 3) = 0$
$x = 0$ ó $x = 3$

Analizamos los signos de $f'$ alrededor de estos puntos y obtenemos: $f'(-1) = -16<0$, $f$ decreciente en $(-\infty, 0)$; $f'(1) = -8<0$, $f$ decreciente en $(0, 3)$; $f'(4) = 64>0$, $f$ creciente en $(3, \infty)$:

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, 3)$ | $(3, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | – | – | + |
| $f$ | decrece | decrece | crece |

La función "cambia" de decreciente a creciente en $x = 3$; por lo tanto $f(3) = -22$ es el mínimo relativo o local y $(3, -22)$ es el punto mínimo.

Hallamos ahora $f''$ e igualamos a cero:

$f''(x) = 12x^2 - 24x$

Resolvemos:

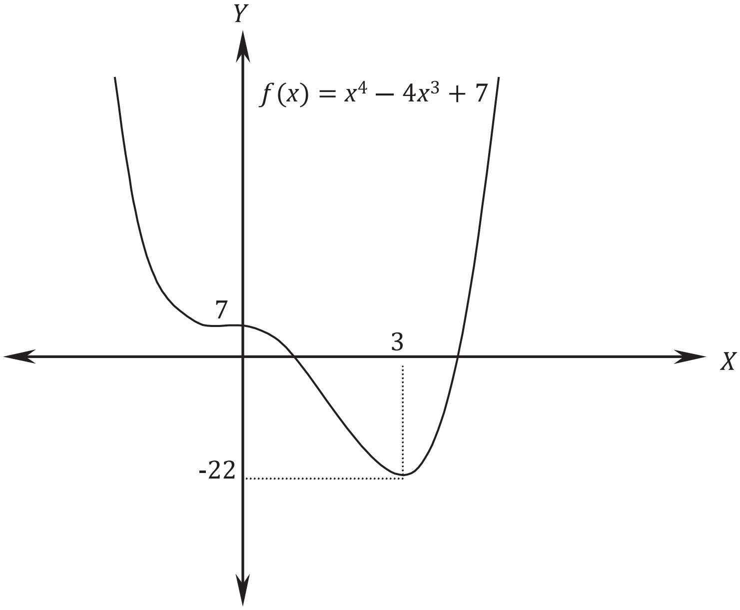
$12x^2 - 24x = 0$
$12x(x - 2) = 0$

de donde:

$x = 0$ ó $x = 2$

Veamos el comportamiento de $f''$ alrededor de estos puntos: $f''(-1) = 36>0$; luego $f$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, 0)$; $f''(1) = -12<0$; luego $f$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(0, 2)$; $f''(3) = 36>0$; luego $f$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(2, \infty)$. La siguiente tabla resume esta información:

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | + | – | + |
| $f$ | cóncava hacia arriba | cóncava hacia abajo | cóncava hacia arriba |




2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$. El corte con el eje $Y$ es el punto (0, 7).

Ejemplo 40. Bosquejar la gráfica de $f$ definida como $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$.

Solución.

1. Como $f$ es una función polinómica, $Dm(f) = \mathbb{R}$, $f$ es continua y $f$ es derivable en todo su dominio. Hallamos $f'(x)$:

   $f'(x) = 3x^2 - 12x$

   para hallar los puntos críticos, resolvemos:

   $3x^2 - 12x = 0$
   $3x(x - 4) = 0$

   de donde:

   $x = 0$ ó $x = 4$

   Así $f(0) = 7$ y $f(4) = -25$. Luego los puntos críticos son (0, 7) y (4, – 25). Ahora analizamos los signos de $f'$, utilizando los números críticos:

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, 4)$ | $(4, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | – | + |
| $f$ | crece | decrece | crece |

De donde podemos concluir que: $f$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(4, \infty)$ y $f$ es decreciente en $(0, 4)$. El punto $(0, 7)$ es un máximo local y el punto $(4, -25)$ es un mínimo local.

Hallamos $f''(x)$:

$$f''(x) = 6x - 12$$

El procedimiento es similar al que se analizó en $f'$. Resolvemos la ecuación:

$$6x - 12 = 0$$
$$x = 2$$

Determinamos los signos de $f''$ en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$:

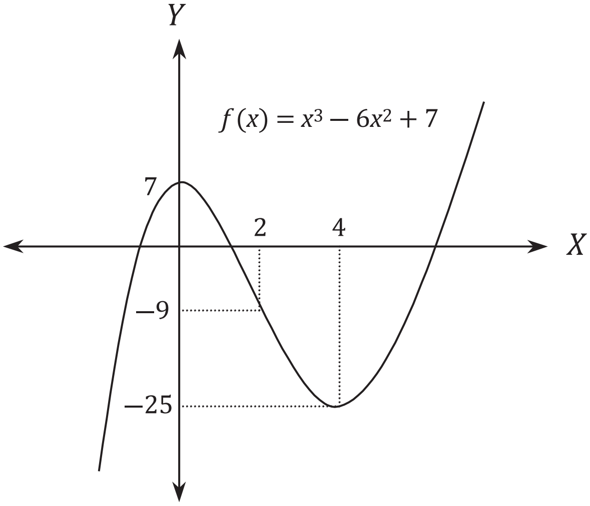
| | $(-\infty, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f''$ | – | – |
| $f$ | cóncava hacia abajo | cóncava hacia arriba |

De donde $f$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$; $f$ es cóncava hacia arriba en $(2, \infty)$. En $x = 2$, $f(2) = -9$ y $(2, -9)$ es un punto de inflexión (hay un cambio de concavidad).

2. Determinamos el comportamiento de $f$ en los extremos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

El corte con el eje $Y$ es el punto $(0, 7)$.



Ejemplo 41. Bosquejar la gráfica de $f$ definida como $f(x) = xe^{-x^2}$.

Solución. El dominio de $f$ es todo $\mathbb{R}$, $f$ es continua (producto de funciones continuas) y derivable en $\mathbb{R}$. Recuérdese que $e^{-x^2}>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego $f(x) = xe^{-x^2}>0$ si $x>0$ y $f(x) = xe^{-x^2}<0$ si $x<0$. Esto significa que la gráfica de $f$ yace debajo del eje $X$ si $x<0$ y estará por encima del eje $X$ si $x>0$. Nótese además que $f(0) = 0$.

Derivamos $f$ y tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2} + x(-2xe^{-x^2}) \\ &= e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}(1-2x^2) \end{aligned}$$

resolvemos $f'(x) = 0$; encontramos los números críticos:

$$\begin{aligned} e^{-x^2}(1-2x^2) &= 0 \\ e^{-x^2}(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x) &= 0 \end{aligned}$$

como $e^{-x^2}\neq 0$, entonces:

$(1-\sqrt{2}x) = 0$ ó $(1+\sqrt{2}x) = 0$, de donde:

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ó $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo tanto, los puntos críticos son $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$, que si simplificamos se convierten, respectivamente, en:

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$

Veamos el comportamiento de $f'$ alrededor de los números críticos. Los intervalos para analizar son:

$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$

En la tabla siguiente se resume el comportamiento de $f'$:

| | $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $f$ | decrece | crece | decrece |

De donde concluimos que: $f$ decrece en $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y también en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$; $f$ es creciente en el intervalo $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Además, el punto crítico $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$ es mínimo local y el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\right)$ es máximo local. ¿Por qué?

Consideremos ahora $f''$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(1-2x^2)+e^{-x^2}(-4x) \\ &= e^{-x^2}(-2x+4x^3)+e^{-x^2}(-4x) \\ &= e^{-x^2}(4x^3-6x) \end{aligned}$$

Resolvemos $f''(x) = 0$; tenemos:

$$\begin{aligned} e^{-x^2}(4x^3-6x) &= 0 \\ e^{-x^2}2x(2x^2-3) &= 0 \\ 2x(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{2}x+\sqrt{3}) &= 0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$x=0,\ x=\sqrt{\frac{3}{2}},\ \text{ó}\ \ x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

cuando:

$$x=0, f(0)=0$$
$$x=\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{3}{2}},$$
$$x=-\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=-\sqrt{\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{3}{2}}$$

Analizamos los signos de $f''$ en los intervalos:

$$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right),\ \left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\ \ \text{y}\ \ \left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$$

Esto arroja como resultado:

| | $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ | $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$ | $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ | $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | cóncava hacia abajo | cóncava hacia arriba | cóncava hacia abajo | cóncava hacia arriba |

De donde obtenemos que:

$f$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$f$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$

$f$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$f$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$

y podemos concluir que los puntos:

$$(0, 0), \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3}{2}}\right) \text{ y } \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

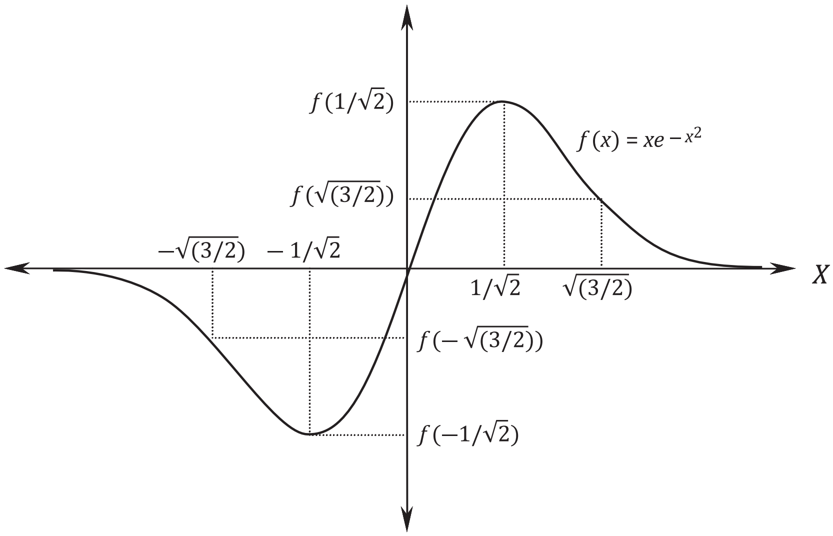
son todos de inflexión (¿por qué?).

Finalmente, veamos el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2xe^{x^2}} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2xe^{x^2}} = 0$

En los dos casos se aplicó la Regla de L'Hôpital. Por lo tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Un bosquejo de la gráfica es:




Nótese que los puntos máximo relativo y mínimo relativo son máximo absoluto y mínimo absoluto respectivamente. Por lo tanto, el recorrido de $f$ está dado por:

$$Rec(f) = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Ejemplo 42. Bosquejar la gráfica de $f$ definida como $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

Solución. Dom($f$) = $[0,\infty)-\{1\}$; $f(0)=0$ (punto de corte con el eje $X$); $f(x)>0$ si $\sqrt{x}-1>0$ (puesto que $\sqrt{x}\geq 0$), es decir cuando $x>1$; $f(x)<0$ si $0<x<1$. Esto significa que la gráfica de $f$ estará por encima del eje $X$ cuando $x>1$ y estará por debajo del eje $X$ cuando $0<x<1$. Por otro lado, $\sqrt{x}>\sqrt{x}-1$ y si $\sqrt{x}-1>0$ (lo que equivale a $x>1$), tendríamos entonces que:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}>1 \text{ para todo } x>1$$

En los alrededores del punto $x=1$, $f$ tiene el siguiente comportamiento:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\infty$$

lo que significa que $x=1$ es una asíntota vertical de $f$.

Hallemos los números críticos de $f$:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)-\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

el $Dom(f')=(0,\infty)-\{1\}$ (es más "pequeño" que el de $f$). La derivada no se anula en ningún valor de $x$. Claramente, la función $f$ no es derivable en 0 ni tampoco en $x=1$ (pues $f$ no está definida en $x=1$); luego los números críticos son $x=0$ y $x=1$, así que los intervalos que debemos considerar son:

$(0,1)$ y $(1,\infty)$

Al examinar los signos de $f'$ tenemos que:

| | $(0,1)$ | $(1,\infty)$ |
|---|---|---|
| $f'$ | − | − |
| $f$ | decrece | decrece |

Por lo tanto, $f$ es decreciente en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

Consideremos ahora $f''$:

$$f''(x) = \frac{2\,\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)^2 + 2\sqrt{x}\,2(\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{[2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^2]^2}$$

que si simplificamos se convierte en:

$f''(x) = \frac{3\sqrt{x}-1}{4x^{3/2}(\sqrt{x}-1)^3}$; haciendo $f''(x) = 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x}-1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Así que los intervalos que debemos considerar para determinar la concavidad de $f$ son:

$\left(0, \frac{1}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{9}, 1\right)$ y $\left(1, \infty\right)$

Al analizar los signos de $f''$ tenemos que:

| | $\left(0, \frac{1}{9}\right)$ | $\left(\frac{1}{9}, 1\right)$ | $\left(1, \infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | + | − | + |
| $f$ | cóncava hacia arriba | cóncava hacia abajo | cóncava hacia arriba |

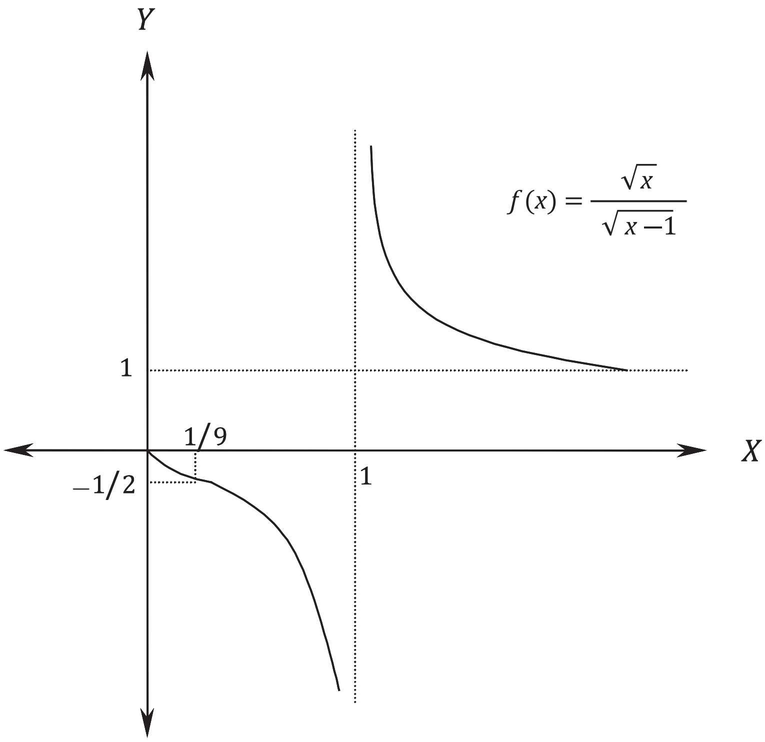
En $x = \frac{1}{9}$, tiene un punto de inflexión y éste está dado por $\left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{2}\right)$. Nótese que $f$ cambia de concavidad en $x = 1$, pero aquí no hay ningún punto de inflexión puesto que $f$ no es continua en $x = 1$.

Finalmente, veamos el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 \end{aligned}$$

Es decir, que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f$.

Un bosquejo de la gráfica es:




## EJERCICIO 5.5

1. Bosqueje la gráfica de la función *f*, definida como:

a. $f(x) = x^3+3x^2-9x+1$;
b. $f(x) = x^4+4x^3+5$;
c. $f(x) = 2xe^{-x}$;
d. $f(x) = -x^3+12x+2$;
e. $f(x) = -x^3+3x^2-1$;
f. $f(x) = \ln(x)$;
g. $f(x) = |x^2-1|$;
h. $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$;
i. $f(x) = x^4+1$;
j. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$;
k. $f(x) = e^{|x|}$;
l. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$;
m. $f(x) = -x^2+1$;
n. $f(x) = x^3-3x$;
o. $f(x) = e^x$;
p. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$;
q. $f(x) = 3 + x^{\frac{3}{2}}$;
r. $f(x) = 4x - x^4$;
s. $f(x) = x\sqrt{x+1}$;
t. $f(x) = e^x - e^{-x}$;
u. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
v. $f(x) = x + \frac{4}{x}$;
w. $f(x) = \frac{4}{1+e^{-x}}$;
x. $f(x) = x^2e^{-x}$;
y. $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$;
z. $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$.

2. Si $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, ¿podemos afirmar que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (a, b)$? Explique su respuesta.

3. Encuentre una función tal que:

   a. $f''(x) = 2x$;

   b. $f'(x) = 2x$ y pasa por el punto $(2, 3)$;

   c. $f'(x) = 2x+5$ y pasa por el punto $(1, -3)$.

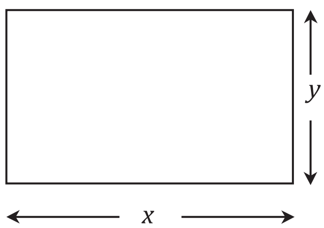
4. Demuestre que si $f$ es derivable en $(a, b)$ y $f'(x)>0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f$ es creciente en $(a, b)$.

## 5.8 Problemas de máximos y mínimos

En problemas de optimización, es decir, donde se requiere hallar un máximo o un mínimo de una función, la variable que se quiere optimizar está en función de otras variables independientes, lo cual origina una función que se denomina función objetivo. Las variables independientes están condicionadas a ciertos valores, o sea, sujetas a restricciones.

Ejemplo 43. Hallar el rectángulo de área máxima cuyo perímetro es de 40 metros.

Solución. El problema es maximizar el área en función de su base y de su altura. Sea $x$ la base y $y$ la altura del rectángulo; de aquí se genera que $\mathfrak{A}(x, y) = x\,y$.




Observemos que si se quiere maximizar esta función sin restricciones para $x$ y para $y$, estas variables pueden tomar valores tan grandes como se quiera y el problema no tendría sentido; pero sujeto a la restricción de que el perímetro sea 40, es razonable preguntarse qué área máxima se puede obtener.

El problema ahora es:

maximizar $\mathfrak{A}(x, y) = xy$ (función objetivo)
sujeto a $2x+2y = 40$(restricción)
$0 \leq x \leq 20$ y $0 \leq y \leq 20$

De la restricción tenemos que $y = 20 - x$; reemplazamos en la función objetivo y tenemos que:

maximizar $\mathfrak{A}(x, y) = A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$ con $0 \leq x \leq 20$.

El problema se reduce a hallar el valor máximo de $\mathfrak{A}$ en el intervalo $[0, 20]$.

Hallamos el máximo local de $A$ en el intervalo $(0, 20)$:

$A'(x) = 20 - 2x = 0$
$x = 10$

Debemos garantizar que en $x = 10$ en efecto hay un máximo. $A''(10) = -2 < 0$, es decir, en $x = 10$ hay un máximo local.

Hallamos los valores $A(0) = 0$, $A(20) = 0$, $A(10) = 100$. El valor máximo de $A$ es 100 y las dimensiones del rectángulo son $x = 10$ (base), $y = 10$ (altura).

La solución de este problema sugiere la siguiente metodología:

## 5.8.1 Metodología

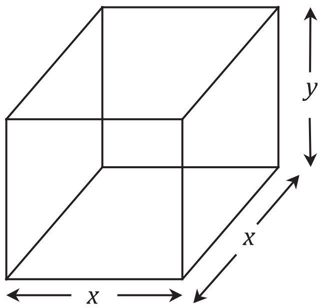
Estos problemas se caracterizan por tener que maximizar o minimizar una función objetivo de dos o más variables, sujeta a una o más restricciones en términos de estas variables independientes.

Las restricciones nos permiten expresar las variables independientes en función de una sola de éstas. Reemplazamos en la función objetivo y el problema se reduce a calcular el máximo o el mínimo de la función de una variable.

Ejemplo 44. Se va a construir un depósito en forma de paralelepípedo rectangular, de base cuadrada y volumen igual a 144 metros cúbicos. El material de las caras cuadradas cuesta \$2.000 el metro cuadrado y el de las caras laterales, \$3.000 el metro cuadrado. Determinar las dimensiones del depósito para que su costo sea mínimo.

Solución. Si $x$ es el lado de la base (cuadrada) y $y$ la altura del paralelepípedo tenemos:

volumen: $V = x^2 y = 144$




El área total, que denotaremos como $A_T$, es la suma del área de las dos caras cuadradas con el área de las cuatro caras laterales:

$$A_T = 2x^2+4xy$$

El costo total del material en función de las dimensiones del paralelepípedo es:

$\mathfrak{C}(x, y) = 2.000(2x^2)+3.000(4xy) = 4.000x^2 + 12.000xy$

El problema queda inicialmente planteado así:

minimizar: $\mathfrak{C}(x, y) = 4.000x^2+12.000xy$
sujeto a: $x^2 y = 144$, $x>0$ y $y>0$.

Si $x^2 y = 144$, tenemos que $y = \frac{144}{x^2}$; reemplazamos en la función objetivo:
$\mathfrak{C}(x, y) = C(x) = 4.000x^2 + 12.000x\,\frac{144}{x^2}$, es decir,

$$C(x) = 4.000x^2 + \frac{1'728.000}{x}$$

El problema se reduce a calcular el valor mínimo de la función:

$$C(x) = 4.000x^2 + \frac{1'728.000}{x}, \quad x > 0$$

Derivamos la función $C$:

$$C'(x) = 8.000x - \frac{1'728.000}{x^2} = 0$$

De donde:

$8.000x^3 = 1'728.000$
$x^3 = 216$
$x = 6$

Debemos garantizar que en $x = 6$ hay un mínimo:

$C''(x) = 8.000 + 3'456.000x^{-3}$

reemplazamos $x = 6$:

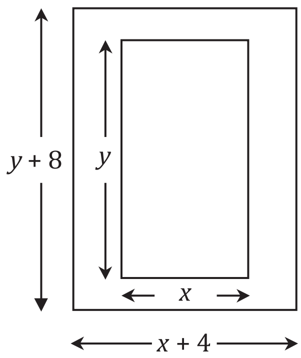
$C''(6) = 8.000 + 3'456.00(6)^{-3} > 0$

es decir, en $x = 6$ hay un mínimo. Como $y = \frac{144}{x^2}$, reemplazamos y se tiene que $y = \frac{144}{36} = 4$. El costo mínimo del material es:

$$C(6) = 4.000(6^2) + \frac{1'728.000}{6} = \$432.000$$

Ejemplo 45. Se quiere imprimir hojas sueltas con márgenes de 4 centímetros en las partes inferior y superior, y de 2 centímetros en cada uno de los lados. Si el contenido escrito es de 500 centímetros cuadrados, ¿qué dimensiones debe tener la hoja para que su área sea mínima?

Solución. Si denominamos $x$ a la base, y $y$ a la altura del rectángulo con contenido escrito, tenemos:




Área de contenido: $xy = 500$
Base de la hoja: $x + 4$
Altura de la hoja: $y + 8$
Área de la hoja: $(x+4)(y+8)$

El problema inicialmente planteado queda:

minimizar: $\mathfrak{A}(x, y) = (x+4)(y+8)$
sujeto a: $xy = 500$, $x>0$, $y>0$

Despejamos $y$ en la restricción; se tiene: $y = 500/x$; reemplazamos en la función objetivo y obtenemos:

$$\mathfrak{A}(x, y) = A(x) = (x+4)\left(\frac{500}{x} + 8\right) = 532 + 2.000x^{-1} + 8x$$

El problema se reduce a calcular el valor mínimo de la función:

$A(x) = 532+2.000x^{-1} +8x$

Derivamos:

$$A'(x) = -\frac{2000}{x^2} + 8 = 0$$

de donde:

$8x^2 = 2.000$
$x = \pm\sqrt{250}$

De acuerdo a la restricción se considera sólo $x = \sqrt{250}$. Debemos garantizar que en $x = \sqrt{250}$ hay un mínimo. Para ello hallamos $A''$ y luego la evaluamos en $x = \sqrt{250}$:

$A''(x) = 4.000x^{-3}$
luego:

$A''(\sqrt{250}) = 4.000(\sqrt{250})^{-3} > 0$;

Es decir, en $x = \sqrt{250}$ hay un mínimo. Como $y = \frac{500}{x}$, reemplazamos $x = \sqrt{250}$ y obtenemos:

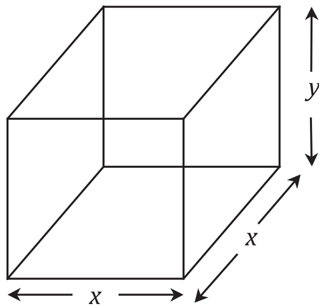
$$y = \frac{500}{\sqrt{250}} = \frac{500\sqrt{250}}{250} = 2\sqrt{250} = 10\sqrt{10}$$

Con lo cual tendríamos que el área mínima es:

$$A(\sqrt{250}) = 532 + 2.000\frac{1}{\sqrt{250}} + 8(\sqrt{250}) = 532 + 16\sqrt{250}$$

Ejemplo 46. Se ha solicitado un carpintero para construir una caja abierta, con base cuadrada. Los lados de la caja costarán US $3 por $m^2$ y la base costará US $4 por $m^2$. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de mayor volumen que pueda ser construida por US $48?

Solución.




El volumen de la caja (función objetivo) está dado por:

volumen = $x^2y$

y el costo total $CT$ (restricción) está dado por:

$CT = 4x^2+12xy = 48$

El problema inicialmente planteado queda:

maximizar: $V(x, y) = x^2y$
sujeto a: $4x^2 + 12xy = 48, x > 0, y > 0$

Despejamos $y$ de la restricción y tenemos:

$$y = \frac{48 - 4x^2}{12x}$$

reemplazamos $y$ en la función objetivo:

$$\mathfrak{B}(x, y) = V(x) = x^2 \cdot \left(\frac{48 - 4x^2}{12x}\right) = x \cdot \left(\frac{48 - 4x^2}{12}\right) = 4x - \frac{1}{3}x^3$$

El problema se reduce a calcular el valor máximo de la función:

$$V(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$$

derivando e igualando a cero, obtenemos:

$V'(x) = 4 - x^2 = 0$

De donde:

$x = 2$ ó $x = -2$

pero sólo consideramos $x = 2$. Cuando $x = 2$, $y = \frac{48-4(2^2)}{12(2)} = \frac{4}{3}$. Ahora, $V''(x) = -2x$ y $V''(2) = -4 < 0$, lo que indica que el volumen es máximo cuando $x = 2$, el cual está dado por:

$$V(2) = 4(2) - \frac{1}{3}(2)^3 = \frac{16}{3}\text{m}^3$$

Ejemplo 47. Una compañía alquila buses modernos de 50 puestos a grupos de 35 o más personas. Si un grupo tiene exactamente 35 personas, cada persona paga US $60. En grupos mayores, la tarifa de todos se reduce en un dólar por cada persona que sobrepase las 35. Determinar el tamaño del grupo para el cual los ingresos de la compañía serán mayores.

Solución. El ingreso $R$ está dado por:

$R$ = (número de personas) × (tarifa por persona)

Por cada $x$ dólares que se reduce la tarifa, el número de personas por grupo es de $35+x$. Así que el ingreso está dado por:

$R(x) = (35+x)(60-x) = 2100+25x - x^2$

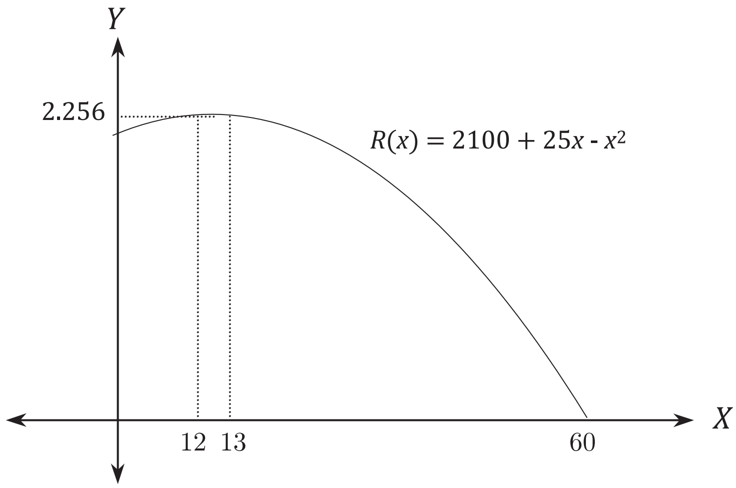
En este caso, el problema es:

maximizar: $R(x) = 2100 + 25x - x^2$
sujeto a: $x \geq 0, x \in \mathbb{Z}$.

Nótese que en este caso, $R$ es una función de variable discreta (su dominio está formado por los números enteros positivos). Sin embargo, para aplicar la derivada asumiremos, en principio, que $x \in \mathbb{R}$ y $R_1(x) = 2100+25x - x^2$; además, $\text{Dm}(R) \subset \text{Dm}(R_1)$ y así:

$R_1'(x) = 25 - 2x = 0$, de donde $x = 12{,}5$

En este punto, $R_1$ alcanza su valor máximo (la gráfica de $R_1$ es una parábola que abre hacia abajo, como se aprecia en la figura), pero en nuestro problema original, 12,5 no está en el dominio de $R$.



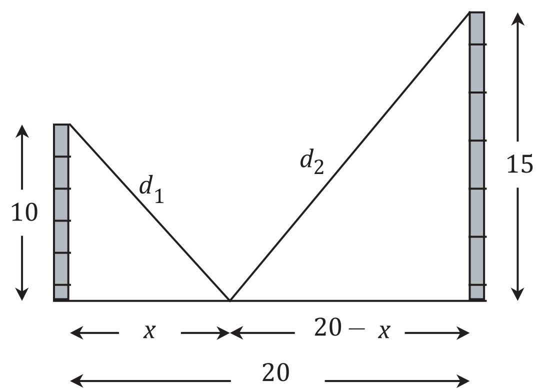

Como $R_1$ es creciente en $(-\infty, 12{,}5)$ y decreciente en $(12{,}5, \infty)$, podemos afirmar que el valor máximo de $R$ se encuentra en un vecino entero próximo de 12,5, a saber, en $x = 12$ ó en $x = 13$. En este caso tendríamos:

$R(12) = 2.256$ y $R(13) = 2.256$.

Entonces, para alcanzar el ingreso máximo el grupo puede ser de 35+12 = 47 personas ó 35+13 = 48 personas. Es decir, con cualquiera de estos dos tamaños el ingreso máximo es el mismo: US $2.256.

Ejemplo 48. Dos torres sobre terreno horizontal distan entre sí 20 metros. Las torres miden de altura 10 metros y 15 metros, respectivamente (véase figura más abajo). Se desea unir la parte superior de ambas torres por medio de un cable que pasa por una polea en el suelo entre las dos torres. ¿Dónde debe fijarse la polea en el suelo para usar la menor longitud de cable?

Solución. Sea $x$ la distancia a la primera torre donde debe fijarse el cable (ver figura). El problema consiste en minimizar la función $d = d_1 + d_2$.



Aplicamos el teorema de Pitágoras a cada uno de los triángulos rectángulos:

$$d = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{225 + (20 - x)^2}$$

donde $0 \leq x \leq 20$. Derivamos $d$:

$$d' = \frac{x}{\sqrt{100 + x^2}} + \frac{-(20 - x)}{\sqrt{225 + (20 - x)^2}}$$

Igualamos a cero y resolvemos:

$$\frac{x}{\sqrt{100+x^2}} - \frac{20-x}{\sqrt{225+(20-x)^2}} = 0$$

$$\frac{x^2}{100 + x^2} = \frac{(20 - x)^2}{225 + (20 - x)^2}$$

$x^2\ 225+(20 - x)^2 = (20 - x)^2\ (100+x^2)$

$225x^2+400x^2 - 40x^3+x^4 = 40.000 - 4.000x+100x^2+400x^2 - 40x^3+x^4$

$125\ x^2+4.000\ x - 40.000 = 0$

$$x = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 + 1280}}{2} = \frac{-32 \pm \sqrt{2304}}{2}$$

de donde consideramos sólo el valor (positivo) $x = \frac{-32+48}{2} = 8$, de acuerdo al dominio de $d$. Simplificamos $d''$ y podemos ver que:

$$d'' = \frac{x^2 - 20x + 625 - 40x + x^2}{\sqrt{625 - 40x + x^2}} + \frac{x^2 - 20x - 100 - x^2}{\sqrt{100 + x^2}}$$

de donde $d''(8) \approx 0{,}079 > 0$, lo que indica que $d$ tiene su valor mínimo en $x = 8$.

## 5.9 Algunas aplicaciones en economía y administración

Sea $x$ el número de unidades producidas y vendidas, y $p$ el precio unitario, si $I$ son los ingresos, $I = p\,x$.

Si $C(x)$ es el costo de producir $x$ unidades, $C(x)/x$ es el costo promedio por unidad; $U(x) = I - C$ representa la utilidad.

## 5.9.1 Marginales

Si $\Delta x = 1$,

$\frac{\Delta I}{\Delta x}$ representa la variación del ingreso al vender una unidad adicional.

$\frac{\Delta C}{\Delta x}$ representa la variación del costo al producir una unidad adicional.

$\frac{\Delta U}{\Delta x}$ representa la variación de la utilidad al producir y vender una unidad adicional

Si aproximamos $\frac{\Delta I}{\Delta x}, \frac{\Delta C}{\Delta x}, \frac{\Delta U}{\Delta x}$ mediante la derivada, estas derivadas $\frac{dI}{dx}, \frac{dC}{dx}, \frac{dU}{dx}$, representan el **ingreso marginal, el costo marginal y la utilidad marginal.**

Ejemplo 49. La utilidad obtenida al vender $x$ unidades de un producto está dada por $U(x) = 0{,}002x^2+200x$. Calcular:

a. El incremento exacto de la utilidad al incrementar las ventas de 100 a 101 unidades.

b. Aproximar el anterior cálculo, utilizando la utilidad marginal, para $x = 100$.

Solución.

a. $U(101) = 0{,}002(101)^2 + 200(101) = 20.220{,}402$
$U(100) = 0{,}002(100)^2 + 200(100) = 20.020$
Como $\Delta x = 1$, $\frac{\Delta U}{\Delta x} = 20.220{,}402 - 20.020 = 200{,}402$.

b. $\frac{dU}{dx} = 0{,}004x + 200$, para $x = 100$ la utilidad marginal es: $\frac{dU}{dx} = 200{,}4$; ésta es una buena aproximación de 200,402 que es el valor exacto.

Ejemplo 50. Una pequeña empresa manufacturera puede vender todos los artículos que produce a un precio de \$6 (en miles) cada uno. El costo de producir $x$ artículos a la semana (en miles) está dado por:

$C(x) = 1.000+6x - 0{,}003x^2+10^{-6}x^3$

¿Qué valor de $x$ maximiza las utilidades? ¿Cuál es esta utilidad?

Solución. El ingreso producido por la venta de $x$ artículos a \$6 cada uno es $R(x) = 6x$. La utilidad por semana es:

$$\begin{aligned} U(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 6x - (1.000 + 6x - 0{,}0003x^2 + 10^{-6}\,x^3) \\ &= -\,1.000 + 0{,}003x^2 - 10^{-6}\,x^3 \end{aligned}$$

El problema es maximizar: $U(x) = -1.000 + 0{,}0003x^2 - 10^{-6}\,x^3$, $x > 0$.

derivamos $U$ y tenemos:

$U(x) = 0{,}006x - 3(10^{-6})x^2 = 0$

Resolvemos:

$0{,}003x(2 - 0{,}001x) = 0$

Tenemos entonces:

$x = 0$ ó $x = 2.000$

Tenemos en cuenta $x = 2.000$, que está en el dominio de $x$. Debemos garantizar que en $x = 2.000$ hay un máximo. Para ello, hallamos $U''$ y evaluamos en $x = 2.000$:

$U''(x) = 0{,}006 - 6 \cdot 10^{-6}\,x$

de donde:

$U''(2.000) = -\,0.006 < 0$

Es decir, en $x = 2.000$ hay máximo.

La utilidad máxima es:

$$\begin{aligned} U(2.000) &= -\,1000 + 0{,}003(2.000)^2 - 10^{-6}\,(2.000)^3 \\ &= 3.000 \text{ (en miles)} \end{aligned}$$

Es decir, la utilidad máxima semanal es de \$3’000.000.

Ejemplo 51. Un cultivador de frutas estima que si se siembran 60 naranjos, la producción media por árbol será de 400 naranjas, la cual disminuirá en 4 naranjas por árbol si se siembra un árbol adicional en la misma área. ¿Cuántos árboles debería sembrar para maximizar la producción total?

**Solución.** Sea $x$ el número de árboles adicionales y $N(x)$ la producción:

Luego: $N(x) = (\text{número de naranjas}) \times (\text{número de árboles})$

$N(x) = (400 - 4x)(60 + x)$

$N(x) = 24.000 + 400x - 240x - 4x^2$

$N(x) = 24.000 + 160x - 4x^2$

$N(x) = -4x^2 + 160x + 24.000$

$N(x) = -x^2 + 40x + 6.000$

Hallamos los números críticos:

$N'(x) = -2x + 40 = 0$

$N'(x) = -2x = -40 \Rightarrow x = 20$ árboles adicionales

Ahora $N''(20) = -2 < 0$.

Luego en $x = 20$ la función $N(x)$ alcanza un máximo.

Por lo tanto, el número de árboles que maximizará la producción total es:

$60+x = 60+20 = 80$

**Ejemplo 52.** Un librero puede comprarle a una editorial un libro de matemática a un costo de US \$6 por unidad. El librero ofrece el libro a un precio de US \$30 por ejemplar, y a este precio ha vendido 400 libros por mes. El librero planea bajar el precio para estimular las ventas y calcula que por cada reducción de US \$2 en el precio de venta al público, se venderán 40 libros más en el mes. ¿A qué precio debería el librero vender el libro para generar la máxima utilidad posible?

**Solución.** Sea $x$ el número de reducciones de 2 dólares en el precio y $P(x)$, la correspondiente función de utilidad.

$P(x) = (\text{número de libros}) \times (\text{precio})$

$P(x) = (400+40x)(30 - 2x - 6) = (400+40x)(24 - 2x)$

$P(x) = -80x^2+160x+9.600 = 80(-x^2+2x+120)$

Hallamos los números críticos:

$P'(x) = -160x+160 = 0$

$P'(x) = -160x = -160$

$160x = 160 \Rightarrow x = 1$ reducción de 2 dólares

Aplicamos el criterio de la segunda derivada:

$P''(1) = -160<0$

$\therefore$ El libro debe venderse a $30 - 2x = 30 - 2(1) = 28$ dólares para obtener la mayor utilidad posible.

Ahora por otro lado, para que la función de utilidad sea positiva es importante tener en cuenta el intervalo $0 \leq x \leq 12$ que aparece al resolver la desigualdad:

$80(-x^2+2x+120) \geq 0$

y si evaluamos la función de utilidad en los puntos de frontera que son $x = 0$, $x = 12$ y el punto crítico $x = 1$, obtenemos:

$P(0) = 9600$, $P(1) = 9680$, $P(12) = 0$

Luego $x = 1$ nos produce el máximo absoluto en este intervalo.

## 5.9.2 Elasticidad de precio de la demanda

En la práctica se tiene que la reducción de $p$, el precio unitario de venta, incrementa el número de unidades vendidas. En este punto surgen dos problemas básicos:

i. ¿Hasta qué punto es conveniente bajar el precio unitario?

ii. ¿Qué tan sensible es la demanda a las variaciones de $p$?

Para resolver estas preguntas tenemos que el número de unidades $x$ que se están dispuestas a comprar a un precio $p$ origina la **función de demanda** $p = f(x)$. Si existe una variación del precio unitario $\Delta p$, tenemos:

$\dfrac{\Delta p}{p}100\%$ es la variación porcentual del precio, y

$\dfrac{\Delta x}{x}100\%$ es la variación porcentual de la demanda.

Un buen indicador es calcular cómo cambia la variación porcentual de la demanda con respecto a la variación porcentual del precio:

$$\frac{\frac{\Delta x}{x}\,100\%}{\frac{\Delta p}{p}\,100\%} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{p}{x}}{\frac{\Delta p}{\Delta x}}$$

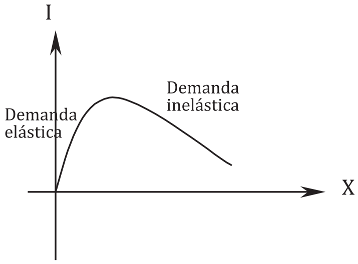
aproximamos $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ a $\frac{dp}{dx}$, y obtenemos el valor $\eta = \frac{\frac{p}{x}}{\frac{dp}{dx}}$.

$\eta$ (la letra eta en el alfabeto griego) se denomina elasticidad de precio de la demanda; $\eta<0$ porque $p = f(x)$ es una función decreciente.

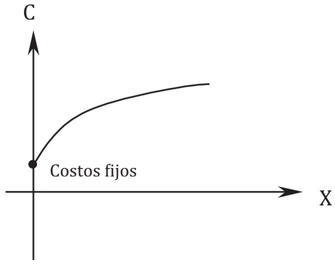
## 5.9.3 Análisis de $\eta$

1. Si $|\eta|>1$, se dice que la demanda es elástica. Significa que una disminución en el precio unitario está acompañada por un incremento de las ventas suficiente para que los ingresos totales aumenten.

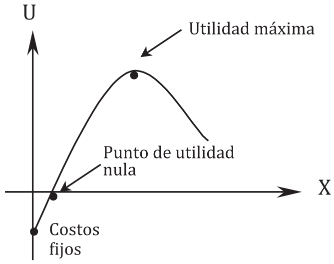
2. Si $|\eta|<1$, se dice que la demanda es inelástica. Significa que una disminución en el precio unitario está acompañada por un incremento de las ventas que no es suficiente para que los ingresos totales aumenten; es decir, los ingresos totales disminuyen.



función de ingresos



función de costos



función de utilidad

Ejemplo 53. La demanda de computadores viene dada por la ecuación $p = \sqrt{(3400 - x^2)}$, donde $x$ computadores pueden venderse a un precio de $p$ cada uno. Calcular la elasticidad de la demanda cuando $p = 50$ y determinar qué tipo de elasticidad se tiene.

Solución. $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2}(3400 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{3400-x^2}}$

Como $\eta = \frac{\frac{p}{x}}{\frac{dp}{dx}}$, entonces:

$$\eta = \frac{\frac{\sqrt{3400-x^2}}{x}}{\frac{-x}{\sqrt{3400-x^2}}} = \frac{3400-x^2}{-x^2}$$

$$= 1 - \frac{3400}{x^2}$$

Como $p = 50$, reemplazamos en la ecuación de demanda:

$50 = \sqrt{(3400 - x^2)}$
$2500 = 3400 - x^2$
$-900 = -x^2$

De donde $x = 30$ ó $x = -30$, pero como $x$ representa el número de computadores, entonces se descarta el valor negativo y se toma $x = 30$.

Así $\eta = 1 - \frac{3400}{(30)^2}$ de donde $\eta = -2{,}77$; por lo tanto, la demanda es elástica por ser $|\eta|>1$; es decir, $|-2{,}77| = 2{,}77>1$.

Ejemplo 54. La relación de demanda de teléfonos es $p = 100 - x^2$, donde $x$ teléfonos pueden venderse a un precio de $p$ cada uno. Determine la elasticidad de la demanda cuando $p = 64$ y determine qué tipo de elasticidad se tiene.

Solución. $\frac{dp}{dx} = -2x$. Como $\eta = \frac{\frac{p}{x}}{\frac{dp}{dx}}$, entonces:

$$\eta = \frac{\frac{100-x^2}{x}}{(-2x)} = \frac{100-x^2}{-2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{50}{x^2}$$

Como $p = 64$ entonces,

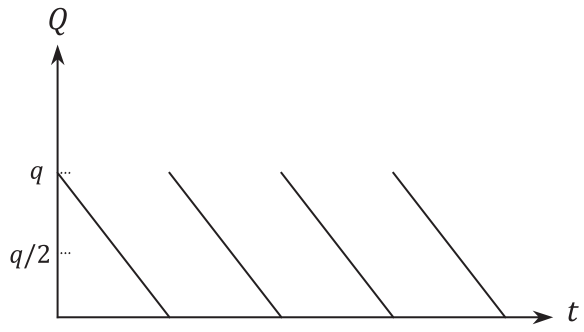
$64 = 100 - x^2$
$-36 = -x^2$,

de donde $x = 6$ ó $x = -6$, pero como $x$ representa el número de teléfonos, entonces se toma solamente $x = 6$. Así $\eta = \frac{1}{2} - \frac{50}{(6)^2}$ de donde $\eta = -0{,}88$. Como $|\eta| = 0{,}88<1$, por lo tanto la demanda es inelástica.

## 5.9.4 Problema de inventarios

Ejemplo 55. Una compañía fabrica y vende anualmente 10.000 unidades de un producto. Las ventas se distribuyen de manera uniforme en todo el año. En cada proceso de producción se fabrican el mismo número de unidades. A este número se lo denomina cantidad económica de pedido (C.E.P.). El costo de producción de cada unidad es \$20 y los costos de inventario (seguros, intereses, almacenamiento, etc.) se estiman en 10% del valor del inventario promedio.

Los costos de preparación por proceso de producción son de \$40. La compañía desea determinar el número de unidades que debe fabricar en cada proceso de producción (C.E.P.) con el fin de minimizar la suma de los costos anuales de preparación y de inventario.




Solución. Sea $q$ el número de unidades del proceso de producción. Como las ventas se distribuyen a una tasa uniforme, se supone que los inventarios varían a un ritmo constante de $q$ a 0 entre cada proceso de producción. Por lo tanto, el inventario promedio es $q/2$ unidades. Los costos de producción son de \$20 por unidad, por lo cual el valor promedio del inventario es $20\frac{q}{2} = 10q$.

Los costos de inventario C.I. son el 10% de $10q$.

$$\text{C.I.} = 0{,}10(10q) = q$$

El número de corridas de producción por año es $10.000/q$; por lo tanto los costos anuales de preparación C.P. son:

$$\text{C. P.} = 40\left(\frac{10.000}{q}\right)$$

Los costos anuales de inventario y de preparación $C$ son

$$C(q) = \text{C. I.} + \text{C. P.} = q + \frac{400.000}{q}, \;\; q > 0$$

El problema es minimizar $C(q) = q + \frac{400.000}{q}, \;\; q > 0$.

$$C'(q) = 1 - \frac{400.000}{q^2} = \frac{q^2 - 400.000}{q^2}$$

haciendo $C'(q) = 0$, tenemos:

$q^2 - 400.000 = 0$

de donde

$q = \pm\sqrt{400.000} = \pm 632{,}5$

Como $q>0$ se considera sólo $q = 632{,}5$.

Se debe garantizar que en $q$ = 632,5 hay un mínimo. Calculemos $C''$:

$$C''(q) = \frac{800.000}{q^3}$$

evaluamos $C''(632,5)$:

$$C''(632,5)>0$$

es decir, $q$ = 632,5 es el número de unidades por pedido que minimiza los costos anuales de inventario y en este caso $C(632,5)$ = 1264,9110.

Si el número de unidades debe ser un número entero, para calcular el número de unidades por pedido debemos considerar $q_1$ = 632 y $q_2$ = 633, con lo cual $C(632)$ = 1264,9113 y $C(633)$ = 1264.9115. En este caso la solución óptima es $q$ = 632.

## EJERCICIO 5.6

1. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima cuyo perímetro es de $M$ metros.

2. Encuentre las dimensiones de una caja de base cuadrada y sin tapa, de un volumen de 4 metros cúbicos, de tal manera que el material utilizado sea mínimo.

3. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que pueda inscribirse en:

   a. una semicircunferencia de radio igual a 5 centímetros;

   b. una circunferencia de radio dado $R$;

   c. una circunferencia de radio 6;

   d. un triángulo equilátero de lado conocido $L$;

   e. la región limitada por el eje $X$ y la curva $y = 16 - x^2$.

4. Halle el perímetro mínimo de un rectángulo de 400 metros cuadrados de área.

5. Halle las dimensiones del cono de volumen máximo que se genera al hacer girar un triángulo rectángulo de hipotenusa 5 alrededor de uno de los catetos.

6. Divida 120 en dos partes tales que el producto de una de las partes por el cuadrado de la otra sea:

   a. máximo;
   b. mínimo.

7. Halle dos números positivos tales que:

   a. su producto sea 20 y la suma de sus cuadrados sea mínima;

   b. sumen 20 y su producto sea máximo.

8. Encuentre el valor mínimo de la suma entre un número y el cuadrado de su inverso multiplicativo.

9. Una varilla de 170 centímetros de longitud se corta en dos partes formando un cuadrado y un rectángulo. Para el rectángulo la base es el doble de la altura. Calcule el área mínima formada por las dos figuras.

10. Un terreno de forma rectangular tiene un muro de piedra en uno de sus lados, ¿Qué área máxima se puede cercar con 1.200 metros de cerca?

11. Halle tres números positivos tales que sumen 30; el primero más el doble del segundo, más el triple del tercero sumen 60; y el producto de los tres números sea máximo.

12. Con una hoja cuadrada se quiere hacer una caja abierta del mayor volumen posible, recortando un cuadrado en cada uno de sus cuatro vértices. Halle el lado de los cuadrados recortados y el volumen máximo si la hoja tiene:

   a. un área dada $A$;

   b. 20 centímetros de lado.

13. Una página ha de contener 300 centímetros cuadrados de impresos con 2 centímetros de margen arriba y abajo, y 3 centímetros a los lados. Encuentre las dimensiones de la hoja para un área mínima.

14. Un alambre de 120 centímetros de longitud se divide en dos partes y con cada una de ellas se forma:

   a. un cuadrado y una circunferencia;

   b. un cuadrado y un triángulo equilátero.

   ¿Cuánto debe medir cada parte para que la suma de las áreas sea:

   i. máxima?

   ii. mínima?

15. Se tiene un presupuesto de \$48.000 para construir una caja abierta, con base cuadrada. Los lados de la caja cuestan \$3.000 por metro cuadrado y la base cuesta \$4.000 por metro cuadrado. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que su volumen sea máximo?

16. Un fabricante vende $x$ artículos por semana a un precio $p = 20.000 - x$ pesos, siendo su costo $y = 10.000x + 200.000$ pesos.

   a. ¿Cuántos artículos debe producir para que la utilidad sea máxima?

   b. Halle la utilidad marginal para $x = 500$.

   c. Halle $\eta$, para $x = 200$. Explique el resultado y compruébelo.

17. Halle las dimensiones y el área total mínima de un tanque de forma cilíndrica sin tapa cuya capacidad es de 3.000 litros.

18. Un cilindro circular recto con tapa tiene un área de $100\pi$ centímetros cuadrados. Halle las dimensiones para que su volumen sea máximo.

19. Un cono circular recto tiene un volumen de $120\pi$ centímetros cúbicos. ¿Qué dimensiones debe tener para que su área lateral sea mínima?

20. Una jarra de vidrio de forma cilíndrica tiene una tapa metálica. Si el metal cuesta, por unidad de área, tres veces más que el vidrio, encuentre la relación entre el radio y la altura, $r/h$, de tal manera que para una capacidad dada el costo sea mínimo.

21. Halle el trapecio isósceles de área máxima que pueda inscribirse en una semicircunferencia:

    a. de 20 centímetros de radio.

    b. del radio $R$ dado.

22. Resuelva el problema anterior, si se considera que el trapecio es rectangular.

23. El interior de una pista de carreras de 400 metros consta de un rectángulo con dos semicírculos en dos lados opuestos. Encuentre las dimensiones para las cuales el área del rectángulo es máxima.

24. Se tiene un triángulo rectángulo de hipotenusa igual a 1. Halle:

    a. su área máxima;

    b. el valor de los catetos $a$ y $b$ que maximice $2a+b$.

25. Una fábrica posee una capacidad de producción de 250 artículos por semana. La experiencia muestra que el precio $p$ en función del número de artículos $x$ está dado por $p = 100 - 2x$. Si el costo de producción de $x$ artículos es $\$(600+10x+x^2)$:

    a. ¿Cuántos artículos deben fabricarse cada semana para obtener una utilidad máxima?

    b. Halle el ingreso máximo.

    c. Halle la elasticidad de la demanda para $x = 20$ y para $x = 40$. Explique cada resultado y compruébelo.

    d. Halle la utilidad marginal y el ingreso marginal para $x = 25$.

26. En una empresa la utilidad en función de la publicidad esta dada por $U(x) = 130+80x - x^2$ ($x$ en miles). Halle la utilidad máxima y a qué inversión en publicidad corresponde.

27. En una fábrica el costo diario de producción de $x$ sillas de lujo talladas está dado por $C(x) = 50.000 + 40.000x$. La función de demanda es $p = 80.000 - 100x$.

    a. ¿Cuántas sillas deben producirse diariamente para:

    i. maximizar la ganancia? ii. maximizar el ingreso?

    b. Halle el ingreso marginal y la utilidad marginal para $x = 100$.

    c. Halle un valor de $x$ tal que:

    i. $\eta < 0$; ii. $\eta > 0$.

    Explique cada resultado.

28. Minimizar el costo de construcción de un depósito abierto de base rectangular de largo igual al doble de su ancho y cuyo volumen es 72 metros cúbicos. El costo es $50.000 por cada metro cuadrado para la base y $25.000 por metro cuadrado para los costados.

29. El costo total diario de producción de $x$ grabadoras es $1/3\ x^2 + 32x + 40$, y éstas se venden a $62 cada una. ¿Qué producción diaria daría una ganancia máxima? (Suponer que la compañía puede vender todos los aparatos que hace).

30. El costo de levantar un edificio de $x$ pisos se puede modelar con una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, en donde $a$, $b$ y $c$ son constantes. $c$ representa costos fijos como costos del terreno, $b$ representa un costo que es el mismo para cada piso, tales como paredes interiores, ventanas, recubrimiento de pisos, y $ax^2$ representa costos como elementos estructurales, que se incrementan con el cuadrado del número de pisos. Calcule el valor que minimiza el costo promedio por piso. Demuestre que cuando el costo del terreno se incrementa, este valor óptimo de $x$ crece.

31. Un agente de viajes ofrece un plan de vacaciones a grupos sobre las siguientes bases: para grupos de tamaño de hasta 50, la tarifa es de US $400 por persona; para grupos más grandes, por cada viajero que exceda de 50, la tarifa se reduce a US $2 para cada uno de los viajeros. Determine el tamaño necesario del grupo para que el agente de viajes maximice el ingreso.

32. Una empresa de alquiler de TV obtiene una utilidad promedio de 15 dólares por cliente, si sirve a 1.000 clientes o menos. Si el servicio se presta a más de 1.000 clientes, por cada cliente que exceda de ese número la utilidad promedio disminuye en 1 centavo para cada uno de los clientes. ¿Cuántos clientes proporcionan la utilidad máxima?

33. Para un producto, la función de demanda es $p = \frac{50}{\sqrt{q}}$ y la función de costo promedio es $c = 0{,}50 + (1000/q)$. Determine el precio que maximiza las utilidades y la producción. A este nivel, demuestre que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

34. Una compañía alquila buses modernos de 100 puestos a grupos de 70 o más personas. Si un grupo tiene exactamente 70 personas, cada persona paga $80.000. En grupos mayores la tarifa de todos se reduce en $1.000 por cada persona que sobrepase las 70. Determine el tamaño del grupo para el cual los ingresos de la compañía serían máximos, y el máximo ingreso.

35. Determine las dimensiones del cilindro de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio $R$ dado.

36. Halle las dimensiones del cono circular recto de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de radio $R$ dado.

37. Dos torres sobre terreno horizontal distan entre sí 30 metros, y miden 15 y 20 metros de altura. Se desea unir la parte superior de ambas torres por medio de un cable que pasa por una polea en el suelo entre las dos torres. ¿Dónde debe fijarse la polea en el suelo para usar la menor longitud de cable?

38. Se quiere obtener un embudo con la mayor capacidad posible, a partir de un papel de filtro de forma circular de 7,6 cm de radio. Halle el radio de la base del embudo que cumple con estas condiciones.

39. Un pomar tiene 30 árboles por hectárea y la producción promedio es de 400 manzanas por árbol. Por cada árbol adicional plantado por hectárea, la producción promedio por árbol se reduce en aproximadamente 10 manzanas. ¿Cuántos árboles sembrados por hectárea maximizan la cosecha de manzanas?

40. La función de costo total de un fabricante esta dada por:

$$C\,(q) = \frac{q^2}{4} + 3q + 400$$

donde $c$ es el costo total de producir $q$ unidades. ¿Para qué nivel de producción será el costo promedio por unidad un mínimo? ¿Cuál es este mínimo?

41. La ecuación de demanda para el producto es $p = \frac{80-x}{4}$, en donde $x$ es el número de unidades y $p$ es el precio por unidad. Halle:

   a. La demanda que maximiza el ingreso y el ingreso máximo.

   b. La elasticidad de la demanda para $x$ = 20 y para $x$ = 60. Explique cada resultado y compruébelo.

42. La compañía TV Cable tiene en estos momentos 3.500 suscriptores que pagan una cuota mensual de US $8. Una encuesta revela que habrá 50 suscriptores más por cada US $0,010 que se disminuyan en la cuota a todos. ¿A qué tarifa se lograrían ingresos máximos y cuántos suscriptores habrá a ese nivel?

43. Supóngase que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 400 - 2q$ y la función de costos promedio $\tilde{c} = 0{,}2q + 4 + \frac{400}{q}$, en donde $q$ es el número de unidades, y tanto $p$ como $c$ están expresadas en dólares por unidad.

    a. Determine el nivel de producción en que maximiza las utilidades.
    b. Determine el precio al cual se dan las utilidades máximas.
    c. Determine las utilidades máximas.
    d. Si por disposición del gobierno se marca un impuesto de $22 por unidad al monopolista, ¿cuál es el nuevo precio para la maximización de utilidades?

44. Las funciones de costo y de demanda de una empresa son $C(x) = 5x$ y $p = 25 - 2x$ , respectivamente.

    a. Encuentre el nivel de producción que maximizaría las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la máxima utilidad?
    b. Si se impone un impuesto de $t$ por cada unidad y la empresa lo carga en su costo, encuentre el nivel de producción que maximiza las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la máxima utilidad?
    c. Determine el impuesto por unidad $t$ que debe imponerse para obtener un máximo impuesto sobre la renta.

45. Una compañía obtiene una utilidad de $5 por cada artículo de su producto que vende. Si gasta $A$ dólares por semana en publicidad, el número de artículos que vende por semana está dado por:

    $x = 2000(1 - e^{-kA})$ en donde $k = 0{,}001$

    Determine el valor de $A$ que maximiza la utilidad neta.

46. Un fabricante vende sacos de alta calidad a una cadena de tiendas. La ecuación de la demanda para esos sacos es $p = 400 - 50q$, donde $p$ es el precio de venta (en dólares por saco) y $q$ es la demanda (en miles de sacos). Si la función de costo marginal del fabricante está dada por $\frac{dc}{dq} = \frac{800}{q+5}$, demuestre que existe una utilidad máxima y determine el número de sacos que deben venderse para obtener esta utilidad máxima.

47. La función de costo total de un fabricante está dada por $c = \frac{q^2}{4} + 3q + 400$, donde $c$ es el costo total de producir $q$ unidades. ¿Para qué nivel de producción será el costo promedio mínimo? ¿Cuál es este mínimo?

48. La función de demanda para el producto de un monopolista es: $p = \sqrt{600 - q}$. Si el monopolista quiere producir por lo menos 100 unidades pero no más de 300, ¿cuántas unidades debe producir para maximizar el ingreso total?

49. La compañía exportadora e importadora Dixie es la única representante en el país de la motocicleta Excalibur de 250 $cm^3$. La gerencia estima que la demanda de estas motocicletas

es de 10.000 por año y que se venderán en a razón uniforme durante todo el año. El costo de cada pedido de embarque es de \$10.000 y el costo anual de almacenamiento de cada motocicleta es de \$200.

La gerencia de Dixie tiene el siguiente problema: si ordena demasiadas unidades, se desperdicia un espacio de almacenamiento valioso y se incrementan los costos de almacenamiento. Por otro lado, si realiza pedidos con demasiada frecuencia, se incrementan los costos por realización de pedidos. ¿De qué tamaño debe ser cada pedido y con qué frecuencia deben realizarse de modo que los costos de surtido y almacenamiento sean mínimos?

50. El valor presente del precio de mercado de un edificio de oficinas está dado por:

    $P(t) = 300000\, e^{-0{,}09\sqrt{t}/2} \qquad 0 \le t \le 10$

    Hallar el valor presente óptimo del precio de mercado del edificio.

## Variables relacionadas

En muchas de las aplicaciones aparecen dos variables $x$ e $y$ como funciones derivables de otra variable $t$, o sea $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Además $x$ e $y$ pueden estar relacionadas entre sí por medio de una ecuación como:

$$x^2 - y^3 - 2x + 7y^2 - 2 = 0.$$

Derivamos con respecto a $t$ y se obtiene una ecuación en la que aparecen las razones de cambio respecto a $t$:

$$2x\frac{dx}{dt} - 3y^2\frac{dy}{dt} - 2\frac{dx}{dt} + 14y\frac{dy}{dt} = 0.$$

Las derivadas $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ se llaman variables relacionadas, ya que están vinculadas o relacionadas por medio de una ecuación. Tal ecuación puede usarse para evaluar una de las derivadas cuando se conoce la otra.

Ejemplo 56. Si $x$ e $y$ son funciones derivables de $t$, relacionadas por la ecuación $y = x^2+3$, hallar $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 1$ y $\frac{dx}{dt} = 2$.

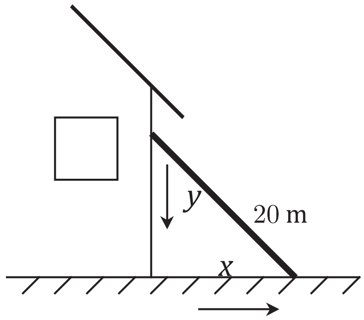
Solución. Derivamos la ecuación dada $y = x^2+3$ con respecto a $t$; tenemos:

$$\frac{d}{dt}(y) = \frac{d}{dt}(x^2+3)$$
$$= 2x\frac{dx}{dt};$$

luego cuando $x = 1$ y $\frac{dx}{dt} = 2$, entonces $\frac{dy}{dt} = 2(1)(2) = 4$.

Ejemplo 57. Una escalera de 20 metros de largo está apoyada contra la pared de un edificio. La base de la escalera se desliza horizontalmente a razón de 2 m/s. ¿Con qué rapidez resbala el otro extremo de la escalera cuando se encuentra a 16 metros del suelo?

Solución. Sea $x$ el desplazamiento horizontal de la escalera e $y$ el desplazamiento vertical. Debemos hallar $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 16$; por lo tanto necesitamos expresar $\frac{dy}{dt}$ en términos de $x$.




Como $x$ aumenta a razón de 2 m/s , tenemos que $\frac{dx}{dt} = 2\text{m/s}$ (la razón es positiva debido a que $x$ crece). Aplicamos el teorema de Pitágoras; podemos relacionar las variables $y$ y $x$:

$x^2+y^2 = 20^2$.

Expresamos $\frac{dy}{dt}$ en términos de $x$; derivamos implícitamente:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0; \qquad (1)$$

de donde:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}.$$

También se tiene que $x^2+y^2 = 400$, de donde:

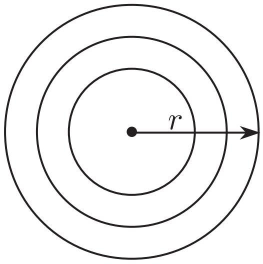
$$y = \sqrt{400 - x^2};$$

cuando $x = 16$, $y = 12$, y así tendríamos que:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{16}{12}(2) = \frac{-8}{3}\text{m/s}.$$

Ejemplo 58. Se arroja una piedra a un estanque de agua en calma, dando lugar a ondas en forma de círculos concéntricos. Si cada onda se aleja del centro a una velocidad de 1 dm/s, ¿a qué velocidad está creciendo la superficie total del agua perturbada al cabo de 4 segundos?

Solución.




Sea $r$ el radio de la onda mayor. El área de este círculo está dada por:

$A = \pi r^2$;

entonces:

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$.

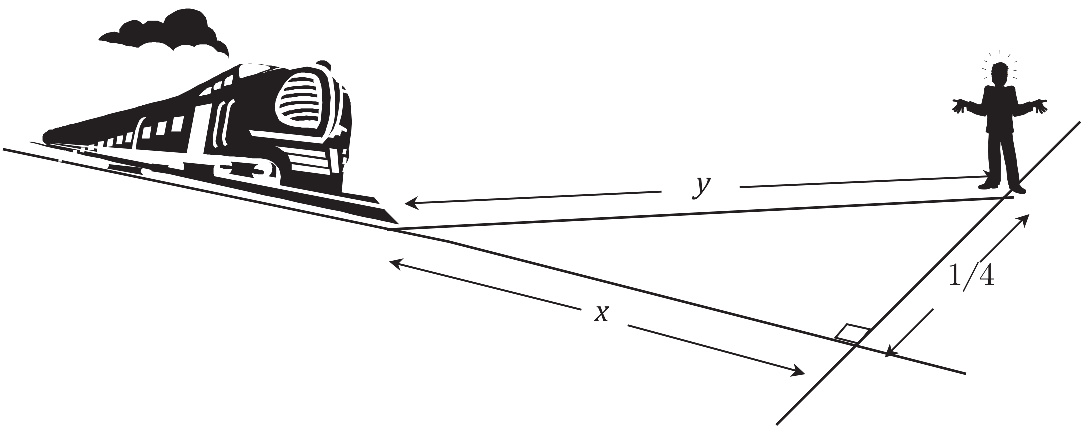
Como el radio de una onda crece a razón de 1dm/s, entonces $\frac{dr}{dt} = 1$. Por lo tanto, en $t = 4$ segundos, el radio es de $r = 4$; de donde:

$\frac{dA}{dt} = 2\pi(4\text{dm})(1\text{dm/s}) = 8\pi\text{dm}^2/\text{s}$.

El área total del agua perturbada al cabo de 4 s está creciendo a razón de $8\pi$ dm$^2$/s.

Ejemplo 59. Supóngase que una persona permanece en una carretera recta a $\frac{1}{4}$ km de una carrilera que cruza la carretera en ángulo recto. Si un tren circula a la velocidad constante de 80 k/h, ¿a qué razón está cambiando la distancia entre el observador y la máquina, cuando la máquina está a $\frac{1}{2}$ km pasando el cruce?

Solución.



Si $x$ representa la distancia del tren al cruce y $y$ la distancia del tren a la persona, y si la persona está a 1/4 kilómetros del cruce, tenemos que:

$y^2 = x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2.$

Sabemos que $\frac{dx}{dt} = 80\text{km/h}$, entonces debemos hallar $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = \frac{1}{2}\text{km}$. Como:

$y^2 = x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2,$

al derivar con respecto a $t$, tenemos:

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 0, \text{ entonces:}$$

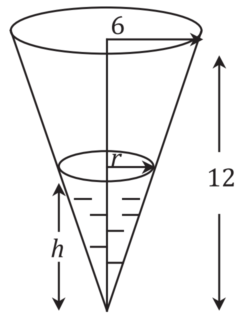
$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt}.$$

Si $x = \frac{1}{2}$ entonces $y = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Por lo tanto:

$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{4}}(80) \approx 71.6 \text{ km/h}.$

Ejemplo 60. Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular recto de 12 decímetros (dm) de alto y 6 decímetros de radio en la base. Si se suministra agua al tanque a razón de 10 dm³ por minuto, ¿cuál será la rapidez de cambio del nivel del agua cuando la profundidad es de 3 dm?

Solución.




Sabemos que $\frac{dV}{dt} = 10 \text{ dm}^3/\text{min}$; debemos encontrar $\frac{dh}{dt}$ cuando $h = 3$ dm. El volumen $V$ de agua en el tanque que corresponde a una profundidad de $h$ es:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Ahora por semejanza de triángulos:

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{12},$$

entonces $r = \frac{h}{2}$; luego reemplazando este valor en $V$, se tiene que:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3;$$

ahora derivamos con respecto a $t$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt},$$

de donde despejamos $\frac{dh}{dt}$, y tenemos:

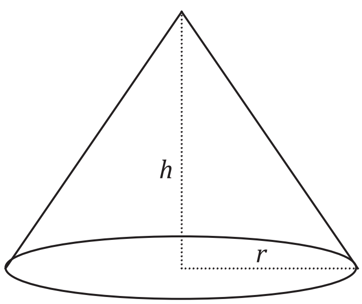
$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt};$$

ahora como $h = 3$ y $\frac{dV}{dt} = 10\ \text{dm}^3/\text{min}$, al sustituir estos valores en esta última ecuación, se tiene que:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(9)}(10) = 1{,}41\ \text{dm/min}.$$

Ejemplo 61. De un tubo sale arena a razón de 16 dm3/s. Si la arena forma en el suelo una pirámide cónica cuya altura es siempre $\frac{1}{4}$ del diámetro de la base, ¿con qué rapidez aumenta la pirámide cuando tiene 4 dm de altura?

Solución.




Tenemos que $\frac{dV}{dt} = 16\text{dm}^3/\text{s}$; debemos hallar $\frac{dh}{dt}$ cuando $h = 4$ dm.

El volumen de un cono está dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

pero $h$ es $\frac{1}{4}$ del diámetro $(2r)$; es decir:

$$h = \frac{1}{4}(2r) = \frac{1}{2}r,$$

de donde:

$$r = 2h;$$

al sustituir este valor en la expresión de $V$, se obtiene:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi(2h)^2 h = \tfrac{4\pi}{3}h^3,$$

derivamos $V$ con respecto a $t$ y se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt}\\ &= \frac{12}{3}\pi h^2\,\frac{dh}{dt} = 4\pi h^2\,\frac{dh}{dt},\end{aligned}$$

como $\frac{dV}{dt} = 16\ \ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$

$16 = 4\pi h^2\,\frac{dh}{dt}$,

de donde:

$\frac{dh}{dt} = \frac{16}{4\pi h^2} = \frac{4}{\pi h^2};$

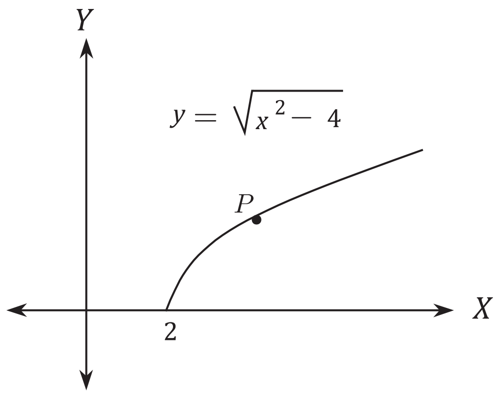
cuando $h = 4$, se tiene que:

$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi} \approx 0{,}07958 \quad \mathrm{dm/s}.$

Ejemplo 62. Una partícula $P$ se mueve a lo largo de la curva $y = \sqrt{x^2 - 4}$ con $x \geq 2$, de modo que la abscisa de $P$ aumenta a razón de 5 unidades por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta la ordenada de $P$ cuando $x = 3$?

Solución. Tenemos que $\frac{dx}{dt} = 5$ unidades/s. Debemos hallar $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 3$.

Como $y = \sqrt{x^2 - 4}$, se tiene que:




$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-4}}(2x)\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\frac{dx}{dt}$$

como $\frac{dx}{dt} = 5$, entonces:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5x}{\sqrt{x^2-4}},$$

cuando $x = 3$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{5(3)}{\sqrt{3^2-4}}\\ &= \frac{15}{\sqrt{5}} \approx 6{,}7082 \text{ unidades/s.}\end{aligned}$$

## EJERCICIO 5.7

1. Una escalera de 10 metros de largo está apoyada contra la pared de un edificio, y alcanza una altura de 9 metros. La parte superior de la escalera se desliza verticalmente a razón de 0,5 m/s.

    a. Exprese la distancia entre la pared y la base de la escalera al cabo de $t$ segundos.

    b. Encuentre la distancia entre la pared y la base de la escalera al cabo de 6 segundos.

    c. ¿En cuánto tiempo se encuentra la base de la escalera a 7 metros de la pared?

2. Se arroja una piedra a un estanque de agua en reposo. Se forman ondas a manera de círculos concéntricos. Cada onda se aleja del centro a una velocidad de $A$ m/s.

   a. Determine el área de la superficie del agua perturbada al cabo de $t$ segundos.

   b. Determine el área al cabo de 3 segundos, si $A = 2$ m/s.

   c. ¿En cuánto tiempo el área será de 40π m2, si $A = 80$ cm/s?

3. Dos ciudades $A$ y $B$ se encuentran a una distancia de 60 y 80 kilómetros de otra ciudad $C$. Las trayectorias $AC$ y $BC$ son perpendiculares y dos ciclistas parten simultáneamente de $A$ y $B$ en dirección hacia $C$, con velocidades de 20 km/h y 25 km/h.

   a. ¿A qué distancia se encuentran inicialmente los ciclistas?

   b. ¿A qué distancia se encuentran los ciclistas $t$ horas después?

   c. ¿A qué distancia se encuentran al cabo de 2 horas?

4. Resuelva el problema anterior para el caso en que los ciclistas viajen en direcciones contrarias.

5. Un depósito tiene forma de cono circular recto de 6 m de altura y 2 m de radio en la base. Si se vierte agua al depósito a razón de 50 litros por minuto (1 litro equivale a 1 $dm^3$), resolver cuál es la altura del nivel del agua en función del tiempo, si:

   a. el vértice del cono está hacia abajo;

   b. el vértice del cono está hacia arriba.

   c. En cada caso, ¿qué altura alcanza el nivel del agua cuando su volumen es de $1{,}5\pi$ m3?

6. Un globo se infla a razón de 500 cm3 por segundo.

   a. Halle $\frac{dr}{dt}$ en función del radio.

   b. ¿En cuántos minutos el volumen es de 3 $m^3$?

7. El radio de un círculo crece a razón de 2 metros por minuto. Halle la razón de cambio del área cuando:

   a. $r = 6$ metros;
   
   b. $r = 24$ metros.

8. Sobre un montón cónico cae arena a razón de 10 cm3 por minuto. El diámetro de la base del cono es tres veces su altura. A qué ritmo está cambiando la altura del montón cuando su altura es:

   a. 15 cm.
   
   b. $x$ cm.

9. Todas las aristas de un cubo están creciendo 3 cm/s. ¿Con qué rapidez cambia el volumen cuando cada arista tiene:

   a. 1 cm? b. 10 cm? c. $x$ cm?

10. Un punto se mueve sobre la trayectoria de $y = x^2$ con una rapidez $\frac{dx}{dt} = 2\text{cm/min}$. Halle $\frac{dy}{dt}$ cuando:

    a. $x = 0$. b. $x = 3$.

## 5.10 Resumen

Si $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene una de las formas indeterminadas 0/0, ó ∞/∞ en $x = c$, se resuelve mediante la Regla de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

También se resuelven mediante la Regla de L'Hôpital formas indeterminadas $0.\infty$, $1^{\infty}$,$0^{0}$, que quedan transformadas algebraicamente en 0/0, ó ∞/∞.

**Criterio de la primera derivada**

Si $f$ es continua en $c$, y $c$ es un número crítico de $f$ y $c$ está en el intervalo $(a, b)$ en el cual $f$ es derivable excepto posiblemente en $c$. El comportamiento (del signo) de la derivada en este intervalo cumple alguna de las siguientes características:

1. $f'(x)>0$ para todo $x$ con $a<x<c$ y $f'(x)<0$ para todo $x$ con $c<x<b$; es decir, cambia de **creciente** a **decreciente** en $x = c$, entonces $f(c)$ **es un máximo relativo (o local)** de $f$ sobre $(a, b)$

2. $f'(x)<0$ para todo $x$ con $a<x<c$ y $f'(x)>0$ para todo $x$ con $c<x<b$; es decir, $f$ cambia de **decreciente** a **creciente** en $x = c$, entonces $f(c)$ **es un mínimo relativo** (o local) de $f$ sobre $(a, b)$.

3. $f'(x)>0$ ó $f'(x)<0$) para todo $x$ con $a<x<c$, y $f'(x)>0$ ó $f'(x)<0$) para todo $x$ con $c<x<b$; es decir, $f$ no cambia de signo, entonces $f(c)$ no es mínimo ni máximo relativo.

**Criterio de la segunda derivada**

Sea $f$ una función tal que $f'(c) = 0$ y $f''$ existe en un intervalo abierto que contiene a $c$.

1. Si $f''(c)>0$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo o local.

2. Si $f''(c)<0$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo o local.

3. Si $f''(c) = 0$ entonces el criterio no decide; sin embargo observe que si $f''(c) = 0$, se tiene que $(c, f'(c))$ es un punto crítico de $f'$.

Para trazar la gráfica de una función el procedimiento es:

se determinan los intervalos donde la función es creciente resolviendo $f'(x)>0$ y donde es decreciernte resolviendo $f'(x)<0$.

se determinan los intervalos donde es cóncava hacia arriba resolviendo $f''(x)>0$ y donde es cóncava hacia abajo resolviendo $f''(x)<0$.

se determinan los puntos críticos donde $f'(c)=0$ ó $f'(c)$ no está definida.

se aplica el criterio de la primera derivada o la segunda derivada para determinar máximos y mínimos relativos

se determinan los puntos de inflexión donde $f''(x) = 0$, ó $f(x)$ no está definida.

## GLOSARIO

Máximo absoluto: El mayor valor de la función en todo su dominio.

Mínimo absoluto: El menor valor de la función en todo su dominio.

Máximo relativo: El mayor valor de la función en un intervalo del dominio.

Mínimo relativo: El menor valor de la función en un intervalo del dominio.

Punto crítico: La pareja ordenada $(c, f(c))$ tal que $f'(c) = 0$, ó $f'(c)$ no está definida.

Función creciente: Para todo $x_1, x_2$ del dominio de $f$ se tiene que $x_1 < x_2$ implica que

$f(x_1) < f(x_2)$; es decir $f'(x) > 0$.

Función decreciente: Para todo $x_1, x_2$ del dominio de $f$ se tiene que $x_1 < x_2$ implica que

$f(x_1) > f(x_2)$; es decir $f'(x) < 0$.

Cóncava hacia arriba: Si $f'$ es creciente para todo $x$ en el dominio de $f$; en este caso

$f''(x)>0$.

Cóncava hacia abajo: Si $f'$ es decreciente para todo $x$ en el dominio de $f$; en este caso

$f''(x) < 0$.

Puntos de inflexión: Puntos en los que la función cambia de concavidad.

# Capítulo 6

# La integral

## 6.1 Introducción

En muchos problemas prácticos en los que pretendemos formular un modelo matemático de la forma $y = f(x)$ que lo explique, conocemos la forma de su variación; es decir, tenemos una expresión para:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Ejemplo 1. Si $y = f(t)$ representa el desplazamiento de una partícula con respecto al tiempo, podemos encontrar diferentes fórmulas para describir el comportamiento de su velocidad. Por ejemplo, si la velocidad es constante, tenemos que $\frac{dy}{dt} = k$; si la velocidad es directamente proporcional al desplazamiento, como en caída libre, tenemos $\frac{dy}{dt} = kx$ ($k$ es la constante de proporcionalidad).

Ejemplo 2. En caída libre la aceleración es constante y corresponde a la variación de la velocidad con respecto al tiempo $a(t) = \frac{dv}{dt} = g$, donde $g$ es la gravedad.

Ejemplo 3. Cuando se conocen el costo marginal y el ingreso marginal, es posible encontrar las funciones de costo e ingreso (análisis de marginalidad).

Ejemplo 4. En estudios de crecimiento de población se mide la variación con respecto al tiempo y con base en esta variación se construyen los modelos poblacionales. Un caso es cuando la variación de la población en el momento $t$ es directamente proporcional a la población en ese momento $p(t)$; es decir, $\frac{dp}{dt} = kp$.

**Objetivos**

1. Manejar los diferentes métodos de integración.
2. Plantear modelos matemáticos con utilización de ecuaciones diferenciales y resolverlos (cuando ello sea posible).

## 6.2 Diferenciales

Sea $f$ una función definida como $y = f(x)$ derivable en $x$. Hasta ahora, hemos usado $\frac{dy}{dx}$ como un solo símbolo para indicar $f'(x)$.

En términos geométricos, sabemos que $f'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva de $f$ en el punto $P(x, f(x))$. Tiene sentido considerar para cualquier $\Delta x \neq 0$, el triángulo $PQR$ (ver figura) y $f'(x)$ como el cociente:

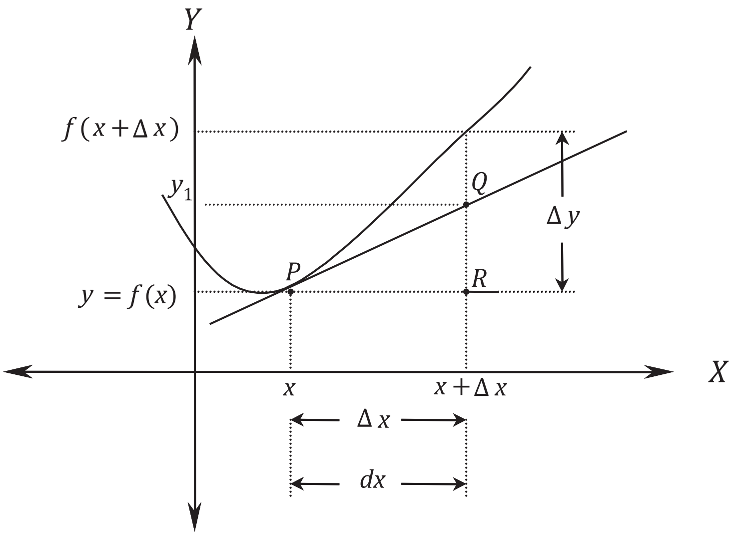
$$\frac{y_1 - y}{\Delta x}$$

Al número real $y_1 - y$ se lo denomina la diferencial de $y$, y se nota como $dy$; al número real $\Delta x$ se lo denomina diferencial de $x$, y se nota como $dx$. Observe que:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad dy = f'(x)dx$$

Además $dy$ es una función que depende de $x$ y de $dx$. Como $\Delta y$ también depende de $x$ y $\Delta x$, podemos establecer una relación entre $dy$ y $\Delta y$: cuando $\Delta x$ es cercano a 0, $dy$ es una buena aproximación de $\Delta y$.

$$dy \approx \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$




**Definición 1.** Sea $y = f(x)$ derivable en $x$, entonces:

a. $dx$, la diferencial de la variable independiente $x$, es un incremento arbitrario de $x$; esto es, $dx = \Delta x$.

b. $dy$, la diferencial de la variable dependiente $y$, es función de $x$ y $dx$; está definida por $dy = f'(x)\,dx$.

c. Si $\Delta x = dx = 0$, entonces $dy = 0$.

**Ejemplo 5.** Sea $f$ definida como $y = f(x) = x^3$. Calcular $\Delta y$ y $dy$, cuando $x = 2$ y $\Delta x = dx = 0.1$.

**Solución.** $dy = f'(2) \cdot (0,1) = 3(2^2)(0,1) = 1,2.$ y $\Delta y = f(2,1) - f(2) = 1,261.$

**Ejemplo 6.** Utilizar la diferencial para aproximar $\sqrt[3]{65}$.

**Solución.** Definimos $f$ como $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$, y hacemos $x = 64$ y $\Delta x = dx = 1$. Como $dy \approx x\ \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, tenemos que: $f(x+\Delta x) \approx x\ dy + f(x) = f'(x) \cdot dx + f(x)$.

Reemplazamos y tenemos:

$$f(65) \approx f'(64)\cdot(1) + (64) = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{64^2}} + \sqrt[3]{64}$$

$$= \frac{1}{48} + 4 = 4{,}0208333$$

El lector puede comparar este valor con el ofrecido por una calculadora.

Ejemplo 7. Dadas $y = f(x)$, $x = g(t)$ funciones derivables con $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ y $g'(t) = \frac{dx}{dt}$, calcular $y'$en función de $t$.

Solución. $y = f(g(t))$; por la regla de la cadena sabemos que $y' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$. Utilizando diferenciales tenemos que:

$$dy = f'(x)\, dx \quad \text{y} \quad dx = g'(t)\, dt$$

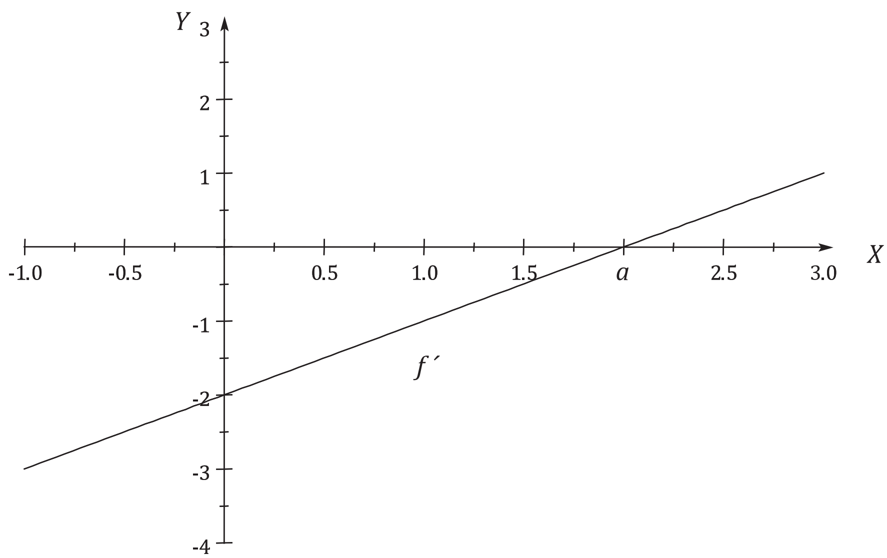
Es decir:

$$\begin{aligned} dy &= f'(x) \cdot g'(t) \cdot dt \\ \frac{dy}{dt} &= f'(x) \cdot g'(t) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

## 6.3 Análisis gráfico de las funciones *f'* y *f''*

Recordemos que $f'$ y $f''$son funciones de variable real. Nuestra intención es la siguiente: dada la gráfica de $f'$ bosquejar la gráfica de $f$.

Ejemplo 8. Dada la gráfica de $f'$ bosquejar la gráfica de $f$.



De acuerdo a la gráfica de $f'$ podemos concluir que:

1. $f$ es continua en todos los reales porque $f'$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$.

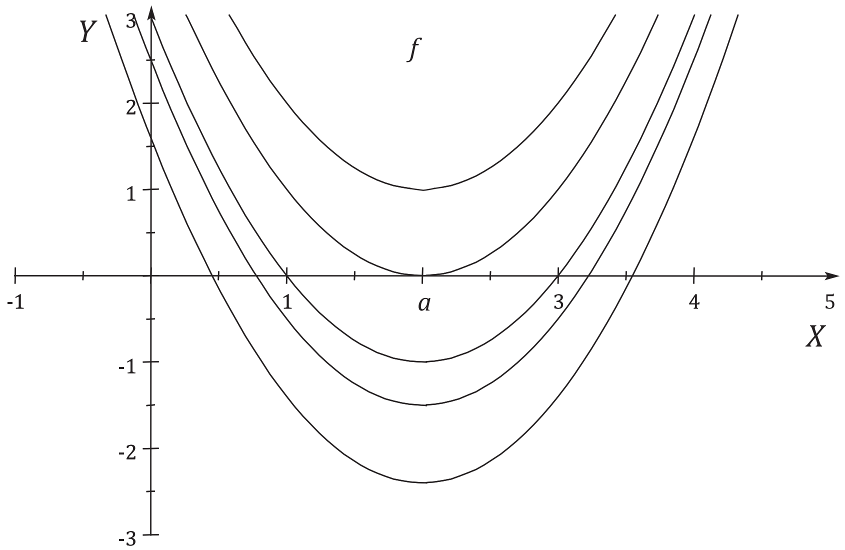
2. $f$ es decreciente en $(-\infty, a)$ por ser $f'(x) < 0$.

3. $f$ es creciente en $(a, \infty)$, por ser $f'(x) > 0$.

4. $f'(x) = 0$ en el punto $(a, f(a))$; como consecuencia de 2 y 3, $(a, f(a))$ es un mínimo local.

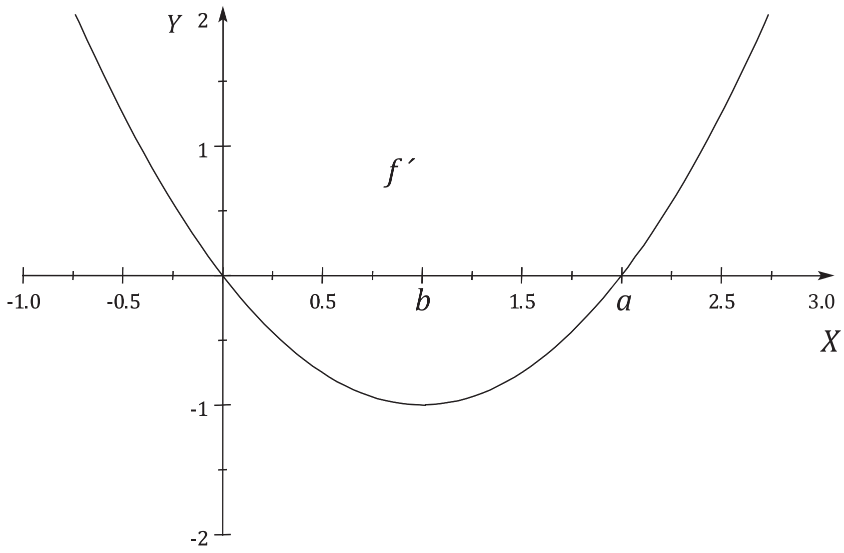
5. $f$ es cóncava hacia arriba por ser $f'$ una función creciente.

6. Recordemos que la concavidad en un punto de la gráfica está dado por la segunda derivada calculada en el punto. Como $f'$ es una función lineal, $f''(x) = k$; es decir, su concavidad es constante. De acuerdo a estas características, la gráfica de $f$ puede tener alguna de las siguientes formas:




Resulta ser una familia de curvas "paralelas"; es decir, tienen la misma pendiente en un punto de abscisa dado y se diferencian en una constante.

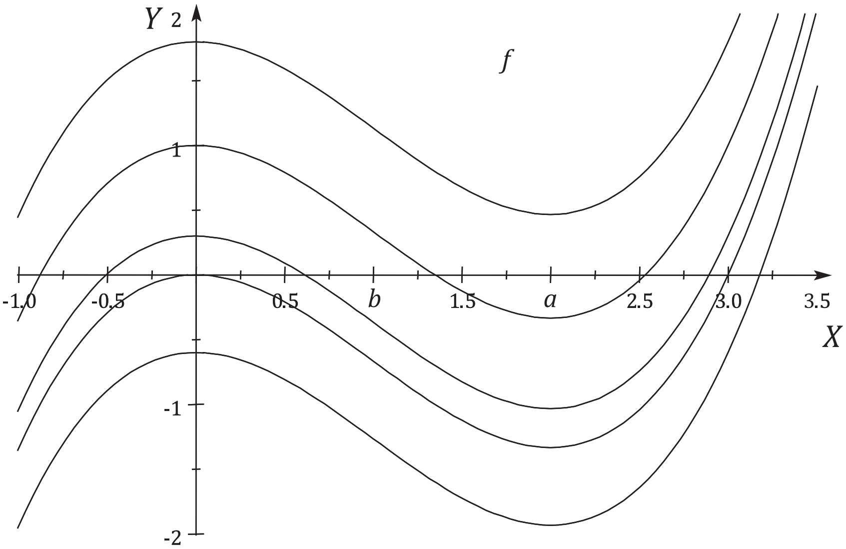
Ejemplo 9. Dada la gráfica de $f'$ bosquejar la gráfica de $f$.



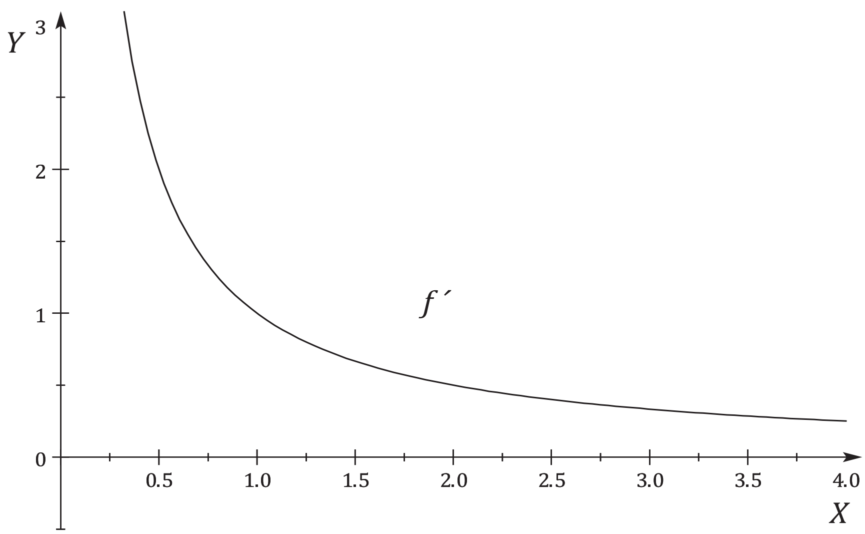

De acuerdo a la gráfica de $f'$ podemos concluir que:

1. $f$ es continua en todos los reales.
2. $f$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y en $(a, \infty)$ por ser $f'(x)>0$.
3. $f$ es decreciente en $(0, a)$ por ser $f'(x)<0$.
4. En $x = 0$, $f$ toma un valor máximo. ¿Por qué?
5. En $x = a$, $f$ toma un valor mínimo. ¿Por qué?
6. $f'$ es decreciente en $(-\infty, b)$ por lo tanto $f''(x)<0$ y $f$ es cóncava hacia abajo.
7. $f$ es cóncava hacia arriba en $(b, \infty)$ por ser $f'$ creciente.
8. $(b, f(b))$ es un punto de inflexión porque en él la función cambia de concavidad.

De acuerdo a estas características la gráfica de $f$ puede tener alguna de las siguientes formas:



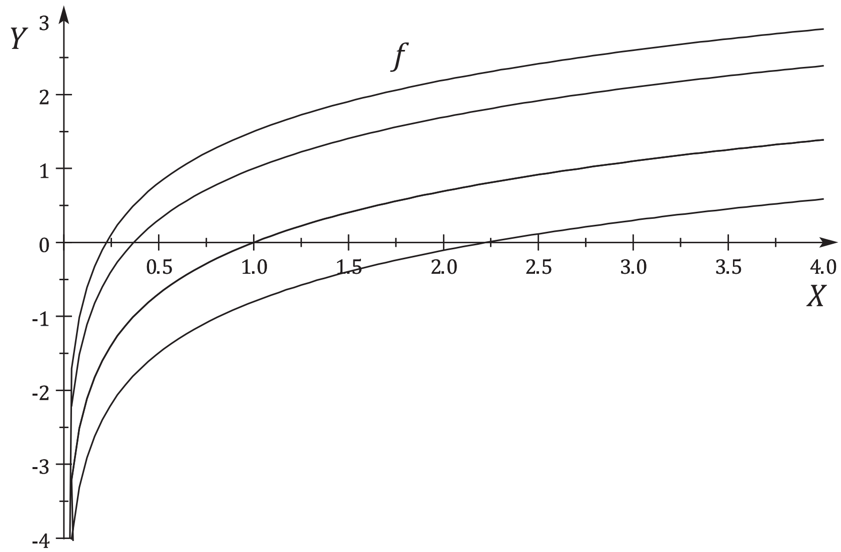

Ejemplo 10. Dada la gráfica de $f'$ bosquejar la gráfica de $f$.



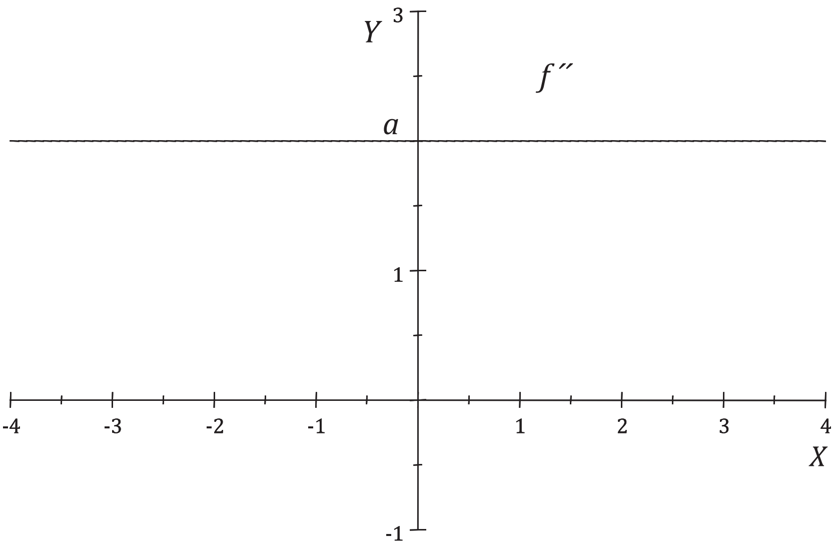

De acuerdo a la gráfica de $f´$ podemos concluir que:

1. $f$ es continua en todos los reales en $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.
2. $f$ es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ por ser $f´(x)>0$.
3. $f$ es siempre cóncava hacia abajo por ser $f´$ decreciente.
4. $f$ no tiene puntos críticos, porque $f'$ no intersecta al eje $X$; es decir, $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

De acuerdo a estas características, la gráfica de $f$ puede ser alguna de las siguientes curvas:



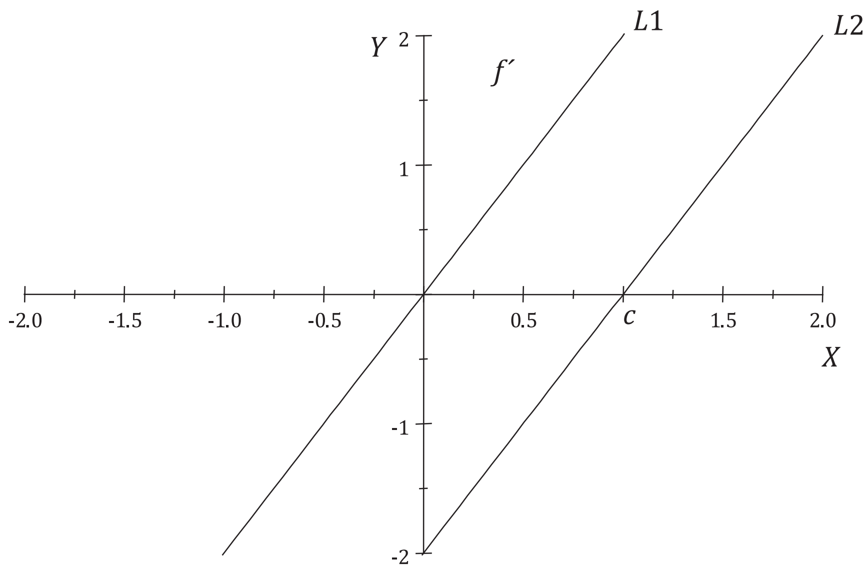

Ejemplo 11. Dada la gráfica de $f''$ bosquejar la gráfica de $f$.



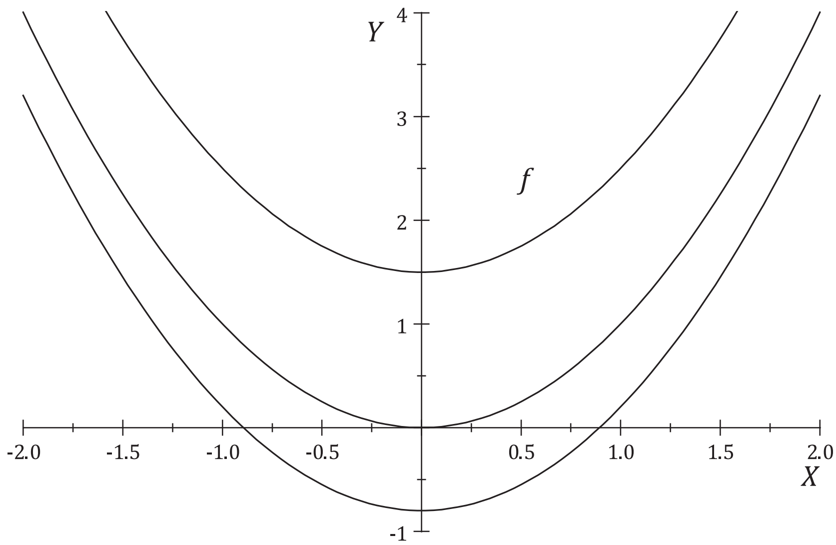

De acuerdo a la gráfica de $f''$ podemos concluir que:

1. $f'$ y $f$ son funciones continuas y derivables, porque existe $f''(x)$ en todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $f$ es cóncava hacia arriba por ser $f''(x) = a > 0$.
3. Como $f''(x) = a > 0$, se tiene que la gráfica de $f'$ es una recta de pendiente igual a $a$.

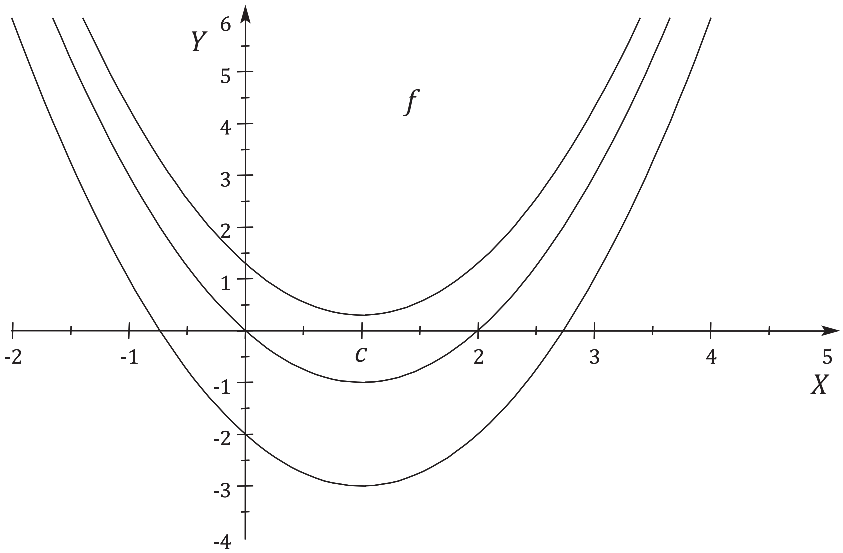
De acuerdo a estas características, la gráfica de $f'$ pertenece a una familia de rectas. Por cada recta, obtenemos para $f$ una familia de curvas.




Para la recta $L1$, se tienen para $f$ curvas de la forma:

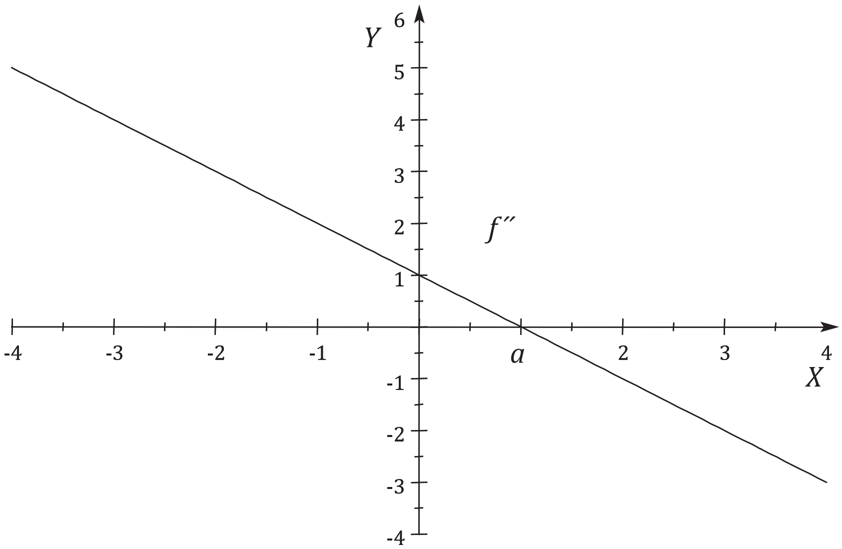


Para la recta $L2$, se tienen para $f$ curvas de la forma:




4. Como $f'$ es negativa para $x<c$, y $f'$ es positiva para $x>c$, podemos decir que $f$ tiene un punto mínimo en $x = c$.

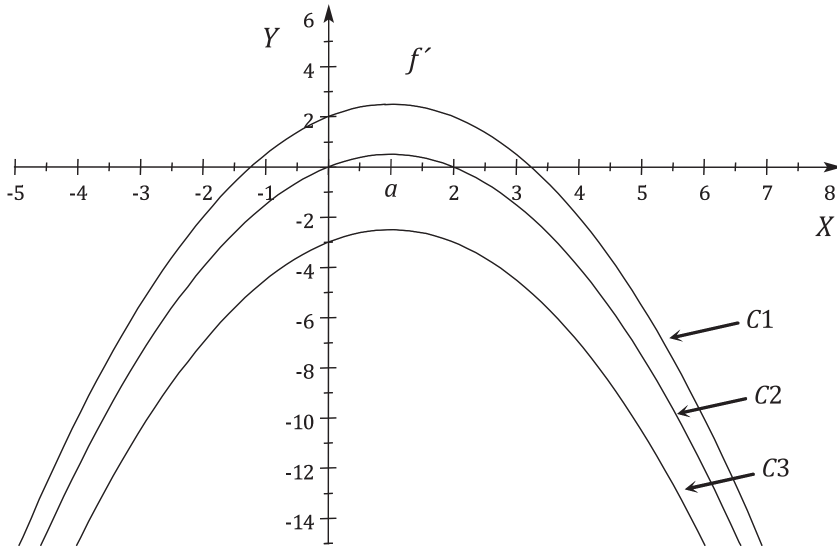
Ejemplo 12. Dada la gráfica de $f''$ bosquejar la gráfica de $f$.



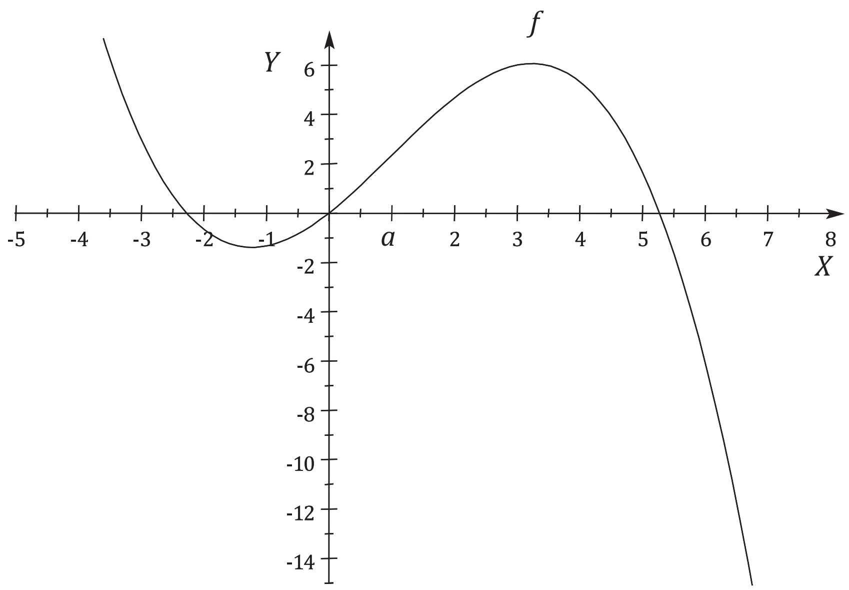

De acuerdo a la gráfica de $f''$ podemos concluir que:

1. $f'$ y $f$ son funciones continuas y derivables.
2. $f$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, a)$ por ser $f''(x)>0$.

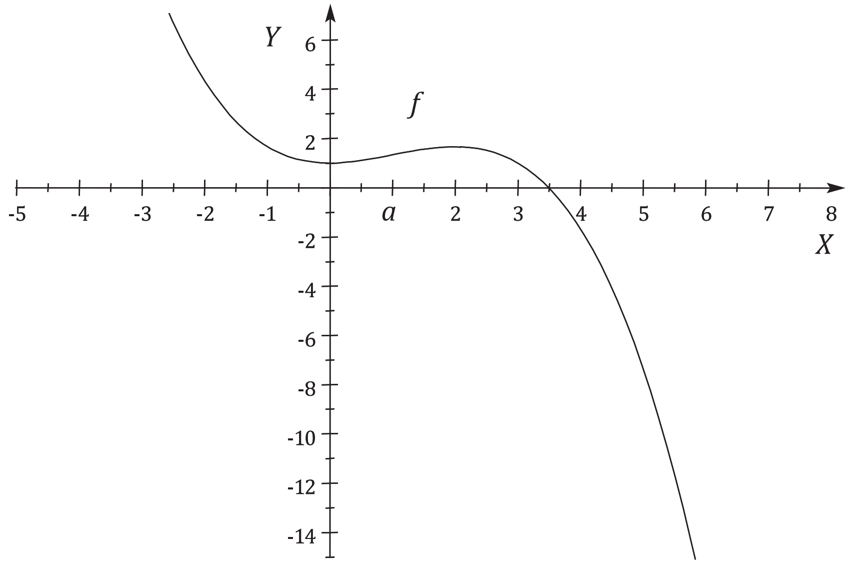
3. $f$ es cóncava hacia abajo en $(a, \infty)$ por ser $f''(x)<0$.
4. $(a, f(a))$ es un punto de inflexión de $f$, por ser $f''(a) = 0$, y la función cambia de concavidad en $x = a$.
5. De acuerdo a estas características, la gráfica de $f'$ puede ser:



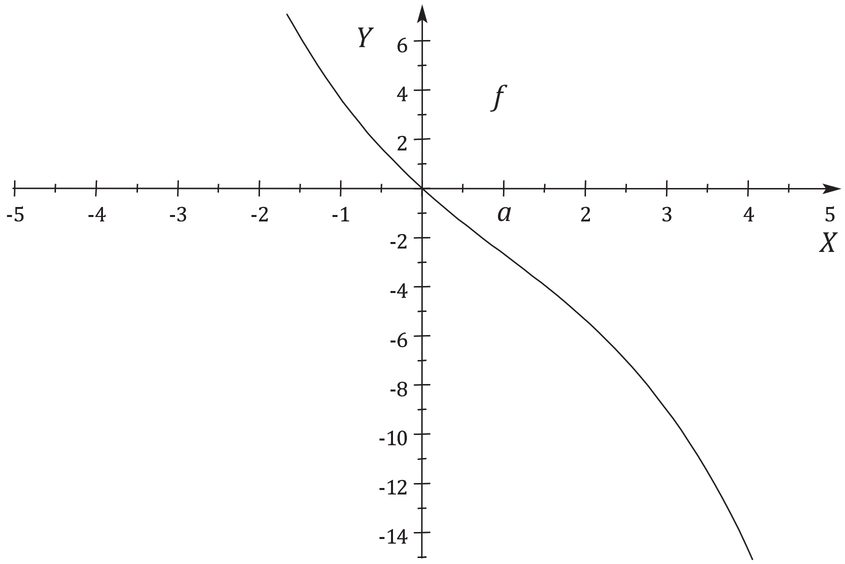

Para la curva $C1$, se tiene para $f$ una familia de curvas paralelas de la forma:



Para la curva $C2$, se tiene para $f$ una familia de curvas paralelas de la forma:




Para la curva $C3$, se tiene para $f$ una curva de la forma:




Observe que para cada curva $C$ de $f'$, obtenemos una familia de curvas para $f$.

## EJERCICIO 6.1

1. Calcule $dy$ para cada una de las siguientes funciones:

   a. $y = x^2+7x+1;$

   b. $y = (t^2+1)^4;$

   c. $y = t\ \ln t;$

   d. $y = ue^{-u};$

   e. $y = \ln(z^2+1);$

   f. $y = \frac{x+1}{x^2+1};$

   g. $y = \frac{e^u}{u+1};$

   h. $y = \frac{e^u+1}{e^u-1};$

   i. $y = \sqrt{x^2-3x};$

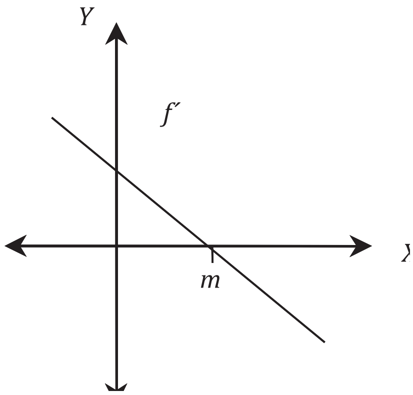
   j. $y = \sqrt{\ln x};$

   k. $y = x^2 - 1;$

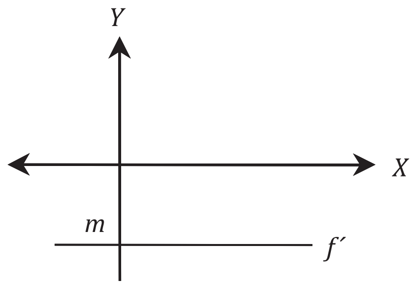
   l. $y = \sqrt{t+1}.$

2. Dada la gráfica de $f'$ bosquejar la gráfica de $f$ y hacer su análisis.

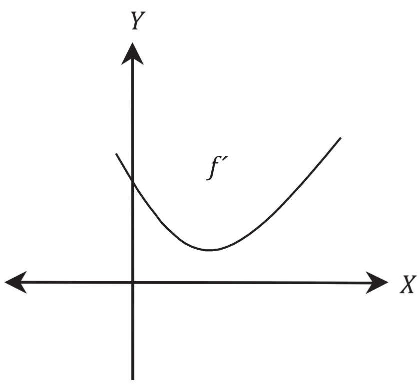
   a.



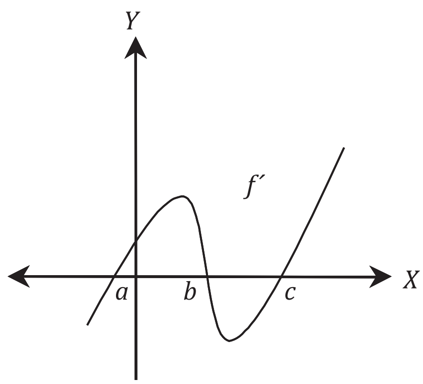

   b.



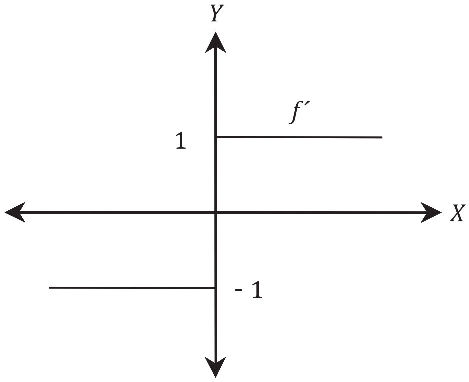

   c.



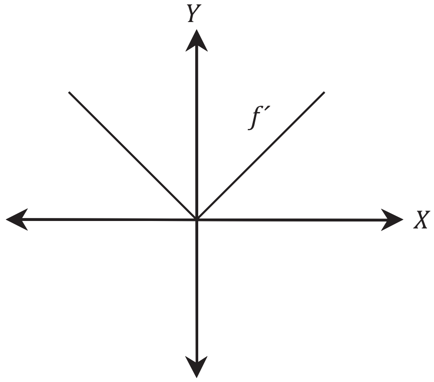

   d.



e.

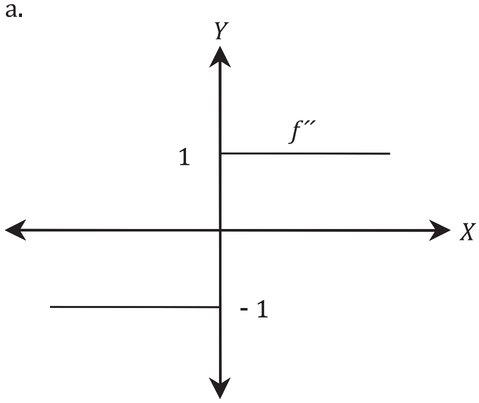



f.

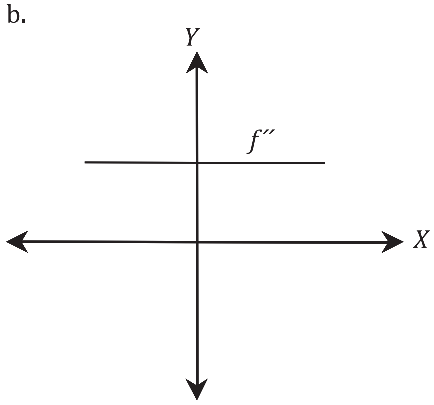



3. Dada la gráfica de $f''$ bosquejar la gráfica de $f'$ y $f$. Hacer el análisis de $f$.

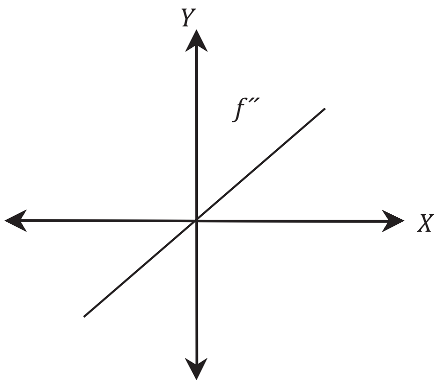
a.



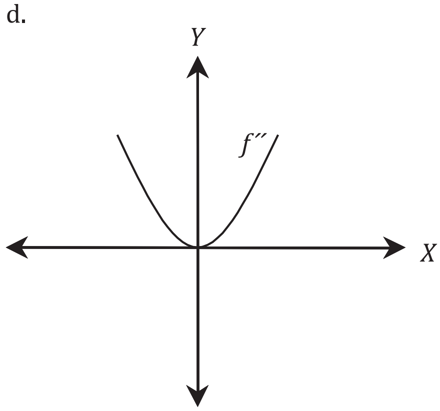

b.




c.




d.



4. Dada $f'(x)$, indicar cuál de las siguientes funciones corresponde a $f$:

a. $f'(x) = 2x$ es $f(x)$: $x^2 + 2$; $x^2 - 2$; $2x + 1$; $x^2 + x$; $x^2 + r^2$;

b. $f'(x) = 3x^2 + 5$ es $f(x)$: $x^3 + 5$; $x^3 + 5x$; $x^3 + 5x + 2$; $x^3 + 5x + a^2$;

c. $f'(x) = \frac{1}{x}$ es $f(x)$: $\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\ln(x)$; $\ln(kx)$; $\ln(x) + k$;

d. $f'(x) = Ce^x$ es $f(x)$: $e^x + C$; $e^{Cx}$; $Ce^x$; $\frac{1}{C}e^{Cx}$;

e. $f'(x) = \frac{1}{C}e^{Cx}$ es $f(x)$: $\frac{1}{C}e^{Cx}$; $Ce^{Cx}$; $\frac{1}{C^2}e^{Cx}$;

5. Dada $f'(x)$, intente encontrar $f(x)$:

a. $f'(x) = 2x+3$;
b. $f'(x) = 3x^2 - 4x+1$;
c. $f'(x) = x^3+2x^2 - a^2$;
d. $f'(x) = e^x$;
e. $f'(x) = e^{2x}$;
f. $f'(x) = (2x+1)^2$;
g. $f'(x) = 2x\, e^{x^2}$;
h. $f'(x) = e^{Cx}$;
i. $f'(x) = x^2 - r^2$.

6. Dada $f''(x)$, intente encontrar $f'(x)$ y $f(x)$:

a. $f''(x) = 12$;
b. $f''(x) = -12x+10$;
c. $f''(x) = g$, $g$ constante;
d. $f''(x) = e^x+e^{-x}$;
e. $f''(x) = e^{ax} - 6$;
f. $f''(x) = -kx+r$.

7. Defina la función y exprese:

a. La velocidad de una partícula, si es directamente proporcional al cuadrado de su desplazamiento.

b. La variación de la temperatura en función del tiempo, si es directamente proporcional a la temperatura en ese momento.

c. El costo marginal de un producto, si es constante.

d. El ingreso marginal de un producto, si es una función lineal.

## 6.4 Antiderivada de una función

De una función $F$ conocemos su derivada $f$; es decir, $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ para todo $x$ en un intervalo abierto $I$. A la función $F$ se la denomina **antiderivada de *f* en el intervalo *I*.**

Ejemplo 13. La función $F$ definida como $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ es una antiderivada de $f$ dada por $f(x) = x^{1/2}$ en el intervalo abierto $(0, \infty)$.

Ejemplo 14. Comprobar que $F$ definida como $F(x) = x^3+x^2+5x+2$ es una antiderivada de $f$ definida como $f(x) = 3x^2+2x+5$ en todo intervalo.

Solución. $F$ es una antiderivada de $f$ si y sólo si $F'(x) = f(x)$. Derivamos $F$ y tenemos:

$$F'(x) = 3x^2+2x+5 = f(x)$$

como se requería.

Observe que la función $G$, definida como:

$$G(x) = x^3+x^2+5x+7 = F(x)+5$$

es también una función antiderivada de $f$. Veamos $G'(x) = 3x^2+2x+5$.

En conclusión, cualquier función $G$ definida como $G(x) = F(x)+C$ es antiderivada de $f$, y se diferencian sólo en una constante.

## 6.5 La integral indefinida

Si $F$ es la antiderivada de $f$ en un intervalo abierto $I$, y conocemos $f$, ¿cómo calcular $F$?

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

De donde:

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Para hallar $F$, es necesario efectuar un proceso inverso al de la diferenciación. A este proceso se lo denomina **integración** y se nota:

$$dF(x) = f(x)dx$$

$$F(x) = \int f(x)dx$$

$$\int f(x)dx = F(x)+ C \text{ si y sólo si } \frac{d}{dx}[F(x)+C] = f(x) \text{ para todo } x \in Dom(f)$$

$\int$: signo de integral

$f(x)$: integrando

$C$: constante de integración

$F(x) + C$: integral indefinida

Ejemplo 15. Verificar que $\int dx = \int 1 \,.\, dx = C$.

Solución. Veamos:

$$\frac{d(x+C)}{dx} = 1 = f(x)$$

Ejemplo 16. $\int 3x^2\, dx = x^3 + C$; veamos: $\frac{d(x^3+C)}{dx} = 3x^2 = f(x)$.

En cada ejemplo, el símbolo $dx$ indica que $x$ es la variable con respecto a la cual va a realizarse la integración. Si la función se expresa en términos de una variable diferente de $x$, se emplea una notación análoga.

Ejemplo 17.

a. $\int du = u+C$;

b. $\int 3t^2\, dt = t^3+C$;

c. $\int r^2\, dx = r^2\, x+C$, observe que se integra con respecto a $x$; por lo tanto, $r^2$ es una constante.

## 6.5.1 Integral de algunas funciones elementales

A partir de la práctica que tenemos del cálculo diferencial, es posible por inspección hallar la antiderivada de algunas funciones. Consideremos el caso:

$$\int x^n\ dx$$

Al derivar $x^n$ se tiene $\frac{d(x^n)}{dx} = n\,x^{\,n-1}$. Observe que se multiplica por $n$, que es el exponente de $x$, y el exponente de $x$ se disminuye en 1. Queda entonces, $n - 1$.

Para evaluar $\int x^n \cdot dx$ hacemos el proceso inverso. Es decir, debemos aumentar el exponente de $x$ en 1, $n+1$, y dividir la expresión entre $(n + 1)$ que es el exponente de $x$.

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ \text{si}\ \ n \neq -1\ \ \text{y}\ \ n \in \mathbb{R}$$

Si $n = -1$, recordemos del cálculo diferencial que $\frac{d(\ln|x|)}{dx} = \frac{1}{x}$; por lo tanto:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|+C = \ln(kx);\ \text{donde}\ C = \ln(k)$$

Ejemplo 18. Calcular $\int x^3 dx$.

Solución.

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C \text{ veamos: } \frac{d\left(\frac{x^4}{4}+C\right)}{dx} = \frac{1}{4}4x^3 = x^3 = f(x)$$

Ejemplo 19. Calcular $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Solución.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$
$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

Veamos:

$$\frac{d(\,2\sqrt{x})}{dx} = 2\,\frac{d\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx}$$
$$= 2\,\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}$$
$$= x^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$$

Ejemplo 20. Calcular $\int e^x\, dx$.

Solución. Del cálculo diferencial sabemos que $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$; por lo tanto, tenemos que:

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

Ejercicio 21. Calcular $\int a^x\, dx$; si $a > 0$.

Solución. Del cálculo diferencial sabemos que $\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln(a)$; por lo tanto, tenemos que:

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

## Propiedades de la integral

1. $\int cf(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$

   La integral de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la integral de la función.

2. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

   La integral de una suma es igual a la suma de las integrales.

Ejemplo 22. Hallar $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$.

Solución.

$$\begin{aligned}\int (ax^2+bx+c)dx &= \int ax^2dx + \int bxdx + \int cdx\\ &= a\int x^2dx + b\int xdc + c\int dx\\ &= \frac{ax^3}{3} + c_1 + \frac{bx^2}{2} + c_2 + cx + c_3\end{aligned}$$

Como $c_1$, $c_2$, $c_3$ son constantes, tenemos que $c_1 + c_2 + c_3 = k$ es una constante; por lo tanto:

$$\int (ax^2+bx+c)dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + k$$

Ejemplo 23. Hallar $\int (3x + 5)\, dx$.

Solución.

$$\int (3x+5)dx = \int 3xdx + \int 5dx = 3\int xdx + 5\int dx = \frac{3x^2}{2} + 5x + C$$

Ejemplo 24. Hallar $\int \left(3e^x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}x^2\right)dx$.

Solución.

$$\begin{aligned}\int \left(3e^x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}x^2\right)dx &= 3\int e^xdx + 2\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int x^2dx\\ &= 3e^x + 2\ln|x| - \frac{1}{6}x^3 + C\end{aligned}$$

Ejemplo 25. Evaluar $\int \frac{2x^2+3x-2}{x}dx$.

Solución.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+3x-2}{x}dx &= \int \left(\frac{2x^2}{x} + \frac{3x}{x} - \frac{2}{x}\right)dx\\ &= \int 2xdx + \int 3dx - \int \frac{2}{x}dx\\ &= x^2 + 3x - \ln|x^2| + C\end{aligned}$$

Ejemplo 26. Hallar $y = f(x)$, e interpretar el resultado si $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$ y $f(0) = 2$.

Solución. $y = \int (2x+5)\, dx = x^2+5x+c$

Así que $y = f(x) = x^2+5x+c$, pero cuando $x = 0$, $y = 2$; luego $2 = 0^2+5(0)+c$, de donde $2 = c$; es decir $y = f(x) = x^2+5x+2$; tiene la propiedad: $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$. Es la única que satisface $f(0) = 2$. Recordemos que hay infinitas funciones cuya derivada es $y' = 2x+5$, pero $y = x^2+5x+2$ es la única cuya gráfica pasa por el punto $(0, 2)$.

## EJERCICIO 6.2

1. Aplique propiedades y evalúe las siguientes integrales. En cada caso verifique la respuesta.

   a. $\int \left(3x^2 + 5x + \frac{1}{2x} + 1\right)dx;$

   b. $\int \left(\frac{1}{2x^3} + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx;$

   c. $\int \frac{3x^3-2x^2+7x-1}{x}dx;$

   d. $\int (6ax^2 - 4bx + y^2)dx;$

   e. $\int \left(3e^x + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + 5^x\right)dx;$

   f. $\int \left(ae^{-x} + \frac{5}{2\sqrt[3]{2x}} + 4 \cdot 3^x + e^2\right)dx.$

2. En cada caso verifique si la función dada corresponde a la antiderivada de $f$.

   a. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+k^2}dx = \ln C(x^2 + x + k^2);$

   b. $\int \ln|x|dx = \frac{1}{x} + C;$

   c. $\int \ln|x|dx = x\ln(x) - x \;\; + C;$

   d. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C.$

3. Halle $y = f(x)$ e interprete el resultado si:

   a. $\frac{dy}{dx} = 2x$ y $f(0) = 2;$

   b. $\frac{dy}{dx} = e^x + 3x^2 - 6x$ y $f(0) = 3;$

   c. $\frac{dy}{dx} = -6x + \frac{2}{x}$ y $f(1) = 4;$

   d. $\frac{dy}{dx} = 2^x$ y $f(0) = 1.000.$

4. Halle $y = f(x)$ e interprete el resultado si:

   a. $\frac{d^2y}{dx^2} = -6x, f'(0) = 2$ y $f(0) = 10;$

   b. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x + 12x^2, \frac{dy}{dx} = 3$ y $y = 0,$ cuando $x = 0;$

   c. $y'' = -24, y'(0) = 0$ y $y(0) = 0$

### 6.5.2 Métodos de integración

Hallar la integral de una función es un problema muy difícil de resolver y en muchos casos no tiene solución. Existen básicamente dos métodos de integración: por sustitución y por partes, que en esencia son la aplicación de teoremas. En los ejemplos y ejercicios propondremos funciones en las que se puedan aplicar estos métodos.

### 6.5.2.1 Integración por sustitución

Sea $h$ la composición de dos funciones $f$ y $g$; es decir, $h(x) = f(g(x))$ para todo $x$ en un cierto intervalo $I$; si conocemos la derivada de $f$ sea $f'(x) = F(x)$, o sea:

$$\int F(x)\,dx = f(x) + C \qquad (**)$$

Por la regla de la cadena sabemos que:

$$h'(x) = f'(g(x))\,g'(x) = F(g(x))\,g'(x) \quad \text{y}$$

$$\int F(g(x))\,g'(x)dx = h(x) = f(g(x)).$$

Observe que esta expresión es una generalización de $\int F(x)dx = f(x)+C$.

Hacemos la sustitución $u = g(x) : \frac{du}{dx} = g'(x)$; en términos de diferenciales: $g'(x)dx = du$. La integral es:

$$\int F(g(x))\,g'(x)dx = \int F(u)du = f(u)+C$$

que tiene exactamente la forma de (**). Consideremos, en principio, la composición de funciones elementales.

6.5.2.1.1 Integral de $y = (g(x))^n\,g'(x)$

Si $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$, tenemos que:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \text{ con } n \neq -1$$

Si $n = -1$, tenemos:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Ejemplo 27. Calcular $\int \sqrt{2x+5}\,dx$.

Solución. $u = g(x) = 2x+5$ y $\frac{du}{dx} = 2;\ dx = \frac{du}{2}$; sustituimos y tenemos:

$$\begin{aligned}\int (2x+5)^{1/2}\,dx &= \int u^{1/2}\,\frac{1}{2}\,du\\ &= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + C\end{aligned}$$

Como $u = 2x+5$, reemplazamos y tenemos que:

$$\int \sqrt{2x+5}dx = \frac{(2x+5)^{3/2}}{3} + C$$

Ejemplo 28. Hallar $\int \frac{x}{x^2+1}dx$.

Solución. Sea $u = x^2+1$; luego $du = 2xdx$. Observe que $x\,dx = \frac{du}{2}$; reemplazamos:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

luego:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C = \ln\sqrt{x^2+1} + C = \ln k\sqrt{x^2+1}$$

6.5.2.1.2 Integral de la función $y = e^{g(x)}\,g'(x)$

Si $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$, tenemos que:

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

Ejemplo 29. Hallar $\int e^{4x}\,dx$.

Solución. Sea $u = 4x$; luego $du = 4\,dx$. Observe que $dx = \frac{du}{4}$. Reemplazamos y tenemos:

$$\int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}\int e^u\,du = \frac{1}{4}e^u + C$$

Sustituimos $u$ por $e^{4x}$. Tenemos:

$$\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x} + C$$

6.5.2.1.3 Integral de $y = a^{g(x)}\,g'(x)$ con $a > 0$

Si $u = g(x)$ y $du = g'(x)\,dx$, tenemos que:

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

Ejemplo 30. Evaluar $\int 3^{x^2+2}\,2xdx$.

Solución. Si hacemos $u = x^2+2$, observe que $2xdx$ es precisamente $du$; reemplazamos:

$$\int 3^{x^2+2}\cdot 2x\,dx = \int 3^u\,du$$
$$= \frac{3^u}{\ln(3)} + C$$
$$= \frac{3^{x^2+2}}{\ln(3)} + C$$

En muchos ejercicios, la sustitución no es tan evidente. La clave para determinar si la sustitución $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$ es la adecuada, se muestra cuando al reemplazar en el integrando $g'(x)dx$ por $du$, esta última expresión queda en función de $u$.

Ejemplo 31. Evaluar $\int xe^{x^2}\, dx$.)

Solución. Hacemos $u = x^2$, $du = 2xdx$. Observe que $g'(x)dx = xdx = \frac{du}{2}$ queda expresado en términos de $u$. Sustituimos:

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Ejemplo 32. Evaluar $\int xe^{2x+1}\, dx$.

Solución. Si hacemos $u = 2x+1$, tenemos que $du = 2dx$ $\;y\;$ $dx = \frac{du}{2}$. Reemplazamos:

$$\int xe^{2x+1}dx = \int xe^u \frac{du}{2}$$

En este caso, la sustitución **no es la adecuada** porque al reemplazar, el integrando no queda en función de $u$. Si no existe una sustitución **adecuada**, se debe intentar resolver la integral por otro método.

Ejemplo 33. Evaluar $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Solución. Sea $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ y $du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\, dx$; luego $g\,'(x)\, dx = \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \cdot du$ queda en función de $u$. Reemplazamos:

$$\begin{aligned}\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &= \int 2^u \cdot 2du \\ &= 2^1 \cdot \frac{2^u}{\ln(2)} + C \\ &= \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln(2)} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 34. Evaluar $\int \frac{du}{u\ln|u|}$.

Solución. Sea $v = \ln|u|$, entonces $dv = \frac{du}{u}$. Reemplazamos:

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u\ln|u|} &= \int \frac{dv}{v} \\ &= \ln|v| + C\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\int \frac{du}{u\ln|u|} = \ln|\ln|u|| + C$$

Ejemplo 35. Hallar $\int \frac{dx}{x\ \ln|x|\ \ln|\ln|x||}$.

Solución.

$$\int \frac{dx}{x\ln|x|\ln|\ln|x||} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{\ln|x|\ln|\ln|x||}$$

Hacemos $u = \ln|x|$, entonces $du = \frac{dx}{x}$. Reemplazamos y aplicamos el ejemplo anterior:

$$\int \frac{dx}{x\ln|x|\ln|\ln|x||} = \int \frac{du}{u\ \ln|u|} = \ln|\ln|u|| + C$$

Sustituimos $u = \ln|x|$, entonces:

$$\int \frac{dx}{x\ \ln|x|\ \ln|\ln|x||} = \ln|\ln|\ln|x||| + C$$

Ejemplo 36. Evaluar $\int x^2\ e^{x^3}\ dx$.

Solución. Sea $u = x^3$; luego $du = 3x^2\ dx$. Observe que $x^2dx = \frac{du}{3}$. Reemplazamos:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{x^3} dx &= \int e^u\ \frac{du}{3}\\ &= \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}\ e^u + C\\ &= \frac{1}{3}e^{x^3} + C\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

Ejemplo 37. Evaluar $\int \frac{dx}{x[\ln|x|]^2}$.

Solución.

$$\int \frac{dx}{x\ \ln|x|^{\ 2}} = \int \frac{dx/x}{\ln|x\ |^2}$$

Ahora hacemos $u = \ln|x|$ , $du = \frac{dx}{x}$. Reemplazamos:

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u^2} &= \int \frac{\mathrm{du}}{u^2} = \int u^{-2}\mathrm{du}\\ &= \frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{u} + C\end{aligned}$$

Luego:

$$\int \frac{dx}{x\ [\ln|x|]^2} = \frac{-1}{\ln|x|} + C$$

En algunos casos, la integral no parece ser de la forma $\int F(g(x))\ g'(x)dx$, pero puede simplificarse mediante un cambio de variable.

Ejemplo 38. Evaluar $\int \frac{x}{x+1}dx$.

Solución. Observamos el ejemplo; parece ser que no es fácil hacer la integral por sustitución, pero notamos que si hacemos $u = x+1$, entonces $x = u - 1$ y $dx = du$. Luego:

$$\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{u-1}{u+1-1}du = \int \frac{u-1}{u}du$$

Separamos el numerador sobre el común denominador; tenemos que:

$$\int \frac{u-1}{u}du = \int 1du - \int \frac{1}{u}du = u - \ln|u| + C$$

Reemplazamos $u$ por $x+1$:

$$\int \frac{x}{x+1}dx = x - \ln|x+1| + C$$

Ejemplo 39. Evaluar $\int x^2\sqrt{x-1}dx$.

Solución. Hacemos $u = x - 1$; entonces $x = u + 1$, y $dx = du$; luego:

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x-1}dx &= \int (u+1)^2\sqrt{u}du\\ &= \int (u^2+2u+1).u^{\frac{1}{2}}du\\ &= \int \left(u^{\frac{5}{2}}+2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}\right)du\\ &= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

reemplazamos $u$ por $x - 1$:

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx = \frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

Ejemplo 40. Evaluar $\int \frac{x^2+1}{2x-3}dx$.

Solución. Hacemos $u = 2x - 3$, entonces $x = \frac{u+3}{2}$, y $dx = \frac{du}{2}$; luego:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+1}{2x-3}dx &= \int \frac{\left[\frac{u+3}{2}\right]^2+1}{u}\,\frac{du}{2}\\
&= \int \frac{\left[\frac{u^2}{4}+\frac{6u}{4}+\frac{9}{4}\right]+1}{u}\,\frac{du}{2}\\
&= \int \frac{\frac{u^2}{4}+\frac{6u}{4}+\frac{9}{4}+\frac{4}{4}}{u}\,\frac{du}{2}\\
&= \int \frac{\frac{u^2}{4}+\frac{6u}{4}+\frac{13}{4}}{u}\,\frac{du}{2}\\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{u^2+6u+13}{u}\right)\left(\frac{du}{2}\right)\\
&= \frac{1}{8}\int \left(\frac{u^2+6u+13}{u}\right)du\\
&= \int \frac{u}{8}du + \int \frac{3}{4}du + \int \frac{13}{8u}du\\
&= \frac{u^2}{16} + \frac{3u}{4} + \frac{13}{8}\ln|u| + C
\end{aligned}$$

reemplazamos $u$ por $2x - 3$:

$$\int \frac{x^2+1}{2x-3}dx = \frac{(2x-3)^2}{16} + \frac{3(2x-3)}{4} + \frac{13}{8}\ln|2x-3| + C$$

## EJERCICIO 6.3

En los ejercicios del numeral 1 al 119, evalúe la integral indicada y compruebe la respuesta:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$;
2. $\int (3x+2)^5 dx$;
3. $\int e^{3x} dx$;
4. $\int \sqrt{4x-1}\,dx$;
5. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^4}}$;
6. $\int \frac{1}{3x+5} dx$;
7. $\int e^{1-x} dx$;
8. $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx$;
9. $\int [(x-1)^5 + 3(x-1)^2 + 5]\,dx$;
10. $\int xe^{x^2} dx$;
11. $\int \frac{xdx}{a+bx}$;
12. $\int 2xe^{x^2-1} dx$;
13. $\int t(t^2+1)^5 dt$;
14. $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$;
15. $\int 3t\sqrt{t^2+8}\,dt$;
16. $\int x^2(x^3+1)^{\frac{3}{4}} dx$;
17. $\int \frac{xdx}{(x+1)^2}$;
18. $\int x^5 e^{1-x^6} dx$;
19. $\int \frac{2y^4}{y^5+1} dy$;

20. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx;$ 21. $\int \frac{y^2}{(y^3+5)^2}\,dy;$ 22. $\int (x+1)(x^2+2x+5)^{12}dx;$

23. $\int \frac{t+2t^2}{\sqrt{t}}\,dt;$ 24. $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx;$ 25. $\int \frac{3x^4+12x^3+6}{x^5+5x^4+10x+12}\,dx;$

26. $\int \frac{10x^3-5x}{\sqrt{x^4-x^2+6}}\,dx;$ 27. $\int \frac{3u-3}{(u^2-2u+6)^2}\,du;$ 28. $\int e^{ax}dx;$

29. $\int \frac{6u-3}{4u^2-4u+1}\,du;$ 30. $\int \frac{\ln(5x)}{x}\,dx;$ 31. $\int \frac{6x}{(1+x^2)^3}dx;$

32. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx;$ 33. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx;$ 34. $\int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx;$

35. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx;$ 36. $\int \frac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx;$ 37. $\int \frac{dx}{e^x+1};$

38. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx;$ 39. $\int x\sqrt{x^2+1}dx;$ 40. $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx;$

41. $\int (x^2+x)^{\frac{1}{2}}(2x+1)dx;$ 42. $\int \frac{dx}{(x+1)^2};$ 43. $\int \frac{dx}{x\ln^2(x)};$

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}};$ 45. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-2}}\,dx;$ 46. $\int \frac{dx}{3x+1};$

47. $\int \frac{x}{3x^2+2}\,dx;$ 48. $\int \frac{3x^2+2}{x}\,dx;$ 49. $\int \frac{x+1}{x}\,dx;$

50. $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx;$ 51. $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx;$ 52. $\int \frac{x}{3-2x^2}\,dx;$

53. $\int \frac{(2x-1)}{x(x-1)}\,dx;$ 54. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx;$ 55. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)};$

56. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx;$ 57. $\int \frac{e^x dx}{e^x+1};$ 58. $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx;$

59. $\int 2xe^{x^2}dx;$ 60. $\int \frac{-x}{(x+1)-\sqrt{x+1}}\,dx;$ 61. $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx;$

62. $\int \frac{x}{(2x+1)^5}\,dx;$ 63. $\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx;$ 64. $\int \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}\,dx;$

65. $\int \frac{z+1}{\sqrt{3z^2+6z+5}}\,dz;$ 66. $\int \frac{1}{8z+3}\,dz;$ 67. $\int \frac{(e^x+1)^2}{e^2}\,dx;$

68. $\int e^{4x}dx;$ 69. $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx;$ 70. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx;$

71. $\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx;$ 72. $\int \frac{(x^2-4)^2}{2x}\,dx;$ 73. $\int \frac{2x^2-5x-7}{x+1}\,dx;$

74. $\int \frac{x^2+3x+1}{x}\,dx;$ 75. $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx;$ 76. $\int e^{2x+3}dx;$

77. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$; 78. $\int (1+e^{-3x})\,dx$; 79. $\int \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)}dx$;

80. $\int \frac{(2+\ln x)^2}{x}dx$; 81. $\int \left(\frac{e}{x}+\frac{x}{e}\right)dx$; 82. $\int (xe^{-2}+ex^{-2})dx$;

83. $\int (e^2-2^e)e^x dx$; 84. $\int \frac{\ln x^3}{\ln x^2}dx$; 85. $\int \frac{\ln x^2}{\ln x}dx$;

86. $\int \frac{\ln x}{\ln\sqrt{x}}dx$; 87. $\int e^x \ln 3 dx$; 88. $\int \frac{e^x}{\ln 2}dx$;

89. $\int \frac{e^{x+2}}{e^{x+1}}dx$; 90. $\int e^{\ln|x^2+1|}dx$; 91. $\int e^{3\ln x}dx$;

92. $\int e^{3x+2}dx$; 93. $\int e^{5-2x}dx$; 94. $\int \frac{e^{2x}}{e^{5-x}}dx$;

95. $\int \frac{e^{2x+3}}{e^{1-x}}dx$; 96. $\int \left(\frac{e^3}{e^{x-1}}\right)^2 dx$; 97. $\int te^{t^2}dt$;

98. $\int \frac{e^{x^n}}{x^{1-n}}dx$; 99. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}dx$; 100. $\int \frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^2}dx$;

101. $\int \frac{\sqrt{x}}{e^{x\sqrt{x}}}dx$; 102. $\int x^2e^{x^3}dx$; 103. $\int \frac{(2x-1)e^{x^2}}{e^x}dx$;

104. $\int \frac{1}{x^3e^{1/x^2}}dx$; 105. $\int \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}dx$; 106. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx$;

107. $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1-e^{\frac{x}{2}}}dx$; 108. $\int \frac{x}{x-1}dx$; 109. $\int \frac{x}{(x-5)^6}dx$;

110. $\int \frac{x+3}{(x-\ 4)^2}dx$; 111. $\int \frac{x}{2x+1}dx$; 112. $\int x\sqrt{x+1}dx$;

113. $\int (x+1)(x-1)^9dx$; 114. $\int (2x+3)\sqrt{2x-1}dx$; 115. $\int x^2\sqrt{x+1}dx$;

116. $\int (x^2-1)\sqrt{2x+1}\ dx$; 117. $\int (2x+1)\sqrt{x-5}dx$; 118. $\int x^2\sqrt{x^3+9}dx$;

119. $\int \left(1+\frac{1}{t}\right)^3\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$;

## 6.5.2.2 Integración por partes

Al evaluar $\int f(x)\,dx$, es posible que no se pueda resolver por sustitución, lo que motiva y obliga a buscar otros métodos. Entre ellos tenemos la integración por partes.

Del cálculo diferencial, sabemos que si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son derivables, se tiene que:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

En términos de diferenciales:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

Es decir:

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Integramos:

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

Luego:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Ejemplo 41. Evaluar $\int xe^x\,dx$.

Solución. Sea $u = x$, por lo tanto, $du = dx$ y $dv = e^x\,dx$; por lo tanto:

$$v = \int e^x\,dx = e^x + K$$

Si aplicamos la fórmula de integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} \int x\,e^x dx &= x\,(e^x + K\,) - \int\,(e^x + K\,)\,dx \\ &= xe^x + Kx - e^x - Kx + C \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= e^x(x-1) + C \end{aligned}$$

Observe que la constante $K$ no aparece en la solución final. En general, esto ocurre siempre en este método, por lo que en adelante se omite $K$.
Al aplicar la fórmula de integración por partes $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$, debemos tener en cuenta lo siguiente:

1. El $dv$ debe contener siempre el $dx$.

2. Dado el $dv$ en función de $x$, éste se debe poder integrar.

3. Cuando el integrando es el producto de dos funciones, en principio conviene elegir como $dv$ la de "apariencia más complicada" y que pueda integrarse. Si este criterio no es muy claro, intente por ensayo y error; tal vez el mejor criterio para escoger $u$ y $dv$ es resolver muchos ejercicios.

4. Si al reemplazar en la fórmula, se tiene que $\int v\,du$ es más sencilla de resolver que la integral inicial, la elección de $u$ y $dv$ es adecuada.

Ejemplo 42. Evaluar $\int \ln(x)dx$.

Solución. Esta integral no es posible resolverla por sustitución (¡inténtelo!). Como $dx$ siempre forma parte de $dv$, obviamente tenemos que hacer:

$$u = \ln(x) \qquad du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = dx \qquad v = \int dx = x$$

Reemplazamos:

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\,dx &= x\ln|x| - \int x\,\frac{dx}{x}\\ &= x\ln|x| - \int dx\\ &= x\ln|x| - x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 43. Evaluar $\int xe^{ax}\,dx$.

Solución. Una alternativa es hacer:

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = e^{ax}dx \qquad \int dv = \int e^{ax}dx,\ \text{de donde}\ v = \frac{e^{ax}}{a}$$

Aplicamos integración por partes:

$$\begin{aligned}\int xe^{ax}dx &= \frac{xe^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}dx\\ &= \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax}dx\\ &= \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)\\ &= \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C\\ &= \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C\end{aligned}$$

Ejemplo 44. Evaluar $\int x^2\, e^{-x}\,dx$.

Solución. Una alternativa es hacer:

$$u = x^2 \qquad du = 2xdx$$
$$dv = e^{-x}\,dx \qquad v = -e^{-x}$$

Aplicamos integración por partes:

$$\int x^2\, e^{-x}\,dx = -x^2\, e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$$

Aquí para integrar $\int xe^{-x}\,dx$, nuevamente utilizamos la integración por partes; tomamos: $u = x$, $du = dx$ y $dv = e^{-x}\,dx, v = -e^{-x}$. Reemplazamos:

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}dx &= -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right)\\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C\\ &= -e^{-x}(x^2+2x+2) + C\end{aligned}$$

Ejemplo 45. Evaluar $\int \frac{\ln|x+1|}{\sqrt{x+1}}dx$ .

Solución. Una alternativa es hacer:

$$u = \ln|x+1| \qquad du = \frac{dx}{x+1}$$

$$dv = (x+1)^{-\frac{1}{2}}dx \qquad \int dv = \int (x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$$

De donde $v = 2(x+1)^{\frac{1}{2}}$; aplicamos integración por partes:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln|x+1|}{\sqrt{x+1}}dx &= 2(x+1)^{\frac{1}{2}}\ln|x+1| - 2\int \frac{1}{x+1}(x+1)^{\frac{1}{2}}dx \\ &= 2(x+1)^{\frac{1}{2}}\ln|x+1| - 2\int (x+1)^{-\frac{1}{2}}dx \\ &= 2(x+1)^{\frac{1}{2}}\ln|x+1| - 4(x+1)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2\sqrt{x+1}\,.\,[\ln(|x+1|) - 2] + C\end{aligned}$$

Ejemplo 46. Evaluar $\int (\ln|x|)^2\, dx$.

Solución. Una alternativa es hacer:

$$u = (\ln|x|)^2 \qquad du = 2\ln|x|\frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \qquad \int dv = \int dx, \text{de donde } v = x$$

Aplicamos partes:

$$\begin{aligned}\int (\ln|x|)^2 dx &= x(\ln|x|)^2 - \int x.2\ln|x|\frac{dx}{x} \\ &= x(\ln|x|)^2 - 2(x\ln|x| - x) + C\end{aligned}$$

Ejemplo 47. Evaluar $\int x^n e^x\, dx$.

Solución. Sean:

$$u = x^n \qquad du = nx^{n-1}dx$$

$$dv = e^x dx \qquad v = e^x$$

Aplicamos integración por partes, tenemos (una fórmula de recurrencia):

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\, dx.$$

Ésta se puede aplicar hasta que $n = 1$.

Ejemplo 48. Evaluar $\int x^3 e^x\,dx$.

Solución. Aplicamos la fórmula anterior para $n = 3$:

$$\begin{aligned}\int x^3e^x dx &= x^3e^x - 3\int x^{3-1}e^x dx\\ &= x^3e^x - 3\int x^2e^x dx\end{aligned}$$

Aplicamos de nuevo la fórmula para $n = 2$ a la integral $\int x^2 e^x\,dx$:

$$\begin{aligned}\int x^3e^x dx &= x^3e^x - 3(x^2e^x - 2\int x^{2-1}e^x dx)\\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^x dx\end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos la fórmula para $n = 1$:

$$\begin{aligned}\int x^3e^x dx &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^x dx\\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6(xe^x - \int e^x dx)\\ &= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C\end{aligned}$$

***NOTA.*** *Si la integral es de la forma* $x^n\, e^{ax+b}$, *se hace* $u = x^n$ *y* $dv = e^{ax+b}$.

## EJERCICIO 6.4

Evaluar las siguientes integrales por el método apropiado:

1. $\int xe^{2x}dx$;
2. $\int (3x^2-1)e^{3-x}dx$;
3. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$;
4. $\int t\ln|t|dt$;
5. $\int e^x(x+1)^2dx$;
6. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}dx$;
7. $\int xe^{-x}dx$;
8. $\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2}dx$;
9. $\int z^2e^{-3z}dz$;
10. $\int (x+1)\ln|x|dx$;
11. $\int x^n\ln|x|dx$;
12. $\int x^n\ln|ax|dx$;
13. $\int x(3^x)dx$;
14. $\int x^2\ln|2x|dx$;
15. $\int (x^2-5x)e^x dx$;
16. $\int x^3e^{x^2}dx$;
17. $\int x^2e^x dx$;
18. $\int xa^x dx$;
19. $\int x\ln|x|dx$;
20. $\int x^3\ln|x|dx$;
21. $\int x^2\ln|x|dx$;
22. $\int t\ln|t+1|\,dt$;
23. $\int \frac{\ln|x^2|}{x^2}dx$;
24. $\int \sqrt{x}\ln|x|dx$;

25. $\int x^3\ln|x^3|\,dx$;
26. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;
27. $\int (x^2+5)\ln|x|dx$;
28. $\int xe^{mx}dx$;
29. $\int \frac{x}{e^{2x}}dx$;
30. $\int e^{x+\ln|x|}dx$;
31. $\int (2x+1)e^{3x}dx$;
32. $\int \ln|x^x|dx$;
33. $\int x^5e^xdx$;
34. $\int y^2e^{3y}dy$;
35. $\int \ln(x)^2dx$;
36. $\int \ln|x^{x^2}|dx$;
37. $\int e^{2x}\ln|e^x|dx$;
38. $\int e^{\sqrt{x}}dx$;
39. $\int \frac{x}{e^x}dx$;
40. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;
41. $\int xe^{3x}\,dx$;
42. $\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dt$;
43. $\int t^2e^{4t}dt$;
44. $\int z(\ln|z|\,)^2dz$;
45. $\int x^2(2^x)\,dx$;
46. $\int \ln(x+1)dx$;
47. $\int x^5(\ln|x|\,)^2dx$;
48. $\int x^3e^{2x}\,dx$;
49. $\int x^4e^{-x}dx$;
50. $\int x^3(\ln|x|\,)^2dx$;
51. $\int x^2\ln x\,dx$.

### 6.5.2.3 Integración por fracciones parciales

Sabemos cómo combinar dos o más expresiones racionales en una sola mediante adición o sustracción. Por ejemplo:

$$\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{7x-1}{x^2-x-6}$$

Dada una expresión racional $\frac{7x-1}{x^2-x-6}$, ¿cómo descomponerla en la suma $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}$?

Además de querer responder a la pregunta, algunas veces es necesario expresar una sola expresión racional como la suma de dos o más fracciones más simples denominadas fracciones parciales. Por ejemplo, evaluemos:

$$\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}dx$$

Consideremos la fracción racional $S(x)$ definida por $S(x)=\frac{P_n(x)}{T_m(x)}$, donde $P_n(x)$ y $T_m(x)$ son polinomios de grado $n$ y $m$. Si $n < m$, decimos que $S(x)$ es una **fracción propia**. Si $n \geq m$, decimos que $S(x)$ es una **fracción impropia**. Al desarrollar la división de $P_n(x)$ entre $T_m(x)$, tenemos dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$P_n(x) = Q(x)\, T_m(x)+R(x)$$

El grado de $R(x)$ es menor que $m$. Multiplicamos cada miembro de la igualdad por $\frac{1}{T_m(x)}$:

$$S(x)=\frac{P_n(x)}{T_m(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{T_m(x)}$$

$\frac{R(x)}{T_m(x)}$ es una fracción propia. Como vemos, podemos descomponer cualquier fracción impropia en la suma de un polinomio y una fracción propia. Esto permite reducir a las fracciones propias el problema de hallar fracciones parciales.

**Ejemplo 49.** Descomponer $\frac{x^4-10x^2+3x+21}{x^2-4}$.

**Solución.** Al efectuar la división, el cociente $Q(x)$ es $x^2-6$, y el residuo $R(x)$ es $3x-3$. Por lo tanto:

$$\frac{x^4-10x^2+3x+21}{x^2-4}=(x^2-6)+\frac{3x-3}{x^2-4}$$

**Ejemplo 50.** Evaluar $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}dx$.

**Solución.** Sabemos que:

$$\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{7x-1}{x^2-x-6}$$

Pero veamos cómo surge esto. Al efectuar $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}$, hallamos el mínimo común múltiplo (m.c.m.) entre $x+2$ y $x-3$:

$$\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{3(x-3)+4(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{7x-1}{x^2-x-6}$$

Para descomponer en fracciones parciales $\frac{7x-1}{x^2-x-6}$, hacemos el proceso inverso. Factorizamos el denominador:

$$\frac{7x-1}{x^2-x-6}=\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}$$

El denominador $(x+2)(x-3)$ es el m.c.m. entre los polinomios $(x+2)$ y $(x-3)$; por lo tanto, estos polinomios son los posibles denominadores en que podemos descomponer la fracción racional. Es decir:

$$\frac{7x-1}{x^2-x-6}=\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}$$

Como las fracciones son propias, $A$ y $B$ deben ser constantes. ¿Por qué? Para hallar $A$ y $B$ efectuamos la operación:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

Tenemos la igualdad:

$$\frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}$$

Ésta se cumple si se tiene la identidad:

$$A(x-3) + B(x+2) = 7x - 1.$$

Si $x = 3$, tenemos que $5B = 20$; por lo tanto, $B = 4$; si $x = -2$, tenemos que $-5A = -15$; por lo tanto, $A = 3$.

Otra forma de hallar $A$ y $B$ es utilizando **coeficientes indeterminados**:

$$\begin{aligned} A(x-3) + B(x+2) &= 7x - 1 \\ Ax - 3A + Bx + 2B &= 7x - 1 \\ (A+B)x + (-3A + 2B) &= 7x - 1 \end{aligned}$$

De donde se debe tener que:

$$\begin{aligned} A + B &= 7 \\ -3A + 2B &= -1 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y tenemos que $A = 3$ y $B = 4$.

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-1}{x^2-x-6}dx &= \int \frac{3}{x+2}dx + \int \frac{4}{x-3}dx \\ &= 3\ln(x+2) + 4\ln(x-3) + C \\ &= \ln(x+2)^3 + \ln(x-3)^4 + \ln(k) \\ &= \ln k\,(x+2)^3(x-3)^4 \end{aligned}$$

En general, para descomponer una fracción propia de la forma $\frac{P(x)}{T(x)}$ en dos o más fracciones parciales, repetimos el proceso anterior. La dificultad está en la factorización del polinomio; recordemos que cualquier polinomio de grado $n \geq 2$, salvo la multiplicidad, se puede factorizar en polinomios con coeficiente real de primer grado (lineales) o de segundo grado (cuadráticos irreducibles). De acuerdo a estas condiciones, se dan cuatro casos que se presentan a continuación.

## Primer caso

El denominador se puede descomponer en factores lineales no repetidos o de multiplicidad uno.

Ejemplo 51. Evaluar $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}dx.$

Solución. Descomponemos la expresión racional en **fracciones parciales**.

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicamos cada uno de los miembros de esta igualdad por el m.c.m. de los denominadores, que es $x(x-2)(x+1)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} x-1 &= A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) \\ &= A(x^2-x-2) + B(x^2+x) + C(x^2-2x) \\ &= Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - 2Cx \\ &= Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 - Ax + Bx - 2Cx - 2A \\ &= (Ax^2 + Bx^2 + Cx^2) + (-Ax + Bx - 2Cx) - 2A \\ &= (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x - 2A \end{aligned}$$

Aplicamos el método de los coeficientes indeterminados y tenemos:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -A + B - 2C &= 1 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema: $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$ y $C = -\frac{2}{3}$.

Luego, la integral queda así:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}dx &= \int \frac{\frac{1}{2}}{x}dx + \int \frac{\frac{1}{6}}{x-2}dx + \int \frac{-\frac{2}{3}}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{6}3\ln|x| + \ln|x-2| - 4\ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3(x-2)}{(x+1)^4}\right| + C \\ &= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3(x-2)}{(x+1)^4}\right| + C \end{aligned}$$

**Otra forma de calcular las constantes *A*, *B* y *C***

Al llegar a la expresión:

$x - 1 = A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$, para todo $x$ real, (1)
nos fijamos en los puntos donde se indetermina la fracción original ($x = 0$, $x = -1$, $x = 2$). Estos valores producen lo siguiente, cuando se reemplazan en la ecuación (1): si $x = 0$,

$$-1 = A(-2)(1)$$

De donde $A = \frac{1}{2}$; si $x = -1$,

$$-2 = C(-1)(-3)$$

De donde $C = -\frac{2}{3}$; finalmente si $x = 2$,

$$1 = B(2)(3)$$

De donde se sigue que $B = \frac{1}{6}$. Nótese que este método es mucho más práctico que resolver el sistema de ecuaciones, en el caso en que los factores lineales del denominador de la función racional sean distintos y con multiplicidad uno.

Ejemplo 52. Utilizando los casos anteriores podemos deducir algunas fórmulas como la siguiente:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

En efecto:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

Luego, multiplicamos por el mínimo común múltiplo, $(x-a)(x+a)$:

$$1 = A(x+a) + B(x-a) \quad (2)$$

Con $x = a$, y después $x = -a$ en (2), tenemos:

$$A = \frac{1}{2a} \quad \text{y} \quad B = -\frac{1}{2a}$$

Luego:
$$\begin{aligned}\int \frac{du}{x^2-a^2} &= \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \int \frac{\frac{1}{2a}}{x-a}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{2a}}{x+a}\,dx \\ &= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} \\ &= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\end{aligned}$$

De forma semejante podemos evaluar $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2-x^2} &= -\int \frac{dx}{x^2-a^2}\\ &= -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C\end{aligned}$$

## Segundo caso

Los factores del denominador son lineales y alguno(s) tiene(n) multiplicidad mayor a uno (factores lineales repetidos).

Ejemplo 53. Evaluar $\int \frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3}dx$.

Solución. Descomponemos $\frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3}$ en fracciones parciales.

El denominador $x^2(x-2)^3$ es el m.c.m. entre $x$, $x^2$, $(x-2)$, $(x-2)^2$ y $(x-2)^3$; por lo tanto podemos descomponer la fracción $\frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3}$ como:

$$\frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)}$$

Multiplicamos $x^2(x-2)^3$ por el m.c.m.,

$$\begin{aligned}x^3-1 &= A(x-2)^3 + Bx(x-2)^3 + Cx^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2(x-2)^2\\ &= A(x^3-6x^2+12x-8) + Bx(x^3-6x^2+12x-8) + Cx^2 +\\ &\quad Dx^3 - 2Dx^2 + Ex^2(x^2-4x+4)\\ &= (B+E)x^4 + (A-6B+D-4E)x^3 + (-6A+12B+C-2D+4E)x^2 +\\ &\quad (12A-8B)x - 8A\end{aligned}$$

Aplicamos coeficientes indeterminados y tenemos que:

$$\begin{aligned}B+E &= 0\\ A-6B+D-4E &= 1\\ -6A+12B+C-2D+4E &= 0\\ 12A-8B &= 0\\ -8A &= -1\end{aligned}$$

Resolvemos el sistema:

$$A = \frac{1}{8},\quad B = \frac{3}{16},\quad C = \frac{7}{4},\quad D = \frac{5}{4} \quad \text{y} \quad E = -\frac{3}{16}$$

Luego:

$$\frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3} = \frac{\frac{1}{8}}{x^2} + \frac{\frac{7}{4}}{(x-2)^3} + \frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{5}{4}}{(x-2)^2} + \frac{-\frac{3}{16}}{(x-2)}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3}dx &= \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x} + \frac{7}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^3} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{3}{16}\int \frac{dx}{(x-2)} \\ &= -\frac{1}{8x} + \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{7}{8(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{16}\ln|x-2| + \mathrm{C}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3}dx &= \frac{-11x^2+17x-4}{8x(x-2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + C \\ &= \frac{-11x^2+17x-4}{8x(x-2)^2} + \ln\sqrt[16]{\left(\frac{x}{x-2}\right)^3} + C\end{aligned}$$

Consideremos de nuevo la expresión:

$$x^3 - 1 = A(x-2)^3 + Bx(x-2)^3 + Cx^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2(x-2)^2 \qquad (3)$$

y tratemos de encontrar los valores de las constantes siguiendo el método descrito en el primer caso. Cuando hacemos $x = 0$ en (3), tenemos:

$$-1 = A(-2)^3 = -8A$$

De donde $A = 1/8$. Cuando hacemos $x = 2$ en (3), entonces:

$$7 = 4C$$

De donde $C = 7/4$. De tal forma que (3) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x^3 - 1 &= \frac{1}{8}(x-2)^3 + Bx(x-2)^3 + \frac{7}{4}x^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2(x-2)^2 \\ &= \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + Bx(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + \frac{7}{4}x^2 + \\ &\quad Dx^3 - 2Dx^2 + Ex^2(x^2 - 4x + 4) \\ &= (B+E)x^4 + \left(\frac{1}{8} - 6B + D - 4E\right)x^3 + \left(-\frac{3}{4} + 12B + \frac{7}{4} - 2D + 4E\right)x^2 + \\ &\quad \left(12\frac{1}{8} - 8B\right)x - 1\end{aligned}$$

De donde el sistema de ecuaciones lineales que hay que resolver es:

$$\begin{aligned} B + E &= 0 \\ 6B + D - 4E &= \tfrac{7}{8} \\ 12B - 2D + 4E &= -1 \\ 8B &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Así puede ser más fácil de resolver que a partir del sistema original.

Ejemplo 54. Evaluar $\int \frac{x^5+x^4-2x^2+1}{x^4+x^3}dx$.

Solución. Como es una fracción impropia, hacemos la división y obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5+x^4-2x^2+1}{x^4+x^3}dx &= \int \frac{x^5+x^4-2x^2+1}{x^3(x+1)}dx \\ &= \int xdx + \int \frac{-2x^2+1}{x^3(x+1)}dx \end{aligned}$$

Resolvemos por fracciones parciales la integral $\int \frac{-2x^2+1}{x^3(x+1)}dx$:

$$\frac{-2x^2+1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 1 &= Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3 \\ &= Ax^3 + Ax^2 + Bx^2 + Bx + Cx + C + Dx^3 \\ &= (Ax^3 + Dx^3) + (Ax^2 + Bx^2) + (Bx + Cx) + C \\ &= (A+D)x^3 + (A+B)x^2 + (B+C)x + C \end{aligned}$$

Ahora igualamos los coeficientes:

$$\begin{aligned} A + D &= 0 \\ A + B &= -2 \\ B + C &= 0 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Resolvemos $A = -1, B = -1, C = 1$ y $D = 1$; luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5+x^4-2x^2+1}{x^4+x^3}dx &= \int xdx - \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^3} + \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \ln|x+1| + C \\ &\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| + \frac{x^4+2x-1}{2x^2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 55. Evaluar $\int \frac{x^5-2x^2+1}{(x-1)^4}dx$.

Solución.

$$\frac{x^5-2x^2+1}{(x-1)^4} \tag{4}$$

Esta fracción se puede descomponer como se ha hecho antes. Pero esta vez, recurriremos al siguiente artificio "natural" (ideado por David Rose, Florida Southern College). Sustituimos $x-1$ por $t$ en (4) para obtener la forma:

$$\begin{aligned}\frac{x^5-2x^2+1}{(x-1)^4} = \frac{(t+1)^5-2(t+1)^2+1}{t^4} &= \frac{t^5+5t^4+10t^3+8t^2+t}{t^4}\\ &= \frac{t^5}{t^4}+\frac{5t^4}{t^4}+\frac{10t^3}{t^4}+\frac{8t^2}{t^4}+\frac{t}{t^4}\\ &= t+5+\frac{10}{t}+\frac{8}{t^2}+\frac{1}{t^3}\end{aligned}$$

De donde sustituimos $t$ por $x-1$:

$$\frac{x^5-2x^2+1}{(x-1)^4} = (x-1)+5+\frac{10}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^5-2x^2+1}{(x-1)^4}dx = \frac{x^2}{2}+4x+10\ln|x-1|-\frac{8}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$$

Vale la pena que el lector trate de resolverlo por el método tradicional.

## Tercer caso

El denominador puede descomponerse en factores lineales y al menos un factor cuadrático irreducible de multiplicidad uno (no repetido).

Si tenemos un factor cuadrático irreducible en el denominador y la fracción es propia, el numerador es a lo sumo un polinomio de primer grado; es decir, tenemos una expresión de la forma:

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$$

Ejemplo 56. Evaluar $\int \frac{tdt}{t^4+6t^2+5}$.

Solución.

$$\int \frac{tdt}{t^4+6t^2+5} = \int \frac{tdt}{(t^2+5)(t^2+1)} = \int \frac{A_1 t+B_1}{t^2+5} + \frac{A_2 t+B_2}{t^2+1}dt$$

Utilizamos coeficientes indeterminados:

$$t = (A_1 t + B_1)(t^2 + 1) + (A_2 t + B_2)(t^2+5)$$

Multiplicamos, asociamos y factorizamos:

$$t = (A_1+A_2)t^3+(B_1+B_2)t^2+(A_1+5A_2)t+(B_1+5B_2)$$

Igualamos los coeficientes y obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ B_1 + B_2 &= 0 \\ A_1 + 5A_2 &= 1 \\ B_1 + 5B_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema $A_1 = -\frac{1}{4}$, $A_2 = \frac{1}{4}$, $B_1 = 0$ y $B_2 = 0$. Ahora integramos:

$$\begin{aligned} \int \frac{tdt}{(t^2+5)(t^2+1)} &= \int \frac{\left(-\frac{1}{4}t+0\right)}{t^2+5}dt + \int \frac{\left(\frac{1}{4}t+0\right)}{t^2+1}dt \\ &= -\frac{1}{4}\int \frac{t}{t^2+5}dt + \frac{1}{4}\int \frac{t}{t^2+1}dt \\ &= -\frac{1}{8}\ln|t^2+5| + \frac{1}{8}\ln|t^2+1| + C \\ &= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{t^2+1}{t^2+5}\right| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 57. Evaluar $\int \frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}dx$

Solución. Con ayuda del teorema del factor y la regla de Ruffini, factorizamos con los divisores del término independiente 1, que son ±1, y los reemplazamos en $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, para ver si se anula el polinomio $P(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$. Luego, por el teorema del factor, $P(x)$ es divisible entre $(x - 1)$. Ahora utilizamos la regla de Ruffini para la división sintética así:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 1 & -1 & \underline{1} \\ & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Luego, $P(x) = (x - 1)(x^2+1)$; de esta manera el denominador de la integral factorizado queda:

$$\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}dx$$

Utilizando fracciones parciales:

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2x+A_3}{x^2+1}$$

Multiplicamos por $(x-1)(x^2+1)$ y utilizamos coeficientes indeterminados

$$\begin{aligned} 3x^2+x-2 &= A_1(x^2+1)+(A_2x+A_3)(x-1) \\ &= A_1x^2+A_1+A_2x^2+A_3x-A_2x-A_3 \\ &= (A_1x^2+A_2x^2)+(A_3x-A_2x)+A_1-A_3 \\ &= (A_1+A_2)x^2+(A_3-A_2)x+A_1-A_3 \end{aligned}$$

De donde resultan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_1+A_2 &= 3 \\ A_3-A_2 &= 1 \\ A_1-A_3 &= -2 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos $A_1 = 1$, $A_2 = 2$ y $A_3 = 3$. Luego:

$$\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x+3}{x^2+1}dx$$

Resolvemos la integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^2+1}dx &= \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{3}{x^2+1}dx \\ &= \int \frac{2x}{x^2+1}dx + 3\int \frac{dx}{x^2+1} \end{aligned}$$

En $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$, sea $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$, luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x^2+1}dx &= \int \frac{1}{u}du \\ &= \ln|u| + C_1 \\ &= \ln|x^2+1| + C_1 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$3\int \frac{dx}{x^2+1} = 3\arctan(x) + C_2$$

Finalmente, reunimos todas las integrales con sus respectivos signos:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)(x^2+1)}dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x+3}{x^2+1}dx \\ &= \ln|x-1| + \ln|x^2+1| + 3\arctan(x) + C \\ &= \ln|(x-1)(x^2+1)| + 3\arctan(x) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 58. Evaluar $\int \frac{x^3-2x}{x^4-81}dx$.

Solución.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-2x}{x^4-81}dx &= \int \frac{x^3-2x}{(x-3)(x+3)(x^2+9)}dx\\ &= \int \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+9}\,dx\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}x^3-2x &= A(x+3)(x^2+9)+B(x-3)(x^2+9)+(Cx+D)(x+3)(x-3)\\ &= A(x^3+3x^2+9x+27)+B(x^3-3x^2+9x-27)+C(x^3-9x)+D(x^2-9)\\ &= (A+B+C)x^3+(3A-3B+D)x^2+(9A+9B-9C)x+(27A-27B-9D)\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}A+B+C &= 1\\ 3A-3B+D &= 0\\ 9A+9B-9C &= -2\\ 27A-27B-9D &= 0\end{aligned}$$

De donde tenemos:

$$A=\frac{7}{36},\ B=\frac{7}{36},\ C=\frac{11}{18},\ D=0.$$

Integramos:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-2x}{(x-3)(x+3)(x^2+9)}dx &= \frac{7}{36}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{7}{36}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{11}{18}\int\frac{xdx}{x^2+9}\\ &= \frac{7}{36}\ln|x-3|+\frac{7}{36}\ln|x+3|+\frac{11}{36}\ln|x^2+9|+C\\ &= \frac{1}{36}\ln|(x-3)^7(x+3)^7(x^2+9)^{11}|+C\end{aligned}$$

## Cuarto caso

El denominador contiene factores cuadráticos repetidos (con multiplicidad mayor a uno).

Ejemplo 59. Evaluar $\int \frac{dz}{z(z^2+1)^2}$.

Solución.

$$\int \frac{dz}{z(z^2+1)^2} = \int \left[\frac{A_0}{z} + \frac{A_1 z + B_1}{z^2+1} + \frac{A_2 z + B_2}{(z^2+1)^2}\right] dz$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 &= A_0(z^2+1)^2 + (A_1 z + B_1)(z)(z^2+1) + (A_2 z + B_2)(z) \\ &= A_0(z^4 + 2z^2 + 1) + A_1(z^4 + z^2) + B_1(z^3 + z) + A_2 z^2 + B_2 z \\ &= (A_0 + A_1)z^4 + B_1 z^3 + (2A_0 + A_1 + A_2)z^2 + (B_1 + B_2)z + A_0 \end{aligned}$$

Aplicamos coeficientes indeterminados y tenemos los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 &= 0 \\ B_1 &= 0 \\ 2A_0 + A_1 + A_2 &= 0 \\ B_1 + B_2 &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema, $A_0 = 1, A_1 = -1, A_2 = -1$ y $B_2 = 0$. Regresamos a la integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z(z^2+1)^2} &= \int \frac{dz}{z} - \int \frac{zdz}{z^2+1} - \int \frac{zdz}{(z^2+1)^2} = \ln|z| - \frac{1}{2}\ln|z^2+1| \\ &\quad + \frac{1}{2(z^2+1)^2} + C \\ &= \frac{1}{2} 2\ln z - \ln(z^2+1) + \frac{1}{2(z^2+1)} + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z^2}{z^2+1}\right) + \frac{1}{2(z^2+1)} + C \\ &= \ln\sqrt{\frac{z^2}{z^2+1}} + \frac{1}{2(z^2+1)} + C \end{aligned}$$

### 6.5.2.4 (Opcional) Integrales que dan funciones trigonométricas inversas

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen} u + C$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arcsec} u + C$$

Ejemplo 60. Evaluar $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Solución.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \int \left[\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}\right] dx$$

Seguimos el procedimiento explicado anteriormente y obtenemos que:

$$A = 0,\ C = 0,\ B = \tfrac{1}{3}\ \text{ y }\ D = -\tfrac{1}{3}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} &= \int \frac{\frac{1}{3}dx}{x^2+1} + \int \frac{-\frac{1}{3}dx}{x^2+4} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} \\
&= \frac{1}{3}\arctan(x) - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

Existen integrales más elaboradas en las que se recurre a artificios matemáticos, en aras de llevar la integral a formas estándares. Como un ejemplo especial, damos el siguiente:

Ejemplo 61. Evaluar $\int \dfrac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+4x+5)}$.

Solución. Tenemos que:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+4x+5)} = \int \left[\frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}\right] dx$$

Luego:

$$\begin{aligned}
1 &= (Ax+B)(x^2+4x+5) + (Cx+D)(x^2+2x+2) \\
&= Ax^3 + 4Ax^2 + 5Ax + Bx^2 + 4Bx + 5\mathrm{B} + Cx^3 + 2Cx^2 + 2Cx + Dx^2 + 2Dx + 2\mathrm{D} \\
&= (A+C)x^3 + (4A+B+2C+D)x^2 + (5A+4B+2C+2D)x + 5B + 2D
\end{aligned}$$

De donde resulta que:

$$\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
4A + B + 2C + D &= 0 \\
5A + 4B + 2C + 2D &= 0 \\
5B + 2D &= 1
\end{aligned}$$

Resolvemos el sistema y se obtiene:

$$A = -\frac{2}{5},\ B = -\frac{1}{5},\ C = \frac{2}{5}\ \text{ y }\ D = 1.$$

Así pues,

$$\int \left[\frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}\right] dx = \int \frac{-\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}}{x^2+2x+2}\, dx + \int \frac{\frac{2}{5}x+1}{x^2+4x+5}\, dx$$

Resolvemos por separado cada una de estas dos integrales. La primera integral del lado derecho:

$$\int \frac{-\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}}{x^2+2x+2}\,dx = -\frac{1}{5}\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$$
$$= -\frac{1}{5}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{-1}{x^2+2x+2}\,dx$$
$$= -\frac{1}{5}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

En el numerador, se hizo 1 = 2 — 1. Ahora, en esta última expresión $\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$, hacemos 2 = 1+1 en el denominador para llevarlo a la forma estándar de arctan $(u)$. Entonces nos queda:

$$\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+1+1} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

Hacemos $u = x + 1$; entonces $du = dx$, y:

$$\frac{1}{5}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{5}\arctan(u) + C_1 = \frac{1}{5}\arctan(x+1) + C_1$$

Ahora en la integral:

$$-\frac{1}{5}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx$$

Al hacer $u = x^2+2x+2$, entonces $du = (2x+2)dx$. Al reemplazar queda:

$$-\frac{1}{5}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx = -\frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{5}\ln|u| + C_2$$
$$= -\frac{1}{5}\ln|x^2+2x+2| + C_2$$

Por lo tanto, la primera parte de la integral propuesta queda así:

$$-\frac{1}{5}\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx = -\frac{1}{5}\ln|x^2+2x+2| + C_1 + \frac{1}{5}\arctan(x+1) + C_2$$

Ahora se toma la segunda integral:

$$\int \frac{\frac{2}{5}x+1}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{2x+5}{x^2+4x+5}\,dx$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{2x+4+1}{x^2+4x+5}\,dx$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$$
$$= \frac{1}{5}\ln|x^2+4x+5| + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$$

En esta última integral, como 5 = 4 + 1, lo reemplazamos y asociamos:

$$\frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)+1}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

Hacemos $u = x+2$, entonces $du = dx$; luego queda:

$$\frac{1}{5}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{5}\ \text{arctan}\,(x+2)+C$$

Ahora reunimos estas dos últimas integrales:

$$\frac{1}{5}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{5}\ln|x^2+4x+5| + \frac{1}{5}\ \text{arctan}\,(x+2)+C$$

Finalmente, se suman las cuatro soluciones de las integrales que forman la original y se obtiene la solución de la integral propuesta. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+4x+5)} &= -\frac{1}{5}\ln|x^2+2x+2| + \frac{1}{5}\ \text{arctan}\,(x+1)\\ &\quad +\frac{1}{5}\ln|x^2+4x+5| + \frac{1}{5}\ \text{arctan}\,(x+2)+C\\ &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^2+4x+5}{x^2+2x+2}\right| + \frac{1}{5}\ \text{arctan}\,(x+1)\\ &= \left|\sqrt[5]{\frac{x^2+4x+5}{x^2+2x+2}}\right| + \frac{1}{5}\ \text{arctan}\,(x+1) + \frac{1}{5}\ \text{arctan}\,(x+2)+C\end{aligned}$$

Ejemplo 62. Evaluar $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Solución. Sea $u = 2x$; entonces $du = 2dx$, de donde $dx = \frac{du}{2}$. Luego la integral nos queda así:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}\\ &= \int \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{1-u^2}}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\\ &= \frac{1}{2}\ \text{arcsen}\ (u)+C\\ &= \frac{1}{2}\ \text{arcsen}\ (2x)+C\end{aligned}$$

Ejemplo 63. Evaluar $\int \frac{dx}{9+x^2}$.

Solución. Sea $u = \frac{1}{3}x$, entonces $du = \frac{1}{3}dx$ y $dx = 3du$; luego, la integral nos queda así:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{9+x^2} &= \int \frac{dx}{91+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{3du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} \\
&= \frac{1}{3}\arctan(u) + C \\
&= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 64. Evaluar $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$.

Solución. Sea $u = 2x$, entonces $du = 2dx$ y $dx = \frac{du}{2}$; luego la integral nos queda así:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} &= \int \frac{2dx}{2x\sqrt{(2x)^2-1}} \\
&= 2\int \frac{dx}{2x\sqrt{(2x)^2-1}} \\
&= 2\int \frac{\frac{1}{2}du}{u\sqrt{u^2-1}} \\
&= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} \\
&= \operatorname{arcsec}(u) + C \\
&= \operatorname{arcsec}(2x) + C
\end{aligned}
$$

## EJERCICIO 6.5

Evaluar las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x^2-4}$;
2. $\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$;
3. $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$;
4. $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$;
5. $\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}dx$;
6. $\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}dx$;
7. $\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$;
8. $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}dx$;
9. $\int \frac{dx}{(x+2)^3}$;

10. $\int \frac{dt}{(t+2)^2(t+1)}$;

11. $\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2}\,dx$;

12. $\int \frac{x^4+3x^3-5x^2-4x+17}{x^3+x^2-5x+3}\,dx$;

13. $\int \frac{x^2+3x+4}{x-2}\,dx$;

14. $\int \frac{x^3+x^2-x-3}{x+2}\,dx$;

15. $\int \frac{x^3-x^2+2x+3}{x^2+3x+2}\,dx$;

16. $\int \frac{2x^3+3x^2-4}{x^2-4x+3}\,dx$;

17. $\int \frac{x^2+2x+3}{x^2-3x+2}\,dx$;

18. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x}\,dx$;

19. $\int \frac{x^2-2x-1}{x^2-4x+4}\,dx$;

20. $\int \frac{x^2+2x+3}{(x+1)(x-1)(x-2)}\,dx$;

21. $\int \frac{3x-2}{(x+2)(x+1)(x-1)}\,dx$;

22. $\int \frac{x^3+2}{x^2+4}\,dx$;

23. $\int \frac{2x^2+3x-1}{(x+3)(x+2)(x-1)}\,dx$;

24. $\int \frac{x^2-2}{(x+1)(x-1)^2}\,dx$;

25. $\int \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$;

26. $\int \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx$;

27. $\int \frac{x-3}{(x+1)^2(x-1)^2}\,dx$;

28. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx$;

29. $\int \frac{2x+3}{(x+2)(x-1)^2}\,dx$;

30. $\int \frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-3)}\,dx$;

31. $\int \frac{x^3-3x+4}{(x+1)(x-1)^3}\,dx$;

32. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-1)^2}\,dx$;

33. $\int \frac{x^3+3x^2-2x+1}{x^4+5x^2+4}\,dx$;

34. $\int \frac{x^2}{x^4-5x^2+4}\,dx$;

35. $\int \frac{x^2-x+1}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}\,dx$;

36. $\int \frac{x^3-2x^2+3x-4}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\,dx$;

37. $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx$;

38. $\int \frac{x^3+x^2-2x-3}{(x+1)^2(x-2)^2}\,dx$;

39. $\int \frac{x^2-3x+5}{x^4-8x^2+16}\,dx$;

40. $\int \frac{4x^3+8x^2-12}{(x^2+4)^2}\,dx$;

41. $\int \frac{y^4-8}{y^3+2y^2}\,dx$;

42. $\int \frac{2t^2-8t-8}{(t-2)(t^2-2)}\,dx$;

43. $\int \frac{z^2}{(z-1)^3}\,dx$;

44. $\int \frac{t^5}{(t^2+4)^2}\,dx$;

45. $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx$;

46. $\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}\,dx$;

47. $\int \frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x}\,dx$;

48. $\int \frac{x^3+3x}{(x^2+1)^2}\,dx$;

49. $\int \frac{2x+2}{x^2-6x+8}\,dx$;

50. $\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}\,dx$;

51. $\int \frac{6x^2-15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2}\,dx$.

## 6.6 Ecuaciones diferenciales

Cuando tenemos una función $f$, que es la derivada de alguna función $F$ que no conocemos (es decir, $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ó $dy = f(x)dx$, y $x \in (a, b)$, contamos esencialmente con una ecuación que contiene la derivada o diferencial de una función desconocida (incógnita).

**Definición 2.** Una ecuación que contenga derivadas de una variable dependiente con respecto a una o más variables independientes se denomina ecuación diferencial.

Ejemplo 65. Los siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = 2x; \quad \frac{dy}{dx} = 2xy; \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 3y = x^2 + 3y^3.$$

Cuando la ecuación contiene sólo la primera derivada, se denomina de primer orden. Si contiene sólo una variable independiente con respecto a una variable dependiente, se denomina ordinaria.

Ejemplo 66. $y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Ejemplo 67. $\frac{dy}{dx} = 2xy$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en la que podemos separar las variables $\frac{dy}{y} = 2xdx$.

Ejemplo 68. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = x$ es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

**Definición 3.** Una función $F$ definida como $y = F(x)$ tal que $\frac{dF}{dx} = f(x)$ con $x \in (a, b)$ se denomina una solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

Ejemplo 69. Dada $\frac{dy}{dx} = 2x$, la familia de funciones $F(x) = x^2 + C$ es la solución de la ecuación. A esta familia se la denomina solución general de la ecuación.

Si $C$ toma algún valor (por ejemplo, $C = 5$), la función $F(x) = x^2 + 5$ se denomina solución particular de la ecuación.

Ejemplo 70. Dada la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-10\ y\ =0$, verifique que $y = e^2x$ es solución particular de la ecuación.

Solución. Si $y = e^{2x}$ tenemos que $\frac{dy}{dx}=2e^{2x}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}=4e^{2x}$. Reemplazamos $y$ en la ecuación y queda:

$$4e^{2x}+3(2e^{2x})-10e^{2x} = 4e^{2x}+6e^{2x}-10e^{2x} = 0$$

Luego, se cumple la igualdad; por lo tanto $y = e^{2x}$ es solución de la ecuación.

## 6.6.1 Ecuación diferencial de variables separables

A una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)} \text{ con } g\,(y)\neq 0$$

que se puede expresar como:

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

se la denomina ecuación diferencial de variables separables. Al resolver la ecuación tenemos:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx.$$

Evaluamos las integrales:

$$G(y) + C_1 = F(x) + C_2$$

Hacemos $C_2 - C_1 = C$ y se tiene

$$G(y) = F(x)+C \text{ es la solución general.}$$

Recordemos que, geométricamente, la familia de funciones $G(y) = F(x)+C$ es una familia de curvas paralelas. Es decir, si un punto $(x_0, y_0)$ forma parte de la solución, significa que **existe exactamente** una curva o función que lo contiene. Esta función es una **solución particular** de la ecuación diferencial. Al punto $(x_0, y_0)$ que permite determinar la constante $C$ se lo denomina condición inicial.

Ejemplo 71. Resolver $\frac{dy}{dx}=2x+5$, si $y = 10$ cuando $x = 0$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2x+5\\ dy &= (2x+5)dx\\ y &= \int (2x+5)\,dx = x^2+5x+C\end{aligned}$$

Como $y = 10$ cuando $x = 0$, reemplazamos y tenemos:

$$10 = 0^2+5(0)+C$$

De donde $C = 10$; por lo tanto, $y = x^2+5x+10$ es la solución particular.

Ejemplo 72. Resolver $\frac{dy}{dx} = 2xy$, si $y = 400$ cuando $x = 0$.

Solución. $\frac{dy}{dx} = 2xy$

Separamos variables y tenemos que: $\frac{dy}{y} = 2x\ dx$; integramos a cada lado:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int 2xdx \\ \ln(y) &= x^2 + C \end{aligned}$$

Ahora, por definición de logaritmo:

$$y = e^{x^2 + C} = e^{x^2}\, e^{C}$$

Hacemos $e^C = C_0$; entonces $y = C_0 e^{x^2}$ es la solución general. Como $y = 400$ cuando $x = 0$, reemplazamos y tenemos $400 = C_0\, e^0$, de donde se tiene que $C_0 = 400$; por lo tanto, $y = 400\, e^{x^2}$ es una solución particular.

Ejemplo 73. Si $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2ax}}$, siendo $p = 2a$ cuando $x = \frac{1}{2}a^3$, hallar el valor de $p$ si $x = 2a^3$.

Solución. Para hallar $p$ integramos:

$$\int dp = \int \frac{dx}{\sqrt{2ax}} = \int (2ax)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$u = 2ax$, $du = 2adx$ y $dx = \frac{du}{2a}$; luego:

$$\begin{aligned} \int dp &= \int u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{2a} \\ p &= \frac{1}{2a} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

O sea, $p = \frac{1}{a}\, u^{\frac{1}{2}} + C$; reemplazamos $u$ por $2ax$:

$$p = \frac{1}{a}(2ax)^{\frac{1}{2}} + C$$

$p = 2a$ cuando $x = \frac{1}{2}a^3$, entonces:

$$\begin{aligned} 2a &= \frac{1}{a}\left(2a\ \frac{1}{2}\ a^3\right)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{1}{a}(a^4)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{a^2}{a} + C \\ &= a + C \end{aligned}$$

De donde $C = a$; por lo tanto:

$$p(x) = \frac{1}{a}(2ax)^{\frac{1}{2}} + a.$$

Ahora, si $x = 2a^3$, se tiene que:

$$\begin{aligned} p(2a^3) &= 2a + a \\ &= 3a \end{aligned}$$

Ejemplo 74. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $P(1, 2)$, cuya recta tangente en dicho punto tiene $m = 5/2$ y para la cual $\frac{d^2y}{dx^2} = x$.

Solución. Recordemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x \end{aligned}$$

De donde:

$$\frac{dy}{dx} = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1 \qquad (1)$$

Como la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, tenemos que en $x = 1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}$. Reemplazamos en (1) y tenemos $\frac{5}{2} = \frac{(1)^2}{2} + C_1$, de donde $C_1 = 2$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2}{2} + 2 \\ \int dy &= \int \left(\frac{x^2}{2} + 2\right) dx \\ y &= \frac{1}{6}x^3 + 2x + C_2 \end{aligned}$$

Como $y = 2$ cuando $x = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{6}(1)^3 + 2(1) + C_2 \\ C_2 &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la curva es:

$$y = \frac{1}{6}x^3 + 2x - \frac{1}{6}$$

Ejemplo 75. Hallar la ecuación de la curva para la cual $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^2$, que pasa por los puntos $P_1(0, 2)$ y $P_2(-1, 3)$.

Solución. Seguimos el procedimiento del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 6\int x^2 dx^2 = 2x^3 + C_1 \\ \int dy &= \int (2x^3 + C_1)dx \end{aligned}$$

De donde:

$$y = \frac{1}{2}(x^4) + C_1 x + C_2 \qquad (2)$$

Como $y = 2$ cuando $x = 0$, y $y = 3$ cuando $x = -1$, reemplazamos en (2):

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{2}(0)^4 + C_1(0) + C_2 \\ C_2 &= 2 \end{aligned}$$

A continuación:

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{1}{2}(-1)^4 + C_1(-1) + 2 \\ C_1 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la ecuación de la curva es:

$$y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x + 2$$

***NOTA:*** *No se puede aplicar la fórmula* $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *porque ella se refiere a la pendiente de la secante y no a la de la recta tangente.*

## EJERCICIO 6.6

1. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a. $\frac{dy}{dx} = e^{2x+3}$; b. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; c. $\frac{dy}{dx} = 2xy + y$;

d. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$; e. $\frac{dy}{dx} = x^2(x^3 + 1)^{-2}$; f. $\frac{dy}{dx} = x^{3/2}y^{-2/3}$;

g. $\frac{dP}{dt} = \sqrt{t} + e^{-t}$;  h. $\frac{d^2s}{dt^2} = g$;  i. $\frac{d^2y}{dx^2} = 24x + 2$;

j. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-1}$;  k. $\frac{dy}{dx} = e^{y}\sqrt{x+1}$;  l. $\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{(2x-5)^6}$;

m. $\frac{dy}{dx} = (e^{y}+1)(x-2)^9$;  n. $\frac{dx}{dt} = \frac{xt}{2t+1}$;  o. $\frac{dy}{dt} = \frac{te^{y}}{2t-1}$.

2. Halle la solución particular de la ecuación diferencial que satisface la condición dada.

a. $\frac{dy}{dx} = (2x+3); y = 12 \quad \text{si} \quad x = 1$;  b. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \text{si} \;\; y_0 = y(0) = 4$;

c. $\frac{dy}{dx} = xy \quad \text{si} \quad y(0) = P$;  d. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}; \;\; y = 1 \quad \text{si} \quad x = e$;

e. $\frac{d^2y}{dx^2} = -10; y'(0) = 100, y(0) = 0$;  f. $\frac{d^2y}{dx^2} = 24x; y(0) = 0, y(2) = 10$;

g. $\frac{dy}{dx} = y^2\sqrt{4-x}; y = 2$ cuando $x = 4$;  h. $\frac{dy}{dx} = xe^{y-x^2}; y = 0 \quad \text{si} \quad x = 1$;

i. $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x\,(y-1)}; y = 2$ cuando $x = 1$ $\left(\text{sugerencia: } \frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1}\right)$;

j. $\frac{dx}{dt} = xt\sqrt{t+1}; x = 1$ cuando $t = 0$.

3. Verifique las siguientes afirmaciones:

a. $y = Ce^2x$ es solución de la ecuación $y'' + y' - 6y = 0$;

b. $Q = B - Ce^{-kt}$ es solución de la ecuación $\frac{dQ}{dt} = k(B - Q)$.

4. Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$ y contiene el punto $(1, 2)$;

b. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 2$ y contiene el punto $(0, 6)$;

c. $\frac{dy}{dx} = x^3 - \frac{2}{x^2} + 2$ y contiene el punto $(1, 3)$.

5. Halle una función polinómica que tenga un máximo relativo en $x = 1$, y un mínimo relativo en $x = 4$.

6. En cada caso halle la ecuación de la curva que cumpla la condición dada:

   a. $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$ y su gráfica pasa por el punto $P(1, 5)$;

   b. $\frac{dy}{dx} = x^2 + x - 1$ y su gráfica pasa por el punto $P(0, 5)$;

   c. $\frac{dy}{dx} = 2x - 5$ y su gráfica pasa por el punto $P(5, 4)$;

   d. $\frac{dy}{dx} = (x + 1)(x + 2)$ y su gráfica pasa por el punto $P\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$;

   e. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{x^2 + 5}$ y su gráfica pasa por el punto $P(2, 10)$;

   f. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1-3x^2}$ y su gráfica pasa por el punto $P(0, 5)$.

7. Si $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$, siendo $y = 2$ cuando $x = 3$, halle el valor de $y$ cuando $x = 5$.

8. Halle la ecuación de la curva para la cual $\frac{d^3y}{dx^3} = 2$, cuya pendiente de la recta tangente en su punto de inflexión $P(1, 3)$ es $-2$.

9. Halle la ecuación de la curva que satisface $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{x^3}$ y que tiene como recta tangente a $2x+y = 5$ en el punto $P(1, 3)$.

10. Encuentre la ecuación de la curva que pasa por el punto $P(-1, 2)$, cuya pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la curva es igual al doble de la abscisa de ese punto.

11. Encuentre la ecuación de la curva que pasa por el punto $P(1, 2)$, cuya pendiente de la recta tangente en cualquiera de sus puntos es cuatro veces su coordenada $x$.

## 6.6.2 Problemas de aplicación

Algunas aplicaciones del cálculo diferencial en economía consistían en mostrar la variación de una función con respecto a una cantidad de la cual dependía dicha función, de lo que resultaban funciones tales como costo, ingreso y utilidad marginales. Dada la relación existente entre derivación e integración presentada anteriormente, es posible obtener las funciones de costo, ingreso y utilidad a partir de sus correspondientes funciones marginales y de una condición inicial que proporciona el valor exacto de la constante de integración, que resulta al solucionar toda integral indefinida.

De manera similar se procede para encontrar ecuaciones correspondientes al tamaño de una población, conocida su tasa de crecimiento, y en algunas aplicaciones de la física, como se verá a continuación.

Ejemplo 76. Una compañía actualmente produce 150 unidades por semana de un producto. Por experiencia, saben que el costo de producir la unidad número $x$ en una semana (costo marginal) está dado por:

$$C'(x) = 25 - 0{,}02x.$$

Determine el costo extra por semana que debería considerarse al elevar la producción de 150 a 200 unidades por semana.

Solución. El costo marginal es la derivada de la función de costo. En consecuencia, la función de costo se obtiene al integrar la función de costo marginal:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int C'(x)dx = \int (25 - 0{,}02x)dx \\ &= 25x - 0{,}01x^2 + k \end{aligned}$$

$k$ es la constante de integración. No se tiene información suficiente para poder determinar el valor de $k$. Sin embargo, se desea calcular el incremento en el costo que resulta de elevar $x$ de 150 a 200; esto es, $C(200) - C(150)$, es decir:

$$C(200) = 25(200) - 0{,}01(200)^2 + k = 4.600 + k$$
$$C(150) = 25(150) - 0{,}01(150)^2 + k = 3.525 + k.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} C(200) - C(150) &= (4.600 + k) - (3.525 + k) \\ &= 1.075 \end{aligned}$$

Luego, el incremento en el costo semanal sería de \$1.075. Nótese que este incremento es independiente de la constante $k$. ¿Por qué?

Ejemplo 77. El ingreso marginal de una empresa está dado por:

$$R'(x) = 15 - 0{,}01x$$

a. Determine la función de ingreso.

b. Encuentre la relación de demanda para el producto de la empresa.

Solución.

a. La función de ingreso $R(x)$ es la integral de la función de ingreso marginal. Así que:

$$\begin{aligned} R(x) &= \int R'(x)dx \\ &= \int (15 - 0{,}01x)dx \\ &= 15x - 0{,}005x + k \end{aligned}$$

$k$ es la constante de integración. Para determinar $k$, se considera el hecho de que el ingreso es cero cuando no se venden unidades. Es decir, si $x = 0$, $R(0) = 0$.

Reemplazamos:

$$R(0) = 15(0) - 0{,}005(0^2) + k$$

De donde $k = 0$.

Por lo tanto la función de ingreso es $R(x) = 15x - 0{,}005x^2$.

b. Si cada artículo que la empresa produce se vende a un precio $p$, se tiene que el ingreso obtenido por la venta de $x$ artículos es $R(x) = px$. Así que:

$$px = 15x - 0{,}005x^2.$$

O sea:

$$p = 15 - 0{,}005x.$$

Ésta es la relación de demanda requerida.

Ejemplo 78. El costo marginal de un artículo cuando se producen $q$ unidades es $-3q^2 + 60q + 4.000$ pesos por unidad. Si el costo total de producción de las 10 primeras unidades es \$90.000, ¿cuál es el costo total de producción de las 50 primeras unidades?

Solución. Recordemos que el costo marginal se puede aproximar con la derivada de la función de costo total $C(q)$. Es decir,

$$C'(q) = \frac{dC}{dq} = -3q^2 + 60q + 4000$$

De donde:

$$\begin{aligned} C(q) &= \int (-3q^2 + 60q + 4.000)\, dq \\ &= -q^3 + 30q^2 + 4.000q + K \end{aligned}$$

Como $C(10) = 90.000$, tenemos:

$$\begin{aligned} 90.000 &= -(10)^3 + 30(10)^2 + 4.000(10) + K \\ &= -1.000 + 3.000 + 40.000 + K \end{aligned}$$

De donde $K = 48.000$. Por lo tanto,

$$C(q) = -q^3 + 30q^2 + 4.000q + 48.000$$

El costo de producción de las 50 primeras unidades es de:

$$C(50) = -(50)^3 + 30(50)^2 + 4.000(50) + 48.000 = 198.000$$

### 6.6.2.1 Modelos poblacionales

Ejemplo 79. La población de Bogotá está creciendo a cada instante en forma directamente proporcional a su población de ese momento. Si en 1994 su población era de 5,5 millones y en 1999 es de 7 millones, calcular:

a. La población de Bogotá en el año 2020.

b. ¿En cuántos años se duplica la población?

Solución.

a. Sea $P(t)$ la población de Bogotá en función del tiempo. Como ésta varía en forma directamente proporcional a su población, tenemos que:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Observe que $k$ es la tasa de crecimiento continua. ¿Por qué?
Si consideramos como población inicial la de 1994, tenemos que resolver la ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = kP \text{ con } P_0 = 5{,}5 \quad \text{y} \quad P(5) = 7.$$

Si $\frac{dP}{dt} = kP$, separamos variables y tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= kdt \\ \int \frac{dP}{P} &= \int kdt \\ \ln|P| &= kt + C \end{aligned}$$

Como $P>0$, se tiene que:

$$P = e^{kt+C} = e^{kt}\, e^{C}$$

Hacemos $e^{C} = C^{0}$ y queda:

$$P = C_0\, e^{kt}$$

$P(0) = 5{,}5$; reemplazamos:

$$5{,}5 = C_0\, e^{0}$$
$$C_0 = 5{,}5$$

Por lo tanto:

$$P = 5{,}5e^{kt}$$

Para hallar la tasa de crecimiento sabemos que $P(5) = 7$; reemplazamos:

$$\begin{aligned} 7 &= 5{,}5e^{5k} \\ e^{5k} &= 1{,}27 \\ 5k &= \ln(1{,}27) \\ k &= \frac{\ln 1{,}27}{5} = 0{,}048 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento es del 4,8%. La población en función del tiempo es:

$$P(t) = 5{,}5e^{0{,}048t}$$

Para el año 2020, $t = 26$ y $P(26) = 5{,}5e^{(0{,}048)(26)} = 19{,}1585$ millones de habitantes.

b. Para determinar en cuántos años se duplica la población, hacemos $P = 2P_0$. Reemplazamos:

$$\begin{aligned} 2P_0 &= P_0\, e^{0{,}048t} \\ e^{0{,}048t} &= 2 \\ 0{,}048t &= \ln 2 \\ t &= \frac{\ln 2}{0{,}048} = 14{,}44 \text{ años} \end{aligned}$$

Ejemplo 80. Se estima que dentro de $x$ meses la población de cierta ciudad cambiará a una razón de $2 + 6\sqrt{x}$ personas por mes. Si la población actual es de 5.000 personas, ¿cuál será la población dentro de 9 meses?

Solución. Sea $P(x)$ la población dentro de $x$ meses. Entonces la razón de cambio de ésta con respecto al tiempo es la derivada:

$$\frac{dP}{dx} = 2 + 6\sqrt{x}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(x) &= \int \frac{dP}{dx}\,dx \\ &= \int (2 + 6\sqrt{x})\,dx \\ &= 2x + 4x^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Para determinar $C$, sabemos que en la actualidad (cuando $x = 0$) la población es de 5.000 personas; es decir,

$$\begin{aligned} 5.000 &= 2(0) + 4(0)^{\frac{3}{2}} + C \\ C &= 5.000 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$P(x) = 2x + 4x^{\frac{3}{2}} + 5.000$$

Dentro de 9 meses la población será:

$$P(9) = 2(9) + 4(27) + 5.000 = 5.126 \text{ habitantes}$$

Ejemplo 81. Se recibe un cargamento de 10.000 kg de arroz que se consumirán en un período de 5 meses a razón de 2.000 kg por mes. Si el costo de almacenamiento mensual por cada kilogramo es \$2, ¿cuánto se debe pagar en costos de almacenamiento en los próximos 5 meses?

Solución. Sea $S(t)$ el costo total de almacenamiento durante $t$ meses. Como el arroz se consume a una razón constante de 2.000 kg al mes, la cantidad de arroz consumida en $t$ meses es $2.000t$, y la cantidad de kg de arroz almacenados después de $t$ meses es $(10.000 - 2.000t)$. Como el costo de almacenamiento es \$2 por kilogramo al mes, la razón de cambio del costo de almacenamiento con respecto al tiempo es:

$$\frac{dS}{dt} = (\text{costo por kg})(\text{número de kg almacenados}) = 2(10.000 - 2.000t)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} S(t) &= \int (20.000 - 4.000t)dt \\ &= 20.000\text{t} - 2.000t^2 + C \end{aligned}$$

Para determinar $C$, sabemos que en el momento en que llega el cargamento (cuando $t = 0$), no hay costos de almacenamiento; es decir, $S(0) = 0$, de manera que:

$$0 = 20.000(0) - 2.000(0)^2 + C, \text{ de donde } C = 0.$$

Por lo tanto:

$$S(t) = 20.000t - 2.000t^2.$$

El costo total de almacenamiento durante los próximos 5 meses será:

$$S(5) = 20.000(5) - 2.000(5)^2 = \$50.000.$$

### 6.6.2.2 Velocidad y aceleración

Recordemos que si un objeto se mueve en línea recta con desplazamiento $s(t)$, su velocidad está dada por $v = \frac{ds}{dt}$ y su aceleración por $a = \frac{dv}{dt}$.

Ejemplo 82. Después de aplicar los frenos, la aceleración de un carro disminuye a una razón constante de 6 metros por $s^2$. Si en el momento de aplicar los frenos el carro viaja a 72 km por hora (20 m/s), ¿qué distancia recorre el carro antes de detenerse?

Solución. Sea $s(t)$ el desplazamiento (distancia) del carro en $t$ segundos después de aplicar los frenos. Como el carro desacelera a 5 m por $s^2$, se tiene que $a(t) = -6$, y:

$$\frac{dv}{dt} = a(t) = -6$$
$$v(t) = -\int 6dt = -6t + C_1$$

Para calcular $C_1$, obsérvese que $v = 20$ cuando $t = 0$, de manera que:

$$20 = v(0) = -6(0)+C_1$$

$C_1 = 20$. Así, la velocidad en el tiempo $t$ es $v(t) = -6t+20$. Para hallar el desplazamiento $s(t)$, tenemos:

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = -6t + 20$$
$$s(t) = \int(-6t + 20)dt = -3t^2 + 20t + C_2$$

Como $s(0) = 0$ (¿por qué?), $C_2 = 0$ y $s(t) = -3t^2+20t$. Para hallar la distancia recorrida, tenemos en cuenta que el carro se detiene cuando $v(t) = 0$. Es decir, $v(t) = -6t+20 = 0$, de donde $t = 3{,}333$ segundos. En ese tiempo ha recorrido:

$$s(3{,}333) = -11(3{,}333)^2 + 20(3{,}333) = 55{,}55 \text{ m}$$

### 6.6.2.3 Curva logística

Muchos problemas, como por ejemplo la propagación de un rumor (chisme), de un virus contagioso, de un mensaje publicitario, etc., se caracterizan por:

- estar dirigidos a una población finita, llamémosla $B$;
- si $Q(t)$ es la población que en el momento $t$ conoce el chisme, tenemos que su variación con respecto al tiempo es directamente proporcional a $Q$ (número de chismosos) y al número de personas que no conocen el chisme $B - Q(t)$ (si no hay a quien contarle el chisme, así hayan muchos chismosos, $Q(t)$ no varía).

De acuerdo a estas condiciones tenemos que:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q) \qquad (3)$$

con la condición de que $Q(0) = Q_0$ (el número de chismosos iniciales). $k$ es la constante de proporcionalidad; $Q(t)>0$ y $B \geq Q(t)$. Separamos variables en la ecuación (3):

$$\frac{dQ}{Q(B-Q)} = kdt$$

$$\int \frac{dQ}{Q(B-Q)} = \int kdt = kt + C \qquad (**)$$

Resolvemos la integral $\int \frac{dQ}{Q(B-Q)}$; por fracciones parciales tenemos:

$$\frac{1}{Q(B-Q)} = \frac{1}{B}\left[\frac{B}{Q(B-Q)}\right] = \frac{1}{B}\left[\frac{1}{Q} + \frac{1}{B-Q}\right]$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dQ}{Q(B-Q)} &= \frac{1}{B}\int \frac{1}{Q}dQ + \frac{1}{B}\int \frac{1}{B-Q}dQ \\
&= \frac{1}{B}\ln(Q) - \frac{1}{B}\ln(B-Q) \\
&= \frac{1}{B}\ln\left(\frac{Q}{B-Q}\right) \text{ (propiedades de los logaritmos)}
\end{aligned}$$

Reemplazamos en (**) y nos queda:

$$\frac{1}{B}\ln\left(\frac{Q}{B-Q}\right) = kt + C$$

O sea,

$$\ln\left(\frac{Q}{B-Q}\right) = Bkt + BC$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\frac{Q}{B-Q} &= e^{Bkt+BC} \\
&= e^{Bkt}e^{BC} \\
&= A_1e^{Bkt}, \text{ donde } A_1 = e^{BC}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
Q &= (B-Q)A_1e^{Bkt} = BA_1e^{Bkt} - QA_1e^{Bkt} \\
Q + QA_1e^{Bkt} &= A_1Be^{Bkt} \\
Q(1 + A_1e^{Bkt}) &= A_1Be^{Nkt} \\
Q &= \frac{A_1Be^{Bkt}}{1+A_1e^{Bkt}}
\end{aligned}$$

Dividimos el numerador y el denominador entre $A_1\, e^{Bkt}$; se tiene:

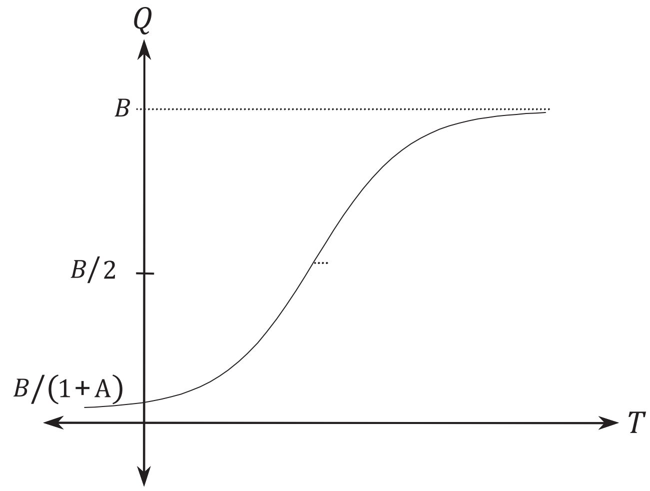
$$Q = \frac{B}{\frac{1}{A_1}e^{-Bkt} + 1}$$

Hacem os $A = \frac{1}{A_1}$; resulta:

$$Q(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$$

Ésta es la llamada *función logística*.

La gráfica de $Q$ se denomina curva logística. Se utiliza además como modelo de crecimiento demográfico cuando los factores ambientales imponen una cota superior del tamaño de población posible.




Ejemplo 83. La razón a la que se propaga una epidemia en una comunidad es conjuntamente proporcional a la cantidad de residentes que han sido infectados y al número de residentes propenso a la enfermedad que no han sido infectados. Expresar como una función del tiempo la cantidad de residentes que han sido infectados.

Solución. Sea $Q(t)$ la cantidad de residentes que han sido infectados en el momento $t$, y $B$ el número total de residentes propensos a la enfermedad. Entonces, el número total de residentes propensos que no han sido infectados es $B - Q(t)$. La ecuación diferencial que describe la propagación de la epidemia es:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q)$$

Su solución es:

$$Q(t) = \frac{B}{1+Ae^{-Bkt}}$$

## EJERCICIO 6.7

1. La función de costo marginal de una empresa es $C'(x) = 30 - 0{,}05x$.

   a. Determine la función de costo $C(x)$ , si los costos fijos de la empresa son de US \$2.000 al mes.

   b. ¿Cuánto costará producir 150 unidades en un mes?

2. El costo marginal de una empresa es $24 - 0{,}03x + 0{,}006x^2$. Si el costo de producir 200 unidades es de \$22.700, encuentre:

   a. la función de costo;

   b. los costos fijos de la empresa;

   c. el costo de producir 500 unidades.

3. El costo marginal de una compañía es $C'(x) = 3 - 0{,}001x$ y el costo de fabricar 100 unidades es de US \$995. ¿Cuál es el costo de producir 200 unidades?

4. El costo marginal de cierta empresa es $C(x) = 5 + 0{,}002x$. ¿Cuáles son los costos totales variables de fabricar $x$ unidades?

5. La función de ingreso marginal de cierta empresa es: $R'(x) = 20 - 0{,}02x - 0{,}003x^2$.

   a. Determine la función de ingreso.

   b. ¿Qué ingreso se obtendrá por la venta de 100 unidades del producto de la empresa?

   c. ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

6. La función de ingreso marginal de cierta empresa es $C'(x) = 4 - 0{,}01x$.

   a. Determine el ingreso obtenido por la venta de $x$ unidades de su producto.

   b. ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

7. La función de ingreso marginal de una cierta mercancía está dada por $R'(x) = 12 - 3x$. Si se demandan $x$ unidades cuando el precio unitario es $p$ dólares, obtenga:

   a. la función de ingreso total;

   b. la ecuación de la demanda.

8. La función de costo marginal de cierta mercancía está dada por $C'(x) = 3(5x + 4)^{-2}$. Si el costo fijo es de US \$10, halle la función del costo total.

9. Obtenga la ecuación de la demanda de cierta mercancía para la cual la función de ingreso marginal está dada por $R'(x) = 4 + 10(x + 5)^{-2}$.

10. La función de costo marginal de una mercancía está dada por $C'(x) = 6x - 17$. Si el costo de producción de 2 unidades es de US $25, obtenga la función de costo total.

11. La función de ingreso marginal está dada por $R'(x) = 16 - 3x^2$. Halle:

    a. la función de ingreso total;

    b. la ecuación de la demanda.

12. La función de costo marginal está dada por $C'(x) = 3x^2+8x+4$, y los costos fijos son de US $6. Si $C(x)$ dólares es el costo total de $x$ unidades, halle la función de costo total.

13. Una compañía ha determinado que la función de costo marginal para la producción de un artículo está dada por:

$$C'(x) = 125 + 10x + \frac{1}{9}x^2$$

donde $C(x)$ dólares es el costo total de producción de $x$ unidades del producto. Si los costos fijos son de US $250, ¿cuál es el costo de producción de 15 unidades?

14. La función de costo marginal de un fabricante es:

$$C'(x) = 4 - \frac{9\sqrt{3x}}{2x}$$

donde $C(x)$ dólares es el costo total de producción de $x$ unidades. Los costos fijos son de US $54. Si se producen 27 artículos, halle:

    a. el costo total;

    b. el costo promedio.

15. Un fabricante de juguetes tiene un nuevo producto que se introduce al mercado, y del que desea determinar su precio de venta unitario tal que la utilidad total alcance un valor máximo. Al analizar el precio y la demanda de otro juguete semejante, se anticipa que si se demandan $x$ juguetes cuando el precio por unidad es de $p$ dólares, entonces:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p^2}{30.000},$$

y la demanda debe ser de 1.800 unidades, cuando el precio sea de US $10. Si $C(x)$ dólares es el costo total de producción de $x$ unidades, entonces $C(x) = x + 7.500$. Calcule el precio que debe fijarse para que la utilidad del fabricante sea máxima.

16. Se estima que dentro de $t$ meses la población de cierta ciudad cambiará a una razón de $4+5t^{\frac{2}{3}}$ personas por mes. Si la población actual es de 100.000 personas, ¿cuál será la población dentro de 8 meses?

17. Un objeto se mueve en línea recta de manera que su velocidad después de $t$ minutos es: $v(t) = 5+2t+3t^2$ metros por minuto.

    a. Halle las ecuaciones de aceleración y distancia.

    b. Halle la aceleración después de dos minutos.

    c. ¿Qué distancia recorre el objeto en los primeros tres minutos?

    d. ¿Y en el tercer minuto?

18. Un objeto se mueve de manera que su velocidad después de $t$ minutos es: $v(t) = 3+2t+6t^2$ metros por minuto. ¿Qué distancia recorre el objeto durante el segundo minuto?

19. Se recibe un cargamento de 12.000 libras de semillas de soya que se consumirán a una razón constante de 300 libras por semana. Si el costo de almacenamiento de las semillas de soya es \$0,5 por libra a la semana, ¿cuánto tendrá que pagar el minorista en costos de almacenamiento en las próximas 40 semanas?

20. Se estima que dentro de $t$ años, la población de cierta comunidad cambiará a una razón de $0{,}6t^2+0{,}2t+0{,}5$ miles de personas por año. Los especialistas en medioambiente han encontrado que el nivel de contaminación aumenta a una razón aproximada de 5 unidades por cada 1.000 personas. ¿En cuánto se incrementará la contaminación durante los próximos 2 años, si en la actualidad el nivel de polución es de 60 unidades?

21. Un estudio ambiental realizado en cierta comunidad revela que dentro de $t$ años, el nivel de monóxido de carbono en el aire cambiará a una razón anual de $0{,}1t + 0{,}1$ partes por millón. Si el nivel actual de monóxido de carbono en el aire es 3,4 partes por millón, ¿cuál será el nivel de monóxido de carbono dentro de 3 años?

22. Un fabricante estima que el costo marginal es $-10q+1.000$ pesos por unidad cuando se han producido $q$ unidades. Si el costo total (incluidos los costos fijos o indirectos) de producción de las diez primeras unidades es \$150.000, ¿cuál es el costo total de producción de las 100 primeras unidades?

23. Un fabricante estima que el ingreso marginal es $100\,q^{-\frac{1}{2}}$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es $q$ unidades, y el costo marginal correspondiente es $0{,}4q$ dólares por unidad. Si la utilidad del fabricante es US \$520 cuando el nivel de producción es de 16 unidades, ¿cuál es la utilidad del fabricante cuando el nivel de producción es de 25 unidades?

24. La utilidad marginal (la derivada de la utilidad) de cierta compañía es $100 - 2q$ dólares por unidad cuando se producen $q$ unidades. Si la utilidad de la compañía es US \$700 cuando se producen 10 unidades, ¿cuál es la máxima utilidad posible para la compañía?

25. Supongamos que se ha determinado que el ingreso marginal asociado a la producción de $x$ unidades de determinado artículo es $R'(x) = 240 - 4x$ dólares por unidad. ¿Cuál es la función de ingreso $R(x)$ si $R(0) = 0$? ¿Qué precio se pagará por cada unidad cuando el nivel de producción sea de $x = 5$ unidades?

26. La función de consumo de determinado país es $C(x)$, donde $x$ es el ingreso nacional disponible. Si la propensión marginal al consumo es $C'(x)$ y se tiene que:

$C'(x) = 0{,}9 + 0{,}3\sqrt{x}$, el consumo nacional es \$100.000 millones cuando $x = 0$.

   a. Halle $C(x)$.

   b. Halle el consumo para cuando el ingreso sea $10^{12}$ (un billón de pesos).

27. El valor de reventa de cierta maquinaria decrece a un ritmo que depende del tiempo de uso. Cuando la maquinaria tiene $t$ años, el ritmo al que cambia su valor es $-960e^{-1/5t}$ dólares por año.

   a. Exprese el valor de la maquinaria en términos del período de uso.

   b. Si la maquinaria costaba en principio US \$5.200, ¿cuánto valdrá cuando tenga 10 años?

28. En cierta fábrica, el costo marginal es $3(q - 4)^2$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es $q$ unidades.

   a. Exprese el costo total de producción en términos de los costos indirectos (el costo de producir cero unidades) y del número de unidades producidas.

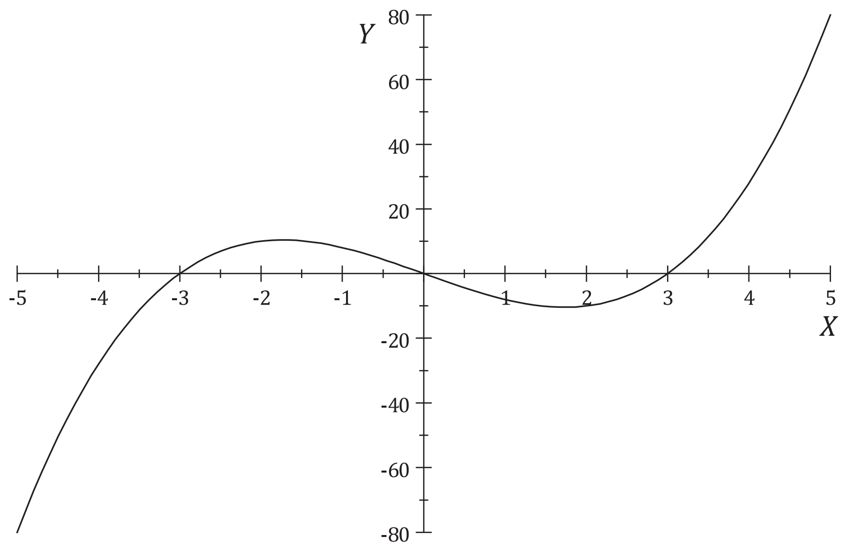
   b. ¿Cuál es el costo de producir 14 unidades si los costos indirectos son de US \$436?

29. Cierto pozo de petróleo que produce 400 barriles mensuales de petróleo crudo se secará en 2 años. En la actualidad, el precio del petróleo crudo es de US \$20 y se espera que aumente a una razón constante de US \$0,04 mensuales por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae, ¿cuál será el ingreso futuro total del pozo?

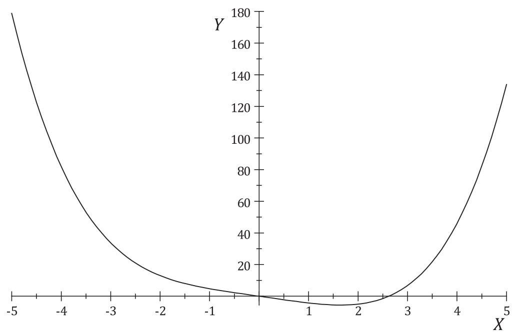
30. Una inversión de US \$1.000 crece a una razón igual al 7% de su tamaño. Exprese el valor de la inversión como una función del tiempo.

## 6.7 Preguntas tipo GRE (Graduate Record Examination)

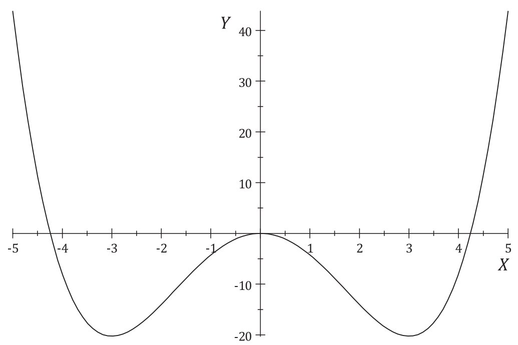
1. Si la gráfica de $f'$ está dada por:



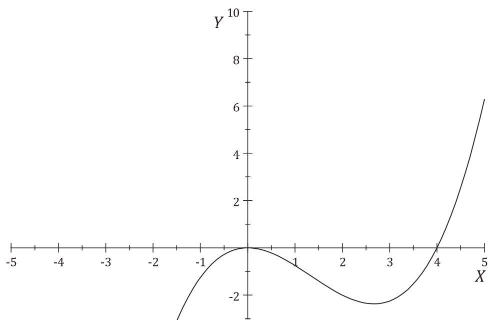

¿Cuál de las siguientes gráficas bosqueja mejor a $f$?



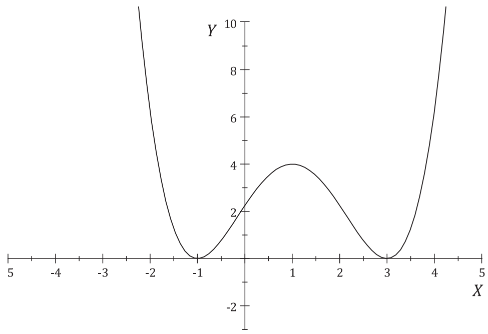

(A)



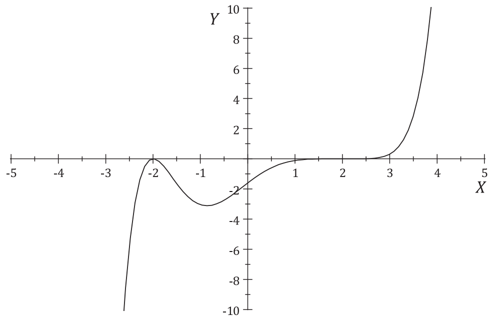

(B)




(C)




(D)




(E)

2. Determine cuál de las siguientes ecuaciones diferenciales no es de variables separables:

(A) $\frac{dy}{dx} = x^2(1+y^2)$;

(B) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+xy^2}{y}$;

(C) $\frac{dy}{dx} = x + y$;

(D) $xydx + e^y\, dy = 0$;

(E) $dx+dy = 0$.

3. ¿Cuántas funciones elementales satisfacen la ecuación, para todo $x \in \mathbb{R}$?

$$\frac{dy}{dx} = y$$

(A) Una.

(B) Dos.

(C) Tres.

(D) Cuatro.

(E) Infinitas.

4. ¿Qué sustitución transforma la integral $\int (x^2+1)^{-3/2}\, dx$ en $\int (u^2+1)^{-3/2}\, udu$?

   (A) $u = x^2$.
   (B) $u = 1/x$.
   (C) $u = x$.
   (D) $u = x^{-2}$.
   (E) Ninguna.

## 6.8 Resumen

### Diferenciales

Sea $y = f(x)$ derivable en $x$; entonces $dx$, la diferencial de la variable independiente $x$, es un incremento arbitrario de $x$, esto es, $dx = \Delta x$. $dy$, la diferencial de la variable dependiente $y$, es función de $x$ y $dx$. Está definida por $dy = f'(x)dx$. Si $\Delta x = dx = 0$, entonces $dy = 0$.

### Antiderivada de una función

De una función $F$ conocemos su derivada $f$; es decir, $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, para todo $x$ en un intervalo abierto $I$. A la función $F$ se la denomina antiderivada de $f$ en el intervalo $I$.

### La integral indefinida

Si $F$ es la antiderivada de $f$ en un intervalo abierto $I$ y conocemos $f$, ¿cómo calcular $F$?

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

De donde,

$$dF(x) = f(x)dx$$

Para hallar $F$, es necesario efectuar un proceso inverso al de la diferenciación, a este proceso se le denomina integración y se nota:

$$dF(x) = f(x)dx$$

$$F(x) = \int f(x)dx$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ si y sólo si } \frac{d}{dx}[F(x) + C] = f(x) \text{ para todo } x \in Dom(f).$$

$\int$ : signo de integral, $f(x)$ el integrando, $C$ la constante de integración, $F(x) + C$ la integral indefinida.

## Integral de algunas funciones elementales

Las siguientes funciones constituyen la fuente de todas las integrales a las cuales se llegan por los métodos de integración:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; si $n \neq -1$ y $n \in \mathbb{R}$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln|x| + C = \ln(kx)$; donde $C = \ln(k)$ para algún $k > 0$

3. $\int e^x \, dx = e^x + C$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

5. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen} \; u + C$

6. $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan \; u + C$

7. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arcsec} \; u + C$

Propiedades de la integral:

1. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$.

## Métodos de integración

### Integración por sustitución

$$\int F(g(x)) \, g'(x)dx = \int F(u)du = f(u) + C$$

Al hacer la sustitución: $u = g(x)$ ; $\frac{du}{dx} = g'(x)$

### Integración por partes

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Algunas recomendaciones que hay que tener presentes al integrar por partes son:

1. El *dv* debe contener siempre el *dx*.
2. Dado el *dv* en función de *x*, éste se debe poder integrar.
3. Cuando el integrando es el producto de dos funciones, en principio conviene elegir como *dv* la de "apariencia más complicada" y que pueda integrarse; si este criterio no es muy claro intente por ensayo y error. Tal vez, el mejor criterio para escoger *u* y *dv* es resolver muchos ejercicios.
4. La escogencia de *u* y *dv* es adecuada si al reemplazar en la fórmula, se tiene que $\int v\, du$ es más sencilla de resolver que la integral inicial.

**Fracciones parciales**

$$\frac{p(x)}{(x-a_1)^{s_1}(x-a_2)^{s_2}\cdot\ldots\cdot((x-a_m)^{s_m}} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1s}}{(x-a_1)^{s_1}}+$$
$$\frac{A_{21}}{(x-a_2)^1}+\frac{A_{22}}{(x-a_2)^2}+\cdots+\frac{A_{2s}}{(x-a_2)^{s_2}}+\cdots+$$
$$\frac{A_{s_m1}}{(x-a_m)^1}+\frac{A_{s_m2}}{(x-a_m)^2}+\cdots+\frac{A_{s_ms}}{(x-a_m)^{s_1}}$$

donde los numeradores de las fracciones del miembro del lado derecho son constantes y la fracción del lado izquierdo es una fracción propia y además $a_i \neq a_j$, para $i \neq j$.

$$\frac{p(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m} = \frac{A_1}{(x-a)^1}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+$$
$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+bx+c)^1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

donde la fracción del lado izquierdo es una fracción propia, y $b^2 - 4c < 0$.

## Ecuaciones diferenciales

Una ecuación que contenga derivadas de una variable dependiente con respecto a una o más variables independientes se denomina ecuación diferencial. Una función $F$ definida como $y = F(x)$ tal que $\frac{dF}{dx} = f(x)$ con $x \in (a, b)$, se denomina solución de la ecuación, $\frac{dy}{dx} = f(x)$. A una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{f(x)} \text{ con } g(y) \neq 0$$

se la denomina *ecuación diferencial de variables separables*.

## GLOSARIO

Antiderivada de una función $f$: Una función derivable $F$ tal que $F' = f$.

Métodos de integración: Métodos que permiten encontrar antiderivadas de muchas funciones. Entre los principales métodos se tienen: sustitución y partes.

Ecuación diferencial: Ecuación que contiene las derivadas de una variable dependiente (incógnita) con respecto a una o más variables independientes.

# Capítulo 7

# La integral definida

## 7.1 Introducción

Hasta el momento, el concepto más general de suma que tenemos es la de $n$ números reales $a_1 + a_2 + ... + a_n$. Esta idea la podemos extender **(sumas infinitas)** sobre una sucesión de números reales, sea sobre un conjunto infinito numerable $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, o sobre un conjunto no numerable, como por ejemplo, un intervalo de números reales. La primera extensión nos lleva al concepto de serie y la segunda, al de integral definida.
Para el estudio de estas sumas, es necesario el concepto de sumatoria.

### Objetivos

1. Hallar el área bajo una curva en un intervalo cerrado.
2. Interpretar el área bajo una curva.
3. Evaluar una integral definida.
4. Interpretar las integrales definidas como límites de sumas y aproximarlas como áreas de rectángulos.
5. Utilizar las propiedades de las integrales definidas.
6. Hallar el área entre curvas.
7. Solucionar problemas que exigen integrales.

## 7.2 Reseña histórica

El cálculo integral surge al tratar de resolver problemas relacionados con el cálculo de áreas, volúmenes, etc., siempre vinculado al concepto de medir. Arquímedes (272 – 212 a.C.) es quien determina el área de un segmento parabólico. El método que aplica se conoce como exhausión; consiste en aproximar sucesivamente por exceso y por defecto la figura a medir. A partir de estos problemas se aborda el problema del concepto de área para figuras más generales, hasta llegar a la noción de integral aproximadamente 1800 años después. Esto muestra cómo el cálculo integral se anticipó al cálculo diferencial, desde un punto de vista histórico.

Bonaventura Cavalieri (alumno de Galileo) es uno de los primeros en aproximarse a lo que hoy entendemos como integral, al considerar que una superficie se puede suponer formada por segmentos rectilíneos o indivisibles.

Isaac Newton (1642 – 1727) muestra el primer ejemplo histórico del cálculo de un área mediante el proceso inverso a la diferenciación. Por su parte, Leibniz (1646 – 1716) se interesa en sistematizar y desarrollar una notación eficiente, y así introduce el símbolo $\int$ (una s de suma), y más tarde $\int$ y $dx$.

Son muchos los matemáticos a quienes el cálculo debe su desarrollo. Entre ellos, Cauchy (1789 – 1857) es quien separa lo geométrico de la integral del cálculo diferencial, al definir la integral como un límite de sumas. A partir de ahí, Riemann (1826 – 1866), Stieltjes (1856 – 1933) y Lebesgue (1875 – 1941), entre otros, serán ejes fundamentales al momento de llevar esta noción de integral hasta sus últimas instancias abstractas: la teoría de la medida, fundamental en teoría de probabilidades.

## 7.3 Sumatoria

Sea $a$ una sucesión (es decir, una función real con dominio en los números enteros) tal que $a(k) = a_k$ y $a_1, a_2,..., a_n$ los $n$ primeros valores de la función $a$. La sumatoria de $a_k$ cuando $k$ varía desde $k = 1$ hasta $k = n$, se escribe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ y significa:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Ejemplo 1. Evaluar $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k(k+1)}$. Nótese que aquí $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$.

Solución.

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 2. Evaluar $\sum_{k=1}^{5} 3$. En este caso tenemos que $a_k = 3$. La sucesión es constante.

Solución.

$$\sum_{k=1}^{5} 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5(3) = 15$$

La sumatoria puede empezar en otro número entero diferente de 1.

Ejemplo 3. Evaluar $\sum_{k=5}^{9} (2k^2 - k)$.

Solución.

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{8} (2k^2 - k) &= (2(5^2) - 5) + (2(6^2) - 6) + (2(7^2) - 7) + (2(8^2) - 8) \\ &= 45 + 66 + 91 + 120 = 322\end{aligned}$$

## 7.3.1 Algunas propiedades

1. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2. $\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$, para cualquier número real $c$.

3. $\sum_{k=1}^{n} c = cn$. En este caso $a_k = c$, y es una sucesión constante.

4. $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$

Ejemplo 4. Demuestre que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solución. Aplicamos la propiedad 4 cuando $a_k = k^2$; tenemos:

$$a_{k+1} - a_k = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1, \quad y, \quad a_{n+1} - a_1 = (n+1)^2 - 1$$

Así que:

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^2 - k^2) = (n+1)^2 - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = (n+1)^2 - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n}2k + \sum_{k=1}^{n}(1) = (n+1)^2 - 1$$

$$2\sum_{k=1}^{n}k + n = (n+1)^2 - 1$$

de donde:

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{(n+1)^2 - 1 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dicho en otros términos,

$$\sum_{k=1}^{n}k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

De manera análoga, si se toma $a_k = k^3$ y $a_k = k^4$, se puede obtener:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Ejemplo 5. Demuestre que la suma de los primeros $n$ números impares es $n^2$.

Solución. Aplicamos la propiedad 4 cuando $a_k = (k-1)^2$; tenemos:

$$a_{k+1} - a_k = k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1; \quad y \quad a_{n+1} - a_1 = n^2$$

así que:

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) = n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

Ejemplo 6. Aplicar las propiedades anteriores para simplificar $\sum_{k=1}^{n}\left(7+\frac{8}{n}\cdot k\right)$.

Solución.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(7+\frac{8}{n}\cdot k\right)=\sum_{k=1}^{n}7+\sum_{k=1}^{n}\frac{8}{n}\cdot k$$

Por la propiedad 3 tenemos que $\sum_{k=1}^{n}7=7n$.

Por otro lado, como $\frac{8}{n}$ es constante (la variable es $k$), podemos aplicar la propiedad 2 y el ejemplo 4 para obtener:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{8}{n}\cdot k=\frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{8}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=4n+4$$

Así que:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(7+\frac{8}{n}\cdot k\right)=7n+4n+4=11n+4$$

Ejemplo 7. Mostrar que $\sum_{k=0}^{n-1}a^k=1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}=\frac{a^n-1}{a-1}$, con $a\neq 1$.

Solución. En álgebra elemental, hemos considerado el siguiente caso de factorización:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

Si $b=1$,

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a+1)$$

como $a\neq 1$, entonces:

$$a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a+1=\frac{a^n-1}{a-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}a^k=1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{n-1}=\frac{a^n-1}{a-1}$$

Si consideramos la suma hasta $n$, obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{n}a^k=1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

A esta sumatoria se la conoce como *progresión geométrica* y tiene diversas aplicaciones en matemática financiera. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 8. *(Interés compuesto).* Hallar el valor futuro de $1´000.000 colocados a un interés compuesto del 3 % mensual durante un año.

Solución. La información que tenemos es:

Valor presente: $P$ = 1’000.000.
Interés: $i = 3\ \% = 0{,}03$ (mensual).
Períodos de capitalización: $n = 12$ (meses).

Observe que el valor futuro para el primer, segundo, $n$–ésimo período es:

$$F_1 = P(1 + i) = 1'000.000 \cdot (1{,}03) = 1'030.000$$

Si el interés es compuesto, el capital para el segundo período es $1’030.000.

$$F_2 = P(1 + i) \cdot (1 + i) = P(1 + i)^2 = 1'000.000 \cdot (1{,}03)^2 = 1'060.900$$

Para el período $n$,

$$F = F_n = P(1 + i)^n = 1'000.000 \cdot (1{,}03)^n$$

Para $n = 12$, tenemos:

$$F = 1'000.000 \cdot (1{,}03)^{12} = 1'425.760$$

Observemos que el 3 % mensual compuesto equivale al 42,57 % efectivo anual.

Ejemplo 9. *(Capitalización con cuotas fijas).* Una persona decide ahorrar $$A$ durante $n$ meses en una cuenta bancaria que genera un interés $i$ capitalizable mensualmente. ¿Qué saldo tendrá al cabo de los $n$ meses?

Solución. Sea $D(k)$ el dinero ahorrado al cabo de $k$ meses. Así pues, al cabo del mes:

$$\begin{aligned}
&k = 0, D(0) = A,\\
&k = 1, D(1) = D(0)(1 + i) + A = A(1 + i) + A\\
&k = 2, D(2) = D(1)(1 + i) + A\\
&\qquad\qquad = (A(1 + i) + A)(1 + i) + A = A(1 + i)^2 + A(1 + i) + A\\
&k = 3, D(3) = D(2)(1 + i) + A\\
&\qquad\qquad = A(1 + i)^3 + A(1 + i)^2 + A(1 + i) + A\\
&\vdots\\
&k = n, D(n) = A((1 + i)^n + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + \ldots + (1 + i) + 1)^{**}
\end{aligned}$$

y utilizando la fórmula del ejemplo 7 con $a = (1 + i)$, tenemos:

$$D(n) = A\frac{(1 + i)^{n+1} - 1}{(1 + i) - 1} = A\frac{(1 + i)^{n+1} - 1}{i}$$

En ** observe que cada uno de los pagos $A$ lo llevamos del mes o período $r$ en que se causa al período $n$, mediante la expresión $A(1 + i)^k$, donde $k = n - r$. La expresión $A(1 + i)^k$ representa el valor futuro de un pago $A$ colocado durante $k$ períodos a una tasa de interés $i$.

Ejemplo 10. *(Amortización con cuotas fijas).* Un crédito por un valor de $\$P$ se paga en $n$ cuotas periódicas fijas y vencidas con un interés compuesto $i$ por período. Hallar el valor de la cuota.

Solución. Si $A$ es el valor de la cuota fija, el valor presente $P$ lo cancelamos con $n$ cuotas fijas (valores futuros) que se causan en los períodos 1, 2, 3, ..., $n$; al llevar cada una de estas cuotas al período cero mediante la expresión $\frac{A}{(1+i)^n}$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{A}{(1+i)^n} \\
&= \frac{A}{(1+i)}\left(1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right) \\
&= \frac{A}{(1+i)}\left(1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right) \\
&= \frac{A}{(1+i)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^k} = \frac{A}{(1+i)} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{(1+i)} - 1}
\end{aligned}
$$

Simplificamos:

$$P = A \cdot \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

despejamos $A$ (el valor de la cuota):

$$A = P \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

## EJERCICIO 7.1

1. En los ejercicios del 1 al 6, encuentre la suma:

a. $\sum_{i=1}^{6}(3i-2)$;　b. $\sum_{i=-2}^{3} 3^i$;　c. $\sum_{k=1}^{n}(2^k - 2^{k-1})$;

d. $\sum_{i=1}^{20} 3i(i^2+2)$;　e. $\sum_{j=3}^{6} \frac{1}{j(j-2)}$;　f. $\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$.

2. Sean $f$ una función definida sobre el intervalo $[a, b]$ y $n$ un número natural. Considere la siguiente fórmula:

$$S(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

$f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$ denota la imagen de $a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ bajo la función $f$; por ejemplo, si $f(x) = x^2 + 2x + 3$ se tiene entonces que:

$$f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)^2 + 2\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) + 3$$

Para cada una de las siguientes funciones simplifique $S(n)$:

a. $f(x) = x + 2$ definida sobre $[1, 3]$;

b. $f(x) = x$ definida sobre $[a, b]$;

c. $f(x) = x^2$ definida sobre $[0, b]$;

d. $f(x) = x^3$ definida sobre $[0, b]$.

3. Encuentre $\lim_{n\to\infty} S(n)$ para cada una de las funciones del ejercicio 2.

4. Si $|a|<1$, encuentre el $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a^i$.

5. Halle la suma de:

a. los primeros cien números impares;

b. los primeros cien números naturales;

c. los primeros cien múltiplos de diez;

d. los cuadrados de los primeros veinte enteros positivos;

e. los cubos de los primeros veinte enteros positivos.

6. Un balón se lanza desde una altura de 81 metros. Cada vez que toca el piso rebota a una altura aproximadamente igual a 1/3 de la altura anterior. ¿Qué distancia ha recorrido en el instante que ha tocado por décima vez el piso?

7. Un crédito de $20’000.000 para la compra de un vehículo se paga a tres años en cuotas mensuales fijas, pagando un interés del 2 % mensual. Calcular el valor de la cuota.

# 7.4 Sumas infinitas

## 7.4.1 Series

Sea una sucesión de números reales $a_1$, $a_2$, $a_3$, ...., y consideremos:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1\\
&S_2 = a_1 + a_2\\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3\\
&\vdots\\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i
\end{aligned}
$$

Cuando $n \to \infty$, tenemos $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. A la expresión $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ se la denomina serie. Ésta es una suma infinita numerable.

Si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, decimos que la serie converge en el valor del límite. En caso contrario, la serie diverge.

Ejemplo 11. Un caso interesante de suma infinita es la llamada *serie geométrica*.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Consideraremos sólo el caso en el cual $|a|<1$; la serie converge en $\frac{1}{1-a}$. Veamos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a^k &= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}-1}{a-1}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot a^n - 1}{a-1}\\
&= \frac{a \cdot 0 - 1}{a-1} = \frac{-1}{a-1}\\
&= \frac{1}{1-a}
\end{aligned}
$$

Si $|a|\geq 1$, la serie diverge.

Ejemplo 12. Hallar la expresión fraccionaria del decimal periódico $0,\overline{25} = 0,252525...$

Solución.

$$\begin{aligned} 0,\overline{25} &= \frac{25}{10^2}+\frac{25}{10^4}+\frac{25}{10^6}+\dots \\ &= \frac{25}{10^2}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3}+\dots\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{100^k} \end{aligned}$$

Hacemos $a = \frac{1}{100} < 1$ y aplicamos el resultado del ejemplo anterior; tenemos:

$$\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{100^k} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{396}$$

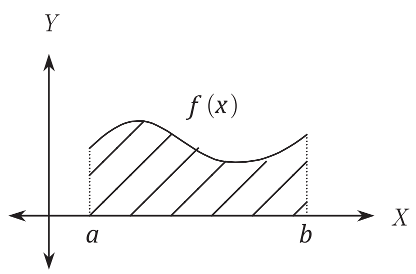
## 7.5 La integral definida

Este concepto aparece cuando hacemos sumas infinitas sobre un conjunto no numerable, como por ejemplo, al calcular el área bajo una curva.

### 7.5.1 Área bajo una curva

Estamos familiarizados con el cálculo de áreas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, círculos etc. Por ejemplo, para calcular el área de un círculo de radio $r$ aplicamos la fórmula $\pi \cdot r^2$. Pues bien, este resultado se puede obtener al calcular el límite de áreas de polígonos regulares, inscritos y circunscritos, cuando el número de lados tiende a infinito. De manera análoga, se deducen fórmulas y en general es el procedimiento para calcular el área de figuras planas.

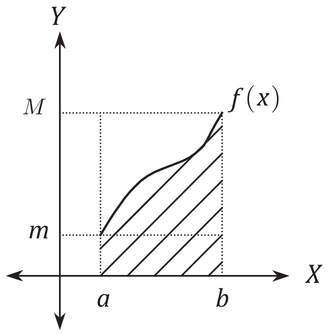
**Definición 1.** Sea $f$ una función no negativa definida y acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$. El área bajo la curva es el área de la región limitada por la gráfica de la función $f$, el eje $X$ y las rectas $x = a$, $x = b$.



En particular, si $f$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, recordemos que:

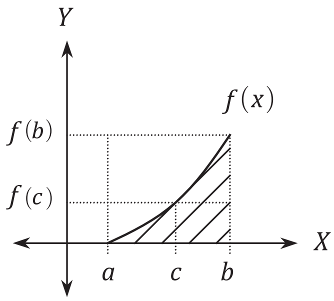
- $f$ toma un valor mínimo $m$ y un valor máximo $M$ en $[a, b]$.
- En $[a, b]$ la función toma **todos** los valores entre $m$ y $M$; es decir, si $m \leq c \leq M$, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.

Ejemplo 13.




Observe que si $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$ y queremos hallar el área bajo la curva $A_{a,b}$, tenemos que $m(b-a) \leq A_{a,b} \leq M(b-a)$ y $m \leq \frac{A_{a,b}}{b-a} \leq M$.

Ejemplo 14.

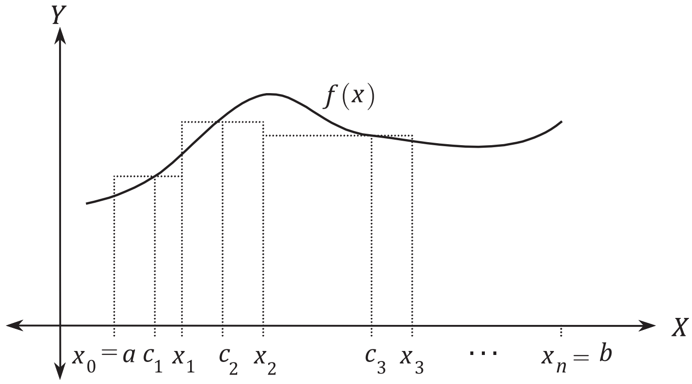



Como en $[a, b]$ la función toma todos los valores entre $m$ y $M$, existe al menos un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \frac{A_{a,b}}{b-a}$; es decir,

$$A_{a,b} = f(c) \cdot (b-a).$$

Ejemplo 15. Dada la gráfica de $f$, calcular el área bajo la curva.

En general, para hallar el área bajo la curva de la superficie plana limitada por $x = a$, $x = b$, $y = 0$ y $f(x)$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en $n$ intervalos $[x_0 = a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3], \ldots$ , $[x_{n-1}, x_n = b]$, de longitudes $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots$, $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Para cada intervalo podemos encontrar valores $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$, donde $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, con $k = 1, 2, ..., n$, tales que:




Área del primer rectángulo $A_1 = f(c_1)\, \Delta x_1$

Área del segundo rectángulo $A_2 = f(c_2)\, \Delta x_2$

$\vdots$

Área del $n$–ésimo rectángulo $A_n = f(c_n)\, \Delta x_n$

$$S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i \approxeq A_{a.b}$$

En esta expresión existe una gran dificultad: encontrar los $c_i$, lo cual equivale a encontrar el área, que es justamente lo que queremos hacer. Consideramos dos procedimientos: uno por sumas de Riemann y otro analítico.

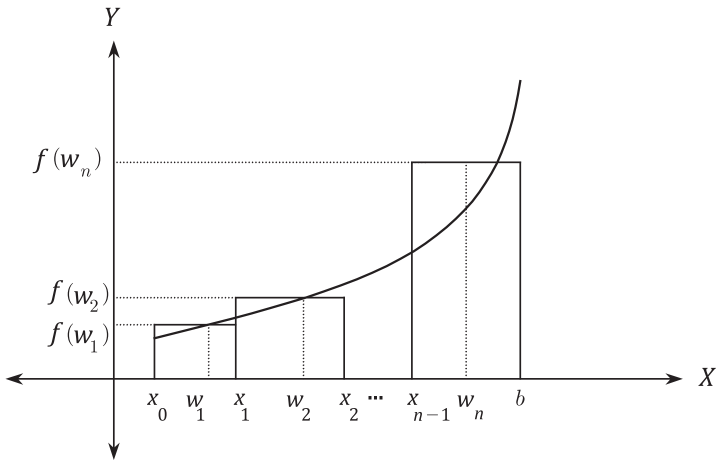
## 7.5.2 Sumas de Riemann

Existe una manera que estima los $c_i$ (sin que éste sea el objetivo) y que conduce a buenos resultados: las sumas de Riemann. Veamos.

La idea es simple: aproximar el área bajo la curva a través de figuras cuya área sea fácil de calcular. Qué más sencillo que hacerlo con un rectángulo (o un trapecio). Debemos esperar que este proceso de aproximación conduzca al área exacta.

Un subconjunto finito $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ con $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ se llama partición de $[a, b]$; el máximo de todas las longitudes $x_k - x_{k-1}$ con $k = 0, 1, 2, ..., n$ recibe el nombre de norma de $P$, y se denota $\|P\|$. Es decir:

$$\|P\| = \max_{0 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$$




Si consideramos $w_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para cada $k = 1, 2, .., n$, ($w_k$ es el $c_k$ estimado), la expresión:

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(w_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(w_k) \cdot (\Delta x_k)$$

recibe el nombre de suma de Riemann y constituye una aproximación al área bajo la curva $f$ sobre el intervalo $[a, b]$. Nótese que $S$ es una suma de áreas de rectángulos, donde el rectángulo $k$–ésimo tiene base $\Delta x_k$ y altura $f(w_k)$ (de alguna manera tenía que utilizarse la función $f$). Para una función $f$, la suma de Riemann depende de la partición $P$ y de los $w_k$. Esta aproximación $S$ será mejor en la medida en que los $\Delta x_k$ sean pequeños y una forma de asegurar esto es que $\|P\|$ sea pequeño. Nuestro interés será conocer el comportamiento de $S$ cuando $\|P\| \to 0$; es decir,

$$\lim_{\|P\| \to 0} \left( \sum_{k=1}^{\infty} f(w_k) \cdot \Delta x_k \right)$$

Si es que existe este límite, es importante hacer las siguientes consideraciones:

- El límite no depende de la elección del $w_k$.
- La función $f$ no necesariamente debe ser no negativa sobre $[a, b]$.

**Definición 2.** Sea $f$ una función definida y acotada sobre $[a, b]$. Si existe

$$\lim_{\|P\| \to 0} \left( \sum_{k=1}^{\infty} f(w_k) \cdot \Delta x_k \right)$$

decimos que $f$ es integrable sobre $[a, b]$ y se nota:

$$\lim_{\|P\| \to 0} \left( \sum_{k=1}^{\infty} f(w_k) \cdot \Delta x_k \right) = \int_a^b f(x)\, dx$$

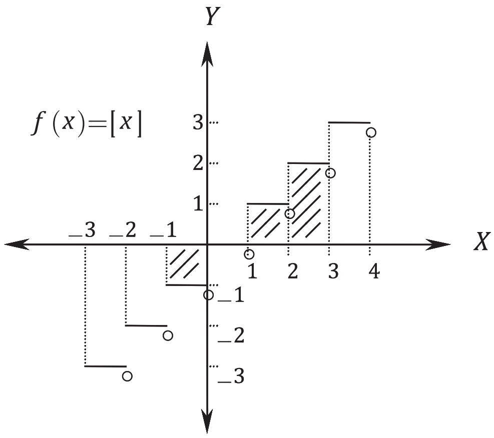
Se lee: integral definida de $f$ desde $a$ hasta $b$.

Cuando $f$ es integrable y no negativa sobre $[a, b]$, el límite es el área bajo la curva.

Hasta ahora no hemos calculado ningún límite y tampoco sabemos qué tipo de funciones son integrables sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. El siguiente teorema cuya demostración está fuera del alcance de este libro, llena en parte esta necesidad.

**Teorema 1 .** Si $f$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces $f$ es integrable sobre $[a, b]$.

Este resultado nos permite decir que para cualquier función continua en un intervalo cerrado, el límite $\lim_{\|P\|\to 0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(w_k)\cdot \Delta x_k\right)$. existe. El recíproco no es cierto; es decir, existen funciones que son integrables sobre un intervalo cerrado, pero no necesariamente continuas. Por ejemplo, el lector puede ver que $\int_{-1}^{3} [[x]]\, dx = 2$.




En adelante, consideraremos funciones continuas sobre intervalos cerrados $[a, b]$. Sin perder generalidad, asumiremos:

- Los $\Delta x_k$ de igual longitud; es decir,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \tfrac{b-a}{n} = \Delta x \quad \text{y}$$
$$x_1 = x_0 + \Delta x = a + \Delta x$$
$$x_2 = x_1 + \Delta x = a + 2\Delta x$$
$$x_3 = x_2 + \Delta x = a + 3\Delta x$$
$$\vdots$$
$$x_k = x_{k-1} + \Delta x = a + k\cdot\Delta x = a + k\cdot\frac{b-a}{n}$$

- Para cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, hacemos $w_k = x_k$.

Por lo tanto:

$$\lim_{\|P\|\to 0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(w_k)\cdot\Delta x_k\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)\cdot\Delta x\right)$$

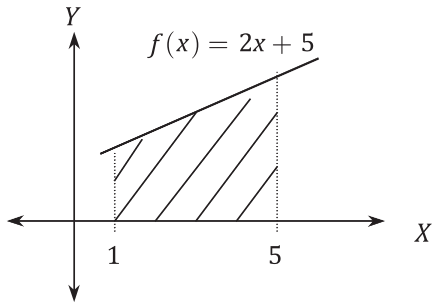
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x\right)$$

Ejemplo 16. Calcular la integral definida de la función definida como $y = f(x) = 2x + 5$ en el intervalo $[1, 5]$.

Solución 1.

$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x\right) = \int_1^5 (2x+5)\,dx$$

En este caso:




$$f(x_k) = 2x_k + 5, \Delta x = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n} \text{ y } x_k = 1 + k\cdot\frac{4}{n}$$

luego:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(2\left(1+\frac{4k}{n}\right)+5\right)\frac{4}{n}$$

de donde:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2\left(1+\frac{4k}{n}\right)+5\right)\frac{4}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(7+\frac{8k}{n}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 7 + \sum_{k=1}^{n}\frac{8}{n}k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(7n + \frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right)$$

Como sabemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(2\left(1+\frac{4k}{n}\right)+5\right)\frac{4}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left(7n+\frac{8}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}(7n+4n+4) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(44+\frac{4}{n}\right) = 44
\end{aligned}$$

Así que:

$$\int_1^5 (2x+5)\, dx = 44$$

Como $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[1, 5]$, la integral definida coincide con el área bajo la curva.

Solución 2.

Por geometría elemental, aplicamos la fórmula del trapecio $A = \frac{(B+b)\,h}{2}$; tenemos que:

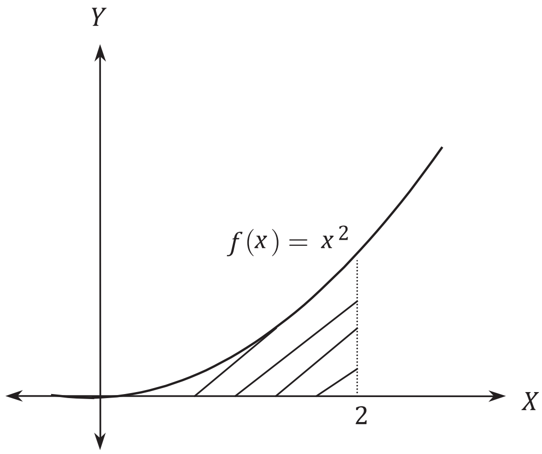
$B = f(5) = 15$; $b = f(1) = 7$ y $h = 5 - 1 = 4$, de donde se sigue que:

$$A = \frac{(15+7)(4)}{2} = 44$$

Ejemplo 17. Calcular $\int_0^2 x^2\, dx$.

Solución. Antes de resolver este ejemplo, observe que:

- $f(x) = x^2 \geq 0$ en el intervalo $[0, 2]$; por lo tanto $\int_0^2 x^2\, dx$ coincide con el área bajo la curva.
- Por métodos geométricos elementales no es posible obtener el valor exacto del área bajo la curva.




En este caso tenemos que $f(x_k) = x_k^2$; luego:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\,\Delta x\right)$$

donde:

$$\Delta x_k = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n} \text{ y } x_k = \frac{2k}{n}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Delta x_k\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{2k}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{n^2}\cdot\frac{2}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\end{aligned}$$

recordamos que:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Delta x_k\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n^2}(2n^2+3n+1)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Luego:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$$

## EJERCICIO 7.2

1. Calcular si existe:

   a. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2^n}}+\ldots;$

   b. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}+\ldots;$

   c. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{5^n}.$

2. Exprese los números dados como cocientes de enteros:

   a. $0{,}\overline{9}=0{,}9999\ldots;$ b. $2{,}1\overline{27}.$

3. Una pelota de caucho se suelta desde una altura de 2 metros y rebota a la mitad de su altura luego de cada caída. Si la pelota continúa rebotando indefinidamente, encuentre la distancia total que recorre.

4. En cada uno de los siguientes ejercicios calcular la integral definida utilizando sumas de Riemann.

   a. $\int_a^b c\,dx;$ b. $\int_{-1}^{1} x^2\,dx;$

   c. $\int_{-1}^{1} x^3\,dx;$ d. $\int_0^3 (2x^2-x+1)\,dx.$

## 7.6 Teorema fundamental del cálculo

Para la mayoría de las funciones, el cálculo de $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k\right)$ es dispendioso y en muchos casos imposible de realizar, como por ejemplo, al calcular $\int_0^3 x\,e^{2x}\,dx$. Esta dificultad ha obligado a buscar procedimientos para efectuarlo y simplificarlo.

Existen básicamente dos métodos: el **analítico** y el **numérico**. Consideraremos sólo el método **analítico.**

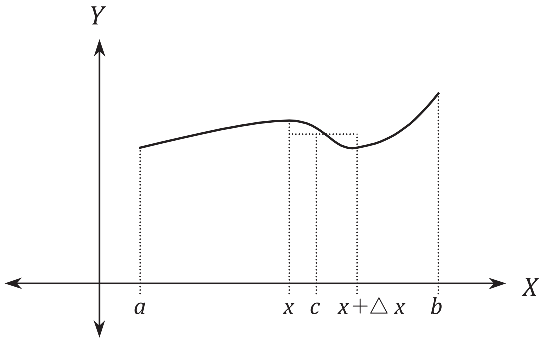
### Calcular $A_{a,b}$

Sean $f$ continua en $[a, b]$, y las áreas $A_{a,x}$ y $A_{a,x+\Delta x}$ con $x \in a, b$ y $A_{a,a} = 0$:

$$A_{a,x+\Delta x} = A_{a,x} + A_{x,x+\Delta x}$$

$$\Delta(A_{a,x}) = A_{a,x+\Delta x} - A_{a,x} = A_{x,x+\Delta x}$$

Para el intervalo $[x, x + \Delta x]$, existe $c$ tal que $\Delta(A_{a,x}) = f(c)\,\Delta x$, donde $\frac{\Delta(A_{a,x})}{\Delta x} = f(c)$.




$$\frac{d}{dx}(A_{a,x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(A_{a,x})}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

Por lo tanto la función $A_{a,x}$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d(A_{a,x})}{dx} = f(x) \text{ con } A_{a,a} = 0$$

Resolvemos la ecuación y tenemos que:

$$A_{a,x} = f(x)dx = F(x) + C$$

con:

$$A_{a,a} = 0 = F(a) + C; C = -F(a)$$

reemplazamos:

$$A_{a,x} = F(x) - F(a)$$

si hacemos $x = b$, tenemos:

$$A_{a,b} = F(b) - F(a).$$

La aplicación de este método analítico se formaliza en el teorema fundamental del cálculo.

**Teorema fundamental del cálculo.** Sea $f$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Considérese la función:

$$A_{a,x} = \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{con } a \leq x \leq b$$

Entonces:

i) $A'_{a,x} = F'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a, b)$.

ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$.

La primera parte del teorema nos indica que cualquier función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ posee antiderivada en el intervalo $(a, b)$.

Ejemplo 18. Encontrar la derivada de la función definida por $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sqrt{t^3 + e^t}}{t^2 + 1} dt$.

Solución. Utilizamos la primera parte del teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = \frac{\sqrt{x^3 + e^x}}{x^2 + 1}$$

**Definición 3.** Sea $f$ una función integrable en $[a, b]$:

1. $\displaystyle\int_c^c f(x)dx = 0$, para todo $c \in [a, b]$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

## 7.7 Propiedades

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo de integración $[a, b]$, entonces:

1. $\int_a^b c\,f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, siendo $c$ una constante.

2. $\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx$, cuando $a \leq c \leq b$.

4. Si $f$ es par en $[-a, a]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

5. Si $f$ es impar en $[-a, a]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Ejemplo 19. Evaluar $5\int_{-1}^{2} x^4\,dx + \int_{-1}^{2} 3\,dx$.

Solución.

$$5\int_{-1}^{2} x^4\,dx + \int_{-1}^{2} 3\,dx = \int_{-1}^{2} (5x^4+3)dx$$

$$= (x^5+3x)\Big|_{-1}^{2} = (32+6)-(-1-3) = 42$$

Ejemplo 20. Evaluar $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Solución.

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^{16} = 2(\sqrt{16}-\sqrt{1}) = 2(4-1) = 6$$

Ejemplo 21. Evaluar $\int_8^{27} \sqrt[3]{x}\,dx$.

Solución.

$$\int_8^{27} \sqrt[3]{x}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_8^{27} = \frac{3}{4}(81-16) = \frac{195}{4}$$

Ejemplo 22. Evaluar $\int_{13}^{14} (x-13)^{10}dx$.

Solución.

$$\int_{13}^{14}(x-13)^{10}dx=\frac{1}{11}(x-13)^{11}\Big|_{13}^{14}=\frac{1}{11}(1-0)=\frac{1}{11}$$

Ejemplo 23. Calcular $\int_0^1 8x(x^2+1)^3dx$.

Solución. Si $u=x^2+1$, $du=2x\,dx$ y $4du=8xdx$.

Hay que marcar que los límites de integración hacen referencia a la variable $x$ y no a la variable $u$, es decir $x=0$ y $x=1$. Por lo tanto, al calcular la integral se puede proceder de dos maneras:

- evaluar la integral como una integral indefinida expresada en términos de $x$ y calcularla entre $x=0$ y $x=1$;
- hallar los valores de $u$ en la sustitución cuando $x=0$ y $x=1$.

En la primera alternativa, tenemos:

$$\int 8x(x^2+1)^3dx=\int 4u^3du=u^4+C=(x^2+1)^4+C$$

En consecuencia,

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3dx=(x^2+1)^4\Big|_0^1=16-1=15$$

Si se escoge la segunda alternativa, como $u=x^2+1$, los límites de integración cambian: si $x=0$, $u=1$, y si $x=1$, $u=2$.

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3dx=\int_1^2 4u^3du=u^4\Big|_1^2=16-1=15$$

Ejemplo 24. Evaluar $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt[3]{7+x^5}}dx$.

Solución. Sea $u=7+x^5$; $du=5x^4dx$; $x^4dx=\frac{du}{5}$; si $x=0, u=7$ y si $x=1, u=8$; hacemos la sustitución y tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt[3]{7+x^5}} &= \int_0^1 (7+x^5)^{-\frac{1}{3}}(x^4)\,dx\\ &= \int_7^8 u^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{5}du=\frac{1}{5}\int_7^8 u^{-\frac{1}{3}}du\\ &= \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)u^{\frac{2}{3}}\Big|_7^8=\frac{3}{10}\left(4-7^{\frac{2}{3}}\right)\\ &= \frac{3}{10}\left(4-\sqrt[3]{49}\right)\end{aligned}$$

En general, se tiene que:

$$\int_a^b g[(u(u)]\, u´(u)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$$

Ejemplo 25. Evaluar $\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1}dx.$

Solución. Sea $u = x - 1$, entonces $x = u + 1$ y $dx = du$; ahora, si $x = e + 1$, $u = e + 1 - 1 = e$; si $x = 2$, $u = 2 - 1 = 1$. Resolvemos:

$$\begin{aligned}\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1}dx &= \int_1^e \frac{u+1}{u+1-1}du = \int_1^e \frac{u+1}{u}du \\ &= \int_1^e \left(\frac{u}{u}+\frac{1}{u}\right)du = \int_1^e \left(1+\frac{1}{u}\right)du \\ &= \left(u + \ln u\right)\Big|_1^e = \left(e + \ln e\right) - \left(1 + \ln 1\right) = e\end{aligned}$$

Ejemplo 26. Evaluar $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx.$

Solución. Sea $u = \ln x$, entonces $du = 1/x\, dx$, $dx = x\, du$, $u(1) = 0$ y $u(e) = 1$; luego:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^1 u\, du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

La fórmula de integración por partes tiene su versión en una integral definida así:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Ejemplo especial 27. Suponga que $f$ es un polinomio que satisface lo siguiente:

$f(0) = f(3)$, $f'(3) = -1$. Encontrar $\int_0^3 xf''(x)dx.$

Solución. Utilicemos integración por partes con $u = x$ y $dv = f''(x)dx$, de donde $du = dx$ y $v = f'(x)$, con lo cual:

$$\begin{aligned}\int_0^3 xf''(x)dx &= (xf'(x))\Big|_0^3 - \int_0^3 f'(x)dx \\ &= (xf'(x))\Big|_0^3 - f(x)\Big|_0^3 \\ &= (3f'(3) - 0f'(0)) - (f(3) - f(0)) \\ &= 3(-1) - (0) = -3\end{aligned}$$

## EJERCICIO 7.3

Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales definidas:

1. $\int_0^1 (x^2 - 2x + 3)dx;$

2. $\int_{-1}^0 (3x^5 - 3x^2 + 2x - 1)dx;$

3. $\int_2^5 (2 + 2t + 3t^2)dt;$

4. $\int_a^{2a} (a + z)\, dz;$

5. $\int_2^9 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt;$

6. $\int_{-1}^1 (v + 1)^2\, dv;$

7. $\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx;$

8. $\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} (e^t - e^{-t})dt;$

9. $\int_{-3}^{-1} \frac{t+1}{t^3} dt;$

10. $\int_0^6 x^2(x - 1)dx;$

11. $\int_1^2 (2x - 4)^5 dx;$

12. $\int_{-3}^0 (2x + 6)^4 dx;$

13. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6t + 12}} dt;$

14. $\int_1^3 (2\theta + 1)(3 - \theta)\, d\theta;$

15. $\int_0^2 \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2} dx;$

16. $\int_1^4 (\sqrt{z} - z)dz;$

17. $\int_0^1 (t^3 + t)\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}dt;$

18. $\int_0^1 \frac{6x}{x^2 + 1} dx;$

19. $\int_2^{e+1} \frac{x}{x - 1} dx;$

20. $\int_1^2 (t + 1)(t - 2)^9 dt;$

21. $\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x} dx;$

22. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x} dx;$

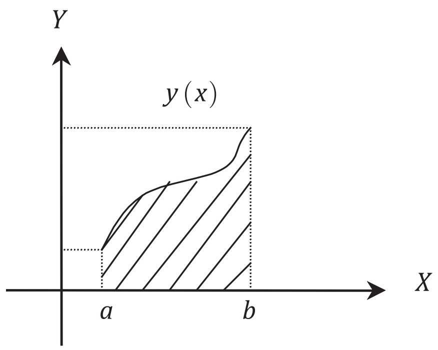
23. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)^2 dx;$

24. $\int_{-1}^2 (x^2 + x)(3x + 1)\, dx.$

# 7.8 Aplicaciones

## 7.8.1 Área entre curvas

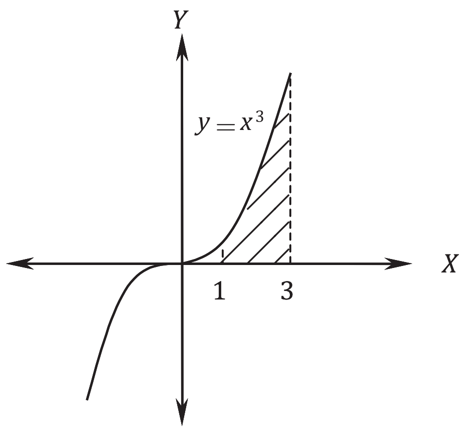
**Primer caso.** Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, y el eje $X$, donde $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.




De acuerdo a lo expresado al iniciar el capítulo tenemos que:

$$\boldsymbol{A_{a,b} = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

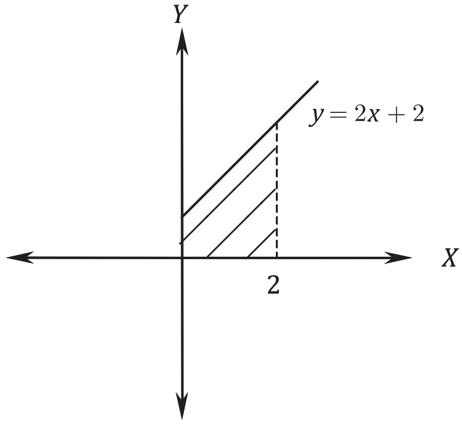
Ejemplo 28. Encontrar el área de la región limitada por las curvas $f(x) = x^3$, el eje $X$, $x = 1$ y $x = 3$.




Solución.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 \\ &= \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20 \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

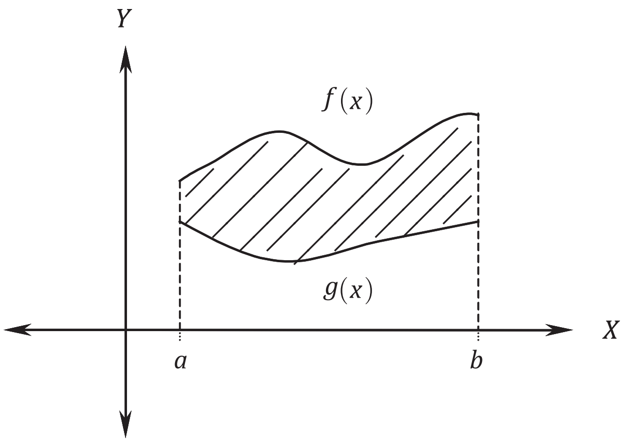
Ejemplo 29. Hallar el área de la región limitada por las curvas $f(x) = 2x + 2$ y el eje $X$, entre $x = 0$ y $x = 2$.




Solución.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (2x+2)dx = (x^2+2x)\Big|_0^2 \\ &= (2)^2 + 2(2) - 0 = 8 \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

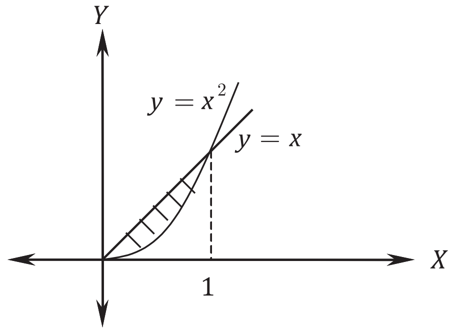
**Segundo caso.** Hallar el área de la región limitada por las curvas $f(x)$, $g(x)$, $x = a$ y $x = b$, donde $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.




$$A_{a,b} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Ejemplo 30. Encontrar el área de la región limitada por las curvas $g(x) = x^2$, $f(x) = x$, entre $x = 0$ y $x = 1$.

Solución.




En el intervalo $x \in [0, 1]$, $x \geq x^2$ por lo tanto:

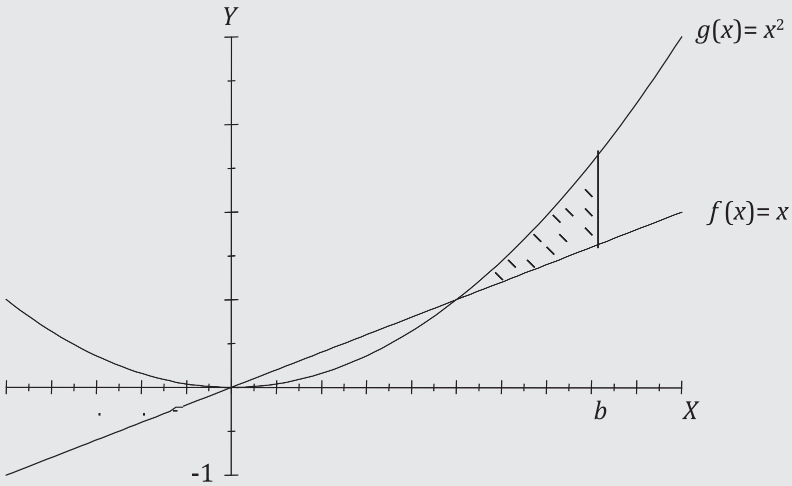
$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3 - 0 \\ &= \frac{1}{6} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Otra solución consiste en considerar las funciones inversas sobre ese intervalo. En este caso, el problema se reduce a hallar el área entre $F(y) = y^{\frac{1}{2}}, G(y) = y, y = 0$ y $y = 1$.

Como $y^{\frac{1}{2}} \geq y$ para todo $y \in [0, 1]$ tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (y^{\frac{1}{2}} - y)\, dy = \left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right] - 0 \\ &= \frac{1}{6} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Ejemplo especial 31. Si $b>0$ y $\int_0^b x dx = \int_0^b x^2 dx$, hallar el área de la región sombreada.




Solución. Los puntos de corte entre $f$ y $g$ ocurren cuando $x=0$ ó cuando $x=1$. En la región sombreada, la gráfica de $g$ está por encima de la de $f$, de tal forma que lo que se quiere hallar es:

$$\int_1^b (x^2 - x)dx$$

Pero sabemos que:

$$\int_0^b x dx = \int_0^b x^2 dx$$

Esta igualdad se puede escribir de la siguiente manera, utilizando las propiedades 2 y 3 de la integral definida en cada uno de los miembros:

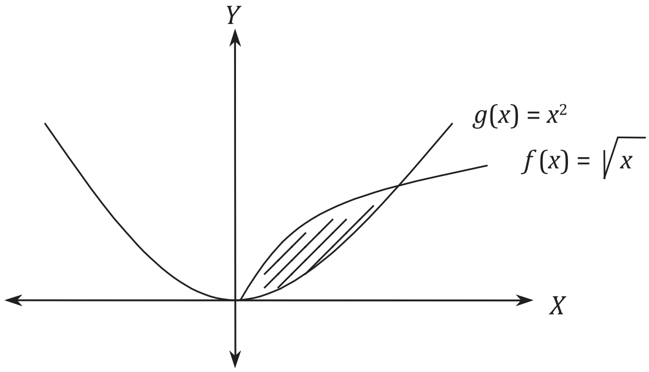
$$\int_0^b x dx = \int_0^1 x dx + \int_1^b x dx = \int_0^b x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^b x^2 dx$$

de donde tenemos que:

$$\int_0^1 x dx + \int_1^b x dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^b x^2 dx$$
$$\int_1^b x^2 dx - \int_1^b x dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx$$
$$\int_1^b (x^2 - x)dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ejemplo 32. Encontrar el área de la región limitada por las curvas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$.

Solución.




Los límites de la integración corresponden a los valores de $x$ tales que $f(x) = g(x)$. Resolvemos:

$$\begin{aligned} x^2 &= \sqrt{x} \\ (x^2)^2 &= (\sqrt{x})^2 \\ x^4 &= x \\ x^4 - x &= 0 \end{aligned}$$

Factorizamos:

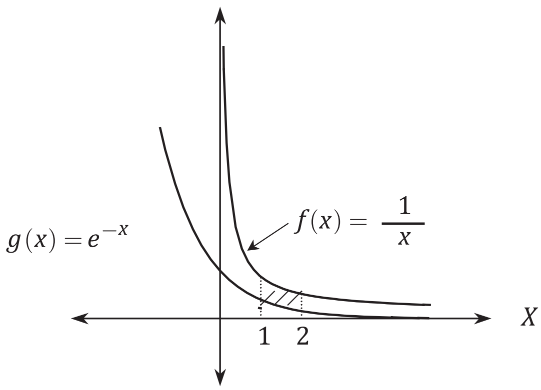
$$x(x^3 - 1) = 0$$

cuyas soluciones reales son $x = 0$ ó $x = 1$; por lo tanto, el intervalo de la integración es $[0, 1]$. Como $\sqrt{x} \geq x^2$ para todo $x$ en el intervalo $[0, 1]$, tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right)dx \\ &= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left[\left(\frac{2}{3}\sqrt{(1)^3} - \frac{(1)^3}{3}\right) - (0)\right] \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Ejemplo 33. Encuentre el área de la región limitada por las curvas $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = e^{-x}$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

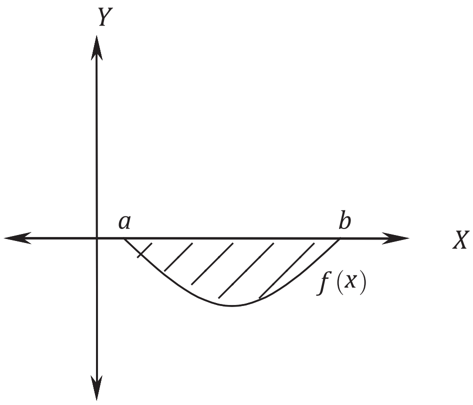
Solución.




Como $\frac{1}{x} \geq e^{-x}$ para todo $x \in [1, 2]$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - e^{-x}\right) dx = \ln|x| + e^{-x} \Big|_1^2 \\
&= \ln|2| + e^{-2} - [\ln|1| + e^{-1} = \ln|2| + \frac{1}{e^2} - 0 + \frac{1}{e} \\
&= 0{,}46 \text{ unidades de área.}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 34. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = 0$ y $f(x)$.




Solución. Los límites de integración $x = a$ y $x = b$, corresponden a los valores de $x$ tales que $f(x) = 0$. Como $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, tenemos que:

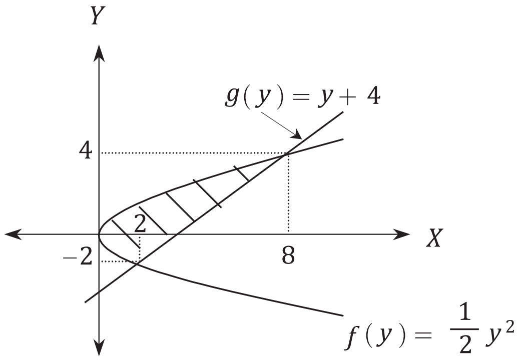
$$
\begin{aligned}
A &= \int_a^b (0 - f(x)) dx \\
&= -\int_a^b f(x) dx
\end{aligned}
$$

Si $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, su integral es negativa; por lo tanto su área es:

$$A = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

Ejemplo 35. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y^2 = 2x$ y $y = x - 4$.

Solución.




De acuerdo a la gráfica, las curvas corresponden a funciones. Si las expresamos en función de $y$, despejamos $x$ en función de $y$ y obtenemos $f(y) = \frac{1}{2}y^2$, y $g(y) = y + 4$. Hallamos los valores de $y$ para los cuales:

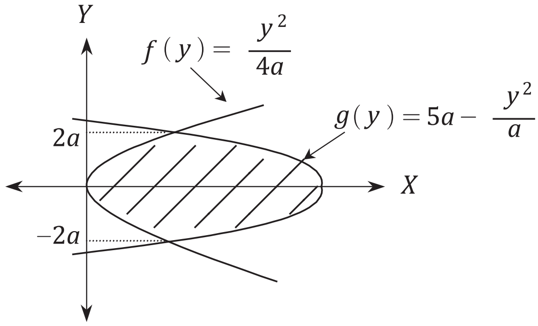
$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}y^2 = y + 4 \\
y^2 = 2y + 8 \\
y^2 - 2y - 8 = 0 \\
(y-4)(y+2) = 0 \\
y = 4 \quad \text{ó} \quad y = -2
\end{gathered}$$

El área está dada por:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{4} \left[(y+4) - \frac{1}{2}y^2\right]dy \\
&= \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \frac{1}{2}y^2\right)dy \\
&= \left(\frac{1}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{6}y^3\right)\Big|_{-2}^{4} \\
&= \left(80 + 16 - \frac{64}{6}\right) - \left(2 - 8 + \frac{8}{6}\right) = \frac{80}{6} + \frac{28}{6} = \frac{108}{6} \\
&= 18 \text{ unidades de área.}
\end{aligned}$$

Ejemplo 36. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y^2 = 5a^2 - ax$ y $y^2 = 4ax$ con $a > 0$.

Solución.




En este caso resulta más sencillo considerar las funciones:

$$g(y) = x = 5a - \frac{y^2}{a} \quad \text{y} \quad f(y) = x = \frac{y^2}{4a}$$

Como en el ejemplo anterior, hallamos los valores de $y$ para los cuales $g(y) = f(y)$:

$$5a - \frac{y^2}{a} = \frac{y^2}{4a}$$

$$\frac{5a^2 - y^2}{a} = \frac{y^2}{4a}$$

$$20a^2 - 4y^2 = y^2$$

$$20a^2 = 5y^2$$

de donde,

$$y = 2a \quad \text{ó} \quad y = -2a$$

El intervalo de integración es $[-2a, 2a]$ y en dicho intervalo $g(y) \geq f(y)$.

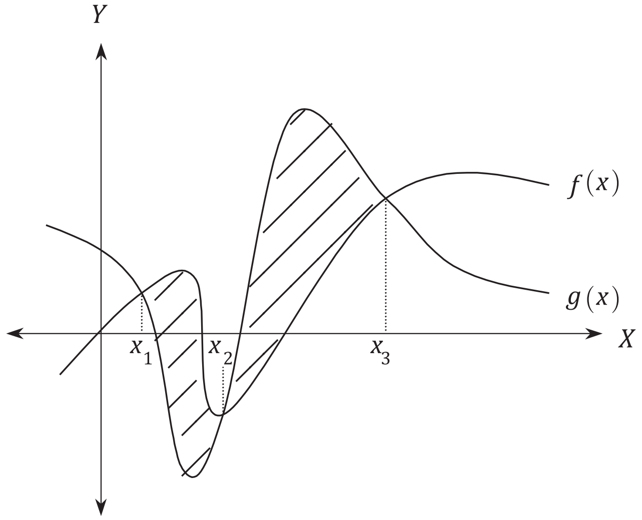
Por lo tanto, el área viene dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2a}^{2a} \left(5a - \frac{y^2}{a} - \frac{y^2}{4a}\right) dy = \int_{-2a}^{2a} \left(5a - \frac{5y^2}{4a}\right) dy \\ &= \left(5ay - \frac{5y^3}{12a}\right)\Big|_{-2a}^{2a} = \left(10a^2 - \frac{10}{3}a^2\right) - \left(-10a^2 + \frac{10}{3}a^2\right) \\ &= 20a^2 - \frac{20}{3}a^2 = \frac{40}{3}a^2 \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

En todos los casos anteriores, para determinar el área de la región limitada por las curvas $f(x)$, $g(x)$, $x = a$, $x = b$, se ha establecido a partir de la gráfica, la desigualdad $f(x) \leq g(x)$ ó $g(x) \leq f(x)$. Si este procedimiento resulta dispendioso, el área es:

$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| d(x)$$

**Tercer caso.** Hallar el área de la región limitada por las curvas $f(x)$ y $g(x)$, si éstas se intersectan en tres o más puntos.




Si las funciones se intersectan sólo para tres valores de $x$, $x_1<x_2<x_3$, éstos determinan dos regiones cuyos intervalos de integración son $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$. Calculamos el área entre las curvas dadas para cada intervalo siguiendo el procedimiento del segundo caso. El área entre las curvas es la suma de cada una de estas áreas.

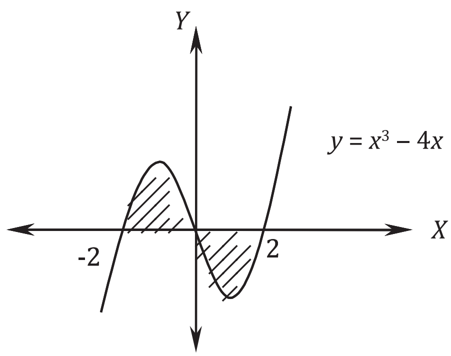
Ejemplo 37. Calcular el área de la región limitada por las curvas $f(x) = x^3 - 4x$ y $g(x) = 0$.

Solución. Hallamos los valores de $x$ para los cuales $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} x^3 - 4x &= 0 \\ x(x^2 - 4) &= 0 \\ x(x+2)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

luego:

$$x_1 = -2, x_2 = 0 \text{ y } x_3 = 2$$



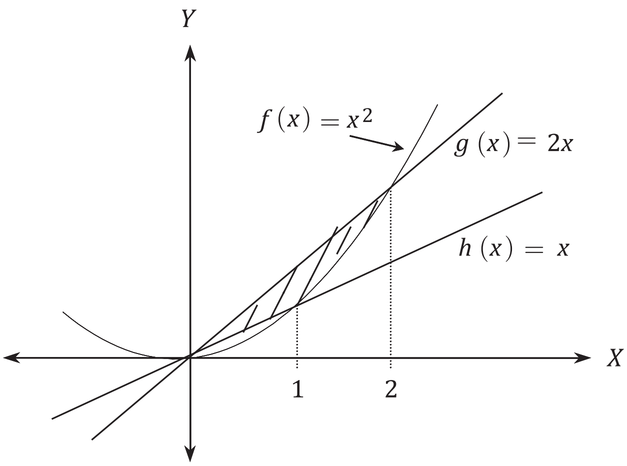
Para el intervalo de integración $[-2, 0]$, $f(x) > 0$, y para el intervalo $[0, 2]$, $f(x) < 0$; por lo tanto, el área está dada por:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} |x^3 - 4x|\, dx \\
&= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx - \int_{0}^{2} (x^3 - 4x) dx \\
&= \frac{x^4}{4} - 2x^2 \Big|_{-2}^{0} - \frac{x^4}{4} - 2x^2 \Big|_{0}^{2} \\
&= 0 - (4 - 8) - (4 - 8) - 0 \\
&= 4 - (-4) = 8 \text{ unidades de área.}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 38. Calcular el área de la región limitada por las curvas $f(x) = x^2$, $h(x) = x$ y $g(x) = 2x$.

Solución. Para hallar los intervalos de integración, resolvemos:

1) $f(x) = h(x)$:




$$
\begin{aligned}
x^2 &= x \\
x^2 - x &= 0 \\
x(x-1) &= 0 \\
x = 0 \ \text{ó} \ x &= 1
\end{aligned}
$$

2) $g(x) = h(x)$:

$$
\begin{aligned}
2x &= x \\
2x - x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

3) $f(x) = g(x)$:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 2x \\
x^2 - 2x &= 0 \\
x(x-2) &= 0
\end{aligned}
$$

luego, $x = 0$ ó $x = 2$.

Los intervalos de integración son: $[0, 1]$ y $[1, 2]$. Ahora observamos la gráfica:

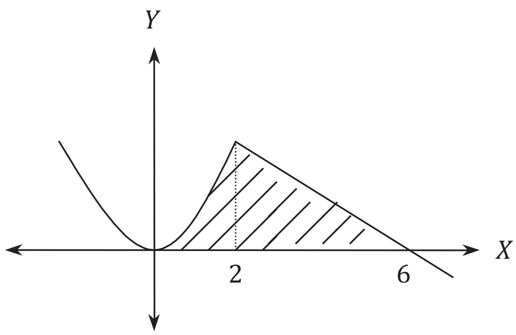
$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (2x - x)\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left\{\left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} - 1 \\
&= \frac{7}{6} \text{ unidades de área.}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 39. Determinar el área de la región comprendida entre el eje $X$ y

$$
f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 2 \\ -x + 6, & \text{si } x > 2 \end{cases}
$$

Solución. Hallamos las intersecciones de la gráfica de $f$ con el eje $X$:

$$
\begin{aligned}
x^2 = 0 \quad &\text{ó} \quad -x + 6 = 0 \\
x = 0 \quad &\text{ó} \quad x = 6.
\end{aligned}
$$




De donde el intervalo de integración es $[0, 6]$, y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 6]$; luego el área es:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^6 f(x)\,dx \\
&= \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^6 f(x)\,dx \\
&= \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^6 (-x + 6)\,dx \\
&= \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3} \text{ unidades de área.}
\end{aligned}
$$

## EJERCICIO 7.4

1. Determine el área de la región limitada por las curvas $f(x) = 2x^4 - x^2$, el eje $X$, $x = a$ y $x = b$, donde $a$ y $b$ son las abscisas que corresponden a los puntos mínimos de $f$.

2. Calcule el área de la región limitada por los ejes coordenados y la gráfica de $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, $a > 0$.

3. En cada uno de los siguientes ejercicios trace la gráfica y halle el área de la región limitada por las curvas dadas.

   a. $y = x^2 - 2x - 3, y = 0, x = 0$ y $x = 2$;
   b. $y = 4 - 1/3\, x^2, y = 0, x = 0$ y $x = 3$;
   c. $y = x^3, y = 0, x = -1$ y $x = 2$;
   d. $y = \sqrt{(x - 4)}, y = 0, x = 8$;
   e. $y = x^2 - 4x + 3, x - y - 1 = 0$;
   f. $y = x^2, y = x + 2$;
   g. $y = 2\sqrt{x}, y = 2x - 4$ ;
   h. $y = x^2 - 4x, y = -x^2$;
   i. $y = x^2 - 2, y = 2x^2 + x - 4$;
   j. $x^2 = 2ay, y = 2a$, con $a>0$;
   k. $y = x - x^2, y = -x$;
   l. $y^2 = 4ax, x^2 = 4ay$, con $a>0$;
   m. $y^2 = x, y = x^3$;
   n. $x^2 y = 4, y = 7 - 3x$;
   ñ. $y = x^2, y = 8 - x^2, y = 4x + 12$;
   o. $y = x + 6, y = x^3, y = -1/2\, x$;
   p. $y = x^3 + 3x^2 + 2, y = x^3 + 6x^2 - 25$;
   q. $y = x^3 - 3x^2 - 10x, y = -6x$;
   r. $y = x^2 - 4x, y = -x^2$;
   s. $y = x^2, y = -x^2 + 4x$;
   t. $y = x^4 - 4x^2 + 4, y = x^2$;
   u. $y^2 - 4x = 4, 4x - y = 16$;
   v. $x + y^2 = 0, x + 3y^2 = 2$;
   w. $4x^2 + y = 4, x^4 - y = 1$.

4. Halle el área del triángulo limitado por la recta $y = 4 - 3x$ y los ejes coordenados.

5. Halle el área de la región limitada por $y = \sqrt{x}, x = 4, x = 9$ y el eje $X$.

## 7.8.2 Problemas de aplicación

Muchos modelos matemáticos de la forma $P(t)$ se obtienen conociendo cómo es su crecimiento o razón de cambio por unidades de $t$.

Ejemplo 40. Si la población en millones de habitantes de Colombia a partir del censo de 1993 tiene un crecimiento continuo del 5 % anual dado por la expresión $1{,}75(e^{0{,}05t})$:

a. ¿En cuánto crecerá la población entre los años 2000 y 2020?

b. Hallar $P(t)$ si la población inicial es de 35'000.000 habitantes.

Solución.

a. Si $P(t)$ es la población en función de $t$, tenemos que:

$$\frac{dP}{dt} = 1{,}75(e^{0{,}05t})$$

$$P(t) = \int 1{,}75e^{0{,}05t}dt = 35e^{0{,}05t} + C$$

Si se toma como año cero a 1993, entre el 2000 y el 2020 la población crecerá:

$$\begin{aligned} P(27)-P(7) &= \int_7^{27} 1{,}75(e^{0{,}05t})dt \\ &= 35\, e^{0{,}05t}\Big|_7^{27} = 35(e^{1{,}35} - e^{0{,}35}) \\ &= 85{,}3 \text{ millones de habitantes.} \end{aligned}$$

b. En 1993 será de $P(0) = 35e^{0{,}05(0)} + C = 35$ millones de habitantes.

$$\begin{aligned} 35 + C &= 35 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$P(t) = 35e^{0{,}05t}$$

Ejemplo 41. Un estudio indica que dentro de $x$ meses la población de cierto pueblo crecerá a la razón de $2 + 6\sqrt{x}$ personas por mes. ¿En cuánto crecerá la población durante los próximos 4 meses?

Solución. Sea $P(x)$ la población dentro de $x$ meses y $P(0) = P_0$ la población inicial. La razón de cambio de la población con respecto al tiempo es:

$$\frac{dP}{dx} = 2 + 6\sqrt{x}$$

La cantidad en que crecerá la población durante los próximos 4 meses será de:

$$\begin{aligned} P(4) - P(0) &= \int_0^4 (2 + 6\sqrt{x})dx \\ &= (2x + 4x^{3/2})\Big|_0^4 \\ &= 2(4) + 4(4)^{3/2} - 2(0) + 4(0)^{3/2} \\ &= 40 \text{ personas.} \end{aligned}$$

Ejemplo 42. La velocidad de un cuerpo en caída libre está dada por la expresión $(10t + v_0)$m/s, donde $v_0$ es la velocidad inicial. Si desde una altura de 500 m se deja caer un objeto, calcular la distancia recorrida durante el 1$^{er}$ y el 2$^{do}$ segundo si:

a. $v_0 = 0$; b. $v_0 = 20$ m/s; c. $v_0 = -20$ m/s.

Solución. Recordemos que $v(t) = \frac{ds}{dt}$, donde $s(t)$ es el desplazamiento en función del tiempo.

a. $\frac{ds}{dt} = 10t$; en el primer segundo la distancia recorrida será

$$\int_0^1 10t dt = 5t^2 = 5\text{m}$$

En el 2$^{do}$ segundo la distancia recorrida será:

$$\int_1^2 10t\, dt = 5t^2\Big|_1^2 = 20 - 5 = 15 \text{ m}$$

b. $\frac{ds}{dt} = 10t + 20$; en el primer segundo la distancia recorrida será:

$$\int_0^1 (10t + 20)dt = (5t^2 + 20t)\Big|_0^1 = 25 \text{ m}$$

En el 2$^{do}$ segundo la distancia recorrida será:

$$\int_1^2 (10t + 20)dt = (5t^2 + 20t)\Big|_1^2 = 60 - 25 = 35 \text{ m}$$

c. $\frac{ds}{dt} = 10t - 20$; en el primer segundo la distancia recorrida será:

$$\int_0^1 (10t - 20)\, dt = (5t^2 - 20t)\Big|_0^1 = -15(15 \text{ m hacia arriba})$$

En el 2$^{do}$ segundo la distancia recorrida será:

$$\int_1^2 (10t - 20)dt = (5t^2 - 20t)\Big|_1^2 = -20 + 15 = -5(5 \text{ m hacia arriba})$$

# 7.9 Aplicaciones en economía

## 7.9.1 Análisis marginal

Recordemos que en economía se definen **utilidad marginal, ingreso marginal y costo marginal** como las razones de cambio de la utilidad, de los ingresos y del costo, respecto del número de unidades producidas y vendidas.

Si $q$ es el número de unidades producidas y vendidas, $P$ el precio unitario y $C$ el costo de producir $q$ unidades, el ingreso será el número de unidades vendidas por el precio unitario de venta, $\boldsymbol{I = P \cdot q}$ y $\boldsymbol{U = I - C}$, la utilidad al vender $q$ unidades.

$\frac{dI}{dq}$ es el ingreso marginal y representa el ingreso adicional al vender una unidad más a partir de $q$ unidades.

$\frac{dC}{dq}$ es el costo marginal y representa el costo adicional al producir una unidad más a partir de $q$ unidades.

$\frac{dU}{dq}$ es la utilidad marginal y representa la utilidad adicional al vender una unidad más a partir de $q$ unidades.

Ejemplo 43. En cierta fábrica, el costo marginal de un artículo es $-q + 20$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es $q$ unidades, con $q<20$.

a. Si $q = 12$, calcular el costo marginal e interpretar el resultado.

b. ¿En cuánto aumentará el costo total de fabricación si el nivel de producción aumenta de 6 a 10 unidades?

Solución.

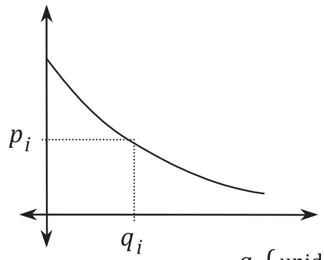
a. Para $q = 12$, el costo marginal es $20 - 12 = 8$. Esto significa que el costo de producir una unidad adicional después de 12 unidades es aproximadamente de US $8.

b. Sea $C(q)$ el costo total de producción de $q$ unidades. El costo marginal es $\frac{dC}{dq} = -q + 20$. El incremento en el costo, si la producción aumenta de 6 a 10 unidades, es $C(10) - C(6)$; es decir:

$$\begin{aligned} C(10) - C(6) &= \int_6^{10} (-q + 20)\,dq \\ &= \frac{-q^2}{2} + 20q\Big|_6^{10} = 150 - 102 = \text{US } \$\, 48 \end{aligned}$$

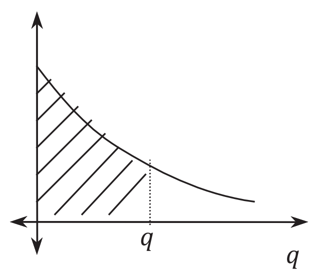
## 7.9.2 Función de demanda

Por sentido común, sabemos que si el precio de un artículo tiende a bajar, su demanda se incrementa. Si se establece una función para hallar la demanda en función del precio $q = f(P)$, que por costumbre se trabaja como $P = D(q)$, esta función es decreciente.




Si $A(q)$ es la cantidad total que los consumidores están dispuestos a pagar por $q$ unidades, observe que para $q = q_i$, $A(q_i) = P_i \cdot q_i$. Si cada unidad se compra a un precio $P_i$ y corresponde al área del rectángulo, lo máximo que los consumidores estarían dispuestos a pagar es el área bajo la curva. En general:

$$A(q) = \int_0^q D(x)\, dx$$




Si la demanda es una función continua, $A(q)$ es derivable, y $\frac{dA}{dq} = D(q)$. $p = D(q)$ es la razón de cambio de $A$ con respecto a $q$ y representa el precio por unidad que los consumidores están dispuestos a pagar cuando el nivel de consumo es de $q$ unidades. $D(q)$ es la disposición marginal a gastar.

En términos geométricos, esta disposición total a gastar es el área de la región bajo la curva de demanda $P = D(q)$ desde $q = 0$ hasta $q = q_0$.

Ejemplo 44. Supóngase que la función de demanda de los consumidores de cierto artículo es $P = D(q) = 4(25 - q^2)$ por unidad, con $q < 5$ ($P$ en miles de pesos). ¿Cuánto están dispuestos a pagar los consumidores para obtener 3 unidades del artículo?

Solución.

$$\begin{aligned} A(3) &= \int_0^3 D(q)dq \\ &= 4\int_0^3 (25 - q^2)dq \\ &= 4\left(25q - \frac{1}{3}q^3\right)\Big|_0^3 = \$264.000 \end{aligned}$$

## 7.9.3 Valor futuro de un flujo de ingresos

Suponga que se transfiere dinero continuamente a una cuenta durante un período $0 \leq t \leq T$ (el plazo). El valor futuro del flujo de ingresos es la cantidad total (dinero transferido a la cuenta más los intereses) a una tasa dada por la función $f(t)$. La cuenta gana interés a una tasa anual $r$, capitalizada continuamente. Entonces, el valor futuro $VF$ del flujo de ingresos después de $T$ años está dado por la integral definida:

$$VF = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}dt = e^{rT}\int_0^T f(t)e^{-rt}dt$$

Ejemplo 45. Se transfiere dinero a una cuenta continuamente a una tasa constante de \$1.200 por año. La cuenta gana intereses a una tasa anual del 8 % capitalizado continuamente. ¿Cuánto habrá en la cuenta al cabo de dos años?

Solución. En este caso $f(t) = 1.200$, $r = 0{,}08$ y $T = 2$.

$$\begin{aligned} VF &= e^{0.08(2)}\int_0^2 1200e^{-0.08t}dt \\ &= 1200e^{0.08(2)}\int_0^2 e^{-0.08t}dt \\ &= -\frac{1200}{0.08}e^{0.16}e^{-0.08t}\Big|_0^2 \\ &= -15000(1 - e^{0.16}) \\ &\approx 2602{,}66 \end{aligned}$$

Luego, al cabo de dos años habrá aproximadamente \$2.602,66 en la cuenta.

## 7.9.4 Valor presente de un flujo de ingresos

El valor presente de un flujo de ingresos generado a una tasa continua $f(t)$ durante un plazo específico de $T$ años, es la cantidad de dinero que se debe depositar hoy, a la tasa de interés prevaleciente, para generar el mismo ingreso que un flujo de ingresos durante el mismo período de $T$ años. Luego, el valor presente $VP$ de un flujo de ingresos que se deposita continuamente a la tasa $f(t)$ en una cuenta que gana interés a una tasa anual $r$ capitalizada continuamente, durante un plazo de $T$ años está dado por:

$$VP = \int_0^T f(t)e^{-rt}dt$$

**Ejemplo 46.** Juanes trata de decidir entre dos inversiones. La primera consiste en \$1.000 y se espera que genere un flujo de ingresos continuo a una tasa de $f_1(t) = 3000e^{0.03t}$ dólares por año. La segunda inversión consiste en \$4.000 y se estima que genere ingreso a una tasa constante de $f_2(t) = 4.000$ dólares por año. Si la tasa de interés anual permanece fija a 5 % capitalizado continuamente durante los próximos 5 años, ¿cuál inversión generará más ingreso neto durante este período?

**Solución.** El ingreso neto generado por cada inversión durante el período de 5 años es el valor presente de la inversión menos el costo inicial. Para cada inversión se tiene $r = 0{,}05$ y $T = 5$.

Para la primera inversión:

$$\begin{aligned} VP - \text{costo} &= \int_0^5 (3000e^{0.03t})e^{-0.05t}dt - 1000 \\ &= 3000\int_0^5 e^{-0.02t}dt - 1000 \\ &= 3000\frac{e^{-0.02t}}{-0.02}\Big|_0^5 - 1000 \\ &= -150000(e^{-0.02(5)} - e^0) - 1000 \approx 13274{,}39 \end{aligned}$$

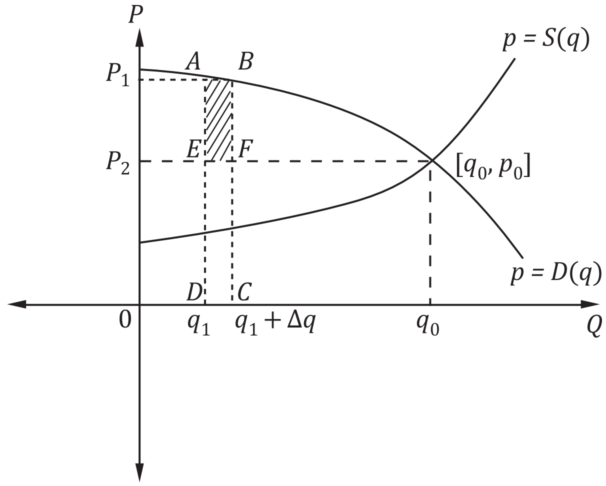
Para la segunda inversión:

$$\begin{aligned} VP - \text{costo} &= \int_0^5 (4000)e^{-0.05t}dt - 4000 \\ &= 4000\frac{e^{-0.05t}}{-0.05}\Big|^5 - 4000 \\ &= -80000(e^{-0.05(5)} - e^0) - 4000 \approx 13695{,}94 \end{aligned}$$

Entonces, el ingreso neto generado por la primera inversión es de \$13.274,39 mientras que la segunda inversión genera un ingreso neto de \$13.695,94. La segunda inversión es ligeramente mejor.

## 7.9.5 Excedente del consumidor y del productor

Sea $P = D(q)$ la curva de demanda de cierto artículo, y $P = S(q)$ la curva de oferta del mismo artículo, donde $q$ representa la cantidad del artículo que puede venderse o suministrarse a un precio $P$ por unidad. El equilibrio del mercado $(q_0, P_0)$ es el punto de intersección de las curvas de oferta y demanda, lo cual quiere decir que a un precio de $P_0$ por unidad, los consumidores están dispuestos a comprar, y los productores a vender, el mismo número $q_0$ de unidades del artículo.




A partir de la gráfica de la curva de demanda, se ve cómo a medida que el precio aumenta, la demanda baja. Esto implica que hay algunos consumidores que estarían dispuestos a comprar el artículo a un precio más alto que el precio de equilibrio del mercado $P_0$que es en realidad el que pagan. La diferencia entre las dos cantidades se conoce en economía como excedente del consumidor (*EC*). Teóricamente, puede considerarse como el ahorro logrado por los consumidores.

Para deducir la fórmula del excedente del consumidor, de acuerdo a la gráfica, considérese la cantidad $\Delta q$ de unidades entre $q_1$ y $q_1 + \Delta q$. El área $p_1\ \Delta q$ del rectángulo *ABCD* representa la cantidad total de dinero que los consumidores pagarían por estas $\Delta q$ unidades si el precio fuera $p_1 = D(q_1)$ por unidad. En el precio de equilibrio del mercado $P_0$, la cantidad real gastada por los consumidores en estas $\Delta q$ unidades es $P_0\ \Delta q$; así los consumidores ahorran una cantidad igual a $p_1\ \Delta q - P_0\ \Delta q = (D(q_1) - P_0)\Delta q$. Este ahorro es igual al área del rectángulo *ABEF*. Si se divide el intervalo $[0, q_0]$ en un gran número de subintervalos de longitud $\Delta q$, se obtiene un resultado similar en cada subintervalo: los ahorros de los consumidores son iguales al área de un rectángulo como ABEF situado entre la curva de demanda y la línea horizontal $P = P_0$. Sumando todos estos ahorros entre $q = 0$ y $q = q_0$, se obtiene el monto total o ahorro de los consumidores. Así, el excedente del consumidor está dado por el área entre la curva de demanda $P = D(q)$ y la línea horizontal $P = P_0$.

$$\begin{aligned}\int_0^{q_0}\left[D(q) - p_0\right]dq &= \int_0^{q_0} D(q)dq - \int_0^{q_0} p_0 dq\\ &= \int_0^{q_0} D(q)dq - p_0\, q\Big|_0^{q_0}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

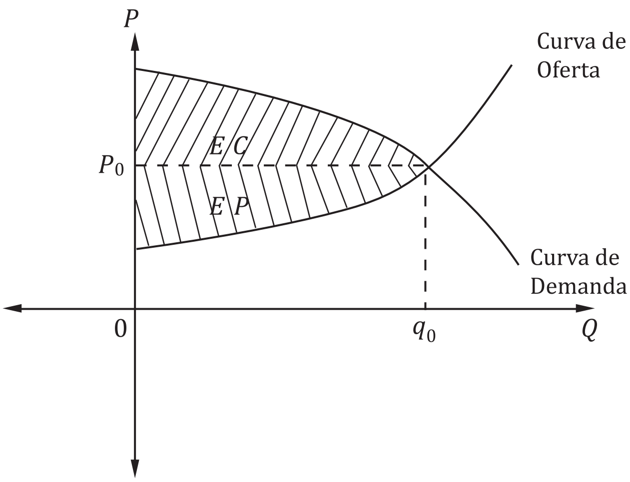
$$EC = \int_0^{q_0} D(q)\,dq - p_0\,q_0$$

De manera similar, en un mercado de libre competencia existen también productores que estarían dispuestos a vender el artículo a un precio menor que el de equilibrio del mercado $P_0$, que es el que los consumidores en realidad pagan. En tal situación, teóricamente los productores también se benefician. Este beneficio de los productores se denomina excedente del productor (*EP*).

Análogamente a lo realizado para el excedente del consumidor, se puede comprobar que la ganancia total del productor o excedente del productor está dado por:

$$EP = \; p_0 q_0 - \int_0^{q_0} S(q)\,dq$$

Geométricamente, el excedente del productor es el área entre la línea $P = P_0$ y la curva de oferta $S(q)$.




Ejemplo 47. Supóngase que la función de demanda de los consumidores de cierto artículo es $D(q) = 4(25 - q^2)$ dólares por unidad. Hallar el excedente de los consumidores si el artículo se vende a US \$64 por unidad.

Solución. Primero se halla el número de unidades que se comprarán; resolvemos la ecuación de demanda $P = D(q)$ para $q$ cuando $P =$ US \$64 para obtener:

$$\begin{aligned} 64 &= 4(25 - q^2) \\ 16 &= 25 - q^2 \\ q^2 &= 9 \\ q &= 3 \end{aligned}$$

Es decir, se comprarán 3 unidades cuando el precio sea US $64 por unidad. El excedente correspondiente de los consumidores es:

$$\begin{aligned}\int_0^3 D(q)dq - 64(3) \quad &= 4\int_0^3 (25-q^2)dq - 192\\ &= 4\left(25q - \frac{1}{3}q^3\right)\Big|_0^3 - 192\\ &= 264 - 192 = \text{US}\$72\end{aligned}$$

## 7.9.6 Modelo de ajuste de precios de Evans

Sea $P$ el precio de determinado artículo y $S(P)$ y $D(P)$ las funciones de oferta y demanda de dicho artículo en un momento dado. Con el tiempo, ¿qué tendencias tienen $P$, $S$ y $D$? ¿Cómo relacionarlas en función del tiempo? Consideremos los siguientes casos:

i) Si la oferta es igual a la demanda, el precio $P$ no varía y corresponde al punto de equilibrio.

ii) Si hay más demanda que oferta, $D>S$ y $D-S>0$, el precio $P$ tiende a subir, $\frac{dp}{dt}>0$, y cuanto mayor sea la diferencia $D-S$, la variación $\frac{dp}{dt}$ será mayor; es decir,

$$\frac{dp}{dt} = k(D-S), \text{con } \ k>0$$

iii) Si hay más oferta que demanda, $D<S$ y $D-S<0$, el precio $P$ tiende a bajar, $\frac{dp}{dt}<0$, y cuanto mayor sea la diferencia $D-S$ (en valor absoluto), la variación $\frac{dp}{dt}$ será mayor (en valor absoluto); es decir,

$$\frac{dp}{dt} = k(D-S), \ \text{ con } k>0$$

Resumimos: a la función $D-S$ se la conoce como función de escasez; a la ecuación diferencial $\frac{dp}{dt}=k(D-S)$, con $k>0$, se la conoce como modelo de ajuste de precios de Evans.

Ejemplo 48. Supóngase que el precio $p(t)$ de un artículo particular varía de manera que su razón de cambio con respecto al tiempo es proporcional a la escasez, $D-S$, donde $D(p)$ y $S(p)$ son las funciones lineales de demanda y oferta $D=8-2p$ y $S=2+P$.

a. Si el precio es US $5 cuando $t=0$ y US $3 cuando $t=2$, hallar $p(t)$.

b. Determinar qué le sucede a $p(t)$ a largo plazo (cuando $t\to\infty$).

Solución.

a. La razón de cambio de $p(t)$ está dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S), \text{con } p(0) = 5 \quad \text{y} \quad p(2) = 3$$

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= k(D - S)\\ &= k(8 \ - 2p) - (2 + p)\\ &= k(6 - 3p)\end{aligned}$$

Al separar las variables y al integrar y despejar $p$, se obtiene:

$$\int \frac{dp}{6 \ - \ 3p} = \int \ kdt$$

$$\frac{-1}{3}\ln|6 \ - 3p| = kt + C_1$$

$$\ln|6 \ - 3p| = -3kt - 3C_1$$

luego,

$$\begin{aligned}|6 - 3p| &= e^{-3kt-3C_1}\\ &= e^{-3kt}e^{-3C_1}\\ &= Ce^{-3kt}\end{aligned}$$

De acuerdo a las condiciones, $p > 2$ , es decir, $|6 - 3p| = 3p - 6$, de lo cual se sigue que:

$$\begin{aligned}3p - 6 \ &= Ce^{-3kt}\\ p(t) \ &= 2 + \frac{1}{3}Ce^{-3kt}\end{aligned}$$

Para calcular la constante $C$, se emplea el hecho de que $p(0) = 5$, de manera que:

$$5 = p(0) = 2 + \frac{1}{3}Ce^{0} = 2 + \frac{1}{3}C$$

de donde,

$$C = 9$$

y,

$$P(t) = 2 + 3e^{-3kt}$$

Para hallar $k$, como $P = 3$ cuando $t = 2$, se tiene que:

$$3 = P(2) = 2 + 3e^{-3k(2)} = 2 + 3e^{-6k}$$

y al resolver esta ecuación para $e^{-6k}$ y luego tomar los logaritmos, se obtiene:

$$e^{-6k} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$-6k = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -1{,}098\,6$$

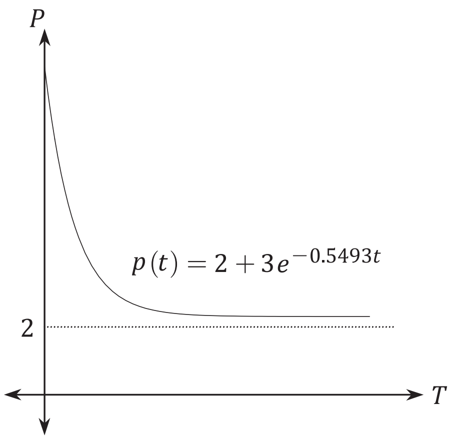
$$k = \frac{1{,}098.6}{6} = 0{,}183\,1$$

Así, el precio en el momento $t$ es:

$$p(t) = 2 + 3e^{-3(0.1831)t}$$
$$= 2 + 3e^{-0.5493t}$$

b. Cuando $t$ crece, $e^{-0.5493t}$ tiende a cero y $P(t)$ se aproxima a 2, que es el precio al cual la oferta es igual a la demanda. Es decir, a largo plazo el precio de $P(t)$ tiende al precio de equilibrio del artículo.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{3}{e^{0.5493t}} + 2 = 0 + 2 = 2$$



## 7.9.7 Exceso de utilidad neta

Supóngase que dentro de $x$ años, dos planes de inversión generarán utilidades $U_1(x)$ y $U_2(x)$ a razón de $R_1(x)$ y $R_2(x)$, respectivamente; es decir,

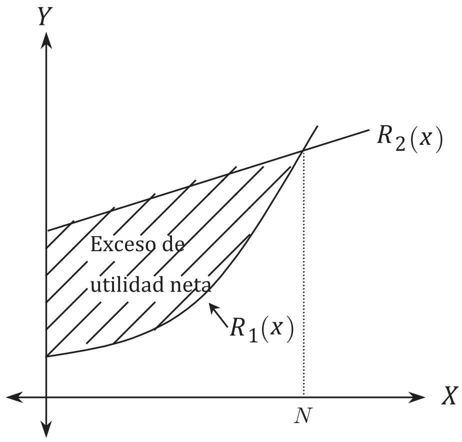
$$R_1(x) = \frac{dU_1}{dx} \text{ y } R_2(x) = \frac{dU_2}{dx}$$

Si suponemos que para los próximos $N$ años, $R_2(x)$ será mayor que la razón $R_1(x)$, la diferencia $R_2(x) - R_1(x)$ representa la razón a la que la utilidad generada por el segundo plan excede la del primero. Si hacemos $U = U_2 - U_1$, el exceso de utilidad neta generado por el segundo plan respecto al primero es:

$$R_2(x) - R_1(x) = \frac{dU}{dx} \text{ para } x < N$$

$$U(x) = \int (R_2(x) - R_1(x))dx$$

Si $n \leq N$, durante los próximos $n$ años el exceso de utilidad neta será:




$$U(n) = \int_0^n R_2(x) - R_1(x)dx$$

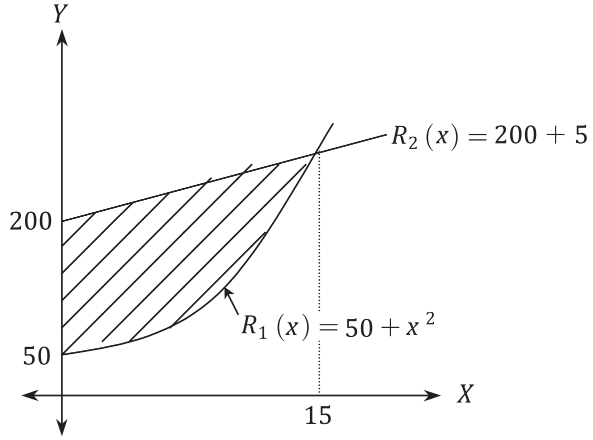
$U(N)$ será el exceso de utilidad neta total.

Ejemplo 49. Supóngase que en los siguientes $x$ años, un plan de inversión generará utilidades a la razón de $R_1(x) = 50 + x^2$ dólares por año, mientras que un segundo plan lo hará a la razón de $R_2(x) = 200 + 5x$ dólares por año.

a. ¿Durante cuántos años será más rentable el segundo plan?

b. Calcular el exceso de utilidad neta, si se invierte en el segundo plan en lugar de en el primero, durante el período expresado en el literal a.

Solución.




a. Observe en la gráfica que la razón $R_2(x)$ genera al principio más utilidades que la razón $R_1(x)$, por lo tanto el segundo plan será el más rentable hasta cuando $R_1(x) = R_2(x)$; es decir, hasta:

$$\begin{aligned} 50 + x^2 &= 200 + 5x \\ x^2 - 5x - 150 &= 0 \\ (x - 15)(x + 10) &= 0 \\ x &= 15 \text{ años.} \end{aligned}$$

No tenemos en cuenta $x = -10$ porque no pertenece al dominio de la función.

b. Para $0 \leq x \leq 15$, la razón a la que las utilidades generadas por el segundo plan exceden las del primero es $R_2(x) - R_1(x)$ dólares por año. Por tanto, el exceso de utilidad neta que genera el segundo plan durante el período de 15 años es:

$$\begin{aligned} \int_0^{15} R_2(x) - R_1(x)dx &= \int_0^{15} (200 + 5x) - (50 + x^2)\ dx \\ &= \int_0^{15} (150 + 5x - x^2)dx \\ &= \left(150x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^{15} \\ &= \text{US\$}1.687{,}50 \end{aligned}$$

Ejemplo 50. Cuando tiene $x$ años, cierta maquinaria industrial genera ingresos a razón de $R(x) = 5.000 - 20x^2$ dólares por año, y costos que se acumulan a razón de $C(x) = 2.000 + 10x^2$ dólares por año.

a. ¿Durante cuántos años es rentable el uso de la maquinaria?

b. ¿Cuáles son las ganancias netas generadas por la maquinaria durante el período expresado en el literal a?

Solución.

a. El uso de la maquinaria será rentable en tanto la razón a la que genera ingresos sea superior a aquélla en la que se acumulan los costos; es decir, hasta cuando $R(x) = C(x)$:

$$\begin{aligned} 5.000 - 20x^2 &= 2.000 + 10x^2 \\ 30x^2 &= 3.000 \\ x^2 &= 100 \\ x &= 10 \text{ años.} \end{aligned}$$

$x = -10$ no tiene sentido.

b. Las funciones $R(x)$ y $C(x)$ representan las razones de cambio del ingreso total y del costo total, respectivamente, y por lo tanto, su diferencia

$$R(x) - C(x)$$

representa la razón de cambio de la ganancia neta generada por la maquinaria. La ganancia neta para los próximos 10 años será de:

$$\begin{aligned} \int_0^{10} [R(x) - C(x)]\,dx &= \int_0^{10} (5.000 - 20x^2) - (2.000 + 10x^2)dx \\ &= \int_0^{10} (3.000 - 30x^2)dx \\ &= (3.000x - 10x^3)\Big|_0^{10} = \text{US\$}20.000 \end{aligned}$$

## EJERCICIO 7.5

1. Un estudio indica que dentro de $x$ meses la población de cierta ciudad aumentará a la razón de $5 + 3x^{2/3}$ personas por mes. ¿Cuánto crecerá la población en los próximos 8 meses?

2. Un objeto se mueve a una velocidad de $5 + 2t + 3t^2$ metros por minuto. ¿Qué distancia recorrerá el objeto entre el tercero y el quinto minuto?

3. El valor de cierta maquinaria industrial decrece durante un período de 10 años a una razón que cambia con el tiempo. Cuando la maquinaria tiene $x$ años, la razón a la que cambia su valor es $200.000\,(x - 10)$ pesos por año. ¿En cuánto se deprecia la maquinaria:

   a. durante el segundo año?

   b. durante el tercer año?

   c. entre el segundo y el quinto año?

4. Los promotores de ferias estiman que si las puertas se abren a las 9:00 a.m., $t$ horas después los visitantes entran a la feria a una razón de $-4(t+2)^3 + 54(t+2)^2$ personas por hora.

   a. ¿Cuántas personas entrarán a la feria entre las 10 a.m. y las 12 a.m.?

   b. Si la feria cierra la entrada a las 7 p.m., ¿cuántas personas entrarán diariamente?

5. En cierta fábrica, el costo marginal es $6(q-5)^2$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es $q$ unidades de un artículo. ¿En cuánto aumentará el costo total de fabricación si el nivel de producción se incrementa de 10 a 13 unidades?

6. Cierto pozo petrolífero que produce 4.000 barriles de crudo al mes se secará en 2 años. En la actualidad el precio del petróleo crudo es US $15 por barril y se espera que aumente a una razón constante de US $0,30 mensuales por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuál será el ingreso futuro total obtenido del pozo?

7. Se estima que dentro de $t$ días la cosecha de un agricultor aumentará a la razón de $0{,}3t^2 + 0{,}6t + 1$ arrobas por día. ¿En cuánto aumentará el valor de la cosecha durante los próximos 5 días si el precio de mercado permanece fijo en US $3 por arroba?

8. Se calcula que la demanda del producto de un fabricante crece exponencialmente a una razón del 2 % anual. Si la demanda actual es de 5.000 unidades por año y el precio permanece fijo en US $400 por unidad, ¿qué ingresos recibirá el fabricante por la venta del producto en los próximos 2 años?

9. Después de $t$ horas en el trabajo, un obrero de una fábrica puede producir $100te^{-0{,}5t}$ unidades por hora. ¿Cuántas unidades produce un trabajador entre las 10:00 a.m. y el mediodía, si llega al trabajo a las 8:00 a.m.?

10. Una compañía determina que el ingreso marginal de la producción de $x$ unidades es de $7 - 3x - 4x^2$ cientos de dólares por unidad y el correspondiente costo marginal es de $5 + 2x$ cientos de dólares por unidad. ¿Cuánto cambia la utilidad cuando el nivel de producción aumenta de 5 a 9 unidades?

11. Se proyecta que dentro de $t$ años la población de una ciudad cambiará a una razón de $t \cdot \ln\sqrt{(t+1)}$ miles de personas por años. Si la población actual es de 2 millones, ¿cuál será la población dentro de 5 años?

12. Para $x$ años, un plan de inversión generará utilidades a la razón de $R_1(x) = 100 + x^2$ dólares por año, mientras que un segundo plan lo hará a la razón de $R_2(x) = 220 + 2x$ dólares por año.

    a. ¿Durante cuántos años será más rentable el segundo plan?

    b. ¿Cuánto será el exceso de utilidad si se invierte en el segundo plan, en lugar de en el primero, durante el período indicado en el literal a?

    c. Interprete el exceso de utilidad como el área entre dos curvas.

13. Para $x$ años un plan de inversión generará utilidades a la razón de $R_1(x) = 60e^{0,12x}$ dólares por año, mientras que un segundo plan lo hará a la razón de $R_2(x) = 160e^{0,08x}$ dólares por año.

    a. ¿Durante cuántos años será más rentable el segundo plan?

    b. ¿Cuánto exceso de utilidad se obtendrá si se invierte en el segundo plan, en lugar de en el primero, durante el período señalado en el literal a?

    c. Interprete el exceso de utilidad como el área entre dos curvas.

14. Una maquinaria industrial de $x$ años genera ingresos a razón de $R(x) = 6.025 - 10x^2$ dólares por año y origina costos a razón de $C(x) = 4.000 + 15x^2$ dólares por año.

    a. ¿Durante cuántos años es rentable el uso de la maquinaria?

    b. ¿Cuánta ganancia neta genera la maquinaria durante el período indicado en el literal a?

15. Después de $t$ horas en el trabajo, un obrero de fábrica produce $Q_1(t) = 60 - 2(t - 1)^2$ unidades por hora, mientras que un segundo obrero produce $Q_2(t) = 50 - 5t$ unidades por hora. Si ambos llegan al trabajo a las 8 a.m. ¿cuántas unidades más habrá producido el primer trabajador al mediodía con respecto al segundo?

16. Se estima que dentro de $t$ semanas, las contribuciones a una campaña de beneficencia se recibirán a la razón de $R(t) = 5.000\, e^{-0,2t}$ dólares por semana, y se espera que los gastos se acumulen a la razón constante de US \$676 por semana.

    a. ¿Durante cuántas semanas será rentable la campaña de recaudación de fondos?

    b. ¿Cuánta ganancia genera la campaña durante el período señalado en el literal a?

17. Se estima que dentro de $t$ semanas las contribuciones a una obra de beneficencia se recibirán a la razón de $R(t) = 6,537e^{-0,3t}$ dólares por semana, y se espera que los gastos se acumulen a la razón constante de US \$593 por semana.

    a. ¿Durante cuántas semanas será rentable la campaña de recaudación de fondos?

    b. ¿Cuánta ganancia neta genera la campaña durante el período hallado en el literal a?

18. Dadas la funciones de demanda de los consumidores $D(q)$ y un $q_0$ en cada literal calcule cuánto están dispuestos a pagar los consumidores para obtener $q_0$ unidades del artículo.

    a. $D(q) = 2(64 - q^2)$ dólares por unidad, $q_0 = 6$ unidades;

    b. $D(q) = \frac{300}{(0.1q+1)^2}$ dólares por unidad, $q_0 = 5$ unidades;

    c. $D(q) = \frac{300}{4q+3}$ dólares por unidad, $q_0 = 10$ unidades;

    d. $D(q) = 50e^{-0,04q}$ dólares por unidad, $q_0 = 15$ unidades.

19. Con base en el ejercicio anterior hallar el excedente de los consumidores, si el precio de mercado del artículo es $P_0 = D(q_0)$ dólares por unidad.

20. Dada la función de demanda de los consumidores $F(q)$ y un $P_0$, calcule en cada literal cuánto están dispuestos a pagar los consumidores para obtener $q_0$ unidades del artículo, y el excedente de los consumidores.

    a. $D(q) = 2(64 - q^2)$ dólares por unidad, $P_0$ = US $110 por unidad;

    b. $D(q) = 150 - 2q - 3q^2$ dólares por unidad, $P_0$ = US $117 por unidad;

    c. $D(q) = \frac{300}{(0.1q+1)^2}$ dólares por unidad, $P_0$ = US $12 por unidad;

    d. $D(q) = \frac{400}{0.5q+2}$ dólares por unidad, $P_0$ = US $20 por unidad;

    e. $D(q) = 40e^{-0,5q}$ dólares por unidad, $P_0$ = US $11,46 por unidad;

    f. $D(q) = 30e^{-0,04q}$ dólares por unidad, $P_0$ = US $10 por unidad.

21. El precio en dólares por unidad de un artículo está dado por $P = 110 - q$, donde q es el número de unidades, y el costo total de producción de las $q$ unidades es $C(q) = q^3 - 25q^2 + 2q$.

    a. ¿Para qué valor de $q$ se maximizan las utilidades del fabricante?

    b. Halle el excedente de los consumidores cuando el precio corresponde a la utilidad máxima.

22. La función de demanda de cierto artículo es $D(q) = 32 - q^2$, y la función de oferta para el mismo artículo es $S(q) = \frac{1}{3}q^2 + 2q + 5$ (éste es el precio al cual se colocarán $q$ unidades en el mercado). Si la cantidad vendida y el precio correspondiente se determinan de manera que la oferta es igual a la demanda, halle el correspondiente excedente de los consumidores.

23. Resuelva el problema anterior cuando las funciones de demanda y de oferta son:

$$D(q) = \frac{16}{q+2} - 3 \quad \text{y} \quad S(q) = \frac{1}{3}(q+1)$$

24. Si las funciones de demanda y oferta son $D(P) = a - bp$ y $S(P) = r + sp$, y las constantes $a$, $b$, $r$ y $s$, son positivas, suponga que el precio es una función del tiempo $t$ y que la razón de cambio del precio en el tiempo es proporcional a la escasez $D - S$.

$$\frac{dp}{dt} = K(D - S)$$

Resuelva esta ecuación diferencial y trace la gráfica de $P(t)$. ¿Qué sucede con $P(t)$ a largo plazo (cuando $t \rightarrow +\infty$)?

25. Sean $D$ e $I$ la deuda y el ingreso nacional, en función del tiempo $t$. Uno de los muchos modelos del economista Evsey para la deuda afirma que las razones de cambio de $D$ e $I$ en el tiempo son proporcionales a $I$; es decir,

$$\frac{dD}{dt} = aI \quad \text{y} \quad \frac{dI}{dt} = bI$$

si $I(0) = I_0$ y $D(0) = D_0$.

a. Resuelva ambas ecuaciones diferenciales y exprese $D(t)$ e $I(t)$ en términos de $a$, $b$, $I_0$ y $D_0$.

b. ¿Qué sucede con $\frac{D(t)}{I(t)}$ cuando $t \to \infty$?

26. Después de $t$ segundos, un objeto se mueve a una velocidad de $t \cdot e^{-1/2\,t}$ metros por segundo. Exprese la distancia que recorre el objeto como una función de tiempo.

27. Después de $t$ horas en el trabajo, un obrero de una fábrica puede producir $100te^{-0,5t}$ unidades por hora. ¿Cuántas unidades producirá el trabajador durante las primeras 3 horas?

28. Después de $t$ semanas, las contribuciones en respuesta a una campaña local de recaudación de fondos llegaron a una razón de $2.000\ te^{-0,2t}$ dólares por semana. ¿Cuánto dinero se recaudó durante las 5 primeras semanas?

29. Un fabricante descubrió que el costo marginal es $0.5(q + 1)e^{0.3q}$ dólares por unidad cuando se producen $q$ unidades. El costo total de producción es de US$ 200. ¿Cuál es el costo total de producción de las 20 primeras unidades?

30. Las funciones de demanda y oferta en un mercado de competencia pura son respectivamente, $P = 14 - q^2$ y $P = 2q^2 + 2$; determine el excedente del consumidor y del productor.

31. La cantidad demandada $q$ (en cientos) de esferos RFM cada mes se relaciona con el precio unitario $P$ (en dólares) como $P = 80 - 0,2q^2$; la cantidad $q$ (en cientos) que el proveedor está dispuesto a poner a la venta se relaciona con el precio unitario $P$ (en dólares) de la forma $P = 0,1q^2 + q + 40$. Determine el excedente del consumidor y del productor.

32. La demanda y la oferta de teléfonos celulares viene dada por las ecuaciones $p = \frac{280}{q+2}$ y $P = 20 + 2,5q$ respectivamente. Determine el excedente del consumidor y del productor.

## 7.10 Resumen

**Propiedades de la sumatoria.**

**1.** $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$

**2.** $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$, para cualquier número real $c$.

**3.** $\sum_{k=1}^{n} c = c\,n$. con $a_k = c$ (sucesión constante).

**4.** $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$ (propiedad telescópica).

**Teorema fundamental del cálculo.**

Sea $f$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Considérese la función:

$$A_{a,x} = \int_a^x f(t)\,dt, \text{ con } a \leq x \leq b; \text{ entonces:}$$

i) $A'_{a,x} = F'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a, b)$.

ii) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$

**Propiedades de la integral definida.**

**1.** $\int_c^c f(x)dx = 0$, para todo $c \in [a, b]$.

**2.** $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo de integración $[a, b]$, entonces:

**3.** $\int_a^b c\, f(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$, $c$ es una constante.

**4.** $\int_a^b f(x) \pm g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$.

**5.** $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x)\, dx$, $a \leq c \leq b$.

**6.** Si $f$ es par en $[-a, a]$, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$$

**7.** Si $f$ es impar en $[-a, a]$, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$$

**Sustitución de una integral definida.** $\int_a^b g(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du$.

**Área entre curvas**

Primer caso. El área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, y el eje $X$, donde $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$:

$$\boldsymbol{A_{a,b} = \int_a^b f(x) dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Segundo caso. El área de la región limitada por las curvas $f(x)$, $g(x)$, $x = a$ y $x = b$, donde $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

$$A_{a,b} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Tercer caso. El área de la región limitada por las curvas $f(x)$ y $g(x)$, si éstas se intersectan en tres o más puntos. Si las funciones se intersectan sólo para tres valores de $x$, $x_1 < x_2 < x_3$. Éstos determinan dos regiones cuyos intervalos de integración son $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$. Calculamos el área entre las curvas dadas para cada intervalo siguiendo el procedimiento del segundo caso. El área entre las curvas es la suma de cada una de estas áreas.

## GLOSARIO

Sumatoria: La sumatoria de $a_k$ cuando $k$ varía desde $k = 1$ hasta $k = n$, se escribe:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \text{ y significa: } \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Serie: Es una suma infinita numerable y se expresa así: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i.$

Suma de Riemann: Es una suma de áreas de rectángulos, donde el rectángulo $k$–ésimo tiene base $\Delta x_k$ y altura $f(w_k)$; se expresa así :

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(w_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(w_k) \cdot (\Delta x_k)$$

Área bajo la curva: Es el área de la región limitada por la gráfica de la función $f$ no negativa definida y acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, el eje $X$, y las rectas $x = a$, $x = b$.

Integral definida de $f$ desde $a$ hasta $b$: Representa el límite de una suma de Riemann:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \left( \sum_{k=1}^{\infty} f(w_k) \cdot \Delta x_k \right)$$

siempre que el límite exista, en tal caso se dice que $f$ es integrable.

Ingreso marginal: $\frac{dI}{dq}$ representa el ingreso $I$ adicional al vender una unidad más a partir de $q$ unidades.

Costo marginal: $\frac{dC}{dq}$ representa el costo $C$ adicional al producir una unidad más a partir de $q$ unidades.

Utilidad marginal: $\frac{dU}{dq}$ representa la utilidad $U$, adicional al vender una unidad más a partir de $q$ unidades.

Excedente del consumidor: Corresponde a la diferencia entre la curva de demanda y el precio de equilibrio del mercado. Puede considerarse como el ahorro logrado por los consumidores.

Excedente del productor: Corresponde a la diferencia entre la curva de oferta y el precio de equilibrio del mercado. Puede considerarse como la ganancia o el beneficio de los productores.

# Capítulo 8

# Integrales impropias

## 8.1 Introducción

Hemos definido la integral $\int_a^b f(x)dx$ para $[a, b]$ finitos, si $f$ es integrable en $[a, b]$, para lo cual tiene que ser acotada en ese intervalo. Estas restricciones excluyen gran cantidad de integrales que aparecen en aplicaciones de las ciencias económicas y de probabilidad, por lo que vamos a generalizar la definición de integral al permitir que $a$ y $b$ puedan ser infinitos, o que la función no esté acotada en algunos puntos.

### Objetivos

1. Determinar si una integral impropia es convergente o divergente.
2. Solucionar problemas que exigen integrales impropias.

En el cálculo de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, aplicamos el teorema fundamental del cálculo, lo cual supone que $f$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. ¿Qué hacer cuando no se cumple alguno de estos supuestos? Es decir, cuando:

1. El intervalo $[a, b]$ es infinito.

2. $f$ tiene un número finito de discontinuidades infinitas en $[a, b]$; es decir, discontinuidades de la forma:

   $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, ó $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$, ó para $c \in (a, b)$;

   $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$, ó $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$, ó $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$.

   (De manera similar, si en lugar de $\infty$ se tiene $-\infty$).

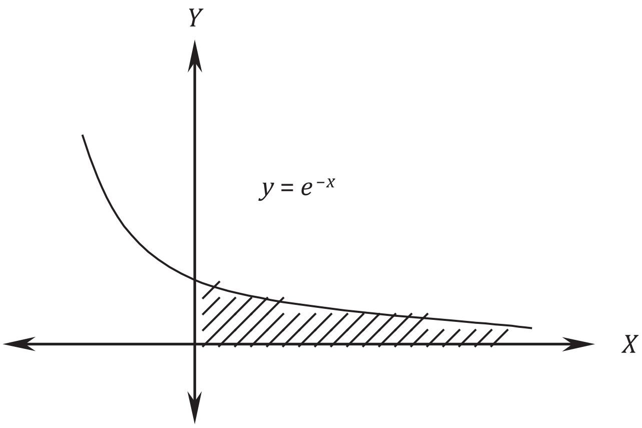
   Las integrales con estas características se conocen como integrales impropias.

## 8.1.1 El intervalo es $[a, \infty)$

Una estrategia razonable para evaluar esta integral es calcularla como el límite de la integral definida entre $x = a$ y $x = t$, cuando $t$ tiende a infinito. Si este límite es un número real, decimos que la integral converge en este valor, y si el límite no existe se dice que la integral diverge.
De manera análoga se evalúa cuando el intervalo es $(-\infty, b]$.

Ejemplo 1. Evaluar $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$.

Solución. $f$ es continua en el intervalo infinito $[0, \infty)$.

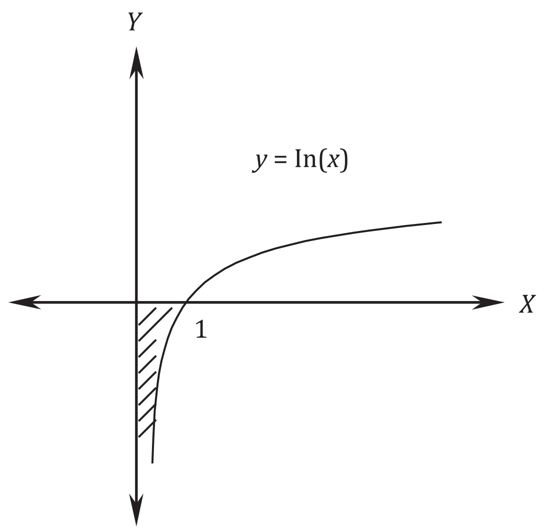


$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-x}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}dx \\
&= \lim_{t\to\infty}(-e^{-x})|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty}(-e^{-t}+1) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{e^t}+1\right) = 0+1 = 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral converge en 1.

## 8.1.2 La función $f$ tiene una discontinuidad infinita en $x = a$ ó $x = b$

Ejemplo 2. Evaluar la integral $\int_0^1 \ln(x)dx$.




Solución. Como $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $f$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$; por lo tanto, la integral es impropia.

Para evaluar esta integral, se calcula como una integral definida entre $x = t$ y $x = 1$, cuando $t \to 0^+$:

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln x dx.$$

Resolvemos por partes con $u = \ln x$ y $dv = dx$, de donde $du = \frac{dx}{x}$ y $v = x$; tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln x dx &= \lim_{t\to 0^+}(x\ln x - x)\Big|_t^1 \\
&= \lim_{t\to 0^+}(1\ln 1 - t\ln t - (1-t)) \\
&= \lim_{t\to 0^+}(-t\ln t - 1 + t) = \lim_{t\to 0^+}(-t\ln t) - 1
\end{aligned}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital; tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} t\ln t &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}} \\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-1/t^2} \\
&= \lim_{t\to 0^+}(-t) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x dx &= \lim_{t\to 0^+}(-t\ln t) - 1 \\
&= -0 - 1 = -1
\end{aligned}$$

La integral converge en -1.

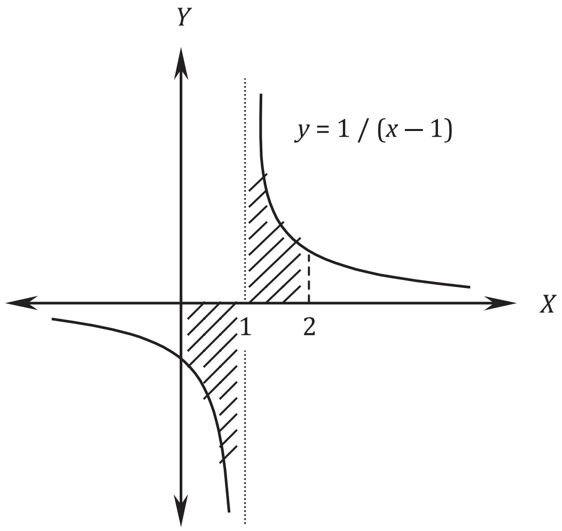
Ejemplo 3. Evaluar $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-1}dx$.

Solución. En $x = 1 \in (0, 2)$, $f$ tiene una discontinuidad infinita (y es el único punto donde esto ocurre):

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$$

por lo tanto, la integral es impropia y la podemos expresar así:

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1}dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1}dx$$




Cada una de las integrales del lado derecho es impropia. Para evaluarlas, procedemos de manera similar a como se hizo en el ejemplo 2.

La primera expresión se calcula como una integral definida entre $x = 0$ y $x = c$, cuando $c \to 1^-$. La segunda expresión se calcula como una integral definida entre $x = t$ y $x = 2$, cuando $t \to 1^+$. Resolvemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= \lim_{c \to 1^-} \int_0^c \frac{1}{x-1}\,dx + \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= \lim_{c\to 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^c + \lim_{t\to 1^+} \ln|x-1| \Big|_t^2 \\
&= \lim_{c\to 1^-} (\ln|c-1| - \ln|0-1|) + \lim_{t\to 1^+} (\ln|2-1| - \ln|t-1|) \\
&= \lim_{c\to 1^-} \ln|c-1| - \ln|1| + \ln|1| - \lim_{t\to 1^+} \ln|t-1|
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{c\to 1^-} \ln|c-1| - \lim_{t\to 1^+} \ln|t-1|$$

pero $\lim\limits_{c\to 1^-} \ln|c-1| = \infty = \lim\limits_{t\to 1^+} \ln|t-1|$. Como el límite no existe, la integral diverge.

## 8.1.3 Resumimos:

### 8.1.3.1 Integrales impropias con límites de integración infinitos

8.1.3.1.1 Si $f$ es continua en el intervalo $[a, \infty)$, entonces:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

Si el límite es un número real, se dice que la integral converge en ese número, y si el límite no existe, la integral diverge.

8.1.3.1.2 Si $f$ es continua en el intervalo $(-\infty, b]$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right).$$

Si el límite es un número real, se dice que la integral converge en ese número; si el límite no es un número real, la integral diverge.

8.1.3.1.3 Si $f$ es continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

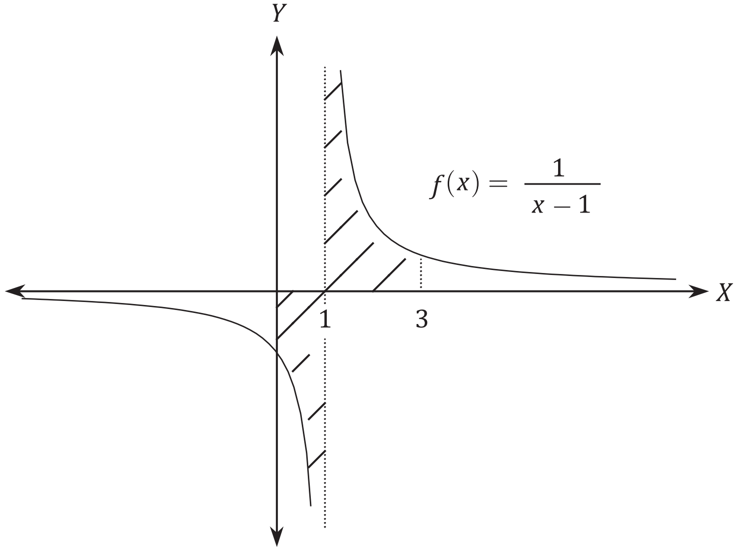
donde $c$ es cualquier número real. Dicho en otros términos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b \to \infty}\int_c^b f(x)dx$$

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge si ambos límites son números reales; si uno de los dos límites no es un número real, la integral diverge.

Ejemplo 4. Evaluar $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$.

Solución.




En $x = 1 \in [0, 3]$, tenemos que $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$ (la recta $x = 1$ es una asíntota vertical); por lo tanto, la integral es impropia y la podemos expresar como:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} \\
&= \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\,\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|) \\
&= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty
\end{aligned}$$

porque $1-t \to 0^+$ cuando $t \to 1^-$. Por lo tanto, $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ diverge. Esto implica que: $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ diverge. $\left(\text{No necesitamos evaluar } \int_1^3 \frac{dx}{x-1}\right)$.

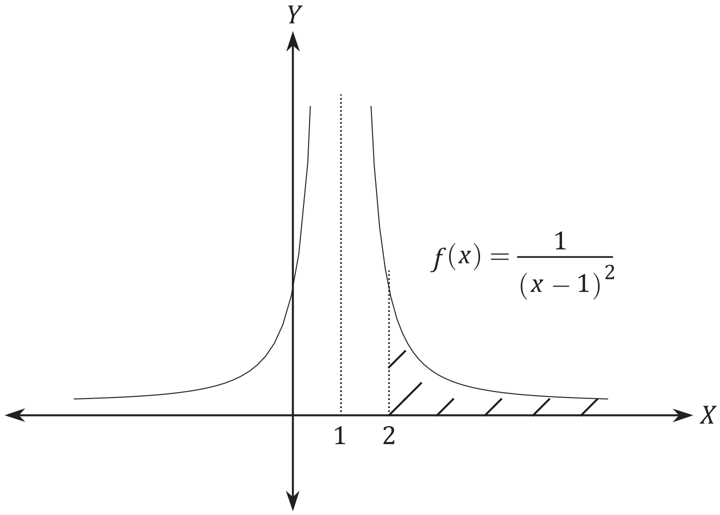
Advertencia: Si cometemos el error de no observar que $x = 1$ es una asíntota, y calculamos esta integral asumiendo que $f$ es continua en el intervalo cerrado $[0, 3]$, tenemos:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\,\Big|_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

lo cual es falso.

Ejemplo 5. Evaluar $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$.

Solución. $x = 1$ es una asíntota vertical, pero $1 \notin (2, \infty)$; por lo tanto no se considera. Ahora:



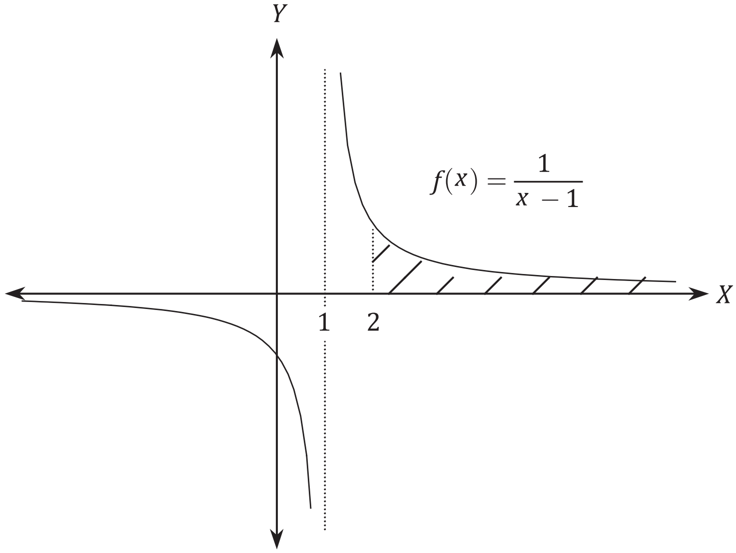

$$
\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx &= \lim_{c\to\infty} \int_2^{c} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \\
&= \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{x-1}\right]\Bigg|_2^c \\
&= \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{c-1} + \frac{1}{2-1}\right] \\
&= 0 + 1 = 1
\end{aligned}
$$

por lo tanto, la integral impropia converge en 1.

Ejemplo 6. Evaluar $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\ln|x-1|\right]\Big|_2^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\ln|t-1| - \ln|2-1|\right] \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln|t-1| = \infty
\end{aligned}
$$

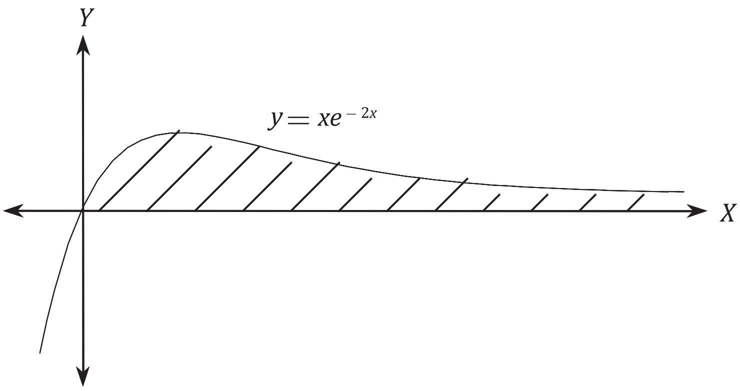



Por lo tanto, la integral impropia diverge.

**Nota:** *Observe que* $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx$ *converge, mientras que* $\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx$ *diverge; cuando* $x \to \infty$, *ambas funciones tienden a cero. Esto indica en principio que por inspección no es posible determinar si la integral converge o diverge. Intuitivamente se observa que cuando* $x \to \infty, \frac{1}{(x-1)^2} \to 0$ *más "rápidamente" que* $\frac{1}{x-1}$.

Ejemplo 7. Evaluar $\int_0^{\infty} xe^{-2x} dx$.

Solución.



Aplicamos integración por partes:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} xe^{-2x}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[ -\frac{1}{2} xe^{-2x}\Big|_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2x}\,dx \right] \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[ -\frac{1}{2} xe^{-2x} - \frac{1}{4}\, e^{-2x} \right]\Bigg|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[ -\frac{1}{2} te^{-2t} - \frac{1}{4}\, e^{-2t} + 0 + \frac{1}{4} \right] \\
&= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2} te^{-2t} - \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{4}\, e^{-2t} + \frac{1}{4} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[ te^{-2t} \right] - 0 + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

aplicamos la regla de L'Hôpital a $\lim\limits_{t\to\infty}$ $[-te^{-2t}]$; tenemos:

$$\lim_{t\to\infty} \left[ te^{-2t} \right] = \lim_{t\to\infty} \left[ \frac{t}{e2t} \right] = \lim_{t\to\infty} \left[ \frac{1}{2e2t} \right] = 0$$

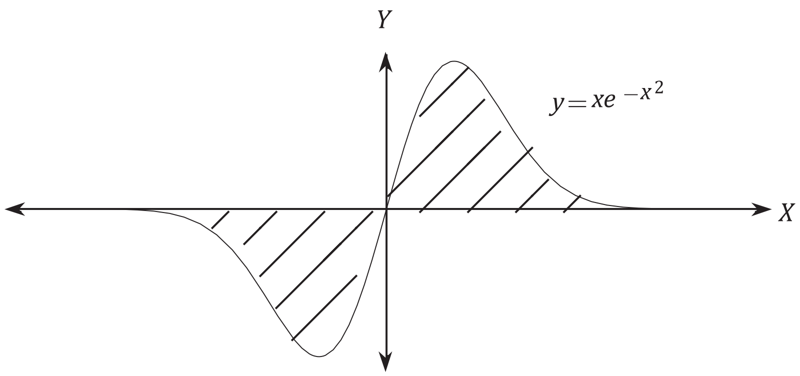
por lo tanto,

$$\int_0^{\infty} xe^{-2x}dx = \frac{1}{4}$$

La integral converge en $\frac{1}{4}$.

Ejemplo 8. Evaluar $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$.

Solución.



$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^{-x^2}dx + \lim_{S\to\infty}\int_0^S xe^{-x^2}dx\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]\Bigg|_t^0 + \lim_{8\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]\Bigg|_0^S\\ &= \left[-\frac{1}{2}+0\right]+\left[0+\frac{1}{2}\right]= 0\end{aligned}$$

La integral converge en 0.

### 8.1.3.2 Integral impropia con una discontinuidad infinita

8.1.3.2.1 Sea $f$ continua en $[a, b)$ y con una discontinuidad infinita cuando $x \to b-$; entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\left(\int_a^c f(x)dx\right)$$

Si el límite es un número real, la integral converge; en caso contrario, la integral diverge.

8.1.3.2.2 Sea $f$ continua en $(a, b]$ y con una discontinuidad infinita cuando $x \to a+$; entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\left(\int_c^b f(x)dx\right).$$

Si el límite es un número real, la integral converge; en caso contrario, la integral diverge.

8.1.3.2.3 Sea $f$ continua en $[a, c)$ y en $(c, b]$ con una discontinuidad infinita en $c$; entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c_1\to c^-}\left(\int_a^{c_1} f(x)dx\right) + \lim_{c_2\to c^+}\left(\int_{c_2}^b f(x)dx\right)$$

Si cada uno de los límites es un número real, la integral converge; en caso contrario, la integral diverge.

Ejemplo 9. Evaluar $\int_0^5 \frac{1}{x^2}dx$.

Solución. $f$ tiene una discontinuidad infinita cuando $x \to 0^+$, la integral es impropia y además:

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^5 \frac{1}{x^2}dx\\ &= \lim_{a\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^5\\ &= \lim_{a\to 0^+}\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{a}\right)=\infty\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral diverge.

Ejemplo 10. Evaluar $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Solución. $f$ tiene una discontinuidad infinita cuando: $x \to 0^+$, la integral es impropia y además:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} &= \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{x^{2/3}}{2/3}\right)\Big|_a^1\\ &= \lim_{a\to 0^+}\frac{3}{2}(1-a^{2/3}) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

La integral converge en $\frac{3}{2}$.

Ejemplo 11. Evaluar $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}dx$.

Solución. En $x = 0 \in (-1, 2)$, $f$ tiene una discontinuidad infinita, la integral es impropia y:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2}dx\\ &= \lim_{c\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^c + \lim_{d\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_d^2\\ &= \infty\end{aligned}$$

La integral diverge.

Advertencia: Si cometemos el error de no considerar que la función tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, y evaluamos la integral como continua en [-1, 2], tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}dx &= -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^2\\ &= \left(-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{-1}\right)\right) = -\frac{1}{2}-1 = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

lo cual es falso.

## EJERCICIO 8.1

En los ejercicios del numeral 1 al 18, determine si la integral converge o diverge. Si converge, calcule su valor.

1. $\int_3^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^2} dx;$
2. $\int_0^{\infty} 5e^{-2x} dx;$
3. $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx;$
4. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx;$
5. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx;$
6. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$
7. $\int_1^{\infty} x^{-\frac{2}{3}} dx;$
8. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{4/3}} dx;$
9. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{3/4}} dx;$
10. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx;$
11. $\int_0^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx;$
12. $\int_1^{5} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx.$
13. $\int_0^{e} x \ln(x) dx.$
14. $\int_{-2}^{2} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx.$
15. $\int_0^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}} dx;$
16. $\int_0^{4} \frac{1}{x} dx;$
17. $\int_0^{e} \ln(x) dx;$
18. $\int_0^{2} \frac{1}{(1-x)^2} dx.$

En los ejercicios 19 y 20, determinar para qué valores de $p$ la integral dada converge.

19. $\int_0^{b} \frac{1}{x^p} dx$, con $b > 0;$
20. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx.$

En cada uno de los siguientes ejercicios, determine si la integral converge o diverge.

21. $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{5-2x} dx;$
22 $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx;$
23. $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-8)^{2/3}} dx$
24. $\int_1^{\infty} (1-x)e^{-x} dx;$
25. $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2} dx$
26. $\int_3^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^2} dx$
27. $\int_0^{\infty} 5e^{-2x} dx;$
28. $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{(x^3+2)^2} dx$
29. $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx$
30. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
31. $\int_0^{\infty} 2xe^{-3x} dx$
32. $\int_0^{\infty} 5xe^{10-x} dx;$

33. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx$;
34. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{1-x}dx$;
35. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$;
36. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^3}dx$;
37. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1-x^2}dx$;
38. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^3}{x^4+9}dx$;
39. $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{x^2+4}dx$;
40. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx$;
41. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$;
42. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$;
43. $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2-1}dx$;
44. $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{x+18}{x^2+x-12}dx$;
45. $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$;
46. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}dx$;
47. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3+2}dx$;
48. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{x}dx$;
49. $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{1-x}dx$;
50. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x^3}dx$.

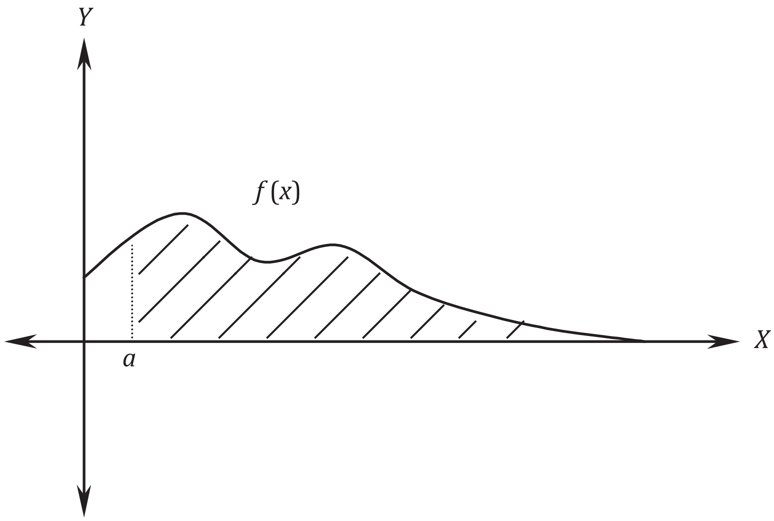
### Aplicaciones de la integral impropia

Las siguientes aplicaciones de la integral impropia generalizan algunas de las aplicaciones de la integral definida que se analizaron en la sección anterior.

## 8.2 Área bajo la curva

Sea $f$ una función continua no negativa definida en un intervalo infinito $[a, \infty)$, tal que $\lim_{t\to\infty} f(x) = 0$. Si $t > a$, el área $A(t)$ bajo la gráfica de $f$ entre $a$ y $t$, está dada por:

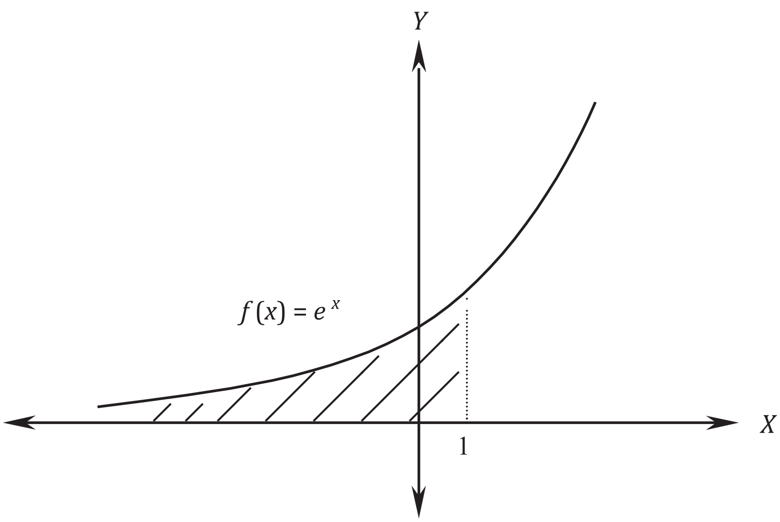
$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$




Si $\lim\limits_{t \to \infty} A(t)$ existe, entonces esto puede interpretarse como el área de la región que se encuentra limitada por: $y = f(x)$, el eje $X$, $x = a$ y $x = t$ con $t \to \infty$.

Ejemplo 12. Hallar el área de la región que se encuentra bajo la gráfica de $y = e^x$, sobre el eje $X$ y a la izquierda de $x = 1$.

Solución.




$$A(t) = \int_{-\infty}^{1} e^x dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^1 e^x \, dx$$

$$= \lim_{t \to -\infty} e^x \Big|_t^1 = \lim_{t \to -\infty} [e - e^t]$$

$$= e - 0 = e \text{ unidades de área.}$$

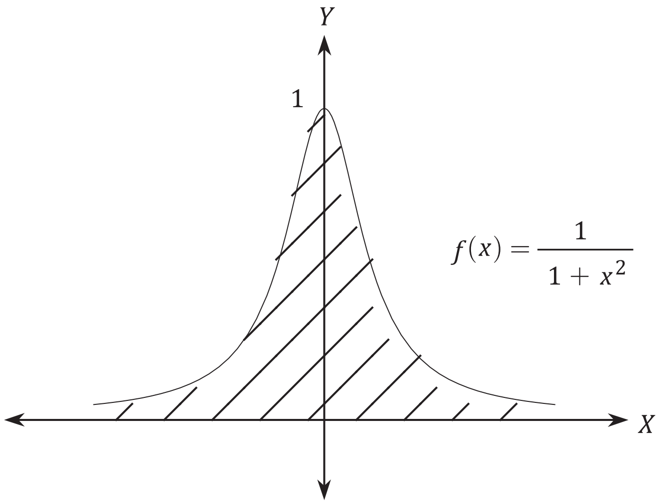
Ejemplo 13. Evaluar $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Solución.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Como $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es una función par, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$




Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= 2\lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= 2\lim_{t\to\infty} \left[\arctan x\right]\Big|_{0}^{t} \\
&= 2\lim_{t\to\infty} \left[\arctan t - \arctan 0\right] \\
&= 2\left[\frac{\pi}{2}\right] = \pi
\end{aligned}$$

Como $f(x) \geq 0$, este resultado se puede interpretar como el área de la región limitada por el eje $X$ y $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

## 8.3 Interés continuo

Recordemos que el valor futuro $P(t)$ de un capital $P_0$(valor presente) colocado a un interés continuo del $k$% por período durante un tiempo de $t$ períodos está dado por:

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Si conocemos $P(t)$, tenemos que $P_0 = P(t)e^{-kt}$.

Ejemplo 14. ¿Cuánto dinero se debe colocar en una entidad financiera que reconoce un interés continuo del 16 % anual para poder retirar a perpetuidad \$2'000.000 anuales?

Solución. Se retiran \$2'000.000 cada año. Esto significa que si llevo a valor presente cada uno de estos retiros, debo obtener $P_0$. Es decir:

$$\begin{aligned} P_0 &= 2'000.000\, e^{-0,16(1)} + 2'000.000\, e^{-0,16(2)} + \ldots + 2'000.000\, e^{-0,16(N)} + \ldots \\ &= 2'000.000 \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-0,16})^k \end{aligned}$$

Esta sumatoria es una serie geométrica (ver ejemplo 11 del capítulo 7); como $e^{-0.16} < 1$, entonces:

$$\begin{aligned} P_0 &= 2'000.000 \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-0,16})^k \\ &= 2'000.000 \left( \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-0,16})^k - 1 \right) \\ &= 2'000.000 \left( \frac{1}{1 - e^{-0,16}} - 1 \right) \approx 11'526.655,3 \end{aligned}$$

Utilizamos sumas de Riemann:

$$\begin{aligned} 2'000.000 \sum_{t=1}^{\infty} (e^{-0,16(t)})\Delta t &= 2'000.000 \int_0^{\infty} e^{-0,16t} dt \\ &= 2'000.000 \left( -\frac{1}{0.16} \lim_{b \to \infty} e^{-0,16t} \right) \Big|_0^t \\ &= -12'500.000(0 - 1) = \$12'500.000 \end{aligned}$$

**Nota:** *En análisis marginal, como en integrales definidas, cuando la variable es discreta, la derivada y la integral son aproximaciones. El cálculo en diferencias finitas y las series son métodos exactos para hacer estos cálculos.*

Hoy, con el gran desarrollo tecnológico que existe, es conveniente utilizar los métodos exactos.

Ejemplo 15. (Desintegración exponencial). Una central nuclear produce residuos radiactivos a razón de $f(t) = 400t$ kg/mes. Los residuos se desintegran exponencialmente a una razón del 0,2 mensual. ¿Qué le sucederá a la acumulación de residuos radiactivos de la central a largo plazo?

Solución. Los residuos producidos en el mes $t = k$ están dados por $400k$, para $t = N$ y $k \leq N$. Los residuos producidos en el período $k$ se habrán desintegrado durante $N$-$k$ períodos. Por lo tanto, la cantidad de residuos que se produjeron en el período $k$ y que aún están presentes en el período $N$ es $400ke^{-0,002(N-k)}$ y la cantidad de residuos después de $N$ meses es:

$$400(1)e^{-0,002(N-1)} + 400(2)e^{-0,002(N-2)} + \ldots + 400(N) = \sum_{k=1}^{\infty} 400ke^{-0,002(N-k)}$$

con $\Delta k = 1$, si $N \rightarrow \infty$; tenemos:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 400ke^{-0,002(N-k)} = \lim_{N\to\infty} \int_0^N 400\, t\, e^{-0,002(N-t)} dt$$

Integramos por partes:

$$= 400 \lim_{N\to\infty} 500t\, e^{-0,002(N-t)} - (500)^2 e^{-0,002(N-t)} \Big|_0^N$$
$$= 400 \lim_{N\to\infty} (500N - (500)^2 + (500)^2\, e^{-0,002N}) = \infty \text{ (diverge)}$$

Esto significa que la cantidad de residuos crece con el tiempo más rápidamente que la cantidad que se desintegra.

Ejemplo 16. De acuerdo con la ley del inverso de los cuadrados de Newton, la fuerza que ejerce la tierra sobre una cápsula espacial es $-k/x^2$, en donde $x$ es la distancia (en millas, por ejemplo) desde la cápsula al centro de la tierra. Por lo tanto, la fuerza $S(x)$ requerida para elevar a la cápsula es $S(x) = -k/x^2$. ¿Cuánto trabajo se realiza al impulsar una cápsula de 1.000 libras fuera del campo de atracción terrestre?

Solución. Podemos evaluar $k$ si observamos que en:

$x = 3960$ millas (el radio de la tierra)

la fuerza es igual al peso de la cápsula:

$$1000 = \frac{k}{(3960)^2}$$

de donde $k = 1000(3960)^2 = 1.568 \times 10^{10}$.

Por lo tanto el trabajo realizado en millas - libra es:

$$
\begin{aligned}
1.568\times 10^{10}\int_{3960}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} &= \lim_{b\to\infty} 1.568\times 10^{10}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{3960}^{\infty} \\
&= \lim_{b\to\infty}\ 1.568\times 10^{10}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{3960}\right) \\
&= \frac{1.568\times 10^{10}}{3960}\approx 3.96\times 10^{6}
\end{aligned}
$$

## 8.4 Función de densidad de probabilidad (fdp)

Los siguientes experimentos:

- lanzar una moneda y determinar la cara superior;

- medir el tiempo que un bombillo tarda en fundirse;

- medir continuamente la temperatura de algún sitio durante un día y registrarla;

se denominan experimentos aleatorios y se caracterizan porque:

1. se pueden repetir en las mismas condiciones;

2. no se puede establecer con certeza el resultado de un experimento particular, aunque sí es posible determinar los resultados posibles del experimento;

3. cuando el experimento se repite, los resultados parecen ocurrir de manera caprichosa. Pero si el experimento se repite muchas veces, se muestra alguna regularidad que se explica mediante un modelo probabilístico. Por ejemplo, si se repite muchas veces el experimento de lanzar la moneda, el número de caras tiende a ser igual al número de sellos.

**Definición 1.** En un experimento aleatorio, el conjunto $S$ de todos los resultados posibles del experimento se denomina espacio muestral.

Ejemplos 17. En el experimento de la moneda, $S = \{\text{cara, sello}\}$.

En el experimento de la bombilla, $S = \{t\colon\ t \geq 0\} = [0, \infty)$.

En el experimento de la temperatura se establecen para ese sitio las temperaturas mínima $m$ y máxima $M$; es decir, $S = [m, M]$.

Los elementos de un espacio muestral no siempre son números, como en el caso de la moneda. Para asignar alguna medida a los resultados del experimento, se hace necesario asignar un número real a cada resultado del experimento. Por ejemplo, determinar el número de caras en el experimento conduce al conjunto $\{0, 1\}$.

**Definición 2.** Sea ε un experimento y $S$ el espacio muestral asociado a él. Una función $X$ que asigne a cada $t \in S$ un número real $X(t)$ se denomina variable aleatoria.

Si el recorrido de la función es un conjunto numerable, como en el experimento de lanzar una moneda, la variable se denomina discreta. Si es un conjunto no numerable (un intervalo de números reales), la variable se denomina continua, como en los experimentos de la bombilla y la temperatura.

**Definición 3.** Si $X$ es una variable aleatoria continua, existe una función $f$ llamada función de densidad de probabilidad (*fdp*) de $X$ que satisface:

i. $f(x) \geq 0$ para todo $x$;

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$;

iii. Si $a < b$, la probabilidad de que la variable $X$ tome valores entre $a$ y $b$ es:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

**Definición 4.** A la función $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$, se la denomina función de distribución acumulativa (*fda*).

Ejemplo 18. Demuestre que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

es una función de densidad de probabilidad.

Solución. i. Como $b > a$, $b - a > 0$, por lo tanto, $f(x) \geq 0$.

ii. Como $f(x) = 0$ para $x < a$ y $x > b$, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\,x\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\,(b-a) = 1.$$

En este caso, decimos que $f$ está distribuida uniformemente en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 19. Muestre que $f(x) = \begin{cases} k\mathrm{e}^{-kx}, & \text{si } x \geq 0 \quad \text{y} \quad k > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

es una función de densidad de probabilidad.

Solución. i. Como $e^{-kx} > 0$ para todo $x$, y $k > 0$, entonces $f(x) \geq 0$;

ii. $\displaystyle\int_0^{\infty} k\mathrm{e}^{-kx}dx = k\,\frac{-1}{k}\left(\lim_{b\to\infty} e^{-kb} - e^0\right) = -1 \lim_{b\to\infty}(e^{-kb} - 1) = 1.$

Ejemplo 20. La función de densidad de probabilidad de la duración de las llamadas telefónicas en cierta ciudad es $f(x) = 0{,}5e^{-0{,}5x}$, donde $x$ representa la duración en minutos de una llamada seleccionada aleatoriamente.

i. ¿Qué porcentaje de llamadas dura entre 2 y 3 minutos?

ii. ¿Qué porcentaje de llamadas dura más de 2 minutos?

Solución. i. $\displaystyle\int_2^3 0{,}5e^{-0{,}5x}\,dx = \frac{0{,}5\,e^{-0{,}5x}}{-0{,}5}\Big|_2^3 = -e^{-1{,}5} + e^{-1} \approx 0{,}1447$

de donde, $\displaystyle\int_2^3 0{,}5e^{-0{,}5x}\,dx = 14{,}47\%$

ii. $$\begin{aligned}\int_2^{\infty} 0{,}5\,e^{-0{,}5}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-0{,}5x}\big|_2^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-0{,}5b} + e^{-1}\right)\\ &= 0 + e^{-1} \approx 0{,}3678 = 36{,}78\%\end{aligned}$$

## 8.5 Valor esperado y varianza

Algunos valores que caracterizan una variable aleatoria $X$, son: su valor esperado $E(X)$, que indica en promedio, a qué valor tiende la variable cuando el número de experimentos tiende a infinito; así como la varianza, $V(X)$, y la desviación estándar, $\sqrt{(V(X))} = \sigma$, que miden de qué manera se agrupan los datos alrededor del valor esperado.

Si $X$ es una variable aleatoria y $f$ su *fdp*, entonces:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$V(X) = E[(X) - E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx$$

Puede demostrarse que:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Ejemplo 21. Hallar el valor esperado y la varianza de la variable $X$ distribuida uniformemente en el intervalo $[a, b]$.

Solución. Como $X$ está distribuida uniformemente en $[a, b]$, $f(x) = \frac{1}{b-a}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{b-a} (b^2 - a^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(b+a)(b-a)}{b-a} \\ &= \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

Como $V(X) = E(X^2)$- $(E(X))^2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{1}{3} x^3\Big|_a^b = \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{b-a} - \frac{b^2+2ba+a^2}{4} \\
&= \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{b^2+2ba+a^2}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \frac{4b^2+4ba+4a^2-3b^2-6ba-3a^2}{12} \\
&= \frac{b^2-2ba+a^2}{12} \quad = \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 22. Sea $X$ la variable aleatoria que mide la duración de llamadas telefónicas en cierta ciudad, y suponga que $X$ está distribuida exponencialmente con función de densidad de probabilidad: $f(x) = \begin{cases} 0.5\mathrm{e}^{-0.5x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a. ¿Cuánto espera usted que dure una llamada telefónica seleccionada al azar?

b. ¿Cuál es la varianza de la variable aleatoria $X$?

Solución. a. El valor esperado de $X$ es:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{\infty} x(0{,}5\, e^{-0{,}5})\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} 0{,}5x\, e^{-0{,}5}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-xe^{-0{,}5x}\Big|_0^b + \int_0^b e^{-0{,}5x}\, dx\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-xe^{-0{,}5x} - 2\, e^{-0{,}5x}\right)\Big|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-be^{-0{,}5b} - 2\, e^{-0{,}5b} + 2\right) = 2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la duración esperada (promedio) para las llamadas telefónicas en la ciudad es 2 minutos.

b. $$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2 \\ &= \int_0^{\infty} 0{,}5x^2\, e^{-0{,}5x}\, dx - 4 \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} 0{,}5x^2\, e^{-0{,}5x}\, dx - 4 \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-x^2 e^{-0{,}5x}\Big|_0^b + 2\int_0^b x\, e^{-0{,}5x}\, dx\right) - 4 \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\left(-x^2 e^{-0{,}5x} - 4x\, e^{-0{,}5x}\right)\Big|_0^b + 4\int_0^b e^{-0{,}5x}\, dx\right] - 4 \\ &= \lim_{b\to\infty} (-x^2 - 4x - 8)e^{-0{,}5x}\,\Big|_0^b - 4 \\ &= \lim_{b\to\infty} [(-b^2 - 4\text{b} - 8)e^{-0{,}5b} + 8] - 4 = 4 \end{aligned}$$

## EJERCICIO 8.2

1. Hallar el área de la región limitada por las curvas:

   a. Eje $X$, $x = 1$, $y = e^{-2x}$ para $x \geq 1$;

   b. Eje $X$, $x = 0$, $y = x$, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

   c. Eje $X$, $x = 1$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$ si $x \geq 1$.

2. Las siguientes inversiones generan ingresos anuales a perpetuidad con una tasa de interés continuo del 20 % anual. Hallar el valor presente de la inversión, si el ingreso anual en pesos es:

   a. 6´000.000.

   b. 6´000.000(1,15)$^t$.

   c. 6´000.000 + 1´000.000$t$.

3. A una especie animal que tiene actualmente una población de 200.000 ejemplares, se le adicionan anualmente 1.000 ejemplares. Si se sabe que la población está disminuyendo a un ritmo continuo del 3 % anual, calcule:

   a. La población dentro de 120 meses.

   b. ¿Qué ocurrirá con la especie a largo plazo?

4. Un capital de $30’000.000 reconoce intereses anuales con una tasa de interés continuo del 15 % anual. Calcule el valor presente de los intereses de los próximos diez años.

5. ¿Cuánto se debe colocar en una entidad financiera que reconoce un interés continuo del 22 % anual para retirar a perpetuidad $16'000.000 anuales?

6. Calcule cuál deberá ser el capital para que genere intereses de $26'000.000 anuales durante los próximos cinco años con un interés continuo del 24 % anual.

7. La administración de una cadena nacional de restaurantes de comida rápida está vendiendo una franquicia permanente en Seattle, Washington. La experiencia en lugares semejantes sugiere que dentro de $t$ años, la franquicia estará generando utilidades a razón de $f(t) = 12000+900t$ dólares por año. Si la tasa prevaleciente de interés permanece fija a 5 % capitalizado continuamente, ¿cuál es el valor prevaleciente de la franquicia?

8. Cierta planta nuclear genera desechos radiactivos a razón de 600 libras por año. Los desechos se desintegran exponencialmente a 2 % por año. ¿Qué cantidad de desechos radiactivos de la planta estará presente a largo plazo?

9. Estudios demográficos realizados en cierta ciudad indican que la fracción de residentes que quedará en la ciudad después de $t$ años es $f(t) = 0{,}2e^{-t/20}$. La población actual de la ciudad es 100.000 habitantes y se estima que dentro de $t$ años, otras personas llegarán a razón de $100t$ por año. Si dicha estimación es correcta, ¿qué le ocurrirá a la población de la ciudad a largo plazo?

10. La distancia en pies entre autos sucesivos en una autopista está modelada por la variable aleatoria $X$, con función de densidad de probabilidad $f(x) = \begin{cases} 0.25x\ e^{-x/2}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$.

   a. Encuentre la probabilidad de que un par de autos seleccionados al azar disten menos de 10 pies el uno del otro.

   b. ¿Cuál es la distancia promedio entre autos sucesivos en una autopista?

11. Si la variable aleatoria $X$ está distribuida uniformemente en el intervalo [0, 6], calcule:

   a. $P(X > 1.5)$;

   b. $E(X)$ y $V(X)$.

12. Sea la *fdp* definida como $f(x) = \begin{cases} k\ e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$, donde $k > 0$; demuestre que:

$$E(X) = \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{1}{k^2}$$

13. La función de densidad de probabilidad para la duración de bombillos fabricados por una compañía es $f(x) = 0{,}01e^{-0{,}01x}$, donde $x$ representa la duración en horas de un bombillo seleccionado de manera aleatoria.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de un bombillo seleccionado de modo aleatorio sea entre 50 y 60 horas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de un bombillo seleccionado aleatoriamente sea menor o igual a 60 horas?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de un bombillo seleccionado aleatoriamente sea mayor que 60 horas?

d. Halle el $E(X)$ y $V(X)$. Explique cada resultado.

14. La función de densidad de probabilidad para la duración de un electrodoméstico es $f(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x}$, donde $x$ representa la duración en meses de un electrodoméstico seleccionado al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de un electrodoméstico seleccionado de modo aleatorio sea entre 50 y 60 horas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de un electrodoméstico seleccionado de modo aleatorio sea menor a 8 meses?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de un electrodoméstico seleccionado de modo aleatorio sea mayor a 1 año?

15. La función de densidad de probabilidad para la duración de las llamadas telefónicas en cierta ciudad es $f(x) = 0{,}5e^{-0{,}5x}$, donde $x$ representa la duración en minutos de una llamada escogida al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de una llamada escogida al azar sea entre 2 y 3 minutos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de una llamada escogida al azar sea 2 minutos o menos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de una llamada escogida al azar sea más de 2 minutos?

16. La función de densidad de probabilidad para el intervalo de tiempo entre las llegadas de aviones sucesivos a un aeropuerto es $f(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x}$; $x$ representa el tiempo en minutos entre las llegadas de dos aviones sucesivos seleccionados aleatoriamente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que dos aviones sucesivos seleccionados al azar lleguen con una diferencia de 5 minutos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que dos aviones sucesivos seleccionados al azar lleguen con un intervalo de más de 10 minutos?

17. La función de densidad de probabilidad para el intervalo de tiempo entre las llegadas de aviones sucesivos en un aeropuerto es $f(x) = 0{,}3e^{-0{,}3x}$; $x$ representa el tiempo en minutos entre las llegadas de dos aviones sucesivos seleccionados aleatoriamente.

    a. ¿Cuál es la probabilidad de que dos aviones sucesivos seleccionados al azar lleguen con una diferencia de 3 minutos?

    b. ¿Cuál es la probabilidad de que dos aviones sucesivos seleccionados al azar lleguen con un intervalo de más de 5 minutos?

18. La función de densidad de probabilidad para la duración de las llamadas telefónicas en cierta ciudad es $f(x) = 0{,}4e^{-0{,}4x}$, donde $x$ representa la duración en minutos de una llamada escogida al azar.

    a. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de una llamada escogida al azar sea entre 1 y 2 minutos?

    b. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de una llamada escogida al azar sea 2 minutos o menos?

    c. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de una llamada escogida al azar sea más de 2 minutos?

19. La función de densidad de probabilidad para la vida de los componentes electrónicos fabricados por una compañía es $f(x) = 0{,}02e^{-0{,}02x}$; $x$ representa la vida en meses de un componente seleccionado de manera aleatoria.

    a. ¿Cuál es la probabilidad de que la vida de un componente seleccionado de modo aleatorio sea de entre 20 y 30 meses?

    b. ¿Cuál es la probabilidad de que la vida de un componente seleccionado de modo aleatorio sea menor o igual a 20 meses?

    c. ¿Cuál es la probabilidad de que la vida de un componente seleccionado de modo aleatorio sea mayor a 20 meses?

## 8.6 Resumen

En este capítulo se estudiaron las integrales impropias con límites de integración infinitos.

Si $f$ es continua en el intervalo $[a, \infty)$, entonces:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

Si el límite es un número real, se dice que la integral converge en ese número. Si el límite no existe, la integral diverge.

Si $f$ es continua en el intervalo $(-\infty, b]$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

Si el límite es un número real, se dice que la integral converge en ese número. Si el límite no es un número real, la integral diverge.

Si $f$ es continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

donde $c$ es cualquier número real. Dicho en otros términos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx$$

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge si ambos límites son números reales; si uno de los dos límites no es un número real, la integral diverge.

También se estudiaron las integrales impropias con una discontinuidad infinita.

Sea $f$ continua en $[a, b)$ y con una discontinuidad infinita cuando $x \to b^-$; entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\left(\int_a^c f(x)dx\right)$$

Si el límite es un número real, la integral converge; en caso contrario, la integral diverge.

Sea $f$ continua en $(a, b]$ y con una discontinuidad infinita cuando $x \to a^+$; entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \left( \int_c^b f(x)dx \right)$$

Si el límite es un número real, la integral converge; en caso contrario, la integral diverge.

Sea $f$ continua en $[a, c)$ y en $(c, b]$ con una discontinuidad infinita en $c$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c_1 \to c^-} \left( \int_a^{c_1} f(x)dx \right) + \lim_{c_2 \to c^+} \left( \int_{c_2}^b f(x)dx \right)$$

Si cada uno de los límites es un número real, la integral converge; en caso contrario, la integral diverge.

Como aplicación importante de las integrales impropias se estudió la función de densidad de probabilidad.

Si $X$ es una variable aleatoria continua, existe una función $f$ llamada función de densidad de probabilidad ($fdp$) de $X$ que satisface:

i. $f(x) \geq 0$ para todo $x$.

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$

iii. Si $a < b$, la probabilidad de que la variable $X$ tome valores entre $a$ y $b$ es:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Algunos valores que caracterizan una variable aleatoria $X$ son: su valor esperado $E(X)$, el cual indica, en promedio, a qué valor tiende la variable cuando el número de experimentos tiende a infinito; así como la varianza de $X$, $V(X)$, y la desviación estándar $\sqrt{(V(X))} = \sigma$, que miden de que manera se agrupan los datos alrededor del valor esperado.

## GLOSARIO

Valor futuro $P(t)$ de un capital $P_0$(valor presente): es el colocado a un interés continuo del $k$ % por período durante un tiempo de $t$ períodos. Está dado por:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Si conocemos $P(t)$, tenemos que $P_0 = P(t)e^{-kt}$.

Espacio muestral: es el conjunto $S$ de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Variable aleatoria: es una función $X$ que asigna a cada $t \in S$ un número real $X(t)$.

Función de distribución acumulativa: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$.

Valor esperado: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

Varianza: $V(X) = E\left(X - E(X)\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx$.

# Capítulo 9

# Funciones de varias variables

## 9.1 Introducción

En este capítulo se presentará una introducción al cálculo diferencial de varias variables, de una manera muy sencilla y sin recurrir a demasiados formulismos. Se tratarán los conceptos más relevantes acerca de funciones de valor real de varias variables, como son: dominio, límites, continuidad, derivadas parciales y algunas aplicaciones de máximos y mínimos.

### Objetivos

1. Plantear modelos matemáticos en varias variables.
2. Manejar con destreza las derivadas parciales.
3. Plantear y resolver problemas de máximos y mínimos con y sin restricciones.

## 9.2 Funciones de varias variables

Hasta este momento se han considerado funciones de variable real expresadas como $y = f(x)$, lo cual significa que $y$ (variable dependiente) está en función de $x$ (variable independiente). Sin embargo, para la construcción de modelos matemáticos que expliquen situaciones prácticas, la variable dependiente y puede estar en función de dos o más variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$; es decir, tenemos una función expresada como:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

A estas funciones se las denomina funciones de varias variables *(con valor real)*.

Ejemplo 1. Para calcular la demanda $q$ de un producto $A$, en principio se considera que depende de sólo de su precio unitario $p$, es decir $q = f(p)$. En la práctica se puede dar que el producto $A$ tenga productos sustitutos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, cuyos precios unitarios $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ afecten el valor de $q$ (demanda del producto $A$). Esto significa que $q$ depende o está en función de $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$; por lo tanto tenemos una función de varias variables $q = f(p, p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

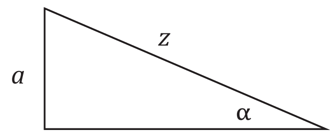
Ejemplo 2. Si hacemos $z$ igual a la demanda en libras de carne de res, $z$ depende del precio de la libra de carne de res; si el pollo es un producto sustituto y hay una baja sensible en el precio de la libra de pollo, la demanda de carne se verá afectada. Esto significa que $z$ depende de $x$, precio de la libra de carne, y de $y$, precio de la libra de pollo; por lo tanto $z = f(x, y)$.

Ejemplo 3. El ingreso $I$ de un pedido depende del número de unidades $x$ y del precio unitario $p$, por lo tanto $I = f(x, p) = x \cdot p$.

Ejemplo 4. El valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo depende del valor de sus catetos. Si $z$ es la hipotenusa y $x, y$ son los catetos, tenemos que:

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$

Ejemplo 5. El valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo depende de uno de sus ángulos y su cateto opuesto. Si $z$ es la hipotenusa, ésta está dada por:




$$z = f(a, \alpha) = a\,\text{sen}\,\alpha$$

Ejemplo 6. Una estación de servicio vende tres clases de gasolina: corriente, verde (con baja concentración de plomo) y extra, a \$2.700, \$3.000 y \$4.750 por galón, respectivamente. Exprese los ingresos totales de la estación por concepto de la venta de gasolina como una función del número de galones vendidos de gasolina de cada clase.

Solución. Sean $x_1$, $x_2$ y $x_3$ las variables que denotan el número de galones vendidos de gasolina regular, verde y extra, respectivamente. Entonces:

$$\textbf{Ingresos totales} = 2.700x_1+3.000x_2+4.750x_3 \text{ pesos}$$

Si definimos $f$ como la función que calcula los ingresos totales, tenemos:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2.700x_1+3.000x_2+4.750x_3$$

En este caso, $f$ es una función de tres variables independientes $x_1$, $x_2$ y $x_3$. Observe que su dominio es el conjunto de las ternas ordenadas $(x_1, x_2, x_3)$ de números reales no negativos.

Ejemplo 7. La representación de una función de varias variables se puede hacer mediante una tabla de doble entrada, por ejemplo:

| $x/y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 |

de tal forma que $f(1, 2) = 2$, $f(3, 4) = 12$ (valor correspondiente a la intersección de la fila donde está el valor $x = 3$, con la columna donde se encuentra $y = 4$. Nótese que una función de la forma $f(x, y)$ define de manera natural funciones reales de una variable (marginales), al dejar fija una de las variables:

$$h_1(y) = f(1, y), h_2(y) = f(2, y), h_3(y) = f(3, y), h_4(y) = f(4, y),$$
$$g_1(x) = f(x, 1), g_2(x) = f(x, 2), g_3(x) = f(x, 3), g_4(x) = f(x, 4).$$

Por ejemplo, para $h_2$ y $g_3$ se tendrían respectivamente:

| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $h_2(y)$ | $f(2, 1) = 2$ | $f(2, 2) = 4$ | $f(2, 3) = 6$ | $f(2, 4) = 8$ |

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $g_3(x)$ | $f(1, 3) = 3$ | $f(2, 3) = 6$ | $f(3, 3) = 9$ | $f(4, 3) = 12$ |

## 9.2.1 Funciones de dos variables de valor real

$f$ define una función de dos variables reales $x, y$ si existe uno y solamente un valor real $z = f(x, y)$ para cada pareja ordenada de números reales $(x, y)$ en el dominio de $f$.

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto z = f(x, y)$$

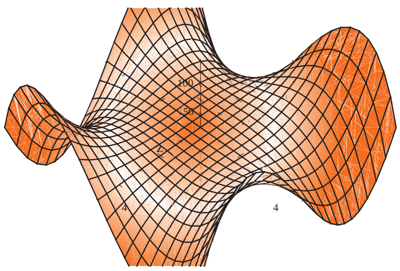
$f$ es una función real de dos variables reales.

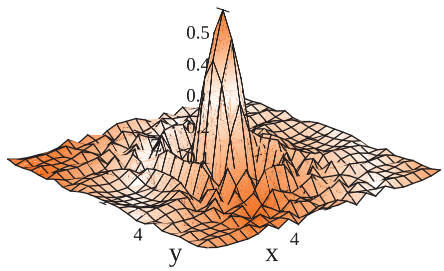
### 9.2.1.1 Gráfica de una función de dos variables

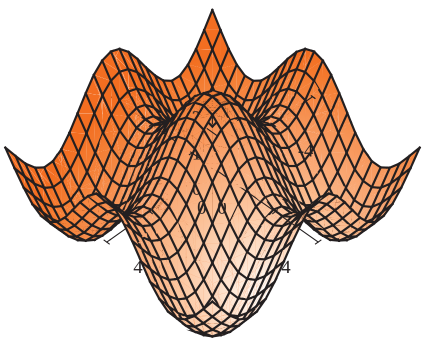
Si $f$ es una función definida como $z = f(x, y)$, la gráfica de $f$ es el conjunto de ternas ordenadas de números reales $(x, y, z)$ tales que $z = f(x, y)$.

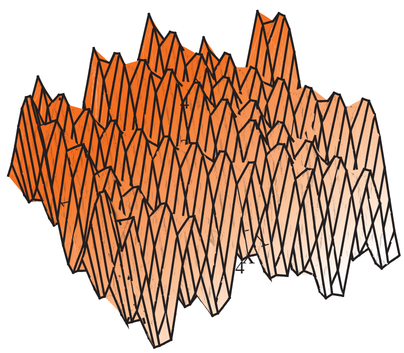
Geométricamente, a esta representación gráfica se la denomina superficie en el espacio tridimensional.

En funciones de variable real definidas como $y = f(x)$, cuando se tabulaban algunos valores $(x, f(x))$ se obtenía un bosquejo de la gráfica de $f$; en funciones de dos variables este procedimiento es infructuoso, pero gracias al avance de la tecnología se pueden obtener buenas gráficas a través del computador, como las siguientes:





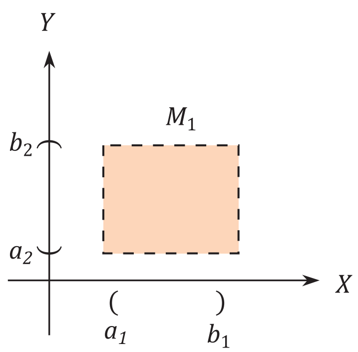
Para casos en los que el número de variables independientes es mayor de dos ya no es posible visualizar la gráfica.

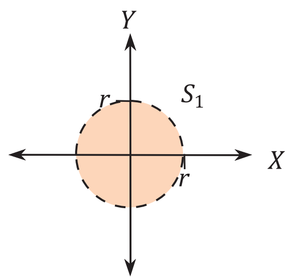
En adelante haremos el cálculo para estas funciones, teniendo en cuenta lo siguiente:

- En algunos casos podemos copiar procedimientos desarrollados en el cálculo de una variable.
- Los procedimientos que se desarrollen con dos variables independientes se pueden extender a funciones reales de tres o más variables independientes.
- Se pueden definir mediante una fórmula, como por ejemplo $z = f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy$.

### 9.2.1.2 Regiones abiertas

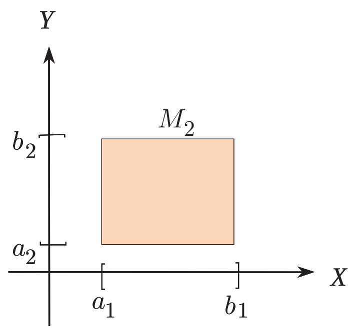
En $\mathbb{R}$ se estudian funciones definidas en intervalos abiertos que además son conjuntos conexos; análogamente en $\mathbb{R}^2$ las funciones generalmente las definimos en conjuntos tales como $M_1 = (a_1, b_1)\times(a_2, b_2)$, $S_1 = \{(x, y) \mid x^2+y^2<r^2\}$.

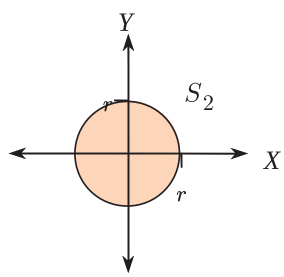



Estas regiones se denominan abiertas, además de ser ***simplemente conexas*** (sin "rupturas" y sin "huecos"). En adelante las denominaremos regiones abiertas.

En $\mathbb{R}^2$, el equivalente de un intervalo cerrado $[a, b]$ se denomina región cerrada. Intuitivamente, se puede considerar como una región abierta que incluye lo que se entiende como borde o frontera; por ejemplo, $M_2 = [a_1, b_1]\times[a_2, b_2]$ y $S_2 = \{(x, y) \mid x^2+y^2\leq r^2\}$.



### 9.2.1.3 Dominio de una función de dos variables

Como la imagen de una función de dos variables es un número real, al definir estas funciones lo que hacemos es combinar estas variables mediante operaciones de números reales y funciones de variable real. Las restricciones que pueda haber en el dominio son, en esencia, las mismas que se tienen cuando las funciones son de variable real.

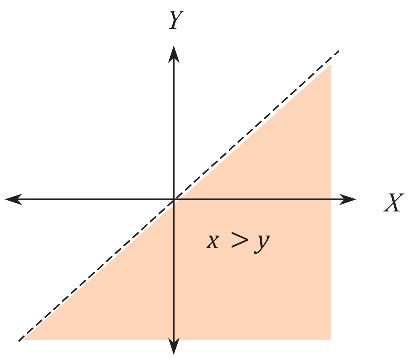
Ejemplo 8. Hallar el dominio de la función $f$ definida como:

$$z = f(x,y) = \frac{xe^{2y}+\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x-y}}$$

Solución. Al igual que en funciones de variable real, el logaritmo natural está definido en números reales positivos; la raíz cuadrada está definida en mayores o iguales que cero, y el denominador para números reales diferentes de cero. Por lo tanto, se tienen las siguientes restricciones: $x^2+y^2>0$ y $x-y>0$. $x^2+y^2>0$ se cumple para todo $(x, y)\neq(0, 0)$, y $x-y>0$ se cumple para toda pareja $(x, y)$ tal que $x>y$.

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$$

Geométricamente, corresponde a la región abierta:




Ejemplo 9. Si $f(x_1, x_2) = x_1\, e^{x^2}+3x_1^{\,2}$, determine el dominio de $f$ y calcule $f(-2, 0)$.

Solución. Observe que esta función es la combinación de funciones de variable real (definidas como $x_1$, $e^{x^2}$, $3x_1^{\,2}$), mediante operaciones definidas en los números reales. Como el dominio de cada una de estas funciones está integrado por los números reales, el dominio de $f$ es $\mathbb{R}^2$, es decir, todas las parejas ordenadas $(x_1, x_2)$ de números reales.

Para calcular $f(-2, 0)$, se sustituye $x_1 = -2$ y $x_2 = 0$ en la expresión que define a $f$, es decir:

$$f(-2, 0) = -2e^0+3(-2)^2 = 10$$

Ejemplo 10. Sea $f(r,s,t) = \frac{3r^2+5s}{r-t}$; determine:

a. el dominio de $f$; b. $f(2, 3, -1)$.

Solución.

a. La función $f$ está definida siempre que su denominador $r-t \neq 0$.

$$\text{Dom}(f) = \{(r, s, t) \in \mathbb{R}^3 \mid r \neq t\}$$

Por ejemplo, (1, 3, 1) no está en el dominio de $f$.

b. $f(2,\ 3,\ -1) = \frac{3(2)^2+5(3)}{2-(-1)} = 9$

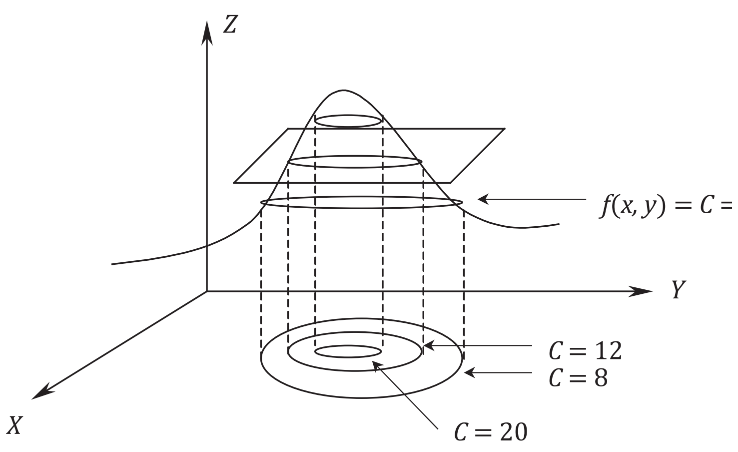
Ejemplo 11. Sea $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y}}{x^2+(y-1)^2}$. Esta función está definida siempre que $y \leq x^2$ y $x^2+(y-1)^2 \neq 0$; esto último ocurre cuando $x \neq 0$ y $y \neq 1$. Por lo tanto, el dominio de $f$ está dado por:

$$\text{Dom}(f) = \{(x,\ y) \mid y \leq x^2 \text{ y } (x,\ y) \neq (0,\ 1)\}$$

### 9.2.1.4 Curvas de nivel

Como se había mencionado antes, en general no es fácil trazar la gráfica de una función de dos variables; existe una forma de visualizarla que consiste en intersectar la superficie con planos paralelos al plano $XY$, cuyas intersecciones son curvas paralelas al plano $XY$ que se caracterizan porque su valor $f(x,y)$ es constante. Al proyectar estas curvas sobre el plano $XY$, se indica el valor de la constante y obtenemos un conjunto de curvas que se denominan curvas de nivel.

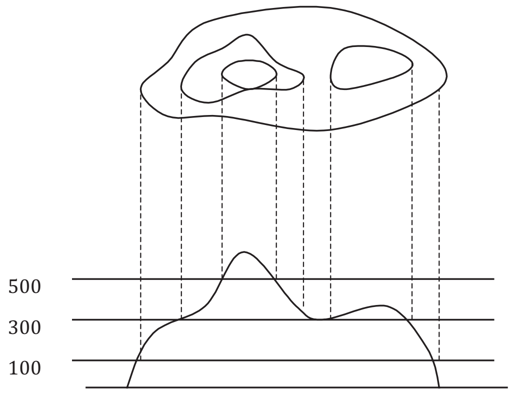
Ejemplo 12. Obsérvese que cuando el plano $z = C$ intersecta la superficie $z = f(x,y)$, se obtiene una curva.



En la gráfica se han intersectado tres planos con la superficie, obteniendo tres curvas que al proyectarlas en el plano $XY$ nos generan tres curvas de nivel, con $C = 8$, $C = 12$ y $C = 20$, que representan la altura en la cual se encuentra la curva.

Cuando se tiene un conjunto de $n$ curvas de nivel de una superficie, tenemos $n$ trayectorias de la superficie que nos permiten hacernos una idea de su gráfica.

Ejemplo 13.

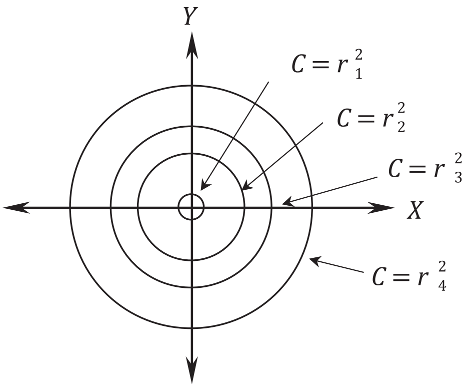


Mapa de relieve de una montaña

Suponga que $z = f(x, y)$ representa la superficie de una montaña cuya elevación en el punto $(x, y)$ está dada por $f(x, y)$, como se muestra en la figura. La curva de nivel $f(x, y) = C$ corresponde a la trayectoria en la montaña donde la elevación es siempre $C$. Para representar de manera gráfica la montaña, las trayectorias de elevación constante pueden indicarse trazando la familia de curvas de nivel en el plano. Esta figura plana se denomina mapa topográfico de la superficie $z = f(x, y)$.

Ejemplo 14. Determine las curvas de nivel de la función definida como $f(x, y) = x^2+y^2$.

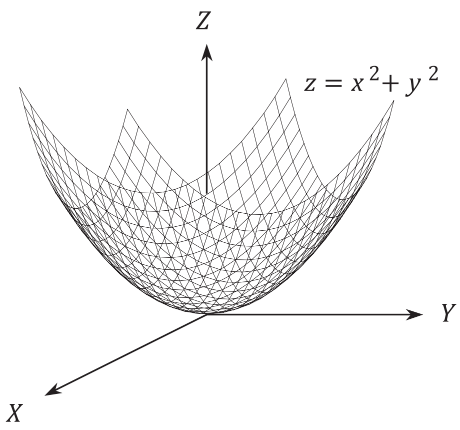
Solución. Las curvas de nivel tienen por ecuación $x^2+ y^2 = C$. Si $C = 0$, el punto es $(0, 0)$; si $C>0$, las curvas de nivel son circunferencias de radio $\sqrt{C}$. Para $C<0$ la curva no existe, porque $x^2+y^2\geq 0$ para toda pareja $(x, y)$ de números reales.



Análogamente a las curvas de nivel, se hace $x = C_1$ ó $y = C_2$. Podemos obtener curvas transversales proyectadas en los planos $XZ$ y $YZ$.

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la superficie $z = x^2+y^2$. Las secciones transversales perpendiculares al eje $X$ ($x = C$) y al eje $Y$ ($y = C$) originan las curvas $z = C_1^2+y^2$ y $z = x^2+C_2^2$, que son parábolas.

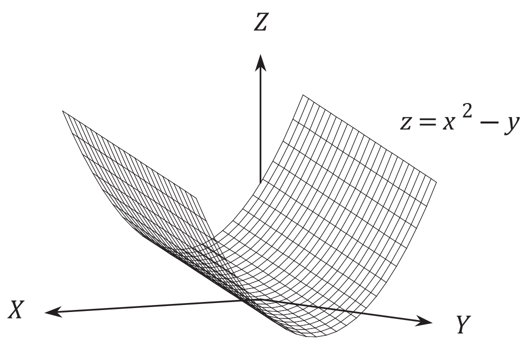
A esta superficie se la denomina paraboloide circular o tazón.

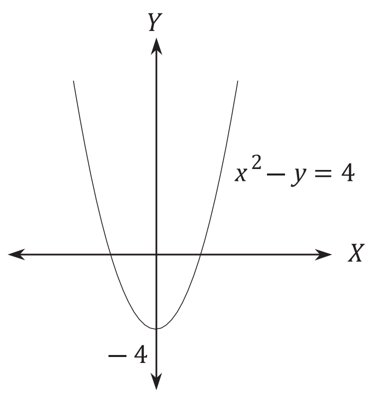



Ejemplo 15. Dada $f(x, y) = x^2 - y$, trace la curva de nivel $f(x, y) = 4$.

Solución. $f(x, y) = 4$ significa que $x^2 - y = 4$; es decir, $y = x^2 - 4$.

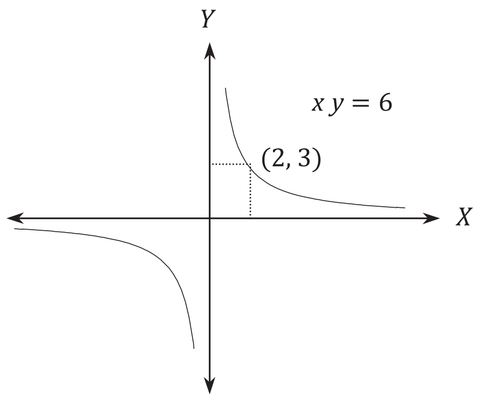
La gráfica de este polinomio en el plano $XY$ es la curva de nivel que estamos buscando. Está constituida por todos los puntos $(x, y)$ para los cuales $f(x, y) = 4$.



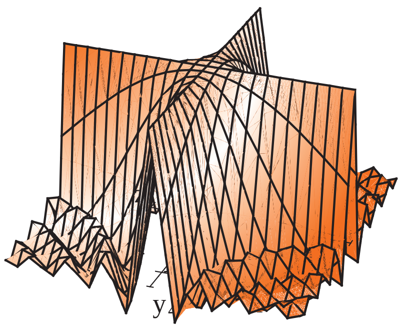



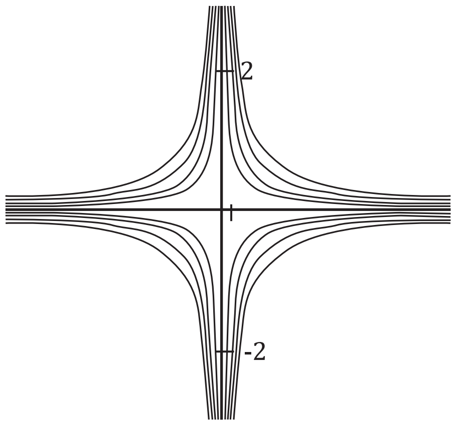
Ejemplo 16. Hallar la curva de nivel de la función $f$, definida como $f(x, y) = xy$ que pasa por el punto (2, 3).

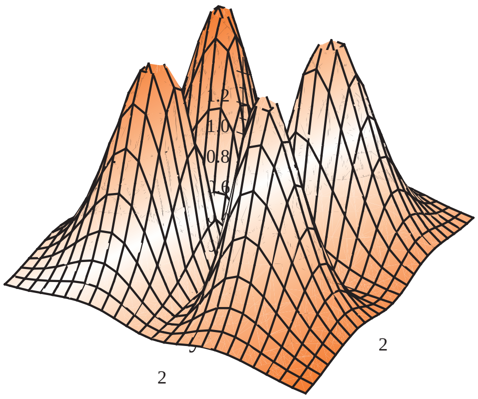
Solución. Las ecuaciones de la curvas de nivel de $f$ son de la forma $xy = C$ ó $y = \frac{C}{x}$, donde $C$ es una constante. Para hallar la ecuación de la curva de nivel particular que pasa por (2, 3), tenemos que encontrar el valor correspondiente de $C$. Sustituyendo $x = 2$ y $y = 3$ en la ecuación de la curva de nivel se encuentra que $C = 6$. Por lo tanto, la curva de nivel deseada es la gráfica de la función $y = \frac{6}{x}$, como se ve en la figura siguiente:

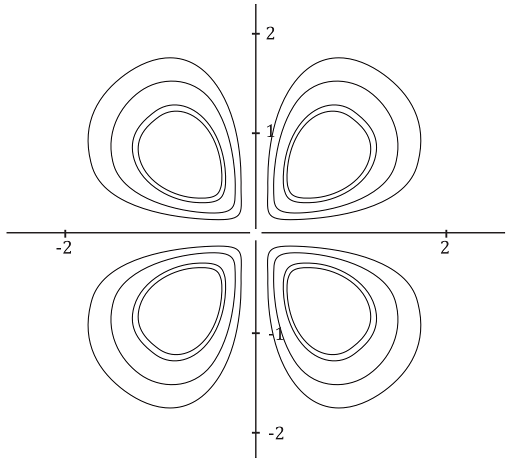


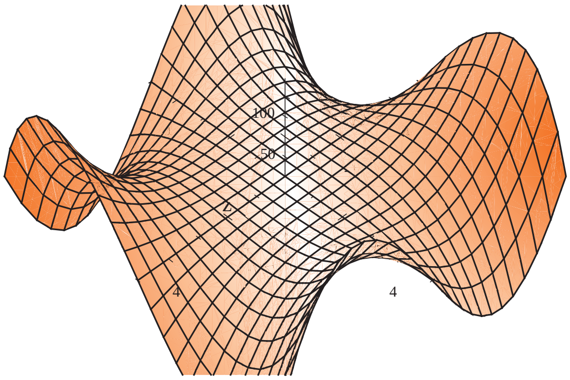

Ejemplo 17. Presentamos algunas gráficas con sus curvas de nivel:

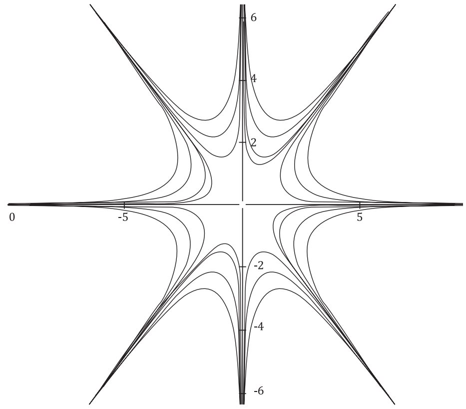




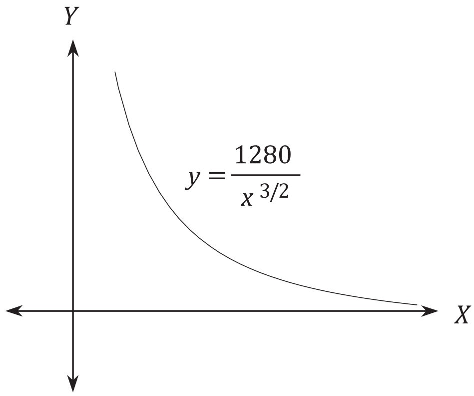

### 9.2.1.5 Curvas de nivel en economía. Isocuantas y curvas de Indiferencia

Las curvas de nivel surgen de diversas aplicaciones. Por ejemplo, en economía, si la producción $Q(x, y)$ de un proceso de producción está determinada por dos insumos $x$ y $y$ (por ejemplo, horas de mano de obra e inversión de capital), entonces la curva de nivel $Q(x, y) = C$ se denomina curva del producto constante $C$, o de modo más simple, isocuanta, y significa que es posible obtener la cantidad del producto $C$ combinando los insumos $x, y$ de diferentes maneras.

Otra aplicación de las curvas de nivel en economía incluye el concepto de curvas de indiferencia. Si un consumidor está considerando la compra de una cantidad de unidades de cada uno de dos artículos, la puede asociar con una función de utilidad definida como $U(x, y)$, que mide la satisfacción total o utilidad que obtendría con $x$ unidades del primer artículo y $y$ unidades del segundo. Una curva de nivel $U(x, y) = C$ de la función de utilidad se denomina curva de indiferencia, y proporciona todas las combinaciones de $x$ y $y$ que conducen al mismo nivel de satisfacción del consumidor.

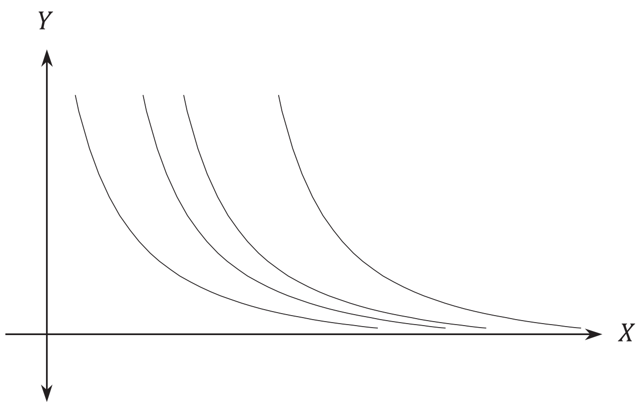
Ejemplo 18. Suponga que la utilidad obtenida por un consumidor, de $x$ unidades de un artículo y de $y$ unidades de un segundo artículo está dada por la función de utilidad definida como $U(x, y) = x^{3/2} y$. Si el consumidor posee actualmente $x = 16$ unidades del primer artículo y $y = 20$ unidades del segundo, halle el nivel actual de utilidad del consumidor y trace la curva de indiferencia correspondiente.

Solución. El nivel actual de utilidad es $U(16, 20) = (16)^{3/2}(20) = 1.280$ y la curva de indiferencia correspondiente es $x^{3/2} y = 1.280$ ó también $y = 1.280\, x^{-3/2}$.




Esta curva contiene todos los puntos $(x, y)$ donde el nivel de utilidad $U(x, y)$ es 1.280. En las figuras se muestran la curva $x^{3/2} y = 1.280$ y otras curvas de la familia $x^{3/2} y = C$.

Otra combinación posible es $x = 4$ y $y = 160$.




Curvas de indiferencia para la función de utilidad $U(x, y) = x^{3/2}$ y para diferentes valores de $C$ .

## EJERCICIO 9.1

1. Determine el dominio de cada una de las funciones definidas como:

   a. $f(x, y) = x^2+2xy+y^2$;
   b. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$;
   c. $f(x, t) = \ln(x - t)$;
   d. $f(x, y, z) = x + \sqrt{yz}$.

2. Para cada una de las siguientes funciones, especifique el dominio y calcule los valores indicados.

   a. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 - 1)^2 + 3x_1x_3, f(1, 0, -2), f(0, 8, 4)$;

   b. $g(x, y) = \frac{x+y}{x-y}, g(2, -2), g(-1, 1), g(-1, 3)$;

   c. $h(r, s) = \sqrt{s^2 - r^2}\,, h(0,1), h(-1, 3)$;

   d. $f(x, y, z) = x + y^2 + \sqrt{1 - z}\,, f(1, 2, 0), f(-1, 3, -3)$;

   e. $g(x_1, x_2) = \frac{x_1 - 1}{\sqrt{(x_2)^2 + 4}}, g(1,5), g(2,0)$;

   f. $h(r, s, t) = te^{r+s} + \log(t+2), h(\text{In } 2, 0, -1), h(1, 1, 1)$.

3. Sea un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ y $x$ su cateto adyacente. Encuentre el área del triángulo como función de θ y $x$, y el dominio de esta función. ¿Cuáles son las variables independientes y cuál la dependiente?

4. Considere un paralelepípedo de base cuadrada de lado $y$ y con diagonal $x$. Exprese el volumen del paralelepípedo como función de $x$ y $y$.

5. Dada una cantidad inicial de dinero sometida periódicamente a una tasa de interés del 6 % anual, determine el valor futuro que se obtendrá al cabo de $n$ años. Indique cuáles son las variables independientes y cuál la dependiente.

6. La producción diaria de una nueva máquina es directamente proporcional a la raíz cuadrada del número de horas de trabajo de la máquina y al cuadrado de un insumo dado, e inversamente proporcional a la raíz quinta de la vida útil de la máquina. Defina las variables independientes y exprese la producción en términos de éstas.

## 9.3 Límites

En $\mathbb{R}$ cuando decimos que $x \to a$, significa que $x \to a^-$ y $x \to a^+$; es decir, solamente existen dos caminos para acercarse a $a$. En $\mathbb{R}^2$, si $A$ es una región abierta y $(a, b)$ es un punto de $A$, $(x, y)$ tiende a $(a, b)$, lo cual se nota: $(x, y) \to (a, b)$. Esto significa que $x \to a$ y $y \to b$ por cualquier camino, y que para ello hay infinitas formas de hacerlo. De modo que calcular un límite de esta forma no tiene sentido. Intuitivamente, el límite de $f(x, y)$ es $L$ cuando $(x, y)$ tiende a $(a, b)$ en el caso de que $f(x, y)$ se pueda hacer tan cercano a $L$ al hacer $(x, y)$ suficientemente cercano de $(a, b)$. Esto se escribe:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

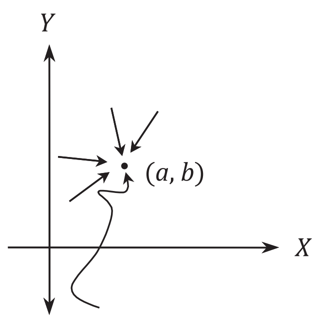
Para expresar el hecho de que $(x, y)$ esté cerca de $(a, b)$ hay que recurrir a una distancia. En este caso, consideraremos la distancia pitagórica, dada por:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Formalmente, decimos que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

si y sólo si para todo $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que si $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$, entonces $|(f(x, y) - L)| < \varepsilon$.




Si el límite existe, entonces al seguir cualquier trayectoria que “se acerque” al punto dará el mismo resultado. Esto sugiere que para mostrar que un límite de una función no existe en un punto, basta con encontrar dos trayectorias que “se acerque” al punto y ver que sus límites son distintos.

Ejemplo 19. Muestre que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} \text{ no existe.}$$

Solución. Para empezar:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

Para la trayectoria dada por el conjunto $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$, es decir el eje $X$, se tiene que:

$$f(x, 0) = \frac{x^2 - 2(0)}{x^2 + 0} = 1$$

lo que significa que:

$$\lim_{(x,0) \to (0,0)} f(x, y) = 1$$

Ahora para la trayectoria $\{(0, y) | \, y \in \mathbb{R}\}$:

$$f(0, y) = \frac{0 - 2y^2}{0 + y^2} = -2$$

lo que significa que:

$$\lim_{(0,y) \to (0,0)} f(x, y) = -2$$

Como los resultados son diferentes para estas dos trayectorias que pasan por el origen, el límite no existe.

Ejemplo especial 20. Muestre que para:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

Solución.

Debemos considerar que dado $\varepsilon > 0$, hay que encontrar $\delta > 0$, tal que si $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ entonces $\left| \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$. Empecemos por las siguientes desigualdades para acotar, a la larga, la función:

$$x^2 \leq x^2 + y^2,$$
$$y \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

con lo cual:

$$\left| \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{3x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Así que si queremos que $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$, basta con exigir $3\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$ ó $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon/3$. Esto último sugiere que deberíamos tomar δ = ε/3. Lo que queda ya es sencillo de resolver: dado ε>0, tómese δ = ε/3, y si $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon/3$ entonces:

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{3(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 3\sqrt{x^2+y^2} < 3(\varepsilon/3) = \varepsilon$$

que era lo que se quería demostrar.

## 9.4 Continuidad

Se dice que una función definida como $z = f(x, y)$ es **continua** en el punto $(a, b)$ si:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Ejemplo especial 21. La función dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en (0, 0), pues como se vio en el ejemplo 20,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

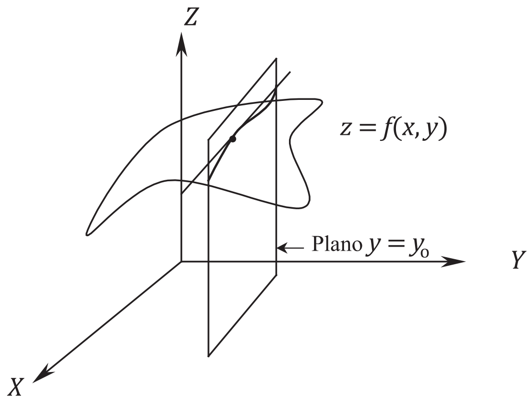
Una función $f$ es continua en una región abierta $A$ del plano $xy$, si es continua en cada uno de los puntos de la región $A$.

El cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función requieren de un desarrollo teórico riguroso que no consideraremos en este texto.

## 9.5 Derivadas parciales

Si $f$ es una función definida como $z = f(x, y)$, continua en una región abierta, y queremos medir la variación de $z$, podemos considerar:

**i. ¿Cómo varía *z* con respecto a *x* para algún valor constante de *y*?**




Si $y$ se considera constante ($z$ está en función sólo de $x$) y:

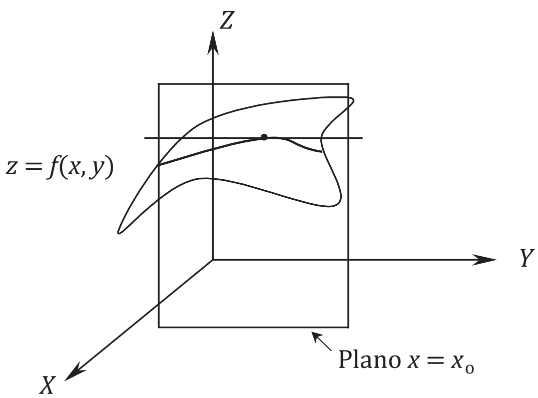
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \text{ existe,}$$

se lo denomina derivada parcial de $z$ con respecto a $x$, y se puede simbolizar de cualquiera de las siguientes formas:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), f_x(x, y), f_x, z_x.$$

Observe que $f_x(x, y)$ define una función de dos variables.

**ii. ¿Cómo varía *z* con respecto a *y* para algún valor constante de *x*?**



Si $x$ se considera constante ($z$ está en función sólo de $y$) y:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \text{ existe,}$$

se denomina derivada parcial de $z$ con respecto a $y$, y se puede simbolizar de cualquiera de las siguientes formas:

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} f(x, y), f_y(x, y), f_y, z_y.$$

Observe que $f_y\,(x, y)$ define una función de dos variables.

Para hallar la derivada parcial de una función con respecto a una de las variables independientes, se considera la otra variable independiente como una constante y se deriva como una función de variable real.

Ejemplo 22. Si $z = 5x^2 y^3$, calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto (2, 1). Explicar cada resultado.

Solución. Para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ se considera $y$ como una constante, por lo tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5y^3 \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = (5y^3)(2x) = 10xy^3$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y) = 10xy^3$; calculada en el punto (2, 1), tenemos:

$$f_x(2, 1) = 10(2)(1^3) = 20$$

Esto significa que en el punto de la gráfica $(2, 1, f(2, 1)) = (2, 1, 20)$, la variación instantánea de $z$ es de 20 cuando $x$ tiene variación positiva y $y$ es constante ($y = 1$).

Para calcular $\frac{\partial z}{\partial y}$ se considera $x$ como una constante; por lo tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y^3) = (5x^2)(3y^2) = 15x^2y^2$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y) = 15x^2y^2$; calculada en el punto (2, 1), tenemos:

$$f_y(2, 1) = 15(2^2)(1^2) = 60$$

Significa que en el punto de la gráfica $(2, 1, f(2, 1)) = (2, 1, 60)$, la variación instantánea de $z$ es de 60 cuando $y$ tiene variación positiva y $x$ es constante ($x = 2$).

Ejemplo 23. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $z = 6x^3 - 7x^2y^2 + 4y^5$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(6x^3) - (7y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(4y^5)\\ &= 18x^2 - (7y^2)(2x) + 0 = 18x^2 - 14xy^2\end{aligned}$$

Para calcular $\frac{\partial z}{\partial y}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(6x^3) - (7x^2)\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(4y^5)\\ &= 0 - (7x^2)(2y) + 20y^4\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -14x^2y + 20y^4$$

Ejemplo 24. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $z = (x^3 + 4y^2)^4$.

Solución. Al aplicar la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 4(x^3 + 4y^2)^3\cdot\frac{\partial(x^3+4y^2)}{\partial x}\\ &= 4(x^3 + 4y^2)^3\cdot(3x^2) = 12x^2(x^3 + 4y^2)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= 4(x^3 + 4y^2)^3\cdot\frac{\partial(x^3 + 4y^2)}{\partial y}\\ &= 4(x^3 + 4y^2)^3\cdot(8y) = 32y(x^3 + 4y^2)^3\end{aligned}$$

Ejemplo 25. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $z = ye^{\frac{x}{y}}$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= y\,\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{x}{y}}\right)\\ &= y\,\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x\cdot\frac{1}{y}}\right)\\ &= y\,e^{\frac{x}{y}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)\\ &= \left(ye^{\frac{x}{y}}\right)\left(\frac{1}{y}\right)\\ &= e^{\frac{x}{y}}\end{aligned}$$

Para calcular $\frac{\partial z}{\partial y}$, aplicamos la regla para la derivada de un producto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\frac{x}{y}}\right) + e^{\frac{x}{y}}\,\frac{\partial}{\partial y}(y)\\
&= y\,e^{\frac{x}{y}}\,\frac{\partial}{\partial y}(x\,y^{-1}) + e^{\frac{x}{y}}(1)\\
&= ye^{\frac{x}{y}}(-xy^{-2}) + e^{\frac{x}{y}}\\
&= ye^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) + e^{\frac{x}{y}}\\
&= e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)
\end{aligned}$$

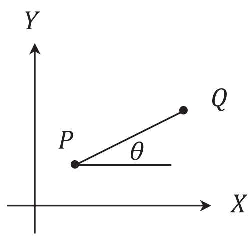
Ejemplo 26. Si $z = e^{au+bv^2+cw^2}$, hallar $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial w}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= e^{au+bv^2+cw^2}\;\frac{\partial(au+bv^2+cw^2)}{\partial u} = a\;e^{au+bv^2+cw^2}\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= e^{qu+bv^2+cw^2}\;\frac{\partial(au+bv^2+cw^2)}{\partial v} = 2bv\;e^{au+bv^2+cw^2}\\
\frac{\partial z}{\partial w} &= e^{au+bv^2+cw^2}\;\frac{\partial(au+bv^2+cw^2)}{\partial w} = 2cw\;e^{au+bv^2+cw^2}
\end{aligned}$$

**iii. ¿Cómo varía $z$ con respecto a $x$ y $y$ simultáneamente?**

Si $x$ y $y$ varían simultáneamente, significa que las variables pueden cambiar en cualquier dirección. Si $P = (x, y)$ es un punto en el plano $XY$, se determina una dirección indicando el ángulo θ que forma el segmento $PQ$ con la parte positiva del eje $X$. Si $PQ$ tiene una longitud igual a uno:




Si $f$ es una función definida como $z = f(x, y)$, y:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h\cdot\cos\theta, y+h\cdot\operatorname{sen}\theta)-f(x,y)}{h}\ \text{existe,}$$

se lo denomina derivada direccional de $z$ en la dirección de θ, y se simboliza $D_\theta f(x, y)$.

**Teorema 1.** Si $z = f(x, y)$ y sus derivadas parciales son continuas, entonces:

$$D_\theta f(x,y) = f_x(x,y) \cdot \cos\theta + f_y(x,y) \cdot \operatorname{sen}\theta.$$

Observe que las derivadas parciales son casos particulares de las derivadas direccionales; para $f_x$, $\theta = 0$ y para $f_y$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 27. Dada $f(x,y) = 2x^2+y^2-4y+1$:

a. Hallar $D_\theta f(x,y)$ en la dirección $\theta = \frac{\pi}{3}(60^\circ)$.

b. Calcular $D_\theta f$ en el punto $(1, 2)$.

Solución.

$$f_x(x,y) = 4x \quad \text{y} \quad f_y(x,y) = 2y-4$$

a. $$D_\theta f(x,y) = f_x(x,y)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + f_y(x,y)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 4x\left(\frac{1}{2}\right) + (2y-4)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2x + \sqrt{3}\,y - 2\sqrt{3}$$

b. Reemplazamos en a. $x = 1$ y $y = 2$: $D_\theta f(1, 2) = 2+2\sqrt{3}-2\sqrt{3} = 2$.

## 9.5.1 La diferencial total

Sea $f$ definida como $y = f(x)$. Recordemos que $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$, y que cuando $\Delta x \to 0$, entonces $\Delta y$ se aproximaba mediante la diferencial de $x$ a través de la expresión $dy = f'(x)\,dx$. De manera análoga, si $f$ es una función definida como $z = f(x, y)$, tal que las derivadas parciales existen, y $x, y$ se incrementan en $\Delta x$ y $\Delta y$, respectivamente, el incremento correspondiente de $z$ está dado por:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$$

Cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, $\Delta z$ se puede aproximar mediante las diferenciales de $x$ y $y$ a través de la expresión:

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy$$

A $dz$ se la denomina *diferencial total*.

Ejemplo 28. Dada $z = x^3 + 7xy + 5y^4$, encontrar la diferencial total $dz$.

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = 3x^2 + 7y \ \text{ y } \ \frac{\partial z}{\partial y} = f_y = 7x + 20y^3$$

$$dz = (3x^2 + 7y)\,dx + (7x + 20y^3)\,dy$$

Ejemplo 29. Hallar $dz$ si $z = 2x^3 — 4xy^2 + 3y^3$.

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 4y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 9y^2 - 8xy$$

$$dz = (6x^2 - 4y^2)\,dx + (9y^2 - 8xy)\,dy$$

Ejemplo 30. El volumen de un cilindro circular recto define la función $z = f(x, y) = \pi x^2 y$, donde $x$ es el radio y $y$ la altura del cilindro.

a. Hallar el volumen de un cilindro de 20 cm de radio y 50 cm de altura.

b. Si se incrementan el radio y la altura en un centímetro, hallar $\Delta z$, $dz$ y comparar estos resultados.

Solución.

a. Si $x = 20$ y $y = 50$, el volumen está dado por $f(20, 50) = 20.000\pi$ cm$^3$.

b. Si $x = 20$, $y = 50$, $\Delta x = dx = 1$ y $\Delta y = dy = 1$, tenemos:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) — f(x, y) = f(21, 51) — f(20, 50)$$

$$\Delta z = 22.491\pi — 20.000\pi = 2.491\pi$$

Si $z = \pi x^2 y$, entonces:

$$dz = 2\pi xy dx + \pi x^2 dy$$

reemplazamos y tenemos:

$$dz = f_x(20, 50)\,dx + f_y(20, 50)\,dy$$

$$dz = 2.000\pi + 400\pi = 2.400\pi$$

$dz$ es una buena aproximación a $\Delta z$; la diferencia entre estos dos valores, $2.491\pi — 2.400\pi = 91\pi$, da un pequeño error del 0,4 % con respecto al volumen inicial.

## EJERCICIO 9.2

1. Halle $f_x$, $f_y$ y la diferencial total en el punto (1, 2) y explique el resultado para cada una de las siguientes funciones definidas como:

   a. $f(x,y) = x^3 + x^2 y - y^3$;
   b. $f(x,y) = 2x^3 - 4xy^2 + 3y^3$;
   c. $f(x,y) = 7x^2 + 4xy + 12y^2$;
   d. $f(x,y) = 8(2x - 5y)^3$.

2. Halle $f_x$, $f_y$, $f_z$ y la diferencial total en el punto (1, 2, 3) para cada una de las siguientes funciones definidas como:

   a. $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$;
   b. $f(x,y,z) = e^{xyz}$;
   c. $f(x,y,z) = xy^2 z^3$;
   d. $f(x,y,z) = 5x^6 y^3 z^4$.

3. Bosqueje las curvas de nivel para cada una de las funciones definidas como:

   a. $z = 2x + 3y$; $z = 0, 1, 2, 3$;
   b. $z = 3x - y$; $z = 0, 1, -2, 3$;
   c. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$; $z = 0, 1, 2, 3$;
   d. $z = x^2 + y^2$; $z = 1, 2, 3, 4$.

4. Dada $f(x,y) = x^2 - y^2 + 4x + 2y + 1$:

   a. Halle $D_\theta f(x,y)$ en la dirección $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{6}$.
   b. Calcule $D_\theta f$ en el punto $(2, -\sqrt{7})$.

## 9.5.2 Aplicaciones de las derivadas parciales

**En curvas de nivel**

Si $z = f(x,y)$, las curvas de nivel corresponden a funciones implícitas de dos variables $x$ y $y$, que algunas veces se pueden expresar explícitamente en función de una de las variables $x$ ó $y$. Así, en el ejemplo 12, la curva de nivel para $z = 4$ define la función $f(x,y) = 4$, que se puede expresar como $y = x^2 - 4$; en el ejemplo 13, la curva de nivel para $z = 6$ define la función $f(x,y) = 6$, que se puede expresar como $y = \frac{6}{x}$. Si estas funciones son derivables, la derivada resultante $\frac{dy}{dx}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva de nivel, o lo que es equivalente, el ritmo de cambio de $y$ con respecto a $x$ en la curva de nivel.

**Teorema 2.** Si la curva de nivel dada por $f(x,y) = C$ define una función implícita tal que $\frac{dy}{dx}$ existe, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}.$$

En economía, si $f$ es la función de producción, $-\frac{f_x}{f_y}$ representa la tasa marginal de sustitución y se puede interpretar como el número de unidades de $y$ que se deben sacrificar para obtener una más de $x$ a un mismo nivel de producción.

Ejemplo 31. Si $z = f(x,y) = 5x^3 - 3x^2y^2 + \ln(xy)$ para $z = C$:

a. Encontrar $\frac{dy}{dx}$.

b. Para el punto $(1, 1)$ defina la curva de nivel y halle $\frac{dy}{dx}$.

Solución.

a. Las curvas de nivel están definidas por:

$$5x^3 - 3x^2y^2 + \ln(xy) = C$$

que define implícitamente una función; para hallar $\frac{dy}{dx}$ aplicamos el teorema:

$$f_x = 15x^2 - 6xy^2 + \frac{1}{x}$$

$$f_y = -6x^2y + \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{15x^2 - 6xy^2 + \frac{1}{x}}{-6x^2y + \frac{1}{y}}$$

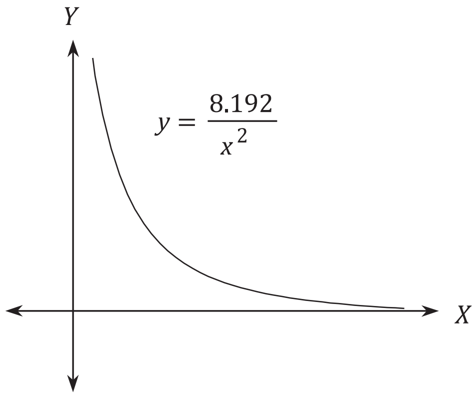
b. Para $x = 1$ y $y = 1$, $z = 2$, por lo tanto la curva de nivel está definida por:

$$5x^3 - 3x^2y^2 + \ln(xy) = 2, \text{ y:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{15(1)^2 - 6(1)(1)^2 + \frac{1}{1}}{-6(1)^2(1) + \frac{1}{1}} = -\frac{10}{-5} = 2$$

Ejemplo 32. Con $10x$ horas–hombre de trabajo calificado y $10y$ horas–hombre de trabajo no calificado, un fabricante puede producir $f(x, y) = x^2 y$ unidades de cierto artículo cada día. Actualmente, el fabricante utiliza 160 horas–hombre de trabajo calificado y 320 horas–hombre de trabajo no calificado por día, pero desea aumentar en 10 el número de horas–hombre de trabajo calificado utilizado cada día. Estime el cambio correspondiente que debe hacer el fabricante en el nivel de la mano de obra no calificada para que la producción diaria total permanezca igual.

Solución. Actualmente, $x = 16$ y $y = 32$, de manera que el nivel de producción es de $f(16, 32) = 8.192$ unidades por día. La curva de nivel correspondiente $f(x, y) = 8.192$ es la gráfica de la función $y = \frac{8.192}{x^2}$.




Esta curva muestra la relación entre la cantidad $x$ de mano de obra calificada y la cantidad $y$ de mano de obra no calificada que debe mantenerse para que la producción se conserve en su nivel actual. Vamos a estimar el cambio en $y$ a lo largo de esta curva que corresponde a un aumento unitario en $x$; de $x = 16$ a $x = 17$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{16.384}{x^3}$ es la tasa de cambio de $y$ con respecto a $x$; el valor de esta derivada cuando $x = 16$ debe ser una aproximación al cambio deseado en $y$. Es decir, el cambio en $y$ es aproximadamente:

$$-\frac{16.384}{(16)^2} = -4$$

Por lo tanto, para compensar el aumento de 10 horas–hombre de trabajo calificado, el fabricante debe disminuir el nivel de trabajo no calificado aproximadamente en 40 horas–hombre por día.

En este ejemplo se obtuvo la pendiente $\frac{dy}{dx}$ de una curva de nivel al resolver primero explícitamente la ecuación $f(x, y) = C$ para $y$ en términos de la variable $x$, y luego se derivó la expresión resultante para $y$ con respecto a $x$.

Al aplicar el teorema anterior,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2} = -\frac{2y}{x}$$

calculada en el punto (16, 32),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(32)}{16} = -4$$

## 9.5.3 Productos marginales de capital y de mano de obra

Suponga que la producción diaria $Q$ de una fábrica depende de la cantidad $K$ de capital (medido en unidades de US $1.000) invertido en planta y equipo, y del tamaño $L$ de la fuerza laboral (medida en horas–trabajador). En economía, las derivadas parciales $\frac{\partial Q}{\partial K}$ y $\frac{\partial Q}{\partial L}$ se conocen como productos marginales (o productividades marginales) del capital y de la mano de obra, respectivamente.

El producto marginal de la mano de obra $\frac{\partial Q}{\partial L}$ es aproximadamente el cambio resultante en la producción Q si el nivel de inversión de capital $K$ se mantiene fijo y la mano de obra $L$ se incrementa en una hora–trabajador.

De igual modo, el producto marginal de capital $\frac{\partial Q}{\partial L}$ es aproximadamente el cambio resultante en la producción si el tamaño de la fuerza laboral $L$ se mantiene fijo y la inversión de capital se incrementa en una unidad (US $1.000).

Ejemplo 33. Se estima que la producción semanal en cierta planta se define por la función $Q(x, y) = 1.200x + 500y + x^2 y — x^3 — y^2$ unidades, donde $x$ es el número de trabajadores calificados y $y$, el número de trabajadores no calificados empleados en la planta. En la actualidad, la fuerza laboral está conformada por 30 trabajadores calificados y 60 no calificados. Aplique el análisis marginal para calcular el cambio resultante en la producción semanal al adicionar un trabajador calificado, si el número de trabajadores no calificados no cambia.

Solución. La derivada parcial:

$$Q_x(x, y) = 1.200 + 2xy — 3x^2$$

es la razón de cambio de la producción con respecto al número de trabajadores calificados. Para cualesquiera valores de $x$ y $y$, ésta es una aproximación de la cantidad de unidades adicionales que se producen cada semana si el número de trabajadores calificados aumenta de $x$ a $x + 1$, mientras que el número de trabajadores no calificados se mantiene fijo en $y$. En particular, para una fuerza laboral de

30 trabajadores calificados y 60 no calificados, si se incrementan los trabajadores calificados a 31 y se mantienen constantes los no calificados, el cambio resultante en la producción es aproximadamente:

$$Q_x(30, 60) = 1.200 + 2(30)(60) - 3(30)^2 = 2.100$$

El cálculo exacto de $\Delta Q$ es:

$$\Delta Q = Q(31, 60) - Q(30, 60) = 2.084$$
$$91.469 - 89.400 = 2069$$

## 9.5.4 Artículos sustitutos

En economía se dice que dos artículos son sustitutos si la demanda $q_1$ del primero crece cuando el precio $p_2$ del segundo crece, y si la demanda $q_2$ del segundo crece cuando el precio $p_1$ del primero crece; por ejemplo, si la demanda de carne de res $q_1$ está en función del precio de la libra de res $p_1$ y de la libra de pollo $p_2$; $q_1 = f(p_1, p_2)$ y la demanda de pollo también está en función de $p_1$ y $p_2$; $q_2 = g(p_1, p_2)$. Sabemos que un incremento en el precio de la carne de pollo $p_2$ hace que la gente consuma más carne de res, es decir $\frac{\partial q_1}{\partial p_2} > 0$, y a su vez un incremento en la carne de res hace que se incremente la demanda de pollo $q_2$, es decir $\frac{\partial q_2}{\partial p_1} > 0$.

**Definición 1.** Dos productos cuyas demandas son $q_1$ y $q_2$, y dependen de sus precios unitarios $p_1$ y $p_2$, son sustitutos si:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} > 0$$

Ejemplo 34. Suponga que $q_1$ y $q_2$ definen la demanda de dos artículos con precios unitarios $p_1$ y $p_2$ donde:

$$q_1 = 3.000 + \frac{400}{p_1 + 3} + 50p_2 \quad \text{y} \quad q_2 = 2.000 + 100p_1 + \frac{500}{p_2 + 4}$$

verificar que los artículos son sustitutos.

Solución. $\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 50 > 0$ y $\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = 100 > 0$; como ambas derivadas son positivas, los artículos son sustitutos.

## 9.5.5 Artículos complementarios

Se dice que dos artículos son complementarios si la demanda $q_1$ del primero decrece cuando el precio $p_2$ del segundo crece, y si la demanda $q_2$ del segundo decrece cuando el precio $p_1$ del primero crece. Por ejemplo, si la demanda de mesas de escritorio $q_1$ está en función del precio de la mesa $p_1$ y del precio de la silla $p_2$, tenemos $q_1 = f(p_1, p_2)$; la demanda de sillas de escritorio está también en función de $p_1$ y $p_2$: $q_2 = g(p_1, p_2)$. Sabemos que un incremento en el precio de la silla $p_2$ hace que la gente compre menos mesas, es decir $\frac{\partial q_1}{\partial p_2} < 0$, y a su vez un incremento en el precio de la mesa $p_1$ redunda en una disminución de la demanda de sillas $q_2$, es decir $\frac{\partial q_2}{\partial p_1} < 0$.

**Definición 2.** Dos productos cuyas demandas son $q_1$ y $q_2$, y que dependen de sus precios unitarios $p_1$ y $p_2$, son complementarios si:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} < 0.$$

Ejemplo 35. Suponga que $q_1$ y $q_2$ definen las demanda de dos artículos con precios unitarios $p_1$ y $p_2$ donde:

$$q_1 = 2.000 + \frac{400}{p_1 + 3} - 50p_2 \quad \text{y} \quad q_2 = 2.000 - 100p_1 + \frac{500}{p_2 + 4}.$$

Determinar si los artículos son complementarios.

Solución. $\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = -50$ y $\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = -100 < 0$; como ambas derivadas son negativas, los artículos son complementarios.

## EJERCICIO 9.3

1. En cierta fábrica la producción $Q$ está relacionada con los insumos $x$ y $y$ por la función $Q(x, y) = 2x^3 + 3x^2 y + y^3$. Si los niveles actuales de insumos son $x = 20$ y $y = 10$, aplique el cálculo para estimar el cambio que debe hacerse en el insumo $x$ para compensar un incremento de 0,5 unidades en el insumo $y$, de manera que la producción se mantenga en el nivel actual.

2. Suponga que la utilidad obtenida por un consumidor de $x$ unidades de un artículo y $y$ unidades de un segundo artículo está dada por la función de utilidad $U(x, y) = (x+1)(y+2)$. En la actualidad, el consumidor posee $x = 25$ unidades del primer artículo y $y = 8$ unidades del segundo. Aplique el cálculo para estimar cuántas unidades del primer artículo podría sustituir el consumidor por una unidad del segundo artículo sin afectar la utilidad total.

3. Un distribuidor de motocicletas ha descubierto que si las motocicletas de clase 10 se venden a $x$ pesos cada una, y el precio de la gasolina es $y$ centavos por galón, cada mes se venderán aproximadamente $f(x, y) = 200 - 24\sqrt{x} + 4(0,1y+5)^{3/2}$ motocicletas. Se estima que dentro de $t$ meses las motocicletas se venderán a $x = 129+5t$ pesos cada una, y el precio de la gasolina será $y = 80+10\sqrt{3t}$ centavos por galón. ¿A qué razón cambiará la demanda mensual de motocicletas con respecto al tiempo dentro de tres meses?

4 La producción de cierta planta es $Q(x, y) = 0{,}08x^2 + 0{,}12xy + 0{,}03y^2$ unidades por día, donde $x$ es el número de horas de mano de obra calificada que se utiliza y $y$ es el número de horas de mano de obra no calificada. En la actualidad se emplean 80 horas de mano de obra calificada y 200 horas de mano de obra no calificada todos los días. Utilice la diferencial total $dQ$ para estimar el cambio resultante en la producción, si se adicionan $\frac{1}{2}$ hora de mano de obra calificada y 2 horas de mano de obra no calificada.

5. La utilidad diaria obtenida por un tendero de la venta de dos marcas de jugo de naranja es $P(x,y) = (x-30)(70-5x+4y)+(y-40)(80+6x-7y)$ centavos, donde $x$ es el precio por envase de la primera marca y $y$ es el precio por envase de la segunda. En la actualidad, la primera marca se vende a 50 centavos por unidad y la segunda a 52 centavos por unidad. Emplee la diferencial total $dP$ para calcular el cambio generado en la utilidad diaria, si el tendero aumenta el precio de la primera marca en \$1 por envase y el de la segunda marca en \$2 por envase.

## 9.5.6 Derivadas parciales de segundo orden

Dada una función definida como $z = f(x, y)$, derivable en una región abierta, recordemos que sus derivadas parciales son funciones de dos variables. Si existen las derivadas parciales de estas funciones, se las denomina derivadas parciales de segundo orden, y se simbolizan así:

1. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$

2. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = z_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f_{yx}$

3. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = z_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f_{xy}$

4. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$

***NOTA:*** $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ *significa que la función se deriva primero con respecto a y, y la función resultante se deriva con respecto a x. A $fxy$ y $fyx$ se las denomina derivadas parciales mixtas.*

**Teorema 3 (de Clairaut).** Si $f$ es una función de $x$ y $y$ tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ son continuas en la región abierta $R$, entonces para cada $(x, y)$ en $R$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$.

Ejemplo 36. Determinar $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $z = e^{xy^2}$.

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy^2}\frac{\partial (xy^2)}{\partial x} = y^2 e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy^2}\frac{\partial (xy^2)}{\partial y} = 2xye^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial (e^{xy^2})}{\partial x} = y^2 e^{xy^2}\ \frac{\partial (xy^2)}{\partial x} = y^2 e^{xy^2} y^2 = y^4 e^{xy^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2xy\,\frac{\partial (e^{xy^2})}{\partial y} + e^{xy^2}\ \frac{\partial (2xy)}{\partial y}\\ &= 2xy\, e^{xy^2}\ \frac{\partial (xy^2)}{\partial y} + 2xe^{xy^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2xy\, e^{xy^2}\ 2xy + 2xe^{xy^2} = 4x^2y^2e^{xy^2} + 2xe^{xy^2}\\ &= 2xe^{xy^2}(2xy^2 + 1)\end{aligned}$$

Ejemplo 37. Calcular todas las derivadas parciales de primer y segundo orden, y probar que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}, \text{ si } z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$$

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 0 - 4y^2\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 4x^3 - 8xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 4y^3 - \frac{\partial}{\partial y}(4x^2y^2) = 4y^3 - 8x^2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = -16xy$$

De donde $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -16xy\ = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

Ejemplo 38. Si $z = xy + xe^{\frac{1}{y}}$, comprobar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + e^{\frac{1}{y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + xe^{\frac{1}{y}}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}{\partial y} = x - \frac{xe^{\frac{1}{y}}}{y^2} = x\left(1 - \frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{xe^{\frac{1}{y}}}{y^2}\right) = 1 - \frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y + e^{\frac{1}{y}}\right) = 1 - \frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 1 - \frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

### 9.5.7 Función armónica

**Definición 3.** Una función $f$ definida como $z = f(x, y)$ se llama armónica si satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \text{ ecuación de Laplace.}$$

Ejemplo 39. Comprobar que $f(x, y) = x^3 y - xy^3$ es armónica.

Solución.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y - y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 3y^2 x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6xy$$

de donde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy - 6xy = 0$$

Luego $f$ es armónica.

Ejemplo 40. Si $f(x, y) = 5x^2 y^3$, evaluar $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ en $x = 4$ y $y = 1$.

Solución.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10xy^3, \text{ entonces } \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(4,1)} = 10(4)(1)^3 = 40$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 15x^2y^2, \text{ entonces } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(4,1)} = 15(4)^2(1)^2 = 240$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10y^3, \text{ entonces } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(4,1)} = 10(1)^3 = 10$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 30x^2y, \text{ entonces } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(4,1)} = 30(4)^2(1) = 480$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 30xy^2, \text{ entonces } \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}\right)_{(4,1)} = 30(4)(1)^2 = 120$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 30xy^2, \text{ entonces } \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)_{(4,1)} = 30(4)(1)^2 = 120$$

## 9.5.8 Aplicaciones

Ejemplo 41. Suponga que la producción $Q$ de una fábrica depende de la cantidad $K$ de capital invertido en la planta y el equipo, y del tamaño $L$ de la fuerza laboral medida en horas–trabajador. Dar una interpretación del signo de la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$.

Solución. Para la mayor parte de las fábricas que operan con fuerzas laborales adecuadas, la derivada $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ es por lo general negativa. ¿Puede dar una explicación económica de este hecho? Por lo tanto, si $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ es negativa, el producto marginal del trabajo $\frac{\partial Q}{\partial L}$ decrece cuando $L$ crece. Esto implica que para un nivel fijo de inversión de capital, el efecto provocado en la producción al adicionar una hora–trabajador de mano de obra, es mayor cuando la fuerza laboral es pequeña que cuando es grande.

## EJERCICIO 9.4

1. Si $U = xy - \ln|xy|$, calcule $\frac{\partial U}{\partial x}$ y $\frac{\partial U}{\partial y}$.

2. Si $z = \frac{y}{x^2+y^2}$, compruebe que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

3. Si $z = xy + xe^{\frac{1}{y}}$, compruebe que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

4. Si $z = 2x^2 - 2y^2 - 3x - 4xy^2$, compruebe que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

5. Si $f(x, y) = x^3 e^{x^2+y}$, halle $f_x$, $f_y$, $f_{xy}$ y $f_{yx}$.

6. Calcule todas las derivadas parciales de primer y segundo orden, y compruebe que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

a. $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$ con $y \neq 0$;
b. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
c. $f(x, y) = x^2 + y^2$;
d. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ con $x \neq y$;
e. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
f. $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

7. Compruebe para cada una de las funciones dadas, que $x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2z$.

a. $z = (x - 2y)^2$
b. $z = (x^4 + y^4)^{\frac{1}{2}}$.

8. Halle $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si:

a. $z = ye^x + xe^{2y}$;
b. $z = e^{xy2}$;
c. $z = x^2 y + 3xy + 4y^3$;
d. $z = x^3 + \lambda$;
e. $z = xy$;
f. $z = y^2 - 2\lambda$.

9. Si $f(x, y) = (y + ax)^2\ e^{y+ax}$, muestre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

10. Halle $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ si $z = x^2 y + 3xy + 4y^3$.

11. Halle $\frac{\partial z}{\partial x}$ si $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ con $x^2 + y^2 < 1$.

12. Calcule $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yyy}, f_{xy}$ y $f_{yx}$ para las siguientes funciones.

a. $f(x,y)= 2x^2y + x^3y^2 + 2y + 10$;

b. $f(x,y)= \frac{x-y}{x+y}$;

c. $f(x,y)= e^{x^2+y^2}$;

d. $f(x,y) = \frac{e^{3x}}{\log|2y|}$;

e. $f(x,y) = \sqrt[3]{(x+y)^4}$;

f. $f(x,y) = xe^y + x^3y^2$.

13. Determine si son armónicas las funciones definidas como:

a. $f(x,y) = x^3 y - xy^3$.

b. $f(x,y) = x^3 - x^2 y^4$.

14. Calcule $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ si $f(x,y) = 3x^4y^5 - 2x^2y^3$.

15. Calcule $\frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2}$ si $f(x,y) = 2x^2 - y^2$.

16. Calcule las primeras derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ de cada una de las siguientes funciones $f$ de tres variables.

a. $f(x,y,z) = 3x^2y - xyz + y^2 z^2$.

b. $f(x,y,z) = \ln|x^2 - yz| + e^{xyz}$.

17. En cada uno de los siguientes ejercicios verifique que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$.

a. $f(x,y)= 2x^2y^3 - x^3y^5$.

b. $f(x,y) = \ln\left(\frac{x-1}{y-1}\right)$ con $y \neq 1$.

18. En cada una de las siguientes funciones halle $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

a. $z = x\ln|x| - ye^y + 3$.

b. $z = x^2 \ln|y| - y^3 + e^x$.

19. En cada una de las siguientes funciones halle $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

a. $f(x,y,z) = xe^{yz} + ye^{xz} - y^2 + 3$.

b. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^2(x+y) - 2z^3$.

20. Suponga que la producción $Q$ de una fábrica está dada por $Q(K,L) = K^{\frac{2}{3}} \cdot L^{\frac{1}{3}}$, donde $K$ es el capital invertido en planta y equipo, y $L$ la fuerza laboral medida en horas–trabajador. Calcule las derivadas de segundo orden y dé una interpretación.

## 9.6 Máximos y mínimos de funciones de varias variables

Si $g$ es una función de variable real definida como $y = g(x)$ y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, la función tiene un máximo y un mínimo absoluto. De manera análoga, si tenemos una función definida como $z = f(x, y)$ continua en una región cerrada $A$ del plano, entonces $f$ tiene al menos un máximo y un mínimo absoluto en $A$; es decir, existen $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ en $A$, tales que:

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2) \text{ para cualquier punto } (x, y) \text{ en } A.$$

$f(x_1, y_1)$ es el mínimo absoluto en $A$ $f(x_2, y_2)$ es el máximo absoluto en $A$.

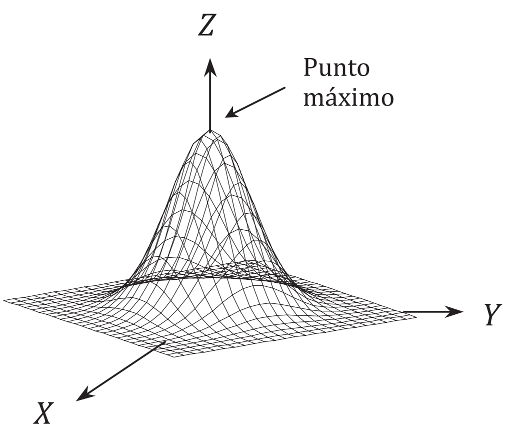
Un número real $f(a, b)$ es un máximo relativo si existe una región abierta $R$ que contenga a $(a, b)$ tal que $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo $(x, y)$ en $R$. Análogamente, un número real $f(a, b)$ es un mínimo relativo si existe una región abierta $R$ que contenga a $(a, b)$ tal que $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y)$ en $R$.

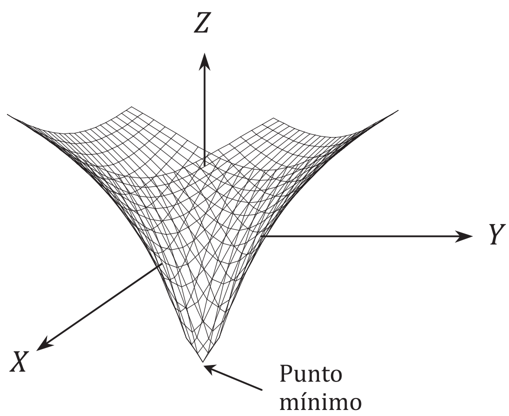
A los efectos del cálculo, consideraremos sólo funciones tales que sus derivadas parciales de primer y segundo orden existan, y sean continuas en regiones abiertas. Sus gráficas de denominan superficies suaves.

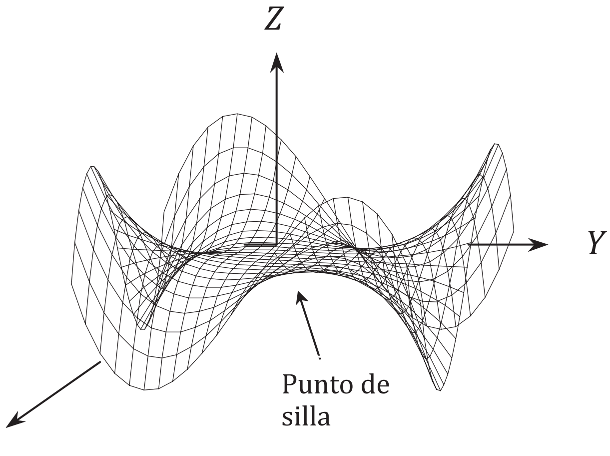
Si $f$ es una función de dos variables con derivadas parciales continuas en $(a, b)$ y $f(a, b)$ es un máximo relativo (o mínimo relativo), entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ se anulan en dicho punto.

**Definición 4.** Sea $f$ una función definida como $z = f(x, y)$ continua en una región abierta $A$. El punto $(a, b)$ de $A$ es un punto crítico de $f$ si:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)} = 0.$$






Como se ve en las gráficas, un punto crítico puede ser un máximo relativo, un mínimo relativo, o un punto de silla (no es ni máximo ni mínimo).

En funciones de variable real, para determinar si un punto crítico es máximo, mínimo o punto de silla, se utiliza el criterio de la segunda derivada (aunque en algunos casos no decide). Existe un criterio análogo para máximos o mínimos relativos o locales, dado en el siguiente teorema.

---

**Teorema 4.** Sea $(a, b)$ un punto crítico de una función definida como $z = f(x, y)$ con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene a $(a, b)$:

$$\Delta(a,b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2$$

Entonces:

i) Si $\Delta(a, b)>0$ y $f_{xx}(a, b)<0$, $f$ tiene un máximo relativo en $(a, b)$.

ii) Si $\Delta(a, b)>0$ y $f_{xx}(a, b)>0)$, $f$ tiene un mínimo relativo en $(a, b)$.

iii) Si $\Delta(a, b)<0$, $f$ tiene un punto de silla en $(a, b)$.

iv) Si $\Delta(a, b) = 0$, el criterio no decide.

---

Ejemplo 42. Hallar los puntos críticos de la función dada y clasificarlos como máximos o mínimos relativos, o puntos de silla:

$$f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$$

Solución. $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$; resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $(0, 0)$ y corresponde al punto crítico.

Como las derivadas parciales de $f$ son continuas, aplicamos el teorema 4 para determinar si en (0, 0) hay punto máximo, mínimo o de silla.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 < 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 0,\ \text{y:}$$

$$\Delta(0, 0) = (-2)(-2)-(0)^2 = 4>0$$

por lo tanto, en (0, 0) hay un máximo relativo cuyo valor es $z = f(0, 0) = 5$, que corresponde al punto de la superficie (0, 0, 5).

Ejemplo 43. Hallar los puntos críticos de la función $f$ y clasificarlos como máximos o mínimos relativos, o puntos de silla, si $f(x, y) = 1+x^2-y^2$.

Solución. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$; al resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

la solución es (0, 0) y corresponde al punto crítico.

Como las derivadas parciales de $f$ son continuas, aplicamos el teorema 4 para determinar si en (0, 0) hay punto máximo, mínimo o de silla.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 < 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 0,\ \text{y:}$$

$$\Delta(0, 0) = (2)(-2)-(0)^2 = -4<0$$

por lo tanto, en (0, 0) hay un punto de silla cuyo valor es $z = f(0, 0) = 1$, que corresponde al punto de la superficie (0, 0, 1).

Ejemplo 44. Hallar los puntos críticos de la función $f$ y clasificarlos como máximos o mínimos relativos, o puntos de silla:

$$f(x, y) = x^2+xy+y^2-3x+2$$

Solución. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y = 0$; al resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

la solución es (2, −1) y corresponde al punto crítico.

Como las derivadas parciales de $f$ son continuas, aplicamos el teorema 4 para determinar si en (2, −1) hay punto máximo, mínimo o de silla.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 > 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 1, \text{ y:}$$

$$\Delta(2, -1) = (2)(2) - (1)^2 = 3 > 0$$

por lo tanto, en (2, −1) hay un mínimo relativo cuyo valor es $z = f(2, -1) = -1$, que corresponde al punto de la superficie (2, −1, −1).

Ejemplo 45. Hallar los puntos críticos de la función $f$ y clasificarlos como máximos o mínimos relativos, o puntos de silla:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y - 10$$

Solución. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6x = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3 = 0$; al resolver el sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6x = 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3 = 0$$

de la ecuación (1) se tiene que $x = 0$ ó $x = 2$, y de la ecuación (2) se tiene que $y = 1$ ó $y = -1$. Por lo tanto, las soluciones del sistema son las parejas (0, 1), (0, −1), (2, 1) y (2, −1), que corresponden a los puntos críticos de $f$.

Como las derivadas parciales de $f$ son continuas, aplicamos el teorema 4.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \ \text{ y } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 0, \text{ y:}$$

$$\Delta(x, y) = (6x - 6)(6y) - 0 = 36xy - 36y$$

Para el punto (0, 1):

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(0) - 6 = -6 < 0$ y $\Delta(0, 1) = -36 < 0$; por lo tanto, en (0, 1) hay un punto de silla, cuyo valor es $f(0, 1) = -12$, que corresponde al punto de la superficie (0, 1, −12).

Para el punto (0, −1):

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(0) - 6 = -6 < 0$ y $\Delta(0, -1) = 36 > 0$; por lo tanto, en (0, −1) hay un punto máximo, cuyo valor es $f(0, -1) = -8$, que corresponde al punto de la superficie (0, −1, −8).

Para el punto (2, 1):

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(2) - 6 = 6 > 0$ y $\Delta(2, 1) = 36 > 0$, por lo tanto en (2, 1) hay un punto mínimo, cuyo valor es $f(2, 1) = -26$, que corresponde al punto de la superficie (2, 1, −16).

Para el punto $(2, -1)$:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(2) - 6 = 6 > 0$ y $\Delta(2, -1) = -36 < 0$; por lo tanto en $(2, -1)$ hay un punto de silla, cuyo valor es $f(2, -1) = -24$, que corresponde al punto de la superficie $(2, -1, -12)$.

---

**NOTA:** *Para hallar los puntos críticos de una función de más de dos variables definida como $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, donde cada una de sus derivadas parciales define una función continua, al igual que para funciones de dos variables, resolvemos el sistema de n ecuaciones con n incógnitas que resulta de igualar las derivadas parciales a cero.*

*Si tenemos éxito en resolver el sistema (por lo general no lineal), aplicar el equivalente al criterio de la segunda derivada para determinar si el punto es un máximo o un mínimo, o un punto de silla encierra grandes dificultades de calculabilidad y complejidad.*

*Usualmente, en los ejercicios de este tipo que se plantean, es posible resolver, sin mucha dificultad, el sistema de ecuaciones y de antemano saber a qué corresponde el punto crítico, lo cual evita aplicar criterios. De hecho, debemos creer en el buen juicio de quien propone el ejercicio.*

---

Ejemplo 46. Hallar el punto mínimo de la función $f$ definida como:

$$w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 5$$

Solución. Hallamos las derivadas parciales:

$$f_x(x, y, z) = 2x, f_y(x, y, z) = 2y, f_z(x, y, z) = 2z,$$

que definen funciones continuas. Al resolver, el sistema:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

tiene como solución $(0, 0, 0)$, que determina un punto crítico. Para determinar a qué corresponde el punto crítico, acudimos al enunciado del problema; por lo tanto $f(0, 0, 0) = 5$ es un mínimo local.

Con un poco de conocimiento de causa se puede corroborar el enunciado, si se sabe que para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$$

por lo que se infiere que el punto $(0, 0, 0)$ es un punto mínimo y

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 5 \geq 5$$

## 9.6.1 Problemas de máximos y mínimos

En los modelos matemáticos que hemos considerado tenemos una variable dependiente $z$ en función de dos o más variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$; es decir, tenemos una función de varias variables y valor real, expresada como:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Al optimizar el modelo (maximizar o minimizar) se pueden presentar dos casos:

- El valor de $z$ se considera definido en todo su dominio, para lo cual se aplican los criterios que hemos desarrollado.
- El valor de $z$ está restringido por condiciones sobre las variables independientes.

Volvamos sobre problemas de máximos y mínimos con una sola variable.

Ejemplo 47. Hallar el área máxima de un rectángulo cuyo perímetro es 20.

Solución. Definimos $x>0$ y $y>0$ como la base y la altura del rectángulo, y $z = f(x, y)$, como el área del rectángulo. El planteamiento del problema queda:

Función objetivo: Maximizar: $f(x, y) = x \cdot y$.
Sujeto a: $g(x, y) = 2x+2y = 20, x>0$ y $y>0$.

La restricción (el perímetro) define la función implícita $g(x, y) = 20$, que podemos expresar como $y = 10-x$. Al reemplazar $y = 10-x$ en la función objetivo $f$, tenemos $f(x, 10-x) = x(10-x)$. El problema es equivalente a maximizar la función en una variable definida como:

$$f(x) = x(10-x) = 10x - x^2$$

Su solución es $x = 5>0, y = 5>0$ y $f(10) = 100$.

Nótese que el reemplazo $y = 10-x$ es válido porque $x$ y $y$ satisfacen la restricción; en el fondo, lo que se trata es de hallar el máximo de la función $f$ sobre el conjunto $\mathrm{Dom}(f) \cap \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0 \text{ y } 2x+2y = 20\}$.

**Metodología:** Hasta ahora, cuando resolvemos problemas de máximos y mínimos con restricciones, la función objetivo depende de dos variables $z = f(x, y)$, y la restricción es una función implícita definida de la forma $g(x, y) = C$, que se puede expresar de manera explícita $y = h(x)$. Al reemplazar $y = h(x)$ en la función objetivo, $z = f(x, h(x))$ es una función que depende sólo de $x$, por lo tanto el problema se reduce a optimizar sin restricciones la función de una variable real definida como $w(x) = f(x, h(x))$.

Siguiendo este esquema consideramos dos casos:

i. Que la función objetivo y la restricción dependan de tres o más variables y la podamos reducir a optimizar una función con dos variables sin restricciones.

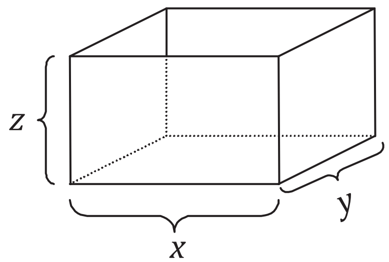
ii. Que la función objetivo dependa de dos variables y la restricción dada en forma implícita no la podamos expresar explícitamente para reducir el problema de optimizar una función de una sola variable dependiente.

Caso i: Si la función objetivo y las restricciones dependen de tres o más variables, podemos reducir a optimizar una función con dos variables sin restricciones y copiamos la metodología que utilizamos para funciones de una variable.

Consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 48. ¿Cuáles deben ser las medidas de una caja rectangular, sin tapa y con un volumen de 32 unidades cúbicas, si se va a utilizar la mínima cantidad de material en su fabricación?

Solución. Definimos $x$ como la longitud de la base de la caja, y el ancho de la base, y $z$ la altura de la caja. Queremos minimizar el área total de la caja, excepto la cara superior.




De acuerdo con la figura, el área es:

$$xy + 2xz + 2yz$$

La restricción que tenemos es que su volumen $xyz$ sea igual a 32.

Formalmente el planteamiento del problema queda:

Función objetivo: Minimizar: $A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$.
Sujeto a: $g(x, y, z) = x \cdot y \cdot z = 32$.

Al despejar $z$ de la restricción, tenemos que $z = \frac{32}{xy}$. Reemplazamos $z$ en la función objetivo y obtenemos la función definida de dos variables. El problema se reduce a minimizar sin restricciones la función que depende de dos variables definida como:

$$f(x, y) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

Se calculan las derivadas parciales:

$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2}$; planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x^2 y - 64 = 0 \\ xy^2 - 64 = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por —$y$, y la segunda por $x$; tenemos:

$$\begin{cases} -x^2y^2 + 64y = 0 \\ \ \ x^2y^2 - 64x = 0 \end{cases}$$

Sumamos las igualdades y nos queda:

$64y—64x = 0$, es decir, $y—x = 0$ de donde $y = x$.

Reemplazamos en $x^2\, y—64 = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} x^2(x) - 64 &= 0 \\ x^3 - 64 &= 0 \\ x^3 &= 64 \\ x = \sqrt[3]{64} &= 4 \end{aligned}$$

Cuando $x = 4$, $y = 4$, en (4, 4) tenemos un punto crítico. Verifiquemos que corresponde a un punto mínimo.

Como las derivadas parciales son continuas, aplicamos el teorema 4.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 128x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{128}{x^3} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 1, \text{ y:}$$
$$\Delta(x, y) = 128x \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \ = \frac{128}{y^3}$$

En el punto (4, 4):

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 512 > 0$ y $\Delta(4, 4) = 16.383 > 0$, por lo tanto en (4, 4) hay punto mínimo, cuyo valor es $f(4, 4) = 4 \cdot 4 + \frac{64}{4} + \frac{64}{4} = 48$, que corresponde al punto de la superficie (4, 4, 48). Por lo tanto, el área mínima es 48.

Ejemplo 49. Dos productos 1 y 2, con costos unitarios US \$4 y US \$1, se producen y venden en cantidades $x$ y $y$, a precios unitarios $p$ y $q$ respectivamente; las demandas en función de los precios unitarios están dadas por las funciones definidas como:

$$x = 1 - p + 2q$$
$$y = 11 + p - 3q$$

a. Determinar si los productos son sustitutos o complementarios.

b. Hallar la utilidad máxima, y las cantidades y los precios que maximizan la utilidad.

Solución.

a. Para determinar si los productos son sustitutos o complementarios, hallamos las primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial q} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial p} = 1$$

Como $\frac{\partial x}{\partial q} > 0$ y $\frac{\partial y}{\partial p} > 0,$ los productos son sustitutos.

b. Los ingresos de un producto corresponden al precio unitario por su cantidad; el ingreso total es $p \cdot x + q \cdot y$, donde $p \cdot x$ representa los ingresos del producto 1 y $q \cdot y$, los del producto 2.

El costo total es $4x+y$, donde $4x$ representa los costos del producto 1 y $y$, los costos del producto 2.

Reemplazamos $x$ y $y$ en función de $p$ y $q$, y tenemos:

- Para los ingresos:

$$\begin{aligned} I(p,q) &= p(1 - p + 2q) + q(11 + p - 3q) \\ &= p - p^2 + 2p\,q + 11q + p\,q - 3q^2 \\ &= p - p^2 + 3p\,q + 11q - 3q^2 \end{aligned}$$

- Para los costos:

$$\begin{aligned} C(p,q) &= 4(1 - p + 2q) + (11 + p - 3q) \\ &= 4 - 4p + 8q + 11 + p - 3q \\ &= 15 - 3p + 5q \end{aligned}$$

La utilidad consiste en los ingresos menos los costos:

$$\begin{aligned} U(p,q) &= p - p^2 + 3pq + 11q - 3q^2 - 15 + 3p - 5q \\ &= -p^2 + 4p + 3pq + 6q - 3q^2 - 15 \end{aligned}$$

Para maximizar la función, hallamos las derivadas parciales y las igualamos a cero.

$$\frac{\partial U}{\partial p} = -2p + 4 + 3q = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = 3p + 6 - 6q = 0$$

$$\begin{cases} -2p + 3q = -4 \\ \phantom{-}3p - 6q = -6 \end{cases}$$

La solución del sistema es $p = 14$ y $q = 8$; en $(14, 8)$ se tiene un punto crítico. Veamos que corresponde a un máximo:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} = -2 < 0, \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = -6 < 0 \text{ y } \frac{\partial^2 U}{\partial p\, \partial q} = 3,$$

$$\text{y } \Delta(14, 8) = (-2)(-6)-(3)^2 = 3>0.$$

La utilidad máxima es $U(14, 8) = 50$.

Para hallar las cantidades, reemplazamos en $x = 1-p+2q$ y $y = 11+p-3q$. Obtenemos $x = 3$ y $y = 1$.

Caso ii: Que la función objetivo dependa de dos variables y no podamos expresar explícitamente la restricción dada en forma implícita para reducir al problema a optimizar una función de una sola variable dependiente.

Consideremos el siguiente ejemplo:

| | | |
|---|---|---|
| Función objetivo: | Maximizar: | $z = x^2+y^2$. |
| | Sujeto a: | $x^3+y^3-6xy = 0$. |

Existe una gran dificultad para expresar $y$ en función de $x$ ó $x$ en función de $y$. Esto obliga a buscar otros métodos de solución más sencillos, uno de los cuales se llama multiplicadores de Lagrange.

## 9.6.2 Multiplicadores de Lagrange

El método de los multiplicadores de Lagrange se emplea para obtener los máximos o los mínimos de las funciones sujetas a restricciones de igualdad.

Si la función que se quiere optimizar depende de dos variables y está definida como $z = f(x, y)$. El planteamiento del problema es:

| | | |
|---|---|---|
| Función objetivo: | Maximizar: | $z = f(x, y)$. |
| | Sujeto a: | $g(x, y) = 0$. |

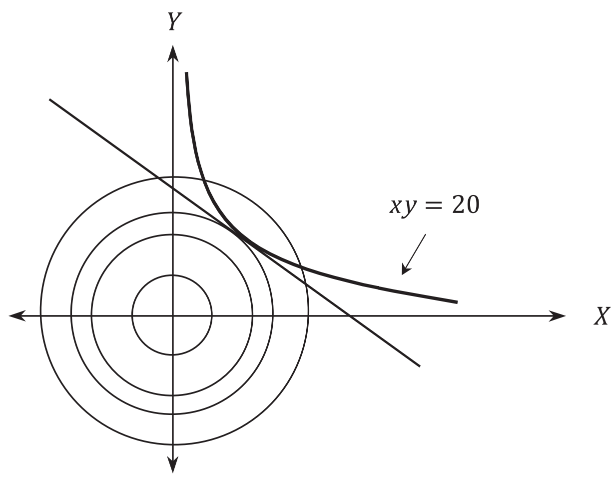
Veamos el siguiente caso:

Plantear el problema de hallar el punto de la curva $x \cdot y = 20$, tal que su distancia al origen sea mínima. Interprete geométricamente el resultado.

La distancia de un punto $(x, y)$ al origen es $\sqrt{(x^2+y^2)}$. Este valor es mínimo cuando $x^2+y^2$ es mínimo; por lo tanto, el planteamiento del problema es:

| | | |
|---|---|---|
| Función objetivo: | Minimizar: | $z = x^2+y^2$. |
| | Sujeto a: | $x \cdot y - 20 = 0$. |

Geométricamente, si tenemos la curva $x \cdot y = 20$, para hallar la distancia mínima trazamos las curvas de nivel de la función objetivo, que son circunferencias con centro en $(0, 0)$. El radio de la primera de estas circunferencias que haga contacto con la curva corresponde a la distancia mínima.




Si el punto de contacto es $(x, y)$, tenemos que la recta tangente a las curvas es la misma; es decir, salvo una constante $\lambda$, se cumplen las condiciones:

$$f_x(x, y) = \lambda \cdot g_x(x, y)$$

$$f_y(x, y) = \lambda \cdot g_y(x, y)$$

además de la condición $g(x, y) = 0$.

En esencia, tenemos un sistema de ecuaciones que podemos expresar así:

$$\begin{cases} f_x(x,y) - \lambda \cdot g_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) - \lambda \cdot g_y(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Observe que este sistema de ecuaciones es el mismo que resulta de minimizar sin restricciones la función definida como $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$.

**Multiplicadores de Lagrange.** Si $f$ y $g$ son funciones con derivadas parciales continuas, para hallar los puntos críticos de una función definida como $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$, se construye la función:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$$

y se determinan los puntos críticos de $F$ considerada como una función de tres variables $x, y, \lambda$.

En general, si queremos optimizar la función de varias variables $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, ésta puede estar sujeta a un máximo de $n-1$ restricciones:

$$g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, ..., g_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$$

Si las funciones $f, g_1, g_2, ..., g_{n-1}$ tienen derivadas parciales continuas, el problema se reduce a optimizar sin restricciones la función definida como:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\, g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

A las variables reales $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$, se las denomina **multiplicadores de Lagrange**.

El valor de $\lambda_i$, i = 1, 2, ..., $n-1$ representa la magnitud del cambio en la función objetivo por unidad de cambio en la restricción.

Ejemplo 50. Resolvamos el ejemplo 41, por medio de los multiplicadores de Lagrange. ¿Cuáles deben ser las medidas de una caja rectangular, sin tapa y con un volumen de 32 unidades cúbicas, para poder utilizar la mínima cantidad de material en su fabricación?

Solución. De acuerdo a lo hecho anteriormente, el planteamiento del problema es:

| | | |
|---|---|---|
| Función objetivo: | Minimizar: | $A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$. |
| | Sujeto a: | $g(x, y, z) = x \cdot y \cdot z = 32$. |

La función $F$ está dada por:

$$F(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz - \lambda(x \cdot y \cdot z - 32)$$

El sistema que debemos resolver es:

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_y(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_z(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} y + 2z - \lambda\, y\, z = 0 & (1) \\ x + 2z - \lambda\, x\, z = 0 & (2) \\ 2x + 2y - \lambda\, x\, y = 0 & (3) \\ x \cdot y \cdot z - 32 = 0 & (4) \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por $y$ y la tercera por $(-z)$; sumamos miembro a miembro y tenemos:

$$\begin{array}{r} xy + yz(2 - \lambda x) = 0 \\ \underline{-2xz - yz(2 - \lambda x) = 0} \\ xy \; - 2xz = 0 \quad (5) \end{array}$$

de la ecuación (5), tenemos que $x(y - 2z) = 0$. Como $x > 0$, se sigue que $y = 2z$. Ahora reemplazamos y en la ecuación (1) y tenemos que:

$$\begin{aligned} 2z + 2z - 2\lambda z &= 0 \\ z &= \frac{2}{\lambda} \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $y = 2z = \frac{4}{\lambda}$. Reemplazamos $z$ en la ecuación (2); se sigue que:

$$\begin{aligned} x + 2\frac{2}{\lambda} - \lambda\, x\, \frac{2}{\lambda} &= 0 \\ x &= \frac{4}{\lambda} \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazamos $x, y, z$ en la ecuación (4) y tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\lambda} \cdot \frac{4}{\lambda} \cdot \frac{2}{\lambda} - 32 &= 0 \\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$

de donde se sigue que $x = \frac{4}{\lambda} = 4, y = \frac{4}{\lambda} = 4$ y $z = \frac{2}{\lambda} = 2$, lo cual determina el mismo punto del ejemplo 41. Así, el área mínima está dada por:

$$A(4, 4, 2) = 48$$

Ejemplo 51. Una fábrica produce dos tipos de máquinas en cantidades $x$ y $y$. La función de costo total está dada por $f$ definida como $f(x, y) = x^2+2y^2-xy$. Para minimizar el costo, ¿cuántas máquinas de cada tipo debe producir, si el total debe ser 8?

Solución.

Función objetivo: Minimizar: $f(x, y, z) = x^2\ y+2y^2-xy$.
Sujeto a: $g(x, y) = x+y = 8$.

Aplicamos los multiplicadores de Lagrange, con lo cual el problema se reduce a minimizar:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= x^2 + 2y^2 - xy - \lambda(x + y - 8) \\ &= x^2 + 2y^2 - xy - \lambda x - \lambda y + 8\lambda \end{aligned}$$

Ahora,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y - \lambda = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y - x - \lambda = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - \lambda = 0 \\ -x + 4y - \lambda = 0 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

que tiene como solución $x = 5$, $y = 3$ y $\lambda = 7$. Luego, hay un punto crítico en $P(5, 3)$.

Presentamos a continuación un ejemplo curioso debido a la forma en que se soluciona. Dejamos al lector que lo resuelva utilizando el método de Lagrange.

Ejemplo especial 52. Halle el valor mínimo de la función definida por:

$$f(x, y, z) = x^2+2xz+2xy-4x+z^2+2yz-4z+y^2-4y-5$$

sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} x + z &= 2(4 + y) \\ x(z - y) &= 3 \end{aligned}$$

Solución.

$x^2+2xz+2xy-4x+z^2+2yz-4z+y^2-4y-5$ se puede escribir como:

$$(x+y+z+1)(x+y+z-5)$$

Si llamamos $t = x+y+z$, la expresión anterior resulta ser cuadrática en la variable $t$:

$$(t+1)(t-5) = t^2-4t-5$$

y alcanza su valor mínimo en $t = 2$. El valor mínimo de $f$ es $-9$, de donde $x+y+z = 2$ ó bien $x+z = 2-y$. De la restricción $x+z = 2(4+y)$, se obtiene que:

$$2-y = 2(4+y)$$

con lo cual $y = -2$. La primera restricción queda en $x+z = 4$ ó bien $x = 4-z$, y la segunda restricción queda entonces en $(4-z)(z+2) = 3$. Resolvemos:

$$z^2-2z-5 = 0$$
$$z = 1+\sqrt{6} \text{ ó } z = 1-\sqrt{6}$$

sustituimos en $x = 4-z$ y obtenemos $x = 3-\sqrt{6}$ ó $x = 3+\sqrt{6}$. En resumen, la función $f$ se minimiza en los puntos:

$$(3-\sqrt{6}, -2, 1+\sqrt{6}) \text{ y } (3+\sqrt{6}, -2, 1-\sqrt{6})$$

con valor mínimo $-9$.

***NOTA:*** *Para optimizar una función con restricciones, la convertimos en una función sin restricciones reduciendo variables o agregando nuevas variables. Esto es para tratar de reducir el número de variables. En caso de no ser posible, aplicamos el método de multiplicadores de Lagrange, que implica agregar variables. En general, los problemas de optimización son difíciles de resolver; sin embargo, se han desarrollado herramientas como la programación lineal y la programación no lineal, que con la ayuda del computador han tenido gran desarrollo.*

## EJERCICIO 9.5

1. Determine los máximos, mínimos y puntos de silla (si los hay) para cada una de las siguientes funciones:

   a. $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 3y$;
   b. $f(x, y) = xy + x - y$
   c. $f(x, y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$;
   d. $f(x, y) = x^3 - 3bxy + y^3$;
   e. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$;
   f. $f(x, y) = xy - 2y^2$;
   g. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 14$;
   h. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$;
   i. $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$;
   j. $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^2 y - x$;
   k. $f(x, y) = \frac{2}{xy} + x^2 + y^2$;
   l. $f(x, y) = e^{xy}$.

2. Halle los máximos o los mínimos de cada una de la siguientes funciones sujetas a las restricciones dadas, utilizando los multiplicadores de Lagrange.

   a. $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$, si $x + 2y = 24$;
   b. $f(x, y) = 12xy - 3y^2 - x^2$, si $x + y = 16$;
   c. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$, si $x^2 + y^2 = 50$;
   d. $f(x, y) = x^2 - 10y^2$, si $x - y = 18$;
   e. $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - xy$, si $2x + y = 21$;
   f. $f(x, y) = x^2 + 24xy + 8y^2$, si $x^2 + y^2 = 25$;
   g. $f(x, y) = x + y$, si $x^2 + y^2 = 1$;
   h. $f(x, y) = x^2 + y^2$, si $x^3 + y^3 - 6xy = 0$.

3. La función de producción de una empresa es $f(l, k) = 12l + 20k - l^2 - 2k^2$, donde $l$ y $k$ representan mano de obra (en miles de dólares) y capital (en miles de dólares), respectivamente. El costo para la compañía es de \$4 y \$8 por cada unidad de $l$ y $k$ respectivamente. Si la empresa desea que el costo total de los insumos sea \$88, calcule la máxima producción posible.

4. Halle las cantidades y el precio que maximicen la ganancia, y la máxima ganancia, para cada uno de los siguientes conjuntos de funciones de demanda y de costo total ($C$).

a. $x = 2-2p+4q$
$y = 22+2p-6q$
$C = 8x+2y$;

b. $x = 11-2p-2q$
$y = 16-2p-3q$
$C = 3x+y$;

c. $p = 40-2x^2$
$q = 12-3y$
$C = 8+4x+3y$;

d. $p = 16-x^2$
$q = 9-y^2$
$C = x^2+3y^2$

5. Emplee el método de los multiplicadores de Lagrange para obtener los puntos críticos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones dadas:

a. $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 5$, con la restricción $x^2 + y^2 - 2y = 0$;

b. $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$, con la restricción $x^2 + y^2 - 4y = 0$;

c. $f(x, y) = x^2 + y$, con la restricción $x^2 + y^2 = 9$;

d. $f(x, y) = x^2 y$, con la restricción $x^2 + 8y^2 = 24$;

e. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, con la restricción $3x - 2y + z - 4 = 0$;

f. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, con la restricción $y^2 - x^2 = 1$.

6. Para surtir un pedido de 100 unidades de un producto, una empresa desea distribuir la producción en dos plantas $A$ y $B$. La función de costo total está dada por:

$$C(p, q) = 0,1p^2 + 7p + 15q + 1.000$$

donde $p$ y $q$ son el número de unidades fabricadas en $A$ y $B$ respectivamente. ¿Cómo se debe distribuir la producción para minimizar los costos?

# 9.7 Resumen

## Funciones de varias variables de valor real

La variable dependiente y está en función de dos o más variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$; es decir, tenemos una función expresada como:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

## Gráfica de una función de dos variables

Si $f$ es una función definida como $z = f(x, y)$, la gráfica de $f$ es el conjunto de ternas ordenadas de números reales $(x, y, z)$ tales que $z = f(x, y)$. Geométricamente, a esta representación gráfica se la denomina superficie en el espacio tridimensional.

## Curvas de nivel

Trazar la gráfica de una función de dos variables no es fácil. Sin embargo, se puede visualizar intersectando la superficie con planos paralelos al plano $XY$. Al proyectar estas curvas sobre el plano $XY$, con indicación del valor de la constante, obtenemos un conjunto de curvas que se denominan curvas de nivel.

## Curvas de nivel en economía. Isocuantas y curvas de indiferencia.

Las curvas de nivel surgen en diversas aplicaciones. En economía, por ejemplo, si la producción $Q(x, y)$ de un proceso de producción está determinada por dos insumos $x$ y $y$ (por ejemplo, horas de mano de obra e inversión de capital), entonces la curva de nivel $Q(x, y) = C$ se denomina curva del producto constante $C$, o de modo más simple, isocuanta. Esto significa que es posible obtener la cantidad del producto $C$ combinando los insumos $x, y$ de diferentes maneras.

Otra aplicación de las curvas de nivel en economía incluye el concepto de curvas de indiferencia. Si un consumidor está considerando la compra de una cantidad de unidades de cada uno de dos artículos, puede asociar la compra con una función de utilidad definida como $U(x, y)$, que mide la satisfacción total o utilidad que obtendría con $x$ unidades del primer artículo y $y$ unidades del segundo. Una curva de nivel $U(x, y) = C$ de la función de utilidad se denomina curva de indiferencia y proporciona todas las combinaciones de $x$ y $y$ que conducen al mismo nivel de satisfacción del consumidor.

## Límites

Decimos que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

si y sólo si para todo ε>0, existe un δ>0 tal que si $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ entonces $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

## Continuidad

Se dice que una función definida como $z = f(x, y)$ es continua en el punto $(a, b)$, si:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

## Derivadas parciales

Si $f$ es una función definida como $z = f(x, y)$, continua en una región abierta, y queremos medir la variación de $z$, podemos considerar:

1. Derivada parcial de $z$ con respecto a $x$:
   $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$, siempre que dicho límite exista.
2. Derivada parcial de $z$ con respecto a $y$:
   $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$, siempre que dicho límite exista.

## La diferencial total

Si $f$ es una función definida como $z = f(x,y)$, tal que las derivadas parciales existen, y $x, y$ se incrementan en $\Delta x$ y $\Delta y$, respectivamente, el incremento correspondiente a $z$ está dado por:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

Cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, $\Delta z$ se puede aproximar mediante las diferenciales de $x$ y $y$ a través de la expresión:

$$dz = f_x\, dx + f_y\, dy$$

$dz$ se denomina diferencial total.

## GLOSARIO

Funciones de varias variables de valor real: Función con dominio en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y codominio en $\mathbb{R}$.

Isocuantas: Curvas de nivel de una función de producción $Q(x, y)$.

Curvas de indiferencia: Curvas de nivel de una función de utilidad $U(x, y)$.

Producto marginal de capital: $\frac{\partial Q}{\partial K}$, donde $Q$ es la función producción y $K$ es el capital.

Producto marginal de mano de obra: $\frac{\partial Q}{\partial L}$, donde $Q$ es la función de producción y $L$ es la fuerza laboral.

Artículos sustitutos: Dos artículos son sustitutos, si la demanda $q_1$ del primero crece cuando el precio $p_2$ del segundo crece, y la demanda $q_2$ del segundo crece cuando el precio $p_1$ del primero crece.

Artículos complementarios: Se dice que dos artículos son complementarios si la demanda $q_1$ del primero decrece cuando el precio $p_2$ del segundo crece, y la demanda $q_2$ del segundo decrece cuando el precio $p_1$ del primero crece.

Punto crítico: Sea $f$ una función definida como $z = f(x, y)$, continua en una región abierta $A$. El punto $(a, b)$ de $A$ es un punto crítico de $f$ si:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)} = 0$$

# Respuestas

## CAPITULO I

### EJERCICIO 1.1

1. a. $2x^2 + 4xy + 3y^2$ b. $a-2b$

2. a. $3a-(-5b-6c-7)$ b. $5x-(4y-8z+10)$ c. $x-(y-z+4)$

   d. $-6x-(3y + 4z-2)$ e. $-12x-(-4y+5z+8)$ f. $12a-(6b-8c+10)$

3. a. $4m-[2n+3+(-m+n)-(2m-n)]$

   b. $x^2-\{3xy-[(x^2-xy)+y^2]\}$

## EJERCICIO 1.2

1. a. $19a + 3c$ b. $7a^m - 14a^x$
2. a. $-2x - 9$ b. $-x + 4$

   c. $-\frac{13}{28}x + \frac{181}{200}y$ d. $15 - 10\sqrt{5}\,a$
3. $6m - n + p$
4. $8x - 8y + 3$
5. $a^3 + \frac{15}{8}a^2 - \frac{19}{10}a - \frac{1}{24}$
6. $\frac{2}{16}m^6 + \frac{2}{9}n^6 + \frac{13}{20}m^4n^2 - \frac{11}{14}m^2n^4 + \frac{3}{5}$
7. a. $4x - 6y - 6$ b. $-14x + 20y + 4$

   c. $-m^4 - 4m^3 + 10m^2 - 12m + 6 + \sqrt{7}$
8. $3a^3 + a^2 - a - 5$

## EJERCICIO 1.3

Efectúe en cada caso.

1. $a^3 + 8b^3$
2. $a^5 - b^5$
3. $a^{x+3} + a^x$

## EJERCICIO 1.4

1. $4x^2 - 12x^2y^2 + 9y^4$
2. $a^4 - 9$
3. $x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$
4. $a^2 + 2ac - b^2 + c^2$
5. $6x^2 + 11x - 10$
6. $27m^3 - 54m^2n^2 + 36mn^4 - 8n^6$
7. $-123.$
8. $(a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) = (ac + 3bd)^2 + 3(ad - bc)^2.$

## EJERCICIO 1.5

1. a. $\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$ b. $1 - \frac{12}{7}y$ c. $45(m+n) - 75n$

2. a. $\frac{1}{15}xy(15x - 4y)$ b. $\frac{1}{25}xy^2(3 - 5xyz)$ c. $\frac{3}{16}x^2(3 - 20xm)$

   d. $\frac{1}{15}(x^2 + 15)$

3. $35m^2(n^3 - 2m)$ 4. $12xy^2(2a^2 - 3xy^2)$ 5. $x^2y^3(x^2z^2 + 3y)$

6. $(x-2)(x+3y+1)$ 7. $(2x-3)(2x+1)$ 8. $a(x^2 - ax + a^2)$

9. $(1 + 3ab^2c^3d^4)(1 - 3ab^2c^3d^4)$

10. $(a^2 - 5b^4)(a^4 + 5a^2b^2 + 25b^8)$

11. $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

12. $(1-3ab)(1+3ab+9a^2b^2)$ 13. $\left(2x^n - \frac{1}{3}\right)\left(2x^n + \frac{1}{3}\right)$

14. $\left(4x^{3m} - \frac{y^n}{7}\right)\left(4x^{3m} + \frac{y^n}{7}\right)$ 15. $\left(a^nb^{2n} - \frac{1}{5}\right)\left(a^nb^{2n} + \frac{1}{5}\right)$

16. $(1 - a^{n+2})(1 + a^{n+2} + a^{2n+4})$ 17. $(6n-2)(6n-5)$

18. $(9x-15)(9x+12)$ 19. $(x-y)(9x+y)$

20. $(x+4)^2(x-4)^2$ 21. $(x-2)(x+2)(x-6)(x+6)$

22. $(x - 2\sqrt{5})(x + 2\sqrt{5})(x^2 + 17)$ 23. $(x+4y)(x+8y)$

24. $(x-3y)^2$ 25. $(x+10y)(x-5y)$

26. $(m-14)(m+12)$ 27. $(m-25)(m-16)$

28. $(x+26)(x-14)$ 29. $(7a+5b-5)(7a+5b-6)$

30. $(1-2ab)^3$ 31. $(a^2+b^3)^3$ 32. $(1+x^2)(3m-2n)$

33. $(ax-b)(4a^2-3m)$ 34. $(x-3a)(3x^2-1)$ 35. $x(1-x)(1+x^2)$

36. $a^2(a^4 - 3a^2 + 8a - 4)$ 37. $(a+x)(a+b)$ 38. $(x-2y)(a-2b)$

## EJERCICIO 1.6

1. $x^n - y^n$
2. $a^{x+1} + 10$
3. $x + y + z$
4. $(x + y)^4$
5. $-\frac{32y^5}{x^2z^5}$
6. $\frac{x}{2y^2}$
7. $-\frac{3a^8}{b}$
8. $\frac{1}{xy^8(3x^4+5)^4}$
9. $2b + 3$
10. $\frac{2x+y}{x-y}$
11. $\frac{b}{2a}$
12. $\frac{4n^2+10n+25}{2n-5}$
13. $\frac{(x-3)(x-2)}{(x+1)(x-4)}$
14. $\frac{x+3}{x-6}$
15. $\frac{2}{3x+1}$
16. $1$
17. $-\frac{2xy}{x^2-2xy-y^2}$
18. $\frac{x-1}{x+2}$

## EJERCICIO 1.7

1. $x = \frac{19}{3}$
2. $x = -3$
3. $x = -\frac{9}{5}$
4. $x = -35$
5. $y = \frac{1}{3}$
6. $x = 5$
7. $x = 8$
8. $x = \frac{93}{20}$
9. $x = 5$
10. $x = \frac{5}{9}$
11. $x = \frac{2}{3}$
12. $x = 3a$
13. $x = \frac{d-b}{a+c}$
14. $x = \frac{2ab}{a+b}$
15. a. $b = \frac{2A}{h}$ b. $t = \frac{A-P}{rP}$ c. $g = \frac{2h}{t^2}$ d. $m = \frac{Fd^2}{kM}$
    e. $c = \frac{5}{9}(F - 32)$ f. $a = \frac{S(1-r)}{1-r^n}$ g. $t = \frac{rs}{s-r}$ h. $x = \frac{b+2d}{2c-a}$

## EJERCICIO 1.8

1. a. 27 b. 25
2. a. 50, 200 b. 150, 200 c. 300, 500
3. a. 179, 180, 181 b. 168, 170, 172
4. a. 26 monedas de \$50 y 21 monedas de \$100.

b. 14 billetes de \$1000, 7 billetes de \$500 y billetes de \$10000.

5. a. 54 millones de pesos en bonos y 30 millones de pesos en acciones.

   b. 200 millones de pesos en bonos y 200 millones de pesos en acciones.

6. 15 minutos

7. \$27500

8. \$80

9. A hace le trabajo en 15 horas y $B$ hace el trabajo en 10 horas.

10. El 31 de julio de 2024.

## EJERCICIO 1.9

1. a. $[2, 3]$ b. $(-\infty, 2)$ c. $[-2, 5)$

   d. $[10, \infty)$ e. $(6, 13]$ f. $(-\infty, 9]$

2. a. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$ b. $\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -5\}$ c. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

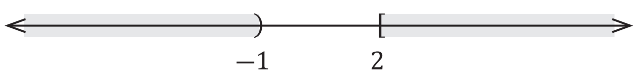
   d. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\}$

3. a. $(-\infty, 5)$ b. $(-\infty, -1) \cap (-2, \infty) = (-2, -1)$ c. $(-\infty, 6] \cap (1, \infty) = (1, 6]$

   d. $(-\infty, -1) \cap (1, \infty) = \varnothing$

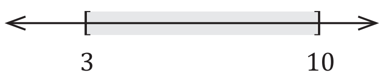
4. a. $[1, 2]$ b. $(-5, \infty)$ c. $[-2, 1)$,

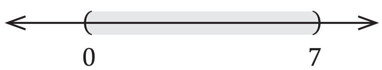
   d. $(-\infty, 4) \cup [7, \infty)$, e. $(-6, -3] \cup [5, 8)$, f. $\{1\}$

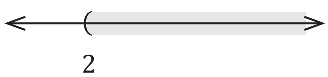
5. a.


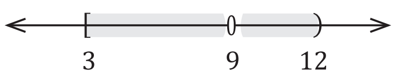

   b.



   c.



   d.



   e.



   f.


## EJERCICIO 1.10

1. $x = 2 \pm \sqrt{2}$
2. $x = \frac{3}{2}$ y $x = -\frac{2}{3}$
3. $x = \frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{13})$
4. $x = 4 \pm \sqrt{13}$
5. No tiene solución en los números reales.
6. No tiene solución en los números reales.
7. $x = 1$.
8. No tiene solución en los números reales.
9. $x = \pm 2$.
10. $x = \pm 3$
11. $x = 2$
12. $x = 2$
13. $x = 0, x = 3$
14. $x = 2$
15. $x = 3$
16. $x = 1$
17. a. $x^2+2x-15=0$ b. $6x^2 + x-2=0$ c. $x^2 + 10x + 25=0$ d. $x^2-4x + 2=0$
18. $x=(1+\sqrt{5})/2$.

## EJERCICIO 1.11

1. $(-\infty, 2)$
2. $\left[-\frac{142}{49}, \infty\right)$
3. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
4. $(-5, -2) \cup (4, 7)$
5. $(-\infty, 7] \cup [2, \infty)$
6. $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$
7. $\mathbb{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$
8. $(-8, 1)$
9. $(-\infty, -1) \cup (0,1)$
10. $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$
11. $(-1, 0) \cup (1, \infty)$
12. $(0, \infty)$
13. $\{0\} \cup \left[\frac{9}{3}, \infty\right)$
14. $(0, \infty)$
15. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (-1, 2) \cup \left(\frac{13}{6}, \infty\right)$
16. $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
17. $[-1, 0)$

## EJERCICIO 1.12

1. 1469 o más artículos.
2. Menos de 55 artículos.
3. Entre 200 y 1000 unidades.

4. Por lo menos 357142 periódicos.

5. Más de 12000 unidades.

## EJERCICIO 1.13

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | a. 11 | b. 27 | c. 30 | d. 1 | e. 1 | f. 2 |
| 2. | a. $\{5, 1\}$ | b. $\{15, -9\}$ | c. $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ | d. $\{4, -6\}$ | e. $\{-8, 1\}$ | f. $\{-4, 8\}$ |

## EJERCICIO 1.14

1. a. $(1, 5)$ b. $(-4, -1)$ c. $\left[-\frac{3}{7}, \frac{9}{7}\right]$ d. $\left[-\frac{13}{5}, -\frac{11}{5}\right]$

   e. $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ f. $[0, \infty)$ g. $\left(-\infty, -\frac{11}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{6}, \infty\right)$

   h. $(-\infty, 1] \cup [9, \infty)$ i. $\left[-\frac{1}{3}, 7\right]$ j. $\mathbb{R}$ k. $\mathbb{R}$ l. $(-2, 4/3)$

2. a. $(B[3; 2])^c$ b. $B[3; 2]$ c. $B[-5/12; 13/12]$ d. $(B[-1; 5])^c$

   e. $B(-7/2, 9/2)$ f. $(B(2; 6))^c$

## EJERCICIO 1.15

1. cota inferior $-4$ y cota superior 4.
2. cota inferior $-5$ y cota superior 10.
3. El conjunto es vacío, luego cualquiera puede servir de cota inferior o de cota superior.
4. No es acotado
5. $inf(A) = -1$ y $sup(A) = 1/2$
6. $inf(B) = -1$ y $sup(B) = 1$.
7. $inf(C) = 0$ y $sup(C) = 1/2$.
8. $inf(D)$ no existe y $sup(D) = 1/4$.

## EJERCICIO 1.16

1. a. 26542841 b. $\frac{1147}{512}$ c. $\frac{29}{4}$ d. $\frac{8}{729}$
2. a. $3^{\frac{2}{5}}$ b. $3^{\frac{8}{7}}$ c. $3^{\frac{2}{9}} \cdot 5^{\frac{4}{9}}$ d. $2^{\frac{1}{9}} \cdot 3^{\frac{1}{18}}$
3. a. $\sqrt[7]{4a^4}$ b. $\sqrt[4]{a^5}$ c. $\sqrt[3]{\frac{243}{3125}}$
4. a. 5 b. 2 c. $2\sqrt{2}$
5. a. $\sqrt[3]{375}$ b. $\sqrt[5]{96}$ c. $\sqrt{\frac{5}{4}}$
6. a. $-6-3\sqrt{2}$ b. $\sqrt{5\sqrt{3}}$ c. $14\sqrt{5}$ d. 3
   e. 6 f. $\sqrt[72]{2^{66} \cdot 3^{16} \cdot 5^{12} \cdot 23^{9}}$
7. a. $9x\sqrt{5x} - 11x\sqrt{2x}$ b. $3x\sqrt[3]{2x} - 83\sqrt{x}$
8. a. $14x$ b. $40x$ c. $5x\sqrt[2]{3}$ d. $\sqrt{2x^2 + 2x}$
   e. $\sqrt{4x^2 - 1}$ f. $\sqrt{4x^2 - 25}$ g. $\sqrt{x^2 - 13x + 36}$ h. $5x$
9. a. $9-x$ b. $4-x$ c. $x-1$ d. $\sqrt[3]{x^2} - 81$
   e. $1 + x$ f. $1 + x + 2\sqrt{x}$ g. $2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x - 6}$
   h. $50x - 242 + 14\sqrt{x^2 - 2x - 15}$ i. $\frac{\sqrt{a}(x+1)}{b-a}$
10. a. $a$ b. $<$ c. $>$ d. $>$ e. 0
11. $2^{22}$ y $4^{4^4}$.

## EJERCICIO 1.17

1. a. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}$ b. $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ c. $\sqrt{x} + 2$ d. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}$
   e. $\sqrt[3]{(x+h)^2} - \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}$ f. $\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{2x^2} + \sqrt[4]{4x} + \sqrt[4]{8}$
   g. $\sqrt[4]{(x+2)^3}$ h. $\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{x}\right)^2 \left(2-\sqrt{x}\right)}$ i. $\sqrt[7]{x^4}$
2. a. $\frac{3\sqrt{x+3}}{x+3}$ b. $\frac{\sqrt[4]{4x^3}}{x}$ c. $\frac{(2x+3)\left(x2-x\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{x^3+x}$

d. $\frac{1-\sqrt{1-a^4}}{a^2}$ e. $\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}{x+2}$

3. a. $\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ b. $\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}$ c. $\frac{1}{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{a}}$

d. $\frac{2}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt[3]{3(2x+1)}+\sqrt[3]{9}}$

## EJERCICIO 1.18

1. a. $-\frac{5}{2}$ b. $-\frac{3}{2}$ c. 2

2. a. Falso, $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}>\frac{1}{8}$

Para que sea verdadera el número positivo a considerar debe ser mayor que 1.

b. Falso, $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$

Para que sea verdadera esta afirmación, el número positivo $x$ debe ser estrictamente mayor que 1.

3. a. $\log_5 1 = 0$ b. $\log_4\left(\frac{1}{16}\right)=-2$ c. $\log_8 4=\frac{2}{3}$ d. $\log_p t = x$

e. $\log_a w = m + n$ f. $\log_{a+b} c = n$ g. $\log_{a^2}(y+z) = x$ h. $\log_x 64 = 2$

i. $\log_{10}(0.01) = -2$

4. a. $2^5 = 32$ b. $x^4 = b$ c. $3^{-2}=\frac{1}{9}$ d. $25^m = 5$

e. $2^y = m + n$ f. $(m+n)^{-3} = B$

5. a. Se cumple b. No se cumple c. No se cumple d. Se cumple

e. Se cumple f. Se cumple

6. a. 3 b. 4 c. 9

7. a. $x = 3$ b. $x=\frac{1}{25}$ c. $x=\frac{1}{4}$ d. $x = -4$

e. $x = 253$ f. $x = 6$ g. $x=\frac{2}{3}$

h. $x = \log_5(\log_4 100) - 4$

8. a. Se cumple b. Se cumple

9. a. $\log(x+1)+\log(x-1)-\log(x+4)-\log(x-4)$ b. $2\log_b x-\log_b(x^3+1)$

c. $\ln x+2\ln(x+2)-4\ln(x-2)$ d. $\frac{1}{2}\log_b(x^2+1)-2\log_b x-\log_b 3$

10. $z=a^{\frac{30}{7}}$

## EJERCICIO 1.19

1. a. $x=3$ b. $x=4$ c. $x=\frac{1}{2}\ln 2$

2. a. $x=4$ b. $x=3$ c. $x=5$

d. $x=4$ e. $x=-5, x=4$ f. $x=1, x=1\pm\sqrt{2}$

# CAPITULO 2

## EJERCICIO 2.1

1. a. $-72$ b. $15a+10$ c. $|x|\sqrt{x^2+6}$

d. $\sqrt{(x^2+10x+16)^2-9}$ e. $f$ no se puede evaluar en $g(2\sqrt{2})$ pues $g(2\sqrt{2})\notin\mathbb{R}$

f. 4

2. a. $f(3)=6, f(-5)=-2, f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+3, f(2x+5)=2x+8$

b. $f(3)=b, f(-5)=b-40, f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{bx^2+3x-1}{x^2}, f(2x+5)=-4x^2-14x-10+b$

c. $f(3)=\ln(10)$, $f(-5)$ no está definida, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\ln(x+3)-\ln(x), f(2x+5)=\ln(6x+16)$

d. $f(3)=0, f(-5)=4, f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt{1-9x^2}}{|x|}, f(2x+5)=2\sqrt{x^2+5x+4}$

e. $f(3)$ no está definida, $f(-5)=e^{-\frac{1}{8}}, f\left(\frac{1}{x}\right)=e^{\frac{x}{1-3x}}, f(2x+5)=e^{\frac{1}{2x+2}}$

f. $f(3)=64, f(-5)=576, f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(x^2-1)^2}{x^4}, f(2x+5)=16(x^2+5x+6)^2$

3. a. $\frac{18}{5}$ b. 2, 4 c. No tiene preimagenes en $\mathbb{R}$.

d. No tiene preimagenes en $\mathbb{R}$. e. $-1, 2$ f. No tiene preimagenes en $\mathbb{R}$.

4. a. 9 b. 8

## EJERCICIO 2.2

1. a. $q(x)=3x^2+12x+14, r=35$ b. $q(x)=3x^2+x-8, r=24$ c. $q(x)=2x^2-4x+3, r=\frac{25}{2}$
2. $f(-10)=-660$, $f(-5)=0$, $f(-2)=36$, $f(-1)=24$, $f(0)=10$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(5)=120$, $f(10)=1080$. Los factores de $f(x)$ son $(x+5)$, $(x-1)$, $(x-2)$
3. $k=-5$
4. a. $k=-10$ b. $k=-1996$
5. Para $f(x)=14x^{99}-65x^{56}+51$ tenemos
   $f(1)=14(1)^{99}-65(1)^{56}+51=14-65+51=0$, luego $(x-1)$ es factor de $f(x)$.
6. Si $n$ es impar $(-a)^n=-a^n$ para todo $a\in\mathbb{R}$, luego $f(-a)=0$ y así $f(x)=x^n+a^n$ es divisible por $x+a$ si $n$ es impar.

## EJERCICIO 2.3

1. a. $-2, 2$ b. $-2, 1$ c. $2, 1$ d. $1, 2, 5$ e. $-2, 2$ f. $-2, 4$
2. a. $(x-2)(x+2)(x^2+3)$ b. $(x-2)(x^2+2x+10)$ c. $(x+1)^2(x+2)(x-4)$

   d. $(x+1)(x^2+x+1)$
3. a. $\frac{1}{3}$ b. 2 c. $2, 3, -4$ d. 1
4. a. $(2x+1)(3x-1)(5x+2)$ b. $(x-2)(x+3)(2x+1)$

   c. $(3x+1)(4x-1)(5x-1)$ d. $(x+1)(3x-1)(5x+2)$
5. a. ln2. b. $-$ln2.
6. a. Considere el polinomio $f(x)=x^2-3$, del cual $\sqrt{3}$ es una raíz. Pero por el teorema de las raíces racionales las posibles raíces racionales de $f$ son: $\pm1$, $\pm3$ y ninguna corresponde a $\sqrt{3}$, por lo tanto $\sqrt{3}$ debe ser irracional.

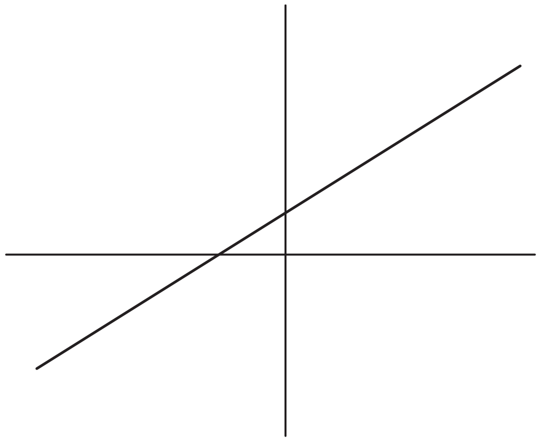
b. Considere el polinomio $f(x) = x^3 - 18$, del cual $\sqrt[3]{18}$ es una raíz. Pero por el teorema de las raíces racionales las posibles raíces racionales de $f$ son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$ y ninguna corresponde a $\sqrt[3]{18}$, por lo tanto $\sqrt[3]{18}$ debe ser irracional.

c. Puede verse que $x = \sqrt{2} - \sqrt{5}$ es una raíz del polinomio $f(x) = x^4 - 14x^2 + 9$ (este polinomio se obtiene elevando al cuadrado dos veces en la expresión $x = \sqrt{2} - \sqrt{5}$). Pero por el teorema de las raíces racionales las posibles raíces racionales de $f$ son: $\pm 1, \pm 3$ y ninguna corresponde a $\sqrt{2} - \sqrt{5}$, por lo tanto $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ debe ser irracional.

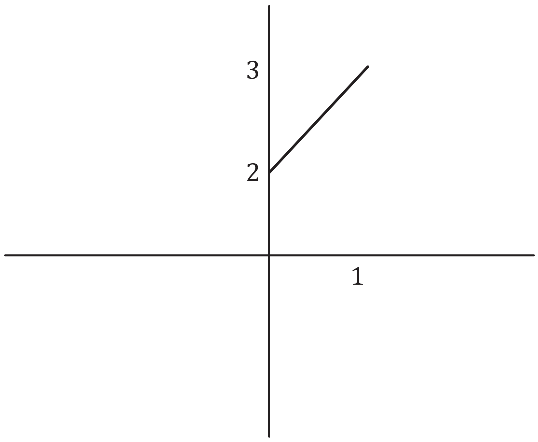
d. Considere el polinomio $f(x) = x^2 - n$ y $\sqrt{n}$ es una raíz de éste. Si n no es un cuadrado, ninguna de las posibles raíces racionales podrá coincidir con $\sqrt{n}$. Por tanto, $\sqrt{n}$ debe ser irracional.

## EJERCICIO 2.4

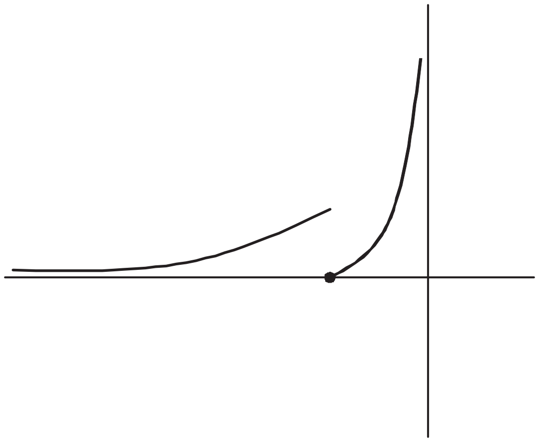
1. a.



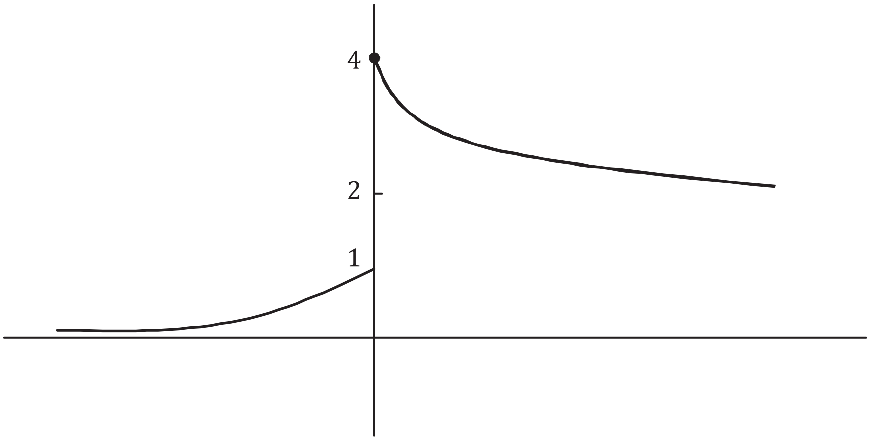
b .



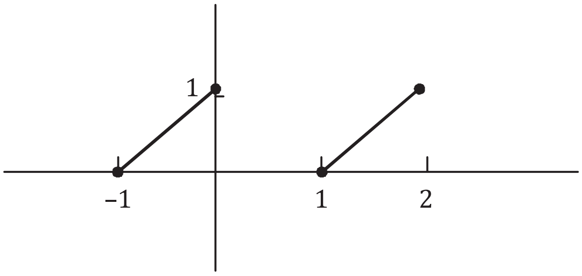
c.



d.




e.




2. Dadas las siguientes gráficas, encuentre su dominio y recorrido. Algunas de ellas están definidas a trozos, identifíquelas.

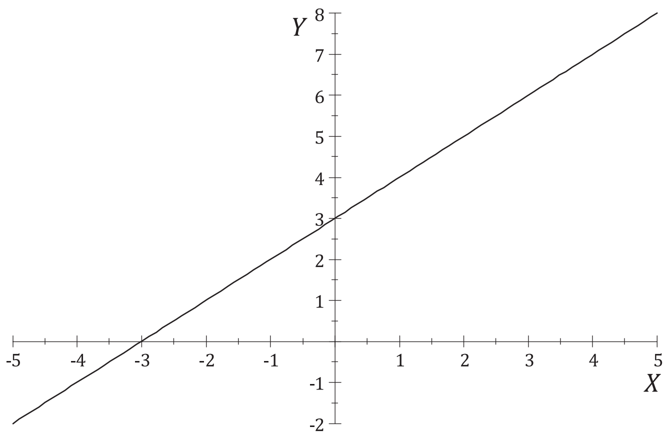
   a. $Dom(f) = (-\infty, 1)$, $Rec(f) = (0, \infty)$

   b. $Dom(f) = (-1, 1]$, $Rec(f) = [0, 1)$

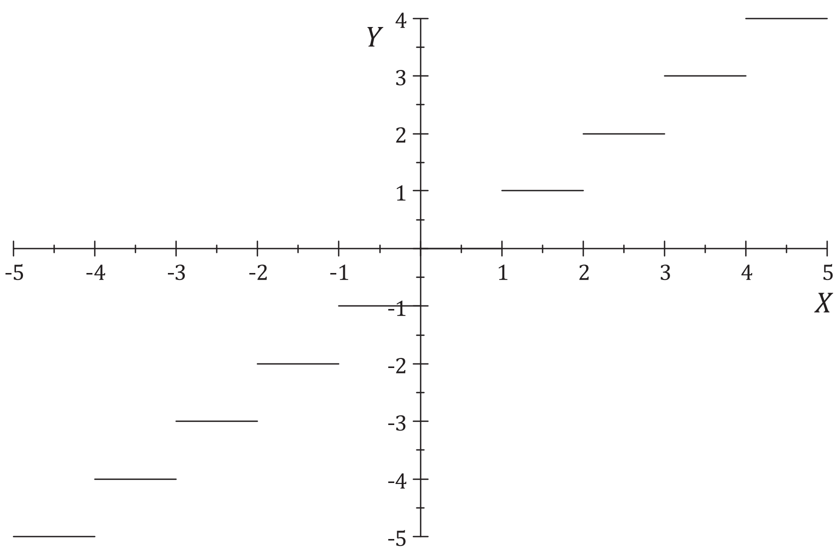
   c. $Dom(f) = (0, 2) \cup (2, 3]$, $Rec(f) = [0, 3]$

3. Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones definidas como aparecen a continuación.

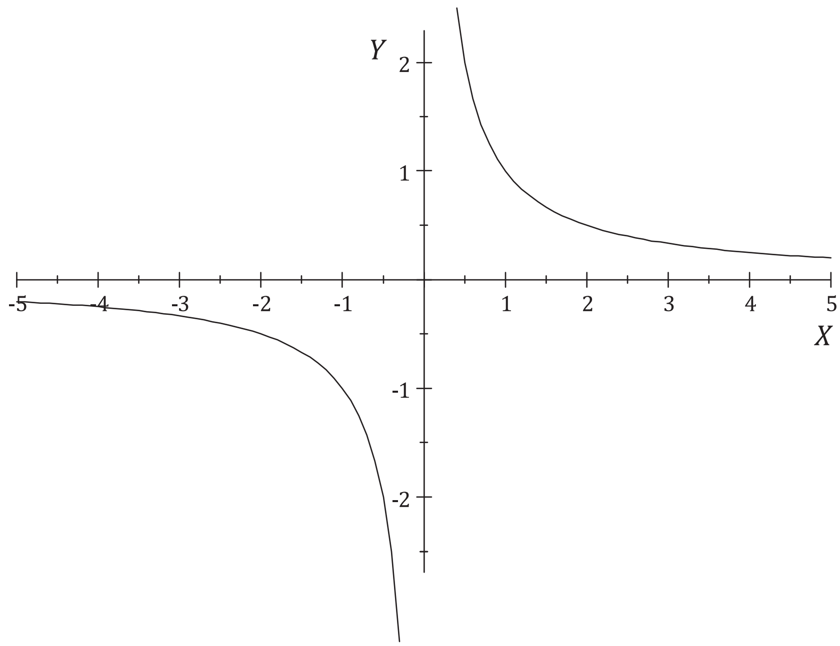
a.



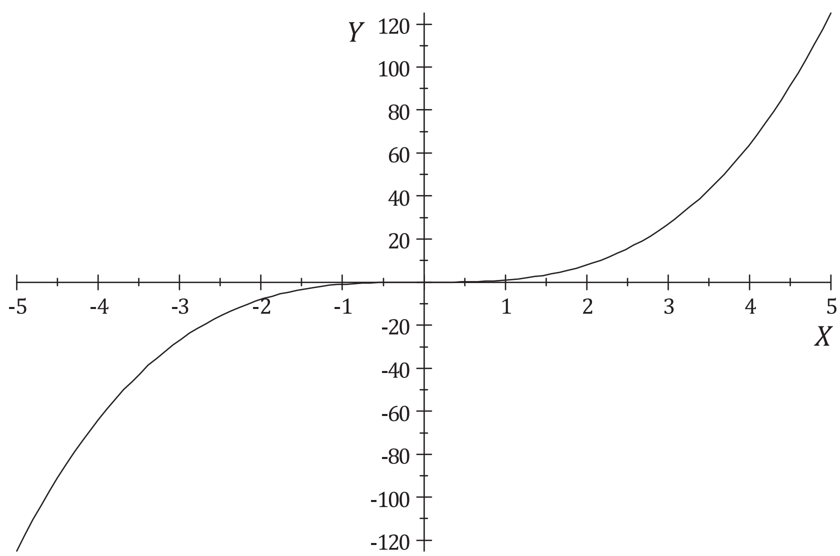

b.



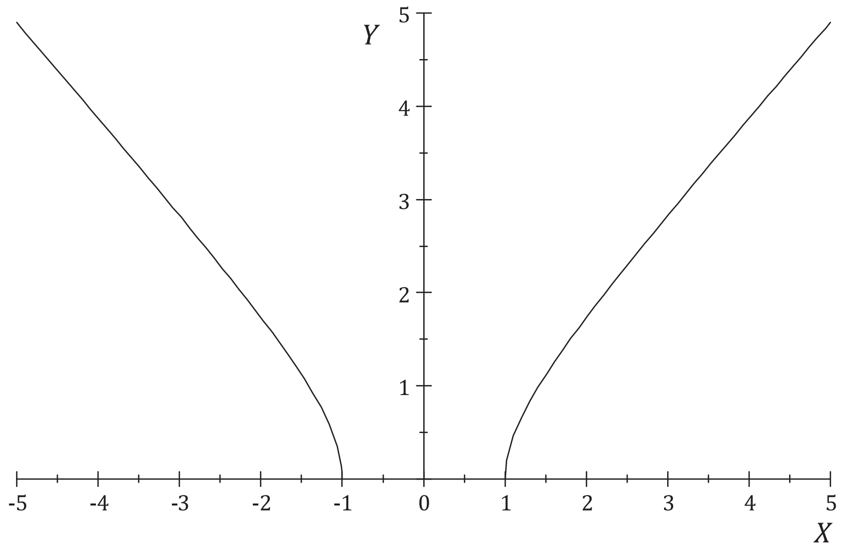
c.


Y
2
1
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
X

d.


Y
120
100
80
60
40
20
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
X

e.




## EJERCICIO 2.5

1. a. $(f+g)(3)=k+2$, $(f-g)(2)=15-x$, $(fg)(-2)=k+6$, $\left(\frac{f}{g}\right)(-5)=\frac{-5}{k+15}$

   b. $(f+g)(x)=k-x+5$, $(f-g)(x)=5x-k+5$, $(fg)(x)=-6x^2+(2k-15)x+5k$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{2x+5}{k-3x}$

2. a. $Dom(f)=(-\infty,-1)\cup[0,1]\cup(2,\infty)$
   $Dom(g)=(-\infty,1)\cup[1,3]\cup(4,\infty)$.

   b. $f(3)=6$, $f(1)=1$, $g(2)=0$ y $g(0)=1$.

   c.

$$(f/g)(x)=\begin{cases}(3x+1)/(x^2+1) & ,x<-1\\ x^2/(x^2+1) & ,0\leq x<1\\ -1 & ,x=1\\ 2x/(x-2) & ,2<x\leq 3\\ 2x/4 & x>4\end{cases}$$

$$(f+g)(x)=\begin{cases}(3x+1)+(x^2+1) & ,x<-1\\ x^2+(x^2+1) & ,0\leq x<1\\ 0 & ,x=1\\ 2x+(x-2) & ,2<x\leq 3\\ 2x+4 & x>4\end{cases}$$

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} (3x+1)(x^2+1) & ,x < -1 \\ x^2(x^2+1) & ,0 \leq x < 1 \\ -1 & ,x = 1 \\ 2x(x-2) & ,2 < x \leq 3 \\ 2x(4) & x > 4 \end{cases}$$

3. a. 268 b. 1158 c. 114 d. 2744 e. 394

   f. $8x^4 + 48x^2 + 78$ g. $14x^2 + 44$ h. $98x^2 + 56x + 14$ i. $49x + 16$

   j. $686x^2 + 392x + 100$

4. $(f \circ f \circ f)(x) = f\left(f\left(f(x)\right)\right) = f\left(f\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = f\left(1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) = f\left(\frac{-1}{x-1}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{-1}{x-1}} =$

   $1 + (x-1) = x$

5. a. $f(x)=(f_2 \circ f_1)(x)=f_2(f_1(x))$ donde $f_1(x)=3x-7$ y $f_2(x)=\sqrt[5]{x}$

   b. $f(x)=(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)=f_3(f_2(f_1(x)))$ donde $f_1(x)=3x^4-2x+4$, $f_2(x)=x^4$ y $f_3(x) = \frac{1}{x}$

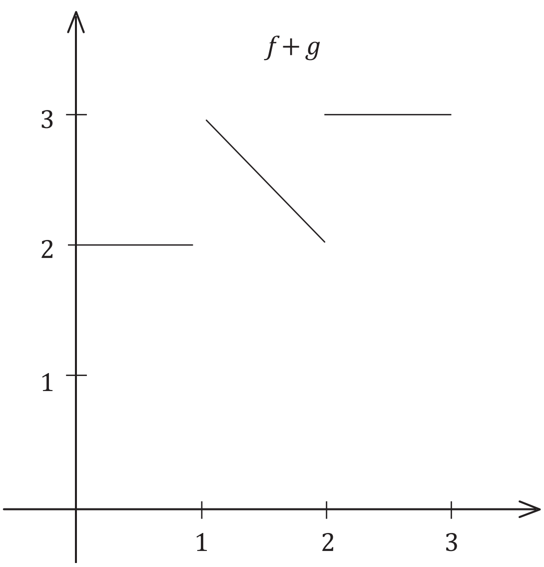
   c. $f(x)=(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)=f_4(f_3(f_2(f_1(x))))$ donde $f_1(x)=2x-1$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=\ln(x)$ y $f_4(x)=x^3$

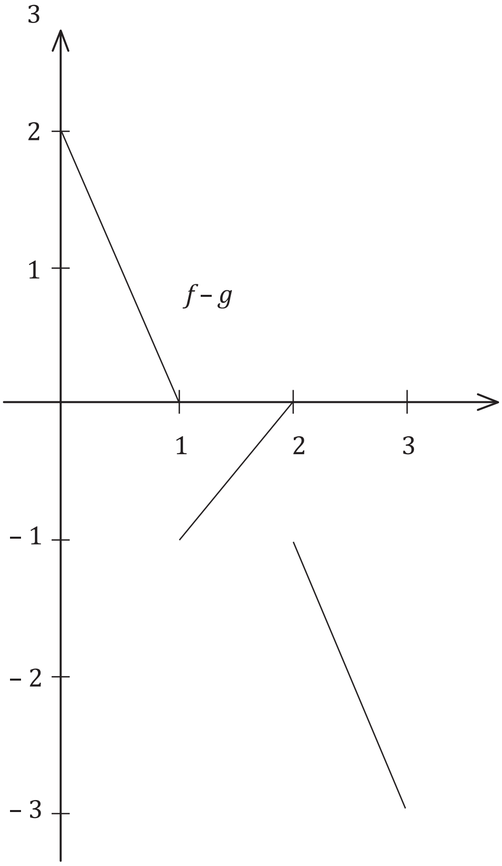
   d. $f(x)=(f_2 \circ f_1)(x)=f_2(f_1(x))$ donde $f_1(x) = \frac{(e^x-x)^2}{x^2+1}$ y $f_2(x) = \sqrt{x}$

6. a., b., d., e.

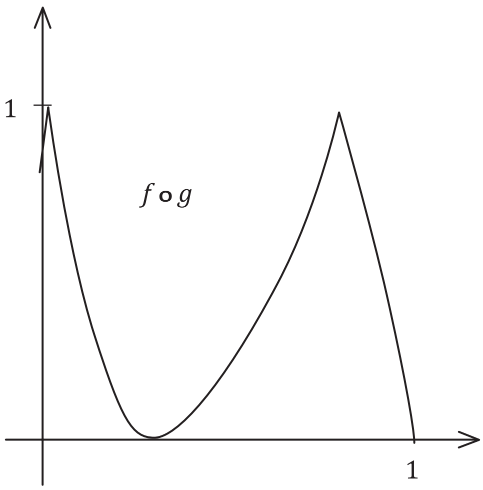
7. a. $m$. b. $2x+h$. c. $\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ d. $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)h}+\sqrt[3]{x^2}}$

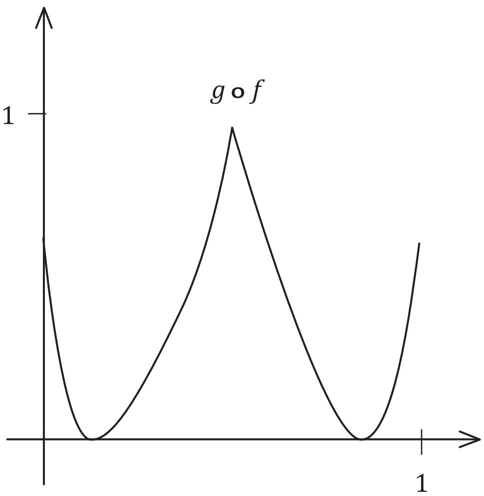
8.






9.



10. a. $i, f, g, h \in \Im$, entonces

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

b. Definamos

$$\begin{array}{llll} I_x: & X & \to & X \\ & x & \to & I_X(x) = x \end{array}$$

Entonces:

$(f \circ I_X)(x)=f(I_X(x))= f(x)$, así $I\, f \circ I_X = f$

$(I_X \circ f)(x)=I_X(f(x))= f(x)$, así $I_X \circ f = f$

Por tanto $I_X$ es un módulo en $(\Im, \circ)$

c. Veamos que si $f \in \Im$ y $f$ es biyectiva entonces existe $g \in \Im$ talque $f \circ g = g \circ f = I_X$.

Defínase

$$\begin{array}{llll} I_x: & X & \to & X \\ & x & \to & g(x) = y \end{array}$$

Donde:

$$f(y) = x \qquad (*)$$

Entonces $g$ es una función porque $f$ es sobreyectiva, entonces dado $x \in X$ existe $y \in X$ talque $f(y) = x$ y además esta $y$ es única, en efecto sean $y_1, y_2 \in X$ tales que:

$$g(x) = y_1 \quad \text{y} \quad g(x) = y_2$$

Entonces $f(y_1) = f(y_2) = x$ y como $f$ es uno a uno entonces $y_1 = y_2$, por tanto $g$ es una función.

Además:

$f(g(x)) = f(y) = x$, por la definición de $g$ dada en (*).

Y si $g(f(x)) = l$, entonces por (*) tenemos que $f(l) = f(x)$ y como $f$ es uno a uno $x = l$. Así: $g(f(x)) = x$

Concluimos que $f \circ g = g \circ f = I_X$, donde $I_X$ es el módulo de $(\Im, \circ)$ definido en b.

## EJERCICIO 2.6

1. a. $\mathbb{R}$ b. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ c. $\mathbb{R} - \{-3\}$ d. $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right) - \{2\}$

   e. $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, 3\right)$ f. $(-\infty, -5) \cup (7, \infty)$ g. $\mathbb{R} - \left\{\frac{9}{2}\right\}$

   h. $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right) - \{\ln 3, \ln 4\}$

2. a. $\mathbb{R}$ b. $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

   c. $(f \circ g)(x) = -x^2 + 18$, $Dm(f \circ g) = (-\infty, -3] \cup [3, 9]$

3. a. $Dm(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $Rec(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

   b. $Dm(f) = -4, \infty)$, $Rec(f) = [0, \infty)$

   c. $Dm(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, $Rec(f) = (-\infty, -8\,] \cup (0, \infty)$

   d. $Dm(f) = [-1, 1]$, $Rec(f) = [\,0, 1]$

   e. $Dm(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $Rec(f) = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$

   f. $Dm(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, $Rec(f) = \mathbb{R} - \{0, -1\}$

   g. $Dm(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = [4, \infty)$

   h. $Dm(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = [-2, \infty)$

4. a. $f(x) = \frac{x+4}{2}$ b. $f(x) = x^2 - x$ c. $f(x) = \frac{x + \sqrt{2x^2 - 1}}{2x}$

## EJERCICIO 2.7

1. Eje $X: x = 0$. Eje $Y: y = 0$.

2. Eje $X: x = \frac{7}{2}$. Eje $Y$: No corta al eje $Y$.

3. Eje $X: x = \ln 4$. Eje $Y: y = -18$.

4. Eje $X: x = 1$. Eje $Y$: No corta al eje $Y$.

5. Eje $X: x = 0, x = 4$. Eje $Y: y = 0$.

6. Eje $X: x = \frac{3}{2}, x = -\frac{3}{2}$. Eje $Y: y = -\frac{9}{4}$.

7. Eje $X: x = -3$. Eje $Y: y = -\frac{1}{2}$.

8. Eje $X$ : no tiene. Eje $Y$ : $y = -1$.

9. Eje $X$ : $x = 0$. Eje $Y$ : $y = 0$.

10. Eje $X$ : $x = 1, x=-1$. Eje $Y$ : $y = -1$.

## EJERCICIO 2.8

1. $f$ es uno a uno y $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

2. $g$ no es uno a uno..

3. $h$ es uno a uno $h^{-1}(x) = \frac{3x+4}{1-x}$.

4. $r$ es uno a uno y $r^{-1}(x) = \ln x$.

5. $f$ es uno a uno y $f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$.

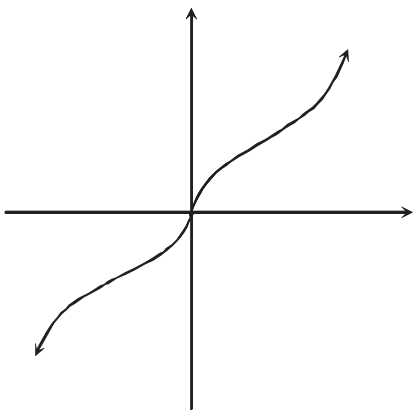
6. $f$ es uno a uno y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

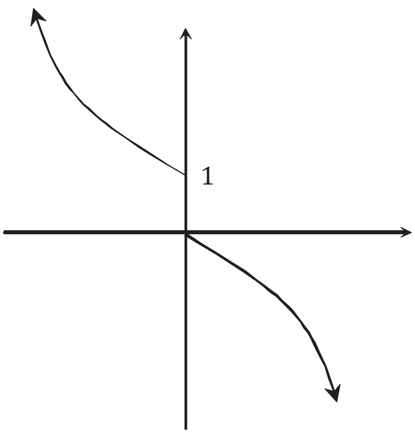
7. $f$ es uno a uno y $f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{x}$.

8. $f$ es uno a uno y $f^{-1}(x) = \frac{\ln y - 1}{2}$

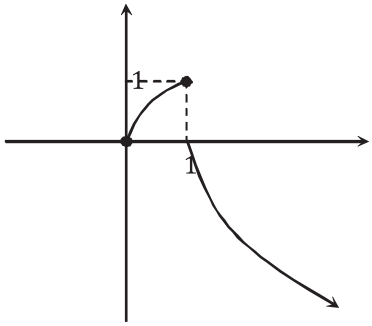
9. $f$ es uno a uno y $f$–1 $(x) = e^x + 9$.

10. $f$ no es uno a uno.

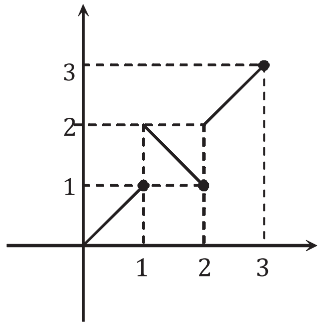
11. a. 

b. 

c.




d.




12. a. $$\begin{array}{llll} f: & Y & \to & X \\ & a & \mapsto & f(a)=1 \\ & b & \mapsto & f(b)=2 \\ & c & \mapsto & f(c)=3 \\ & d & \mapsto & f(d)=1 \end{array}$$

b. $$\begin{array}{llll} f: & Z & \to & X \\ & 2 & \mapsto & f(2)=a \\ & 4 & \mapsto & f(4)=a \\ & 6 & \mapsto & f(6)=b \end{array}$$

c. $$\begin{array}{llll} f: & Z & \to & X \\ & 2 & \mapsto & f(2)=a \\ & 4 & \mapsto & f(4)=b \\ & 6 & \mapsto & f(6)=c \end{array}$$

d. Si, $$\begin{array}{llll} f: & X & \to & Y \\ & 1 & \mapsto & f(1)=a \\ & 2 & \mapsto & f(2)=b \\ & 3 & \mapsto & f(3)=c \end{array}$$

e. No.

f. No.

g. Si, $$\begin{array}{llll} f: & X & \to & Z \\ & 1 & \mapsto & f(1)=2 \\ & 2 & \mapsto & f(2)=4 \\ & 3 & \mapsto & f(3)=6 \end{array}$$

h. Si, la misma funcion del inciso g.

i. Si, la misma función del inciso g.

j. Si, $f$:

| | | |
|---|---|---|
| $Y$ | $\to$ | $Z$ |
| $a$ | $\mapsto$ | $f(a)=2$ |
| $b$ | $\mapsto$ | $f(b)=4$ |
| c | $\mapsto$ | $f(c)=6$ |
| $d$ | $\mapsto$ | $f(d)=2$ |

k. No.

## EJERCICIO 2.9

1. a. Par. b. Impar. c. Par. d. Impar.

   e. Ni par ni impar. f. Impar.

2. a. $Dm(f)=\mathbb{R}-\{0\}$, $Rec(f)=(0, \infty)$, $f$ no tiene intersecciones con los ejes, $f$ no es uno a uno, $f$ es par.

   b. $Dm(f)=\mathbb{R}$, $Rec(f)=(0, 1]$, $f$ no se interseca con el eje $X$, $f$ se interseca con el eje $Y$ en $(0, 1)$, $f$ no es uno a uno, $f$ es par.

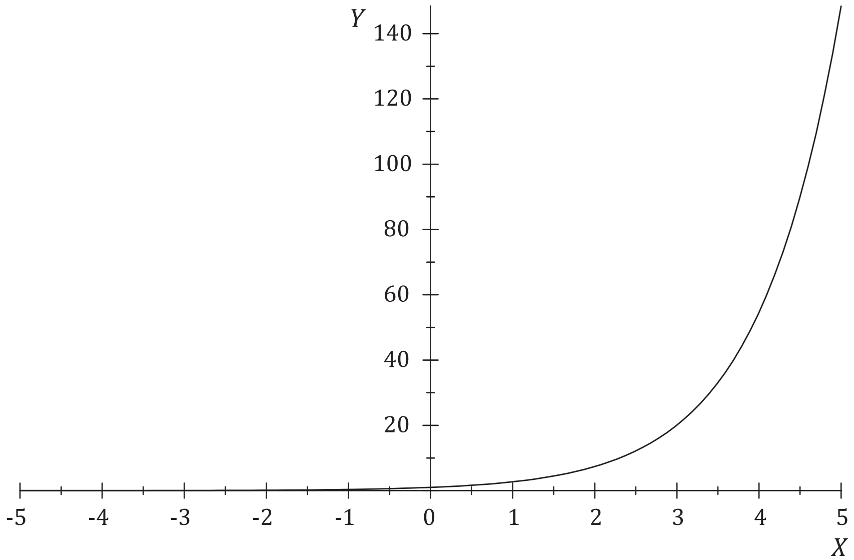
   c. $Dm(f)=\mathbb{R}$, $Rec(f)=(0, 1]$, $f$ no se interseca con el eje $X$, $f$ se interseca con el eje $Y$ en $(0, 1)$, $f$ no es uno a uno, $f$ es par.

   d. $Dm(f)=\mathbb{R}$, $Rec(f)=[-1/2, 1/2]$, $f$ se interseca con ambos ejes en $(0, 0)$, $f$ no es uno a uno, $f$ es impar.

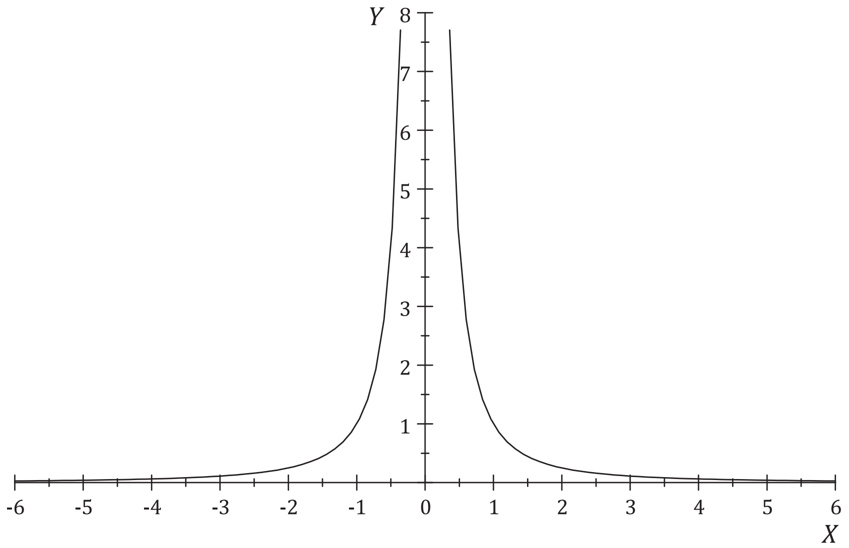
   e. $Dm(f)=\mathbb{R}$, $Rec(f)=(0, 1]$, $f$ no se interseca con en el eje $X$, $f$ se interseca con el eje $Y$ en $(0, 1)$, $f$ no es uno a uno, $f$ es par.

   f. $Dm(f)=\mathbb{R}$, $Rec(f)=[-1/4, \infty)$, $f$ se interseca con el eje $X$ en $(0, 0)$, $(-1, 0)$ y se interseca con el eje $Y$ en $(0, 0)$, $f$ no es par ni impar.

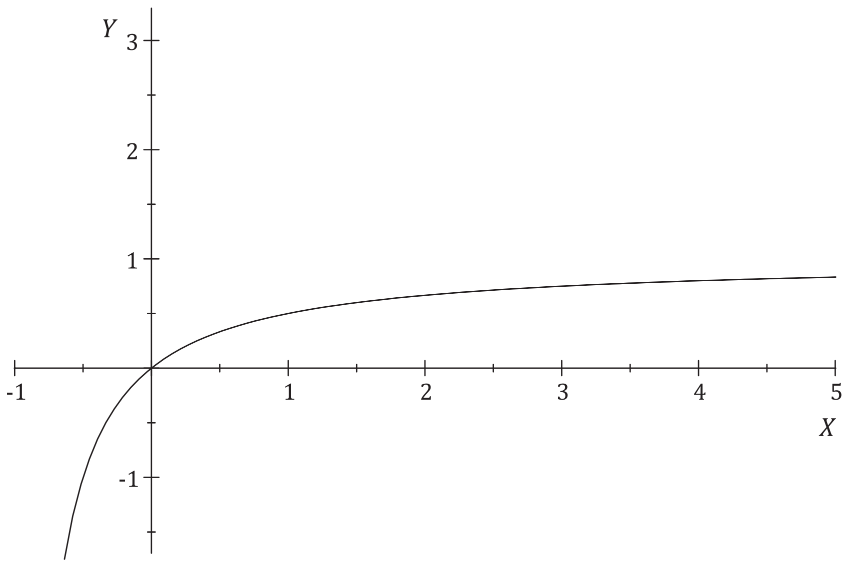
3. a.



b.




c.




4. a. Dom($f$)=[−4, 4], Rec($f$)=[0, 1], no es uno a uno, es par, es acotada, es periódica.

b. Dom($f$)=[−3, 3], Rec($f$)=[−1, 1], no es uno a uno, es par, es acotada, no es periódica.

c. Dom($f$)=(−2, −1]∪(0, 1]∪(2, 3], Rec($f$)=[0, 1), no es uno a uno, no es par, es acotada.

d. Dom($f$)=(−5, −1)∪(−1, 3), Rec($f$)=(−∞, 2], no es uno a uno, no es par, no es acotada, no es periódica.

5. a. Sean $f$ y $g$ funciones pares: $f(-x)=f(x)$ y $g(-x)=g(x)$, entonces $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$.

   b. Sean $f$ y $g$ funciones impares: $f(-x)=-f(x)$ y $g(-x)=-g(x)$, entonces $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f+g)(x)$.

   c. Sean $f$ y $g$ funciones pares: $f(-x)=f(x)$ y $g(-x)=g(x)$, entonces $(f\circ g)(-x)=f(g(-x))=f(g(x))=(f\circ g)(x)$.

## EJERCICIO 2.10

1. a. $y=-5x+44$ b. $y=-\frac{9}{10}x+\frac{7}{10}$ c. $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

   d. $y=-\frac{3}{5}x+10$ e. $y=-2x+1$ f. $y=-x+3$

   g. $y=\frac{2}{5}x+\frac{32}{5}$

2. a. Ingresos, $I(x)=10000x$
   Costos, $C(x)=5000x+4000000$
   $x$: Número de unidades.

   b. (800, 8000000)

   c. $U(x)=5000x-4000000$ d. 1100 unidades

3. a. $p+q=100$ es la ecuación de demanda y $p-q=20$ es la ecuación de oferta.

   • En la ecuación de demanda $p+q=100$ el coeficiente de $q$ es 1, es decir por cada unidad que se demande, el precio se disminuye en 1 y el término independiente de la ecuación es 100, es decir, el mayor precio que puede tomar el producto es 100.

   • En la ecuación de oferta $p-q=20$ el coeficiente de $q$ es $-1$, es decir, por cada unidad que se ofrezca, el precio del producto aumenta en 1 y el término independiente de la ecuación es 20, es decir, el menor valor que puede tomar el producto es 20.

   b. Si en $p+q=100$ hacemos $p=40$ entonces $q=60$, luego hay exceso de demanda.

   Si en $p-q=20$ hacemos $p=80$ entonces $q=60$, luego hay exceso de oferta.

   c. El punto de equilibrio es $p=60$, $q=40$.

4. a. $v(t)=-800000t+12000000$, $D(t)=800000t$ con $0\leq t\leq 15$

   b. $v(t)=6400000$, $D(7)=5600000t$

5. a. $C(x)=6000x+5000000$, $I(x)=11000$

   b. El punto de equilibrio es (1000, 11000000)

c. $U(x)=5000x-5000000$, donde 5000 es la utilidad por unidad vendida y $U(0)=-5000000$, es decir, que si no se venden utilidades, se pierden 5000000.

d. 1400 unidades.

6. a. $C(x)=1000x+1400000$, $I(x)=3000x$ b. (700, 2100000)

c. $U(2500)=3600000$ d. 950 unidades.

7. a. La ecuación de demanda es $2p+q=240$, donde el precio máximo que los consumidores están dispuestos a pagar es \$120 pues para $q=0$, $2p=240$ o bien $p=120$. Además la ecuación también nos dice que por cada 2 unidades que se demanden del artículo, el precio disminuye en \$1. Por otro lado la ecuación de oferta $p-q=30$, donde el precio mínimo en el que el vendedor está dispuesto a ofrecer el artículo es \$30 y además la cantidad ofrecida aumenta en una unidad cuando el precio del artículo aumenta en una unidad.

b. Cuando el precio es $p=\$40$ la cantidad de demanda es 180, luego hay exceso de demanda y cuando el precio es $p=\$100$ la cantidad ofrecida es 70, luego hay exceso de oferta.

c. El punto de equilibrio viene dado por $p=90$, $q=60$.

8. Ecuación de oferta: $-q+4p=40$; Ecuación de demanda: $q+2p=200$.
El punto de equilibrio es $p=40$, $q=120$

9. a. $v(t)=-1200000t+18000000$, $0 \leq t \leq 15$ b. 13200000 c. 5 años.
Dadas las ecuaciones $2p+q=240$ y $p-q=30$.

10. $C(x)=5.5x+30$; US\$ 465

11. a. 5000000 b. Sí, porque la utilidad mínima es de \$4000000.

## EJERCICIO 2.11

1. a. $U(x)=-\frac{1}{2}x^2+5000x-8000000$, donde $x$ es el número de unidades demandadas.

b. Gráfica de $U(x)=-\frac{1}{2}x^2+5000x-8000000$:

c. 5000 unidades.

2. a. Ecuación de oferta: $5p-2q=1$; Ecuación de demanda: $25p+q^2=269$

b. El punto de equilibrio viene dado por $p=5$, $q=12$

c. Si $p=7$ entonces hay una cantidad ofrecida de $q=17$, luego hay exceso de oferta y la cantidad demandada es $q=\sqrt{94}<10$, entonces hay una demanda baja.

3. a. Ecuación de oferta: $p=q^2+4q+3$; Ecuación de demanda: $p=-q^2+33$

   b. Si la cantidad ofrecida es $q=2$, el precio es $p=15$ el cual es muy bajo y los proveedores no podrán vender. Si la cantidad ofrecida es $q=5$, el precio es $p=48$ el cual es muy alto y entonces la demanda será muy baja. Si la cantidad demandada es $q=5$, el precio es $p=8$ el cual es muy bajo y entonces a los proveedores no le es rentable vender.

   c. El punto de equilibrio viene dado por $q=3$, $p=24$.

4. a. $p=5$, $x=30$ b. $p=4$, $x=3$.

## EJERCICIO 2.12

1. a. \$1.41158 b. \$1.425761 c. \$1.4331 d. \$1.4333

2. La tasa de crecimiento por minuto es $\frac{1}{30}\ln 4$. En una hora hay 80000 bacterias.

3. a. Aproximadamente 91106000 millones de habitantes

   b. Aproximadamente 35 años después.

4. \$19863.41

5. $V(t)=20000000e^{0.8-0.08t}$; la maquinaria se deprecia en 20.118 años. La depreciación acumulada del valor de la máquina en función del tiempo, viene dada por:

   $D(t)=20000000e^{0.8}(1-e^{-0.08t})$

6. a. 20.14 años b. 17.08 años c. 30.51 años

7. a. 7.498571 millones b. 9.540281472 millones

8. 1.396081975 millones

9. a. 28.07 meses b. 19.43 meses c. 8% aprox.

   d. 1.244% aprox.

10. a. 308.56 dólares b. 18 años aprox.

## EJERCICIO 2.13

En los ejercicios del 1 al 6 construir el modelo matemático de acuerdo a la información dada

1. Área $= A = x(10 - x)$.
2. $\overline{C}(x) = 350 + \frac{24500}{x}$.
3. $P(t) = \left(\sum_{i=o}^{t}(0.04)^i\right)P_0$.
4. $I(x) = \frac{200x}{1+0\ 05x}$.
5. Área $= A(x) = 2r^2$.
6. Área $= A(x) = x(100 - x)$.
7. a. $50x^2$ b. $500x^2 + 60000x$
8. Área $= A(x) = \frac{x\sqrt{400-x^2}}{2}$
9. Área $= A(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$
10. $x^2 + (25-x)^2$
11. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-12}\right)^2$
12. Volumen $= V(x) = x(1 - 2x)^2$
13. Área $= A(x) = \frac{4x^2+320x}{x-8}$
14. $\frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}(100-x)^2}{36}$
15. $\frac{x^2}{16} + \frac{(100-x)^2}{4\pi}$
16. $2\left(\pi r^2 + \frac{10}{r}\right)$
17. a. $x = 30,\ p = 20$ b. US$ 600000

## 2.13 Ejercicios de repaso

1. a. $p+2q=13000$ b. \$13000 c. 4250 unidades d. \$2500
2. a. $v(t)=-4000000t+50000000,\ 0\leq t\leq 10$

   b. 10000000 c. 6 años.
3. $y_c=150+7x$, el costo de fabricar 100 sillas al día es US\$ 850.
4. a. $C(x)=3x+45$, $x$ : número de unidades del artículo. b. US\$ 105

   c. El costo fijo es US\$ 45 y el costo variable por artículo es de US\$ 3.
5. $y_c=10x+150$
6. 800 artículos
7. a. 2000 unidades b. 2400 unidades c. Se pierden US\$ 1250
8. a. $x=500$ artículos b. US\$ 4.14
9. $x=20$ artículos ó $x=40$ artículos.
10. 17 años; $v(t)=-750t+1500$; $V(t)=$US\$ 10500
11. $p=1.7-0.00005x$
12. $p=0.00025x+0.5$
13. a. $p=-0.06x+42$ b. $p=$ US\$ 33, $x=150$ artículos
14. $y_c=25x+3000$; US\$ 5500
15. a. $y_c=4x+2500$ b. $x=2000$ unidades c. $x=2160$ unidades
16. a. $y=\frac{5}{9}(x-32)+273$, expresa °$K$ en función de grados Fahrenheit °$F$.

    b. Si $d$ es la diagonal de un cuadrado, Área del cuadrado: $A(x)=\frac{d^2}{2}$

    c. $v(t)=\frac{4}{3}\pi\left(t+\sqrt{2t}\right)^3$

# CAPÍTULO 3

## EJERCICIO 3.1

1. a. Graficar $f(x) = 2^{-x}$. Esta función es uno a uno en $\mathbb{R}$.

   b. Graficar $f(x) = \frac{1}{x^2}$

   c. Graficar $f(x) = b - \frac{1}{\sqrt{x-a}}, a < 0, b = \frac{1}{\sqrt{-a}}$

   d. Graficar

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x < 0 \\ e^{-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)} & , x \geq 0 \end{cases}$$

   e. Graficar $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

   f. Graficar $f(x) = \frac{1}{x^2}$

   g. Graficar $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

   h. Graficar

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & , x < 0 \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$$

   i. Graficar $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

   j. Graficar

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 & \text{si} -1 < x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Veamos que las condiciones dadas no garantizan que la función sea uno a uno o decreciente. Si definimos:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2 & \text{si} -1 < x \leq 0 \\ 2 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Entonces Dm($g$)=(−1, 1), Rec($g$)=, $g$ es cóncava hacia arriba en (−1, 0) y cóncava hacia abajo en (0, 1) pero $g$ no es uno a uno porque $g(0) = -1 = g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ y $g$ tampoco es decreciente porque $0 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ y sin embargo $g(0) = -1 < 0 = g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

k. Graficar

$$\begin{array}{llll} f: & (-1,1) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \arcsin(x) \end{array}$$

Nótese que $|f(x)| = |\arcsin(x)| < \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in (-1, 1)$, luego $f$ es acotada. Además $f$ es uno a uno.

l. Graficar

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Nótese que $f$ es uno a uno y no es acotada.

2. a. Continua b. No continua c. No continua d. No continua

e. No continua f. No continua

3. Gráfica 1: a. Dm($f$)=ℝ b. Rec($f$)=[−1, ∞) c. $f$ no es uno a uno

d. $f$ es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, creciente $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ y cóncava hacia abajo en ℝ

e. El punto $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ es un mínimo absoluto de $f$.

Gráfica 2: a. Dm($f$)=ℝ b. Rec($f$)=[−1, ∞) c. $f$ no es uno a uno

d. $f$ es decreciente en (−∞, −1), creciente (−1, ∞), cóncava hacia abajo en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\mathbb{R} \setminus \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

e. El punto (−1, −1 ) es un mínimo absoluto de $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ es un punto de inflexión.

Gráfica 3: a. Dm($f$)=ℝ b. Rec($f$)=[0, ∞) c. $f$ no es uno a uno

d. $f$ es decreciente en (−∞, 0), creciente (0, ∞) y cóncava hacia abajo en ℝ

e. El punto (0, 0) es un mínimo absoluto de $f$.

Gráfica 4: a. $\mathrm{Dm}\,(f) = \left[-2, \frac{3}{2}\right]$ b. Rec($f$)=[−1, 1) c. $f$ no es uno a uno

d. $f$ es decreciente en (—1.4, 1), creciente (—2, —1.4) ∪ (1, 1.5), cóncava hacia abajo en [—2, 0) y cóncava hacia arriba en (0, 1.5)

e. El punto (—1.4, 1) es máximo absoluto de $f$, el punto (1, —1) es mínimo absoluto de $f$ y (0, 0) es un punto de inflexión.

Gráfica 5: a. Dm($f$)=ℝ\{—1, 1} b. Rec($f$)=ℝ c. f no es uno a uno

d. $f$ es decreciente en (—∞, —1),(—1, 0),(2, ∞), creciente (0, 1), (1, 2), cóncava hacia abajo en (—∞, —1), (1, 0) y cóncava hacia arriba en (—1, 1)

e. El punto (0, 1) es un mínimo local de $f$.

Gráfica 6: a. Dm($f$)=ℝ b. Rec($f$)=[—2, 2]

c. $f$ es periódica, por tanto no es uno a uno

d. $f$ es decreciente en los intervalos [—1+2$n$, 1+2$n$], con n entero impar, es creciente en los intervalos [—1+2$n$, 1+2$n$], con $n$ entero par, cóncava hacia abajo en [2$n$, 2$n$+2], con $n$ entero par y cóncava hacia arriba en [2$n$, 2$n$+2] con $n$ entero impar

e. Los puntos (2$n$, $f$(2$n$)) son de inflexión, donde $n$ es un entero par, los puntos (1+, $f$(1+$n$)) son máximos absolutos, con $n$ entero par, y mínimos absolutos si $n$ es entero impar.

Gráfica 7: a. Dm($f$)=ℝ\{0} b. Rec($f$)=[2, ∞) c. $f$ no es uno a uno

d. $f$ es decreciente en los intervalos (—1, 0), (1, ∞), cóncava hacia arriba en ℝ\{0}

e. (1, 2 ), (—1,2) son mínimos para $f$.

Gráfica 8: a. Dm($f$)=ℝ b. Rec($f$)=(—1, 1) c. $f$ es uno a uno

d. $f$ es creciente ℝ, cóncava hacia arriba en (—∞, 0), cóncava hacia abajo en (0, ∞)

e. (0, 0) es un punto de inflexión para $f$.

4. a. Verdadero: Supóngase que $f$ tiene máximo local. Entonces existen $c \in (a, b)$ y $\varepsilon>0$ tales que $(c-\varepsilon, c)\subseteq(a, b)$ y $(c, c+\varepsilon)\subseteq(a, b)$, $f$ es creciente en $(c-\varepsilon, c)$ y $f$ es decreciente en $(c, c+\varepsilon)$, es decir $f(x)<f(c)$ para todo $x\in (c-\varepsilon, c)$ y $f(c)>f(y)$ para todo $y \in (c, c+\varepsilon)$. Como $f$ es continua, deben existir $x_0\in (c-\varepsilon, c)$ y $y_0\in (c, c+\varepsilon)$ tales que $f(x_0) = f(y_0)$ y como los intervalos $(c-\varepsilon, c)$ y $(c, c+\varepsilon)$ son disjuntos, entonces $x_0 \neq y_0$. Es decir $f(x_0) = f(y_0)$ con $x_0 \neq y_0$, luego $f$ no es uno a uno.

b. Verdadero: Supóngase que $f(x)\neq0$ para todo $x \in (a, b)$. Como $f$ es continua en $(a, b)$ entonces $f(x)>0$ para todo $x \in (a, b)$ ó $f(x)<0$ para todo $x \in (a, b)$.
Por un lado si $f(x)>0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces no existe $x_1\in (a, b)$ con $f(x_1)<0$.
Por otro lado si $f(x)<0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces no existe $x_2\in (a, b)$ con $f(x_2)>0$

c. Falso: Sea

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$f$ es continua en (—1, 1), además $0 \in (-1, 1)$ y el punto (0, $f$(0) )=(0, 0) es un mínimo local para $f$. Sin embargo el punto (0, 0) no es mínimo absoluto porque $f(2) = -\frac{4}{3} < 0 = f(0)$.

d. Falso: Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-1, 0) \\ 2 - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } x \in [0, 1) \end{cases}$$

$f$ es continua en el intervalo $(-1, 1)$ y el punto $(0, f(0))=(0, 1)$ es un máximo absoluto para $f$, pero no es un mínimo relativo para $f$, porque $f$ no es creciente en $(-1, 1)$.

5. a. $f(x)=-x^4+2x^2-1$. $Dm(f)=\mathbb{R}$, $Rec(f)=(-\infty,0]$, $f$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$, decreciente en los intervalos $(-1, 0)$, $(1, \infty)$. Los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ son máximos absolutos y relativos de $f$. El punto $(0, -1)$ es un mínimo relativo de $f$. $f$ no tiene mínimos absolutos.

b. $f(x)=|x|+|x-3|$. $Dm(f)=\mathbb{R}$, $Rec(f)=[3, \infty)$, $f$ es creciente en $(3, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$. Los mínimos absolutos (no relativos de $f$) son todos los puntos del conjunto $\{(x, 3)|0\leq x\leq 3\}$. $f$ no tiene mínimos relativos ni máximos relativos o absolutos.

c. $f(x)=|x|-3$. $Dm(f)=\mathbb{R}$, $Rec(f)=[-3, \infty)$, $f$ es creciente en $(0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$. El punto $(0, 3)$ es mínimo absoluto y relativo para $f$. $f$ no tiene máximos relativos ni absolutos.

d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. $Dm(f)=(-\infty, -1]\cup[1, \infty)$, $Rec(f)=[0, \infty)$, $f$ es creciente en $(1, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1)$. Los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ son mínimos absolutos para $f$. $f$ no tiene mínimos ni máximos relativos y tampoco tiene máximos absolutos.

e. $f(x)=x^3-3$. $Dm(f)=\mathbb{R}$, $Rec(f)=\mathbb{R}$, $f$ es creciente en todo $\mathbb{R}$ y decreciente en $(-\infty, 0)$. $f$ no tiene máximos absolutos ni mínimos absolutos ni máximos relativos ni mínimos relativos.

f. $f(x)-x^3-9x$. $Dm(f)-\mathbb{R}$, $Rec(f)-\mathbb{R}$, $f$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -1.732)$, $(1, 732, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1.732, 1.732)$. El punto $(-1.732, 10.39)$ es un máximo relativo para $f$ y el punto $(1.732, -10.39)$ es un mínimo relativo para $f$. $f$ no tiene ni mínimos ni máximos absolutos.

g. $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}$. $Dm(f)=\mathbb{R}-\{-1, 1\}$, $Rec(f)=(0, \infty)$, $f$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$,$(0, 1)$ y decreciente en los intervalos $(-1, 0)$, $(1, \infty)$. $f$ tiene un mínimo relativo en el punto $(0, 1)$, $f$ no tiene ni mínimos ni máximos absolutos y tampoco máximos relativos.

h. $f(x)=2^{|x|}$. $Dm(f)=\mathbb{R}$, $Rec(f)=[1, \infty)$, $f$ es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. $f$ tiene un mínimo absoluto y relativo en el punto $(0, 1)$. $f$ no tiene máximos absolutos ni relativos .

i. $f(x)=3^{x^2}$. $Dm(f)=\mathbb{R}$, $Rec(f)=[1, \infty)$, $f$ es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. $f$ tiene un mínimo absoluto y relativo en el punto $(0, 1)$. $f$ no tiene máximos absolutos ni relativos .

j. $f(x)=x^3-3x-1$. $Dm(f)=\mathbb{R}$, $Rec(f)=\mathbb{R}$, $f$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$,$(1, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1, 1)$. $f$ tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 1)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, -3)$. $f$ no tiene ni mínimos ni máximos absolutos.

k. $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$. Dm($f$)=ℝ–{–2, 2}, Rec($f$) $=(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{4},\infty\right)$, $f$ es creciente en los intervalos (0, 2), (2, ∞) y decreciente en los intervalos (–∞, –2), (–2, 0). $f$ tiene un mínimo relativo en el punto (0, 0.25). $f$ no tiene máximos, ni absolutos ni relativos, ni tampoco tiene mínimos absolutos.

l. $f(x)=x^3-12x$. Dm($f$)=ℝ, Rec($f$)=ℝ, $f$ es creciente en los intervalos (–∞, –2),(2, ∞) y decreciente en el intervalo (–2, 2). $f$ tiene un máximo relativo en el punto (–2, 16) y un mínimo relativo en el punto (2, –16). $f$ no tiene ni mínimos ni máximos absolutos.

m. $f(x)=12+2x^2-4$. Dm($f$)=ℝ, Rec($f$)=[ 8, ∞), $f$ es creciente en el intervalo (0, ∞) y decreciente en el intervalo (–∞, 0). $f$ tiene un mínimo absoluto y relativo en el punto (0, 8). $f$ no tiene máximos, ni absolutos ni relativos.

n. $f(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$. Dm($f$)=ℝ, Rec($f$)=[0, 2), $f$ es creciente en el intervalo (0, ∞) y decreciente en el intervalo (–∞, 0). El punto (0, 0) es un mínimo absoluto y relativo para $f$. $f$ no tiene máximos, ni absolutos ni relativos.

o. $f(x)=\frac{4x}{x^2-4x+3}$. Dm($f$)=ℝ–{1, 3}, Rec($f$)=(–∞, –7.4641]∪[–0.5359, ∞), $f$ es creciente en los intervalos (–∞, 1), (1, 1.732) y decreciente en los intervalos (1.732, 3), (3, ∞). $f$ tiene un mínimo relativo en el punto (–1.732, –0.5359) y un máximo relativo en el punto (1.732, –7.4641). $f$ no tiene ni mínimos ni máximos absolutos.

## EJERCICIO 3.2

1. a. Probar que $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-4)=6$

Sea ε>0 y tómese $\delta=\frac{1}{2}\left(-7+\sqrt{49+4\varepsilon}\right)$. Si 0<|$x$–2|<δ entonces

$|x+5|=|(x-2)+7|\leq|x-2|+7<\delta+7$

Luego:

$|(x^2+3x-4)-6|=|x^2+3x-10|=|(x+5)(x-2)|=|x+5||x-2|<(\delta+7)\delta$

Así:

$$\begin{aligned}
|(x^2+3x-4)-6| &< (\delta+7)\delta\\
&= \delta^2+7\delta\\
&= \left(\frac{1}{2}\left(-7+\sqrt{49+4\varepsilon}\right)\right)^2+\frac{1}{2}\left(-49+7\sqrt{49+4\varepsilon}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(49-14\sqrt{49+4\varepsilon}+49+4\varepsilon\right)+\frac{1}{4}\left(-98+14\sqrt{49+4\varepsilon}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(98-14\sqrt{49+4\varepsilon}+4\varepsilon\right)+\frac{1}{4}\left(-98+14\sqrt{49+4\varepsilon}\right)\\
&= \frac{1}{4}(4\varepsilon)=\varepsilon
\end{aligned}$$

Que era lo que se quería demostrar.

b. Probar que $\lim_{x\to 2}(3x-5)=1$

Sea ε>0 y tómese $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. Si $0<|x-2|<\delta$ entonces

$$|(3x-5)-1|=|3x-6|=3|x-2|<3\delta=3\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

Que era lo que se quería demostrar.

c. Probar que $\lim_{x\to 9}\sqrt{x}=3$

Sea ε>0 y tómese δ=3ε. Entonces para todo $x\geq 0$ tal que $0<|x-9|<\delta$ se tiene que

$$|\sqrt{x}-3|=\left|\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3}\right|=\left|\frac{(x-9)}{\sqrt{x}+3}\right|<\frac{\delta}{\sqrt{x}+3}<\frac{\delta}{3}=\frac{3\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

Así queda demostrada la afirmación.

d. Probar que $\lim_{x\to 2}|x|=2$

Sea ε>0 y tómese δ=ε. Entonces para todo $x\in\mathbb{R}$ tal que $0<|x-2|<\delta$ se tiene que

$$|(|x|-2)|\leq|x-2|<\delta=\varepsilon$$

Así queda demostrada la afirmación.

e. Probar que $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$

Sea $0<\varepsilon<1$ y tómese δ=ε. Entonces para todo $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, tal que $0<|x-2|<\delta$ se tiene que $-\delta<x-2<\delta$, o bien, $-\delta+2<x<\delta+2$ y como $2-\delta=2-\varepsilon>1$, entonces

$$0<\frac{1}{2+\delta}<\frac{1}{x}<\frac{1}{2-\delta}<1$$

Así:

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2-x}{2x}\right|=\frac{|x-2|}{2|x|}<\frac{\delta}{2|x|}<\frac{\delta}{2}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Si $\varepsilon\geq 1$, tómese $\delta=\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$. Se sabe que para todo $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, tal que $0<|x-2|<\delta$ se tiene que $2-\delta<x<\delta+2$ y como $2-\delta=2-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}>1$, entonces

$$0<\frac{1}{\delta+2}<\frac{1}{x}<\frac{1}{2-\delta}=\frac{1}{2-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}}=\frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}<1$$

Así:

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2-x}{2x}\right|=\frac{|x-2|}{2|x|}<\frac{\delta}{2|x|}<\frac{\delta}{2}<\delta=\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}<1<\varepsilon$$

Que era lo que se quería demostrar.

f. Probar que $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x-4)=-6$

Sea $\varepsilon>0$ y tómese $\delta=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+4\varepsilon}\right)$. Si $x\in\mathbb{R}$ y $0<|x-2|<\delta$ entonces

$$|x-1|=|(x-2)+1|\leq|x-2|+1<\delta+1$$

Luego:

$$|(x^2-3x-4)-(-6)|=|x^2-3x+2|=|(x-1)(x-2)|=|x-1||x-2|<(\delta+1)\delta$$

Así:

$$\begin{aligned}
|(x^2+3x-4)-(-6)| &< (\delta+1)\delta\\
&= \delta^2+\delta\\
&= \left(\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+4\varepsilon}\right)\right)^2+\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+4\varepsilon}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(1-2\sqrt{1+4\varepsilon}+1+4\varepsilon\right)+\frac{1}{4}\left(-2+2\sqrt{1+4\varepsilon}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(2-2\sqrt{49+4\varepsilon}+4\varepsilon\right)+\frac{1}{4}\left(-2+2\sqrt{49+4\varepsilon}\right)\\
&= \frac{1}{4}(4\varepsilon)=\varepsilon
\end{aligned}$$

Que era lo que se quería demostrar.

g. Probar que $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-1}=1$

Sea $\varepsilon>0$ y tómese $\delta=\varepsilon$. Entonces para todo $x\geq 1$ tal que $0<|x-2|<\delta$ se tiene que

$$\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\left|\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\sqrt{x-1}+1}\right|=\left|\frac{(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}\right|=\frac{|x-2|}{\left|\sqrt{x-1}+1\right|}<\frac{\delta}{\sqrt{x-1}+1}<\delta=\varepsilon$$

Así queda demostrada la afirmación.

2. a. 4 b. 1 si $c>0$, $-1$ si $c<0$ c. $\frac{1}{4}$ d. 729

e. $c$ si $c\geq 0$, $-c$ si $c<0$

f. $\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}\right)=-\infty$, $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}\right)=\infty$ luego $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$ no existe

3. a. 18 b. $\frac{7}{9}$ c. $\frac{343}{9}$ d. $\frac{49}{9}$ e. No existe f. $\sqrt[4]{1323}$

## EJERCICIO 3.3

1. a. Falso

Sea

$f(x)=\frac{1}{x}$ para $x\neq 0$

Entonces $f$ es continua en el intervalo (0, 1). Pero $f$ no es acotada en (0, 1), pues dado $M>0$, si $M\geq 1$ entonces $x_M=\frac{1}{M+1}\in(0,1)$, luego

$$f(x_M)=f\left(\frac{1}{M+1}\right)=M+1>M$$

Y si $0<M<1$ entonces $\overline{x}_M=M^2\in(0,1)$, así

$$f(\overline{x}_M)=f(M^2)=\frac{1}{M^2}>\frac{1}{M}>1>M$$

Esto prueba que $f$ no es acotada en (0, 1).

b. Falso

Sea

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{si } x\in(-1,1)\\ 1 & \text{si } x=1 \text{ ó } x=-1\end{cases}$$

$f$ es continua en (−1, 1), además $\lim_{x\to -1} f(x)=0$ y $\lim_{x\to -1} f(x)=0$. Sin embargo $f$ no alcanza mínimo en el intervalo (−1, 1) porque Rec($f$)=(0, 1]. Así, no existe $x_0\in(-1,1)$ tal que $f(x_0)\leq f(x)$ para todo $x\in(-1,1)$.

2. a. Verdadera b. Verdadera

3. a. Continua b. La gráfica tiene discontinuidades, no evitables en todo punto de $\mathbb{Z}$

c. La gráfica tiene discontinuidades no evitables en $x$=—1 y $x$=1

d. La gráfica tiene una discontinuidad evitable en $x$=3

4. a.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } \quad 1 < x < 3 \\ 3 & \text{si } \quad 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$f$ tiene discontinuidades no evitables en $x$=1, $x$=3 porque $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existen.

En efecto:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \neq 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 3 \neq 2$$

b. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

$f$ tiene una discontinuidad no evitable en $x$ = —2, porque $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe.

En efecto:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty$$

c. $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$

$f$ tiene una discontinuidad en $x$ = —2, porque $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \infty$.

d.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ -\frac{2}{3}x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$f$ es discontinua en $x$ = 2 porque $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2 \neq \frac{14}{3} = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

e. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

$f$ tiene una discontinuidad evitable en $x$ = —1.

f. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f$ tiene una discontinuidad no evitable en $x$ = 2 porque $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

g. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

$f$ tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$ y una discontinuidad no evitable en $x = 1$.

Además:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\tfrac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

h.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ 9 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$f$ tiene una discontinuidad evitable en $x$=3. En efecto, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existe porque

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2 = 9 = \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

Y $f(3) = 6 \neq 9 = \lim\limits_{x\to 3} f(x)$

i. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $f$ no tiene discontinuidades.

j. $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $f$ no tiene discontinuidades.

k. $f(x) = \frac{x}{x^2}$

$f$ tiene una discontinuidad no evitable en $x$=0 porque

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

l.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$f$ tiene una discontinuidad no evitable en $x$=0 porque $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

En efecto:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

m. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

$f$ tiene una discontinuidad evitable en $x$=1, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

n.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } 3 < x < 5 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

$f$ tiene una discontinuidad no evitable en $x$=3 porque $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \infty$.

Es decir, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe.

5. a. No.

Sea $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Entonces, no existe $x \in (0, 2)$ tal que $f(x)$=0, es decir, $f$ no interseca al eje $X$ en el intervalo $(0, 2)$.

b. Si. Por el inciso b. del numeral 4 de los ejercicios 3.1.

c. No.

Sea $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f$ interseca al eje $X$ en $(0, 2)$ porque $f(1)$=0. Pero $f$ no es continua en $x$=1 porque $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

6. a. $a = \frac{1}{3}$

b. No, porque $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 8 \neq -8 = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

c. No. $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 10 \neq -10 = f(5)$

7. a. 6 b. 4 c. $-2$ d. 0 e. No existe f. $\frac{1}{4}$

8. a. Sean

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$
$$g(x) = -\frac{1}{x}, x \neq 0$$

Entonces $f(x)+g(x)=0$, para todo $x\neq 0$ y tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existen. Sin embargo $\lim\limits_{x\to 0} \big(f(x) + g(x)\big) = 0$.

b. Sean

$$f(x) = x, x \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

Entonces $(f(x)g(x))=1$ para $x\neq 0$ y tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existen. Sin embargo $\lim_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right) = 1$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9. $\frac{17}{13}$ | 10. No existe | 11. $\frac{1}{9}$ | 12. 50 | 13. $-3$ |
| 14. $\frac{1}{192}$ | 15. 2 | 16. 0 | 17. $-6$ | 18. $\frac{2}{3}$ |
| 19. $\frac{1}{8}$ | 20. $\frac{1}{18}$ | 21. $\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{3a}$ | 22. $\frac{2}{9}\sqrt[3]{3}$ | 23. $2x$ |
| 24. 4 | 25. 3 | 26. 1458 | 27. 2 | 28. $\frac{1}{6}$ |
| 29. $\frac{1}{2}$ | 30. $\frac{1}{3}$ | 31. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 32. 3 | 33. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ |
| 34. $-1$ | 35. $\infty$ | 36. 0 | 37. 1 | 38. 2 |
| 39. $\frac{4}{3}$ | 40. 5 | 41. 0 | 42. 1 | 43. $\infty$ |
| 44. 0 | 45. 6 | 46. 2 | 47. 2 | 48. 0 |
| 49. No existe | 50. $-2$ | 51. $3x^2$ | 52. $\frac{1}{2}$ | 53. $-\frac{1}{56}$ |
| 54. $\frac{3}{2}$ | 55. $-\frac{1}{3}$ | 56. 1 | 57. $\frac{\sqrt{x}}{2x}$ | 58. 0 |
| 59. $\frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$ | 60. 1 | 61. 3 | 62. $\frac{1}{9}$ | 63. 1 |
| 64. 0 | 65. $\frac{3}{2}$ | 66. $\frac{\sqrt{2a}}{2a}$ | 67. $\frac{a}{2}$ | 68. 1 |
| 69. $\infty$ | 70. $\frac{1}{2}$ | 71. 0 | 72. 2 | 73. 15 |
| 74. $\frac{5}{9}$ | 75. 3 | 76. No existe | 77. $-3$ | 78. 5 |
| 79. $-3$ | 80. 0 | 81. No existe | 82. $-5$ | 83. No existe |
| 84. $-\frac{1}{4}$ | 85. No existe | 86. 2 | 87. $-7$ | 88. $\frac{1}{7}$ |
| 89. $-5$ | 90. $\frac{1}{2}$ | 91. 4 | 92. $\frac{3}{2}a$ | 93. 1 |
| 94. 0 | 95. No existe | 96. $\infty$ | 97. 3 | 98. 0 |
| 99. $-\frac{4}{3}a$ | 100. $-1$ | 101. $-7$ | 102. 2 | 103. $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{226}$ |

104. $-9$ 105. $-1$ 106. $2$ 107. $-\frac{1}{2}$ 108. $19$

# CAPÍTULO 4

## EJERCICIO 4.1

1. a. $\Delta y = 9, \frac{\Delta y}{y_1} = 1.125, \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$ b. $\Delta y = 21, \frac{\Delta y}{y_1} = 5.25, \frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$

   c. $\Delta y = -\frac{3}{4}, \frac{\Delta y}{y_1} = -\frac{3}{4}, \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{4}$ d. $\Delta y = 2, \frac{\Delta y}{y_1}$ no esta definido, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}$

   e. $\Delta y$ no está definido f. $\Delta y = 0, \frac{\Delta y}{y_1} =$ no esta definido, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

   g. $\Delta y = -63, \frac{\Delta y}{y_1} = 15.75, \frac{\Delta y}{\Delta x} = -21$

   h. $\Delta y = -1 + \sqrt[3]{4}, \frac{\Delta y}{y_1} = -1 + \sqrt[3]{4}, \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3}\left(-1 + \sqrt[3]{4}\right)$

2. a. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5$ b. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 3$ c. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)}$

   d. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ e. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)}$

   f. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 - \frac{1}{x(x+\Delta x)}$ g. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}$

   h. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-(x-1)^2-(x-1)(x+\Delta x-1)+(x+\Delta x-1)^2}{(x-1)^3(x+\Delta x-1)^3}$

   i. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(x+4)(x+\Delta x+4)}$ j. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+5}+\sqrt{x+5}}$ k. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

3. a. $5$ b. $10$ c. $-\frac{1}{6}$ d. $\frac{1}{1+\sqrt{6}}$

   e. $-\frac{7}{36}$ f. $\frac{5}{6}$ g. $\frac{1}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{6}+1}$ h. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no está definido

   i. $-\frac{1}{50}$ j. $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}$ k. $0$

4. a. Veamos que $f(x_0)=kx_0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$:

- Si calculamos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en el intervalo $[0, x_0]$, con $x_0>0$, tenemos:

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{f(x_0)}{x_0}, \text{ porque } f(0)=0$$

- Por otro lado, al calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en el intervalo $[x_0, 0]$, con $x_0<0$, tenemos:

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0)-f(x_0)}{0-x_0}=\frac{-f(x_0)}{-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0}$$

Además, como $f(0)=0=k\cdot 0$, entonces podemos concluir que $f(x_0)=kx_0$, para todo $x_0\in\mathbb{R}$.

b. Por el inciso a. se sabe que $y_1=f(x_1)=kx_1$ y $y_2=f(y_2)=kf_2$, con $k>0$, luego:

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{kx_1}{kx_2}=\frac{x_1}{x_2}$$

5. Como $y_1=\frac{k}{x_1}$ y $y_2=\frac{k}{x_2}$ entonces:

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{\frac{k}{x_1}}{\frac{k}{x_2}}=\frac{kx_2}{kx_1}=\frac{x_2}{x_1}$$

6. a. $l=\frac{A}{h}$ b. $V=l^3=l^2\cdot l$ c. $V=\pi r^2h$

7. a. \$5998750, \$11997.5 b. \$9995

8. \$7000, \$70, \$0.5

9. Para $c(x)=ax+b$ su variación promedio en $[x_1, x_1+\Delta x]$ es $\frac{\Delta c}{\Delta x}=a$.

   Para $c(x)=ax^2+bx+c$ la variación promedio en $[x_1, x_1+\Delta x]$ es $\frac{\Delta c}{\Delta x}=2ax_1+a\,\Delta x+b$.

10. a. $y=f(x)=10000000(1.05)^2$ donde $x$ es el número de trimestres

    b. En el intervalo $[0, 4]$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=538765.625$ y en el intervalo $[4, 8]$ tenemos $\frac{\Delta y}{\Delta x}=654873$, que significa que durante el primer año el capital crece a un ritmo promedio trimestral de \$538765 aproximadamente y en el segundo año el capital crece a un ritmo promedio trimestral de \$654873.

11. a. $p(x)=p(0)\,(0.9)^x$ donde $p(0)>0$ es la cantidad inicial de población y $x$ es el tiempo expresado en años.

b. En el intervalo [0,5] tenemos que $\frac{\Delta p}{\Delta x} = (-0.081902) \cdot p(0)$ y en el intervalo [5, 10] tenemos que $\frac{\Delta p}{\Delta x} = (-0.242) \cdot p(0)$. Con estos resultados se observa que la población decrece más lentamente entre los 5 y los 10 años y que decrece más rápido en los 5 primeros años.

12. a. $C(x)$=104950, $C(100)$=1000000, $C(1000)$=9505000

b. $\overline{C}(10)$=10495, $\overline{C}(100)$=10000, $\overline{C}(1000)$=9505

c. $-x - \frac{1}{2} + 1000$, 9989.5, 9899.5, 8999.5. Aquí se ha calculado $C(x+1)-C(x)$ para $x$, $x$=10, $x$=100 y $x$=1000 respectivamente.

## EJERCICIO 4.2

1. a. 5 b. $2x+3$ c. $-\frac{1}{x^2}$ d. $\frac{\sqrt{x}}{2x}$ e. $-\frac{2}{x^3}$

f. $1-\frac{1}{x^2}$ g. $\frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$ h. $-\frac{3}{x^4}$ i. $-\frac{1}{(x+4)^2}$ j. $\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$

k. 0

2. a. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ b. $\frac{\sqrt{x}}{x}$ c. $6\sqrt{x}$ d. $-\frac{\sqrt{x}}{2x}$ e. 0

f. $-7x^{-\frac{3}{2}}$ g. $2x$ h. $1-\frac{1}{x^2}$ i. $-\frac{1}{x^2}$ j. $-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x^2}$

k. $-\frac{\sqrt{x+1}}{3(x+1)^2}$ l. $-\frac{\sqrt[3]{x}}{3x\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}$

3. a. $2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{5}$ b. $e, e^2, e^3, e^4, e, e^2, e^3, e^4$

4. $u' = 2x+5, v' = \frac{\sqrt{x+1}}{2(x+1)}, (uv) = \sqrt{x+1}\left(2x+5+\frac{x^2+5x+3}{2(x+1)}\right),$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}\left(2x+5-\frac{x^2+5x+3}{2(x+1)}\right), \left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+5x+3}\left(-2x-5+\frac{x^2+5x+3}{2(x+1)}\right),$

$(u+v)' = 2x+5+\frac{\sqrt{x+1}}{2(x+1)}$

$(u^2)' = uu' + uu' = 2uu' = 2(x^2+5x+3)(2x+5) = (4x+10)(x^2+5x+3)$

5. Nótese que $f(x)=\frac{1}{3}x^3+5x+c_1$, $g(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-5x+c_2$ para algún par de constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$(2f+3g)(x)=-3x^3+5x^2-5$,

$(g-f)(x)=-x^3-10$,

$$(fg)'(x)=-\frac{7}{12}x^6+\frac{2}{3}x^5+\frac{25}{4}x^4-c_1x^3+(c_1+c_2)x^2-50x+5(c_1+c_2),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{\frac{1}{12}x^6+\frac{15}{4}x^4+\left(c_1-\frac{20}{3}\right)x^3+(c_2-c_1)x^2+5(c_1+c_2)}{\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-5x+c_2\right)^2},$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x)=\frac{-\frac{1}{12}x^6-\frac{15}{4}x^4+\left(\frac{20}{3}-c_1\right)x^3+(c_1-c_2)x^2-5(c_1+c_2)}{\left(\frac{1}{3}x^3+5x+c_1\right)^2}$$

6. a. $y=6x-5$, $x+6y=44$ b. $y=21x-14$, $x+21y=14$ c. $y=x+1$, $y=-x+1$

d. Como $y=mx+b$, entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\big((m(x+\Delta x)+b)-(mx+b)\big)=\frac{1}{\Delta x}(m\Delta x)=m$.

Así:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=m$$

7. $y=3x+1$

8. $-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

9. $y=2x+1$, $y=-2x+9$

10. En el punto $(2, 6)$

11. $a=b=1$, $c=0$

12. $c=\frac{1}{4}$

13. $y=\frac{3}{4}x+1$

14. $4\pi r^2$, $16\pi$. Significa que cuando el radio de la circunferencia es $x$ el volumen de la esfera varía $4\pi x^2$ veces más rápido que el radio y en particular esto se cumple para $x=2$, $x=6$.

15. a. $2\pi xh$, $4\pi h$, $8\pi h$. Significa que cuando el radio es $x$, el volumen del cilindro varía $2\pi xh$ veces más rápido que el radio. En particular se tiene cuando $x=2$, $x=4$.
b. $\pi r^2$. Significa que el volumen del cilindro varía $\pi x^2$ veces más rápido que la altura $h$, cualquiera que fuese el valor de $h$.

16. En el punto $P_2\left(-\frac{13}{4},\frac{17}{16}\right)$

## EJERCICIO 4.3

1. a. $(x+1)\,e^x$ b. $1+\ln x$

   c. $-2x(x^2+1)^{-2}$ d. $a^x \ln x\left(\frac{2}{x}+(\ln a)(\ln x)\right)$

   e. $x^2\,2^x\,(3\ln x+x(\ln 2)(\ln x)+1)$ f. $\frac{e^x(1+\ln+x+x\ln x+x^2\ln x)}{(x+1)^2}$

   g. $-\frac{(5x^2+6x+10)}{(x^2-2)^2}$ h. $\frac{-e^{-x}(x^3+3x^2+4x+6)}{(x^3+4x+2)^2}$

   i. $(6x^2+10x+2e^x)(6x+e^x+5)$ j. $\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

2. a. $y=0,\ x=0$ b. $y=x-1,\ y=-x+1$ c. $y=\frac{1}{2},\ x=1$ d. $y=1,\ x=0$

   e. No tiene rectas tangentes en $x=0$ porque $y'$ no está definida en $x=0$ y por supuesto tampoco tiene rectas normales en $x=0$.

   f. Rectas tangentes: $y=-\frac{1}{25}x-\frac{2}{5},\ y=-\frac{1}{25}x+\frac{2}{5}.$

   Rectas normales: $y=25x-\frac{624}{5},\ y=25x+\frac{624}{5}.$

3. a. $-2x+(x+1)e^x$ b. $e^x\,(x^5+5x^4-4x^3-12x^2+4x+4)$

   c. $\frac{x^3-x^2-2x-2}{x^2e^x}$ d. $\frac{2x-xe^x-e^x}{(xe^x-x^2+2)^2}$

   e. $\frac{2xe^x(-x^3+2x+2)}{x^4-4x^2+4}$ f. $4x^2\,e^2x+4xe^2x-3x^2+6$

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{d}{dx}\left(u\left(\frac{1}{v}\right)\right)=u\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right)+\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=-\frac{u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}+\frac{1}{v}\frac{du}{dx}=-\frac{u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}+\frac{v\left(\frac{du}{dx}\right)}{v^2}$

   Así:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\left(\frac{du}{dx}\right)-u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

## EJERCICIO 4.4

1. i. $\frac{4(4x^4+17)^2(-51x^5-20x^4+72x^3+17)}{(x^6-2x+6)^3}$

ii. $\frac{34(3t-5)}{(t+4)^3}$

iii. $-\frac{39424z^6}{(11z^7-30)^3}$

iv. $-\frac{2(24x^2+45x+13)}{(3x-13)^4}$

v. $\frac{(-9x+24)\sqrt{2x-6}}{x^5(2x-6)^2}$

vi. $\frac{9}{2}(14x^2-1)\sqrt{14x^3-3x+8}$

vii. $-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2(a^2-x^2)}$

viii. $\frac{15(2p-3)^2}{(3p-2)^4}$

ix. $(2x-1)\,(x+3)^2\,(10x+9)$

x. $\frac{(9+2v-3v^2)}{2(3v-1)^{\frac{1}{2}}(v^2+3)^{\frac{3}{2}}}$

xi. $-\frac{1}{4\sqrt{1-\sqrt{1-x}}\sqrt{1+x}}$

xii. $\frac{3\sqrt{5x+6}(5x^2+12x+5)}{2(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

xiii. $\frac{(3x^2-3x-2)\sqrt{x}}{2x^2}$

xiv. $\frac{3}{10}(2x+1)\sqrt{x^2+x+3}$

xv. $\frac{2\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{(x+2)^2(x-2)}$

xvi. $\frac{-3(3t+2)\sqrt{2+6t}}{t^2(2+6t)}$

xvii. $\frac{\sqrt{r+1}\sqrt{r-1}}{(r+1)^2(r-1)}$

xviii. $\frac{4t\sqrt[3]{(t^2-1)(t^2+1)^2}}{3(t^2-1)(t^2+1)^2}$

xix. $-x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

xx. $12x(x^2-3)^3\,(x-1)(x+1)$

xxi. $(7x+2)\,(x+2)^3\,(x-1)^2$

xxii. $\frac{2(x-1)(-2x^2+3x+1)}{(x^2+1)^4}$

xxiii. $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

xxiv. $\frac{1-4x}{x^3(x-1)^3}$

xxv. $\frac{-x\sqrt{x^2-9}}{(x^2-9)^2}$

xxvi. $\frac{(x+2)\sqrt{x+1}}{2(x+1)^2}$

xxvii. $\frac{4(5-4x^3)}{(x^3+10)^4}$

xxviii. $\frac{10(x^2+10)(x^2-10)}{x^{11}}$

xxix. $\frac{(3x^2+8x-1)\sqrt[4]{(2x+4)^3}\sqrt{x^2+1}}{2(2x+4)(x^2+1)}$

xxx. $\frac{x^2(x^2+9)}{(x^2+3)^2}$

2. a. $-\sqrt{1-2y}$ b. $-\frac{1}{18y(2-3y^2)^2}$ c. $\frac{\sqrt{a^2+y^2}}{2y^2+a^2}$

   d. $\frac{2\sqrt{a+by}}{3by+2a}$ e. $\frac{ay^2+b}{2ay}$ f. $\frac{e^y}{y(2-y)}$

   g. $\frac{6\left(1+2\sqrt{x}\right)^5\sqrt{x}}{x}$ h. $a^2x^3\left(1+4\ln(x)\right)$

3. a. $\frac{4(\log z)^3}{z\ln 10}$ b. $\frac{2x}{x^2+4}$ c. $e^{t-e^t}(1-e^t)$

   d. $\frac{e^{2z}}{\sqrt{e^{2z}+1}}$ e. $\frac{1}{x\ln x}$ f. $2x-6$

4. a. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ b. $\frac{3(\ln x)^2}{x}$ c. $(2x+3)\left(10^{x^2+3x+1}\right)\ln(10)$

   d. $\frac{(3ct^2+bt-a)\sqrt{t}}{2t^2}$ e. $2a^{2y}\ln a$ f. $-\frac{2}{(1-2t)\ln(10)}$

   g. $-\frac{8}{(1-4x)(1+4x)}$ h. $-\frac{6x\ \log(a^2-x^2)^2}{(a^2-x^2)\ln(10)}$ i. $\frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{(x-1)^2(x+1)}$

   j. $\frac{x^2-1}{x(x^2-3)\log(x^3-3x)^{\frac{2}{3}}\ln(10)}$ k. $-\frac{(1+x^2)}{x(1-x^2)}$ l. $e^{-\frac{1}{2}}$

   m. $\frac{6(x+1)^5}{(x^2+2x+2)^4}$ n. $\frac{-6x^2\log(\mathrm{b}-x^3)}{(\mathrm{b}-x^3)\ln(10)}$. o. $3(x+1)^5$

   p. $\frac{-8(x+3)}{(x-1)^3}$ q. $\frac{3x^2+8x}{2x(x+4)\ln(x^3+4x^2)^{\frac{3}{4}}}$.

## EJERCICIO 4.5

1. a. $\frac{1}{y(x+1)^2}$ b. $\frac{1-3x^2-2xy}{1+x^2}$ c. $\frac{\sqrt{x}}{2x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{3x}+\frac{\sqrt[4]{x}}{4x}$

   d. $\frac{2x^3-3x^2-3y^2}{2y(3x-y^2)}$ e. $-\frac{y^2}{x^2}$ f. $-\frac{y(x^2y+1)}{x(2x^2+4xe^{4y}-1)}$

   g. $\frac{2y^4-3x^2-1}{y^2(3-8xy)}$

2. a. $-\frac{1}{y^3}$ b. $\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$ c. $\frac{3x(4y^2-3x^3)}{4y^3}$

d. $\frac{2y}{x^2}$ e. $\frac{2(y-1)}{(1-x)^2}$ f. $\frac{2y}{x^2}$

g. $\frac{15y}{4x^2}$ h. $\frac{3y}{4(x+1)}$ i. 0

3. a. $y=-2x+4, y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ b. $y=\frac{9}{4}x-\frac{1}{4}, y=-\frac{4}{9}x+\frac{22}{9}$

c. $y=-\frac{7}{5}x+\frac{29}{5}, y=\frac{5}{7}x+\frac{11}{7}$ d. $y=-\frac{352}{23}x-\frac{32}{23}, y=\frac{23}{352}x-\frac{5655}{176}$

e. $y=-x+2, y=x$ f. $y=-\frac{7}{4}x+\frac{9}{2}, y=\frac{4}{7}x-\frac{1}{7}$

g. $y=\frac{9}{2}x-\frac{3}{2}, y=-2x+1$ h. $y=-\frac{2}{17}x+\frac{25}{17}, y=\frac{17}{2}x-33$

4. $y=-2x-3,\ y=-2x+3$

5. a. $-\frac{4x}{9y}$ b. $-\frac{y}{x}$ c. $-\frac{xb^2}{ya^2}$

d. $\frac{1-y^2}{2xy}$ e. $\frac{6xy-19y-3x^2}{19x-3x^2}$ f. $\frac{12x^2+11y^2}{6y^2-22xy}$

g. $\frac{20xy-y\sqrt{xy}}{6xy+x\sqrt{xy}}$ h. $\frac{\sqrt{2}y-2y^3\sqrt{xy}-12\sqrt{xy}}{6xy^2\sqrt{xy}-4y\sqrt{xy}-\sqrt{xy}}$

6. a. $e^x, e^x$ b. $e^{-x}, -e^{-x}$ c. $e^x, e^x$

d. $e^{-x}, -e^{-x}$ e. $-3e^x, -3e^x$ f. $-2e^x, -2e^x$

g. $-3e^{-x}, 3e^{-x}$ h. $-5e^{-x}, 5e^{-x}$ i. 0, 0

j. $-\frac{3}{x^2}, \frac{6}{x^3}$ k. $-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^3}\ln x, \frac{11}{x^4}-\frac{6}{x^4}\ln x$ l. $\frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}, \frac{(\ln x)^2-6}{x^2(\ln x)^4}$

m. $54x, 54$ n. $e^{6x}(36x^2+132x+218),\ e^{6x}(216x^2+864x+1440)$

# CAPÍTULO 5

## EJERCICIO 5.1

1. a. $-\frac{1}{2}$ b. $\frac{8}{27}$ c. $\frac{-2+\sqrt{6}}{2}, \frac{-2-\sqrt{6}}{2}$

   d. $f$ no satisface las condiciones porque no es diferenciable en $x=0$

   e. Todo número en el intervalo $(-2, 2)$ f. $\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-2\sqrt{3}}{3}$

   g. $f$ no satisface las condiciones porque no es continua en $x=0$

   h. $1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$

   i. $f$ no satisface las condiciones porque no es continua en $x=0$

   j. 1.—1 k. $\frac{3}{2}$ l. $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$ m. 0

   n. $f$ no satisface las condiciones porque no es continua en $x=0$

   o. Todo número en el intervalo $(-1, 1)$

2. a. En $[0, 2]$, $c=1$ b. En $[1, 2]$, $c = \frac{3}{2}$

   c. En $[1, 2]$, $c = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$ y en $[2, 3]$, $c = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$

   d. En $[-1, 0]$, $c = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ y en $[0, 2]$, $c = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$ e. No existe tal valor de $c$

   f. No existe tal valor de $c$ g. No existe tal valor de $c$

   h. En $[-1, 0]$, $c = -\frac{\sqrt{3}}{9}$ y en $[0, 1]$, $c = \frac{\sqrt{3}}{9}$

   i. En $[-1, 3]$, $c =-2+\sqrt{5}$ y en $[-7, -3]$, $c =-2-\sqrt{5}$

   j. En $[-1, 3]$, $c = \frac{5}{3}$ y en $\left[-2, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$, $c = -1$

3. a. Sea $f(x)=6x^4-7x+1$ y $g(x)=12x^5-35x^2+10x$. Entonces $g'(x)=10f(x)$, luego toda raíz de $g'$ es raíz de $f$ y viceversa.

   Ahora $g(x)=x(12x^4-35x+10)$, luego $g(0)=0$. Además si $h(x)=12x^4-35x+10$, entonces $h(0)=10>0$ y $h(1)=-13<0$, por tanto existe $b \in (0, 1)$ tal que $h(b)=0$, así $g(b)=bh(b)=0=g(0)$. Luego por el teorema de Rolle existe $c \in (0, b)$ tal que $g'(c)=0$, de donde $f(c)=0$.

Por otro lado $f'(x)=24x^3-7>0$ si y solo si $x>\sqrt[3]{\frac{7}{24}}$ y $f'(x)<0$ si y solo si $x<\sqrt[3]{\frac{7}{24}}$, luego $f$ es decreciente en el intervalo $\left(-\infty,\sqrt[3]{\frac{7}{24}}\right)$ y creciente en el intevalo $\left(\sqrt[3]{\frac{7}{24}},\infty\right)$. Además como $f$ es continua, posee a lo más dos raíces, una raíz en el intervalo $\left(-\infty,\sqrt[3]{\frac{7}{24}}\right)$ y otra en el intervalo $\left(\sqrt[3]{\frac{7}{24}},\infty\right)$. Las raices son $x=1$ y $x=c$.

b. Sea $f(x)=6x^5+13x+1$ y $g(x)=2x^6+13x^2+2x$. Entonces $g'(x)=2f(x)$, luego toda raíz de $g'$ es raíz de $f$ y viceversa.
Ahora $g(x)=x(2x^5+13x+2)$, luego $g(0)=0$. Además si $h(x)=2x^5+13x+2$, entonces $h(0)=2>0$ y $h(-1)=-13<0$, por tanto existe $b\in(-1,0)$ tal que $h(b)=0$, así $g(b)=bh(b)=0=g(0)$. Luego por el teorema de Rolle existe $c\in(b,0)$ tal que $g'(c)=2f(c)=0$, de donde $f(c)=0$.
Por otro lado $x=c$ es la única raíz real de $f$. Para verificar esto nótese que $f'(x)=30x^4+13>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, es decir $f$ es creciente en $\mathbb{R}$. Además $f(0)=1>0$, $f(-1)=-18<0$ y $f$ es continua en $\mathbb{R}$. Luego la gráfica de $f$ corta el eje $X$ exactamente una vez.

c. Sea $f(x)=x^3+9x^2+33x-8$ y $g(x)=x^4+12x^3+66x^2-32x$.
Entonces $g'(x)=4f(x)$, luego toda raíz de $g'$ es raíz de $f$ y viceversa.
Ahora $g(x)=x(x^3+12x^2+66x-32)$, luego $g(0)=0$.
Además si $h(x)=x^3+12x+66x-32$, entonces $h(0)=-32<0$ y $h(1)=47>0$, por tanto existe $b\in(0,1)$ tal que $h(b)=0$, así $g(b)=bh(b)=0=g(0)$. Luego por el teorema de Rolle existe $c\in(0,b)$ tal que $g'(c)=4f(c)=0$, de donde $f(c)=0$.
Por otro lado $x=c$ es la única raíz real de $f$. Para verificar esto, nótese que $f'(x)=3x^2+18x+33>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, es decir $f$ es creciente en $\mathbb{R}$. Además $f(0)=-8<0$, $f(1)=35>0$ y $f$ es continua en $\mathbb{R}$. Luego la gráfica de $f$ corta el eje $X$ exactamente una vez.

4. Sean $x_1, x_2\in\mathbb{R}$. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $x_1<x_2$. Como $f$ es derivable en $\mathbb{R}$, entonces $f$ es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en el intervalo $[x_1, x_2]$. Además $f$ es diferenciable en el intervalo $(x_1, x_2)$, luego por el teorema del valor medio, existe $c\in(x_1, x_2)$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

Como $-1\leq f'(c)\leq 1$, entonces $|f'(c)|\leq 1$, luego:

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leq 1$$

Así $|f(x_1)-f(x_2)|\leq|x_1-x_2|$

5. Nótese que $f$ no cumple el teorema del valor medio en el intervalo $[-8, 28]$ porque:

$$\frac{f(28)-f(-8)}{28-(-8)}=\frac{\sqrt[3]{784}-\sqrt[3]{64}}{36}=\frac{\sqrt[3]{98}-2}{18}$$

Y si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $f'(c) = \frac{1}{18}\left(\sqrt[3]{98} - 2\right)$ entonces:

$$f'(c) = \frac{2}{3}c^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{18}\left(\sqrt[3]{98} - 2\right) < \frac{1}{18}(5 - 2) = \frac{1}{6}$$

Luego $c^{-\frac{1}{3}} < \frac{1}{4}$, así $c^{\frac{1}{3}} > 4$ y por tanto $c > 64$, luego $c \notin [-8, 28]$.
Además observese que $f$ no cumple todas las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-8, 28]$ porque $f$ no es diferenciable en $x=0$, en efecto:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

Y esta función no está definida en $x=0$.

## EJERCICIO 5.2

1. El error radica en que el cociente $\frac{3x^2-4}{2x+1}$ no tiene ninguna de las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ en $x = 2$, además

$$\frac{3(2^2) - 4}{2(2) + 1} = \frac{8}{5}$$

Por lo tanto no es aplicable la regla de L`Hôpital para dicho cociente y el valor del límite buscado es $\frac{8}{5}$.

2. a. $\frac{a}{b}$ b. 1 c. 1 d. $\infty$ e. ln3
f. $\frac{1}{2}$ g. $\frac{1}{4}$ h. 2 i. 0 j. $\infty$
k. 0 l. 0 m. $\frac{1}{3}$ n. $\frac{1}{6}$

## EJERCICIO 5.3

1. a. $f$ no tiene puntos críticos b. $(0, 3)$ c. $(3, -16)$
d. $(5, 4)$ e. $(0, 1)$ f. $(0, 1)$

2. a. Máximo: $(0, 3)$, mínimo: $(3, -6)$ b. Máximo: $(e^3, 3)$, mínimo: $(1, 0)$
c. Máximo: $(-1, 2)$, mínimo: $(1, -2)$ d. $f$ no tiene máximos ni mínimos
e. Máximo: $(1, 1)$, mínimo: $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ f. Máximo: $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$, mínimo: $\left(-4, -\frac{76}{3}\right)$

g. Máximo: (3, 21), mínimo: (1, 1)

h. Máximo: no existe, mínimo: $\left(-2, -\sqrt[3]{2}\right)$

i. Máximo: $\left(8, 3+16\sqrt{2}\right)$, mínimo: (0, 3)

j. Máximo: (1, 5), mínimo: (2, –6)

3. a. (2, 4)

b. $(-1, 2e^{-1})$

c. (–1, 2), (1, –2)

d. (0, 0)

e. (3, –9), $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$

f. (0, 0)

g. (–1, 5), (1, 1)

h. (0, 0)

i. (0, 3)

j. (1, 5)

k. (0, 9), (3, 0), (–3, 0)

l. (0, 1)

m. (1, 8)

4. a. $f'$ no tiene puntos críticos

b. $(2, -e^{-2})$

c. (0, –3)

d. $f'$ no tiene puntos críticos

e. (1, –4)

f. el conjunto de puntos críticos de $f'$ es $\{(x, 1) \mid x>0\} \cup \{(y, -1) \mid y<0\}$

g. (0, –3)

h. $f'$ no tiene puntos críticos

i. (0, 0)

j. (0, 4)

k. $f'$ no tiene puntos críticos

l. (0, 0)

m. (1, 0)

n. $\left(-1, e^{-\frac{1}{2}}\right), \left(1, -e^{-\frac{1}{2}}\right)$

o. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}\right)$

## EJERCICIO 5.4

1. Sean $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$. Como $f$ es diferenciable en $(a, b)$, entonces $f$ es diferenciable y continua en el intervalo $[x_1, x_2]$. Por el teorema del valor medio existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como $c \in (a, b)$ entonces $f'(c)>0$, así

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

Por lo tanto $f(x_1)< f(x_2)$. Esto demuestra que $f$ es creciente en $(a, b)$.

2. a. Creciente: $(-\infty, -3)$, $(1, \infty)$, decreciente: $(-3, 1)$, cóncava hacia arriba: $(-1, \infty)$, cóncava hacia abajo: $(-\infty, -1)$.
   b. Creciente: $(-3, \infty)$, decreciente: $(-\infty, -3)$, cóncava hacia arriba: $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$, cóncava hacia abajo: $(-2, 0)$.
   c. Creciente: $(-\infty, 1)$, decreciente: $(1, \infty)$, cóncava hacia arriba: $(2, \infty)$, cóncava hacia abajo: $(-\infty, 2)$.
   d. Creciente: $(-2, 2)$, decreciente: $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$, cóncava hacia arriba: $(-\infty, 0)$, cóncava hacia abajo: $(0, \infty)$.
   e. Creciente: $(0, 2)$, decreciente: $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$, cóncava hacia arriba: $(-\infty, 1)$, cóncava hacia abajo: $(1, \infty)$.
   f. Creciente en todo su dominio $(0, \infty)$, cóncava hacia abajo en todo su dominio, $(0, \infty)$.
   g. Creciente: $(-2, 0)$, $(2, \infty)$, decreciente: $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$, cóncava hacia arriba: $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$, cóncava hacia abajo: $(-2, 2)$.
   h. Creciente: $(-\infty, 0)$, decreciente: $(0, \infty)$, cóncava hacia arriba: $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$, cóncava hacia abajo: $(-1, 1)$.
   i. Creciente: $(0, \infty)$, decreciente: $(-\infty, 0)$, cóncava hacia arriba en todo su domino $\mathbb{R}$.
   j. Creciente en todo su dominio, no es cóncava hacia arriba ni cóncava hacia abajo en ningún intervalo.
   k. Creciente: $(0, \infty)$, decreciente: $(-\infty, 0)$, cóncava hacia arriba en todo su dominio, $\mathbb{R}$.
   l. Creciente: $(-\infty, 0)$, decreciente: $(0, \infty)$, cóncava hacia arriba: $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, cóncava hacia abajo: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$.

3. a. Máximo absoluto en el punto $(0, 3)$. No tiene ni mínimos ni puntos de inflexión.
   b. No tiene ni máximos, ni mínimos ni puntos de inflexión.
   c. Máximo relativo en el punto $(-1, 2)$, mínimo relativo en el punto $(-2, 1)$. su punto de inflexión es $(0, 0)$.
   d. No tiene ni máximos, ni mínimos ni puntos de inflexión.
   e. Tiene máximo absoluto en el punto $(1, 2e^{-1})$, su punto de inflexión es $(2, 4e^{-2})$ y no tiene mínimos.
   f. Tiene mínimo absoluto en el punto $(0, 0)$. No tiene máximos ni puntos de inflexión.
   g. No tiene ni máximos, ni mínimos ni puntos de inflexión.
   h. No tiene ni máximos, ni mínimos y su punto de inflexión es $(0, 0)$.
   i. Tiene máximo relativo en el punto $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$, mínimo relativo en el punto $(3, -9)$ y su punto de inflexión es $\left(1, -\frac{11}{3}\right)$.
   j. Tiene mínimo absoluto en el punto $(0, 10)$. No tiene máximos ni puntos de inflexión.
   k. Tiene máximo absoluto en el punto $(1, 5)$. No tiene ni mínimos ni puntos de inflexión.
   l. No tiene ni máximos, ni mínimos y su punto de inflexión es $(1, 8)$.

m. Tiene máximo relativo en el punto (—1, 5), mínimo relativo en el punto (1, 1) y su punto de inflexión es (0, 3).

n. Tiene máximo relativo en el punto (0, 9), mínimos relativos en los puntos (—3, 0), (3, 0) y sus puntos de inflexión son (—3, 0), (3, 0).

4. a. $f(0) = 5$ mínimo relativo

b. $f(1) = 16$ punto de inflexión

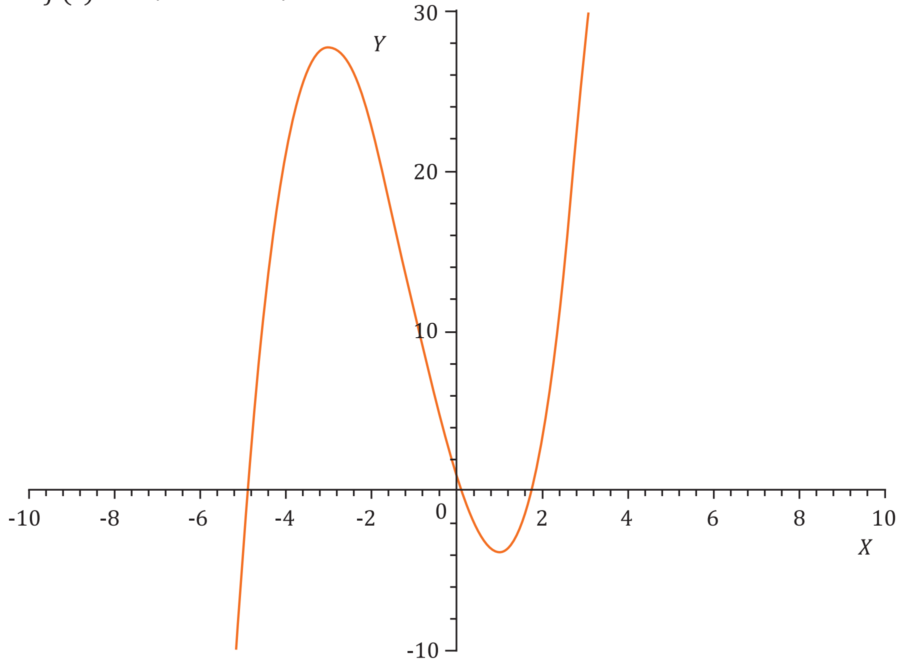
c. $f(3) = 7$ mínimo relativo

d. $f(2) = 0$ mínimo relativo

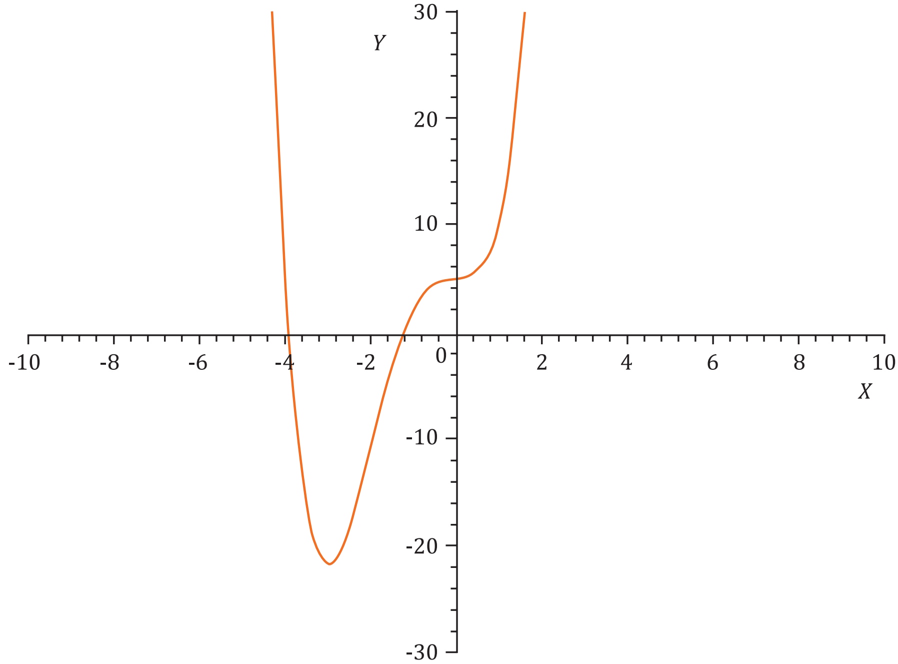
e. $f\left(\frac{5}{2}\right) = 8$ mínimo relativo

## EJERCICIO 5.5

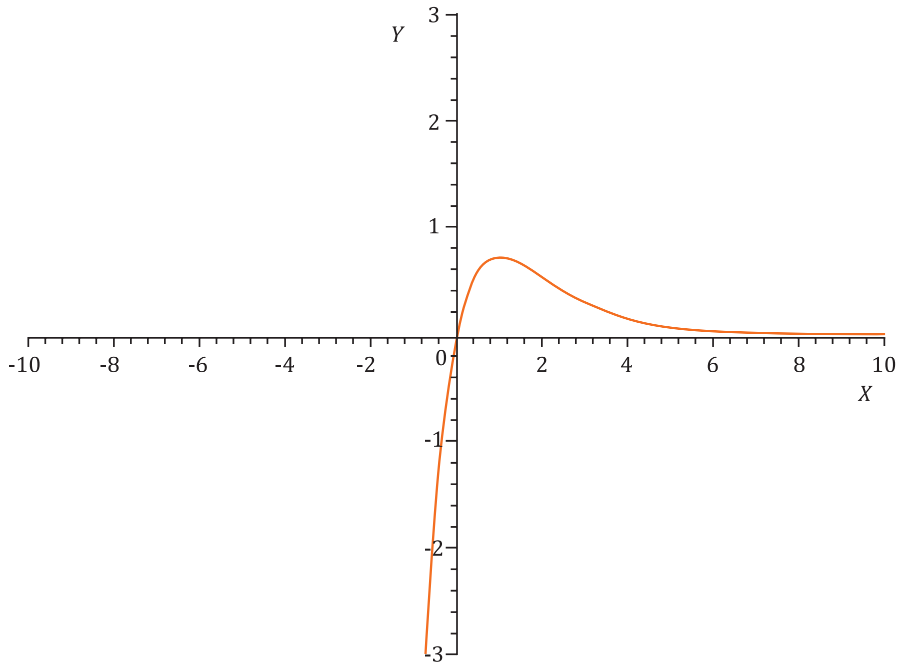
1. a. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$



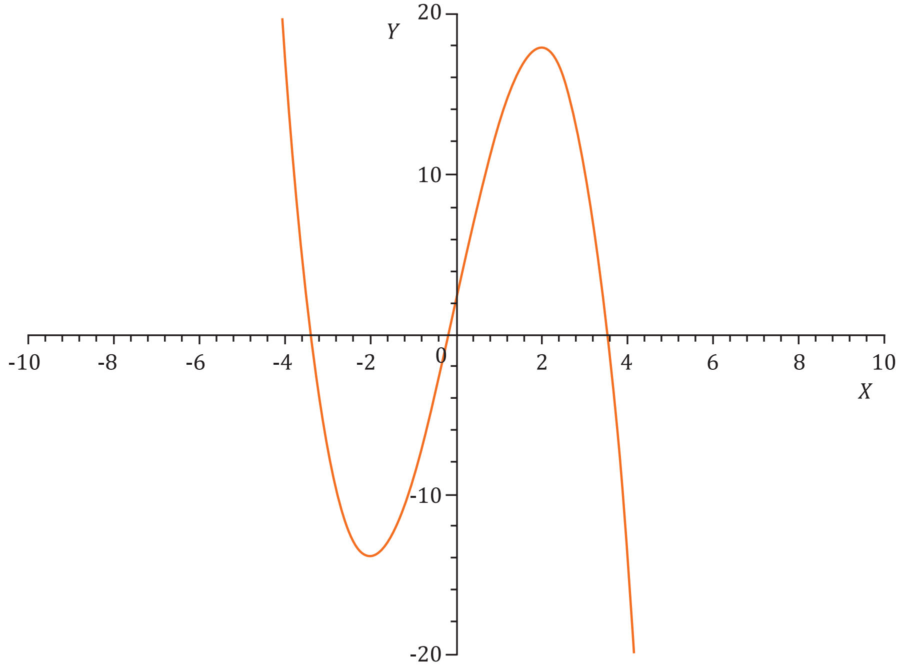
b. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5$



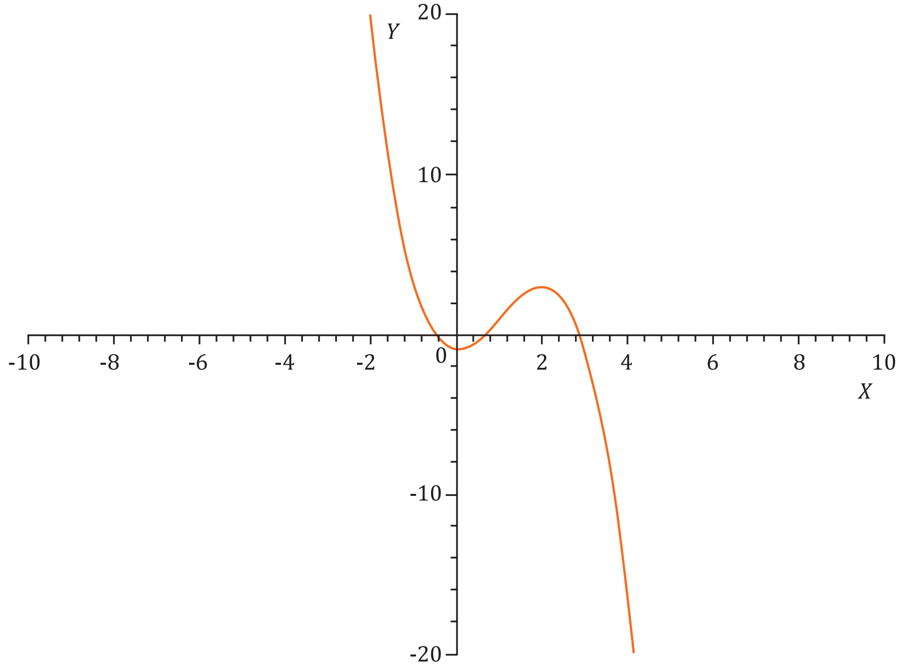

c. $f(x) = 2xe^{-x}$



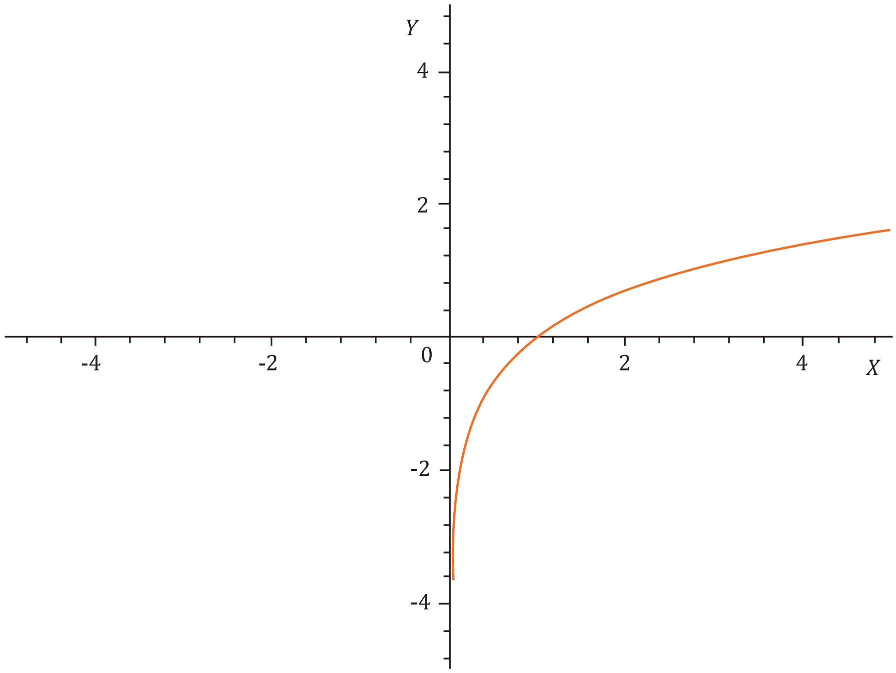
d. $f(x) = -x^3 + 12x + 2$



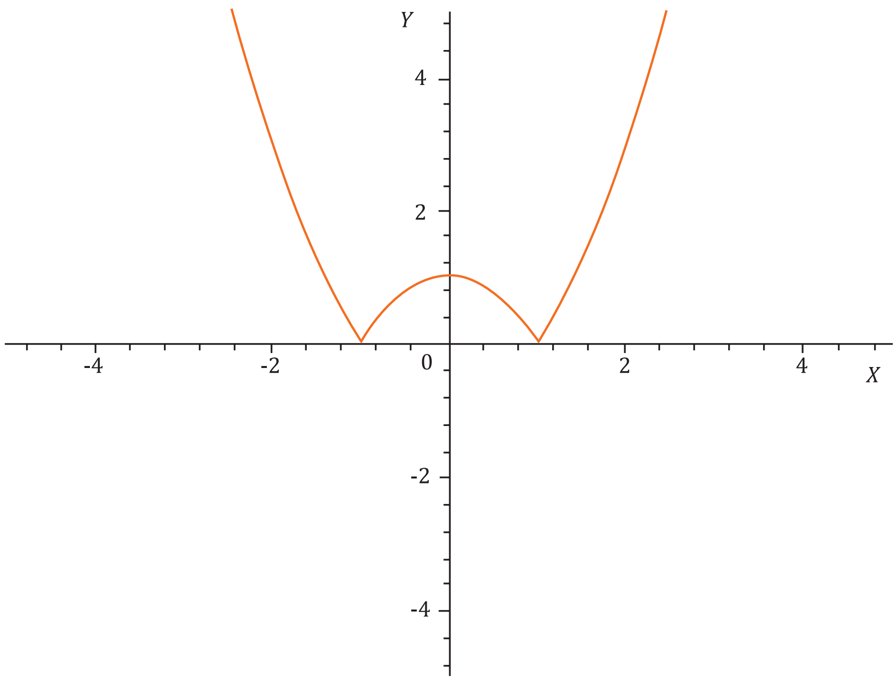

e. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$



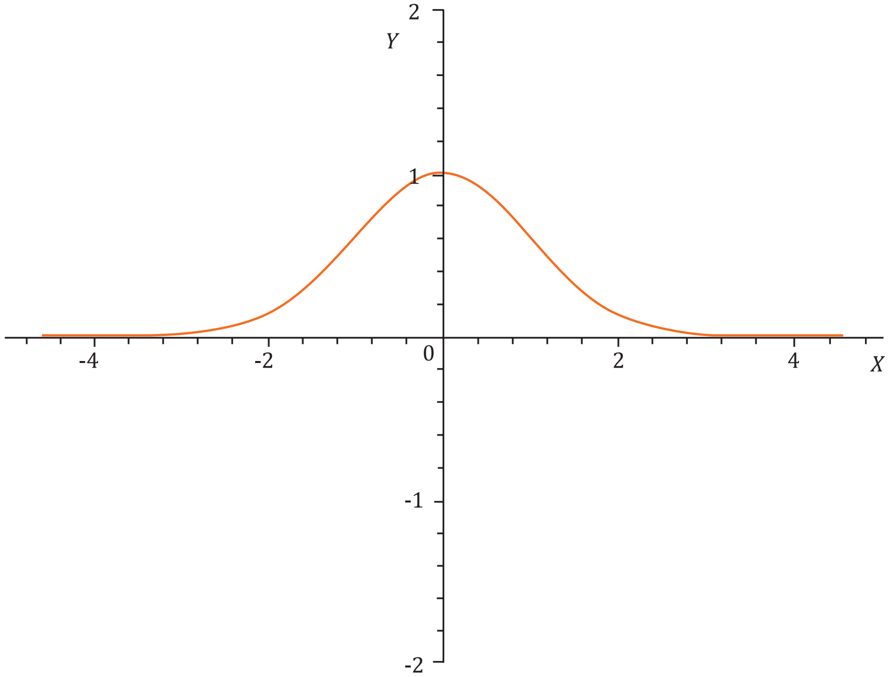
f. $f(x) = \text{In}(x)$



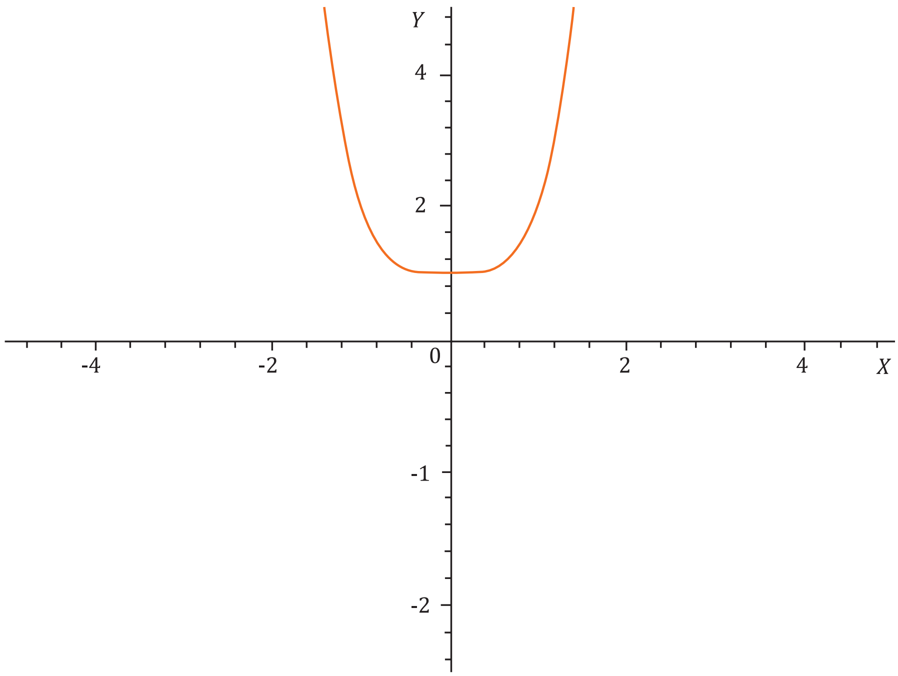

g. $f(x) = |x^2 - 1|$



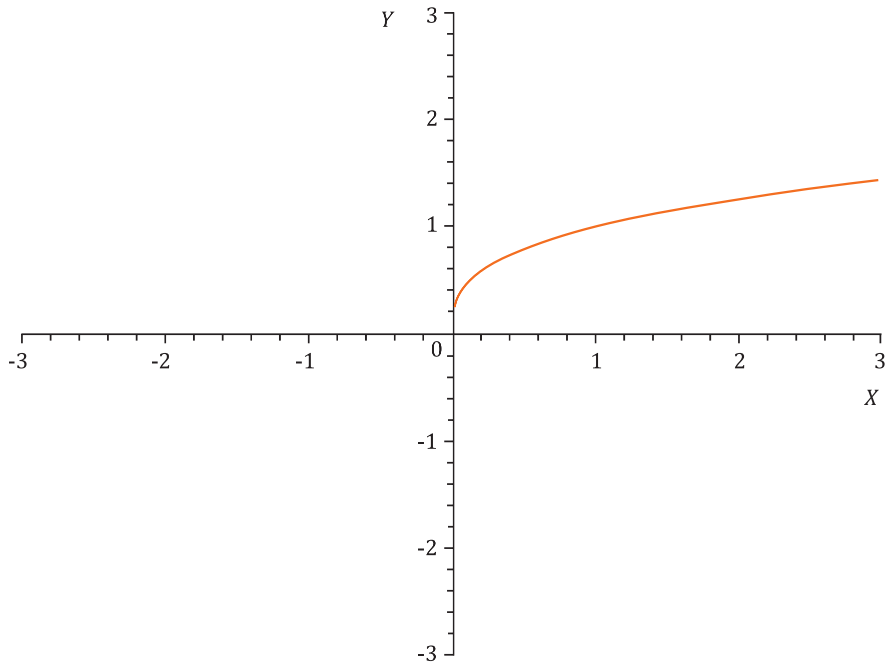
h. $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$



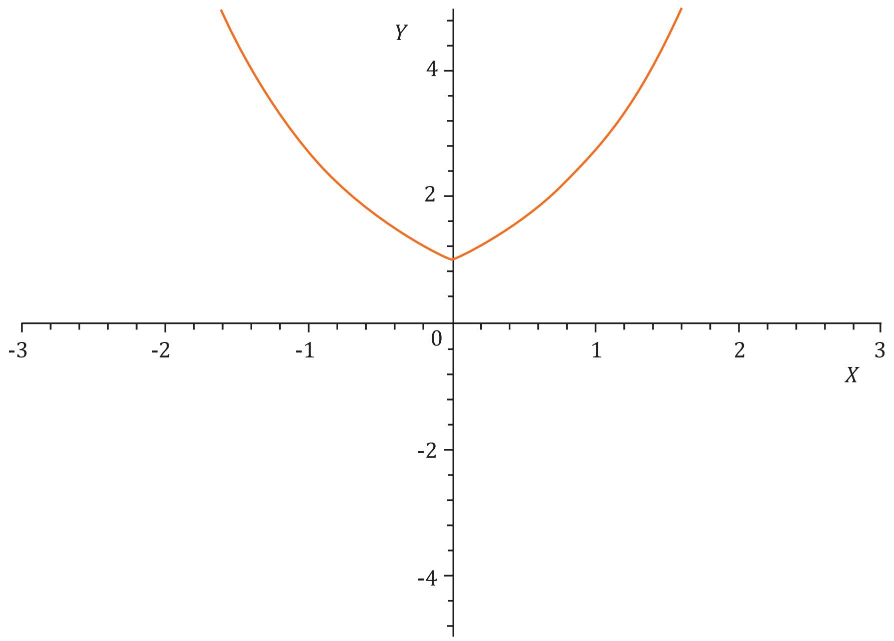

i. $f(x) = x^4 + 1$



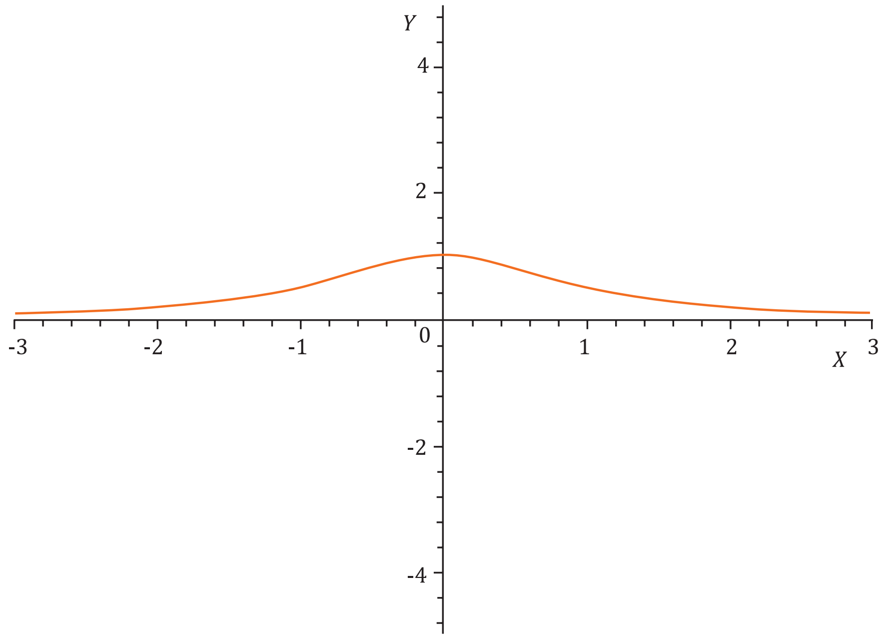
j. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$



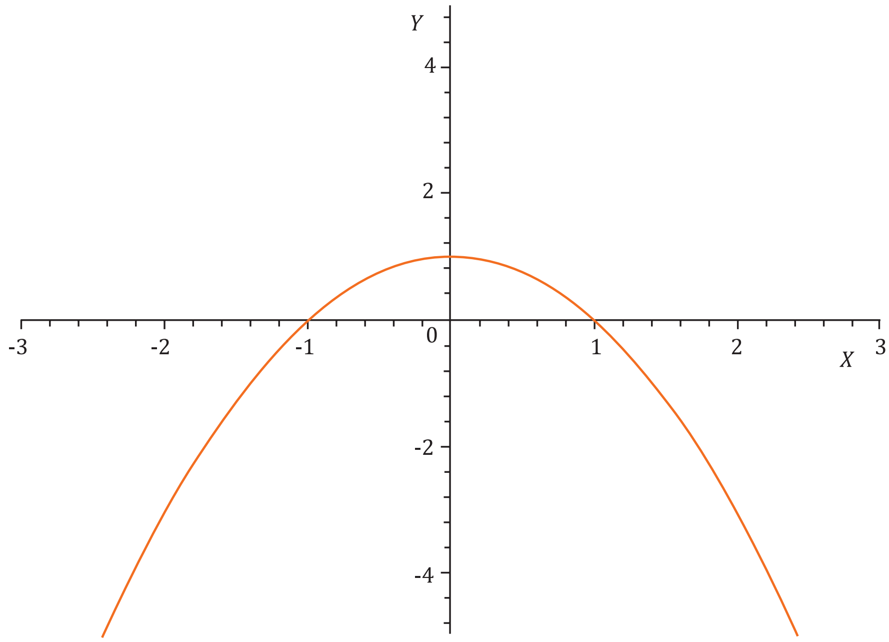

k. $f(x) = e^{|x|}$



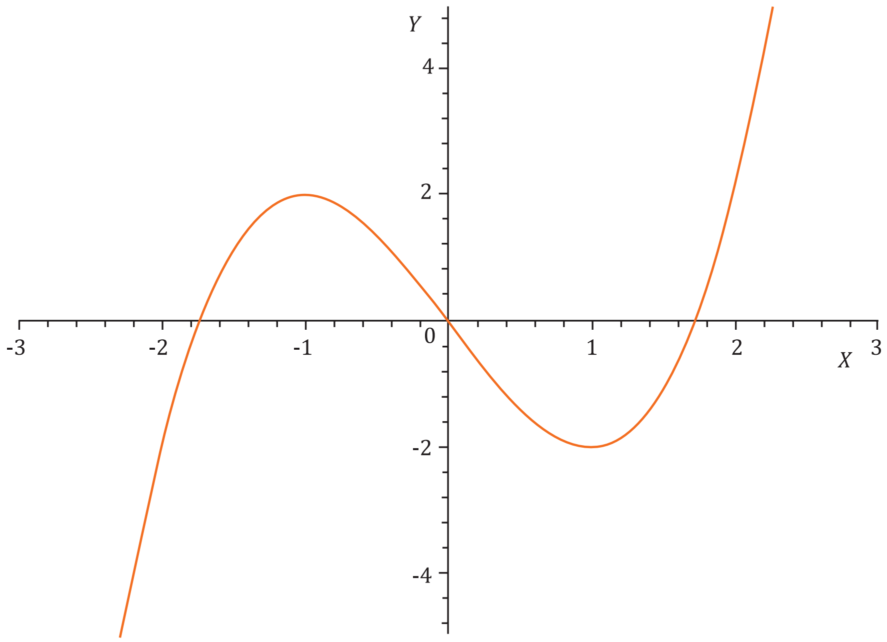
l. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$



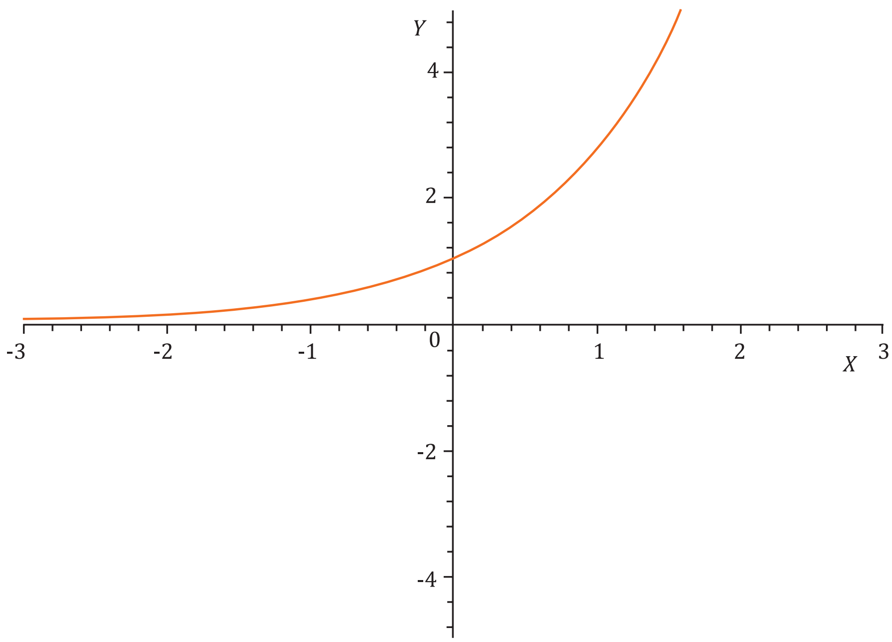

m. $f(x) = -x^2 + 1$



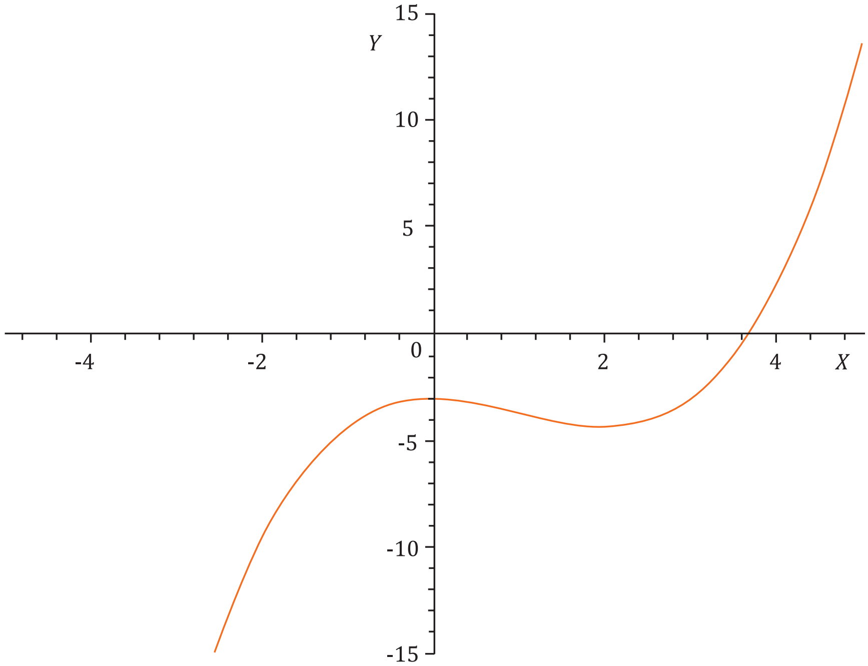
n. $f(x) = x^3 - 3x$



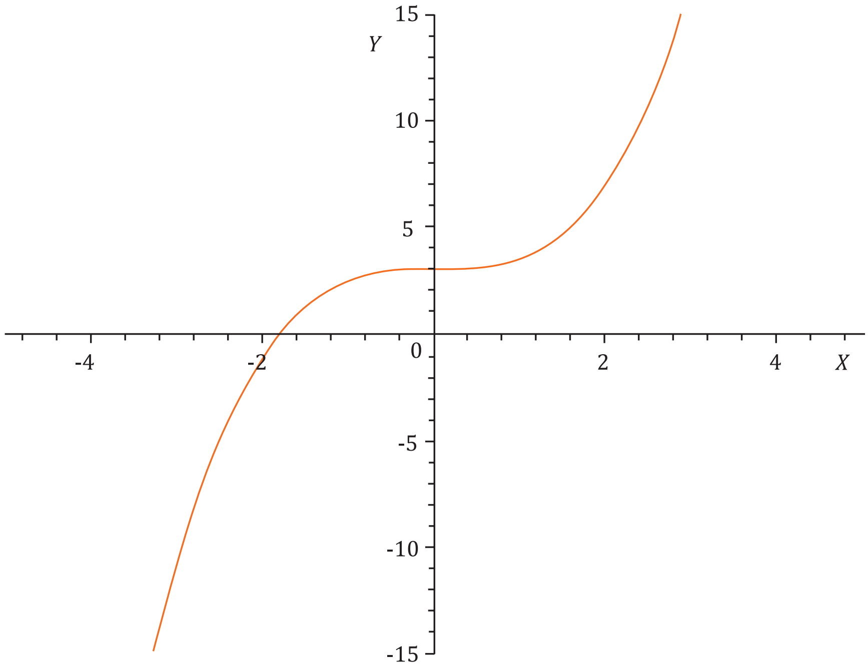

o. $f(x) = e^x$



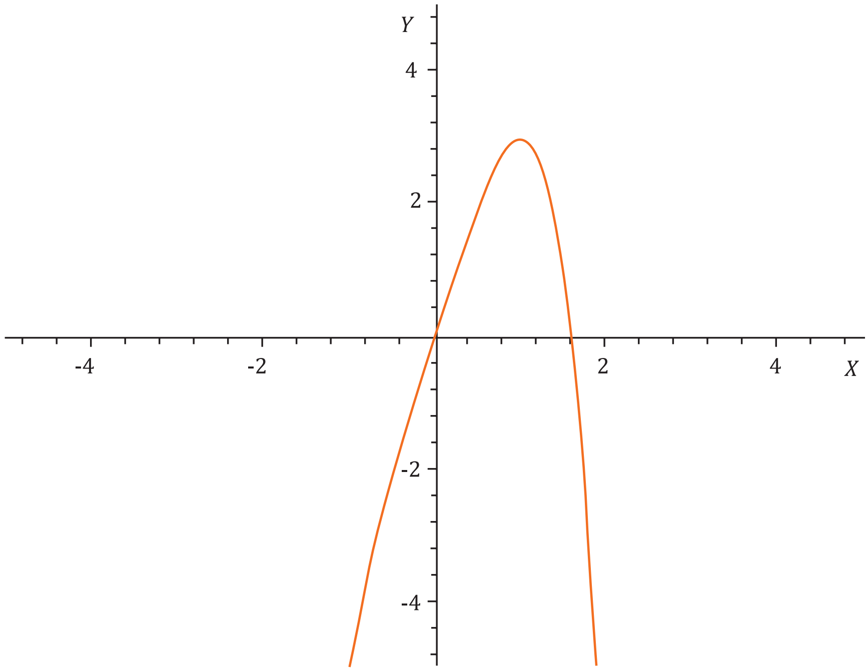
p. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$



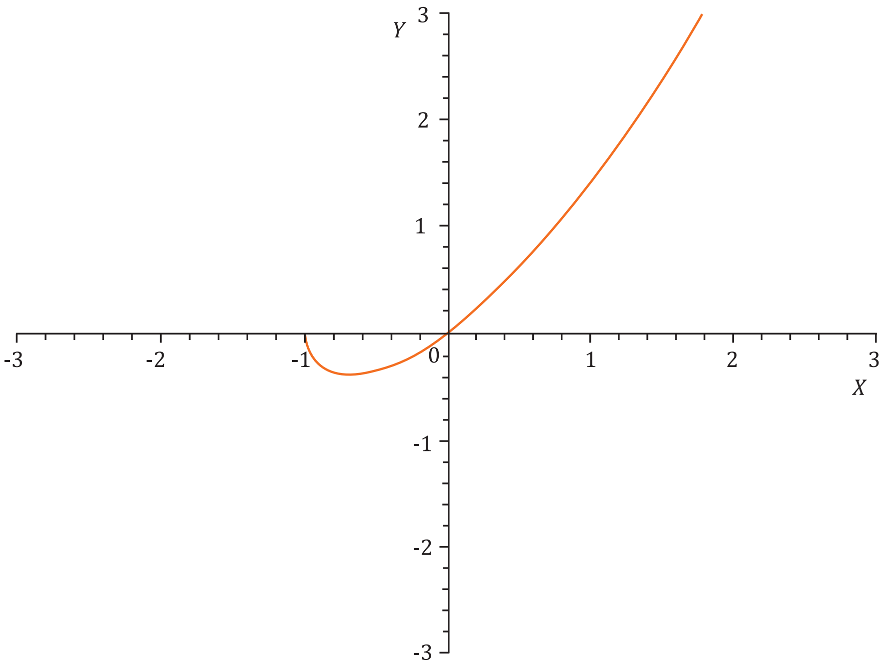

q. $f(x) = 3 + x^{\frac{3}{2}}$



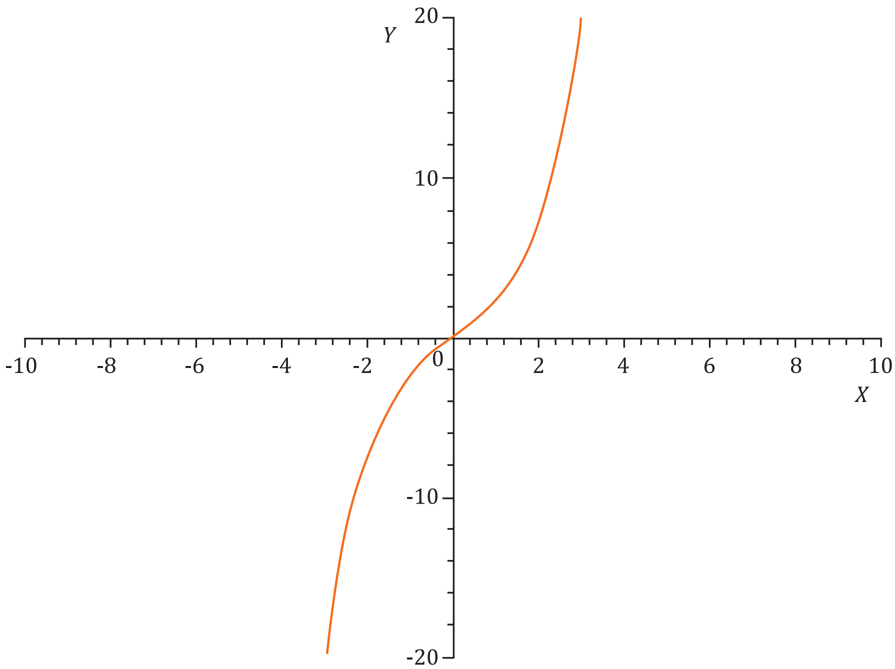
r. $f(x) = 4x - x^4$



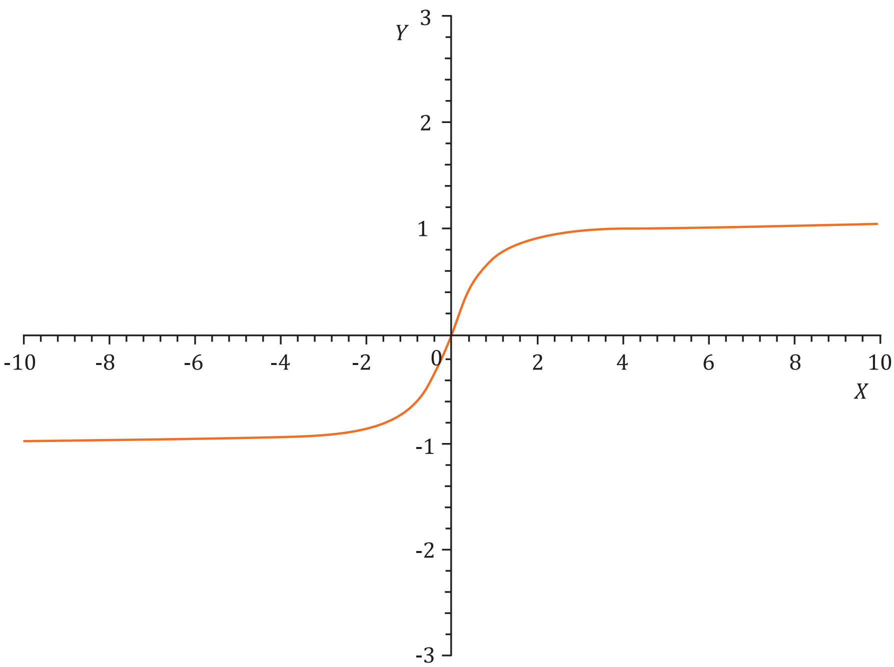

s. $f(x)= x\sqrt{x+1}$



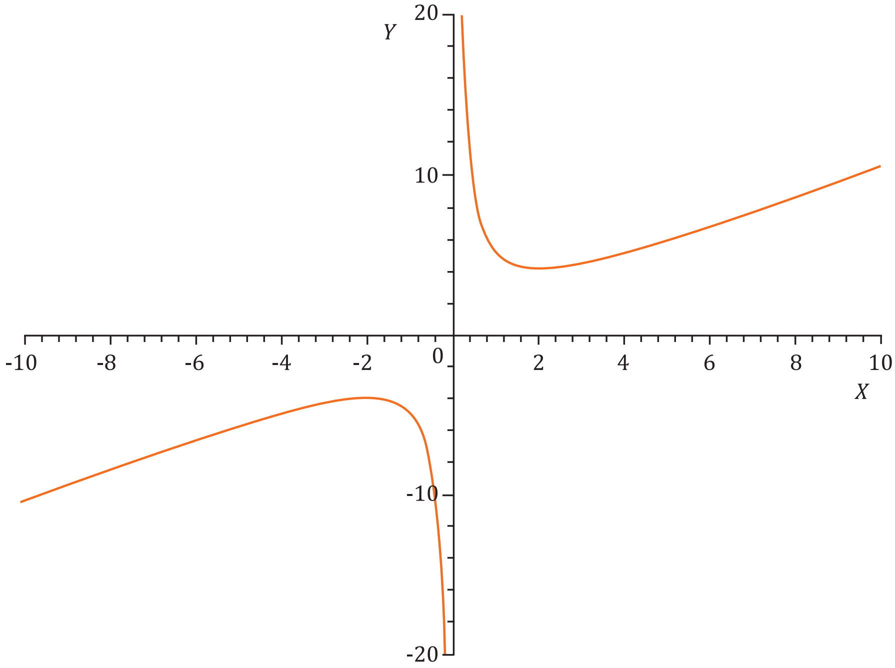
t. $f(x) = e^x - e^{-x}$



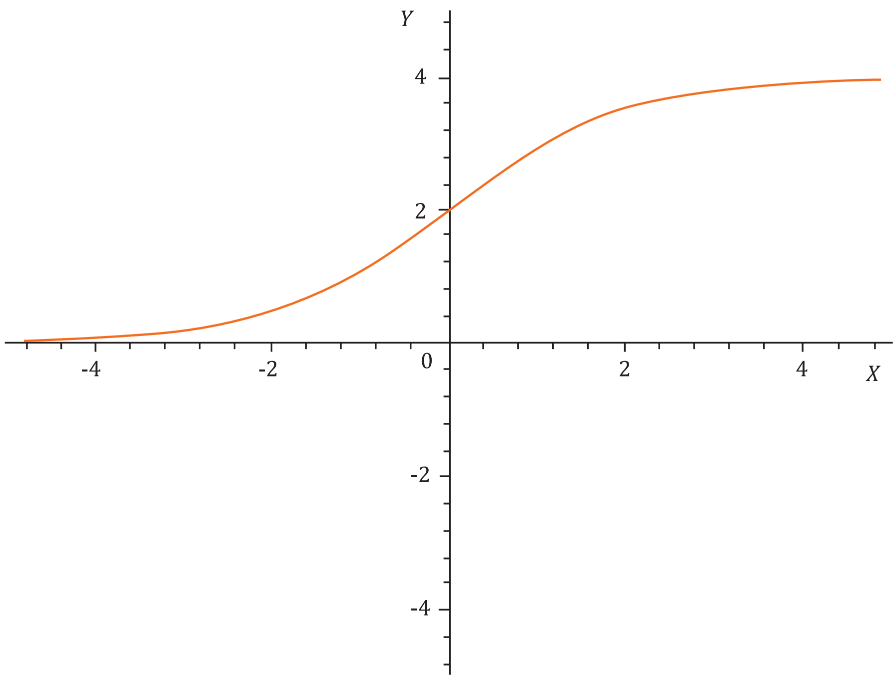

u. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$



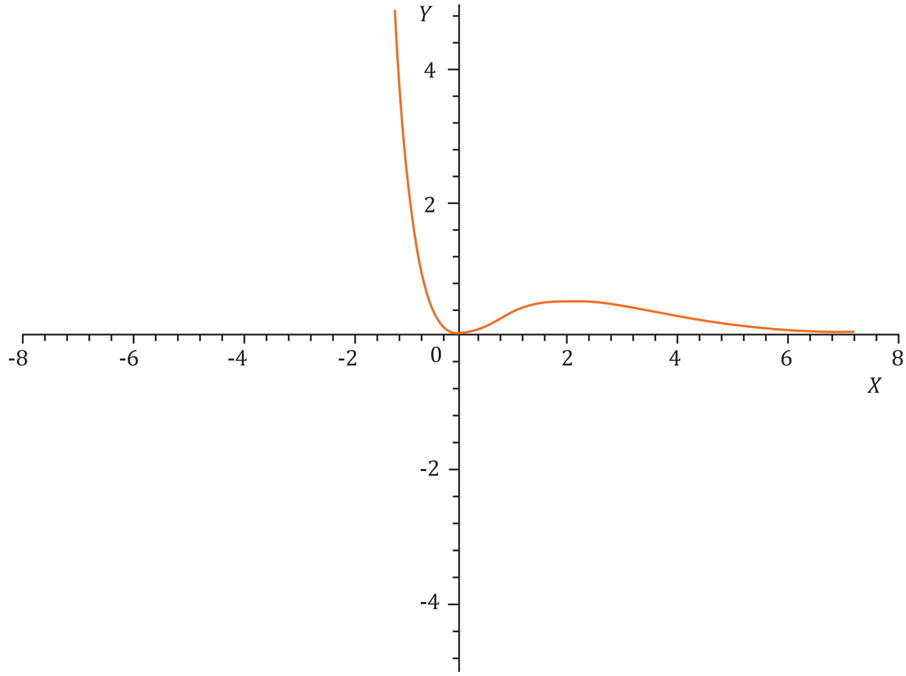
v. $f(x) = x + \frac{4}{x}$



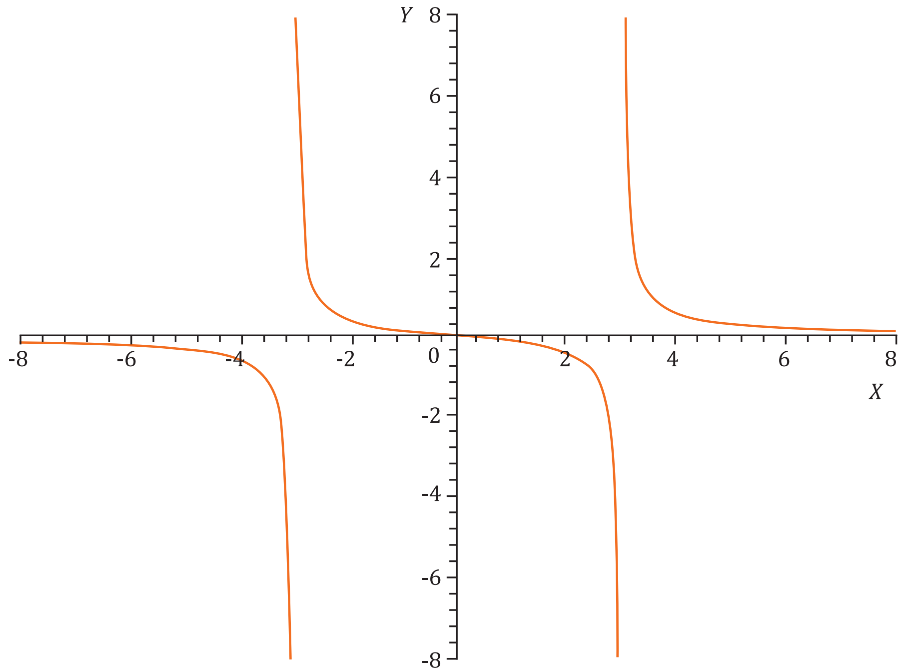

w. $f(x) = \frac{4}{1 + e^{-x}}$



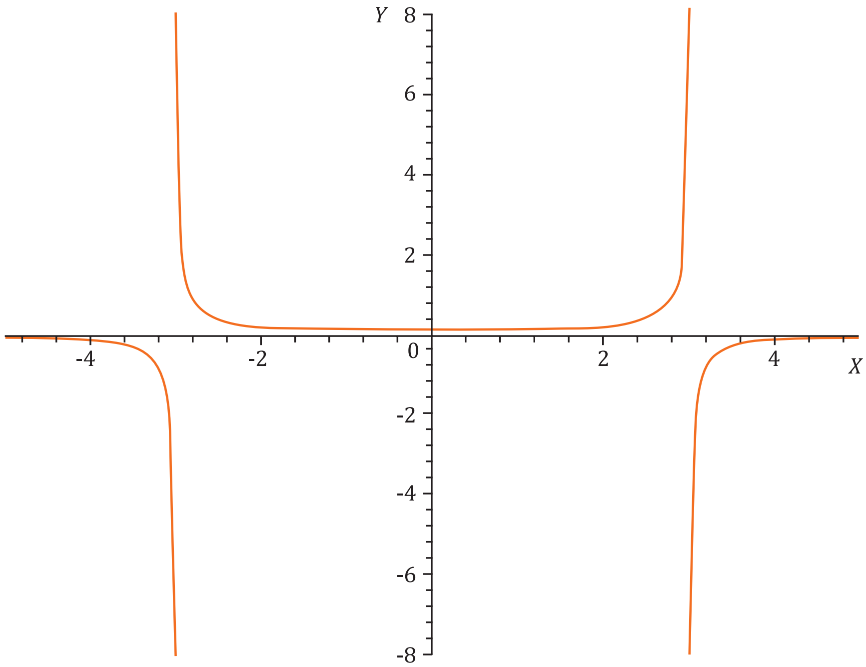
x. $f(x) = x^2e^{-x}$




y. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$



z. $f(x)=\dfrac{1}{9-x^2}$




2. No. Si $f(x)=x$, $g(x)=x+1$, entonces $f'(x)=g'(x)$ en cualquier intervalo $(a, b)$. Sin embargo $f(x)\neq g(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

3. a. $f(x)=\frac{1}{3}x^3$ b. $f(x)=x^2-1$ c. $f(x)=x^2+5x-9$

4. Demostración, numeral 1, ejercicios 5,4.

## EJERCICIO 5.6

1. $x=\frac{M}{4}$ m, $y=\frac{M}{4}$ m.

2. 2m de ancho, 1m de altura.

3. a. $5\sqrt{2}$ cm de base, $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm de altura.

   b. $R\sqrt{2}$ de base, $R\sqrt{2}$ de altura.

   c. $6\sqrt{2}$ de base, $6\sqrt{2}$ de altura.

d. $\frac{L}{2}$ de base, $\frac{L\sqrt{3}}{4}$ de altura.

e. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ de base, $\frac{32}{3}$ de altura.

4. 80 m.

5. $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ de radio, $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ de altura.

6. a. 40, 80 b. 0, 120

7. a. $2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ b. 10, 10

8. $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

9. 850 $cm^2$

10. 180000 $m^2$

11. 10, 10, 10

12. a. $\frac{\sqrt{A}}{6}, \frac{2A\sqrt{A}}{27}$ b. $\frac{10}{3}$ cm, $\frac{16000}{27}$ $cm^3$

13. $4+10\sqrt{2}, 6+15\sqrt{2}$

14. a. i) Para que la suma de las áreas sea máxima, la parte para el cuadrado debe medir $\frac{480}{\pi+4}$ cm y la parte para la circunferencia debe medir $\frac{120\pi}{\pi+4}$ cm.

ii) Para que la suma de las áreas sea mínima basta con que la parte del cuadrado mida 120 cm.

b. i) Para que la suma de las áreas sea máxima, la parte del cuadrado debe medir $\frac{480\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$ cm y la parte para el triángulo equilátero debe medir $\frac{1080\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$ cm.

ii) Para que la suma de las áreas sea mínima, la parte para el triángulo equilátero debe medir 120 cm.

15. 2m, $\frac{4}{3}$ m

16. a. 5000 artículos b. \$9000

c. $\eta(200) = -99$, la demanda es elástica porque $|\eta(200)| > 1$

17. $\frac{10\sqrt[3]{3\pi^2}}{\pi}$ m de radio, $\frac{10\sqrt[3]{3\pi^2}}{\pi}$ m de altura, $300\sqrt[3]{9\pi^2}$ de área mínima.

18. $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ cm de radio, $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ de altura.

19. $\sqrt[6]{64800}$ cm de radio, $\frac{60}{\sqrt[3]{300}}$ cm de altura.

20. $\frac{1}{4}$

21. a. 40 cm de base mayor, 20 cm de base menor, $10\sqrt{3}$ cm de altura

    b. $2R$ de base mayor, $R$ de base menor, $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ de altura.

22. a. $20+\frac{5}{3}\left(-1+\sqrt{73}\right)$ cm de base mayor, $\frac{10}{3}\left(-1+\sqrt{73}\right)$ cm de base menor, $\frac{5}{3}\sqrt{70+2\sqrt{73}}$ cm de altura.

23. Las dos semicircunfencias tienen radio $\frac{100}{\pi}$ m, que determina el ancho del rectángulo. El largo de el rectángulo es 100 m.

24. a. $\frac{1}{4}$ b. $a=\frac{2\sqrt{5}}{5}, b=\frac{\sqrt{5}}{5}$

25. a. 15 artículos b. \$1250

    c. $\eta(20) = -20$, $|\eta(20)|>1$, luego la demanda es elástica para 20 artículos. $\eta(40)=-\frac{1}{4}$, $|\eta(40)|<1$, luego la demanda es inelástica para 40 artículos. Esto significa que producir 20 artículos y disminuir el preco unitario de cada uno de ellos implica un aumento en la ventas suficiente para que los ingresos aumenten. Sin embargo producir 40 artículos y disminuir el precio unitario de cada uno de ellos implica un aumento en las ventas que no es suficiente para que los ingresos aumenten.
    En efecto $I(20)=\$(100-2\times20)\times20=\$60\times20=\$120$.
    $I(40)=\$(100-2\times40)\times40=\$20\times40=\$800<\$1200=I(20)$.

    d. Utilidad marginal $-60$, ingreso marginal 0

26. \$1730000, \$40000

27 a. i) 200 sillas ii) 400 sillas

   b. \$70000, \$20000

   c. i) $x=700$ ii) $x=1000$

   Cuando se producen 700 sillas y se disminuye el precio unitario de cada una de ellas hay un incremento en las ventas que genera un ingreso. No tiene sentido hablar de 100 sillas porque como $\eta(1000)>0$, tendríamos $p(1000)<0$, es decir que se estaría regalando sillas y dinero adicional.

28. \$2700000

29. 45 grabadoras.

30. El valor que minimiza el costo promedio por piso, es el menor número natural mayor o igual a $\sqrt{\frac{c}{a}}$, porque el número de pisos tiene que ser un número natural. Nótese que si el costo del terreno aumenta, digamos de $c$ a $c_1$, tenemos $x = \sqrt{\frac{c}{a}} < \sqrt{\frac{c_1}{a}} = x_1$, luego el nuevo óptimo es mayor o igual al óptimo anterior.

31. 125

32. 1250

33. $q$=2500, $p$=1. Nótese que el ingreso marginal $\frac{dx}{dq} = \frac{25}{\sqrt{q}}$ y el costo marginal es $\frac{dc}{dq} = 0.5$, luego $\left.\frac{dx}{dq}\right|_{q=2500} = \frac{25}{\sqrt{2500}} = \frac{25}{50} = 0.5 = \left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=2500}$

34. 75, \$5625000

35. $\frac{\sqrt{6}}{3}R$ de radio, $\frac{\sqrt{3}}{3}R$ de altura

36. $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$ es el radio, $\frac{4}{3}R$ es la altura

37. A 15 metros de ambos postes

38. 6.21 cm

39. 5 árboles

40. $q$ = 40 unidades; costo promedio mínimo es: 23

41. a. 40, 400 b. $\eta(20) = -3, \eta(60) = -\frac{1}{3}$

42. US\$ 4.35, 21750

43. a. 90 unidades b. \$220 c. \$17420 d. \$230

44. a. En el nivel de producción de $x$ = 5 utilidad máxima es de 50.

 b. Utilidad máxima $\frac{1}{8}(20 - t)^2$

 c. Una tasa de impuesto de 10 por unidad producirá un impuesto sobre la renta.

45. El valor de $A$ que maximiza la utilidad neta es 2300.

46. Deben venderse 3000 sacos.

47. Para el nivel de producción $q=40$ el costo promedio es de 23.

48. Debe producir 300 unidades para maximizar el ingreso total.

49. Dixie debe realizar 10 pedidos por año, cada uno de 1000 motocicletas.

50. El valor presente óptimo del precio de mercado del edificio es de $600779 y esto ocurrirá dentro de 7.72 años.

## EJERCICIO 5.7

1. a. $x(t)=\frac{1}{2}\sqrt{76+36t-t^2}$ b. $x(6)=8$ m. c. 3.717 seg.

2. a. Area$(t)=\pi^2 A^2 t^2$ b. $36\pi$ m$^2$. c. 36.06 km.

3. a. 100 km. b. $\sqrt{(60-20t)^2+(80-25t)^2}$ c. 36.06 seg.

4. a. 0 b. $\sqrt{1025}\,t$ c. 64.03 km.

5. a. $\sqrt[3]{\frac{27t}{20\pi}}$ en metros b. $6-\sqrt[3]{216-\frac{27t}{20\pi}}$ en metros c. $3\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ m.

6. a. $\frac{dr}{dt}=\frac{125}{\pi r^2}$ cm/seg b. 100 minutos

7. a. $24\pi$ m$^2$/min b. $96\pi$ m$^2$/min

8. a. $\frac{8}{405}\pi$ cm/min b. $\frac{40}{9\pi x^2}$ cm/min

9. a. 9 cm$^3$/seg b. 900 cm$^3$/seg c. $9x^2$ cm$^3$/seg

10. a. 0 b. 12 cm/min

# CAPÍTULO 6

## EJERCICIO 6.1

1. a. $dy = (2x + 7)dx$ b. $dy = 8t(t^2 + 1)^3$ c. $dy = (1 + \ln t)dt$

   d. $dy = (1-u)\, e^{-u}$ e. $dy = \frac{2zdz}{z^2+1}$ f. $dy = \frac{(1-2x-x^2)}{(x^2+1)^2}$

   g. $dy = \frac{ue^u}{(u+1)^2}$ h. $dy = \frac{-2e^u du}{(e^u-1)^2}$ i. $dy = \frac{(2x-3)dx}{2\sqrt{x^2 3x}}$

   j. $dy = \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$ k. $dy = 2xdx$ l. $dy = \frac{dt}{2\sqrt{t+1}}$

2. a.
   - $f$ es continua en $\mathbb{R}$ porque $f'$ existe en todo $\mathbb{R}$.
   - $f$ es creciente en el intervalo $(-\infty, m)$ y decreciente en el intervalo $(m, \infty)$ porque $f'$ es positiva en o $(-\infty, m)$ y negativa en $(m, \infty)$.
   - $f$ es cóncava hacia abajo en $\mathbb{R}$ porque $f'$ es decreciente en todo $\mathbb{R}$.
   - El punto $(m, f(m))$ es un máximo relativo de $f$ porque $f'(m)=0$ y $f'$ cambia de creciente a decreciente en $x = m$.

   b.
   - $f$ es continua en $\mathbb{R}$ porque $f'$ existe en todo $\mathbb{R}$.
   - $f$ es decreciente en $\mathbb{R}$ porque $f'(x)<0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   - $f$ pertenece a una familia de rectas con pendiente negativa porque $f'$ es constante en $\mathbb{R}$ y tal constante es negativa.

   c.
   - $f$ es continua en todo $\mathbb{R}$ porque $f'$ existe en todo $\mathbb{R}$.
   - $f$ es creciente en $\mathbb{R}$ porque $f'(x)>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   - $f$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, a)$ y cóncava hacia arriba en $(a, \infty)$ donde $a \in \mathbb{R}$ es el punto tal que $(a, f(a))$ es mínimo de $f$, porque $f'$ es decreciente en $(-\infty, a)$ y creciente en $(a, \infty)$.

   d.
   - $f$ es continua en todo $\mathbb{R}$ porque $f'$ existe en todo $\mathbb{R}$.
   - $f$ es decreciente en cada uno de los intervalo $(-\infty, a),(b, c)$ porque $f'$ es creciente negativa en cada uno de estos intervalos.
   - $f$ es cóncava hacia arriba en cada uno de los intervalos $(-\infty, d)$, $(e, \infty)$ porque $f'$ es creciente en cada uno de estos intervalos.
   - $f$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(d, e)$ porque $f'$ es decreciente en este intervalo.
   - El punto $(a, f(a))$ es un mínimo relativo de $f$ porque $f'(a)=0$, $f$ es decreciente en $(-\infty, a)$ y creciente en $(a, b)$.
   - El punto $(b, f(b))$ es un máximo relativo de $f$ porque $f'(b)=0$, $f$ es creciente en $(a, b)$ y decreciente en $(b, c)$.
   - El punto $(c, f(c))$ es un mínimo relativo de $f$ porque $f'(c)=0$, $f$ es decreciente en $(b, c)$ y creciente en $(c, \infty)$.

e. • $f$ es continua en todo $\mathbb{R}$—{0} porque $f'$ existe en todo $\mathbb{R}$—{0}.
- $f$ no es necesariamente continua en $x$=0.
- $f$ es creciente en el intervalo (0, ∞) porque $f'(x)$=1>0, para todo $x$>0.
- $f$ es decreciente en el intervalo (—∞, 0) porque $f'(x)$=—1<0, para todo $x$<0.
- $f$ es cóncava hacia arriba en cada uno de los intervalos (—∞, $d$), ($e$, ∞) porque $f'$ es creciente en cada uno de estos intervalos.
- $f$ no tiene concavidad.

Familia de funciones continuas que cumplen las características de $f'$.
Una función no continua en $x$=0 ($f(0)$=0) que cumple con las características de $f'$.

f. • $f$ es continua en todo $\mathbb{R}$ porque $f'$ existe en todo $\mathbb{R}$.
- $f$ es creciente en $\mathbb{R}$ porque $f'(x)$>0 para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $f$ es cóncava hacia arriba en (0, ∞) porque $f'$ es creciente en (0, ∞).
- $f$ es cóncava hacia abajo en (—∞, 0) porque $f'$ es decreciente en (—∞, 0).

3. a. Para $f'$ se pueden observar tres casos:

I. $f'$ es continua en $x$=0
Familia de funciones $f'$ que cumplen con la características de $f''$. El análisis de $f'$ está hecho en el inciso e. del punto anterior.

La curva correspondiente a $L_3$ es creciente en cada no de los intervalos (—∞, —$a$), ($a$, ∞) donde $a$ y —$a$ son los cortes de $L_3$ con en el eje $X$.
El análisis para $L_3$ y $L_2$ fue hecho en el inciso f. del punto anterior.

II. $f'$ no continua en $x$=0

Una función no continua $f'$ que cumple con las características de $f''$. El análisis se esta función se realizó en el inciso e. del punto anterior.

En este caso no existe na funcion $f$ talque su derivada $f'$ coincide con la función dada en la gráfica. Para ver esto nótese que la función dada tiene la forma:

$$F(x) = \begin{cases} x + a & , x \geq 0 \\ -x - b & , x < 0 \end{cases}$$

Con $a$≠0, $b$≠0 y $a$≠—b. Ahora, la función

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + ax + c & , x \geq 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} - bx + d & , x < 0 \end{cases}$$

satisface que $G'(x)$=$F(x)$ para todo $x$≠0.

Sin embargo

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{G(0+h)-G(o)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{G(h)-G(o)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h^2}{2}+ah+c-G(0)}{h}, \text{ y}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{G(0+h)-G(o)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{G(h)-G(o)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\frac{h^2}{2}-bh+d-G(0)}{h}$$

Así, para que $G$ fuese diferenciable en 0, necesitaríamos que $G(0)=c=d$ (que es posible) y $a=-b$, pero en este caso. $a\neq -b$, luego $G'(0)$ no existe. Cualquier otra función $H$ tal que $H'(x)=F(x)$ para $x\neq 0$, debe tener la forma de $G$ para $x\neq 0$. Por tanto no existe una función $G$ tal que $G'(x)=F(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

III. $f'$ no definida en $x$=0.

- $f'$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ porque $f''$ existe en todo $\mathbb{R}-\{0\}$.
- $f'$ es creciente en $(0, \infty)$ porque $f'(x)=1>0$ para todo $x>0$.
- $f'$ es decreciente en $(0, \infty)$ porque $f'(x)=-1<0$ para todo $x<0$.
- $f'$ no tiene concavidad.
- $f$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ porque $f'$ existe en todo $\mathbb{R}-\{0\}$.
- $f$ puede o no, ser continua en $x$=0 (en este caso es continua)
- $f$ es creciente en $(-\infty, a)$ porque $f'(x)>0$ para todo $x\in(-\infty, a)$ y $f$ es decreciente en $(a, 0)$ porque $f'(x)<0$ para todo $x\in(a, 0)$
- $f$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ porque $f'$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.

b.
- $f'$ es continua en $\mathbb{R}$ porque $f''$ existe en todo $\mathbb{R}$.
- $f'$ es creciente en $\mathbb{R}$ porque $f''(x)$ es una constante positiva para todo $\mathbb{R}$.
- $f'$ pertenece a una familia de rectas de pendiente positiva.
- $f$ es continua en $\mathbb{R}$ porque $f'$ existe en todo $\mathbb{R}$.
- $f$ pertenece a una familia de parábolas cóncavas hacia arriba en todo $\mathbb{R}$, porque $f'$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

c.
- $f'$ es continua en $\mathbb{R}$ porque $f''$ existe en todo $\mathbb{R}$.
- $f'$ es creciente en $(0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$ porque $f''(x)>0$ para todo $x\in(0, \infty)$ y $f''(x)<0$ para todo $x\in(-\infty, 0)$.
- $f'$ pertenece a una familia de parábolas cóncavas hacia arriba en todo $\mathbb{R}$, porque $f''$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.
- $f$ es continua en $\mathbb{R}$ porque $f'$ existe en todo $\mathbb{R}$.
- $f$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y hacia arriba en $(0, \infty)$ porque $f'$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$
- $f$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

d. El análisis de $f$ se realizó en inciso anterior.
- $f$ es continua en $\mathbb{R}$ porque $f'$ existe en todo $\mathbb{R}$.
- $f$ es cóncava hacia arriba en todo $\mathbb{R}$ porque $f'$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.
- $f$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

La gráfica correspondiente a $c_i$ es creciente en $(a_i, \infty)$ y decreciente en $(-\infty. a_i)$ donde $a_i$ es el corte de $c_i$ con el eje $X$, para $i$ = 1, 2, 3.

4. a. $f(x) = x^2+2$; $f(x)=x^2-2$; $f(x)=x^2-r^2$
   b. $f(x) = x^3+5x$; $f(x)=x^3+5x+2$; $f(x)=x^3+5x+a^2$
   c. $f(x) = \ln(x)$; $f(x)=\ln(kx)$; $f(x)=\ln(x)+k$
   d. $f(x) = ce^x$
   e. $f(x) = \frac{1}{c^2}e^{cx}$

5. a. $f(x) = x^2+3x+c$
   b. $f(x) = x^3-2x^2+x+c$
   c. $f(x) = \frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-a^2x+c$
   d. $f(x) = e^x + c$
   e. $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$
   f. $f(x) = \frac{1}{c}(2x+1)^3+c$
   g. $f(x) = e^{x^2}+x$
   h. $f(x) = \frac{1}{c}e^{cx}+k$, $k$ constante
   i. $f(x) = \frac{x^3}{3}-r^2x+c$

6. a. $f'(x) = 12x+c_1$; $f(x)=6x^2+c_1x+c_2$, $c_1$, $c_2$ constantes.
   b. $f'(x) = -6x^2+10x+c_1$; $f(x)=-2x^3+5x^2+c_1x+c_2$, $c_1$, $c_2$ constantes.
   c. $f'(x) = gx+c_1, f(x)=\frac{g}{2}x^2+c_1x+c_2, c_1, c_2$ constantes.
   d. $f'(x) = e^x+e^{-x}+c_1$; $f(x)=e^x-e^{-x}+c_1x+c_2$, $c_1$, $c_2$ constantes.
   e. $f'(x) = \frac{1}{a}e^{ax}-6x+c_1, f(x)=\frac{1}{a^2}e^{ax}-3x^2+c_1x+c_2, c_1, c_2$ constantes.
   f. $f'(x) = -\frac{k}{2}x^2+rx+c_1, c_1, c_2$ constantes.

7. a. $v(t)=k(s(t))^2$ para algún $k>0$, donde $s(t)$, $v(t)$ son el desplazamiento y la velocidad en función del tiempo.
   b. $\frac{dT}{dt}=kT(t)$ para algún $k>0$, donde $T(t)$ es la temperatura en función del tiempo.
   c. $\frac{dC}{dt}=k$ para algún $k>0$, donde $C(t)$ es el costo de $x$ unidades del producto.
   d. $\frac{dI}{dx}=kx$ para algún $k>0$, donde $I(x)$ es el ingreso por vender $x$ unidades del producto.

## EJERCICIO 6.2

1. a. $x^3+\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln(x)+x+c$
   b. $-\frac{1}{4x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\sqrt{2x}+c$
   c. $x^3-x^2+7x-\ln(x)+c$
   d. $2ax^3-2bx^2+y^2x+c$
   e. $3e^x+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\ln 5}5^x+c$
   f. $-ae^{-x}+\frac{15}{4\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{\ln 3}3^x+e^2x+c$

2. a. Si
   b. No
   c. Si
   d. Si

3. a. $f(x) = x^2+2$ b. $f(x) = x^3-3x^2+e^x+1$

c. $f(x) = -3x^2+2\ln(x)+7$ d. $f(x) = 1000 + \frac{2^x-1}{\ln 2}$

4. a. $f(x) = -x^3+2x+10$ b. $f(x) = x^4+2x+e^x-1$

c. $y(x) = f(x)=-12x^2$

## EJERCICIO 6.3

1. $\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+c$
2. $\frac{1}{18}(3x+2)^6+c$
3. $\frac{1}{3}e^{3x}+c$
4. $\frac{1}{6}\sqrt{(4x-1)^3}+c$
5. $\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}+c$
6. $\frac{1}{3}\ln(3x+5)+c$
7. $-e^{(1-x)}+c$
8. $x+\ln(2x+1)+c$
9. $\frac{1}{6}(x-1)^6+5x+c$
10. $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$
11. $\frac{1}{b^2}\left(bx-a\ln(a+bx)\right)+c$
12. $e^{x^2-1}+c$
13. $\frac{1}{12}(t^2+1)^6+c$
14. $\frac{1}{2}(x+1)^2+2\ln|x-1|+c$
15. $\sqrt{(t^2+8)^3}+c$
16. $\frac{4}{21}(x^3+1)^{\frac{7}{4}}+c$
17. $\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)+c$
18. $-\frac{1}{6}e^{1-x^6}+c$
19. $\frac{2}{5}\ln(y^5+1)+c$
20. $\sqrt{x^2+1}+c$
21. $-\frac{1}{3(y^3+5)}+c$
22. $\frac{1}{26}(x^2+2x+5)^{13}+c$
23. $2\sqrt{t^3}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}t\right)+c$
24. $\frac{1}{6}\ln(1+x^6)+c$
25. $\frac{3}{5}\ln|x^5+5x^4+10x+12|+c$
26. $5\sqrt{x^4-x^2+6}+c$
27. $\frac{-3}{2(u^2-2u+6)}+c$
28. $\frac{1}{a}e^{ax}+c$
29. $\frac{3}{2}\ln|2u-1|+c$
30. $\frac{1}{2}\ln(5x)^2+c$

31. $\frac{-3}{2(1+x^2)^2}+c$

32. $\ln(\ln x)+c$

33. $-\frac{1}{\ln x}+c$

34. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|+c$

35. $\frac{1}{3}(\ln x)^3+c$

36. $\frac{1}{2}\left(\ln(x^2+1)\right)^2+c$

37. $x-\ln(e^x+1)+c$

38. $2e^{\sqrt{x}}+c$

39. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+c$

40. $\ln(1+x^2)+c$

41. $\frac{2}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}}+c$

42. $-\frac{1}{x+1}+c$

43. $-\frac{1}{\ln|x|}+c$

44. $-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+c$

45. $\sqrt{e^{2x}-2}+c$

46. $\frac{1}{3}\ln|3x+1|+c$

47. $\frac{1}{6}\ln|3x^2+2|+c$

48. $\frac{3}{2}x^2+2\ln|x|+c$

49. $x+\ln|x|+c$

50. $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+c$

51. $\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+c$

52. $-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|+c$

53. $\ln|x-1|+\ln|x|+c$

54. $\frac{1}{2}(\ln|x|)^2+c$

55. $2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+c$

56. $\ln|e^x+e^{-x}|+c$

57. $\ln|e^x+1|+c$

58. $\frac{2}{9}\sqrt{(1+x^3)^3}+c$

59. $e^{x^2}+c$

60. $-x-2\sqrt{x+1}+c$

61. $\frac{1}{3}x^3-x^2+4x-8\ln|x+2|+c$

62. $-\frac{8x+1}{48(2x+1)^4}+c$

63. $-\frac{1}{40(4x^2+3)^5}+c$

64. $\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-e^{-2x}|+c$

65. $\frac{1}{3}\sqrt{3z^2+6z+5}+c$

66. $\frac{1}{8}\ln|8z+3|+c$

67. $\frac{1}{2}e^{x-2}+2e^{x-2}+xe^{-2}+c$

68. $\frac{1}{4}e^{4x}+c$

69. $-\frac{1}{e^x+1}+c$

70. $\ln|e^x+1|+c$

71. $-\frac{1}{x+1}+c$

72. $\frac{1}{8}x^4-2x^2+8\ln|x|+c$

73. $\frac{1}{2}(2x-7)^2+c$

74. $\frac{x^2}{2}+3x+\ln|x|+c$

75. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+c$

76. $\frac{1}{2}e^{2x+3}+c$

77. $-\frac{1}{4(x^2+1)^2}+c$

78. $x-\frac{1}{3}e^{-3x}+c$

79. $4\ln\left|\sqrt{x}+4\right|+c$

80. $\frac{1}{3}(2+\ln|x|)^3+c$

81. $e\ln|x|+\frac{x^2}{2e}+c$

82. $\frac{x^2}{2}e^{-2}-\frac{e}{x}+c$

83. $(e^2-2^e)e^x+c$

84. $\frac{3}{2}x+c$

85. $2x+c$

86. $2x+c$

87. $e^x\ln 3+c$

88. $\frac{e^x}{\ln 2}+c$

89. $ex+c$

90. $\frac{x^3}{3}+x+c$

91. $\frac{x^4}{4}+c$

92. $\frac{1}{3}e^{3x+2}+c$

93. $-\frac{1}{2}e^{5-2x}+c$

94. $\frac{1}{3}e^{3x-5}+c$

95. $\frac{1}{3}e^{3x+2}+c$

96. $-\frac{1}{2}e^{8-2x}+c$

97. $\frac{1}{2}e^{t^2}+c$

98. $\frac{1}{n}e^{x^n}+c$

99. $-\sqrt{4-x^2}+c$

100. $-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{x}}+c$

101. $-\frac{2}{3}e^{-x\sqrt{x}}+c$

102. $\frac{1}{3}e^{x^3}+c$

103. $e^{x^2-x}+c$

104. $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}+c$

105. $-\frac{1}{2(e^{2x}+1)}+c$

106. $\frac{1}{3}\ln|e^{3x}+1|+c$

107. $-2\ln\left|1-e^{\frac{x}{2}}\right|+c$

108. $x+\ln|x-1|+c$

109. $\frac{1-x}{4(x-5)^2}+c$

110. $-\frac{7}{x-4}+\ln|x-4|+c$

111. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln|2x+1|+c$

112. $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$

113. $\frac{1}{11}(x-1)^{11}+\frac{1}{5}(x-1)^{10}+c$

114. $\frac{1}{5}(2x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+c$

115. $\frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+c$

116. $\frac{1}{35}(2x+1)^{\frac{3}{2}}(5x^2-2x-11)+c$

117. $\frac{4}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}}+\frac{22}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}}+c$

118. $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+9)^3}+c$

119. $-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4+c$

## EJERCICIO 6.4

1. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+c$

2. $-e^{3-x}(3x^2+6x+5)+c$

3. $\frac{e^x}{x+1}+c$

4. $\frac{1}{2}t^2\ln|t|-\frac{1}{4}t^{2+c}$

5. $e^x(x^2+1)+c$

6. $-\frac{2}{3}\sqrt{1-e^x}+c$

7. $-(x+1)e^{-x}+c$

8. $\frac{e^{2x}}{4(2x+1)^2}+c$

9. $-\frac{1}{27}e^{-3z}(9z^2+6z+2)+c$

10. $x\left(\frac{x}{2}+1\right)\ln|x|-\frac{x^2}{4}-x+c$

11. $\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}\big((n+1)\ln|x|-1\big)+c$

12. $\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}\big((n+1)\ln|ax|-1\big)+c$

13. $3^x\left(\frac{1}{\ln 3}-\frac{1}{(\ln 3)^2}\right)+c$

14. $\frac{1}{9}x^3(3\ln|2x|-1)+c$

15. $e^x(x^2-7x+7)+c$

16. $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+c$

17. $e^x(x^2-2x+2)+c$

18. $a^x\left(\frac{x}{\ln a}-\frac{1}{(\ln a)^2}\right)+c$

19. $\frac{1}{4}(2x^2\ln|x|-x^2)+c$

20. $\frac{1}{16}(4x^4\ln|x|-x^4)+c$

21. $\frac{1}{9}x^3(3\ln|x|-1)+c$

22. $\frac{1}{2}(t^2-1)\ln|t+1|-\frac{(t-1)^2}{4}+c$

23. $-\frac{2}{x}(\ln|x|+1)+c$

24. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln|x|-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+c$

25. $\frac{3}{16}x^4(4\ln|x|-1)+c$

26. $\sqrt{x}\ln|x|-2\sqrt{x}+c$

27. $\frac{1}{3}x^3\ln|x|+5x\ln|x|-\frac{1}{9}x^3-5x+c$

28. $\frac{x}{m}e^{mx}-\frac{1}{m^2}e^{mx}+c$

29. $-\frac{x}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c$

30. $e^x(x-1)+c$

31. $\frac{2}{3}e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+\frac{1}{3}e^{3x}+c$

32. $\frac{1}{4}x^2(2\ln|x|-1)+c$

33. $x^5e^x-5x^4e^x+20x^3e^x-60x^2e^x+120xe^x-120e^x+c$

34. $\frac{1}{27}e^{3y}(9y^2-6y+2)+c$

35. $2x\ln|x|-2x+c$

36. $\frac{1}{9}x^3(3\ln|x|-1)+c$

37. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+c$

38. $2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}+c$

39. $-(x+1)e^{-x}+c$

40. $-x^2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+c$

41. $\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+c$

42. $-e^{\frac{1}{t}}+c$

43. $\frac{1}{4}t^2e^{4t}-\frac{t}{8}e^{4t}+\frac{1}{32}e^{4t}+c$

44. $\left(\frac{1}{2}(\ln|z|)^2-\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{1}{4}\right)z^2+c$

45. $\left(\frac{x^2}{\ln 2}-\frac{2x}{(\ln 2)^2}+\frac{2}{(\ln 2)^3}\right)2^x+c$

46. $(x+1)\ln|x+1|-(x+1)+c$

47. $\frac{1}{108}x^6(18(\ln|x|)^2-6\ln|x|+1)+c$

48. $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)e^{2x}+c$

49. $-e^{-x}(x^4+4x^3+12x^2+24x+24)+c$

50. $\left(\frac{1}{4}(\ln|x|)^2-\frac{1}{8}\ln|x|+\frac{1}{32}\right)x^4+c$

51. $\frac{1}{4}x^2(2\ln|x|-1)+c$

## EJERCICIO 6.5

1. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

2. $x-\frac{9}{5}\ln|x+3|+\frac{4}{5}\ln|x-2|+c$

3. $\frac{5}{2}\ln|x^2-4|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

4. $\ln|x|+\ln|x-2|-2\ln|x+1|+c$

5. $\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|2x-1| + \frac{3}{4}\ln|2x-1| + c$

6. $x + 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + c$

7. $-\frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3x} + \frac{1}{9}\ln|x+3| + c$

8. $\frac{1}{x} + 3\ln|x-1| + c$

9. $\frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|3-x| + c$

10. $\frac{1}{t+2} + \ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + c$

11. $\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{2}\ln|2x+3| + c$

12. $\frac{1}{2}(x+2)^2 - \ln(|x+1||x+3|) - \frac{3}{x-1} + c$

13. $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 14\ln|x-2| + c$

14. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 5\ln|x+2| + c$

15. $\frac{1}{2}(x-4)^2 - 4\ln|x+1| + 13\ln|x+2| + c$

16. $x^2 + 11x - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{77}{2}\ln|x-3| + c$

17. $x - 6\ln|x-1| + 11\ln|x-2| + c$

18. $\frac{1}{2}x^2 - \ln|x(x^2-1)| + c$

19. $x + 2\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + c$

20. $-3\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{11}{3}\ln|x-2| + c$

21. $\frac{5}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{8}{3}\ln|x+2| + c$

22. $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln|x^2+4| + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$

23. $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + 2\ln|x+3| + c$

24. $\frac{5}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + c$

25. $\frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{5}{2}\arctan(x) + c$

26. $\frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \frac{2}{5}\arctan(x+1) - \frac{4}{5}\ln|x-1| + c$

27. $\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{2(x^2-1)}\right| + c$

28. $-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln|x-1| + c$

29. $-\frac{5}{3(x-1)} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + c$

30. $\frac{15}{16}\ln|x+1| + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{17}{16}\ln|x-3| + c$

31. $-\frac{3}{4}\ln|x+1| + \frac{7}{4}\ln|x-1| + \frac{x-2}{2(x-1)^2} + c$

32. $\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x-1)} + c$

33. $\ln|x^2+4| + \frac{11}{6}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \frac{2}{3}\arctan(x) + c$

34. $-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$

35. $\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln|x+1| - \ln|x-2| + \frac{7}{8}\ln|x-3| + c$

36. $\frac{18}{25}\ln|x-1| + \frac{2}{5(x-1)} + \frac{7}{50}\ln|x^2+2x+2| - \frac{51}{25}\arctan(x+1) + c$

37. $\frac{19}{50}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{4}{25}\ln|x-1| + \frac{2}{25}\ln|x^2+4| - \frac{2}{5(x-1)} + c$

38. $-\frac{5}{27}\ln|x+1| + \frac{1}{9(x+1)} + \frac{32}{27}\ln|x-2| - \frac{5}{9(x-2)} + c$

39. $\frac{12-9x}{8(x^2-4)} + \frac{1}{32}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + c$

40. $2\ln|x^2+4| + \frac{5}{4}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{16-11x}{2(x^2+4)} + c$

41. $\frac{1}{2}y^2 - 2y + 2\ln|y(y+2)| + \frac{4}{y} + c$

42. $-8\ln|t-2| + 2\ln|t^2-1| + 3\sqrt{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c$

43. $\ln|z-1| - \frac{2}{z-1} - \frac{1}{2(z-1)^2} + c$

44. $\frac{1}{2}t^2 - \frac{8}{t^2+4} - 4\ln|t^2+4| + c$

45. $\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c$

46. $\ln|x^2+3| + 2\ln|x| + c$

47. $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + \ln\left|\frac{2x-1}{x}\right| + x + c$

48. $\frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \frac{1}{x^2+1} + c$

49. $\ln|x^2-6x+8| + 4\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right| + c$

50. $\frac{1}{2}\ln|(4x+1)(x^2+1)| - \arctan(x) + c$

51. $\ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + 3\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{5}{2(x^2+2)} + c$

## EJERCICIO 6.6

1. a. $y = \frac{1}{2}e^{2x+3}$

   b. $y^2 = -x^2 + c$

   c. $y = ce^{x^2+x}$

   d. $y = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} + c$

   e. $y = -\frac{1}{3(x^3+1)} + c$

   f. $y = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + c\right)^{\frac{3}{5}}$

   g. $p = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - e^{-t} + c$

   h. $s = \frac{1}{2}gt^2 + c_0t + c_1$

i. $y = 4x^3 + x^2 + c_0x + c_1$

j. $y = c(x-1), c > 0$

k. $y = -\ln\left|-2\sqrt{x+1} + c\right|$

l. $y = -3 + c \cdot \exp\left(-\frac{1}{10(2x-5)^5}\right)$

m. $y = -\ln\left|-1 + c \cdot \exp\left(-\frac{1}{10}(x-2)^{10}\right)\right|, c > 0$

n. $x = ce^{\frac{t}{2}}(2t+1)^{-\frac{1}{4}}, c > 0$

o. $y = -\ln\left|-\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\ln|2t-1| + c\right|$

2. a. $y = x^2 + 3x + 8$

b. $y^2 = x^2 + 16$

c. $y = Pe^{\frac{x^2}{2}}$

d. $y = 2\ln|x| - 1$

e. $y = -5x^2 + 100x$

f. $y = 4x^3 - 11x$

g. $y = \frac{6}{4(4-x)^{\frac{3}{2}} + 3}$

h. $y = -\ln\left|1 + \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-1}\right|$

i. $x = \frac{9e^{y-2}}{(y+1)^2}$

j. $x = \exp\left(\frac{4}{15} + \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}\right)$

3. a. Verdadera

b. Falsa

4. a. $y = x^2 + x$

b. $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 6$

c. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{x} + 2x - \frac{5}{4}$

5. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x$

6. a. $y = x^2 + 3x + 1$

b. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5$

c. $y = x^2 - 5x + 4$

d. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$

e. $y = 1 + \frac{1}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}}$

f. $y = -\frac{1}{3}\ln|1 - 3x^2| + 5$

7. $y = 12$ cuando $x = 5$

8. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + \frac{14}{3}$

9. $y = \frac{2}{x} + 1$

10. $y = x^2 + 1$

11. $y = 2x^2$

## EJERCICIO 6.7

1. a. $C(x) = -0.025x^2+30x+2000$ b. US$ 5937.5

2. a. $C(x) = 0.002x^3-0.015x^2+24x+2500$ b. \$2500

   c. \$260750

3. US$ 1275.05

4. $C(x) = 0.001x^2+5x$

5. a. $R(x) = 20x-0.01x^2-0.001x^3$ b. US$ 900

   c. $p(x) = 20-0.01x-0.001x^2$

6. a. $R(x) = 4x-0.005x^2$ b. $p(x) = 4-0.005x$

7. a. $R(x) = 12x - \frac{3}{2}x^2$ b. $p(x) = 12 - \frac{3}{2}x$

8. $C(x) = 10 - \frac{3}{5(5x+4)}$

9. $p(x) = 4 - \frac{10}{x^2+5x}$

10. $C(x) = 3x^2-17x+47$

11. a. $R(x) = 16x-x^3$ b. $p(x) = 16-x^2$

12. $C(x) = x^3+4x^2+4x+6$

13. US$ 3375

14. a. US$ 81 b. US$ 3

15. US$ 5

16. 100128 personas

17. a. $a(t)=6t+2$, $s(t)=t^3+t^2+5t$ b. $a(2)=14$ m/min$^2$

    c. $s(3)=51$ m d. $s(3)-s(2)=29$ m

18. $s(2)-s(1)-20$ m

19. \$ 120000

20. 15 unidades

21. 4.15 partes por millón

22. $ 190500

23. US$ 646.2

24. US$ 2300

25. $R(x) = 240x—2x^2$, US$ 1150

26. a. $C(x) = 0.9x + 0.2x^{\frac{3}{2}} + 100000$ b. $C(10^{12}) = 2000009000001\times 10^5$

27. a. $v(t) = v(0) - 4800 + 4800e^{-\frac{t}{5}}$ dólares, donde $v(0)$ es el valor inicial de la máquina

    b. $v(10) = 1049.61$ dólares

28. a. $C(q) = (q—4)^3+64+C(0)$ b. US$ 1500

29. US$ 196608

30. $i(t) = 1000e^{0.007t}$ es la inversión en función de $t$.

# CAPÍTULO 7

## EJERCICIO 7.1

1. a. 174 b. $\frac{364}{9}$ c. $2^n-1$

   d. 133560 e. $\frac{17}{30}$ f. $\frac{100}{101}$

2. a. $\frac{8n+2}{n}$ b. $\frac{(b-a)(an+bn+b-a)}{2n}$ c. $\frac{b^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

   d. $\frac{b^4(n+1)^2}{4n^2}$

3. a. 8 b. $\frac{b^2-a^2}{2}$ c. $\frac{b^3}{3}$

   d. $\frac{b^4}{4}$

4. $\frac{1}{1-a}$

5. a. 10000 b. 5050 c. 50500

   d. 2870 e. 44100

6. 162 m aproximadamente

7. $784657

## EJERCICIO 7.2

1. a. $2+\sqrt{2}$ b. $\frac{1}{3}$ c. 20

2. a. 1 b. $\frac{117}{55}$

3. 6 m

4. a. $c(b-a)$ b. $\frac{2}{3}$ c. 0

   d. $\frac{33}{2}$

## EJERCICIO 7.3

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\frac{7}{3}$ | 2. $-\frac{7}{2}$ | 3. 144 |
| 4. $\frac{5}{2}a^2$ | 5. $12+\frac{2}{3}\sqrt{2}$ | 6. $\frac{8}{3}$ |
| 7. $\frac{3}{2}+\ln 2$ | 8. 0 | 9. $\frac{2}{9}$ |
| 10. 252 | 11. $-\frac{16}{3}$ | 12. $\frac{3888}{5}$ |
| 13. $2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 14. $\frac{26}{3}$ | 15. $\frac{8}{27}$ |
| 16. $-\frac{17}{6}$ | 17. $\frac{7}{6}$ | 18. $3\ln 2$ |
| 19. $e$ | 20. $-\frac{23}{110}$ | 21. $\frac{8}{3}$ |
| 22. $\frac{3}{2}$ | 23. $\frac{56}{15}$ | 24. $\frac{99}{4}$ |

## EJERCICIO 7.4

1. $\frac{7}{120}$
2. $\frac{a^2}{6}$
3. a. $\frac{22}{3}$ b. $9$ c. $\frac{17}{4}$
   d. $\frac{16}{3}$ e. $\frac{9}{2}$ f. $\frac{9}{2}$
   g. $\frac{20}{3}$, si acotamos el área con el eje $X$ h. $\frac{8}{3}$
   i. $\frac{9}{2}$ j. $\frac{16}{3}a^2$ k. $\frac{4}{3}$
   l. $\frac{16}{3}a^2$ m. $\frac{5}{12}$ n. $\frac{1}{2}$
   ñ. 64 o. 22 p. 108
   q. $\frac{131}{4}$ r. $\frac{8}{3}$ s. $\frac{8}{3}$
   t. 8 u. $\frac{243}{8}$ v. $\frac{8}{3}$
   w. $\frac{104}{15}$
4. $\frac{8}{3}$
5. $\frac{38}{3}$

## EJERCICIO 7.5

1. 98 personas aproximadamente
2. 124 m
3. a. $1700000 b. $1500000 c. $3900000
4. a. 1220 personas b. 10240 personas
5. US$774
6. $1785600

7. \$75

8. US\$ 4081077.5

9. 132 personas aproximadamente

10. disminuye en US\$ 92934 aproximadamente

11. 2008876 personas

12. a. 12 años    b. US\$ 1008

    c. El exceso de utilidad corresponde a la parte sombreada en la gráfica, es decir, el área entre $R_1\,(x)=100+x_2$ y $R_2\,(x)=220+2x$

13. a. $25\ \ln\left(\frac{8}{3}\right) \approx$ 24 años y medio    b. US\$ 3241 aproximadamente

    c. El exceso de utilidad es el área entre las curvas $R_1\,(x)=60e^0.\,12x$ y $R_2(x)=160e^0.\,08x$ en el intervalo $\left[0, 25\ln\left(\frac{8}{3}\right)\right]$

14. a. 9 años    b. US\$ 12150

15. 18 unidades

16. a. 10 semanas aproximadamente    b. US\$ 14857

17. a. 8 semanas aproximadamente    b. US\$ 15069.26

18. a. US\$ 624    b. US\$ 1000    c. US\$ 199.7

    d. US\$ 564 aproximadamente

19. a. US\$ 288    b. US\$ 333.334    c. US\$ 129.93

    d. US\$ 152.377

20. a. $q_0$=3; los consumidores están dispuestos a pagar US\$ 366, $EC$=US\$ 36

    b. $q_0$=3; los consumidores están dispuestos a pagar US\$ 414, $EC$=US\$ 63

    c. $q_0$=40; los consumidores están dispuestos a pagar US\$ 2400, $EC$=US\$ 1920

    d. $q_0$=36; los consumidores están dispuestos a pagar US\$ 1842.07, $EC$=US\$ 1122.07

    e. $q_0$=25; los consumidores están dispuestos a pagar US\$ 57.08, $EC$=US\$ 28.43

    f. $q_0$=25ln3; los consumidores están dispuestos a pagar US\$ 500, $EC$=US\$ 225.347

21. a. $q$=18 b. US$ 162

22. $-28+\frac{10}{3}\sqrt{333}$

23. $-8+16\ln 2$

24. $p(t)=\frac{a-r}{b+s}-ce^{-k(b+s)t}$ donde $c>0$. Obsérvese que $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)=\frac{a-r}{b+s}$

25. a. $I(t)=I_0e^{bt}, D(t)=D_0+\frac{a}{b}I_0(e^{bt}-1)$

    b. $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{D(t)}{I(t)}=\frac{a}{b}$, con $b>0$

26. $x(t)=4-2te^{-\frac{1}{2}t}-4e^{-\frac{1}{2}t}$

27. 176.87≈176 unidades

28. US$ 13212.056

29. 336

30. $EC=\frac{16}{3}, EP=\frac{32}{3}$

31. $EC=$ US$ $133\frac{1}{3}$, $EP=$US$ $166\frac{2}{3}$

32. $EC=280\ln 4-210\approx 178.1625$, $EP=45$

# CAPÍTULO 8

## EJERCICIO 8.1

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\frac{1}{10}$ | 2. $\frac{5}{2}$ | 3. $\frac{1}{2}$ |
| 4. $\frac{1}{2}$ | 5. $\frac{1}{2}$ | 6. Diverge |
| 7. Diverge | 8. 3 | 9. Diverge |
| 10. $-\frac{1}{2}$ | 11. Diverge | 12. 4 |
| 13. $\frac{e^2}{4}$ | 14. 0 | 15. 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 16. Diverge | 17. 0 | 18. Diverge |
| 19. $p<1$ | 20. Diverge para todo $p\in\mathbb{R}$ | 21. Diverge |
| 22. $\frac{1}{2}$ | 23. Diverge | 24. $-e^{-1}$ |
| 25. ln2 | 26. $\frac{1}{10}$ | 27. $\frac{5}{2}$ |
| 28. $\frac{1}{9}$ | 29. Diverge | 30. $2e^{-1}$ |
| 31. $\frac{2}{9}$ | 32. $5e^{10}$ | 33. 2 |
| 34. 1 | 35. Diverge | 36. $-\frac{1}{2}$ |
| 37. Diverge | 38. Diverge | 39. $\frac{3\pi}{8}$ |
| 40. 1 | 41. Diverge | 42. $\frac{1}{4}$ |
| 43. $\frac{1}{2}\ln 2$ | 44. Diverge | 45. 1 |
| 46. Diverge | 47. Diverge | 48. Diverge |
| 49. $e$ | 50. $\frac{1}{3}$ | |

## EJERCICIO 8.2

1. a. $\frac{1}{2}e^{-2}$ b. $\frac{3}{2}$ c. $\infty$
2. a. 30000000 b. 99604805.28 c. 30000000
3. a. 22224 ejemplares

   b. A largo plazo la especie se extingue, es decir $\lim_{t\to\infty} P(t)=0$, donde $P(t)$ es el número de ejemplares en $t$ años.
4. $ 5792476.126
5. $ 4545454.55
6. $ 5823381.567

7. El valor prevaleciente de la franquicia es: $ 600.000

9. La población aumenta sin límite.

10. a. La probabilidad de que un par de autos seleccionados al azar disten menos de 10 pies el uno del otro es $1-6e^{-5} \approx 0.9596$

    b. La distancia promedio entre autos sucesivos en una autopista es 4 pies.

11. a. $\frac{3}{4}$ b. $E(x)=3, V(x)=3$

12.

$$
\begin{aligned}
E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx &= k\int_{0}^{\infty} xe^{-kx}dx \\
&= k \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} xe^{-kx}dx \\
&= k \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{M}{k}e^{-kM} + \frac{1}{k}\int_{0}^{M} e^{-kx}dx\right) \\
&= k \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{M}{k}e^{-kM} + \frac{1}{k^2}(e^{-kM}-1)\right) \\
&= k\left(0 - \frac{1}{k^2}(0-1)\right) \\
&= k\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&= \frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(x) &= -\left(E(x)\right)^2 + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \\
&= -\frac{1}{k^2} + k\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-kx}dx \\
&= -\frac{1}{k^2} + k \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} x^2 e^{-kx}dx \\
&= -\frac{1}{k^2} + k \lim_{M\to\infty} \left(-\left(\frac{M^2}{k} + \frac{2M}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right)e^{-kM} + \frac{2}{k^3}\right) \\
&= -\frac{1}{k^2} + k\left(0 + \frac{2}{k^3}\right) \\
&= -\frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^2} \\
&= \frac{1}{k^2}
\end{aligned}
$$

13. a. 5.77% b. 45.11% c. 54.88%

d. $E(X)$ =100 horas (duración promedio de la bombilla), y $V(X) = 10000$ horas cuadradas (variabilidad, relativamente, muy grande).

14. a. 22.1 % b. 55.07 % c. 44.933 %

15. a. 12.151 % b. 32.968 % c. 63.032 %

16. a. 0.63 b. 0.14

17. a. 0.59 b. 0.22

18. a. 0.22 b. 0.55 c. 0.45

19. a. 0.12 b. 0.33 c. 0.67

# CAPITULO 9

## EJERCICIO 9.1

1. a. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ , $\mathrm{Dm}(f) = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

   b. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$, $\mathrm{Dm}(f) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geq 9\}$

   c. $f(x,t) = \ln(x - t)$, $\mathrm{Dm}(f) = \{(x,t) \mid x > t\}$

   d. $f(x,y,z) = x + \sqrt{yz}$, $\mathrm{Dm}(f) = \{(x,y,z) \mid yz \geq 0\}$

2. a. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 - 1)^2 + 3x_1x_3$, $\mathrm{Dm}(f) = \mathbb{R}^3$
   $f(1,0,-2) = 1(0-1)^2 + 3(1)(-2) = -5$
   $f(0,8,4) = 0(8-1)^2 + 3(0)(4) = 0$

   b. $g(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, $\mathrm{Dm}(g) = \{(x,y) \mid x \neq y\}$
   $$g(2,-2) = \frac{2-2}{2+2} = 0,\ g(-1,1) = \frac{-1+1}{-1-1} = 0,\ g(-1,3) = \frac{-1+3}{-1-3} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

   c. $h(r,s) = \sqrt{s^2 - r^2}$, $\mathrm{Dm}(h) = \{(r,s) \mid s^2 \geq r^2\}$
   $h(0,1) = \sqrt{1^2 - 0^2} = 1$, $h(-1,3) = \sqrt{9-1} = 2\quad 2$

   d. $f(x,y,z) = x + y^2 + \sqrt{1-z}$, $\mathrm{Dm}(f) = \{(x,y,z) \mid z \leq 1\}$
   $f(1,2,0) = 1 + 4 + 1 = 6$, $f(-1,3,-3) = -1 + 9 + 2 = 10$

e. $g(x_1, x_2) = \frac{x_1 - 1}{\sqrt{x_2^2 + 4}}$, $\mathrm{Dm}(g) = \mathbb{R}^2, g(1,5) = 0, g(2,0) = \frac{1}{2}$

f. $h(r, s, t) = te^{r+s} + \log(t+2)$, $\mathrm{Dm}(h) = \{(r, s, t) \mid t > -2\}$
$h(\ln 2, 0, -1) = -1e^{\ln 2 + 0} + \log(-1+2) = -2$
$h(1, 1, 1) = e^2 + \log 3$

3. Área: $A(\theta, x) = \dfrac{x^2 \tan\theta}{2}$, Dom $(A) = \left\{(\theta, x) \mid x > 0, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right\}$

4. $y^2\sqrt{x^2 - 2y^2}$

5. $VF = V_0(1{,}06)^n$, donde
$VF :=$ valor futuro, variable dependiente
$V_0 :=$ valor presente, variable independiente
$n :=$ tiempo (en años), variable independiente

6. $P = k\,\dfrac{\sqrt{t}\,m^2}{\sqrt[5]{v}}$, donde
$P :=$ producción diaria, variable dependiente
$k :=$ constante
$t :=$ número de horas de trabajo de la máquina, variable independiente
$m :=$ insumo, variable independiente
$v :=$ vida útil, variable independiente

## EJERCICIO 9.2

1. a. $f(x, y) = x^3 + x^2 y - y^3$, $f_x = 3x2 + 2xy$, $f_y = x^2 - 3y^2$,
$df = (3x^2 + 2xy)dx + (x^2 - 3y^2)dy$.
Si $P(1, 2)$, $df = 7dx - 11dy$

b. $f(x, y) = 2x^3 - 4xy^2 + 3y^3$, $f_x = 6x - 4y^2$, $f_y = -8xy + 9y^2$,
$df = (6x - 4y^2)dx + (-8xy + 9y^2)dy$

Si $P(1, 2)$, $df = -10dx + 20dy$

c. $f(x, y) = 7x^2 + 4xy + 12y^2$, $f_x = 14x + 4y$, $f_y = 4x + 24y$,
$df = (14x + 4y)dx + (4x + 24y)dy$

Si $P(1, 2)$, $df = 22dx + 52dy$

d. $f(x, y) = 8(2x - 5y)^3$, $f_x = 48(2x - 5y)^2$, $f_y = -120(2x - 5y)^2$,
$df = (48(2x - 5y)^2)dx + (-120(2x - 5y)^2)dy$

Si $P(1, 2)$, $df=384dx-960dy$

2. a. $f(x,y,z)=\ln\left((x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$

$$f_x=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, f_y=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}, f_z=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$df=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}dx+\frac{y}{x^2+y^2+z^2}dy+\frac{z}{x^2+y^2+z^2}dz$$

Si $P(1,2,3), df=\frac{1}{14}dx+\frac{1}{7}dy+\frac{3}{14}dz$

b. $f(x,y,z)=e^{xyz}$
$f_x=yze^{xyz}, f_y=xze^{xyz}, f_z=xye^{xyz}$
$df=yze^{xyz}\,dx+xze^{xyz}\,dy+xye^{xyz}\,dz=e^{xyz}\,(yzdx+xzdy+xydz)$

Si $P(1, 2, 3)$, $df=e^6\,(6dx+3dy+2dz)$

c. $f(x,y,z)=xy^2\,z^3$
$f_x=y^2\,z^3, f_y=2xyz^3, f_z=3xy^2\,z^2$
$df=y^2\,z^3\,dx+2xyz^3\,dy+3xy^2\,z^2\,dz$

Si $P(1, 2, 3)$, $df=108dx+108dy+108dz$

d. $f(x,y,z)=5x^6\,y^3\,z^4$
$f_x=30x^5\,y^3\,z^4, f_y=15x^6\,y^2\,z^4, f_z=20x^6\,y^3\,z^3$
$df=30x^5\,y^3\,z^4\,dx+15x^6\,y^2\,z^4\,dy+20x^6\,y^3\,z^3\,dz$

Si $P(1, 2, 3)$, $df=19440dx+4860dy+432dz$

3. a. $z=2x+3y$, $z=0, 1, 2, 3$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2x+3y=0$ | $2x+3y=1$ | $2x+3y=2$ | $2x+3y=3$ |
| $3y=-2x$ | $3y=-2x+1$ | $3y=-2x+2$ | $3y=-2x+3$ |
| $y=-\frac{2}{3}x$ | $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ | $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ | $y=-\frac{2}{3}x+1$ |

La gráfica corresponde a cuatro rectas paralelas

b. $z=3x-y$, $z=0, 1, -2, 3$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3x-y=0$ | $3x-y=1$ | $3x-y=-2$ | $3x-y=3$ |
| $y=3x$ | $y=3x-1$ | $y=3x+2$ | $y=3x-3$ |

La gráfica corresponde a cuatro rectas paralelas

c. $z=\sqrt{16-x^2-y^2}, z=0,1,2,3$

$$\sqrt{16-x^2-y^2}=0 \quad \sqrt{16-x^2-y^2}=1 \quad \sqrt{16-x^2-y^2}=2 \quad \sqrt{16-x^2-y^2}=3$$

$$16-x^2-y^2=0 \quad 16-x^2-y^2=1 \quad 16-x^2-y^2=4 \quad 16-x^2-y^2=9$$

$$x^2+y^2=16 \quad x^2+y^2=15 \quad x^2+y^2=12 \quad x^2+y^2=7$$

La gráfica corresponde a cuatro circunferencias concéntricas centradas en el origen con radios $\sqrt{7}$,$\sqrt{12}$,$\sqrt{15}$ y 4.

d. $z=x^2+y^2$, $z=1, 2, 3, 4$
La gráfica corresponde a cuatro circunferencias concéntricas centradas en el origen con radios 1,$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$ y 2.

4. $f(x,y)=x^2-y^2+4x+2y+1$, $f_x=2x+4$, $f_y=-2y+2$

a. Si $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\mathrm{D}_\theta f(x,y)=(2x+4)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+(-2y+2)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\mathrm{D}_\theta f(x,y)=\frac{\sqrt{2}}{2}(2x+4)+\frac{\sqrt{2}}{2}(-2y+2)=\sqrt{2}(x-y+3)$$

Si $\theta=\frac{\pi}{6}$

$$\mathrm{D}_\theta f(x,y)=(2x+4)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+(-2y+2)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\mathrm{D}_\theta f(x,y)=\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+4)+\frac{1}{2}(-2y+2)=\quad 3x-y+2\quad 3+1$$

b. $\theta=\frac{\pi}{4}$ y $P\left(2,-\sqrt{7}\right)$, $\mathrm{D}_\theta f(x,y)=\sqrt{2}\left(2+\sqrt{7}+3\right)=\sqrt{2}\left(5+\sqrt{7}\right)$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ y $P\left(2,-\sqrt{7}\right)$, $\mathrm{D}_\theta f(x,y)=2\sqrt{3}+\sqrt{7}+2\sqrt{3}+1=4\sqrt{3}+\sqrt{7}+1$

## EJERCICIO 9.3

1. $Q(x,y)=2x^3+3x^2y+y^3, x=20, y=10, Q(20,10)=29000$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-6x^2+6xy}{3x^2+3y^2}$, con $x=10, y=20, \frac{dy}{dx}=-2.4.$

Como $dy=0.5, \frac{0.5}{dx}=-2.4, dx=-\frac{0.5}{2.4}\approx-0.21$

2. $V(x,y)=(x+1)(y+2)=xy+2x+y+2$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y+2}{x+1}$, con $x=25, y=8, \frac{dy}{dx}=-1.$

$\frac{-1}{dx}=-\frac{10}{26}, dx=\frac{26}{10}=2.6$

3. $f(x,y) = 200 - 24\sqrt{x} + 4(0.1y+5)^{\frac{3}{2}}$
$x$ es el precio de motos de clase 10 $c/_u$, $x$=129+5$t$
$y$ es el precio en centavos por galón $c/_u$, $y$=80+10√3$t$
$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$ es el diferencial total

$$\frac{df}{dt} = -\frac{12}{\sqrt{x}}(5) + 6(0.1)(0.1y+5)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{t}}\right)$$

Si $t$=3, $x$=144 y $y$=110, luego,

$$\frac{df}{dt} = -5 + 0.6(4)(5) = -5 + 12 = 7$$

4. $Q(x,y)$=0.08$x^2$+0.12$xy$+0.03$y^2$

$dQ = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz = (0.16x + 0.12)dx + (0.12x + 0.06y)dy$

Tenemos que $x = 80, y = 200, dx = \frac{1}{2}, dy = 2$, luego

$dQ = (0.16\cdot 80 + 0.12\cdot 200)\left(\frac{1}{2}\right) + (0.12\cdot 80 + 0.06\cdot 200)(2)$

$dQ$ = 18.4 + 43.2 = 61.6 adicionales.

5. $P(x,y)=(x-30)(70-5x+4y)+(y-40)(80+6x-7y)$
$P(x,y)=70x-5x^2+4xy-2100+150x-120y+80y+6xy-7y^2-3200-240x+280y$
$P(x,y)=-20x-5x^2+10xy-5300+240y-7y^2$
$dP=(-20-10x+10y)dx+(10x+240-14y)dy$
Tenemos que $x$=50, $y$=52, $dx$=1, $dy$=2
$dP$=0+24=24 se incrementa.

## EJERCICIO 9.4

1. $u = xy - \ln(xy), \frac{\partial u}{\partial x} = y - \frac{1}{x}, \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{y}$

2. $z = \frac{y}{x^2+y^2}, \ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2y(x^2+y^2)^2 + 2xy\big(4x(x^2+y^2)\big)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2y(x^2+y^2)(-x^2-y^2+4x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2y(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)\big(2(x^2+y^2)(2y)\big)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-2y(x^2+y^2)(x^2+y^2+2x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{-2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Luego $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

3. $z = xy + xe^{\frac{1}{y}}, \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}e^{\frac{1}{y}}, \frac{\partial z^2}{\partial x\,\partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}e^{\frac{1}{y}}, \frac{\partial z}{\partial x} = y + e^{\frac{1}{y}}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 1 - \frac{1}{y^2}e^{\frac{1}{y}}$

Luego $\frac{\partial z^2}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial z^2}{\partial y\,\partial x}$

4. $z = 2x^2 - 2y^2 - 3x - 4xy^2, \frac{\partial z}{\partial y} = -4y - 8xy,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -8y,\ \frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3 - 4y^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -8y$

Luego $\frac{\partial z^2}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial z^2}{\partial y\,\partial x}$

5. $f(x,y) = x^3e^{x^2+y}, f_x = e^{x^2+y}(2x^4 + 3x^2), f_{xy} = f_x$
$f_y = x^3e^{x^2+y}, f_{yx} = f_x$

6. a. $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(y^2-1)}{y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{y^2-1}{y^2}, \frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{1}{y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{y^2-1}{y^2}$

Luego $\frac{\partial f^2}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial f^2}{\partial y\,\partial x}$

b. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

Luego $\frac{\partial f^2}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial f^2}{\partial y\,\partial x}$

c. $f(x,y) = x^2 + y^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 0$

Luego $\frac{\partial f^2}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial f^2}{\partial y\,\partial x}$

d. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{(x-y)^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{2(x+y)}{(y-x)^3}, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2y}{(x-y)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{2(x+y)}{(y-x)^3}$

Luego $\frac{\partial f^2}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial f^2}{\partial y\,\partial x}$

e. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$

Luego $\frac{\partial f^2}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial f^2}{\partial y\,\partial x}$

7. a. $z = (x-2y)^2, \frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-2y), \frac{\partial z}{\partial y} = -4(x-2y),$

Ahora, $2x(x-2y) - 4y(x-2y) = 2(x-2y)(x-2y) = 2(x-2y)^2 = 2z$

b. $z = (x^4+y^4)^{\frac{1}{2}}, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x^3}{(x^4+y^4)^{\frac{1}{2}}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y^3}{(x^4+y^4)^{\frac{1}{2}}},$

Ahora, $\frac{2x^4}{(x^4+y^4)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2y^4}{(x^4+y^4)^{\frac{1}{2}}} = 2\frac{(x^4+y^4)}{(x^4+y^4)^{\frac{1}{2}}} = 2(x^4+y^4)^{\frac{1}{2}} = 2z$

8. a. $z = ye^x + xe^{2y}, \frac{\partial z}{\partial x} = ye^x + e^{2y}, \frac{\partial z}{\partial y} = e^x + 2xe^{2y}$

b. $z = e^{xy^2}, \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^{xy^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = 2xye^{xy^2}$

c. $z = x^2y + 3xy + 4y^3,\ \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3y, \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3x + 12y^2$

d. $z = x^3 + \lambda,\ \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

e. $z = xy,\ \frac{\partial z}{\partial x} = y, \frac{\partial z}{\partial y} = x$

f. $z = y^2 - 2\lambda,\ \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

9. $f(x,y) = (y+ax)^2 e^{y+ax},\ \frac{\partial f}{\partial x} = ae^{ax+y}(ax+y)(ax+y+2),$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2 e^{ax+y}(a^2x^2 + 2ax(y+2) + y^2 + 4y + 2), \frac{\partial f}{\partial y} = e^{ax+y}(ax+y)(ax+y+2),$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{ax+y}(a^2x^2 + 2ax(y+2) + y^2 + 4y + 2)$

Luego $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

10. $z = x^2y + 3xy + 4y^3, \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3y, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3x + 12y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y,$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 2x + 3, \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 2x + 3$

11. $z = \sqrt{1-x^2-y^2}, \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

12. a. $f(x,y) = 2x^2y + x^3y^2 + 2y + 10, f_x = 4xy + 3x^2y^2, f_y = 2x^2 + 2x^3y + 2,$

$f_{xx} = 4y + 6xy^2, f_{yy} = 2x^3, f_{xy} = 4x + 6x^2y, f_{yx} = 4x + 6x^2y$

b. $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}, f_x=\frac{2y}{(x+y)^2}, f_y=-\frac{2x}{(x+y)^2},$

$$f_{xx}=-\frac{4y}{(x+y)^3}, f_{yy}=\frac{4x}{(x+y)^3}, f_{xy}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}, f_{yx}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$$

c. $f(x,y)=e^{x^2+y^2}, f_x=2xe^{x^2+y^2}, f_y=2ye^{x^2+y^2},$

$$f_{xx}=(4x^2+2)e^{x^2+y^2}, f_{yy}=(4y^2+2)e^{x^2+y^2}, f_{xy}=4xye^{x^2+y^2}, f_{yx}=4xye^{x^2+y^2}$$

d. $f(x,y)=\frac{e^{3x}}{\log|2y|}, f_x=\frac{3e^{3x}}{\log|2y|}, f_y=\frac{-e^{3x}}{y(\ln 2)(\log|2y|)^2}, f_{xx}=\frac{9e^{3x}}{\log|2y|},$

$$f_{yy}=\frac{e^{3x}\left(\ln 2(\log|2y|)^2+y\ln 2(2\log|2y|)\left(\frac{1}{2y\ln 2}\right)(2)\right)}{(y(\ln 2)(\log|2y|)^2)^2}=\frac{e^{3x}\log|2y|(\ln 2\log|2y|+2)}{(y(\ln 2)(\log|2y|)^2)^2}=\frac{e^{3x}(\ln 2\log|2y|+2)}{y^2(\ln 2)(\log|2y|)^3},$$

$$f_{xy}=\frac{-3e^{3x}}{y(\ln 2)(\log|2y|)^2}, f_{yx}=\frac{-3e^{3x}}{y(\ln 2)(\log|2y|)^2}$$

e. $f(x,y)=\sqrt[3]{(x+y)^4}=(x+y)^{\frac{4}{3}}, f_x=\frac{4}{3}(x+y)^{\frac{1}{3}}, f_y=\frac{4}{3}(x+y)^{\frac{1}{3}},$

$$f_{xx}=\frac{4}{9}(x+y)^{-\frac{2}{3}}, f_{yy}=\frac{4}{9}(x+y)^{-\frac{2}{3}}, f_{xy}=\frac{4}{9}(x+y)^{-\frac{2}{3}}, f_{yx}=\frac{4}{9}(x+y)^{-\frac{2}{3}}$$

f. $f(x,y)=xe^y+x^3y^2, f_x=e^y+3x^2y^2, f_y=xe^y+2x^3y,$

$$f_{xx}=6xy^2, f_{yy}=xe^y+2x^3, f_{xy}=e^y+6x^2y, f_{yx}=e^y+6x^2y$$

13. a. $f(x,y)=x^3y-xy^3, \frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y-y^3, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy, \frac{\partial f}{\partial y}=x^3-3xy^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6xy$

De donde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

b. $f(x,y)=x^3-x^2y^4, \frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-2xy^4, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x-2y^4, \frac{\partial f}{\partial y}=-4x^2y^3, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-12x^2y^2$

De donde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\neq 0$

Luego $f$ no es armónica.

14. $f(x,y)=3x^4y^5-2x^2y^3, \frac{\partial f}{\partial y}=15x^4y^4-6x^2y^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=60x^4y^3-12x^2y, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=$
$180x^4y^2-12x^2$

15. 0

16. a. $f(x,y,z) = 3x^2y - xyz + y^2z^2$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - yz, \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - xz + 2yz^2$,

$\frac{\partial f}{\partial z} = -xy + 2y^2z$

b. $f(x,y,z) = \ln|x^2 - yz| + e^{xyz}, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2-yz} + yze^{xyz}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z}{yz-x^2} + xze^{xyz}$,

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y}{yz-x^2} + xye^{xyz}$

17. a. $f(x,y) = 2x^2y^3 - x^3y^5, \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y^2 - 5x^3y^4, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 12xy^2 - 15x^2y^4, \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3 - 3x^2y^5, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 12xy^2 - 15x^2y^4$

Luego $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$

b. $f(x,y) = \ln\left|\frac{x-1}{y-1}\right|$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y-1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x-1}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 0$

18. a. $z = x\,\text{In}(x) + ye^y + 3$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln|x| + 1, \frac{\partial z}{\partial y} = e^y(y+1)$

b. $z = x^2\ln|y| - y^3 + e^x, \frac{\partial z}{\partial x} = 2x\ln|y| + e^x, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y} - 3y^2$

19. a. $f(x,y,z) = xe^{yz} + ye^{xz} - y^2 + 3, \frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xz} + e^{yz}, \frac{\partial f}{\partial y} = e^{xz} + xze^{yz} - 2y$,

$\frac{\partial f}{\partial z} = xy(e^{xz} + e^{yz})$

b. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^2(x+y) - 2z^3, \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + z^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + z^2$,

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z(x+y) - 6z^2 = 2z(x+y-6z)$

20. $Q(k,L) = k^{\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}, \frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{2L^{\frac{2}{3}}}{3k^{1/3}}, \frac{\partial^2 Q}{\partial k^2} = -\frac{2L^{\frac{2}{3}}}{9k^{4/3}}, \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{k^{\frac{2}{3}}}{3L^{1/3}}, \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -\frac{2k^{\frac{2}{3}}}{9L^{5/3}}$

## EJERCICIO 9.5

1. a. $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 3y, \frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y + 5, \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y - 3,$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 5 &= 0 \\ -2x + 2y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x = -1$ y $y = \frac{1}{2}$. Luego el punto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ es crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1, \frac{1}{2}\right) = 4 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-1, \frac{1}{2}\right) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\left(-1, \frac{1}{2}\right) = -2,$$

$\Delta\left(-1, \frac{1}{2}\right) = (4)(2) - (-2)^2 = 4 > 0$. Por tanto en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ hay un mínimo

b. $f(x,y) = xy + x - y, \frac{\partial f}{\partial x} = y + 1, \frac{\partial f}{\partial y} = x - 1,$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} y + 1 &= 0 \\ x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x$=1 y $y$=−1. Luego el punto (1, −1) es crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(1,-1) = 1,$$

$\Delta(1,-1) = (0)(0) - (1)^2 = -1 < 0$. Por tanto en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ hay un punto de silla.

c. $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2, \frac{\partial f}{\partial x} = 4 - 2x + y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2 + x - 2y,$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 4 - 2x + y &= 0 \\ 2 + x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x = \frac{10}{3}$ y $y = \frac{8}{3}$. Luego el punto $\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$ es crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) = -2 < 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) = -2, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) = 1,$$

$\Delta\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) = (-2)(-2) - (1)^2 = 3 > 0$. Por tanto en $\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$ hay un máximo.

d. $f(x,y) = x^3 - 3bxy + y^3, \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3by, \frac{\partial f}{\partial y} = -3bx + 3y^2,$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} x^2 - by &= 0 \\ -bx + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x$=0 y $y$=0 ó $x$=$b$ y $y$=$b$. Luego los puntos (0, 0) y ($b$, $b$) son críticos.
$f_{xx}= 6x, f_{yy}= 6y, f_{xy}= -3b$

Para (0, 0),
$\Delta(0, 0)=(0)(0)-(3b)^2=-9b^2<0$. Por tanto en (0, 0) hay un punto de silla.

Para ($b$, $b$),
Si $b>0, f_{xx}>0$ y $b$ es un mínimo.
Si $b<0, f_{xx}<0$ y $b$ es un máximo.
$\Delta(0, 0)=(0)(0)-(3b)^2=-9b^2$

e. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6, \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 4,$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 0 \\ -2y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x$=1 y $y$=2. Luego el punto (1, 2) es crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 2 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = -2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(1,2) = 0,$$

$\Delta(1,2) = (2)(-2) - (0)^2 = -4 < 0$. Por tanto en (1, 2) hay un punto de silla.

f. $f(x,y) = xy - 2y^2, \frac{\partial f}{\partial x} = y, \frac{\partial f}{\partial y} = x - 4y,$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x - 4y &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x$=0 y $y$=0. Luego el punto (0, 0) es crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(0,0) = 1,$$

$\Delta(0,0) = (0)(-4) - (1)^2 = -1 < 0$. Por tanto en (0, 0) hay un punto de silla.

g. $f(x,y)=2x^2+y^2-8x-2y+14, \frac{\partial f}{\partial x}=4x-8, \frac{\partial f}{\partial y}=2y-2,$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{rcl} 4x-8 & = & 0 \\ 2y-2 & = & 0 \end{array}$$

Obtenemos $x$=2 y $y$=1. Luego el punto (2, 1) es crítico.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1)=4>0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1)=2, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(2,1)=0,$

$\Delta(2,1)=(4)(2)-(0)^2=8>0$. Por tanto en (2, 1) hay un minimo.

h. $f(x,y)=x^3+y^2-6x^2+y-1, \frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-12x, \frac{\partial f}{\partial y}=2y+1,$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{rcl} 3x^2-12x & = & 0 \\ 2y+1 & = & 0 \end{array}$$

Obtenemos $x=0$ y $y=-\frac{1}{2}$ ó $x=4$ y $y=-\frac{1}{2}$. Luego los puntos $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ y $\left(4,-\frac{1}{2}\right)$ son críticos.

Para $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0,-\frac{1}{2}\right)=0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(0,-\frac{1}{2}\right)=2, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left(0,-\frac{1}{2}\right)=0,$

$\Delta\left(0,-\frac{1}{2}\right)=(0)(2)-(0)^2=0$. Por tanto el criterio no decide.

Para $\left(4,-\frac{1}{2}\right)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(4,-\frac{1}{2}\right)=24>0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(4,-\frac{1}{2}\right)=2, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left(4,-\frac{1}{2}\right)=0,$

$\Delta\left(4,-\frac{1}{2}\right)=(24)(2)-(0)^2=48>0$. Por tanto en $\left(4,-\frac{1}{2}\right)$ hay un mínimo.

i. $f(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{64}{y}+xy, \frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}+y, \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{64}{y^2}+x,$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2}+y &= 0 \\ \frac{64}{y^2}+x &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x=-\frac{1}{4}$ y $y=16$. Luego el punto $\left(-\frac{1}{4},16\right)$ es crítico.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{4},16\right)=-128<0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{4},16\right)=-\frac{1}{32}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left(-\frac{1}{4},16\right)=1,$

$\Delta\left(-\frac{1}{4},16\right)=(-128)\left(-\frac{1}{32}\right)-(1)^2=3>0$. Por tanto en $\left(-\frac{1}{4},16\right)$ hay un máximo.

j. $f(x,y)=4xy^2-2x^2y-x, \frac{\partial f}{\partial x}=4y^2-4xy-1, \frac{\partial f}{\partial y}=8xy-2x^2,$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} 4y^2-4xy-1 &= 0 \\ 8xy-2x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x=0$ y $y=\frac{1}{2}$ ó $x=0$ y $y=-\frac{1}{2}$. Luego los puntos $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ son críticos.

Para $\left(0,\frac{1}{2}\right)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0,\frac{1}{2}\right)=-2<0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(0,\frac{1}{2}\right)=0, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left(0,\frac{1}{2}\right)=4,$

$\Delta\left(0,\frac{1}{2}\right)=(-2)(0)-(4)^2=-16<0$. Por tanto en $\left(4,-\frac{1}{2}\right)$ hay un punto de silla.

Para $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0,-\frac{1}{2}\right)=2>0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(0,-\frac{1}{2}\right)=0, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left(0,-\frac{1}{2}\right)=-4,$

$\Delta\left(0,-\frac{1}{2}\right)=(2)(0)-(-4)^2=-16<0$. Por tanto en $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ hay un punto de silla.

k. $f(x,y)=\frac{2}{xy}+x^2+y^2, \frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2}{x^2y}+2x, \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2}{xy^2}+2y,$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{x^2y}+2x &= 0 \\ -\frac{2}{xy^2}+2y &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x$=1 y $y$=1 ó $x$=−1 y $y$=−1. Luego los puntos (1, 1) y (−1, −1) son críticos.

Para (1, 1),

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 6, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(1,1) = 2,$
$\Delta(1, 1)=(6)(6)-(2)^2=32>0$. Por tanto en (1, 1) hay un mínimo.

Para $(-1,-1)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = 6 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) = 6, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(-1,-1) = 2,$

$\Delta(-1, -1)=(6)(6)-(2)^2 = 32>0$. Por tanto en $(-1, -1)$ hay un mínimo.

l. $f(x,y) = e^{xy}, \frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}, \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy},$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} ye^{xy} &= 0 \\ xe^{xy} &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x$=0 y $y$=0. Luego el punto (0, 0) es crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) = 1,$$

$\Delta(0, 0)=(0)(0)-(1)^2=-1<0$. Por tanto en (0, 0) hay un punto de silla.

2. a. $f(x, y)=5x^2+6y^2-xy$. Si $x+2y=24$,
$F(x, y, \lambda)=5x^2+6y^2-xy-\lambda(x+2y-24)$, $F_x=10-y-\lambda$, $F_y=12y-x-2\lambda$,
$F_\lambda=-x-2y+24$,

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 10 - y - \lambda &= 0 \\ -x + 12y - 2\lambda &= 0 \\ -\lambda x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x$=6, $y$=9 y $\lambda$=51. Hay un punto crítico en (6, 9)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x - y, \frac{\partial f}{\partial y} = 12y - x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,9) = 10 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(6,9) = 12, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(6,9) = -1,$$

$\Delta(6, 9)=(10)(12)-(-1)^2 = 119>0$. Por tanto en (6, 9) hay un mínimo.

b. $f(x, y)=12xy-3y^2-x^2$. Si $x+y=16$,
$F(x, y, \lambda)=12xy-3y^2-x^2-\lambda(x+y-16)$, $F_x=12y-2x-\lambda$, $F_y=12x-6y-\lambda$,
$F_\lambda=-x-y+16$,

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 12y-2x-\lambda &= 0\\ 12x-6y-\lambda &= 0\\ -x-y+16 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x$=9, $y$=7 y λ=66. Hay un punto crítico en (9, 7)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=12y-2x, \frac{\partial f}{\partial y}=12x-6y, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,9)=-2<0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(9,7)=-6, \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(9,7)=12,$$

$\Delta(9, 7)=(-2)(-6)-(12)^2=-132<0$. Por tanto en (9, 7) hay un punto de silla.

c. $f(x, y)=x^2+y^2-2xy$. Si $x^2+y^2=50$,
$F(x, y, \lambda)=x^2+y^2-2xy-\lambda(x^2+y^2-50)$, $F_x=2x-2y-2\lambda x$, $F_y=2y-2x-2\lambda y$,
$F_\lambda=-x^2-y^2+50$,

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} x(1-\lambda)-y &= 0\\ -x+y(1-\lambda) &= 0\\ x^2+y^2 &= 50 \end{aligned}$$

Obtenemos $x$=5, $y$=5 y λ=0; $x$=5, $y$=−5 y λ=2; $x$=−5, $y$=5 y λ=2 ó $x$=−5, $y$=−5 y λ=0. Luego hay puntos críticos en (5, 5), (5, −5), (−5, 5) y (−5, −5).

d. $f(x, y)=x^2-10y^2$. Si $x-y=18$
$F(x, y, \lambda)=x^2-10y^2-\lambda(x-y-18)$, $F_x=2x-\lambda$, $F_y=-20y+\lambda$,
$F_\lambda=-x+y+18$,

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 2x-\lambda &= 0\\ -20y+\lambda &= 0\\ -x+y+18 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $x=\frac{\lambda}{2}, y=\frac{\lambda}{20}$. Reemplazando en la restricción,

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}+18=0\\ \lambda=40 \end{aligned}$$

Luego $x$=20 y $y$=2. Hay un punto crítico en (20, 2)

e. $f(x, y)=3x^2+4y^2-xy$. Si $2x+y=21$,
$F(x, y, \lambda)=3x^2+4y^2-xy-\lambda(2x+y-21)$, $F_x=6x-y-2\lambda$, $F_y=8y-x-\lambda$,
$F_\lambda=-2x-y+21$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 6x - y - 2\lambda &= 0 \\ 8y - x - \lambda &= 0 \\ 2x + y &= 21 \end{aligned}$$

Obtenemos $x = \frac{17}{2}, y = 4$ y $\lambda = \frac{47}{2}$. Luego hay un punto crítico en $\left(\frac{17}{2}, 4\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - y, \frac{\partial f}{\partial y} = 8y - x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{17}{2}, 4\right) = 6 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{17}{2}, 4\right) = 8, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{17}{2}, 4\right) = -1,$

$\Delta\left(\frac{17}{2}, 4\right) = (6)(8) - (-1)^2 = 47 > 0$. Por tanto en $\left(\frac{17}{2}, 4\right)$ hay un mínimo.

f. $f(x, y) = x^2 + 24xy + 8y^2$. Si $x^2 + y^2 = 25$,
$F(x, y, \lambda) = x^2 + 24xy + 8y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 25), F_x = 2x + 24y - 2\lambda x,$
$F_y = 24x + 16y - 2\lambda y, F_\lambda = -x^2 - y^2 + 25$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x + 12y &= 0 \\ 12x + (8-\lambda)y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Hay puntos criticos en (3, 4) con λ=17, (—3. —4) con λ=17, (4. —3) con λ=—8 y (—4, 3) con λ=—8.

g. $f(x, y) = x + y$, Si $x^2 + y^2 = 1$,
$F(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1), F_x = 1 - 2\lambda x, F_y = 1 - 2\lambda y, F_\lambda = -x^2 - y^2 + 1$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 1 - 2\lambda x &= 0 \\ 1 - 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Obtenemos $x = y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \lambda$ . Hay un máximo en $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

h. $f(x, y) = x^2 + y^2$, Si $x^3 + y^3 - 6xy = 0$
$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^3 + y^3 - 6xy), F_x = 2x - 3\lambda x^2 + 6\lambda y, F_y = 2y - 3\lambda y^2 + 6\lambda x, F_\lambda$
$= -x^3 - y^3 + 6xy$

hay un punto crítico en (0, 0),
$F_{xx} = 2 > 0, F_{yy} = 2, F_{xy} = 0$

$\Delta(0, 0) = (2)(2) - (0)^2 = 4 > 0$. Por tanto en (0, 0) hay un mínimo.

3. $f(L,k) = 12L + 20k - L^2 - 2k^2$, Si $4L + 8k = 88$
$F(L,k,\lambda) = 12L + 20k - L^2 - 2k^2 - \lambda(4L + 8k - 88)$
$F_L = 12 - 2L - 4\lambda, F_k = 20 - 4k - 8\lambda, F_\lambda = -4L - 8k + 88$

Aquí $x$=8, $y$=7 y λ=—1
la máxima producción es $f(8, 7) = 74$

4. a. Precio=$px$+$qy$, Ganancia=Precio—Costo
Luego, $G$=$p$(2—2p+4$q$)+$q$(22+2$p$—6$q$)—8(2—2$p$+4$q$)—2(22+2$p$—6$q$)
$G(p, q)$=—2$p^2$—6$q^2$+6$pq$+14$p$+2$q$—60

$$G_p = -4p + 6q + 14 = 0$$
$$G_q = -12q + 6p2 + 2 = 0$$

De donde $p = 15$ y $q = \frac{23}{3}$.
$G_{pp} = -4, G_{qq} = -12, G_{pq} = 6$

$\Delta\left(15,\frac{23}{3}\right) = (-4)(-12) - (6)^2 = 12 > 0.$ Como $\Delta\left(15,\frac{23}{3}\right) > 0$ y $G_{pp}\left(15,\frac{23}{3}\right) < 0$ el punto $\left(15,\frac{23}{3}\right)$ es un máximo. La máxima ganancia es $G\left(15,\frac{23}{3}\right) = \frac{158}{3}$ um.

b. $G(p,q) = p(11 - 2p - 2q) + q(16 - 2p - 3q) - 3(11 - 2p - 2q) - (16 - 2p - 3q)$
$G(p,q) = -2p^2 - 3q^2 - 4pq + 19p + 25q - 49$

$$G_p = -4p - 4q + 19 = 0$$
$$G_q = -6q - 4p + 25 = 0$$

De donde $p = \frac{7}{4}$ y $q = 3$

La máxima ganancia es $G\left(\frac{7}{4}, 3\right) = \frac{41}{8}$ um.

c. $G(x,y) = x(40 - 2x^2) + y(12 - 3y) - 8 - 4x - 3y$
$G(x,y) = -2x^3 + 36x - 3y^2 + 9y - 8$

$$G_x = -6x^2 - 36 = 0, x = \sqrt{6}$$
$$G_y = -6y + 9 = 0, y = \frac{3}{2}$$

Como $p = 40 - 2x^2 = 28$ y $q = 12 - 3y = \frac{15}{2}$, la máxima ganancia es:
$G\left(\sqrt{6},\frac{3}{2}\right) = 24\sqrt{6} - \frac{5}{4}$ um

d. $G(x,y) = x(16-x^2) + y(9-y^2) - x^2 - 3y^2 = -x^3 - x^2 + 16x - y^3 - 3y^2 + 9y$

$$G_x = -3x^2 - 2x + 16 = 0, x = -\frac{8}{3} \text{ ó } x = 2$$
$$G_y = -3y^2 - 6y + 9 = 0, y = -3 \text{ ó } y = 1$$

Se descatan los valores negativos.

Si $x$=2, $p$=16—(—2)$^2$=12. Si $y$=1, $q$=9—(1)$^2$=8

La ganancia máxima es $G$(2, 1)=25 um.

5. a. $f(x, y)=4x^2+2y^2+5$. Si $x^2+y^2-2y = 0$
$F(x, y, \lambda)=4x^2+2y^2+5-\lambda(x^2+y^2-2y)$, $F_x= 8x-2\lambda x$, $F_y=4y-2\lambda y+2\lambda$, $F_\lambda=-x^2-y^2+2y$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 8x - 2\lambda x &= 0 \\ 4y - 2\lambda y + 2\lambda &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 2y \end{aligned}$$

Obtenemos $x$=0, $y$=0 y λ=0 ó $x$=0, $y$=2 y λ=4. Hay puntos críticos en (0, 0) y (0, 2).

b. $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$. Si $x^2 + y^2 - 4y = 0$
$F(x,y,\lambda) = 25 - x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4y), F_x = -2x - 2\lambda x, F_y = -2y - 2\lambda y + 4\lambda, F_\lambda$
$= -x^2 - y^2 + 4y$

Resolviendo el sistema en ℝ

$$\begin{aligned} -2x - 2\lambda x &= 0 \\ -2y - 2\lambda y + 4\lambda &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 4y \end{aligned}$$

Obtenemos $x$=0, $y$=0 y λ=0 ó $x$=0, $y$=4 y λ=2. Hay puntos críticos en (0, 0) y (0, 4).

c. $f(x,y) = x^2 + y$. Si $x^2 + y^2 = 9$
$F(x,y,\lambda) = x^2 + y - \lambda(x^2 + y^2 - 9), F_x = 2x - 2\lambda x, F_y = 1 - 2\lambda y, F_\lambda = -x^2 - y^2 + 9$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 2\lambda x &= 0 \\ 1 - 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 9 \end{aligned}$$

Obtenemos

$x = 0, y = 3$ y $\lambda = \frac{1}{6}$, $x = 0, y = -3$ y $\lambda = -\frac{1}{6}$, $x = \frac{\sqrt{35}}{2}, y = \frac{1}{2}$ y $\lambda = 1$ ó

$x = -\frac{\sqrt{35}}{2}, y = \frac{1}{2}$ y $\lambda = 1$.

Hay puntos críticos en $(0,-3)$ , $(0,3)$, $\left(\frac{\sqrt{35}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{35}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

d. $f(x,y)=x^2y$. Si $x^2+8y^2=24$
$F(x,y,\lambda)=x^2y-\lambda(x^2+8y^2-24)$, $F_x=2xy-2\lambda x$, $F_y=x^2-16\lambda y$,
$F_\lambda=-x^2-8y^2+24$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 2xy-2\lambda x &= 0\\ x^2-16\lambda y &= 0\\ x^2+8y^2 &= 24 \end{aligned}$$

Obtenemos

$x=0, y=\sqrt{3}$ y $\lambda=0$, $x=0, y=-\sqrt{3}$ y $\lambda=0$, $x=4, y=1$ y $\lambda=1$ , $x=4, y=-1$ y $\lambda=-1$, $x=-4, y=1$ y $\lambda=1$ ó $x=-4, y=-1$ y $\lambda=-1$.

Los puntos críticos son $(0,\pm\sqrt{3})$ , $(4,\pm 1)$, $(-4,\pm 1)$..

e. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Si $3x-2y+z=4$
$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda(3x-2y+z-4)$, $F_x=2x-3\lambda$, $F_y=2y+2\lambda$,
$F_z=2z-\lambda$, $F_\lambda=-3x+2y-z+4$

Resolviendo el sistema en $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2x-3\lambda &= 0\\ 2y+2\lambda &= 0\\ 2z-\lambda &= 0\\ 3x-2y+z &= 4 \end{aligned}$$

Obtenemos $x=\frac{6}{7}$, $y=-\frac{4}{7}$, $z=\frac{2}{7}$ y $\lambda=\frac{4}{7}$.

Hay un punto crítico en $\left(\frac{6}{7},-\frac{4}{7},\frac{2}{7}\right)$.

f. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Si $y^2-x^2=1$
$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda(y^2-x^2-1)$, $F_x=2x+2\lambda x$, $F_y=2y-2\lambda y$,
$F_z=2z$, $F_\lambda=-y^2+x^2+1$
Resolviendo el sistema en $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2x+2\lambda x &= 0\\ 2y-2\lambda y &= 0\\ 2z &= 0\\ y^2-x^2 &= 1 \end{aligned}$$

Obtenemos $x=0$, $y=1$, $z=0$ y $\lambda=1$ ó $x=0$, $y=-1$, $z=0$ y $\lambda=1$.

Hay puntos críticos en $(0, \pm 1, 0)$.

6. $C(p,q) = 0.1p^2 + 7p + 15q + 1000$, si $p + q = 100$
$C(p,q,\lambda) = 0.1p^2 + 7p + 15q + 1000 - \lambda(p + q - 100)$

$$\begin{aligned} C_p &= 0.2p + 7 - \lambda \\ C_q &= 15 - \lambda = 0, \lambda = 15 \\ C_\lambda &= -p - q + 100 \end{aligned}$$

Si $\lambda$=15, $p$=40, luego $q$=60. Se deben distribuir en $A$=40 y $B$=60.