cálculo diferencial

para cursos con enfoque por competencias

JORGE LUIS GIL SEVILLA
REBECA DÍAZ TÉLLEZ

ALWAYS LEARNING
PEARSON

cálculo diferencial

para cursos con enfoque por competencias

Jorge Luis Gil Sevilla
Instituto Tecnológico de Nogales

Rebeca Díaz Téllez
Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco
Universidad Politécnica del Valle de México

REVISIÓN TÉCNICA

Leopoldo Viveros Rosas
Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco

Rafael Aguilar Flores
Instituto Tecnológico de Pachuca

Uri del Rosario Hernández Gil
Adriana Taxilaga Jiménez
Miguel Domínguez Torres
Magda Zoraya Meza Fuentevilla
Karina Sastré Antonio
Leovigilda Huesca Herrera
Instituto Tecnológico Superior de Coatzacoalcos

Gabriela López Ballesteros

REVISIÓN PEDAGÓGICA

Carlos Sebastián Rodarte Orozco
Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

GIL SEVILLA, JORGE LUIS Y DÍAZ TÉLLEZ, REBECA

Cálculo diferencial para cursos con enfoque por competencias

Pearson Educación
Área: Matemáticas

ISBN: 978-607-32-1948-8

Formato: 21 × 27 cm | Páginas: 296

Edición en español
Dirección general: Philip De la Vega
Dirección Educación Superior: Mario Contreras

Editora: Gabriela López Ballesteros
e-mail: gabriela.lopezballesteros@pearson.com
Editor de desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción: Rodrigo Romero Villalobos
Diseño de portada e interiores: Jorge Evia/ Ricardo López
Gerencia Editorial
Educación Superior Latinoamérica: Marisa de Anta

PRIMERA EDICIÓN, 2013

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

ISBN versión impresa: 978-607-32-1948-8
ISBN E-Book: 978-607-32-1949-5
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-1950-1

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 16 15 14 13

PEARSON

www.pearsonenespañol.com

cálculo diferencial

para cursos con enfoque por competencias

PRESENTACIÓN

La integración de nuevas propuestas y enfoques educativos en los programas de estudio del nivel superior, como es el caso del enfoque por competencias, pone como reto a los profesores diseñar estrategias que ayuden a los estudiantes a obtener conocimientos, habilidades, aptitudes y actitudes que fortalezcan sus procesos de aprendizaje. Esto con el objetivo de que al terminar sus estudios puedan incorporarse de forma más eficiente al sector productivo, al contar con un nivel de desempeño que corresponda con las altas demandas competitivas de las organizaciones actuales.

Para apoyar la práctica docente y provocar la reflexión de los estudiantes en los cursos de **cálculo diferencial** cuyos programas adoptan el enfoque por competencias, hemos creado este libro, el cual cuenta con todas las herramientas requeridas para estos planes de estudio.

Por sus características, el libro puede ser utilizado como texto en un curso de cálculo diferencial bajo este enfoque porque cuenta con actividades de trabajo y con actividades integradoras, para la práctica constante y la consolidación de los conocimientos; referencias al uso de la tecnología, para la comprensión de los conceptos matemáticos y la resolución de ejercicios, además de problemas de aplicación en contextos reales. Asimismo, ofrece una secuencia apropiada de ejercicios para la conformación de un portafolios que integrará las evidencias generadas durante el desarrollo de las competencias y permitirá determinar el grado de avance de los logros alcanzados; lo mismo que cuestionamientos metacognitivos con los que el estudiante puede llevar pleno control de la forma en la que está logrando los objetivos de aprendizaje.

Características del enfoque por competencias incorporadas en este libro

La competencia profesional es un *saber hacer* complejo que exige conocimientos, habilidades, aptitudes y actitudes que garanticen un ejercicio profesional y responsable que se aproxime a la excelencia. Esta competencia, que se genera, moviliza y desarrolla continuamente, está en la estructura mental de cada individuo, es parte de su acervo y de su capital intelectual y humano. Lo importante no es su posesión, sino el uso que haga de ella, e incluye el saber integrar, movilizar y transferir un conjunto de recursos en un contexto dado con el fin de realizar determinada tarea o hacer frente a problemas específicos. Por eso, en cada capítulo se propone una gran cantidad de ejercicios y actividades que permitan al alumno optimizar estos recursos.

Aunado a lo anterior, es necesario que el aprendizaje sea relevante, que tenga significado, que sea aplicable y que los medios que se utilicen para lograrlo sean atractivos, por eso se proponen actividades destacadas y significativas que el estudiante puede aplicar tanto en su proceso de formación escolarizada como en la vida real.

El enfoque por competencias pretende que el alumno transite desde los niveles receptivos hasta los autónomos para crear una metodología personal con la cual alcance el éxito en su formación; por ello se abordan los aspectos propios del cálculo diferencial con una visión que permite al usuario incorporar los saberes a través de la práctica constante. La finalidad es que, ante cualquier problema, sea capaz de identificar, comprender y explicar su contexto para resolverlo con los conocimientos adquiridos, y así, estar en condición de proponer y enfrentar nuevos problemas.

En la propuesta por competencias destaca la capacidad de *aprender a aprender*, lo cual se entiende como *la capacidad para reconocer los propios procesos de aprendizaje, valorar la necesidad de integrar permanentemente conocimientos y habilidades, y así lograr autonomía en el desarrollo de nuevas competencias*. Gracias a la capacidad de aprender a aprender se pueden actualizar de manera continua los conocimientos y habilidades. Por ello, en este libro se promueve el aprender a aprender con secuencias de ejercicios donde se van integrando los conocimientos previos hasta lograr la resolución de ejercicios en forma autónoma.

Secciones del libro

Este libro está estructurado con secciones que ofrecen elementos para el aprendizaje tanto desde el punto de vista disciplinar del cálculo diferencial como desde el enfoque por competencias. A continuación describiremos las más sobresalientes.

Competencias por desarrollar, actividades de aprendizaje y habilidades y actitudes. Antes de iniciar cada capítulo se describen tanto las competencias por desarrollar como las actividades de aprendizaje, así como las habilidades y las actitudes que guiarán al estudiante hacia el desarrollo de dichas competencias.

Organizador gráfico. Es un diagrama donde se expresan las relaciones entre los conceptos que se tratarán en el capítulo; de tal manera que se tenga una visión global de los conceptos que se revisarán, para una mejor comprensión del contenido.

Antecedentes. Al inicio de cada capítulo se ofrecen algunos ejemplos reales de la aplicación de los conceptos que se presentarán y que ponen de manifiesto la relevancia social, económica o científica del estudio de esos temas.

Desarrollo teórico. Enseguida se presenta el desarrollo de los temas apoyados por una amplia selección de ejemplos resueltos, gráficas y recursos nemotécnicos y visuales; todos seleccionados con gran cuidado una mejor comprensión de los conceptos.

Portafolios de evidencias. Consiste de una secuencia apropiada de ejercicios para la conformación de un portafolio donde se integrarán las evidencias de los logros alcanzados durante el desarrollo de las competencias.

Preguntas de metacognición. A lo largo del texto se incluyen cuestionamientos metacognitivos (es decir, el dominio y regulación que tiene el sujeto de sus propios procesos cognoscitivos) con el fin de que el usuario reconozca la forma como está logrando el aprendizaje de los objetivos.

Actividades de trabajo. En cada sección encontrará actividades que refuerzan la incorporación de los saberes con base en una práctica constante.

Actividades integradoras. Al final de cada capítulo se presentan actividades de trabajo que involucran a todas las secciones, con el propósito de que el estudiante retome los conceptos estudiados y continúe con la práctica de integración de los conocimientos para reforzar lo aprendido.

Problemas de aplicación. Es un conjunto de problemas que plantean situaciones reales de diferentes campos del conocimiento, y cuya solución requiere del dominio de las competencias desarrolladas a lo largo del capítulo.

Autoevaluación. Esta sección se encuentra al final de cada capítulo. Ofrece al estudiante la oportunidad de identificar los aspectos que resuelve con facilidad y aquellos que requieren mayor atención y estudio.

Recursos en línea

En la página web de este libro (www.pearsonenespañol.com/gil-sevilla) encontrará un capítulo completo con información valiosa sobre diferentes dispositivos tecnológicos y programas matemáticos que ayudan a resolver cálculos y elaborar gráficas para una mejor comprensión de los conceptos abordados en el texto.

También encontrará, para consulta y descarga, la respuesta a cada uno de los ejercicios de las actividades de trabajo y de las actividades integradoras. Asimismo, los problemas de aplicación cuentan con el desarrollo completo de su solución.

CONTENIDO

NÚMEROS REALES

1

NÚMEROS REALES

En este primer capítulo nos enfocaremos en el estudio de los números reales: qué son, cómo se clasifican, cómo se ordenan, y para qué nos sirven. Aprenderemos también acerca de las desigualdades: tipos y cómo se resuelven (por método gráfico o analítico), y sobre las ecuaciones e inecuaciones de valor absoluto.

COMPETENCIAS POR DESARROLLAR

COMPETENCIAS	ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	HABILIDADES Y ACTITUDES
Comprender las propiedades de los números reales para resolver desigualdades de primer y segundo grado con una incógnita y desigualdades con valor absoluto, representando las soluciones en la recta numérica real.	Construir el conjunto de los números reales a partir de los naturales, enteros, racionales e irracionales, y representarlos en la recta numérica.	El alumno será capaz de utilizar el conjunto de los números naturales para representar situaciones de la vida diaria.
Comprender las propiedades de los números reales, de orden y aritméticas.	Plantear situaciones en las que se reconozca las propiedades básicas de los números reales: orden, tricotomía, transitividad, densidad y el axioma del supremo.	El alumno tendrá la habilidad de representar situaciones de la vida diaria a través de la recta numérica y los intervalos.
Ser capaz de construir e identificar intervalos en la recta numérica.	Identificar las propiedades de los números reales de orden y aritméticas.	El alumno desarrollará la habilidad para resolver e identificar desigualdades e inecuaciones.
Ser capaz de resolver desigualdades e inecuaciones.	Representar subconjuntos de números reales a través de intervalos y representarlos gráficamente en la recta numérica.	A través de la asimilación de los conocimientos de la primera unidad, el alumno desarrollará en su persona la capacidad de interactuar con los números reales y solucionar problemas de la vida diaria que involucren desigualdades e intervalos.
	Resolver desigualdades de primer grado con una incógnita.	
	Resolver desigualdades de segundo grado con una incógnita.	
	Resolver desigualdades con valor absoluto y representar la solución en la recta numérica.	

ORGANIZADOR GRÁFICO

NÚMEROS REALES

- Clasificación de los números reales
- Propiedades de los números reales
  - Propiedades de orden (tricotomía)
  - Propiedades aritméticas
  - Prioridad de los operadores
- La recta numérica, los intervalos y su representación gráfica
  - Desigualdades lineales
  - Desigualdades cuadráticas
  - Ecuaciones de valor absoluto
  - Desigualdades de valor absoluto
    - Teorema de desigualdades de valor absoluto

ANTECEDENTES

La comunicación es una característica propia del ser humano; y la comunicación que se establece con los números es tan vital para la sociedad que vivimos con ella todos los días. Ha llegado a ser tan importante esta comunicación que inclusive las personas sin escolaridad la usan en la vida cotidiana para administrar su dinero, ya sea para cobrar o pagar deudas; es decir, cualquier persona que tiene un ingreso económico, por medio de un salario o por ventas, lo ve reflejado en *números positivos*, recibe algo; sin embargo, cuando esta persona tiene deudas, es decir, tiene que pagar algo, ve esta comunicación como números con signo de "menos"; es decir, es vista mediante *números negativos*. Veamos el caso hipotético de "Juan".

Juan es un trabajador al que cada viernes le entregan su recibo de nómina. Él se da cuenta que este recibo está dividido en dos secciones: percepciones y deducciones. En la sección de percepciones mira su salario base, más otras entradas de dinero (bonificaciones), y ve que estas cantidades están escritas en números enteros y decimales; pero lo que le llama la atención es la otra sección de su recibo: las deducciones, ya que estas cantidades están con un signo de resta. Juan pregunta por qué esas cantidades tienen ese signo, a lo que se le informa que no es un signo de resta sino un signo negativo, y que este signo representa las cantidades que Juan ha tenido que pagar por concepto de impuestos y aportaciones médicas, entre otras cosas.

Pero Juan pregunta cuánto es lo más que le pueden quitar de su ingreso, y en el departamento de Finanzas le explican que los descuentos tienen que ser no mayores que el 30% de su ingreso.

Como podemos observar, así como para Juan es indispensable comprender el lenguaje que le transmite su recibo de nómina, y puede hacer cuentas sin haber aprobado los cursos básicos de matemáticas, los números son un tipo de comunicación indispensable para la humanidad.

Veamos ahora un ejemplo más complejo de cómo los números intervienen en nuestra vida cotidiana.

En un laboratorio de bebidas refrescantes se establece que el proceso para poder envasar el líquido requiere que esté a 10 grados centígrados bajo cero por un corto tiempo, para después alcanzar gradualmente una temperatura de 25 grados centígrados. El encargado dice que necesitan hacer una instrucción con estos parámetros para que cada vez que le hagan limpieza al sistema puedan volver a configurarlo adecuadamente. ¿Cómo se podrían representar estas dos temperaturas con tal fin? En este problema vemos la necesidad de saber cómo manejar otros tipos de números que integran nuestra vida cotidiana.

1.1 Clasificación de los números reales

Números reales

Los números reales (denotados por R) son el conjunto de números creados por el hombre para poder transmitir mediante un lenguaje unificado distintas cantidades, expresadas por una serie de símbolos y 10 dígitos, lo que ha otorgado a la sociedad la capacidad de medición y exactitud con que cuenta y se rige hoy en día. Los números *reales* se subdividen en dos grandes grupos: los números *racionales* y los *irracionales*.

Números racionales

Los *números racionales* (denotados por Q) son todos aquellos que se pueden escribir en forma de fracción, como $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. Dentro de los números racionales se comprenden los números enteros, las fracciones propiamente dichas, y los decimales.

Números enteros

Son los números reales (denotados por Z) que escritos en forma de fracción se encuentran divididos entre 1, y que en el resultado el numerador sigue siendo el mismo. Ejemplo: $\frac{5}{1}=5$, $\frac{12}{1}=12$, $\frac{-30}{1}=-30$; en otras palabras, todo número entero está siempre dividido entre uno, aunque no lo escribamos. Estos números los usamos en nuestra vida cotidiana para contar cosas exactas que tenemos o debemos; por ejemplo: una casa, 10 calcetines, \$100.00 la hora, \$15,000.00 a la hipoteca, etc. Los números enteros se dividen como sigue:

1. **Enteros positivos (Z^+)** Son los números enteros que usamos para contar lo que tenemos, e incluyen el cero. Se representan de la siguiente manera: $Z^+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots 9999,\ldots\}$.
2. **Enteros negativos (Z')** Son los números enteros que usamos para contar lo que debemos o lo que nos falta. Aparecieron con la civilización cuando decidió que debíamos hacer compras, pagar impuestos, o si le debíamos algo a alguien. Fue una forma de equilibrar lo que ganábamos con lo que perdíamos. Se representan por $Z' = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6\ldots\}$.
3. **Números naturales (N)** Son los primeros números que se utilizaron para contar; sin embargo sólo se tomaba en cuenta lo que se tenía, es decir, no se consideraban los números negativos. Los números naturales son un subconjunto de los números enteros positivos ya que no incluyen al cero. Se designan con la letra N. Ejemplo: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\ldots\}$.
4. **Enteros pares** Son números que pueden ser enteros positivos o negativos, siempre y cuando sean múltiplos de 2 o que al ser divididos entre 2 el resultado siga siendo un entero. Ejemplo: $\{2, 4, 6, -8, -10, -12\ldots\}$.
5. **Enteros impares** Corresponden a todos aquellos números enteros que no son múltiplos de dos o que al ser divididos entre 2 el resultado es una fracción o un decimal. Ejemplos: $\{1, 3, -5, -7, -11\ldots\}$.
6. **Números primos** Son todos los números enteros impares, con excepción del 2 que al dividirlo entre otro número diferente de la unidad o de sí mismo nos da un decimal u otro entero. Ejemplos:

$$\frac{17}{1}=17,\ \cancel{\frac{17}{2}=8.5},\ \cancel{\frac{17}{3}=5.67},\ \cancel{\frac{17}{4}=4.25},\ \cancel{\frac{17}{5}=3.4}\ldots\ \frac{17}{17}=1$$

NOTA: Observa que al dividir el 17 entre un número diferente de 1 o de sí mismo nos da un número decimal, por lo tanto SÍ es un número primo.

$$\frac{15}{1}=15,\ \cancel{\frac{15}{2}=7.5},\ \frac{15}{3}=5,\ \cancel{\frac{15}{4}=3.75},\ \frac{15}{5}=3\ldots\ \frac{15}{15}=1$$

NOTA: Observa que el 15 se puede dividir entre la unidad y entre sí mismo; sin embargo, al dividirlo entre 3 o entre 5 también nos da un número entero, por lo tanto NO es un número primo (vea la tabla 1.1).

Tabla 1.1 Números primos del 1 al 100.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97					

Fracciones comunes

Se le llama fracción a la razón formada entre dos enteros de la forma $\frac{a}{b}, \frac{m}{n}, \frac{q}{r}, \frac{N}{D}$, etc., donde el denominador es diferente de cero. Se pueden presentar tres casos en las fracciones.

1. **Fracciones propias** Son aquellas en las que el numerador es menor que el denominador $a < b$, $m < n$, $N < D$; en otras palabras, al efectuar la división el resultado es menor que la unidad. Ejemplos:

$$\frac{1}{2}=0.5,\ \frac{1}{3}=0.\bar{3},\ \frac{4}{5}=0.8,\ \frac{7}{8}=0.875$$

2. **Fracciones impropias** Son aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador y al efectuar la división el resultado es mayor que la unidad. Ejemplos:

$$\frac{3}{2}=1.5,\ \frac{4}{3}=1.\bar{3},\ \frac{6}{5}=1.2,\ \frac{9}{2}=4.5$$

3. **Fracciones iguales** Son aquellas en las que el numerador y el denominador son iguales, por lo tanto el resultado de la división corresponde a la unidad. Ejemplos:

$$\frac{2}{2}=1,\ \frac{3}{3}=1,\ \frac{4}{4}=1,\ \frac{5}{5}=1,\ \frac{6}{6}=1$$

Decimales

Los números decimales son aquellas fracciones expresadas mediante el cociente de dos enteros. Ya que en ocasiones el cociente puede ser muy largo e inexacto, en cálculos de matemáticas, ingeniería e industria se acostumbra utilizar fracciones en lugar de decimales.

1. **Decimales exactos** Son aquellas fracciones para las que el resultado del cociente entre dos enteros es finita. Ejemplos:

$$\frac{5}{2}=2.5,\ \frac{7}{2}=3.5,\ \frac{12}{5}=2.4,\ \frac{8}{5}=1.6,\ \frac{22}{4}=5.5$$

2. **Decimales periódicos** Se denomina así a la razón entre dos enteros cuyo cociente es **infinito y repetitivo**. Ejemplos:

$$\frac{1}{3}=0.3333\ldots,\ \frac{26}{3}=8.6666\ldots,\ \frac{11}{7}=1.571428571428\ldots,\ \frac{1}{99}=0.01010101\ldots$$

Como resulta imposible escribir **todos** los decimales, lo que se hace es colocar una tilde sobre los números que se repiten. Si retomamos el ejemplo anterior, los decimales quedarían de la siguiente manera:

Tilde sobre los decimales que se repiten.

$$\frac{1}{3}=0.\bar{3},\ \frac{26}{3}=8.\bar{6},\ \frac{11}{7}=1.\overline{571428},\ \frac{1}{99}=0.\overline{01}$$

Números irracionales

Estos números corresponden a la otra **gran** división de los números reales, y como su prefijo lo indica, son los que **no** son racionales; es decir, todos aquellos números que **no se puedan expresar en forma de fracción**.

Irracionales algebraicos

Corresponden a los números decimales que por su complejidad numérica no se pueden expresar en forma de fracción ya que provienen de una operación aritmética distinta a la división, como la raíz cuadrada, cúbica, cuarta, $\sqrt{\ }$. Ejemplos:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{5}$$

Irracionales trascendentales

Son aquellos símbolos de relevancia matemática que debido a la complejidad de su significado no se pueden escribir en forma de fracción. Los símbolos más comunes son:

$\pi = 3.14159265$	Número que indica las veces que el radio de un círculo cabe en su circunferencia.
$e = 2.71828182846$	Número que indica crecimiento continuo de los seres vivos.
$\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398$	Número áureo phi que se encuentra en algunas figuras geométricas de la naturaleza; se relaciona con la belleza y la estética de las cosas.

NOTA: Entre otros números naturales se encuentran algunos logaritmos o inclusive funciones exponenciales como ln(2) y e^{π}.

Clasificación de los números reales

Figura 1.1 Los números reales.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.1

Realiza las siguientes actividades.

1. Investiga los 15 números trascendentales irracionales.
2. Encuentra los números primos entre el 101 y el 200.

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra la siguiente actividad a tu portafolio de evidencias.

1. Presenta un esquema de la clasificación de los números reales en el que los conjuntos de números sean incluyentes.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.2

Determina a qué grupo pertenecen los siguientes números.
Coloca una Q' si es irracional, Z^+ si es entero positivo, Z' si entero negativo, N si es natural; o bien, indica si se trata de una fracción propia, impropia, o de un decimal exacto o periódico.

NOTA: Algunos números pueden caer en más de una categoría.

1. $\frac{1}{3}$	8. 44	15. $\frac{-2}{99}$
2. $\sqrt{4}$	9. $\sqrt{\frac{1}{4}}$	16. $\{0, 1, 2, 3, 4... \text{etc.}\}$
3. $\frac{\sqrt{9}}{3}$	10. $\frac{\sqrt{2}}{4}$	17. -7
4. $-\frac{5}{2}$	11. $\frac{\sqrt{25}}{3}$	18. $\sqrt{3}$
5. $\frac{13}{7}$	12. $\frac{4}{\sqrt{9}}$	19. $\{1, 3, 5, 7... \text{etc.}\}$
6. $3.\bar{6}$	13. $\{1, 2, 3, 4... \text{etc.}\}$	20. $\frac{7}{11}$
7. 21	14. $\frac{33}{7}$	21. $\sqrt{\frac{1}{25}}$

¿?

¿Realmente comprendí la importancia de los números reales?

¿Entiendo cuáles son los números racionales?

¿Soy capaz de definir a los números primos?

¿Soy capaz de explicar qué es una fracción propia?

¿Comprendo qué es un número decimal periódico?

¿Soy capaz de mencionar tres números irracionales trascendentales?

¿Tengo claridad sobre la clasificación de los números reales?

1.2 Propiedades de los números reales

Raúl sabe que es el menor de cinco hermanos, y que su hermano mayor es Pablo. No conoce bien el orden de los hermanos de en medio, pero sabe que María es más grande que él pero más chica que José, y que Melissa es la de en medio. ¿Podrías usar las matemáticas para ayudar a Raúl a determinar el orden de sus hermanos?, ¿hay algún axioma matemático que determine quién es el hermano menor y quién el mayor del conjunto de hermanos?

Propiedades de orden

Las propiedades de orden de los números reales son muy importantes ya que además de establecer el orden obvio de los números, nos permite distinguir qué dato o conjunto de datos es mayor o menor que otro, lo cual otorga un valor o jerarquía a los números. También nos permite formar agrupaciones, comparaciones o distribuciones entre los números; así mismo, el orden de los números es la base de la recta numérica y de los sistemas de coordenadas con lo que podemos crear o establecer intervalos, rangos, soluciones o visualizar un problema utilizando una gráfica. Por último, establece igualdades, diferencias y modelos matemáticos que nos permiten transformar un problema de la vida real en símbolos y números para encontrar una posible solución.

Ley de la tricotomía

Esta ley establece comparaciones no sólo entre números, sino también entre variables, ecuaciones y desigualdades. Básicamente hace referencia a tres símbolos; sin embargo, en matemáticas existen otros símbolos que también nos permiten hacer comparaciones. La ley de la tricotomía establece que:

1. Existe un número real a menor que b, denotado como $a < b$.
2. Existe un número real a mayor que b, denotado como $a > b$.
3. Existe un número a que es igual que b, denotado como $a = b$.

Estas comparaciones establecen que un valor es mayor, menor o igual que otro, y nos permiten saber en la vida real qué persona gana más, o cuál es mayor que otra, además; formar intervalos que nos son útiles para crear un rango de valores. Por ejemplo, este automóvil cuesta más de \$200,000.00, quiere decir que se pagarían más de doscientos mil pesos, o bien, como ingeniero, usted ganará más de \$8,000 y menos de \$16,000, lo que se representa como $8{,}000 < x < 16{,}000$. En matemáticas, aquellas comparaciones en las que un dato es mayor, menor, mayor igual o menor igual, forman lo que llamamos desigualdades en las que la solución al problema es un conjunto de datos y no soluciones únicas como sucede en las ecuaciones. Más adelante veremos cómo obtener el conjunto solución para algunos casos de desigualdades.

Otros símbolos que nos permiten hacer comparaciones son:

Tabla 1.2 Símbolos de comparación.

Símbolo	Significa
$\neq$	Diferente de
$\leq$	Menor o igual que
$\geq$	Mayor o igual que
$\ll$	Mucho menor que
$\gg$	Mucho mayor que
$\sim$	Aproximadamente
$\simeq$	Asintóticamente igual a
$\approx$	Casi igual a o asintótico a
$\cong$	Aproximadamente igual a
$\equiv$	Idéntico a

Ley de la transitividad

La ley de la transitividad nos permite transferir relaciones de comparación entre tres elementos, siempre y cuando éstos se encuentren involucrados en la comparación.

Matemáticamente, la transitividad es una relación de un conjunto de elementos, en la cual el elemento a se relaciona con b y b se relaciona con c; por lo tanto, a se relaciona con c; es decir, los elementos del conjunto se encuentran interrelacionados.

Si combinamos las leyes de la transitividad y de la tricotomía podemos llegar a las siguientes conclusiones:

1. Si $a < b$ y $b < c$ por lo tanto $a < c$.

   Ejemplo: $3 < 5$ y $5 < 7$ por lo tanto $3 < 7$.

2. Si $a > b$ y $b > c$ por lo tanto $a > c$.

   Ejemplo: $10 > 0$ y $0 > -5$ por lo tanto $10 > -5$.

3. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ por lo tanto $a \leq c$.

   Ejemplo: $2 \leq 4$ y $4 \leq 6$ por lo tanto $2 \leq 6$.

4. Si $a \geq b$ y $b \geq c$ por lo tanto $a \geq c$.

   Ejemplo: $11 \geq 3$ y $3 \geq 0$ por lo tanto $11 \geq 0$.

Este tipo de comparación lo podemos visualizar gráficamente en la recta numérica de la figura 1.2.

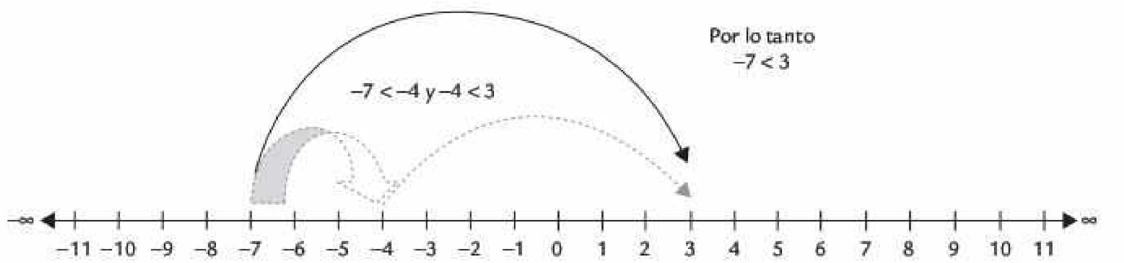


Figura 1.2

NOTA: Los ejemplos anteriores recuerdan los ejercicios para mejorar las habilidades del pensamiento, por ejemplo: Pedro es más alto que Juan y Hugo es más alto que Juan, pero Pedro es el más alto de todos. ¿Podrías concluir el orden de las estaturas?

Axioma del supremo

Este axioma acota un conjunto de datos a en el cual el elemento supremo o cota superior es s, y si existe cualquier otro elemento superior a s entonces será igual a s.

Ejemplo: Si $a = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, el supremo de este conjunto es 5.

Axioma del ínfimo

Este axioma acota un conjunto de datos a en el cual el elemento ínfimo o cota inferior es i, y si existe cualquier otro elemento inferior a i entonces será igual a i.

Ejemplo: Si $a = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, el ínfimo de este conjunto de elementos es -2.

Densidad de los números reales

A Sergio le están enseñando la recta numérica. Él ya conoce el orden de los números enteros; sin embargo, su profesora le pregunta qué número está entre el 10 y el 12. ¿Cuál crees que deba ser la respuesta de Sergio?

La densidad es la propiedad de los números reales. Por más cercano que esté un par de números reales siempre existe un conjunto infinito de números reales entre ellos.

Dicho de otra forma, entre dos números cualesquiera siempre existirá un número entre ellos. Para comprender esto, imaginemos que tenemos la recta numérica y que en ella hemos representado dos números enteros, digamos el 3 y el 5. Si preguntamos qué número está entre el 3 y el 5 la mayoría contestará instantáneamente: 4, pero también se encuentran: 3.1, 3.2, 3.5, 4.5, 4.7, π, $3\sqrt{2}$, entre otros. Sin embargo, si pudiéramos acercarnos a la recta numérica con una lupa podríamos observar que entre 3 y 3.1 existe otra sucesión infinita de números: 3.01, 3.02, 3.03, 3.04, …, y entre 3.01 y 3.02 están: 3.011, 3.012, 3.013…, y así sucesivamente, en una ola interminable de números que veríamos cada vez que acercáramos la lupa (vea la figura 1.3).

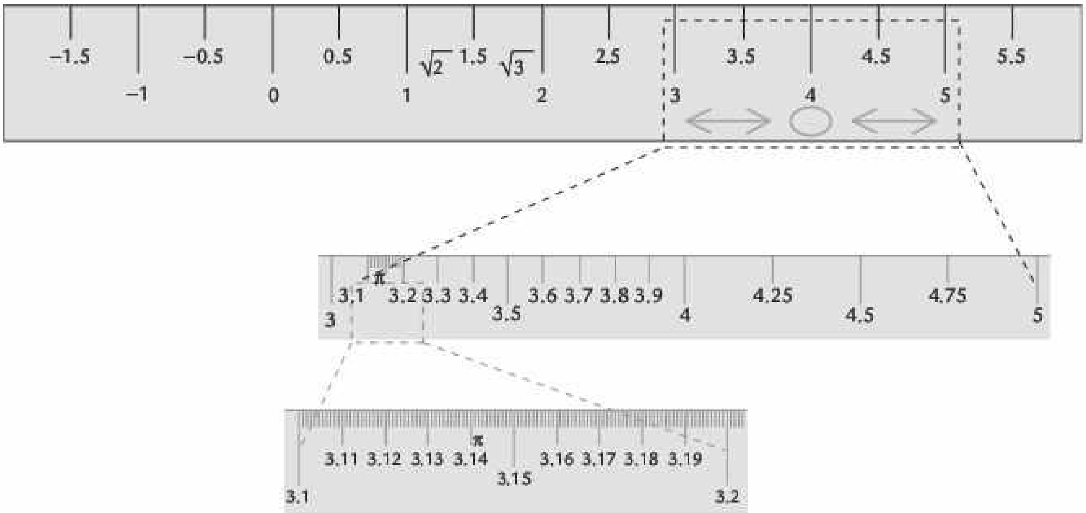


Figura 1.3 La densidad es la propiedad de los números reales que habla de la existencia de un número entre otros dos números, por muy cercanos que éstos se encuentren.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.3

Resuelve según sea el caso.

I. Aplica la Ley de la tricotomía y la Ley de transitividad a los siguientes ejercicios.

1. Si $u<v$ y $v<w$ $\therefore$
2. Si $\mathbf{-3<2}$ y $\mathbf{2<7}$ $\therefore$
3. Si $\mathbf{A \geq B}$ y $\mathbf{B \geq C}$ $\therefore$
4. Si $\mathbf{a<b<c<d}$ $\therefore$
5. Si $\frac{3}{4}<\mathbf{1.2}$ y $\mathbf{1.2}<\frac{8}{5}$ $\therefore$
6. Si $\mathbf{X>Y}$ y $\mathbf{Y=Z}$ $\therefore$

II. Aplica los axiomas del supremo y del ínfimo a los siguientes ejercicios:

1. $A=\{0,1,4,7,11,9,6,3\}$
2. $B=\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{1}{10},\frac{8}{7},\frac{1}{3},\frac{4}{5},\sqrt{2}\right\}$
3. $C=\left\{\pi,\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{3},-\pi,2\pi,\frac{11\pi}{12}\right\}$
4. $D=\left\{\sqrt{\frac{1}{4}},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{\frac{9}{4}},\sqrt{16}\right\}$

Propiedades aritméticas

Las propiedades aritméticas son el conjunto de propiedades que poseen los números reales y que nos facilitan efectuar los cálculos aritméticos e inclusive algebraicos, ya que nos permiten asociar o separar datos, con lo que podemos resolver las operaciones más cómodamente. Nos ayudan a simplificar expresiones y son necesarias en el cálculo integral para completar el diferencial mediante su recíproco y, finalmente, son de vital importancia en algunos métodos como la racionalización. Aun cuando muchas de estas propiedades te resultarán familiares (puesto que ya las habrás visto en tu trayectoria académica), las recordaremos en esta sección porque son la base del cálculo diferencial, integral y matricial.

Propiedad conmutativa

Esta propiedad descarta la importancia del orden en que se colocan los datos en una suma o en una multiplicación. En otras palabras: **"el orden de los factores no altera el producto"** y **"el orden de los sumandos no altera la suma".**

- **Suma: A + B = C** es igual que **B + A = C.**
  - Ejemplo 1: $5 + 7 = 12$ o $7 + 5 = 12$
  - Ejemplo 2: $-3 + 8 = 5$ o $8 + (-3) = 5$
- **Multiplicación: A * B = C** es igual que **B * A = C.**
  - Ejemplo 1: $5 * 4 = 20$ o $4 * 5 = 20$
  - Ejemplo 2: $-3 * 7 = -21$ o $7 * (-3) = -21$

Propiedad asociativa

Esta propiedad da capacidad a los elementos, ya sean sumandos o factores, de ser agrupados sin alterar el resultado. Esta propiedad aplica para tres o más datos.

- **Suma: (A + B) + C = D** es igual que **A + (B + C) = D.**
  - Ejemplo 1: $(1 + 6) + 3 = 10$ o $1 + (6 + 3) = 10$
  - Ejemplo 2: $(4 + 6) + (3 + 5) = 18$ o $(3 + 6) + (4 + 5) = 18$
- **Multiplicación: (A * B) * C = D** es igual que **A * (B * C) = D.**
  - Ejemplo 1: $(3 * 5) * 2 = 30$ o $3 * (5 * 2) = 30$
  - Ejemplo 2: $(2 * 3) * (4 * 6) = 144$ o $(2 * 6) * (3 * 4) = 144$

Propiedad distributiva

Otra de las propiedades importantes de los números reales es la propiedad distributiva, la cual nos permite reescribir una expresión en su forma desarrollada o factorizada según se requiera. La propiedad distributiva se puede aplicar a sumas o restas, siempre y cuando haya un factor que se repita.

- **Forma factorizada: X (A + B)**
  - Ejemplo 1: Suma: $(4 * 2 + 3 * 2) = 2 * (4 + 3) = 14$
  - Ejemplo 2: Resta: $(7 * 3 - 2 * 3) = 3 * (7 - 2) = 15$
- **Forma desarrollada: (AX + BX)**
  - Ejemplo 1: Suma: $4 * (2 + 6) = (4 * 2 + 4 * 6) = 32$
  - Ejemplo 2: Resta: $5 * (4 - 1) = (5 * 4 - 5 * 1) = 15$

Elemento neutro

Se denomina neutro a aquel elemento de los números reales que al colocarlo en una operación aritmética no altera el resultado. En las operaciones de suma o resta el elemento neutro es el **0**, en tanto que en la multiplicación y en la división es el **1**. Esta propiedad es muy útil al momento de reducir algunas expresiones, racionalizar el denominador (como se verá en el capítulo de límites), o al momento de dividir entre fracciones.

- **Suma o resta: A ± 0 = A**
  - Ejemplo 1: Suma: $37 + 0 = 37$
  - Ejemplo 2: Resta: $12 - 0 = 12$
- **Multiplicación o división: A (1) = A o A/1 = A**
  - Ejemplo 1: Multiplicación: $= \frac{7}{\sqrt{3}}(1) = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$$\frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

Al multiplicar por un elemento neutro $1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ el resultado permanece invariable (comprueba con tu calculadora). En este ejemplo se racionalizó el denominador.

  - Ejemplo 2: División: $16/1 = 16$

Propiedad del inverso

El inverso neutro es el contrario al elemento neutro; es decir, en la suma existe un número llamado **simétrico** que, al sumarlo, el resultado nos dará el elemento neutro, que es el **0**, mientras que en la multiplicación existe un **recíproco** que al multiplicarlo nos dará **1**.

- **Suma o resta: A + B = 0**
  - Ejemplo 1: $7 + (-7) = 0$
- **Multiplicación: A (1/A) = 1**
  - Ejemplo 2: $42 \cdot \frac{1}{42} = 1$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.4

Resuelve según sea el caso.

I. Aplica la propiedad conmutativa o la asociativa a los siguientes ejercicios.

1. $3+(8+4)=$
2. $5\cdot 7=$
3. $-14\cdot 5=$
4. $(7\cdot 3 * 4\cdot 5)=$
5. $7+(11+4)=$
6. $16+(-7)=$

II. Utiliza la propiedad distributiva para expresar en su forma desarrollada o factorizada las siguientes expresiones, según sea el caso.

1. $3(4+7)=$
2. $ax+bx-cx=$
3. $(4\cdot 7-4\cdot 5)=$
4. $(9\cdot 11+9\cdot 2)=$
5. $8(11-3)=$
6. $-2(3+5)=$
7. $(-3\cdot 4-(-3\cdot 5))=$
8. $-6(13+7)=$
9. $e(x+y)=$

III. Encuentra el elemento neutro o el inverso.

1. $23+\_\_\_\_=0$
2. $35\cdot\_\_\_\_=1$
3. $-8+\_\_\_\_=0$
4. $\frac{1}{4}\cdot\_\_\_\_=1$
5. $15+\_\_\_\_=15$
6. $23\cdot\_\_\_\_=23$
7. $-\frac{1}{3}\cdot\_\_\_\_=1$
8. $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\_\_\_\_=\frac{\sqrt{2}}{2}$
9. $-11\cdot\_\_\_\_=1$

¿?

¿Comprendo el orden que establece la ley de la tricotomía?

¿Soy capaz de explicar la ley de la transitividad?

¿Comprendo la propiedad de densidad de los números reales?

¿Comprendo qué establece la propiedad conmutativa?

¿Comprendo qué establece la propiedad asociativa?

¿Soy capaz de explicar el elemento neutro?

1.3 Prioridad de los operadores

Adrián acaba de ingresar a la universidad y está en el curso de matemáticas introductorias. En una clase, la profesora le pide que realice ciertas operaciones aritméticas; sin embargo, sus resultados son diferentes a los del resto de sus compañeros: debe sumar 5 más 7 y dividirlo entre 2. A sus compañeros les da un resultado de 6; mientras que cuando él introduce los datos en su calculadora le resulta 8.5. ¿Podrías ayudar a Adrián a determinar cuál es su error?

La prioridad de los operadores establece qué operación aritmética se debe efectuar primero y nos permite saber cuáles elementos se encuentran agrupados. Asimismo, nos permite saber qué movimientos algebraicos o aritméticos realizar primero al despejar una ecuación. La tabla 1.2 muestra la prioridad y los operadores más utilizados en matemáticas.

Tabla 1.3 Operadores matemáticos.

Prioridad	Operador
1	{...} Llaves
2	[...] Corchetes
3	(...) Paréntesis
4	^ Potencias y $\sqrt[n]{\ }$ raíces
5	* Multiplicación y ÷ división
6	+ Suma y − resta
7	Operadores de comparación <, >, ≤, ≥, ≃, etc.
8	Operadores de igualdad = y ≠
9	Operadores lógicos como if, and, or, else, then, until, etc., comúnmente usados en programación

EJEMPLO 1

Los paréntesis indican que debemos efectuar las operaciones aritméticas entre estos datos.

Por lo tanto, primero debemos resolver la potencia y después hacer la suma.

$$\frac{\left(2^3+4\right)}{2}+5=\frac{(8+4)}{2}+5=\frac{12}{2}+5=6+5=11$$

El siguiente paso sería resolver la división.

Concluiríamos con la suma en el orden de prioridades.

EJEMPLO 2

Después resolvemos la raíz.

$$\sqrt{4^2+33}-5=\sqrt{16+33}-5=\boxed{\sqrt{49}}-5=\underbrace{7-5}=2$$

Aunque no resulte obvio, todo el radicando se encuentra dentro de paréntesis.

Por último hacemos la resta.

Sin embargo, como habrás observado a lo largo de tu trayectoria académica, al momento de despejar sucede algo muy curioso: la prioridad de los operadores se invierte, lo cual te puede causar alguna confusión:

$$4x^2-16=?$$

Para resolver esto debemos seguir un orden inverso de prioridades y de operaciones:

1. Resta → Suma
2. Multiplicación → División
3. Potencia → Raíz

$$4x^2-16 \Rightarrow 4x^2=16 \qquad 4x^2=16 \Rightarrow x^2=\frac{16}{4}=4 \qquad x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

NOTA: Es conveniente resolver primero los datos que se encuentren agrupados antes de tratar de despejar una variable.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.5

Aplica la prioridad de los operadores para resolver los siguientes ejercicios.

1. $\dfrac{1+3.5^2}{\sqrt{\dfrac{11}{2}-\dfrac{1}{2}}}$
2. $\left(3^2-\dfrac{1}{7}\right)/2$
3. $\dfrac{\left(\operatorname{sen}(0.7)\right)^2}{\sqrt{2}}$
4. $2^3-4^2+\sqrt{\dfrac{1}{4}}-12$
5. $\left[4\times\dfrac{1}{3}\right]\left[\left(\sqrt{49}-2\right)^2-23\right]$
6. $\left[\left(3^2-\dfrac{1}{5}\right)+5\right]$
7. $\dfrac{17+25}{\sqrt{81}+12}$
8. $\left[\left(2^2-\dfrac{1}{3}\right)\left(\sqrt{4}+5\right)\right]-1$
9. $\dfrac{\sqrt{\left(4^3+6^2\right)}}{2}$

10. $\sqrt{7x+5}=12$
11. $3(x+5)^2-11=64$
12. $\dfrac{2}{x}-3=1$

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra la siguiente actividad a tu portafolio de evidencias.

2. Realiza un resumen sobre las propiedades de los números reales y sobre la prioridad de los operadores.

¿?

¿Comprendo la prioridad de los operadores?

1.4 La recta numérica

De nuevo, la profesora de Sergio les está enseñando la recta numérica, y les explica que en ella se encuentran todos los números reales. ¿Podrías ayudar a Sergio a representar los números reales en la recta numérica?

La recta numérica (figura 1.4) es la representación gráfica y ordenada del conjunto de los números reales y en ella encontramos los números racionales e irracionales, tanto trascendentales como algebraicos, enteros positivos y negativos, decimales y fracciones, dispuestos en una sucesión infinita de puntos gracias a la propiedad de la densidad de los números racionales. Debido al orden que brinda la recta, podemos establecer gráficamente qué número es mayor o menor, cuál se encuentra a la izquierda o a la derecha del cero, que es el número que delimita los números positivos y negativos. La importancia de la recta radica en que nos permite localizar gráficamente un número real en concreto o establecer o sumar intervalos, lo cual, como se verá más adelante, nos será de gran ayuda para encontrar la solución de las desigualdades, e incluso nos facilitará determinar el dominio de algunas funciones, como se menciona en la estrategia para funciones complejas.

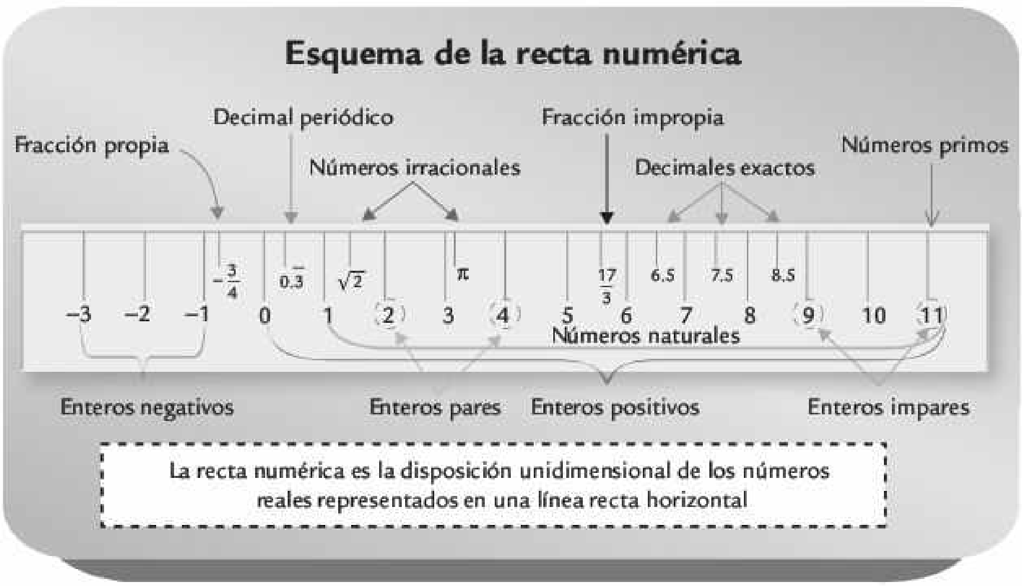


Figura 1.4 La recta numérica.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.6

Localiza en la recta numérica los siguientes datos, o aplica la densidad de la recta para encontrar un número que se encuentre entre ambos.

1. $\frac{1}{7}$
2. $\sqrt{3}$
3. $\frac{-\pi}{2}$
4. Número entre 0.5 y 1
5. $2 \cdot e$
6. $\frac{1}{9}$
7. $\frac{4}{5}$
8. 9.9
9. $\ln(2)$
10. Número entre 2 y 2.01
11. 2π
12. -1
13. $0.\overline{285714}$
14. $\frac{28}{9}$
15. $1.\overline{2}$

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra la siguiente actividad a tu portafolio de evidencias.

3. Presentar un esquema de la recta numérica con la localización de los números reales.

¿?

¿Soy capaz de usar la recta numérica para localizar los números reales?

1.5 Los intervalos y su representación gráfica

Jorge es un pequeño empresario. Tiene una taquería y ya lleva un año trabajando en ella. Hace una semana escuchó hablar a un par de clientes que comían en su taquería de las tarjetas de crédito. Al día siguiente fue al banco a solicitar información sobre las tarjetas de crédito y, de todas, la que le llamó la atención es la que otorga un crédito de entre \$15,000.00 y \$30,000.00 inclusive. ¿Cómo podría expresarse matemáticamente el crédito que le llamó la atención a Jorge?

Este tipo de situaciones puede expresarse con intervalos. Considera esta otra situación cotidiana:

Carolina quiere comprar un estuche de belleza, pero su madre le dice que sólo puede ayudarla si el estuche cuesta entre \$500.00 y \$800.00. ¿Cómo debe interpretar esto Carolina?

Un intervalo es un conjunto definido de valores que tienen orden; además, el intervalo está acotado por un ínfimo y un supremo a los cuales se les denomina extremos **a** y **b** del intervalo, respectivamente. Existen tres maneras de representar intervalos:

1. Notación de intervalos.
2. Desigualdades.
3. Gráficamente.

Tabla 1.4 Intervalos y su representación.

Equivalencia / Tipos	Notación de intervalos	Desigualdades	Gráficamente	Significa o se lee
Abierto	(a, b)	a < x < b		Todos los números comprendidos entre **a** y **b**, sin incluir **a** ni **b**.
Cerrado	[a, b]	a ≤ x ≤ b		Todos los números comprendidos entre **a** y **b**, inclusive **a** y **b**.
Semiabierto extremo a	(a, b]	a < x ≤ b		Todos los números comprendidos entre **a** y **b**, inclusive **b** pero no **a**.
Semiabierto extremo b	[a, b)	a ≤ x < b		Todos los números comprendidos entre **a** y **b**, inclusive **a** pero no **b**.

En matemáticas o en la vida real un intervalo representa el conjunto de todas las posibles soluciones que puede tener una ecuación, una desigualdad o un problema.

EJEMPLO 1

Matemáticamente, el dominio de una función raíz como $\sqrt{x+2}$ está dado por todos los números reales que hagan que el radicando sea igual o mayor que cero.

El dominio de esta función es $x \geq -2$, que queda representado por el intervalo $[-2,\infty)$, tal como se muestra en la figura 1.5.

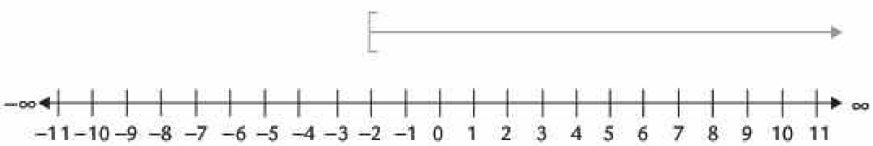


Figura 1.5

EJEMPLO 2

El precio p de este libro es mayor que \$300.00 y menor que \$500.00, lo que quiere decir que el libro puede costar \$320.00, \$350.00, \$400.00, \$480.00; inclusive podría costar \$301.00 o \$499.99, pero no costará ni \$300.00 ni \$500.00, ya que están fuera de las condiciones del problema, representado por la desigualdad: $300 < p < 500$ y gráficamente por la figura 1.6.

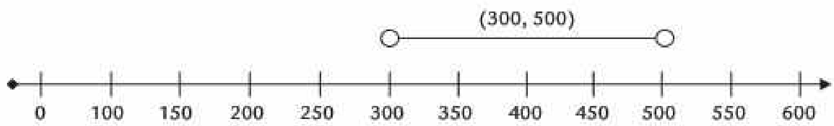


Figura 1.6

EJEMPLO 3

La calificación reprobatoria en ciertas universidades tecnológicas va de 0 a 69; el mínimo aprobatorio es 70, y el máximo posible es 100, lo cual se representa en las desigualdades que se ilustran en la figura 1.7.

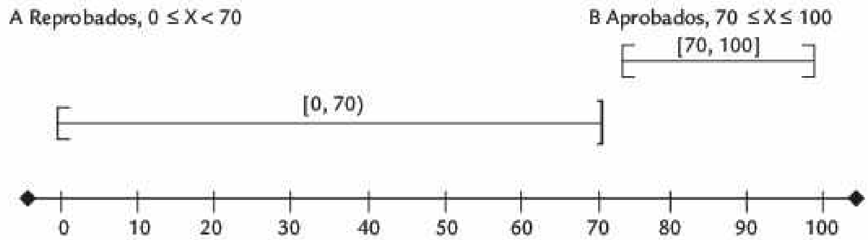


Figura 1.7

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.7

Representa en la recta numérica los siguientes intervalos.

1. $(-\infty, 2]$
2. $[-5,-2) \cup (2,5]$
3. $[-3,3]$
4. $(2,7)$
5. $(-1,4) \cup [4,11)$
6. $X < -5$
7. $X \geq 5$
8. $-3 \leq X < 7$
9. $(-\infty, 3] \cap (-1, \infty)$
10. $(-\pi, \pi)$
11. $X < 0$
12. $\left(0, \frac{5}{4}\right]$

¿?

¿Soy capaz de interpretar un intervalo?

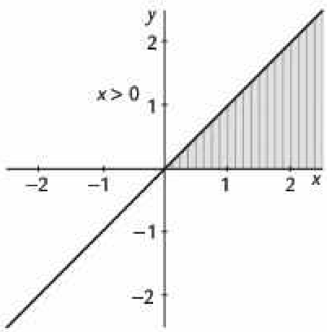
¿Soy capaz de representar gráficamente los intervalos?

1.6 Desigualdades lineales

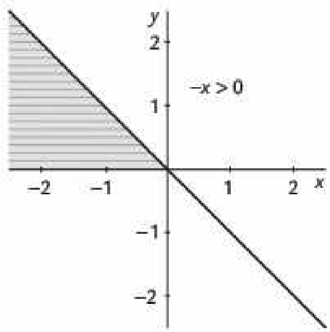
Un vacacionista planea rentar un automóvil. En una compañía le cuesta $150.00 por día, mientras que en otra la renta es de $90.00, más $0.30 por kilómetro recorrido. ¿A partir de cuántos kilómetros resulta más barato contratar la primera compañía? Este tipo de situaciones plantea problemas cuya solución requiere utilizar desigualdades lineales.

Las desigualdades lineales forman parte muy importante de nuestra vida cotidiana, al estar mezcladas con las funciones parte por parte (vea el capítulo 2) y usarse para describir comúnmente cada intervalo de la función. Estas funciones aparecen en los recibos de electricidad (luz), agua, teléfono, jornadas laborales, salarios, cuentas de crédito, etc., donde cada escalón forma una condición que al excederse cae en el siguiente peldaño, aumentando con esto la tarifa de cobro en los recibos o en el salario del trabajo (vea el ejemplo del recibo de electricidad en el capítulo 2).

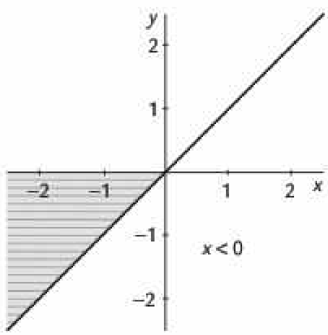
De la misma manera que las ecuaciones lineales tienen sólo una solución, las desigualdades lineales sólo pueden tener un intervalo de soluciones. Su intervalo solución estará determinado por la posición de la línea recta dada por la desigualdad y el eje de las abscisas (eje x). Las siguientes gráficas muestran los cuatros posibles casos de los intervalos solución y sus respectivas desigualdades (vea las gráficas 1.1 a 1.4).



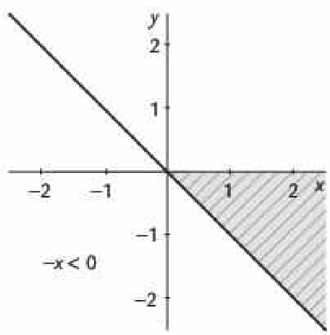
Gráfica 1.1



Gráfica 1.2



Gráfica 1.3



Gráfica 1.4

EJEMPLO 1

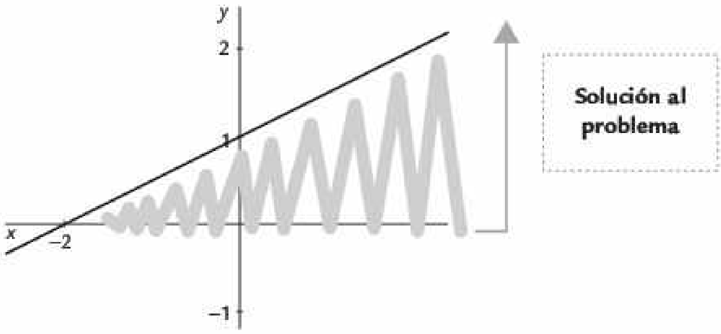
$$\frac{1}{2}x+1\geq 0$$

En esta desigualdad se piden todos los valores de x que hagan que la línea recta $y=\frac{1}{2}x+1$ esté por encima del eje x, de modo que y sea igual o mayor que 0.

Resuelve:

$$\frac{1}{2}x+1\geq 0$$
$$\frac{1}{2}x\geq -1$$
$$x\geq -1(2)$$
$$x\geq -2$$

Esto quiere decir que a partir del intervalo $[-2,\infty)$ la línea recta estará por encima del eje x y por lo tanto la desigualdad tomará valores iguales o mayores que cero (vea la gráfica 1.5).



Gráfica 1.5

Comprobación:

Para comprobar una desigualdad elegimos cualquier número comprendido en el intervalo $[-2, \infty)$.

$$\text{Si } x=-1 \text{ entonces}$$
$$\frac{1}{2}x+1\geq 0$$
$$\frac{1}{2}(-1)+1\geq 0$$
$$-0.5+1\geq 0$$
$$0.5\geq 0 \quad \checkmark$$

EJEMPLO 2

$$3x+2\geq 5x+7$$

El primer paso será igualar a cero para saber si el intervalo solución serán los valores de x que estén por encima o por debajo de la función.

$$3x-5x+2-7\geq 0$$
$$-2x-5\geq 0$$

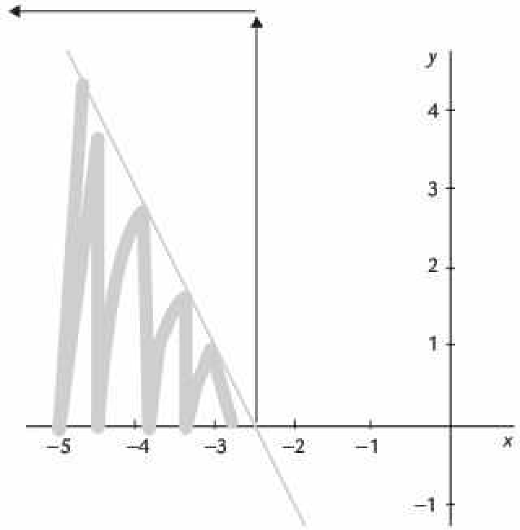
Con esto sabemos que la solución a la desigualdad serán los valores de x que estén por encima del eje x (vea la gráfica 1.6).

$$-2x\geq 5$$

NOTA: Cuando pasamos dividiendo o multiplicando un número negativo en cualquier desigualdad, el signo de la desigualdad se invierte.

$$x \leq -\frac{5}{2}$$

Por lo tanto, el intervalo que hace que la gráfica esté por encima del eje x, se extiende desde el $-\frac{5}{2}$, incluyéndolo, al menos infinito.



Gráfica 1.6

Los valores de x que solucionan la desigualdad son los que están en $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$.

Comprobación:

$$\begin{aligned}
&\text{Si } x = -3 \text{ entonces} \\
&3x + 2 \geq 5x + 7 \\
&3(-3) + 2 \geq 5(-3) + 7 \\
&-9 + 2 \geq -15 + 7 \\
&-7 \geq -8 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3

$$4 \leq \frac{1}{3}x + 8 \leq 20$$

Cuando tengas este tipo de desigualdad debes resolverla al mismo tiempo en ambos lados de la desigualdad:

$$\begin{aligned}
&4 \leq \frac{1}{3}x + 8 \leq 20 \\
&4 \boxed{-8} \leq \frac{1}{3}x \leq 20 \boxed{-8} \\
&-4 \leq \frac{1}{3}x \leq 12 \\
&-4\,(3) \leq x \leq 12\,(3) \\
&-12 \leq x \leq 36
\end{aligned}$$

La estrategia para graficar la solución de este ejercicio es la siguiente:

1. Se forman dos desigualdades de derecha a izquierda, ambas divididas por sus respectivos signos.
2. Se despejarán ambas desigualdades de modo que del lado izquierdo de la desigualdad queden los términos diferentes de cero, y del lado derecho quede cero.
3. Por último, se solucionará y despejará cada desigualdad por separado, como se ilustra en la gráfica 1.7.

$$4 \le \frac{1}{3}x + 8 \le 20$$

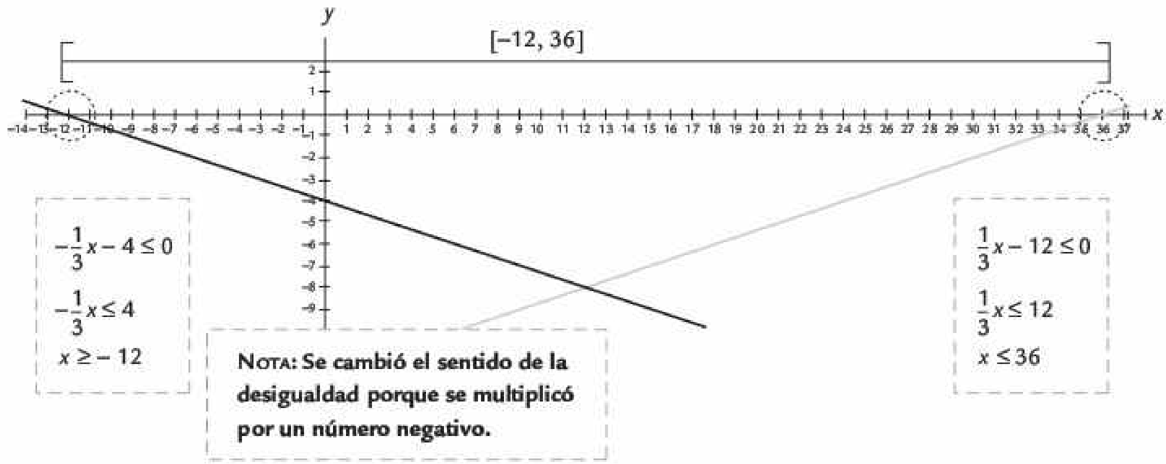
Paso 1: $\frac{1}{3}x + 8 \le 20$ y $4 \le \frac{1}{3}x + 8$

Paso 2:

$$\frac{1}{3}x + 8 - 20 \le 0$$
$$\frac{1}{3}x - 12 \le 0$$

$$4 \le \frac{1}{3}x + 8$$
$$-\frac{1}{3}x - 8 + 4 \le 0$$
$$-\frac{1}{3}x - 4 \le 0$$

Paso 3:



Gráfica 1.7

Comprobación:

Si $x = 0$ entonces

$$4 \le \frac{1}{3}x + 8 \le 20 \quad [-12, 36]$$
$$4 \le \frac{1}{3}(0) + 8 \le 20$$
$$4 \le 8 \le 20$$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.8

Resuelve las siguientes desigualdades lineales.

1. $\frac{3}{4}x-4>3$
2. $2-7x\leq 15$
3. $4(x+2)>7x-3$
4. $21-4x\leq 15$
5. $11x+8\geq 3x+1$
6. $-x+12<9$
7. $-7<\frac{3}{4}x-5<23$
8. $x+5\leq 7x-13$
9. $-2(x-3)\leq 4x+7$
10. $x+3<14-3x$
11. $12\leq 5-x\leq 20$
12. $-11<3-\frac{4}{5}x<10$

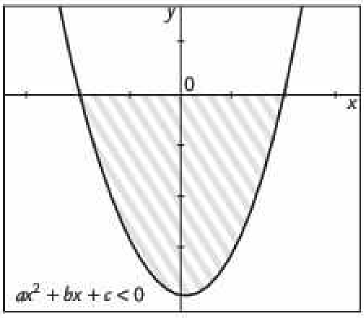
¿?

¿Comprendo el concepto de solución de una desigualdad?

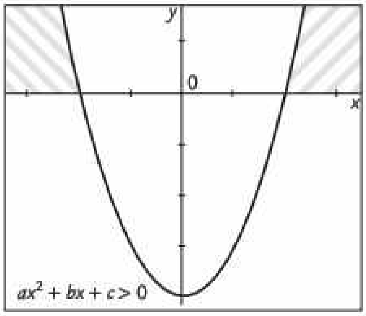
1.7 Desigualdades cuadráticas

Las desigualdades cuadráticas también pueden formar parte de nuestra vida cotidiana. Cuando una de las variables está elevada al cuadrado, resulta un comportamiento distinto y por lo tanto la solución del problema es distinta, como se ilustra en las gráficas 1.8 a 1.11.

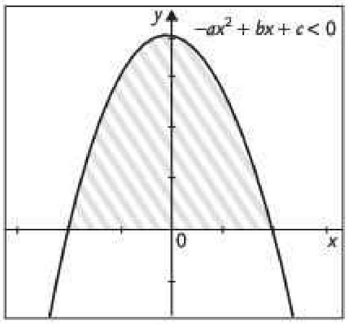
Las desigualdades cuadráticas pueden tener uno o dos intervalos de solución si ésta toca o corta al eje "x" como si se tratase de una ecuación cuadrática, sólo que sus soluciones son intervalos y no números concretos. Si la ecuación cuadrática corta al eje x tiene dos soluciones; si sólo toca el vértice tiene una solución; de lo contrario las soluciones serán imaginarias. Los cuatro posibles casos que se pueden presentar en una ecuación cuadrática son los siguientes.



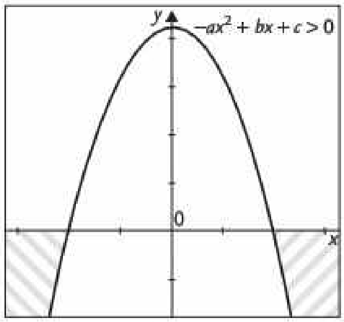
Gráfica 1.8



Gráfica 1.9



Gráfica 1.10



Gráfica 1.11

Estrategia para encontrar los intervalos y bosquejar las desigualdades cuadráticas

1. El primer paso es despejar la desigualdad para dejar del lado izquierdo todos los términos diferentes de cero y del lado derecho cero.
2. Después se factoriza y se resuelve la desigualdad cuadrática para encontrar los puntos donde su gráfica corta al eje x. Para fines prácticos, el vértice no se tomará en cuenta sino sólo donde cruce al eje x.
3. Si el término cuadrático es positivo lo bosquejaremos con la forma $\cup$, donde cada lado será una de las soluciones de la desigualdad cuadrática. Por el contrario, si el término es negativo tendrá la forma $\cap$.
4. Por último, si la desigualdad es mayor que cero, los intervalos solución serán aquellos en donde la gráfica está por arriba del eje x; de lo contrario, si la desigualdad es menor que cero los intervalos solución de la desigualdad serán aquellos en los que la gráfica esté por debajo del eje x.

Los siguientes ejemplos muestran cómo encontrar los intervalos solución.

EJEMPLO 1

Obtén la solución de:

$x^2 - x < 12$

Despejamos e igualamos a cero.

$x^2 - x - 12 < 0$

Factorizamos para encontrar las soluciones.

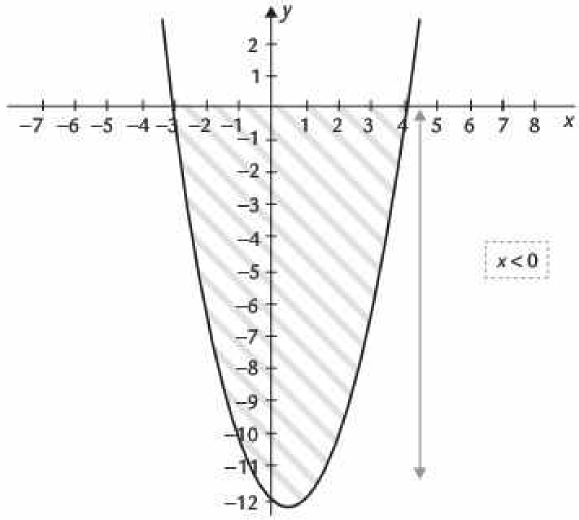
$$x^2 - x - 12 < 0$$
$$(x-4)(x+3) < 0$$
$$x_1 = 4$$
$$x_2 = -3$$

Ya que el término cuadrático es positivo, su gráfica tendrá forma de $\cup$ cruzando al eje x en $(-3,0)$

y (4,0); con estos datos ya podemos bosquejar la función y encontrar gráficamente los intervalos solución (gráfica 1.12).

Como la desigualdad es menor que cero, el intervalo solución estará formado por los valores de x en los que la gráfica se encuentra por debajo del eje *x* y que está comprendida entre las intersecciones con el eje *x*.

La solución es el intervalo (−3, 4).



Gráfica 1.12

Comprobación:

Para comprobar el intervalo solución elegimos cualquier número comprendido entre −3 y 4; por comodidad elegimos el 0.

Si $x = 0$ entonces:
$$x^2 - x - 12 < 0$$
$$0^2 - 0 - 12 < 0$$
$$-12 < 0$$

Ya que −12 es menor que cero el intervalo solución es correcto.

NOTA: Si en este ejemplo la desigualdad hubiera sido mayor que cero, los intervalos solución serían $(-\infty, -3)$ y $(4, \infty)$.

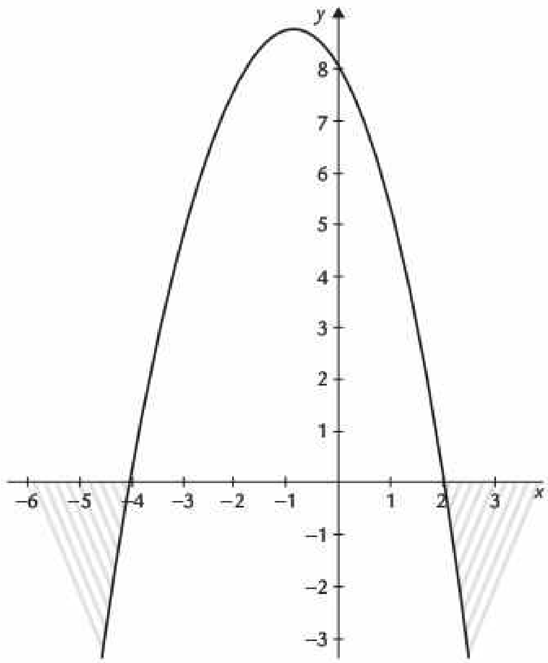
EJEMPLO 2

O bien la solución de:

$$-x^2 - 2x + 8 \leq 0$$
$$(2 - x)(x + 4) \leq 0$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -4$$

Las intersecciones con el eje *x* serán (2, 0) y (−4, 0) (gráfica 1.13).

Ya que el término cuadrático es negativo y la desigualdad es menor o igual que cero, los intervalos solución serán (–∞, –4] y [2, ∞).



Gráfica 1.13

Comprobación:

Para comprobar, elegimos cualquier número que esté comprendido en cada uno de los intervalos.

$$(-\infty, -4]$$
$$-x^2 - 2x + 8 \leq 0$$
$$-(-5)^2 - 2(-5) + 8 \leq 0$$
$$-25 + 10 + 8 \leq 0$$
$$-7 \leq 0 \quad ✓$$

$$[2, \infty)$$
$$-x^2 - 2x + 8 \leq 0$$
$$-(3)^2 - 2(3) + 8 \leq 0$$
$$-9 - 6 + 8 \leq 0$$
$$-7 \leq 0 \quad ✓$$

Si hubiéramos elegido como intervalo solución [–4, 2] obtendríamos lo siguiente:

$$[-4, 2]$$
$$-x^2 - 2x + 8 \leq 0$$
$$-(0)^2 - 2(0) + 8 \leq 0$$
$$-0 - 0 + 8 \leq 0$$
$$8 \leq 0 \quad ✗$$

En resumen

1. Si la desigualdad cuadrática es menor que cero y el término cuadrático es positivo, el intervalo soluciones será uno y estará comprendido por los valores de x que están entre las intersecciones de la gráfica con el eje x.
2. Si la desigualdad cuadrática es mayor que cero y el término cuadrático es positivo, habrá dos intervalos solución y estarán comprendidos entre el $-\infty$ y la primera intersección, y la segunda intersección y $+\infty$.

3. Si la desigualdad cuadrática es menor que cero y el término cuadrático es negativo, habrá dos intervalos solución y estarán comprendidos entre el $-\infty$ y la primera intersección, y la segunda intersección y $+\infty$.
4. Si la desigualdad cuadrática es mayor que cero y el término cuadrático es positivo, el intervalo solución será uno y estará comprendido entre las intersecciones con el eje x.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.9

Resuelve las siguientes desigualdades cuadráticas.

1. $(x+3)(x-12)\le 0$
2. $x^2-4x\le 45$
3. $x^2-4x>77$
4. $x^2+3x>40$
5. $-x^2+5x+24<0$
6. $x^2+9x\ge 10$
7. $-x^2-12x\ge -45$
8. $x^2+8x>33$
9. $-x^2-5x+36\le 0$
10. $-x^2-6x<-40$
11. $-x^2+2x<-63$
12. $x^2+11x>42$

¿? *¿Conozco los cuatro casos de desigualdades cuadráticas?*

1.8 Ecuaciones de valor absoluto

Un automóvil tardará el mismo tiempo en recorrer 100 km al norte que 100 km al sur; la distancia recorrida será la misma, lo que cambia es la dirección de la trayectoria. ¿Qué significa esto matemáticamente?

La recta numérica divide los números a la izquierda y a la derecha del cero en negativos y positivos de acuerdo con su signo; sin embargo, la distancia que debe recorrerse del 0 al -5 es la misma distancia que debe recorrerse del 0 al 5 (vea la figura 1.8). A la magnitud o distancia que existe entre ese número y el origen de la recta numérica, sin tomar en cuenta su signo, se le designa valor absoluto de un número.

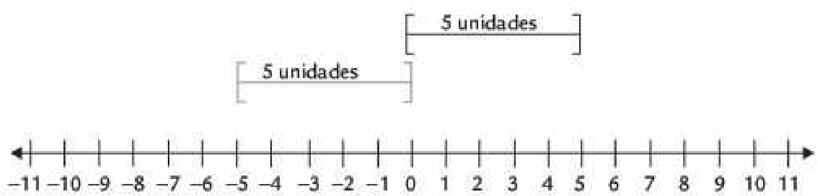


Figura 1.8

El valor absoluto se denota como $|\ \ |$ o **abs( )** y siempre será positivo; por lo tanto, una ecuación que involucre valor absoluto siempre tendrá dos soluciones, una positiva y su correspondiente negativa, la cual, al estar en valor absoluto y hacer referencia a la magnitud de la cantidad, se tornará positiva.

EJEMPLO 1

$|7| = 7$ $\quad |4| = 4 \quad abs(11) = 11$

$|-7| = 7$ $\quad |-4| = 4 \quad abs(-11) = 11$

si $|x| = 2$ entonces

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

porque $|2| = 2$ y $|-2| = 2$.

Observa que $|a| = -a$ no existe.

Las ecuaciones de valor absoluto son igualdades que involucran variables dentro del valor absoluto. En este caso nos concretaremos a las ecuaciones lineales de valor absoluto y su resolución.

EJEMPLO 2

$$|x-4| + 7 = 21$$
$$|x-4| = 21 - 7$$
$$|x-4| = 14$$

Caso $(+)$:	**Caso $(-)$:**
$x - 4 = 14$	$x - 4 = -14$
$x = 14 + 4$	$x = -14 + 4$
$x_1 = 18$	$x_2 = -10$
Comprobación:	**Comprobación:**
$\lvert x_1 - 4\rvert + 7 = 21$	$\lvert x_2 - 4\rvert + 7 = 21$
$\lvert 18 - 4\rvert + 7 = 21$	$\lvert -10 - 4\rvert + 7 = 21$
$\lvert 14\rvert + 7 = 21$	$\lvert -14\rvert + 7 = 21$
$14 + 7 = 21$	$14 + 7 = 21$
$21 = 21$	$21 = 21$

EJEMPLO 3

$$5|4x-5| - 24 = -9$$
$$5|4x-5| = -9 + 24$$
$$5|4x-5| = 15$$
$$|4x-5| = \frac{\cancel{15}}{\cancel{5}} = 3$$

Caso $(+)$:	**Caso** $(-)$:
$4x-5=3$	$4x-5=-3$
$4x=3+5$	$4x=-3+5$
$4x=8$	$4x=2$
$x_1=2$	$x_2=\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}}=\frac{1}{2}$

EJEMPLO 4

$$|8-5x|=12$$

Caso $(+)$:	**Caso** $(-)$:
$8-5x=12$	$8-5x=-12$
$-5x=12-8$	$-5x=-12-8$
$-5x=4$	$-5x=-20$
$x_1=-\frac{4}{5}$	$x=\frac{-20}{-5}$
	$x_2=4$
Comprobación:	**Comprobación:**
$\left\lvert 8-5\left(-\frac{4}{5}\right)\right\rvert=12$	$\lvert 8-5(4)\rvert=12$
$\lvert 8+4\rvert=12$	$\lvert 8-20\rvert=12$
$\lvert 12\rvert=12$	$\lvert -12\rvert=12$
$12=12$	$12=12$

En conclusión, para resolver ecuaciones de valor absoluto primero se debe dejar **completamente despejado** el valor absoluto y estar igualado a un número **positivo**; después se procederá a eliminar el valor absoluto y a formar **dos casos**, uno con la solución **positiva** y otro con la solución **negativa**, y por último se resolverá la ecuación.

1.9 Desigualdades de valor absoluto

Las desigualdades de valor absoluto se resuelven de manera similar a lo visto con las ecuaciones de valor absoluto. De igual manera, se formarán dos casos; sin embargo, cuando se proceda con la solución negativa el sentido de la desigualdad también se *deberá* invertir para poder obtener los intervalos solución del problema.

Pasos a seguir para resolver la desigualdad de valor absoluto:

1. Despejar el valor absoluto.
2. Formar dos casos, uno positivo y uno negativo.
3. Para el caso negativo se invertirá el sentido de la desigualdad.
4. Por último, se resuelve cada caso por separado.

EJEMPLO 1

$$3|x+1| \geq 5$$

$$|x+1| \geq \frac{5}{3}$$

Cambio de sentido a la desigualdad.

Caso $(+)$:	**Caso** $(-)$:
$x+1 \geq \frac{5}{3}$	$x+1 \boxed{\leq \ -}\frac{5}{3}$
$x \geq \frac{5}{3}-1$	$x \leq -\frac{5}{3}-1$
$x_1 \geq \frac{2}{3}$	$x_2 \leq -\frac{8}{3}$
$\left[\frac{2}{3},\infty\right)$	$\left(-\infty,-\frac{8}{3}\right]$

Para comprobar, elegimos cualquier número dentro de los intervalos.

Comprobación:	**Comprobación:**
$3\lvert 1+1\rvert \geq 5$	$3\left\lvert -\frac{8}{3}+1\right\rvert \geq 5$
$3\lvert 2\rvert \geq 5$	$3\left\lvert -\frac{5}{3}\right\rvert \geq 5$
$3(6) \geq 5$	$3\left(\frac{5}{3}\right) \geq 5$
$6 \geq 5$	$5 \geq 5$

EJEMPLO 2

$$\left|\frac{3}{7}x-2\right| < 15$$

Caso $(+)$:	**Caso $(-)$:**
$\frac{3}{7}x-2<15$	$\frac{3}{7}x-2 \boxed{>} -15$
$\frac{3}{7}x<15+2$	$\frac{3}{7}x>-15+2$
$\frac{3}{7}x<17$	$\frac{3}{7}x>-13$
$3x<17(7)$	$3x>-13(7)$
$3x<119$	$3x>-91$
$x_1<\frac{119}{3}$	$x_2>\frac{-91}{3}$
$\left(-\infty,\frac{119}{3}\right)$	$\left(\frac{-91}{3},\infty\right)$

Cambio de sentido a la desigualdad.

Para el caso de las desigualdades de valor absoluto que involucren el signo < o ≤, el resultado será la intersección de los dos intervalos, en este caso:

$$\left(\frac{-91}{3},\frac{119}{3}\right)$$

Teorema de desigualdades de valor absoluto

El conjunto solución de una desigualdad de valor absoluto está formado por:

Tabla 1.5

Valor absoluto	Desigualdad > o ≥	Desigualdad < o ≤
Intervalo solución	$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$	$(-\infty, a) \cap (b, \infty)$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.10

Resuelve las siguientes ecuaciones de valor absoluto.

1. $|x-3|=11$
2. $|x+9|=17$
3. $-|x-3|=-2$
4. $2|x+7|-5=-3$
5. $\left|\frac{3}{4}x-8\right|=14$
6. $7|x-4|-21=-14$

7. $\frac{2}{3}|4x+5|+5=15$

8. $21|3x-5|-6=8$

9. $|5-12x|=7$

10. $6|21x-13|=24$

11. $3|6x+12|+12=40$

12. $14|3-8x|+14=52$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 1.11

Resuelve las siguientes desigualdades de valor absoluto.

1. $4|x+2|\geq 8$

2. $|3x-5|<12$

3. $|2x+1|>14$

4. $|7-12x|\geq 8$

5. $\left|\frac{5}{8}x+7\right|>12$

6. $3|5x+4|-21\geq 25$

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra las siguientes actividades a tu portafolio de evidencias.

4. Realiza un cuadro sinóptico sobre los casos de las desigualdades lineales, cuadráticas y de valor absoluto.
5. Realiza al menos los ejercicios impares de todas las actividades con el desarrollo completo de las mismas.
6. Presenta los ejercicios impares de la actividad integradora.

¿?

¿Comprendo los dos casos para resolver desigualdades de valor absoluto?

¿Soy capaz de escribir como intervalos los resultados de las desigualdades de valor absoluto?

ACTIVIDAD INTEGRADORA UNIDAD 1

Resuelve los ejercicios según se indica.

PARTE I

Determina la o las clasificaciones a la que pertenecen los siguientes números: ***Q*** Racional, ***Q'*** Irracional, ***N*** si es número natural, Z^+ entero positivo, ***Z'*** entero negativo, ***P*** si es primo, ***FP*** fracción propia, ***FI*** fracción impropia, ***DE*** decimal exacto, ***DP*** decimal periódico, o ***T*** si es un número trascendental.

1. $\frac{\pi}{4}$

2. $\sqrt{3}$

3. 0.128

4. 87
5. $\frac{17}{5}$
6. 97
7. $\frac{8}{1}$
8. $\frac{27}{8}$
9. $-\sqrt{\frac{25}{4}}$
10. π
11. $3.\overline{142857}$
12. 213
13. $0.01\overline{136}$
14. $\frac{-7}{8}$
15. $\frac{4}{\sqrt{36}}$

PARTE II
Localiza en la recta numérica los siguientes números, o determina un número entre ellos.

1. $-\frac{7}{3}$
2. $-\frac{\sqrt{25}}{4}$
3. $\frac{\pi}{4}$
4. Número entre $7/9$ y $7/8$
5. e^2
6. 6.7
7. $\sqrt{\frac{4}{25}}$
8. $0.\bar{1}$
9. $\frac{9}{5}$

PARTE III
Aplica la prioridad de los operadores a los siguientes ejercicios y resuélvelos.

1. $\dfrac{5+5^2}{\sqrt{\frac{9}{3}+\frac{2}{4}}}$
2. $\left[7\times\frac{2}{8}\right]\left[\left(\sqrt{36}+2\right)^2\right]$
3. $3^3+\sqrt{\frac{25}{16}}+18$
4. $\left\{\left(\left[\frac{1}{3}+5\right]+\left[3^2\bullet\sqrt{\frac{16}{1+3}}\right]\right)\right\}*2$
5. $\left[\left(5x+2\right)^2\bullet3\right]-\left(x^2-10\right)$
6. $\sqrt{\dfrac{9+8}{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\right)^2}}$

PARTE IV
Utiliza las propiedades de los números reales para resolver los siguientes ejercicios.

a) Aplica la propiedad conmutativa o la propiedad asociativa a las siguientes expresiones.

1. $16+\left(4+38\right)=$
2. $3+9=$
3. $-\frac{14}{7}\bullet\frac{3}{5}=$

b) Aplica la propiedad distributiva para expresar en forma desarrollada o factorizada las siguientes expresiones.

1. $\left(8*3-7*3\right)=$
2. $\left(ex+e\right)=$
3. $\left(6\bullet5+2\bullet5\right)=$
4. $7(14-3)=$
5. $-5\left(7+8\right)=$
6. $\left(\left(-5\bullet4\right)-\left(5\bullet3\right)\right)=$

c) Encuentra el elemento neutro o el inverso en las siguientes operaciones.

1. $-\frac{1}{5}\times$ ____ $=1$
2. $-\frac{\pi}{2}+$ _____ $=0$
3. $-\frac{1}{9}\times$ ____ $=1$
4. $\frac{1}{7}+$ ____ $=0$
5. $19+$ _____ $=19$
6. $16\bullet$ ______ $=1$

PARTE V

Representa en la recta numérica los siguientes intervalos.

1. $(-5,7]$
2. $[-8,0)\cup(0,11]$
3. $\left(\frac{1}{\sqrt{9}},\frac{\sqrt{16}}{2}\right)$
4. $\left[-\sqrt{8},\sqrt{8}\right]$
5. $X<3$
6. $-7\leq X<11$
7. $X\geq 5$
8. $-\frac{1}{8}\leq X<\frac{1}{10}$
9. $\frac{15}{9}<X<\frac{11}{3}$

PARTE VI

Resuelve las siguientes desigualdades.

1. $\frac{1}{3}x>7$
2. $3-11x\leq\frac{1}{4}x+6$
3. $-4<2x-3<8$
4. $8x-5\geq 13$
5. $-15\leq 14-x<25$
6. $12x-\frac{1}{3}>\frac{1}{2}x+10$
7. $10-3x\leq 12$
8. $9x-3<15x+6$
9. $-6<5x+12\leq 13$
10. $7x-3\geq 4-\frac{1}{3}x$
11. $49-x^2\geq 0$
12. $-x-x^2<-56$
13. $x^2+13x>-40$
14. $x^2+21x<46$
15. $45+12x-x^2>0$
16. $x^2+8x\geq 9$
17. $x^2+x\geq 132$
18. $x^2+5x>-4$

PARTE VII

Resuelve las siguientes ecuaciones y desigualdades de valor absoluto.

1. $-3|x-5|+8=-36$
2. $\frac{1}{2}|4x+7|=16$
3. $21|5x-10|+3=24$
4. $2|14-3x|-15=-3$
5. $\frac{1}{5}|3x+8|=7$
6. $\frac{1}{8}|2-3x|=5$
7. $\frac{1}{3}|4x-2|=12$
8. $2|24-6x|-16=-4$
9. $3|x+3|+2>15$
10. $\frac{1}{5}|4x+8|+12<30$
11. $-2|x+4|+20\geq 12$
12. $-\frac{1}{4}|3x+7|+16>8$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Convierte las siguientes expresiones dadas en lenguaje común a intervalos.

1. Un banco otorga una tarjeta de crédito, que está entre \$15,000.00 y \$30,000.00 inclusive.
2. En un banco se pide un depósito de \$8,000.00 como mínimo para poder solicitar un préstamo.
3. Para concursar en los 100 metros planos de las olimpiadas se debe tener un tiempo menor que 15 segundos.
4. Una lámpara de mano utiliza pilas AA y funciona con un voltaje entre 1.5 y 1.25 volts.
5. La velocidad de los automóviles en una ciudad es de 60 km/h como máximo.
6. La hemoglobina del hombre está entre 13.8 a 17.2 g/dL.
7. Una motocicleta con motor de 150 cc y un cilindro tiene un rendimiento máximo de 38 km por litro.

Resuelve los siguientes problemas de aplicación de desigualdades.

1. Un pelota es lanzada hacia arriba a una velocidad de 30 m/s; la velocidad de la pelota está dada por la siguiente fórmula $v(t) = 30 - 9.8t$. ¿En qué tiempo la velocidad de la pelota tiene una velocidad entre 20 y 5 metros por segundo?
2. El costo total de producir x unidades de un producto está dado por la fórmula $C(x) = 1050 + 12x$. Cada producto se vende en \$50.00. Para lograr una utilidad, el total de la venta debe ser mayor que el costo total. ¿Cuántas unidades deben venderse para obtener utilidades?
3. Una lámpara de salón de 1.2 m de largo pero de ancho desconocido posee 300 watts por metro cuadrado. ¿Cuál debería ser el ancho de la lámpara si se desea que la intensidad de la lámpara esté entre 1200 y 800 watts?
4. Una llamada de larga distancia de 3 minutos en una compañía de celular cuesta \$5.00, más \$2.50 por cada minuto adicional. ¿Cuánto duró la llamada si el costo osciló entre \$25.00 y \$55.00?
5. La misma pelota del problema 2 es nuevamente lanzada hacia arriba, ahora a una velocidad de 70 m/s, y la altura de la misma está dada por la fórmula $h(t) = 70t - 15t^2$. ¿Cuándo estará la pelota a una altura menor que 80 metros?
6. El ingreso por vender x unidades de un producto está dado por la fórmula $I = 225x$ mientras que su costo está dado por $C(x) = 1500 + 80x$. Para lograr beneficios, el ingreso debe ser mayor que el costo. ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener beneficios?
7. Una compañía dedicada a la renta de camiones para transporte de mercancía, establece una relación de costo $C(x)$, que está determinada por el kilometraje recorrido y el costo fijo de mantenimiento. Si $C(x) = \$0.6x + \$4500$ donde x son los kilómetros recorridos y 4500 el costo fijo de mantenimiento, determine la cantidad máxima de kilómetros que debe recorrer el camión si el arrendatario de los camiones no desea pagar más de \$15,000.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelve los ejercicios según se indica.

1. Determina la o las clasificaciones a las que pertenecen los siguientes números: ***Q*** Racional, ***Q'*** Irracional, ***N*** si es número natural, ***Z*** entero positivo, ***Z'*** entero negativo, ***P*** si es primo, ***FP*** fracción propia, ***FI*** fracción impropia, ***DE*** decimal exacto, ***DP*** decimal periódico, o ***T*** si es un número trascendental.

1. $\frac{22}{7}$ 3. e 5. $-\frac{3}{7}$

2. **cero**   4. $\ln(2)$ 6. $0.\overline{21}$

2. Localiza en la recta numérica los siguientes números, o determina un número entre ellos.

1. $-\frac{11}{8}$ 2. $\log(6)$ 3. Número entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

3. Aplica la prioridad de los operadores a los siguientes ejercicios y resuelve.

1. $((2+3)+5)/4-2\times\frac{3}{4}$ 2. $\left[\left(\frac{4^2}{5+8}\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 6\right)^2\right]/3$ 3. $\sqrt{\frac{(3+5)(2+4)}{(4+7)}+5}$

4. Utiliza las propiedades aritméticas de los números reales para resolver los siguientes ejercicios.

a) Aplica la propiedad conmutativa o la asociativa a las siguientes expresiones.

1. $((15+18)+(2+5))=$ 2. $(4*5)\cdot(2*6)=$ 3. $31+\left(-\frac{1}{3}\right)=$

b) Aplica la propiedad distributiva para escribir en forma desarrollada o factorizada las siguientes expresiones.

1. $-5(7+8)=$ 2. $\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$ 3. $(t^2+2t)=$

c) Encuentra el elemento neutro o el inverso para obtener el resultado de las siguientes operaciones.

1. $-\frac{1}{11}\cdot$ ____ $=1$ 2. $\frac{\sqrt{8}}{2}\cdot$ ______ $=1$ 3. $-17+$ ____ $=0$

5. Representa en la recta numérica los siguientes intervalos.

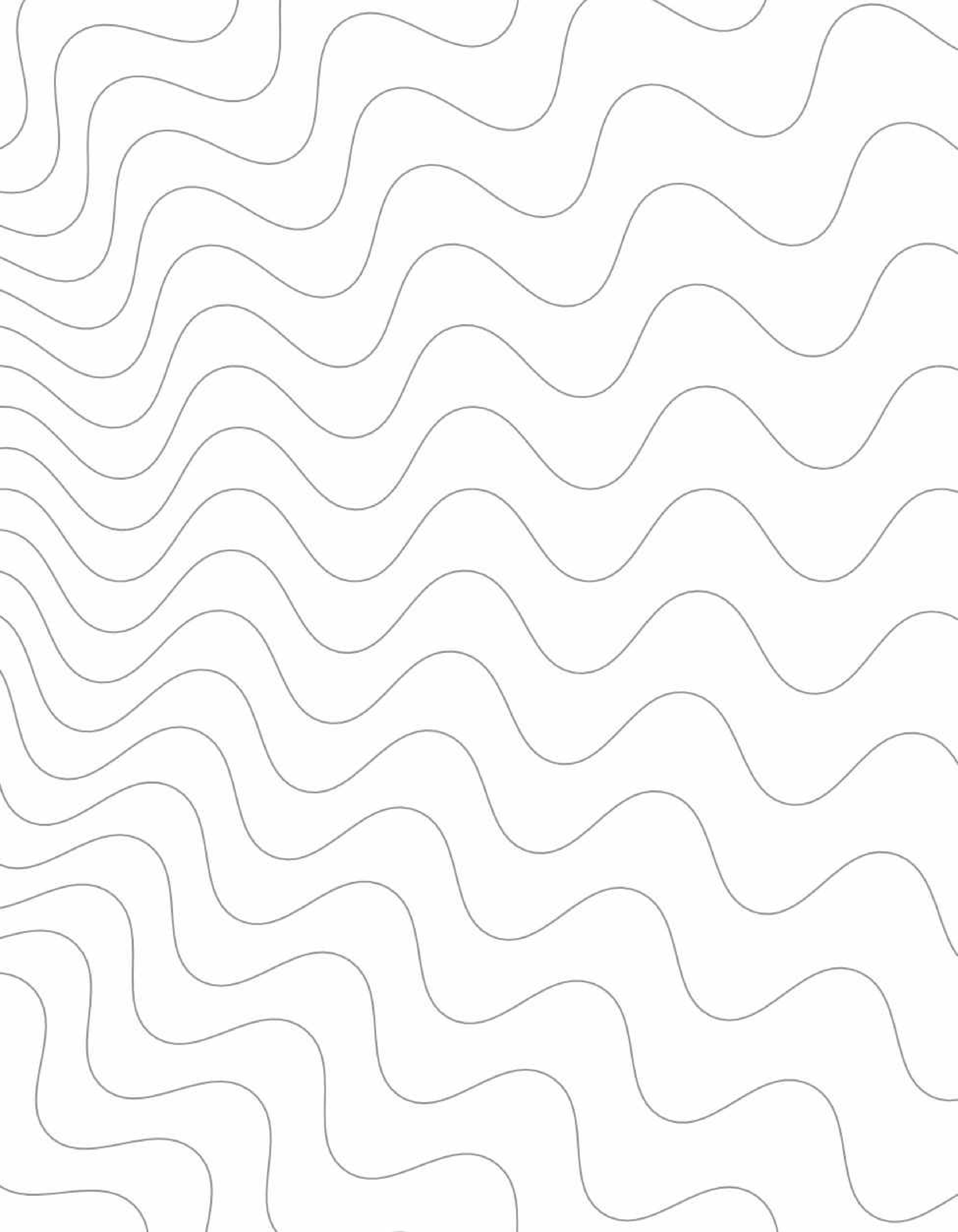
1. $\left(-\frac{\pi}{4},2\pi\right]$ 2. $(-\infty,5]\cap(-3,\infty)$ 3. $-\frac{1}{8}\le X<\frac{1}{10}$ 4. $-\frac{\sqrt{9}}{2}\le X\le 2$

6. Resuelve las siguientes desigualdades.

1. $-14 \leq 2x+3 < 11$
2. $\frac{1}{2}x+5 < 3x-8$
3. $x^2+6x \leq 12$
4. $x^2+15x \leq 16$
5. $28-3x-x^2 < 0$
6. $81-x^2 \geq 0$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones y desigualdades de valor absoluto.

1. $-7|6-x|+8=3$
2. $7|2-x|+14 \leq 21$
3. $9|6x+5|+7 > 34$



FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

2

FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

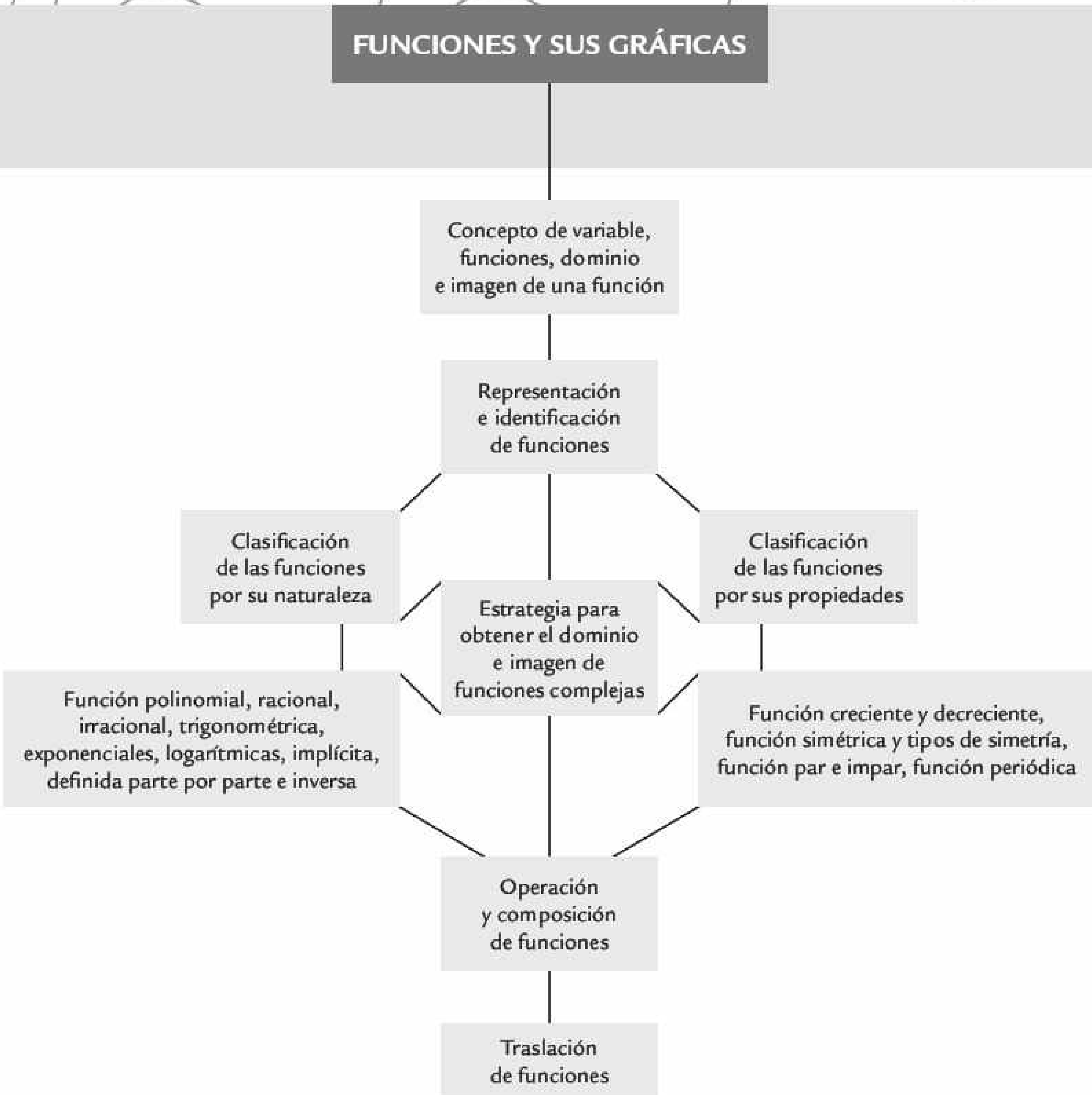
En este segundo capítulo veremos cómo los datos de un problema cobran vida a través de sus representaciones gráficas y sus modelos matemáticos; esto, con el fin de comprender y visualizar mejor el problema.

Las funciones son una de las herramientas más poderosas de las matemáticas, ya que a través de ellas representamos problemas. En este capítulo aprenderemos cómo se clasifican; conoceremos sus propiedades, las características principales de sus gráficas, sus operaciones, y la traslación de sus gráficas.

COMPETENCIAS POR DESARROLLAR

COMPETENCIAS	ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	HABILIDADES Y ACTITUDES
Comprender el concepto de función real y los tipos de funciones, así como estudiar sus propiedades y operaciones.	Identificar qué es una función.	El alumno desarrollará la habilidad para graficar los diferentes tipos de funciones.
Reconocer y describir funciones mediante palabras, fórmulas, tabulaciones y gráficas.	Identificar el dominio y la imagen de una función.	El alumno será capaz de identificar los diferentes tipos de funciones.
Modelar situaciones reales a través de funciones.	Construir funciones algebraicas de cada tipo.	El alumno desarrollará la habilidad para modelar problemas de la vida real a través de las funciones.
Comprender y asimilar los diferentes tipos de gráficas existentes.	Construir gráficas de funciones algebraicas trascendentales.	El alumno será capaz de identificar el dominio e imagen de una función a través de las estrategias propuestas.
	Reconocer las gráficas de las funciones trigonométricas circulares y gráficas de funciones exponenciales de base *e*.	
	Realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones.	
	Reconocer el cambio gráfico de una función cuando ésta se suma con una constante.	

ORGANIZADOR GRÁFICO



ANTECEDENTES

La matemática tiene su origen en la sociedad, y juega un papel muy importante en muchas de las actividades de la vida. Después de todo, ¿de qué nos serviría una ciencia sin aplicación práctica? En este sentido, las funciones adquieren gran relevancia en la actividad humana ya que a través de ellas se pueden representar problemas con modelos matemáticos o identificar patrones que nos permiten, incluso, hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno.

Cada tipo de función tiene una representación característica; por ejemplo, las funciones lineales sirven para situaciones de proporcionalidad directa, como los modelos de estadística de correlación lineal $y = ax + b$, donde si x aumenta, también y aumenta, pero de forma proporcional; estas funciones se encuentran también en algunos modelos matemáticos como la Ley de enfriamiento de Newton. Las funciones cuadráticas se aplican en los tiros parabólicos como el lanzamiento de balas o de proyectiles, en los faros de los automóviles, en cierto tipo de construcciones, en los platos de las antenas parabólicas y en algunos tipos de telescopio. Otras, como las funciones exponenciales, representan el crecimiento de los seres vivos, el desarrollo poblacional, el crecimiento de bacterias y la desintegración radiactiva. Con funciones hiperbólicas se representa la trayectoria de los astros, la transmisión eléctrica y la suspensión de cables, entre otros. Por su parte, las funciones logarítmicas son relevantes en geología para calcular la intensidad de los sismos, como la magnitud R de un terremoto, que está definida como $R = \log (A/A_0)$ en la escala de Richter, donde A es la intensidad y A_0 es una constante; en química, las funciones permiten calcular la concentración del pH; en acústica se aplican para calcular la intensidad del sonido.

Las funciones parte por parte son muy comunes en la vida cotidiana pues con ellas se representan las tarifas que se cobran por servicios como la luz, el agua y el teléfono, incluso el pago de las jornadas laborales, y, en general, las situaciones que dependen de ciertas condiciones. Las funciones trigonométricas tienen aplicaciones de gran relevancia, como en el modelado de la corriente eléctrica y de las ondas de radio, en la navegación, la geodesia y la astronomía. Por otro lado, las funciones sirven para el desarrollo de fórmulas y ecuaciones, como la fórmula del área del círculo, el volumen de una esfera, de un cilindro, de un paralelepípedo y, en general, para las fórmulas de perímetro, área y volumen de todo tipo de figuras y cuerpos. Asimismo, modelan otros fenómenos de la vida como, por ejemplo, el cambio de temperatura, la velocidad y posición de una partícula, la aceleración, la efectividad de un antibiótico y el crecimiento de cierta población animal. Como se ha dicho, las funciones están presentes en nuestra vida cotidiana, por eso, si queremos entender en buena medida nuestro entorno, es indispensable que conozcamos el concepto, la notación, las propiedades, el comportamiento y la aplicación de las funciones. Veamos el siguiente caso para determinar cómo podríamos abordarlo mediante el estudio de las funciones.

Un automovilista parte desde una posición inicial, en un tiempo determinado y a cierta aceleración. ¿Podrías determinar algún modelo matemático que exprese la posición final del automovilista después de cierto tiempo de recorrido?, ¿cuál será la velocidad del automovilista en este instante? ¿De qué manera podrías extrapolar este problema a la vida real?, ¿Tendría alguna importancia que la carretera fuera recta o curvilínea? ¿Qué otros factores intervendrían para determinar la posición y la velocidad final del automovilista? ¿Existen algunos modelos predeterminados para estas situaciones? ¿Cómo se le llama en física a este tipo de problemas?

Así como extrapolamos este problema de la vida real a modelos matemáticos, la mayoría de las situaciones cotidianas y aplicaciones científicas se pueden resolver mediante las funciones matemáticas, tema de estudio de este capítulo.

2.1 Concepto de variable, función, dominio e imagen de una función

Jorge es el de menor estatura de su clase y cada 6 meses se mide en la pared. Él ha registrado su crecimiento conforme ha pasado el tiempo y, con esa información, construyó una tabla para hallar una relación y encontrar un significado.

Edad (años)	Estatura (m)
14.5	1.60
15.0	1.62
15.5	1.65
16.0	1.68
16.5	1.70
17.0	1.72
17.5	1.75
18.0	1.80

Jorge no sólo nota que existe una relación entre la edad y la estatura, sino que esta segunda no es constante y que varía conforme pasa el tiempo; también observa que una cambia con respecto a la otra.

Variable

Una **variable** es un símbolo cualquiera que puede representar cualquier valor.

Variable independiente es aquella que toma valores independientemente de otros factores y que no podemos controlar de manera directa, pero podemos controlar su rango para efectos de estudio de un determinado comportamiento; por ejemplo el tiempo, cuyo efecto incide sobre la variable dependiente.

Variable dependiente es aquella que toma valores de acuerdo con la función o modelo matemático y el cambio de valores de la variable independiente.

Función

1. Una función es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en el que no existen dos o más pares ordenados con el mismo valor de x y diferentes valores de y.
2. Una función es una relación entre dos variables (x, y) de tal manera que a x (la variable independiente), le corresponde uno y sólo uno de los valores de y (la variable dependiente).
3. Una función de $X \rightarrow Y$ es una relación entre x y y, con la propiedad de que si dos pares ordenados tienen el mismo valor de x, entonces también tienen el mismo valor de y.

Ejemplo:

$$A = \pi r^2$$

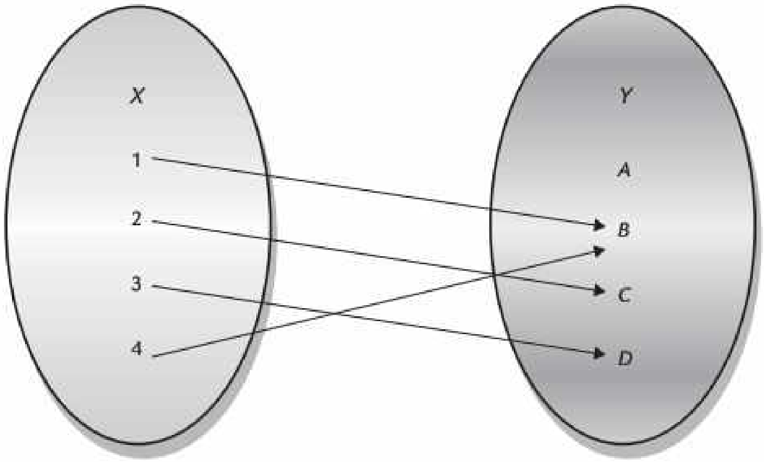


Figura 2.1

Función de X en Y: la condición de existencia asegura que de cada elemento sale alguna flecha, y a su vez la de unicidad asegura que sólo sale una.

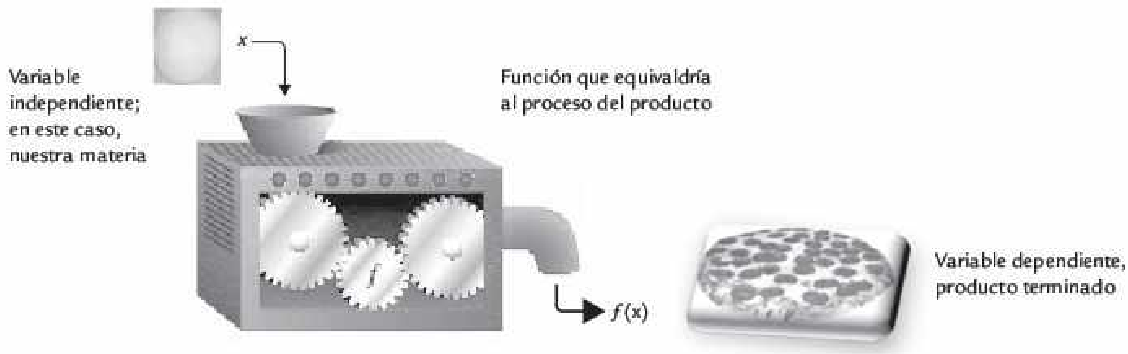


Figura 2.2 Máquina de funciones.

Ecuación

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas; puede no existir regla de correspondencia uno a uno como en el caso de la función.

Ejemplo:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Modelo matemático es la representación matemática de una situación del mundo real en términos de una relación funcional. Estos modelos suelen incluir las limitaciones físicas del problema.

Ejemplo:

No existen volúmenes negativos o tiempos negativos.

Dominio e imagen

Dominio es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x.
Imagen es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente y, ***una vez asignados los valores a la variable independiente***.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.1

Realiza dinámicas sobre la definición y busca ejemplos de los conceptos aprendidos.

I. Investiga en una biblioteca, con un límite de 30 a 40 minutos.
II. Forma equipos para sacar conclusiones y organizar un debate.
III. Haz una tarea sobre estos conceptos.

Estrategia para encontrar el dominio y la imagen de cualquier función

1. Identifica el nombre o tipo de función.
2. Reconoce las restricciones algebraicas de la función.
   - Si existen raíces pares, el contenido del radicando debe ser mayor que o igual a cero.
   - Si existen divisiones, el denominador debe ser diferente de cero.
   - Los logaritmos deben ser mayores que 0.
3. Si es una función compuesta, analiza sus componentes individuales y combina los posibles dominios.
4. Si la función representa un modelo matemático, incluye las limitantes físicas del problema.
5. Una vez determinado el dominio, procede a obtener la imagen.
6. La imagen de una función está dada por el valor mayor y el valor menor del dominio, excepto para aquellos en los cuales el dominio es simétrico; para tales casos se usará el valor menor o mayor y la mitad del dominio.

NOTA: En algunas funciones (como en el caso de las funciones racionales y las trigonométricas) es más factible determinar primero la imagen y luego el dominio.

EJEMPLO

$$f(x)=\sqrt{25-x^2}$$

Método:

1. Se trata de una función raíz cuadrada por lo que el contenido del radicando debe ser mayor o igual a cero.

2. El radicando se iguala a 0.

   $25 - x^2 = 0$

3. Se despeja en términos de x.

   $-x^2 = -25$

Multiplicamos todo por menos uno

$$x^2 = 25$$
$$x = \sqrt{25} = \pm 5$$

Como se dijo antes, el radicando debe ser mayor o igual a cero.

Si evaluamos la función dando a x valores que están en el intervalo $[-5, 5]$ se verifica que $25 - x^2 \geq 0$, con lo cual se obtiene el dominio D: $[-5, 5]$.

Como el dominio es simétrico, se sustituyen ya sea el valor mayor o menor, y el número que se encuentre a la mitad de dicho intervalo.

La mitad del intervalo $[-5, 5]$ es el número 0.

Primero sustituimos el valor más grande de la ecuación y resolvemos,

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 5^2} = 0$$

Tomando el valor mayor del dominio se obtiene el primer dato de la imagen que corresponde al 0.

Ahora sustituimos el valor de en medio, el 0, y procedemos a resolver.

$$f(x) = \sqrt{25 - 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

Por último, tomando la mitad del intervalo se obtiene el dato final de la imagen

$$I: [0, 5]$$

Todo esto quiere decir que la gráfica se extiende en el eje de las x desde el -5 hasta el 5 y alrededor del eje de las y desde el 0 hasta el 5.

¿?

¿Comprendo el concepto de variable dependiente?

¿Comprendo qué es una función?

¿Soy capaz de explicar qué es un modelo matemático?

¿Soy capaz de determinar el dominio de una función?

¿Soy capaz de determinar la imagen de una función?

2.2 Representación e identificación de funciones

Notación de funciones

La notación de funciones permite distinguir la variable dependiente de la independiente, y se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) = x^2 + 2,$$

donde f representa el nombre de la función (puede ser cualquier otra letra pero por convención se denota con la letra f); luego se escribe entre paréntesis la letra de la variable independiente x, y después del signo de igualdad = se escribe el resto del modelo matemático.

Evaluación de funciones

Evaluar una función significa encontrar el valor real que le corresponde a la variable dependiente, una vez asignado un valor a la variable independiente.

EJEMPLO

Si definimos una función $f(x) = -2 + 3x^2 - \frac{1}{x}$, el valor de la función cuando $x = 2$, sería:

$$f(2) = -2 + 3(2)^2 - \frac{1}{2} = -2 + 12 - \frac{1}{2},$$

$$f(2) = \frac{19}{2}$$

Existen tres maneras de representar e identificar las funciones: analítica, tabular y gráficamente. Cada una expresa la manera en que podemos visualizar los problemas reales utilizando símbolos, datos ordenados o gráficos, con el fin de poder comprender y analizar mejor las situaciones de un problema.

a) *Analíticamente*, representa el lenguaje matemático puro a través de símbolos y números que se expresan mediante una fórmula matemática.

Ejemplo:

$$f(x) = x + 5$$

Analíticamente y no representa una función de x si al momento de despejar y ésta tiene exponente par.

Ejemplo:

$$y^2 = 3x - 2$$

b) *Tabularmente*, a través de un conjunto de pares ordenados (x, y).

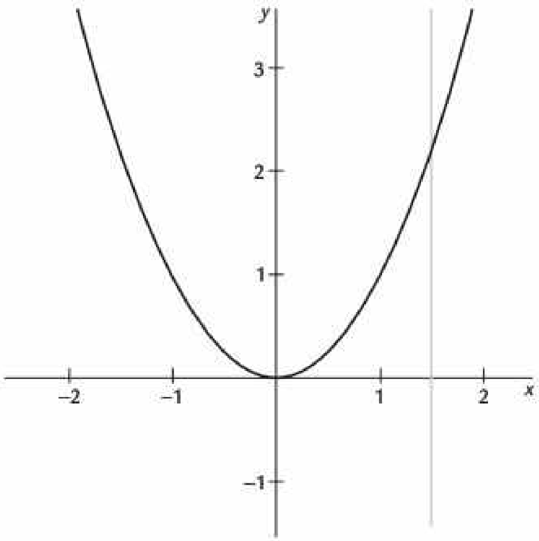
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Tabularmente y no representa una función de x si existen dos pares ordenados con diferente valor de x para el mismo valor de y.

Ejemplo:

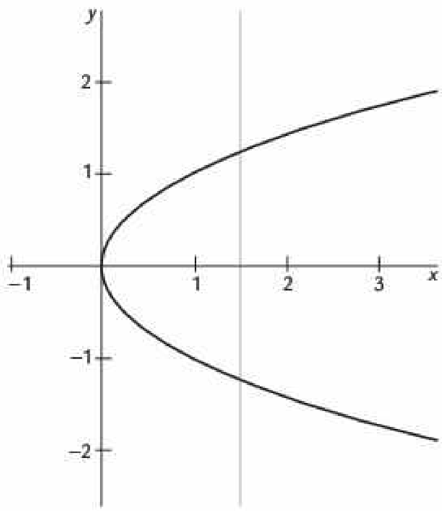
$$(2, 5) \text{ y } (2, -5).$$

c) *Gráficamente*, es decir, a través del dibujo de los pares ordenados en el plano cartesiano o en cualquier otro sistema de coordenadas.



y sí representa función de *x*

Gráfica 2.1

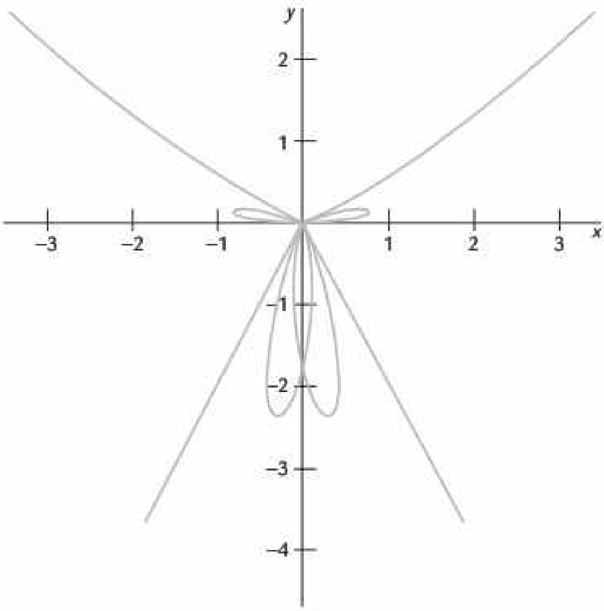


y no representa función de *x*

Gráfica 2.2

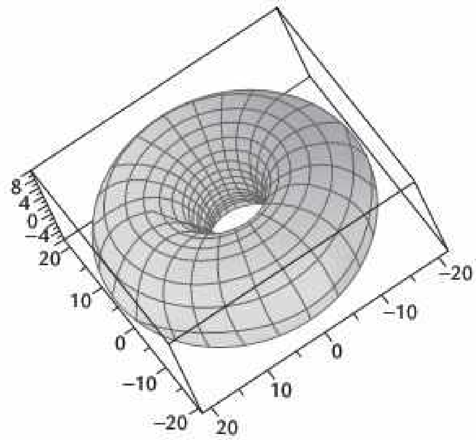
Gráficamente y no representa una función de x si en la gráfica ésta es cruzada dos o más veces por una línea vertical (vea las gráficas 2.1 y 2.2).

Actualmente existe una gran cantidad de software para realizar cualquier tipo de gráfica, sean 2D, 3D, animadas, paramétricas o implícitas; casi 30 sistemas de coordenadas en 3D, y 16 sistemas en 2D. Muchos de estos tipos de software requieren licencia, otros son gratuitos y varios utilizan el Computer Algebraic System (CAS) que permite manipular datos simbólicos y facilita efectuar infinidad de cálculos. Algunos de estos programas son Winplot, Maple, Derive, Cabri, Geogebra, Graphmatica y Mathematica. Algunas calculadoras tienen este tipo de gráficas y manejan CAS, como las de Texas Instruments y Hewlett Packard; otras utilizan un sistema llamado Digital Algebraic System (DAL) que permite hacer manipulaciones numéricas y en menor medida simbólicas, e incluso algunas pueden graficar.



Insecto 1

Gráfica 2.3

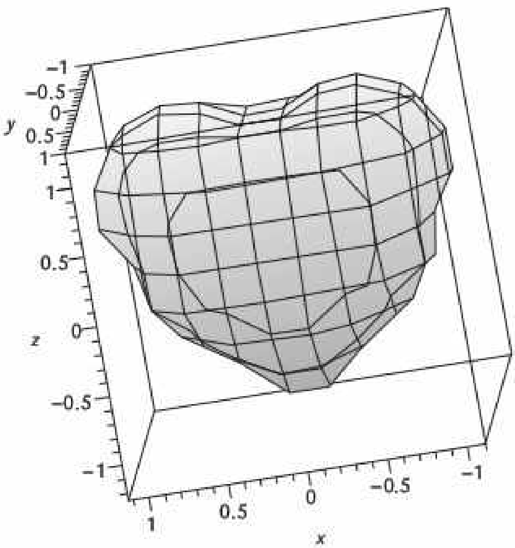


Toroide

Gráfica 2.4

$$r=\frac{5\bullet \operatorname{sen}^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\bullet\cos^2(4\theta)}{\tan\left\{\frac{3\theta}{2}\right\}}$$

$$\begin{cases} x=(R+r\bullet\cos t)\bullet\cos s\\ y(R+r\bullet\cos t)\bullet\operatorname{sen} s\\ z=r\bullet\operatorname{sen} t\end{cases}$$



Corazón 3D

Gráfica 2.5

$$\left(x^2+\frac{9}{4}y^2+z^2-1\right)^3-x^2z^3-\frac{9}{80}y^2z^3=0\,\Big|\,-1.12\le x\le 1.12,-1\le y\le 1,-1.25\le z\le 1.25$$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.2

Realiza los siguientes ejercicios.

I. Identifica si las siguientes expresiones representan una función analítica, gráfica o tabularmente, según sea el caso.

1. $y^3 - 3x^2 + 8 = 0$
2. $y = \sqrt{2-x}$
3. $y = 2$
4. $x^2 + y^2 = 1$
5. $\frac{3}{4}y^{99} - 23x^{108}$
6. $y^5 + 4x^2 - 2$
7. $y = 4x + 5$
8. $y = x^2$
9. $y^4 + 5x^2 - 3 = 0$

II. Determina si los siguientes conjuntos de pares ordenados representan una función.

a)

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

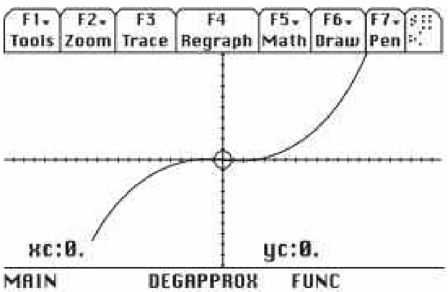
b)

x	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00
y_1	0.00	1.00	1.41	1.73	2.00	2.24	2.45
y_2	0.00	–1.00	–1.41	–1.73	–2.00	–2.24	–2.45

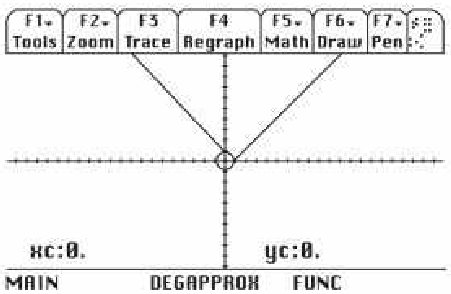
c) (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)

d) (0,0), (1,1), (2,3), (3,5), (1,–1), (2,–3), (3,–5)

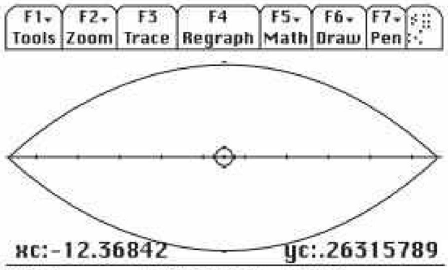
III. Determina si las siguientes gráficas son funciones.

a) 

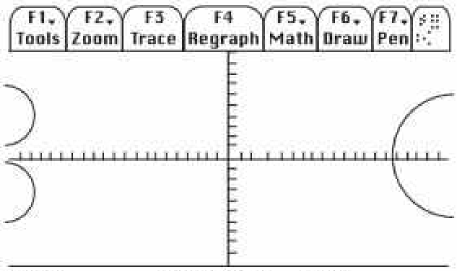
Gráfica 2.6

b) 

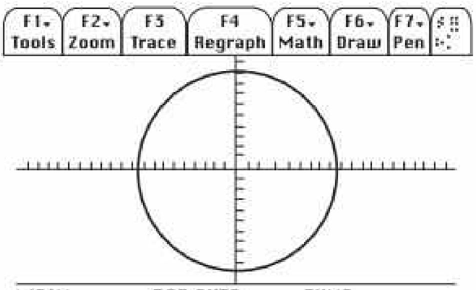
Gráfica 2.7



c) **Gráfica 2.8**



d) **Gráfica 2.9**



e) **Gráfica 2.10**

¿?

¿Soy capaz de usar y leer la notación de funciones?

¿Conozco las diferentes representaciones de las funciones?

¿Soy capaz de identificar la representación analítica de una función?

¿Soy capaz de identificar la representación tabular de una función?

¿Soy capaz de identificar la representación gráfica de una función?

2.3 Clasificación de las funciones por su naturaleza

Las funciones pueden clasificarse, de acuerdo con su origen, en dos grandes grupos:

1. *Algebraicas*. Son aquellas cuya regla corresponde a una expresión algebraica. Se subdividen a su vez en:

1.1. Polinomiales. Están formadas por polinomios, donde el grado del polinomio lo determina el mayor exponente de la variable. Dicho exponente debe ser entero y positivo. Algunas funciones de este tipo son:

   1.1.1. Funciones lineales.

   1.1.2. Funciones cuadráticas.

   1.1.3. Funciones cúbicas.

1.2. Racionales.

1.3. Irracionales.

2. *Trascendentales*. Corresponden a aquellos casos en los que la función no se puede definir por sus operaciones aritméticas, como son:

   2.1. Trigonométricas.

   2.2. Trigonométricas inversas.

   2.3. Exponenciales.

   2.4. Logarítmicas.

A continuación se presenta un esquema sobre la clasificación de las funciones.

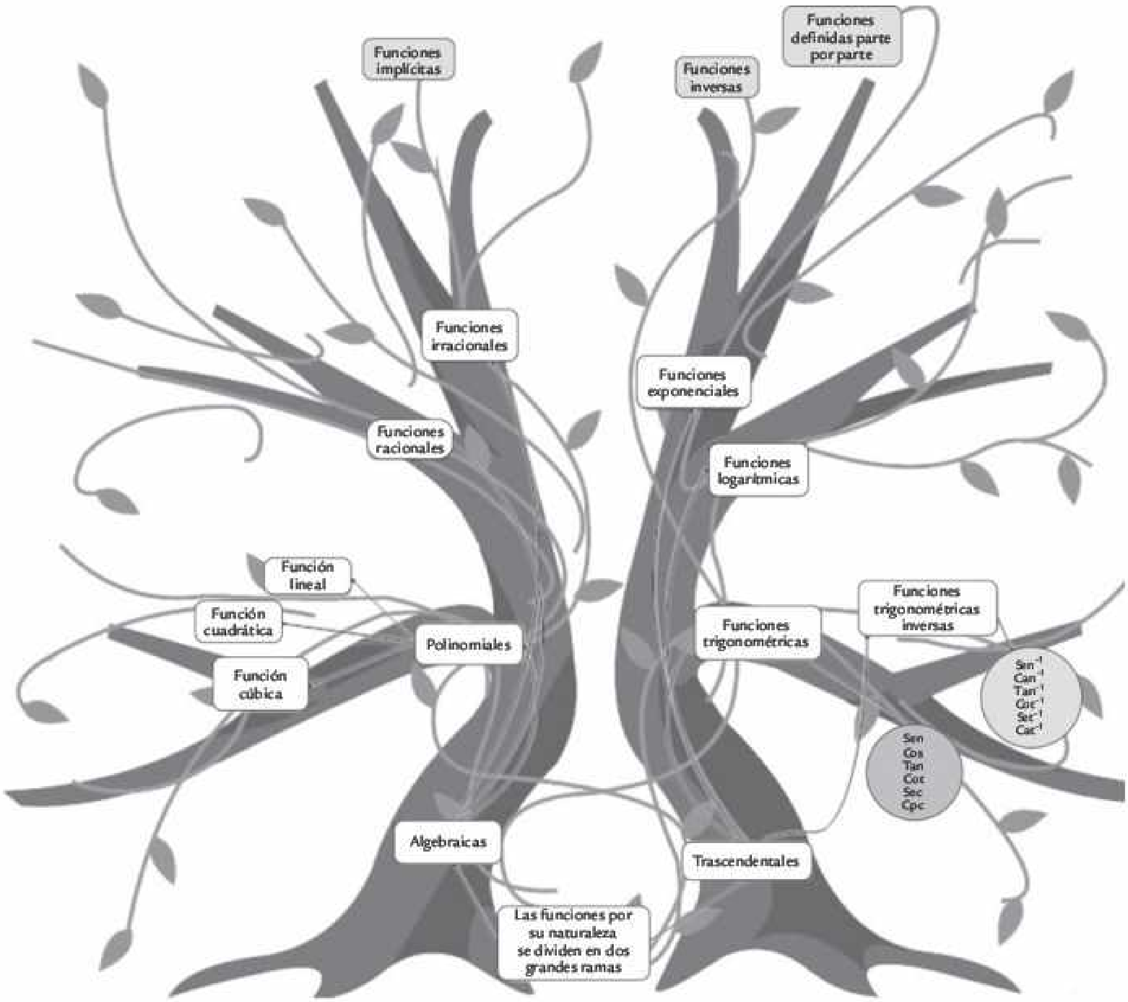


Figura 2.3 Esquema de la clasificación de funciones.

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra las siguientes actividades a tu portafolio de evidencias.

1. Realiza un resumen de las funciones.
2. Realiza un mapa conceptual sobre la clasificación de las funciones.
3. Presenta en una hoja blanca y en manuscrito la gráfica representativa de cada función, con nombre y fórmula.

Función polinomial

Son todas aquellas funciones formadas por polinomios, donde el grado del polinomio lo determina el mayor exponente de la variable. Su fórmula general es:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}.....+a_1x+a_0$$

Donde n es un número positivo y a es una constante real. Las siguientes funciones son algunos casos particulares de este tipo de función.

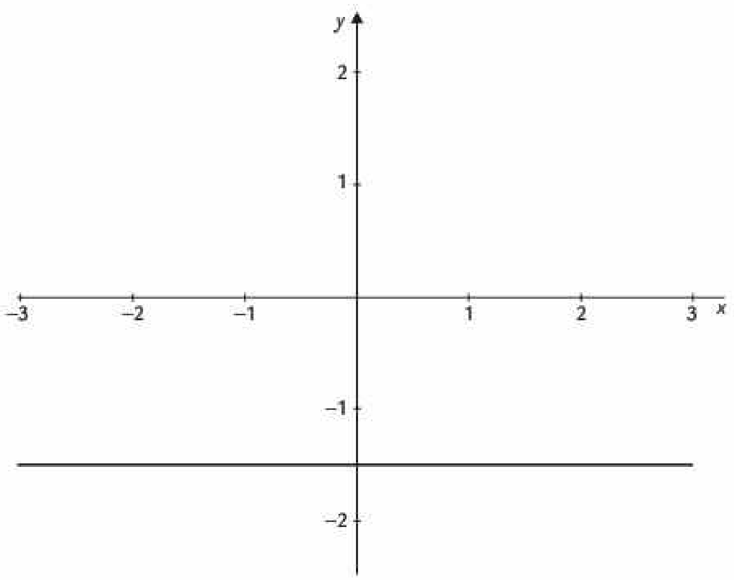
Función constante

Por lo regular las funciones indican el cambio de una variable respecto de otra; pero ¿qué pasa cuando no hay una variable?, ¿qué sucede si no hay cambio? Por ejemplo, la temperatura del día se mantuvo constante en 26 °C; la presión de la llanta del automóvil permanece a 30 lb; ¿cómo se interpreta esto?, ¿cuál sería su gráfica? Para esto se diseñó el siguiente modelo matemático.

La función **constante** es una línea horizontal a la altura del valor de la constante (vea la gráfica 2.11). Su fórmula es $f(x)=b$.

EJEMPLO

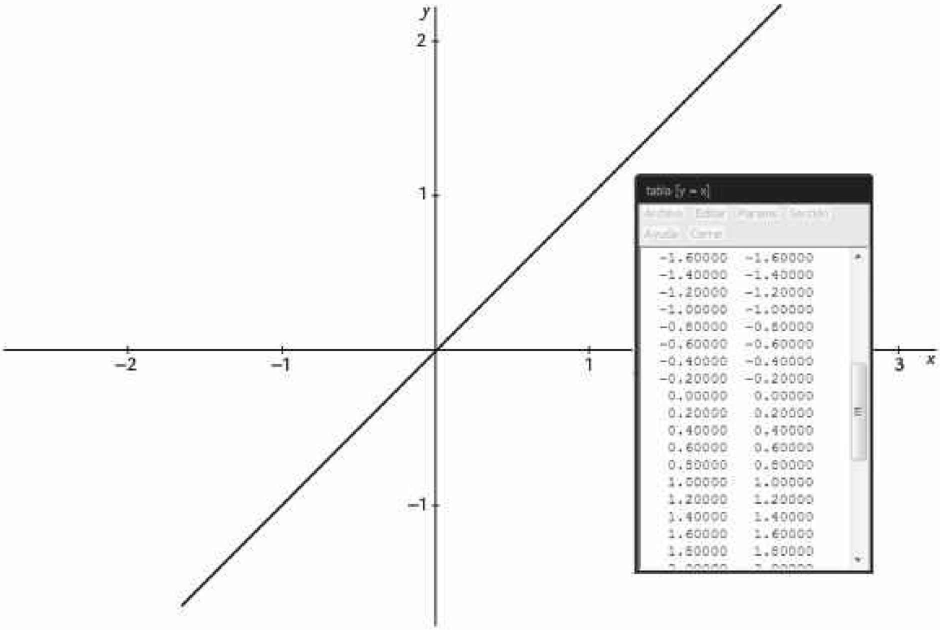
$$f(x)=-1.5$$



Gráfica 2.11

Función identidad

Es aquella cuya gráfica es una línea recta a 45° (gráfica 2.12). La fórmula es $f(x) = x$. Los valores del dominio son idénticos a los de la imagen.



Gráfica 2.12

Función lineal

Como vimos en el apartado anterior, tanto la función lineal como la función identidad implican cambios proporcionales de una variable respecto de otra. Por ejemplo, en la función identidad, a medida que los valores de x cambian también cambian los valores de y. En la función lineal sucede lo mismo; sin embargo, el cambio de y depende tanto de su valor inicial como de la pendiente (coeficiente que acompañe a la x). Por ejemplo, si retomamos el problema del automóvil del inicio de este capítulo, tenemos que:

Tiempo (x)	Posición (y)
0	45
1	60
2	75
3	90
4	105
5	120

donde x representa el tiempo inicial del automóvil y y la posición del mismo. Con esta tabla podemos obtener una función única de proporcionalidad para este problema. Observa que a cada unidad de tiempo le corresponden 15 unidades de posición (que es la proporción 1 a 15), y que su origen es la posición 45; con estos datos podemos deducir la fórmula general del movimiento del automóvil para cualquier tiempo determinado, como veremos en la siguiente sección.

La función lineal es de la forma $y = mx + b$ donde ***su dominio e imagen son todos los números reales***; es decir, no tiene restricción alguna. Para graficarla sólo se necesitan dos puntos y podemos recurrir a una de las siguientes alternativas, que se presentan en las gráficas 2.13 y 2.14.

a) Ya que su gráfica es una línea recta, podemos asignar dos valores diferentes a x y y para obtener dos puntos que se unan mediante una línea recta.

b) El otro caso es intersectar la recta con los ejes.

EJEMPLO 1

$y = -5x + 3$

Si $x = 0$, tenemos que

$y = -5(0) + 3 = 3.$

La gráfica se intersecta con el eje y en $(0, 3)$.

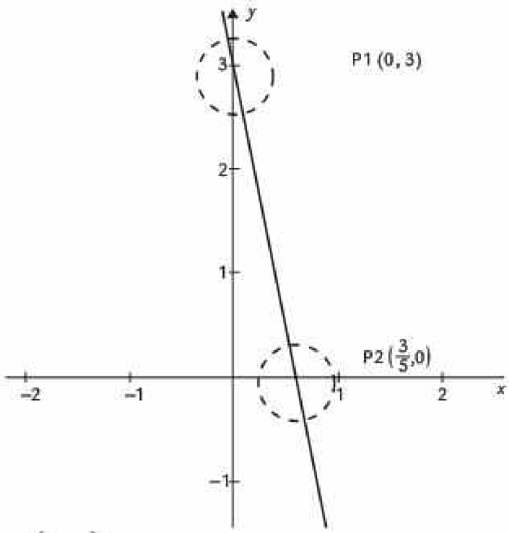
Si ahora $y = 0$, tenemos que

$0 = -5x + 3$

$-3 = -5x$

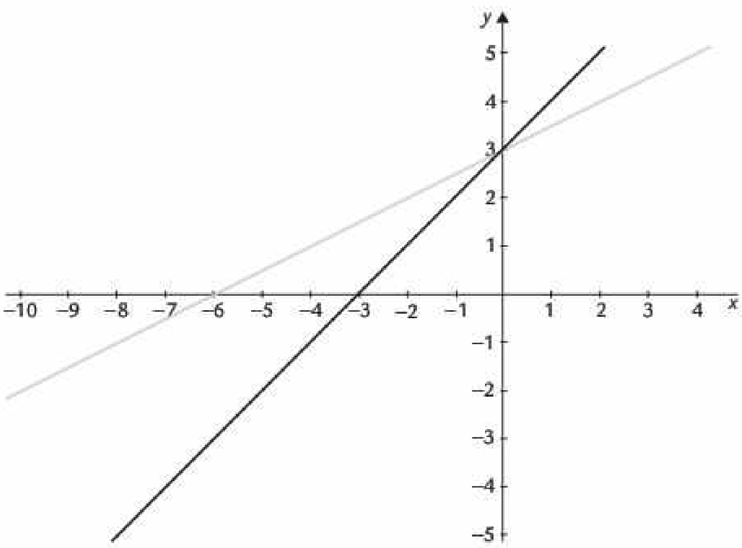
$x = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$

Por lo tanto, la gráfica se intersecta con el eje x en $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$.



Gráfica 2.13

EJEMPLO 2



Gráfica 2.14

La gráfica 2.14 es otro ejemplo de una función lineal. La línea sólida corresponde a la función $y = x + 3$ y la línea gris corresponde a la función $y = \frac{1}{2}x + 3$. La razón de que la segunda función esté más inclinada es que el coeficiente de la x representa la pendiente que es igual a $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; por lo tanto, si el denominador es más grande que el numerador significará que la gráfica recorrerá más unidades de x y menos de y. El signo positivo o negativo indica si la gráfica crece a la derecha o a la izquierda.

Función cuadrática

Las funciones cuadráticas son de las funciones más interesantes en matemáticas, pues representan el movimiento de objetos como el tiro parabólico o de proyectil. En otras palabras, el movimiento generado por una bala, el lanzamiento de un cohete, el tiro de una pelota de básquetbol, de fútbol, de fútbol americano y, en general, de cualquier pelota y de cualquier objeto que sea lanzado.

Todo objeto que es lanzado sigue una trayectoria parabólica debido a los efectos de la gravedad.

EJEMPLO

Determina la trayectoria del objeto de la figura 2.4 dadas las coordenadas que se indican.

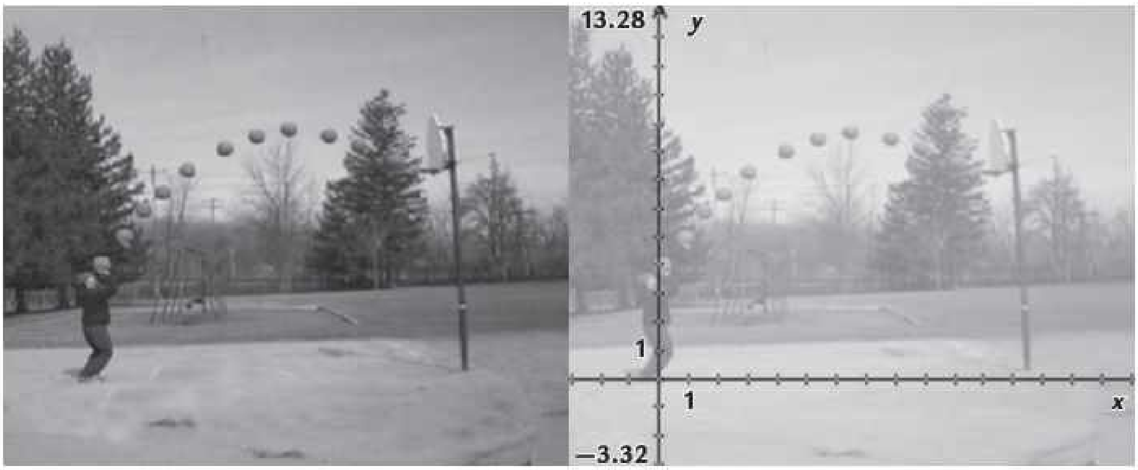


Figura 2.4. Imagen tomada de las aplicaciones para la calculadora TI-Inspire CAS.

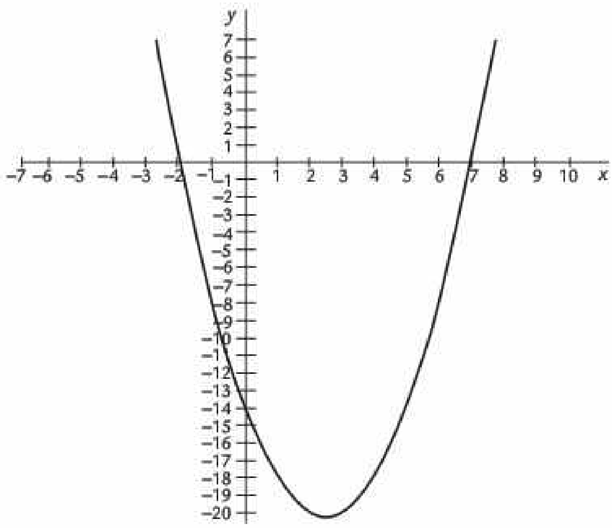
La función cuadrática es aquella de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y *su dominio son todos los números reales*; es decir, no tiene restricción alguna. Su gráfica es una parábola (vea la gráfica 2.15). Si $a > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba. Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo. Su imagen está determinada por el máximo o el mínimo de la función, el cual se puede obtener a partir del vértice. Si el coeficiente del término cuadrático es una fracción, la parábola estará más abierta; sucederá lo contrario si su coeficiente es más grande. Las intersecciones con el eje x son los ceros de la ecuación, el vértice (máximo o mínimo) de la parábola está dado por el punto (h, k), donde:

$$h = -\frac{b}{2a}$$

$$k = f(h) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

EJEMPLO

$$y = x^2 - 5x - 14$$



Gráfica 2.15

Donde:

a) Es una parábola cóncava hacia arriba, ya que $a > 0$.

b) Intersecta al eje x en -2 y en 7, que son los ceros de la ecuación.

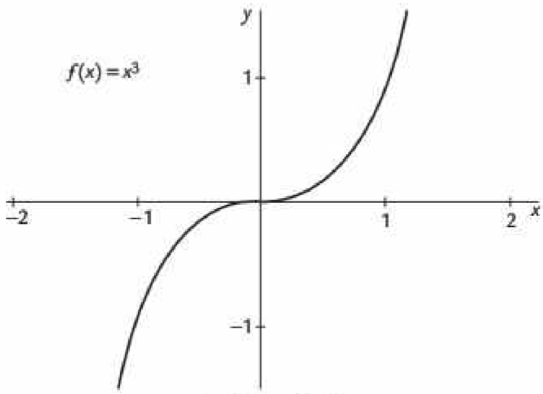
c) Su vértice está en
$$h = -\frac{(-5)}{2(1)} = 2.5$$
$$f(h) = (2.5)^2 - 5(2.5) - 14 = -20.25$$

d) Solamente se necesitan 3 puntos para graficar la función: las intersecciones con el eje x y el vértice.

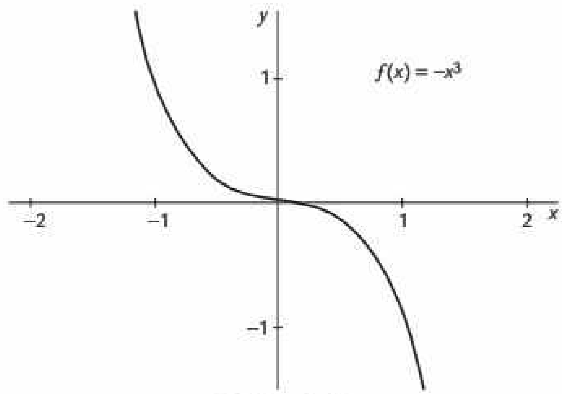
Función cúbica

La función cúbica es un polinomio en el que la variable tiene un exponente de grado tres y puede estar dada por la forma $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$. Al igual que la función cuadrática, su dominio son todos los números reales ya que no tiene restricciones como divisiones o raíces; su imagen también está dada por todos los números reales.

La forma de la gráfica varía dependiendo del signo de la variable cúbica y del resto de sus términos, si sólo existe la variable de grado tres puede tener dos formas:

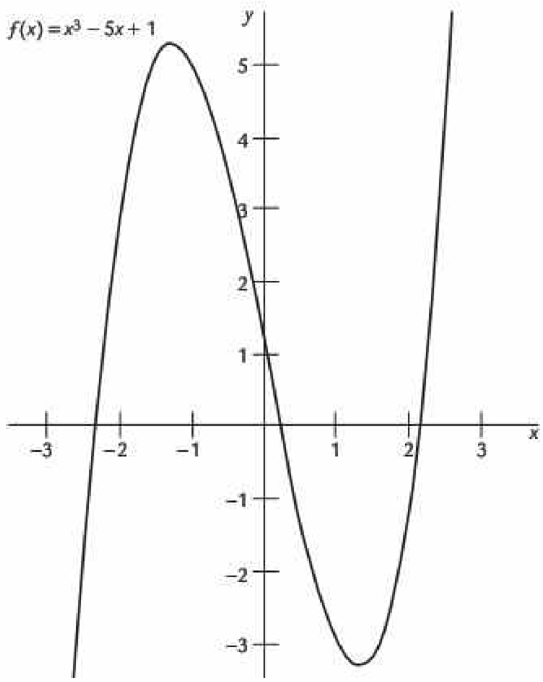


Gráfica 2.16

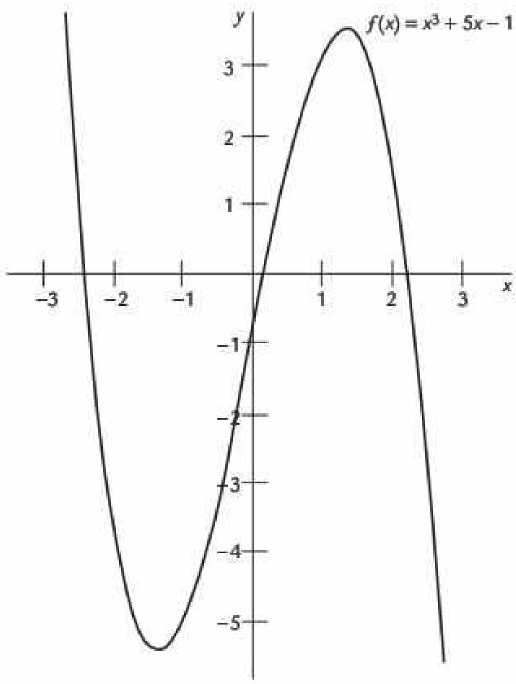


Gráfica 2.17

Si existen más términos en la función se pueden observar cambios en la gráfica como:



Gráfica 2.18



Gráfica 2.19

Como se puede observar en las gráficas 2.18 y 2.19, el término independiente (en este caso ± 1) desplaza la gráfica hacia arriba o hacia abajo en el eje y; el término lineal $\pm 5x$ dice qué tan grandes son las "curvas", y el signo de la variable cúbica determina si tiene la forma "N" o la forma "И". El término cuadrático (si existiera) desplazaría la ecuación hacia la izquierda o hacia la derecha.

La manera de graficar una función cúbica (al igual que con la cuadrática) es intersectarla con los ejes. En esta sección se obviarán los máximos y los mínimos creados por la gráfica; solamente haremos un bosquejo de la gráfica a partir de sus intersecciones, para dejar el estudio de máximos y mínimos en el capítulo 5.

Para bosquejar una función cúbica necesitamos las tres intersecciones con el eje x, la intersección con el eje y, y saber si la variable de grado tres es positiva o negativa; veamos un ejemplo.

EJEMPLO

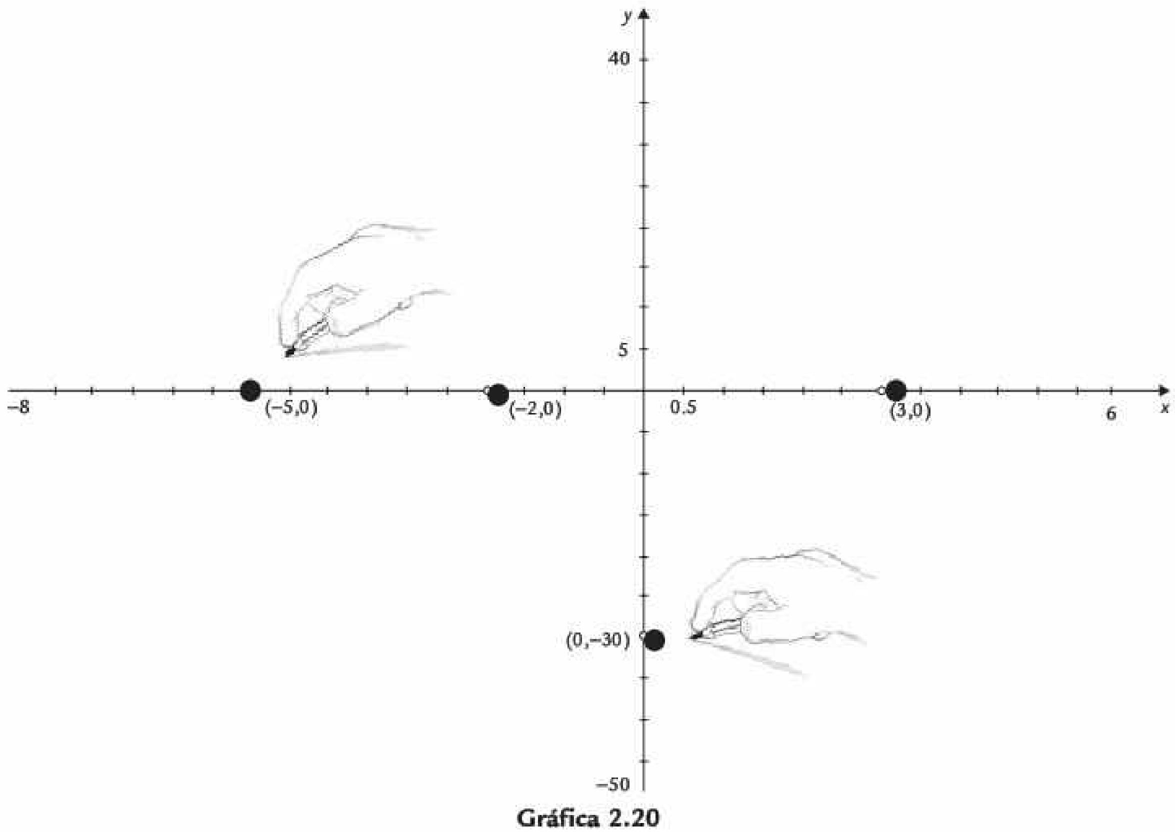
Grafica la función $f(x)=x^3+4x^2-11x-30.$

Para determinar la forma de la función, observamos si el término cúbico es negativo o positivo. Como el término cúbico es positivo, la función tiene forma de "N".

Los factores de esta función determinan los cruces con el eje x, y están dados por:

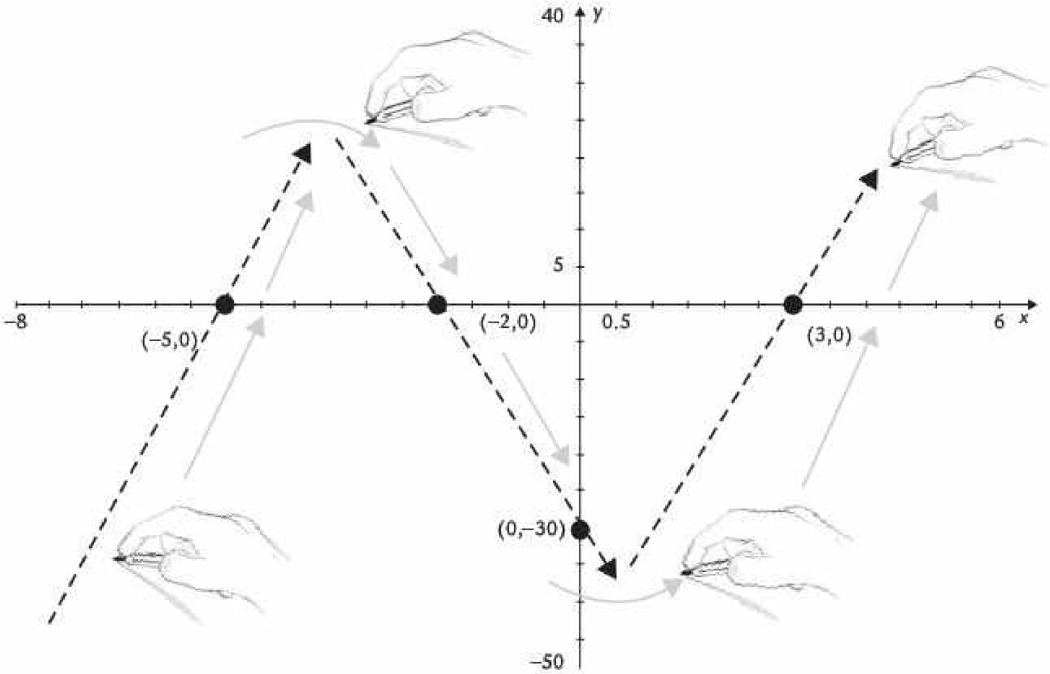
$$f(x)=(x+2)(x-3)(x+5)$$

Por lo que las intersecciones son (–2,0), (3,0) y (–5,0). La interesección con el eje y está en (0, –30). Las intersecciones se colocan en el plano como se muestra en la gráfica 2.20.



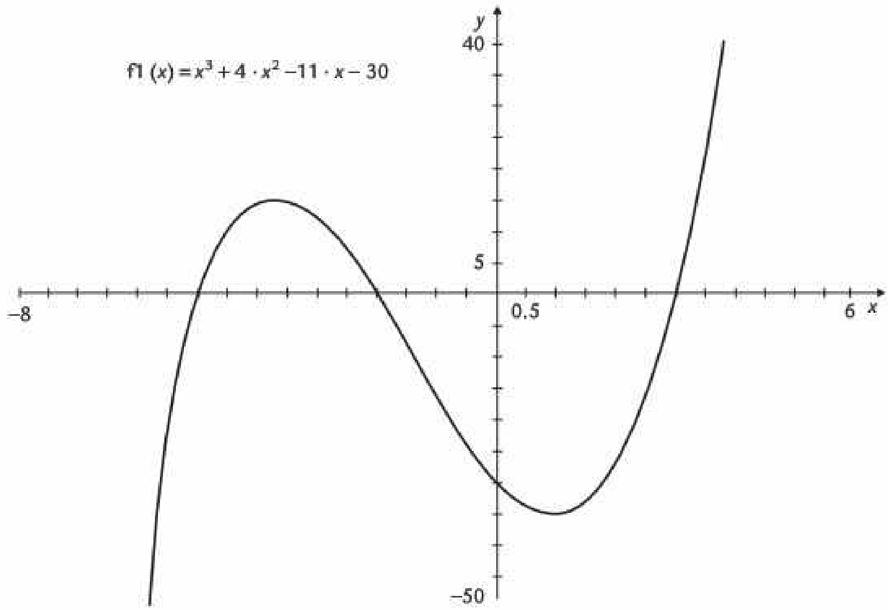
Gráfica 2.20

Después unimos los puntos de tal manera que formen una "N" o el bosquejo de la gráfica de la función cúbica, como se muestra en la gráfica 2.21.



Gráfica 2.21

Si seguimos los puntos adecuadamente y logramos formar nuestra "N", el bosquejo o el dibujo a mano alzada de la gráfica, aún sin conocer los máximos y los mínimos, deberá quedar como se aprecia en la gráfica 2.22. (Para hacer la gráfica con mayor detalle, consulta el capítulo 5).



Gráfica 2.22

Si se tratara de una función cúbica negativa seguiríamos el mismo procedimiento sólo que los trazos formarían una "И" (N invertida).

Función racional

Es aquella de la forma $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$, donde $h(x)\neq 0$. El dominio de una función racional serán todos los valores reales, con la condición de que al evaluar $h(x)$ ésta sea diferente de cero, ya que en ese punto la función será discontinua y habrá una asíntota (como se muestra en la gráfica 2.23).

NOTA: Las aplicaciones de las funciones racionales se verán con detalle en el capítulo 3.

Propiedades:

a) Toda función racional tiene asíntotas.

b) La imagen de una función racional será $(-\infty,\infty)$.

Este tipo de función será de gran ayuda en el estudio de límites.

Método para determinar el dominio de una función racional
1. Se analiza cada función por separado.
2. Se despeja cada ecuación y se iguala a cero.
3. Se intersectan los valores en caso de haber restricciones en ambas ecuaciones.

EJEMPLO

$f(x)=\dfrac{5x+1}{4-x^2}$

1. Se analiza cada función por separado.

2. Se despeja cada ecuación y se iguala a cero.

En este caso sólo despejaremos el denominador, ya que el numerador es una función lineal y no tiene restricciones.

$4-x^2=0$

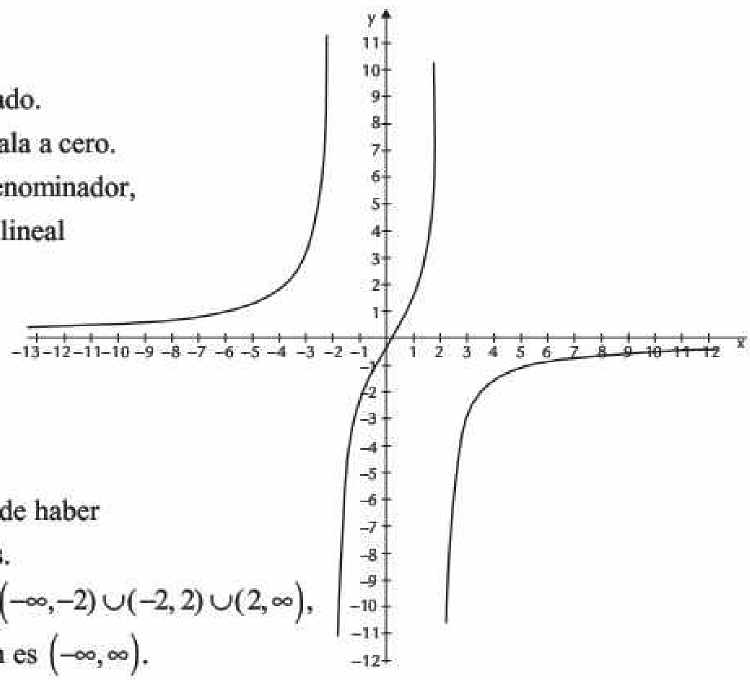
$-x^2=-4$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

3. Se intersectan los valores en caso de haber restricciones en ambas ecuaciones.

El dominio de esta función será del $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$, mientras que la imagen de la función es $(-\infty,\infty)$.



Gráfica 2.23

Funciones irracionales

Las funciones irracionales, al igual que las funciones cuadráticas, pueden describir el movimiento de objetos, como en el siguiente caso: un águila quiere cazar un ratón, para lo cual, en su vuelo, describe el movimiento de una semiparábola cóncava hacia la derecha. Si el ratón se encuentra en el vértice de la parábola, ¿cuál será la función que mejor describa el movimiento del águila?

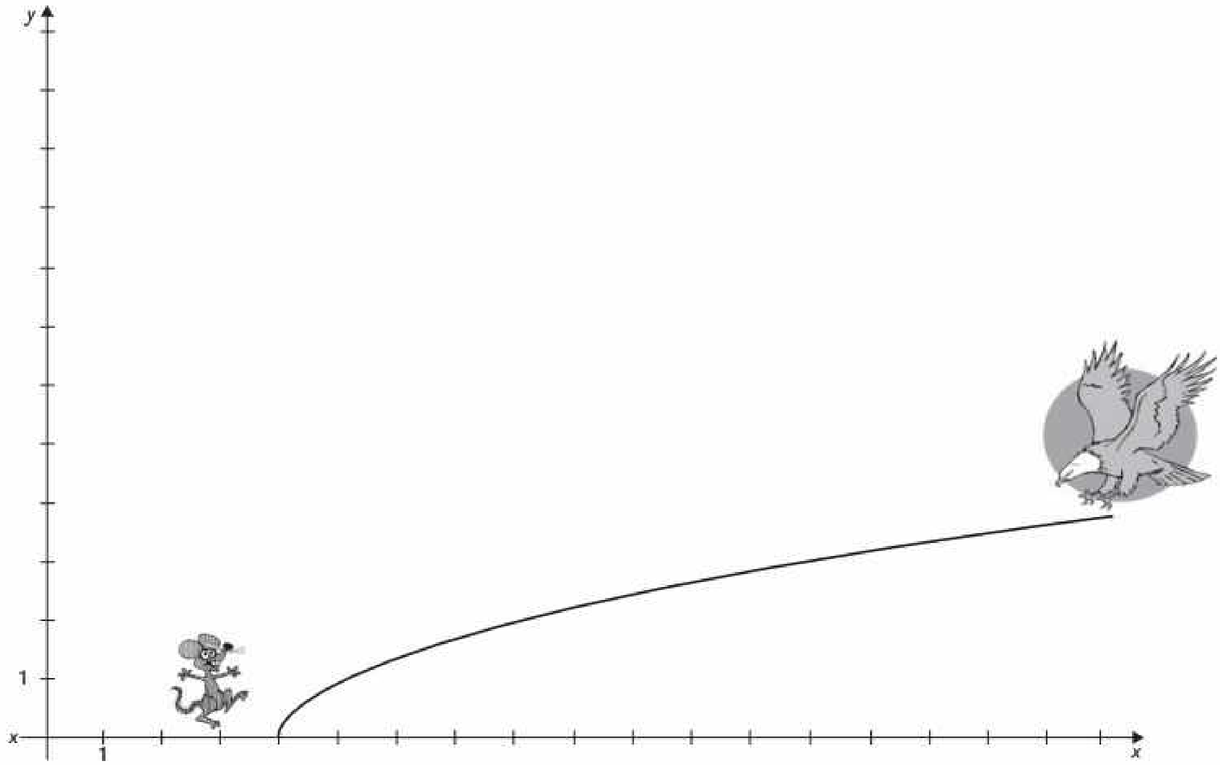


Figura 2.5

Las funciones irracionales (gráfica 2.24) son aquellas cuya expresión matemática $f(x)$ presenta un radical: $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$.

Si el índice del radical no es par, el dominio de la función estará dado por los valores en los que $g(x)$ es **mayor o igual que cero**.

Método para determinar el dominio de una función irracional
1. Para determinar el dominio, el radical será igual o mayor que cero.
2. Se iguala el interior de la raíz (radicando) a cero y se determina el dominio.

EJEMPLO

$f(x)=\sqrt{x^2-1}$

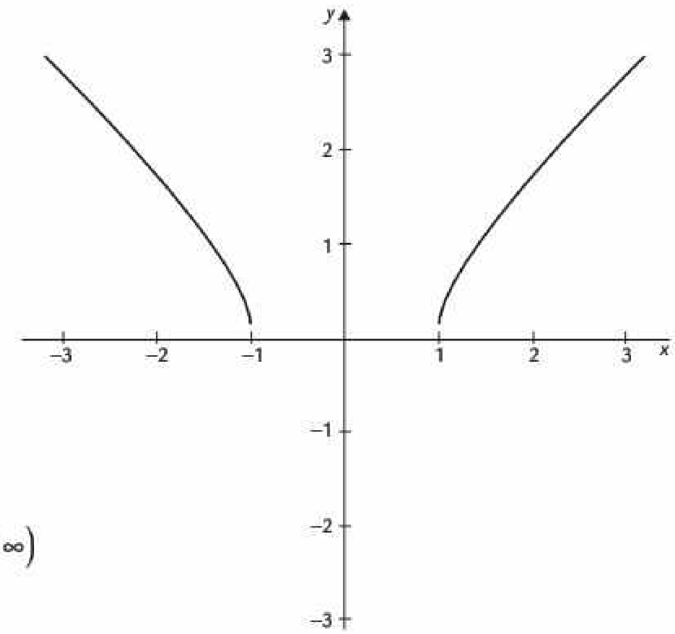
1. Para determinar el dominio, el radical será igual o mayor que cero.
2. Se iguala el radicando a cero y se determina el dominio.

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

El dominio de la función es $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ y la imagen estará dada por $[0,\infty)$.



Gráfica 2.24

NOTA: La imagen se obtiene al sustituir los valores máximos y mínimos del dominio.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.3

I. Identifica en cada caso el tipo de función según la clasificación de funciones por su naturaleza.

1. $f(x)=\log(5x-1)$
2. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}-x+2$
3. $f(x)=\dfrac{1}{x}$
4. $f(x)=4$
5. $f(x)=x-9$
6. $f(x)=x^5+3x^2-x+1$
7. $f(x)=x^2-x-6$
8. $f(x)=\ln(2-x)$
9. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

II. Grafica y encuentra la intersección de los ejes y el vértice, en caso de existir, de las siguientes funciones.

1. $f(x)=\log(4x-3)$
2. $f(x)=x^2+5x-14$
3. $f(x)=\dfrac{1}{3}x-5$
4. $f(x)=2x+1$
5. $f(x)=5$
6. $f(x)=x^3-4x^2+2x+2$

7. $f(x)=x^2+x-6$
8. $f(x)=\sqrt{x^2-16}$
9. $f(x)=-\left(\sqrt{x^2-16}\right)$
10. $f(x)=-x-7$
11. $f(x)=3x^2-29x+40$
12. $f(x)=(x+7)(x-3)$
13. $f(x)=x^2-2x-35$
14. $f(x)=2x^3-3x^2-32x-15$
15. $f(x)=24x+2x^2-x^3$
16. $f(x)=3x^3+12x^2-96x$
17. $f(x)=70x-32x^2-6x^3$
18. $f(x)=2x^3-12x^2-32x$

III. Obtén el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

1. $f(x)=\log(7x+4)$
2. $f(x)=x^2+8x+16$
3. $f(x)=\frac{1}{2}x+2$
4. $f(x)=\sqrt{3x+1}$
5. $f(x)=-x$
6. $f(x)=6$
7. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{5x+4}$
8. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$
9. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$
10. $f(x)=2\log(3x-2)$
11. $f(x)=2\ln(3x-2)$
12. $f(x)=\dfrac{5}{x-5}$
13. $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{6-x}}$
14. $f(x)=3\log\left(9-x^2\right)$
15. $f(x)=-3x+1$

Funciones trigonométricas

Marcos estudia Ingeniería en electrónica, y se encuentra con el tema de la corriente alterna. Su maestro le explica que este tipo de corriente tiene una forma senoidal porque de esta manera la transmisión de la energía es más eficiente. ¿Podrías explicarle a Marcos qué significa esto?

Otra aplicación de las funciones trigonométricas es determinar distancias y ángulos de figuras geométricas, como en el siguiente caso: Luis ha comprado una casa y quiere asegurarse de que las condiciones del tinaco sean óptimas, pero requiere subir a la azotea y para ello debe pasar una escalera por un pasillo en forma de “L”. ¿Cuáles deben ser las dimensiones máximas de la escalera para que pueda pasar por dicho pasillo?

Las funciones trigonométricas son el conjunto de funciones que se definen con base en un triángulo rectángulo, o bien, de acuerdo con un círculo unitario, como se muestra en la figura 2.6.

Otra manera de visualizar las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son las razones de cambio que sufre una línea recta, cuyo largo siempre es igual a 1 cuando, dentro de un círculo unitario, se forma un triángulo rectángulo imaginario en el que delta y representa nuestro cateto opuesto, delta x el cateto adyacente y una línea recta (radio) forma la hipotenusa del triángulo. En otras palabras, si visualizamos el cambio de los catetos como el cambio entre delta y y delta x, podemos entender mejor el cambio de la función trigonométrica (o pendiente m en nuestro caso) y así saber qué sucede con las respectivas funciones trigonométricas.

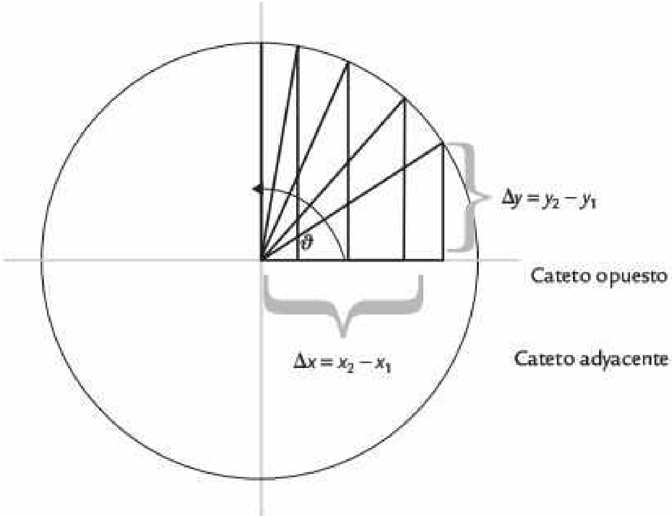


Figura 2.6

Si tenemos que lo máximo que puede medir cada cateto es 1, dado que hablamos de un círculo unitario, y que las *funciones trigonométricas* están definidas como

$$\text{sen} = \frac{o}{h} = \frac{1}{\csc} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{(mx+b)}$$

$$\cos = \frac{a}{h} = \frac{1}{\sec} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{(mx+b)}$$

$$\tan = \frac{o}{a} = \frac{\text{sen}}{\cos} = \frac{1}{\cot} = \frac{y}{x}$$

$$\cot = \frac{a}{o} = \frac{\cos}{\text{sen}} = \frac{1}{\tan} = \frac{x}{y}$$

$$\sec = \frac{h}{a} = \frac{1}{\cos} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{(mx+b)}{x}$$

$$\csc = \frac{h}{o} = \frac{1}{\text{sen}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{(mx+b)}{y}$$

donde "*o*" es el cateto opuesto, "*a*" el cateto adyacente y "*h*" la hipotensa, entonces el seno será 1 a los 90°, ya que tanto la hipotenusa como el cateto opuesto tendrán radio 1; por el contrario, la función coseno será 1 a los 0° ya que tanto el cateto adyacente como la hipotenusa poseerán la longitud del radio. Procesos similares sucederán con el resto de las funciones.

NOTA: Donde los catetos tengan la misma longitud, el valor de las funciones trigonométricas será igual.

EJEMPLO

$$\text{sen}\,(45) = \cos\,(45)$$

La figura 2.7 presenta el resto de los cambios que sufre el triángulo rectángulo en los diferentes cuadrantes.

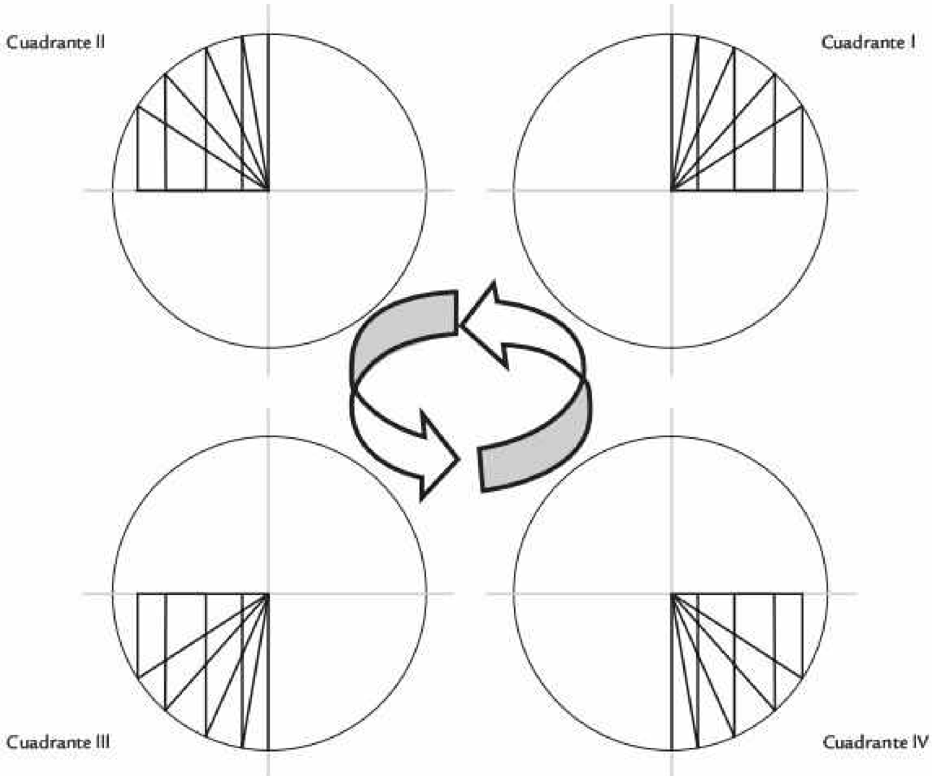


Figura 2.7

Ahora se pueden introducir los cambios que sufre π alrededor del círculo.

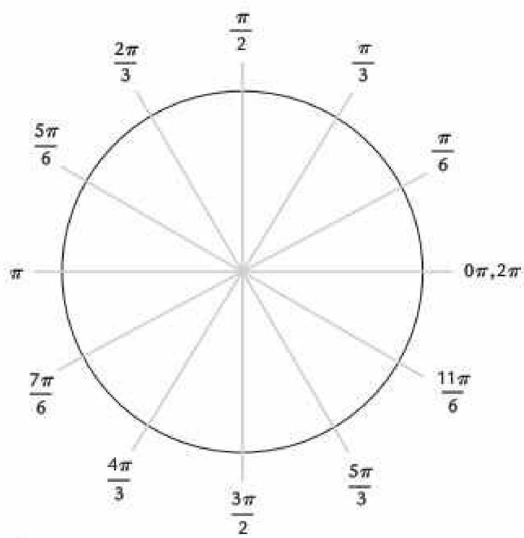
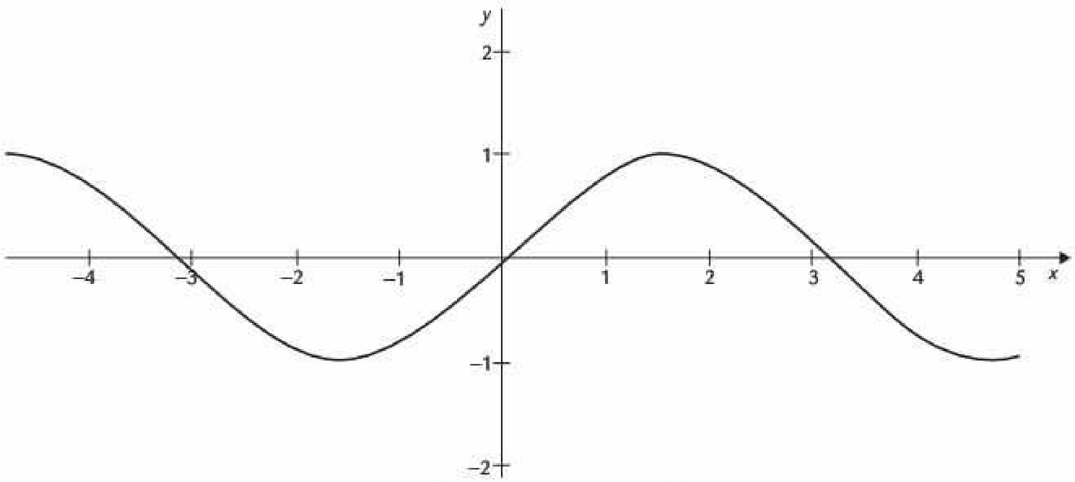


Figura 2.8

Gráficas, dominio e imagen de las funciones trigonométricas

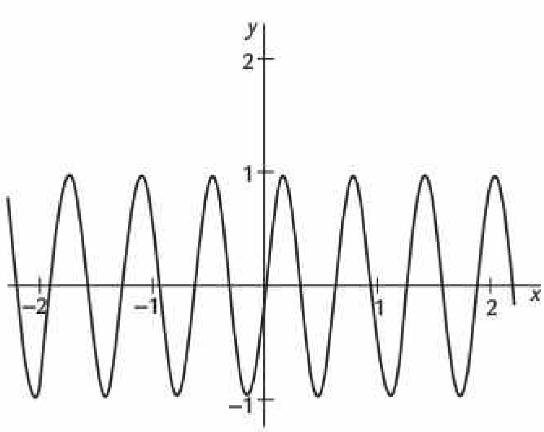
La gráfica de la función seno (gráfica 2.25) siempre cruza el origen. Su dominio es $(-\infty,\infty)$ y su imagen está dada por $[-1,1]$.



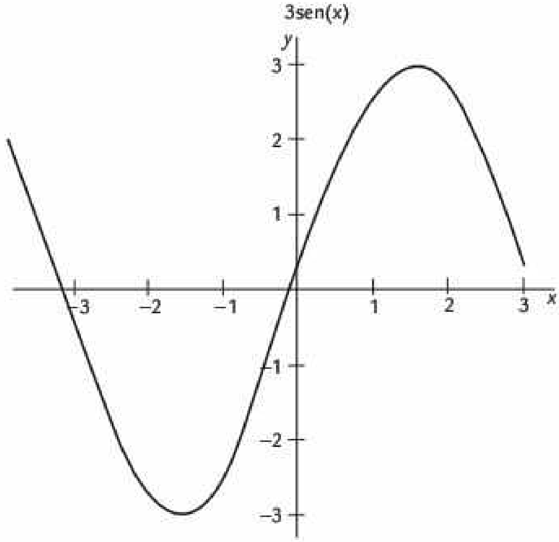
Gráfica 2.25 *Función sen (x)*

Si existe una constante dentro de la función seno, afectará la frecuencia de la misma; si es mayor que un entero aumentará la frecuencia de la función, y si es menor la disminuirá (vea las gráficas 2.26 y 2.27). Por otra parte, si la constante se encuentra afuera de la función afectará la imagen de la misma, aumentándola si es mayor que 1 y disminuyéndola si es menor que 1. Este principio también es válido para la función cos(x).

EJEMPLO

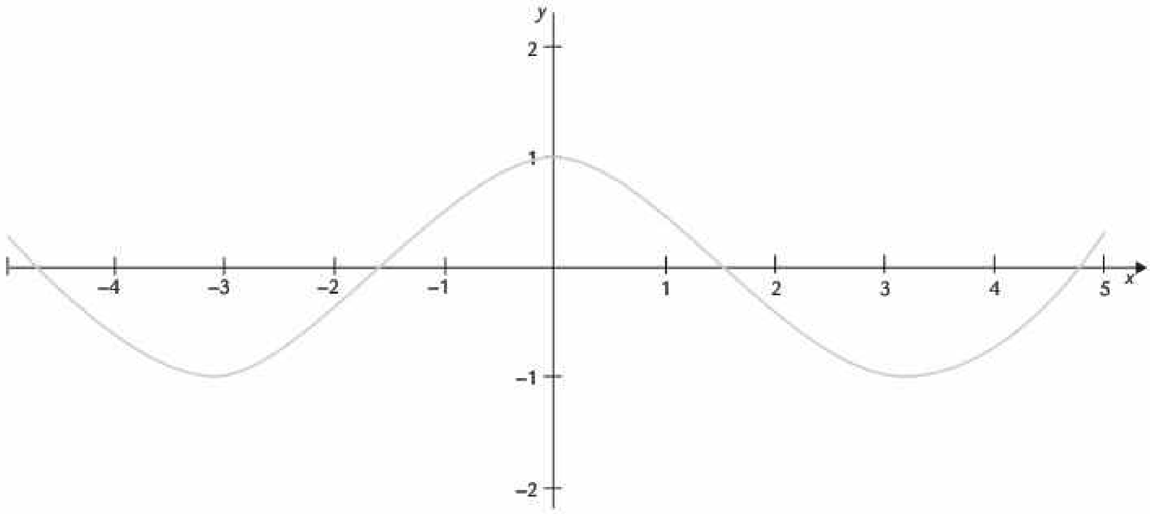


Gráfica 2.26

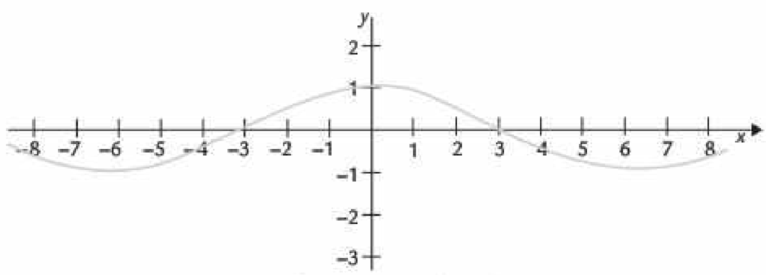


Gráfica 2.27

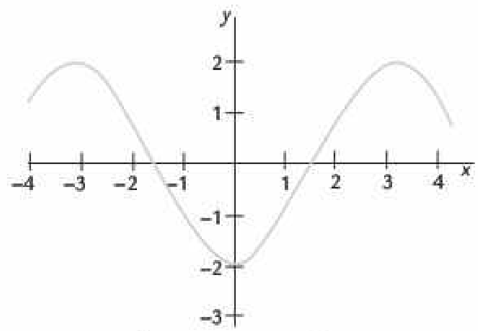
La gráfica de la función coseno (gráfica 2.28) siempre toca el punto (0,1) si es positiva, pero si es negativa su gráfica está en espejo con respecto al eje *x* y tocará el punto (0,−1). Su dominio es $(-\infty,\infty)$ y su imagen está dada por $[-1,1]$. Igual que en la función seno, su frecuencia y su amplitud se modifican si existen constantes dentro o fuera de la función, respectivamente (gráficas 2.29 y 2.30).



Gráfica 2.28 *Función cos(x)*

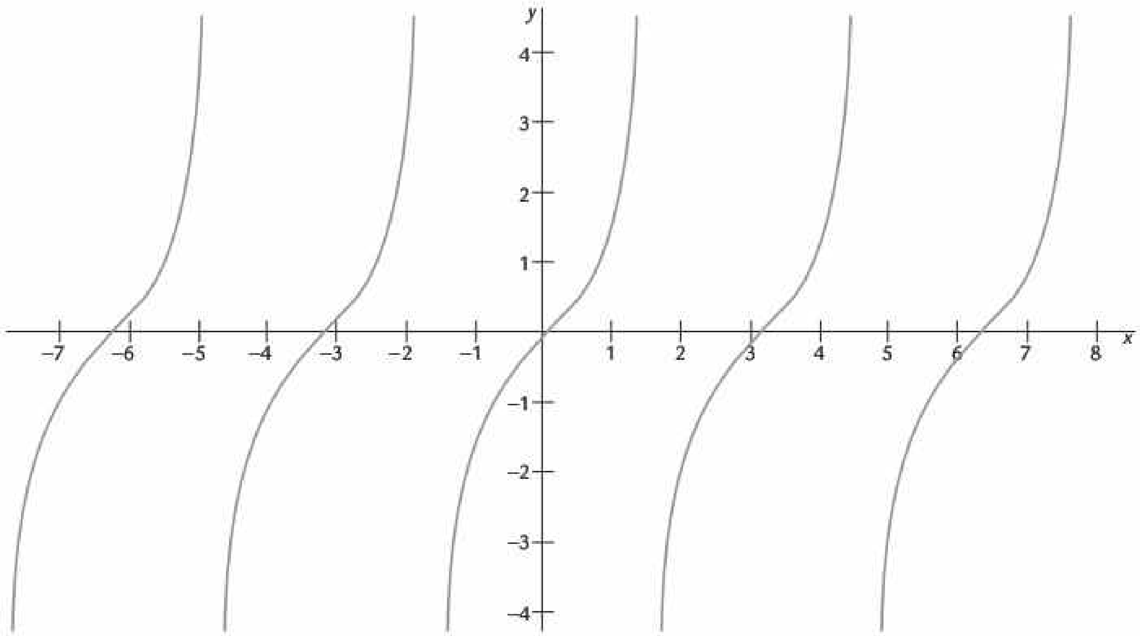


Gráfica 2.29 *cos(0.5x)*



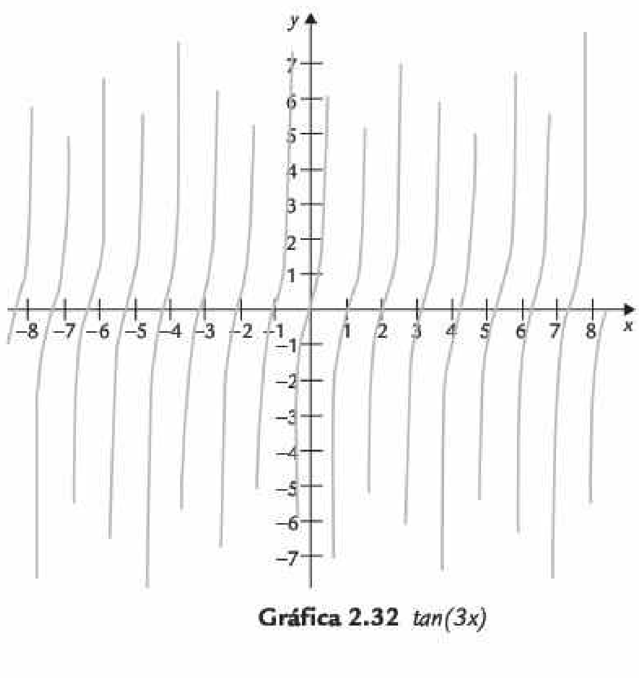
Gráfica 2.30 *−2cos(x)*

Luego tenemos las funciones tan(*x*) (gráfica 2.31) y cot(*x*). La gráfica de la función tan(*x*), al igual que la función seno, cruza el origen y su forma se asemeja a una "S" alargada. Su dominio es $\left\{x \in R \middle| x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$, en tanto que su imagen es $(-\infty,\infty)$.

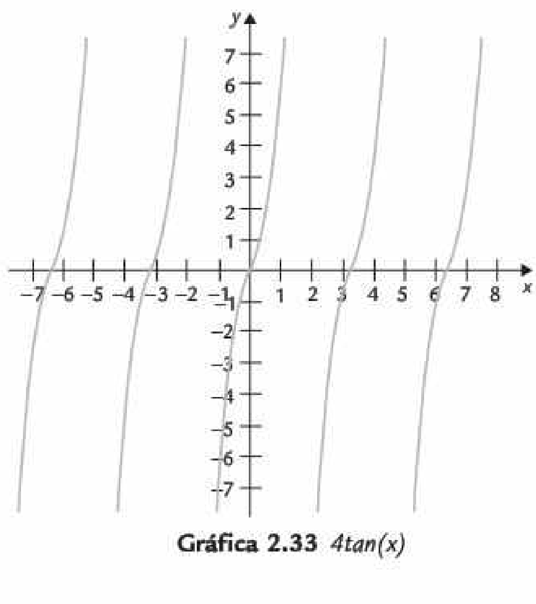


Gráfica 2.31 *Función tan(x)*

Al igual que las funciones seno y coseno, su frecuencia se afecta por una constante dentro de la función, y el algarmiento de la "S" (amplitud) varía si la constante se encuentra fuera de la función (vea las gráficas 2.32 y 2.33). De hecho, este principio es válido para el resto de las funciones trigonométricas.



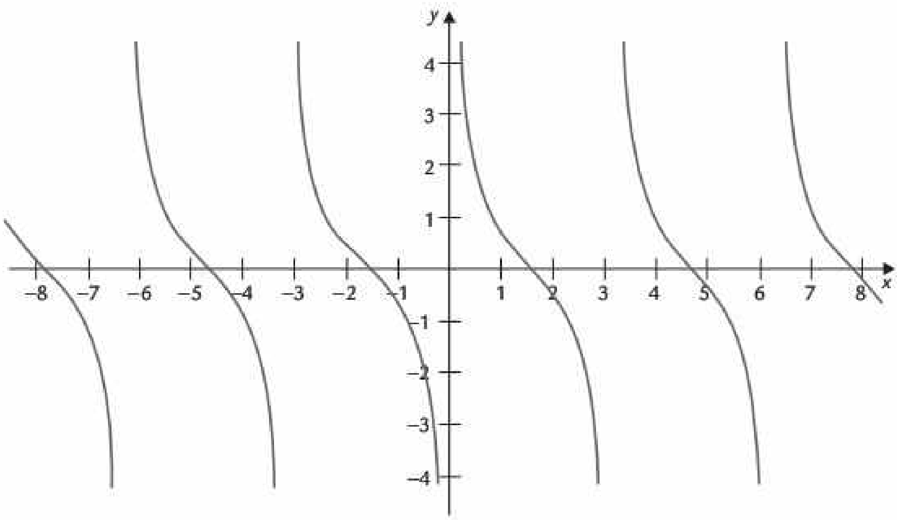
Gráfica 2.32 *tan(3x)*



Gráfica 2.33 *4tan(x)*

La siguiente función corresponde a la gráfica de cotangente. Si observamos las funciones anteriores podemos deducir que:

1. La gráfica de la función cotangente será similar a la gráfica de la función tangente.
2. Estará desplazada con respecto a la función tangente y no tocará el origen.
3. Estará en espejo respecto de la tangente.

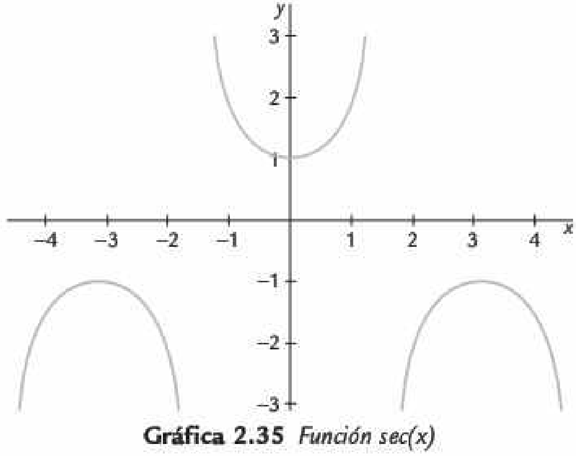


Gráfica 2.34 *Función cot(x)*

Si afectamos el interior o el exterior de la función, obtendremos el mismo resultado que en la función tangente al modificar la frecuencia o amplitud de la misma. El dominio y la imagen de la función están dados por $\left\{x \in R \middle| x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\right\}$ y $(-\infty, \infty)$ respectivamente.

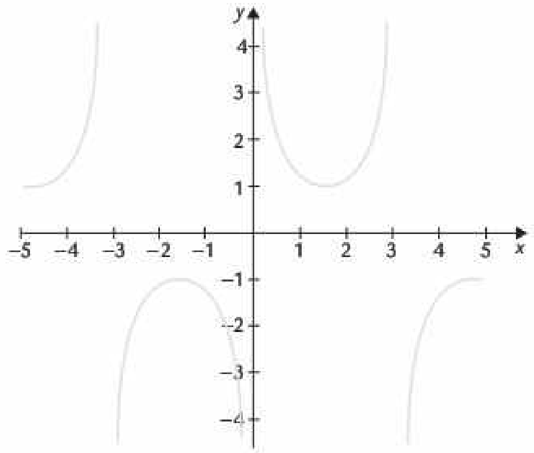
Así llegamos a las dos últimas funciones: secante (gráfica 2.35) y cosecante (gráfica 2.36). Ambas semejan parábolas, es decir, tienen forma de "U".

La función secante toca el punto (0,1), su dominio es $\left\{x \in R \middle| x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$ y su imagen es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.



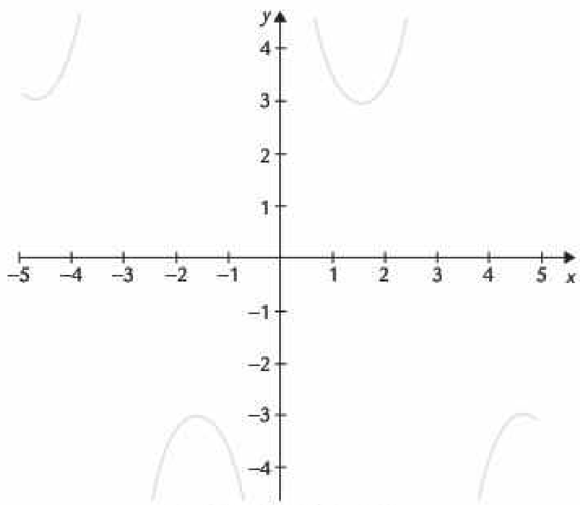
Gráfica 2.35 *Función sec(x)*

La gráfica, el dominio y la imagen de la cosecante son $\{x \in R \,|\, x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$ y $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ respectivamente. La gráfica no cruza el origen.

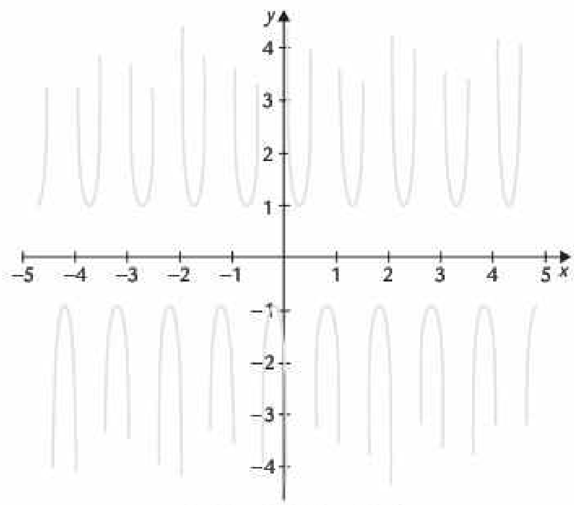


Gráfica 2.36 *Función csc(x)*

La imagen de ambas funciones es afectada por una constante fuera de la función y la frecuencia se altera si ésta se encuentra dentro de la función.



Gráfica 2.37 *3csc(x)*



Gráfica 2.38 *csc(6x)*

En resumen

1. Las funciones seno y coseno tienen forma de ondas.
2. Las funciones tangente y cotagente tienen forma de "S" alargadas.
3. Las funciones secante y cosecante tienen forma de "U" (parábolas).
4. Una constante dentro de cualquiera de las seis funciones trigonométricas afectará su frecuencia.
5. Una constante fuera de la función trigonométrica modificará su amplitud e imagen (excepto para la tangente y la cotangente).

6. Las funciones seno y tangente cruzan el origen.
7. Las funciones coseno, cotangente, secante y cosecante NO cruzan el origen.
8. Las funciones coseno y secante tocan el punto (0,1).
9. Las funciones cotangente y cosecante están a los lados del eje y pero no lo tocan.
10. Si tomamos las funciones seno, tangente y secante como bases, las gráficas de sus contrapartes (coseno, cotangente, cosecante) son iguales; solamente están desplazadas, y en espejo las funciones tangente y cotangente.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.4

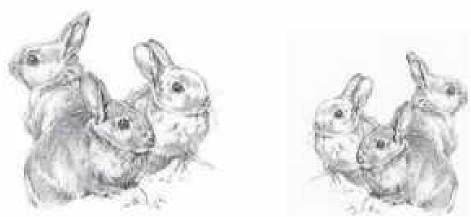
Con base en la teoría, determina cómo serán el dominio y la imagen de las funciones trigonométricas, y bosqueja la gráfica de la función.

1. $f(x) = \text{sen}(5x)$
2. $f(x) = \tan(6x)$
3. $f(x) = \cot(3x)$
4. $f(x) = -3\cos(2x)$
5. $f(x) = 3\csc(3x)$
6. $f(x) = -2\,\text{sen}(x)$
7. $f(x) = -4\cos(x)$
8. $f(x) = \frac{1}{2}\text{sen}(3x)$
9. $f(x) = 2\sec(x)$

Funciones exponenciales

Este tipo de funciones son particularmente importantes en la vida diaria pues representan el incremento poblacional de los seres vivos.

El papá de Juan tiene una pequeña granja y compra, entre otros animales, una pequeña pareja de conejos. Sabe que los conejos se reproducen muy rápido y le preocupa la cantidad de conejos que podría tener ya que la cantidad de alimento y de espacio que dispone es limitado. ¿Podrías determinar la población de conejos en un momento determinado? Como se ha dicho, el crecimiento de la población de conejos se ajusta a una función exponencial, similar a la que se presenta en el problema 2.27.



Una función exponencial (gráfica 2.39) se define de manera general como: $y = a^x$, donde a es la base de la función y es una constante positiva.

Las funciones exponenciales más utilizadas son:

a) $y = 10^x$, función exponencial de base 10.

b) $y = e^x$ función exponencial de base e. (e es la constante del logaritmo Neperiano. Vea la siguiente sección: Funciones logarítmicas).

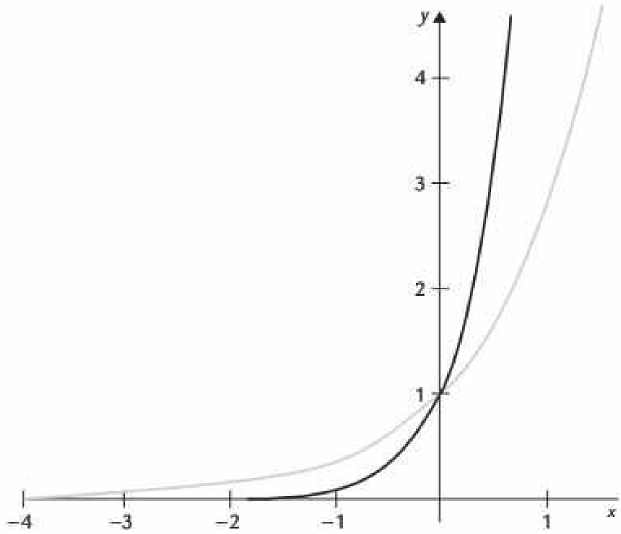
Conceptos importantes sobre la función exponencial

I. La gráfica de toda función exponencial pasa por el punto $(0,1)$.

II. El dominio son todos lo números reales $(-\infty,\infty)$.

III. La imagen son todos los números reales positivos $(0,\infty)$.

NOTA: El dominio para las funciones exponenciales siempre serán todos números reales.



Gráfica 2.39 *Función exponencial de base 10, en negro, y función exponencial de base e, en gris.*

Leyes de los exponentes

$a^0 = 1; \quad a^1 = a$

$a^r a^s = a^{r+s}$

$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

$\left(a^r\right)^s = a^{rs}; \quad a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.5

Obtén la gráfica de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \dfrac{1}{4}^x$
2. $f(x) = 5^x$
3. $f(x) = -2^x$
4. $f(x) = 4^{2x}$
5. $f(x) = e^{2x}$
6. $f(x) = 7^{3x}$

Funciones logarítmicas

En 1614 John Napier publica su obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, ejusque usus in utroque Trigonometria; ut etiam in omni logistica mathematica, amplissimi, facillimi, et expeditissimi explicatio*, en la que introduce los logaritmos a los que llamó números artificiales.

Los logarítmos o números artificiales son muy importantes en matemáticas, ya que no solamente facilitan realizar cálculos al sustituir la multiplicación por suma, la división por resta, la potencia por productos y las raíces por división; también son muy importantes en sismología y en audiología al permitir el establecimiento de sistemas de medición en estas disciplinas.

En cierta universidad de México existe la controversia de establecer si el terremoto que se produjo en 1985 fue más devastador que el de Japón en 2011; se sabe que el terremoto de México fue de 8.1 y el de Japón 9.0 en la escala de Richter, por lo cual se discute que no hubo mucha diferencia en la intensidad de ambos. ¿Se podría argumentar esta conclusión utilizando funciones logarítmicas? Vea el problema 2.43.

La función logarítmica (gráfica 2.40) se define como $y = \log_a(x)$ donde a es la base de la función y una constante positiva.

Las funciones logarítmicas más utilizadas, al igual que las funciones exponenciales, son las de base 10 y las de base natural:

a) $y = \log_{10}(x)$ función logarítmica de base 10.

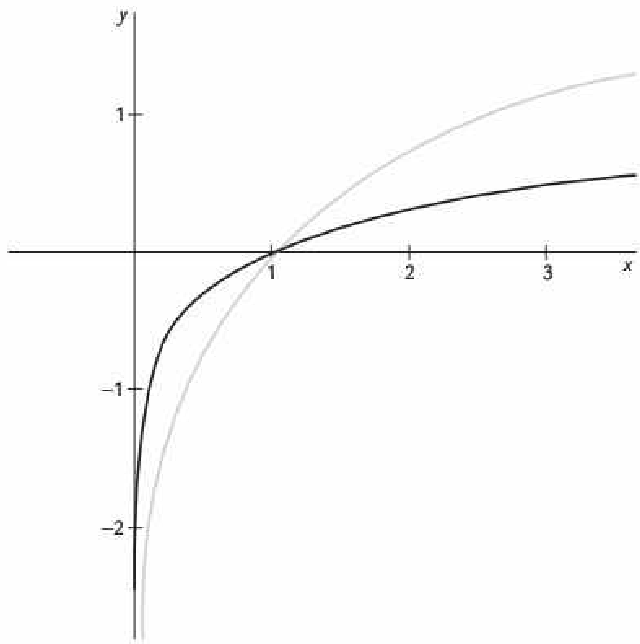
b) $y = \ln(x)$ función logarítmica de base e.

Conceptos importantes sobre la función logarítmica

I. La gráfica de toda función logarítmica pasa por el punto (1,0).

II. El dominio son todos los números reales positivos $(0,\infty)$.

III. La imagen son todos los números reales $(-\infty,\infty)$.



Gráfica 2.40 *Función logarítmica de base 10, en negro, y función logarítmica de base* e, *en gris.*

Método para determinar el dominio de una función logarítmica

En una función logarítmica diferente de $\log(x)$ o $\ln(x)$, el dominio se determina por el siguiente método:

1. Se toma en consideración sólo el argumento de la función logarítmica.
2. La función se iguala a cero.
3. Posteriormente se obtienen las soluciones de la ecuación.
4. Y el dominio de la función logarítmica será igual o mayor que los valores obtenidos.

EJEMPLOS

$f(x)=\log(5x+3)$

$5x+3=0$

$5x=-3$

$x=-\dfrac{3}{5}$

El dominio de la función será:

$\left[-\dfrac{3}{5},\infty\right)$

Y la imagen estará dada por:

$(-\infty,\infty)$

$f(x)=\log\left(\sqrt{x-4}\right)$

$x-4=0$

$x=4$

El dominio de la función será:

$[4,\infty)$

Y la imagen estará dada por:

$(-\infty,\infty)$

Leyes de los logaritmos

$$\ln(ab)=\ln\ a+\ln\ b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\ a-\ln\ b$$

$$\ln(a)^n=n\ln(a)$$

$$Log_N(\mathrm{N})=1$$

$$Log_N(1)=0$$

$$Log_N(N)^x=x$$

$$Log_x(N)=\frac{Log(N)}{Log(x)}$$

NOTA: El dominio para las funciones exponenciales siempre serán todos números reales.

Relación entre la función exponencial y la función logarítmica

I. $y = a^x$ sólo si $x = \log_a(y)$

II. $y = a^x$ es la inversa de $y = \log_a(x)$

III. $\text{Log}_a a^x = x$ para toda x

IV. $a^{\log(x)} = x, x > 0$

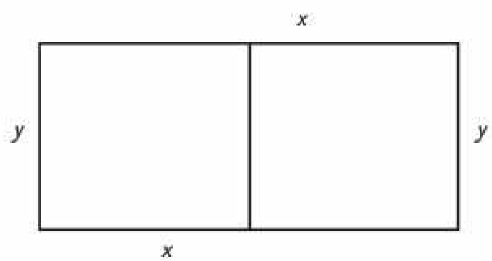
ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.6

Determina el dominio y la imagen de las siguientes funciones, y haz un bosquejo de ellas.

1. $f(x) = \log(x+1)$
2. $f(x) = \log\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$
3. $f(x) = \log\left(\dfrac{1}{2}x\right)$
4. $f(x) = \log(7x-3)$
5. $f(x) = \log\left(\sqrt{4-x}\right)$
6. $f(x) = \ln\left(25-x^2\right)$
7. $f(x) = -\log(x)$
8. $f(x) = \log\left(x^2\right)$

Funciones implícitas

El dueño de un terreno rectangular desea cercarlo y dividirlo en dos cuadros, para lo cual dispone de 120 m de malla. Hace dos recortes para cubrir el largo y tres para cubir el ancho, con lo cual genera el siguiente esquema:



El dueño llega a la conclusión de que el perímetro estará dado por $120 = 2x + 3y$; pero quiere obtener el área del terreno, y observa que hay dos datos que desconoce. Recuerda de sus clases de matemáticas que sólo puede trabajar una incógnita cuando ésta depende de la otra. ¿Podrías ayudarlo a determinar una variable respecto de la otra? Matemáticamente, ¿qué representa esto?

Las funciones implícitas son aquellas que definen implícitamente a la variable independiente; es decir, no se especifica qué variable depende de cuál. Las variables están "revueltas" en uno o en ambos lados de la ecuación y no se utiliza la notación de funciones.

EJEMPLO

$$x^2 + 2y = 1$$

Una ecuación será una función explícita si al momento de despejar la variable dependiente ésta queda con exponente impar. Ejemplo:

$$x^2 + 2y = 1$$
$$2y = 1 - x^2$$
$$y = \frac{1 - x^2}{2}$$

Observa que al momento de despejar y queda con exponente 1. A partir del despeje obtenido podemos empezar a calcular el dominio e imagen para la nueva función.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.7

Determina si las siguientes expresiones representan ecuaciones o funciones.

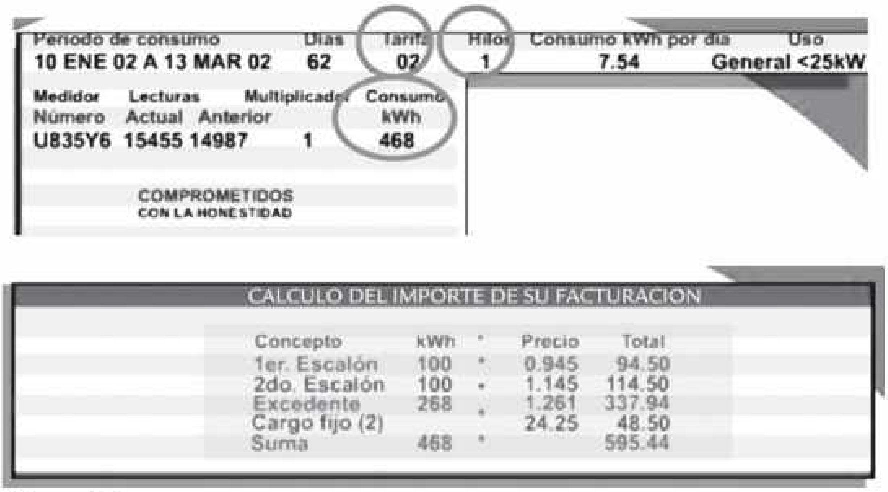
1. $y^2 + x - 3 = 0$
2. $x^2 + y^2 = 1$
3. $y^3 + 3x^2 - 2 = 0$
4. $y^3 + x = 3$
5. $x = 4$
6. $y^5 - x^3 - 4 = 0$

Función definida parte por parte

María acaba de titularse, renta una casa y sabe que tiene que pagar todos los servicios; sin embargo, cuando llegan los recibos de teléfono y de electricidad (luz) no sabe cómo leerlos ni qué significa que estén divididos por secciones, pero como ella era buena en matemáticas empezó por analizar la situación. ¿Podrías ayudarle a encontrarle significado a dichos recibos?, ¿existe algún modelo matemático que se ajuste para este tipo de situaciones? Para comprender este tipo de problemas podemos analizar las funciones que denominamos parte por parte.

Las funciones definidas parte por parte son aquellas que están compuestas por dos o más funciones, las cuales se encuentran condicionadas a lo que determina, a su vez, la selección de la función que se debe usar. El dominio de estas funciones se encuentra establecido en las condiciones de la función.

Estas funciones son muy útiles en la vida diaria y las usamos frecuentemente aun sin saberlo. El salario de una persona cae en este tipo de función: si se trabaja 8 horas en un día, el salario es de $100.00, pero si se labora tiempo extra, cada hora se paga al doble, y si se trabaja en un día festivo el pago de cada hora es triple. Otro ejemplo son los recibos de servicios como teléfono y luz, por ejemplo. Respecto del recibo del teléfono la tarifa puede estar condicionada al uso de larga distancia, número de llamadas, duración de la llamada y uso de *roaming*. Para el caso del recibo de luz, el pago está condicionado por el tipo de tarifa, los hilos y los kilowatts (figura 2.9).



Periodo de consumo	Días	Tarifa	Hilos	Consumo kWh por día	Uso
10 ENE 02 A 13 MAR 02	62	02	1	7.54	General <25kW

Medidor Número	Lecturas Actual	Anterior	Multiplicador	Consumo kWh
U835Y6	15455	14987	1	468

COMPROMETIDOS
CON LA HONESTIDAD

CALCULO DEL IMPORTE DE SU FACTURACION

Concepto	kWh	*	Precio	Total
1er. Escalón	100	*	0.945	94.50
2do. Escalón	100	*	1.145	114.50
Excedente	268	*	1.261	337.94
Cargo fijo (2)		*	24.25	48.50
Suma	468	*		595.44

Figura 2.9

En este caso del recibo de luz, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases} 0.945x+48.50 \mid 0\le x\le 100 \\ 1.145x \mid 100< x\le 200 \\ 1.261x \mid x>200 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores del ejemplo, tendríamos el costo de la luz mediante la función parte por parte:

$$f(x)=\begin{cases} 0.945(100)+48.50 \mid 0\le x\le 100 \\ 1.145(100) \mid 100< x\le 200 \\ 1.261(268) \mid x>200 \end{cases} \quad = \mathbf{595.44}$$

Podríamos aplicar el mismo procedimiento para los recibos de teléfono, agua, pagos bancarios, salario y otras muchas aplicaciones de la vida cotidiana.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.8

Grafica las siguientes funciones parte por parte.

1. $f(x)=\begin{cases} x & \mid x\ge 0 \\ -x & \mid x<0 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 250x & \mid x\le 8 \\ 500x & \mid 8<x\le 12 \\ 750x & \mid x>12 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \mid x\ge 0 \\ -x^2 & \mid x<0 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 2\,\text{sen}(x) \mid x\ge 0 \\ -2\,\text{sen}(x) \mid x<0 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}(5x) & |x \geq 0 \\ -\cos\left(\frac{1}{2}x\right) & |x<0 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 1 & |x \geq 0 \\ -1 & |x<0 \end{cases}$

Función inversa

Una función es uno a uno si a cada número de su imagen le corresponde un solo número de su dominio.

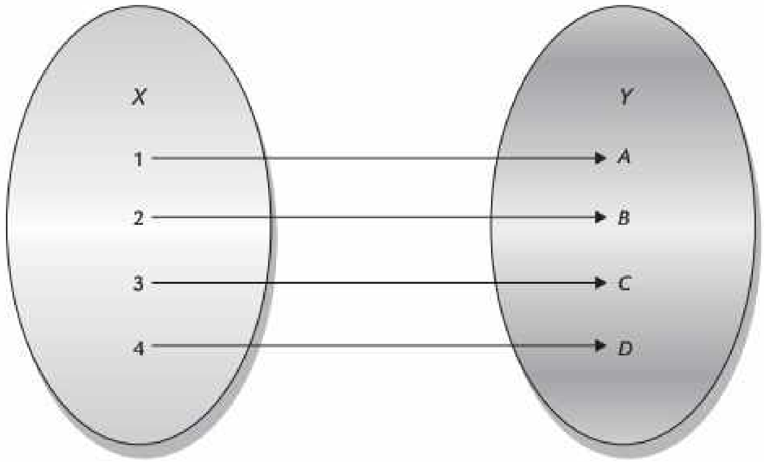
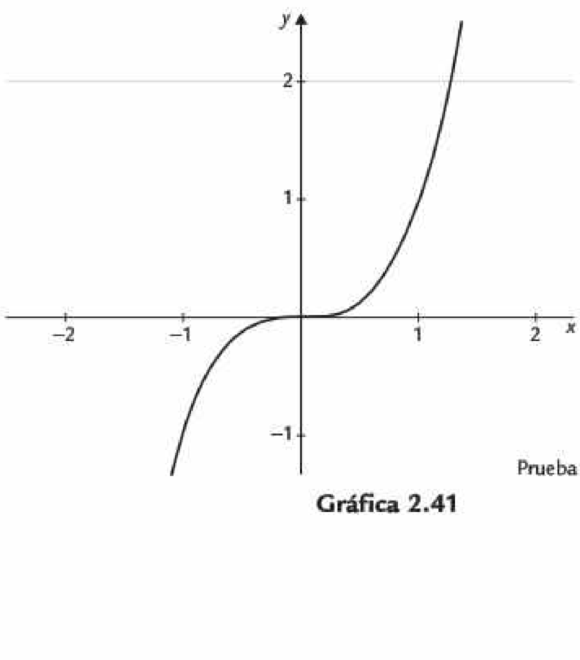


Figura 2.10 Función uno a uno.

Criterio de la recta horizontal

Una función es uno a uno si, y sólo si, una recta horizontal intersecta la gráfica de la función a lo sumo en un punto (vea la gráfica 2.41).



Prueba de la recta horizontal

Gráfica 2.41

Inversa de una función

Si f es una función uno a uno, considerándola como el conjunto de pares ordenados (x, y), entonces existe una función f^{-1} llamada inversa de f que es el conjunto de pares ordenados (y, x) definida por:

$$x = f^{-1}(y), \text{ si y sólo si, } y = f(x)$$

NOTAS:

1. El dominio de f^{-1} es la imagen de f, y la imagen de f^{-1} es el dominio de f.
2. Una función tiene inversa si es posible aplicarle el criterio de la recta horizontal.

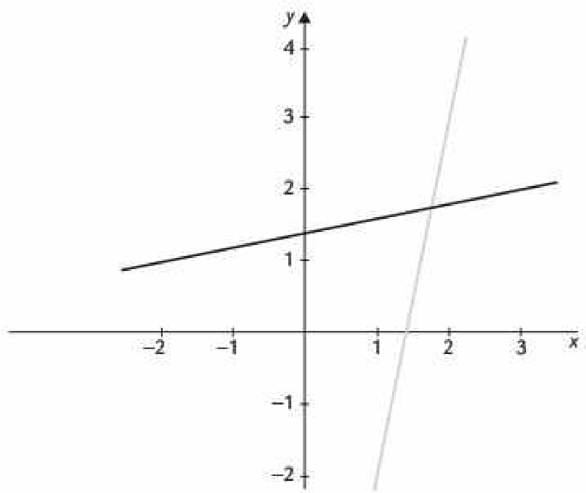
Método para calcular la inversa de una función

1. Despejar la función en términos de la variable independiente.
2. Si en el despeje la variable independiente posee un exponente par, la función no tiene inversa.
3. De lo contrario, cambiar la variable dependiente por la independiente y viceversa.

EJEMPLO 1

Función explícita	Función inversa
$f(x) = 5x - 7$	$x = \dfrac{y+7}{5}$
$y = 5x - 7$	

Como la variable independiente no tiene exponente par, la función $f(x)$ tiene inversa si se cambia la variable independiente por la dependiente y viceversa. De manera gráfica:



Gráfica 2.42 *En gris tenemos la función $f(x) = 5x - 1$ y en negro la función inversa.*

EJEMPLO 2

$$y = 1 - x^2$$

Como la variable independiente tiene exponente par, la función $f(x)$ no tiene inversa.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.9

Identifica si las siguientes funciones tienen inversa.

1. $y = x^2 - 10x + 25$
2. $x^2 + y^2 - 49 = 0$
3. $y = x^2 - 36$
4. $y = x^4 - 5x$
5. $y = x - 7$
6. $y = \frac{1}{x}$
7. $y = -x^2$
8. $y = -x - 1$
9. $y + \frac{1}{x-2} = 15$
10. $y = x^3 - 1$

¿?

¿Conozco la clasificación de las funciones?

¿Puedo decir cuáles son las funciones polinomiales?

¿Soy capaz de determinar la ecuación del vértice de una ecuación cuadrática?

¿Soy capaz de explicar cuáles son las funciones trigonométricas?

¿Comprendo cómo cambia una función trigonométrica cuando una constante afecta a x, como en sen(ax)?

¿Comprendo cómo cambia una función trigonométrica cuando una constante afecta a la función, como en acos(x)?

¿Reconozco las dos funciones exponenciales representativas?

¿Reconozco las dos funciones logarítmicas representativas?

¿Soy capaz de explicar qué es una función implícita?

¿Soy capaz de explicar qué es una función parte por parte?

¿Soy capaz de reconocer y describir algunas situaciones reales que se pueden modelar con funciones parte por parte?

2.4 Estrategia para obtener el dominio e imagen de funciones complejas

Hasta ahora sólo hemos analizado las funciones de manera individual con fines didácticos, pero la mayoría de las veces nos encontramos con funciones compuestas de dos o más tipos de funciones, con lo que parecería que las reglas anteriores no siempre funcionan.
Para obtener el dominio e imagen de este tipo de funciones propondremos el siguiente método:

1. Analizar de manera general la función compuesta.
2. Descomponer la función en las funciones que la componen.
3. Obtener el dominio de todas y de cada una de las funciones que la componen.
4. Si lo desea, puede representar el dominio obtenido de estas funciones en una recta numérica para una mejor visualización, como en la gráfica 2.40.
5. Por último, intersectaremos los dominios obtenidos para generar el dominio de la función compuesta.
6. La imagen se obtendrá con el valor final e inicial, el valor simétrico o con los intervalos correspondientes del dominio.

EJEMPLO 1

$$f(x)=\frac{\sqrt{36-x^2}}{\sqrt{x^2-9}}$$ Función compuesta

Análisis del dominio como funciones individuales

$$f_1(x)=\sqrt{36-x^2}$$
$$36-x^2=0$$
$$-x^2=-36$$
$$x^2=36$$
$$x=\pm\sqrt{36}$$
$$x=\pm 6$$
$$D_1=[-6,6]$$

$$f_2(x)=\sqrt{x^2-9}$$
$$x^2-9=0$$
$$x^2=9$$
$$x=\pm\sqrt{9}$$
$$x=\pm 3$$
$$D_2=(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$$

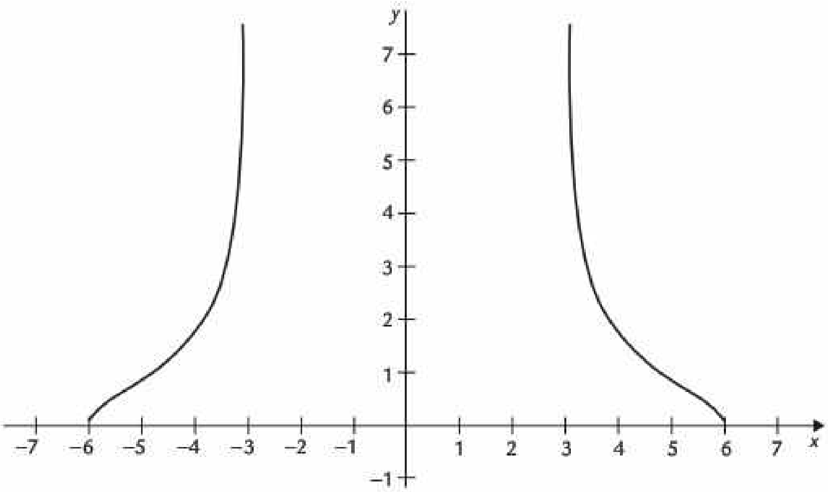
Ahora graficado en la recta numérica:

Figura 2.11

Las partes comunes del dominio son:

$$D:[-6,-3)\cup(3,6]$$

Si nuestra suposición es correcta, será la única parte del espacio donde haya gráfica.



Gráfica 2.43

Obtendremos la imagen con los intervalos. Como en este caso son simétricos, usaremos el valor final e inicial del intervalo positivo:

$$f(x)=\frac{\sqrt{36-x^2}}{\sqrt{x^2-9}} \qquad D:[-6,-3)\cup(3,6]$$

$$f(6)=\frac{\sqrt{36-6^2}}{\sqrt{6^2-9}}=\frac{\sqrt{36-36}}{\sqrt{36-9}}=\frac{0}{\sqrt{27}}=0$$

Usaremos un valor aproximado a 3, ya que no puede tocar el 3.

$$f(3.001)=\frac{\sqrt{36-3.001^2}}{\sqrt{3.001^2-9}}=\frac{\sqrt{36-9.006}}{\sqrt{9.006-9}}=\frac{5.196}{.077}=67.069\to\infty$$

Como se verá en el capítulo de límites, cuanto más se aproxime la función a 3, ésta tenderá al infinito positivo.
Por tanto, la imagen estará dada por:

$$I:[0,\infty)$$

NOTA: Aunque es un ejemplo ilustrativo, este principio se puede usar para cualquier expresión compuesta.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.10

Obtén el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{x^2-25}}$
2. $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$
3. $f(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+4}}\right)$

¿?

¿Soy capaz de utilizar las estrategias propuestas para obtener el dominio y la imagen de una función?

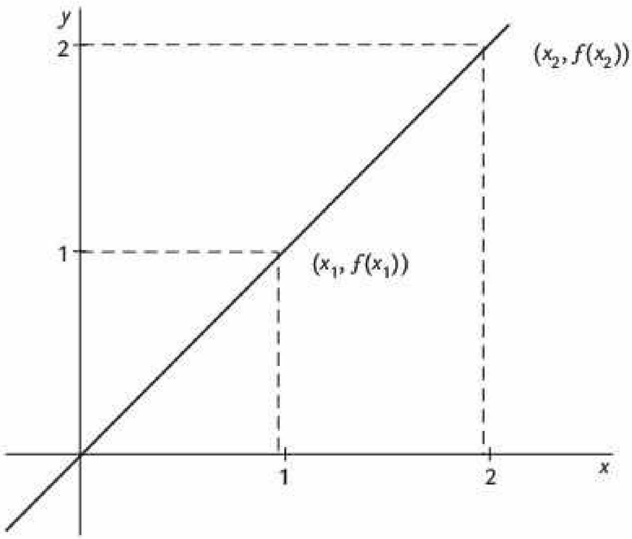
2.5 Clasificación de las funciones por sus propiedades

Pablo asiste diariamente a una escuela y tiene que subir unas escaleras muy largas. Como es muy inteligente, observa que a medida que avanza en la mañana, la pendiente aumenta y es más cansado; sin embargo, cuando sale de la escuela y baja las escaleras la caminata es más fácil. Ahora recuerda que en la clase de matemáticas vio una serie de funciones que darían significado a su observación.

Función creciente y decreciente

Función creciente

Una función f es creciente sobre un intervalo si para dos números cualesquiera, x_1 y x en el intervalo, donde $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, como se muestra en la gráfica 2.44.

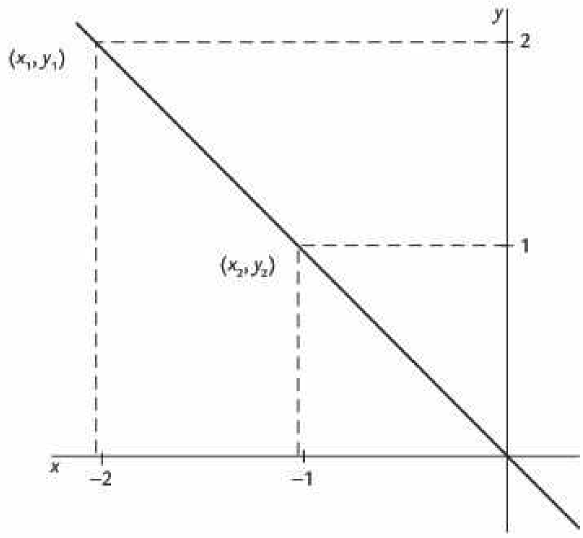


Gráfica 2.44

En esta gráfica vemos que, a medida que el valor de x aumenta, la función $f(x)$ también aumenta. Se puede apreciar en la gráfica que $x_1 < x_2$ puesto que $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Se puede observar también que $f(x_1) < f(x_2)$.

Función decreciente

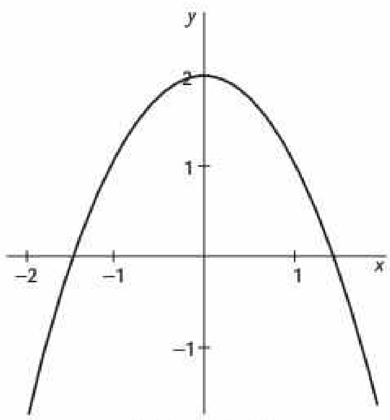
Una función f es decreciente sobre un intervalo si para dos números cualesquiera, x_1 y x_2, en el intervalo $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$, como se presenta en la gráfica 2.45.



Gráfica 2.45

Ahora a medida que las x crecen, las y decrecen. Se puede ver que $x_1 = -2$ y $x_2 = -1$, por lo tanto $x_1 < x_2$, pero para y sucede lo contrario; $y_1 = 2$ y $y_2 = 1$, por lo tanto $y_1 > y_2$ o, lo que es lo mismo, $f(x_1) > f(x_2)$.

Estas propiedades son aplicables a cualquier tipo de funciones, no únicamente a las líneas rectas, como se muestra en la gráfica 2.46.



Gráfica 2.46

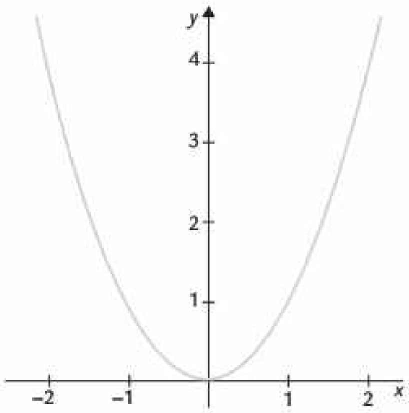
Si analizamos la parábola de la gráfica 2.46 y aplicas el mismo criterio, comprobaremos que es creciente en el intervalo del $(-\infty, 0)$ y decreciente en el intervalo del $(0, \infty)$.

Función simétrica y tipos de simetría

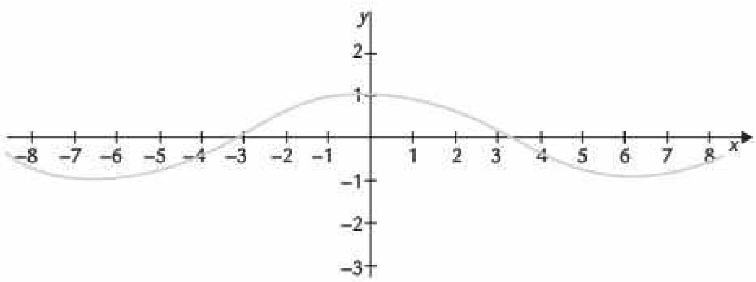
Mi gato Tommy es muy vanidoso; a tal grado, que todos los días se mira en el espejo. Sin embargo, debido a su gran ego, en vez de ver reflejada su imagen real observa la de un león. En la vida real hay ocasiones en las que nuestra imagen se refleja ya sea verticalmente como en un espejo o de manera horizontal, como en un lago, e inclusive en formas mucho más raras. En geometría y en algunas otras ramas de las matemáticas sucede lo mismo, las figuras se reflejan en un eje o en un plano, y para que ello suceda se deben cumplir las siguientes condiciones.

Simetría con respecto al eje y

Se dice que una función $f(x)$ es simétrica con respecto al eje y si para cada punto (x, y) el punto $(-x, y)$ también pertenece a la gráfica. Eso significa que hay una imagen en espejo respecto al eje y, como se aprecia en las gráficas 2.47 a 2.50.

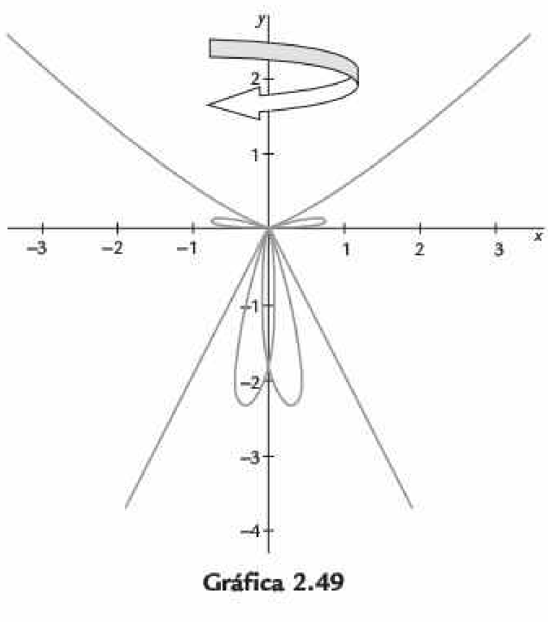


Gráfica 2.47

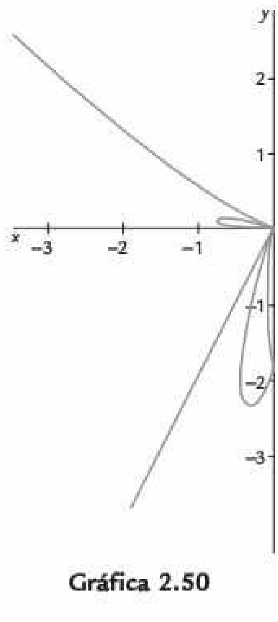


Gráfica 2.48

Observa que si doblamos las gráficas a la mitad con respecto al eje y, obtenemos la misma imagen.



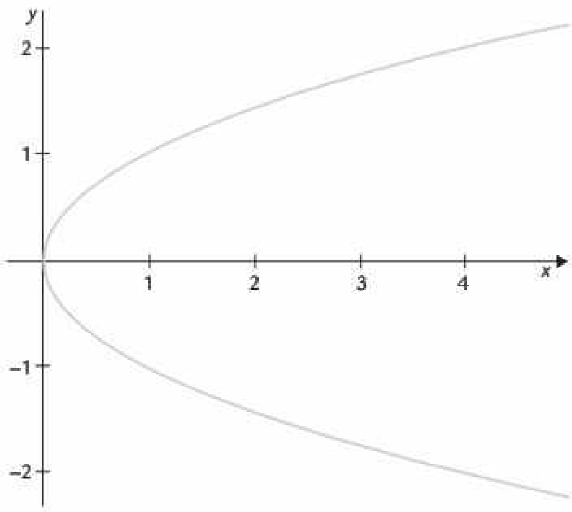
Gráfica 2.49



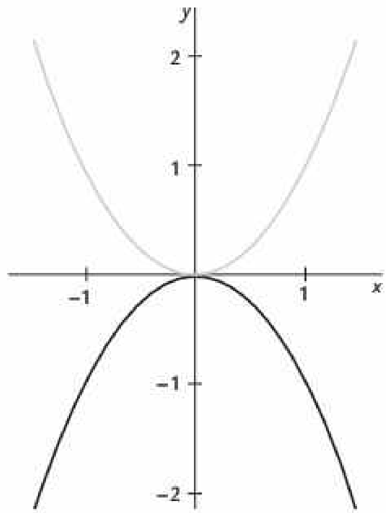
Gráfica 2.50

Simetría con respecto al eje x

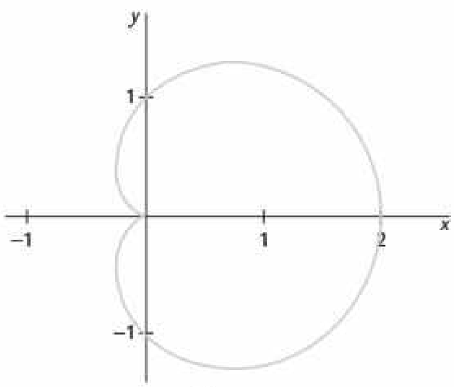
Se dice que una función $f(x)$ es simétrica con respecto al eje x si para cada punto (x, y) el punto $(x,-y)$ también pertenece a la gráfica. Eso significa que hay una imagen de lago respecto al eje x, como se aprecia en las gráficas 2.51 a 2.53.



Gráfica 2.51



Gráfica 2.52

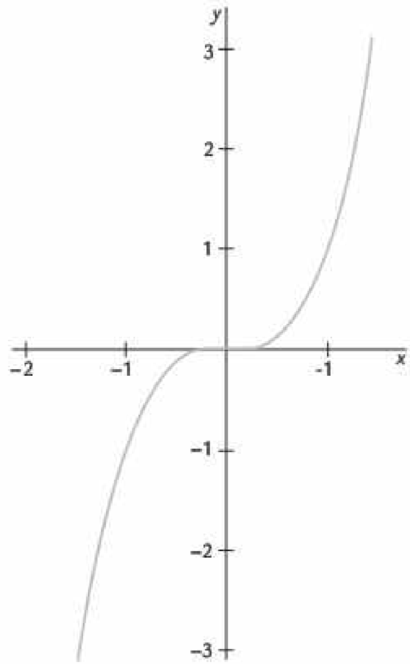


Gráfica 2.53

En estos casos el eje x funciona a manera de espejo, como sucede en un lago en el cual se refleja nuestra imagen.

Simetría con respecto al origen

Se dice que una función $f(x)$ es simétrica con respecto al origen, si para cada punto (x,y) el punto $(-x,-y)$ también pertenece a la gráfica. Eso significa que la gráfica permanece inalterada si se efectúa una rotación de 180° respecto al origen, como se aprecia en la gráfica 2.54.



Gráfica 2.54

En estos casos el origen (0,0) actúa como pivote de simetría.

Criterios de simetría

1. La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente.
2. La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al eje x si al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.
3. La gráfica de una ecuación es simétrica respecto al origen si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.
4. La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al eje y si cada uno de los términos tiene exponente par (o es una constante).

   Ejemplo: $f(x)=x^2-4$
5. La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al origen si cada uno de los términos tiene exponente impar.

   Ejemplo: $f(x)=x^3$

Función par e impar

Una función es par si su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

$$y=f(x) \text{ es par si } f(-x)=f(x)$$

Una función es impar si su gráfica es simétrica con respecto al origen.

$$y = f(x) \text{ es impar si } f(-x) = -f(x)$$

La gráfica de una función de x no puede ser simétrica con respecto al eje x, puesto que entonces violaría la prueba de la recta vertical y por lo tanto no representaría una función.

Ejemplo de función par:

$$f(x) = |x|$$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5

Observa en la tabulación que a cada valor positivo o negativo en x le corresponde exactamente el mismo valor en y.

Ejemplo de función impar:

$$f(x) = x^3$$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	−125	−64	−27	−8	−1	0	1	8	27	64	125

Observa en la tabulación que por cada valor positivo en x y en y existe su correspondiente negativo.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.11

Determina si las siguientes funciones son par, impar o ninguna.

1. $f(x) = x^3 - x$
2. $f(x) = 1 - \text{sen}(x)$
3. $f(x) = \begin{cases} -2 \mid x \le 0 \\ 2 \mid x > 0 \end{cases}$
4. $f(x) = 1 + \cos(x)$
5. $f(x) = x$
6. $f(x) = \begin{cases} -x^2 \mid x \ge 0 \\ x^2 \mid x < 0 \end{cases}$

Función periódica

Marcos continúa su curso de Ingeniería en electrónica y se entera que otro uso de las funciones trigonométricas es su aplicación en la trasmisión de ondas de radio de AM y FM. En el caso de AM, la amplitud de la onda portadora varía en función de la onda moduladora, y en el caso de FM, la frecuencia varía. Ambas ondas son cíclicas (es decir, periódicas) porque la señal se repite cada T segundos senoidales.

Ecuación de la señal moduladora AM:

$$y(t) = A_p \bullet \left[1 + m \bullet x_n(t)\right] \bullet \cos(w_p \bullet t)$$

Una función periódica es aquella cuyo comportamiento se cicla cada determinado intervalo. Dicha característica es propia de las funciones trigonométricas al estar definidas con base en un círculo. Como se vio anteriormente, su dominio o su imagen oscilan en intervalos según sea el caso.

Observa que:

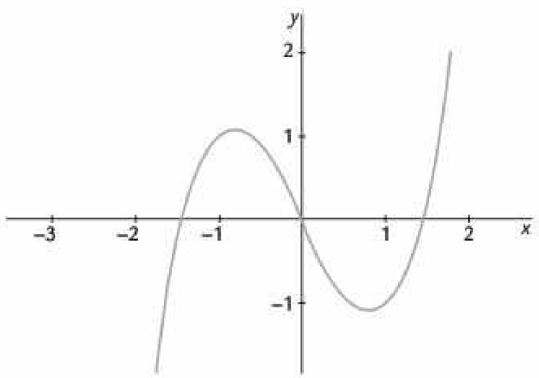
Función	Dominio	Imagen
sen(x)	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$
cos(x)	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$
tan(x)	$\left\{x \in R \middle| x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$	$(-\infty, \infty)$
cot(x)	$\{x \in R \mid x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$	$(-\infty, \infty)$
sec(x)	$\left\{x \in R \middle| x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
csc(x)	$\{x \in R \mid x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Del mismo modo, la gráfica se repite en dichos periodos, obteniendo la misma imagen una y otra vez, como es el caso de la función seno.

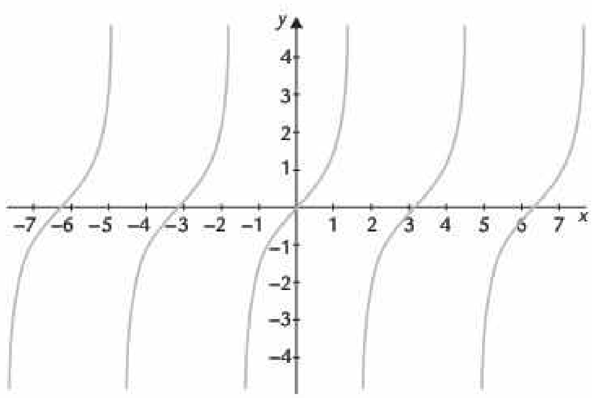
Aunque esta característica es propia de las funciones trigonométricas, existen otras funciones cuyo comportamiento se repite por intervalos, como sería el caso de la función escalón entre otras.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.12

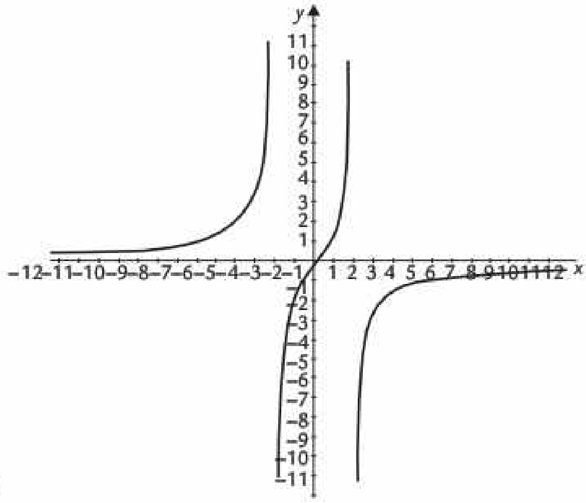
Identifica si las siguientes funciones son periódicas.



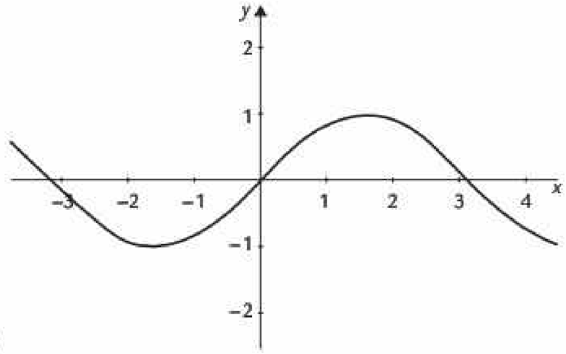
a)



b)



c)



d)

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra la siguiente actividad a tu portafolio de evidencias.

4. Realiza un cuadro sinóptico de la clasificación de las funciones por sus propiedades.

Operaciones con funciones y composición de funciones

Las operaciones con funciones son muy importantes ya que de nada nos servirían las funciones aisladas como materias de una retícula escolar si no se les relaciona con la vida diaria. Es su gran complejidad lo que les da sentido. En su concepto individual sólo se utilizan como estudio ya que la vida es tan variada que difícilmente encontraríamos un modelo matemático sencillo. Veamos el siguiente ejemplo.

Juan tira un balín por una pendiente de tal manera que al final sale disparado como un proyectil. Este movimiento consiste en dos partes: la primera sigue un movimiento lineal y la segunda describe una parábola, por lo que el movimiento final es el resultado de la combinación de ambos movimientos. Matemáticamente se puede obtener un solo modelo sumando ambas ecuaciones.

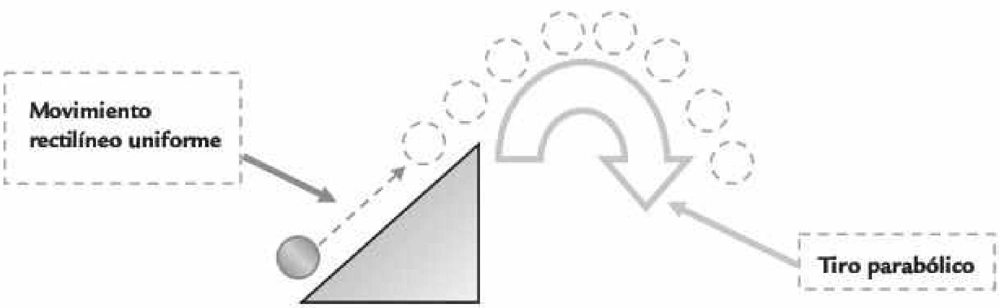


Figura 2.12

Las operaciones con funciones son todos aquellos movimientos algebraicos que pueden realizarse entre dos o más funciones, en tanto que la composición de función hace referencia a la sustitución de la variable de una función por otra función que ocupa todas las posiciones de la variable de la función original.

Concepto	Denotado por:	Dominio generado	Imagen generada
Suma	$f(x)+g(x)=(f+g)(x)$	$D=D_f \cap D_g$	
Resta	$f(x)-g(x)=(f-g)(x)$	$D=D_f \cap D_g$	
Multiplicación	$f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)$	$D=D_f \cap D_g$	
División	$f(x)/g(x)=(f/g)(x)$	$D=D_f \cap D_g \rightarrow \{x \mid g(x)\neq 0\}$	
Composición	$f(x)\circ g(x)=f(g(x))$	$D=D_g \subset D_f$	

Tips:

1. Para la suma, resta y producto de funciones, el dominio de la función resultante es igual a los valores comunes de f y g.
2. Para el caso del cociente, el dominio será todos los valores comunes de los dominios de $f(x)$ y de $g(x)$ a excepción de los valores para los cuales $g(x)=0$.
3. Para el caso de la composición de funciones, el dominio será todos los valores de x del dominio de $g(x)$ que estén en el dominio de $f(x)$.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.13

Realiza las siguientes operaciones.

1. $f(x)+g(x)$ donde $f(x)=4x+4$ y $g(x)=x^2$
2. $f(x)\cdot g(x)$ donde $f(x)=2x-1$ y $g(x)=x$
3. $f(x)\circ g(x)$ donde $f(x)=x^2+4$ y $g(x)=x+2$
4. $f(x)/g(x)$ donde $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=\cos(x)$
5. $f(x)\circ g(x)$ donde $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\operatorname{sen}(x)$
6. $f(x)\circ g(x)$ donde $f(x)=\sqrt{x-1}$ y $g(x)=x^2+3$
7. $f(x)\circ g(x)$ donde $f(x)=-x$ y $g(x)=x+2$
8. $f(x)\cdot g(x)$ donde $f(x)=5$ y $g(x)=x-3$
9. $f(x)\circ g(x)$ donde $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{4-x^2}}$ y $(x)=3x+1$

NOTA: Realiza el resto de las operaciones a manera de práctica.

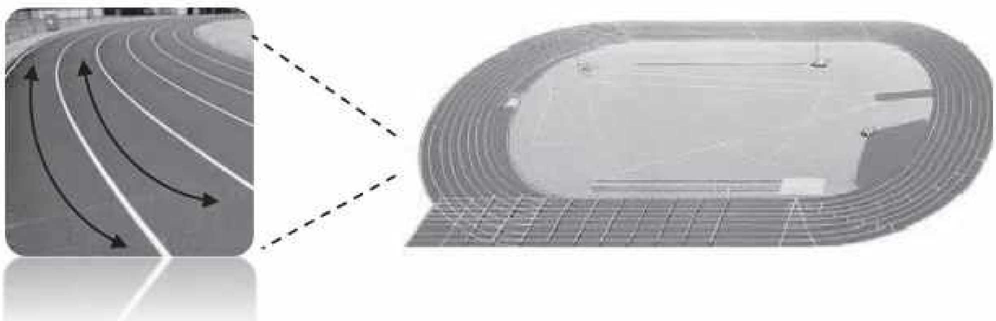
PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra la siguiente actividad a tu portafolio de evidencias.

5. Presenta 9 ejercicios con todas las operaciones entre funciones.

Traslación de funciones

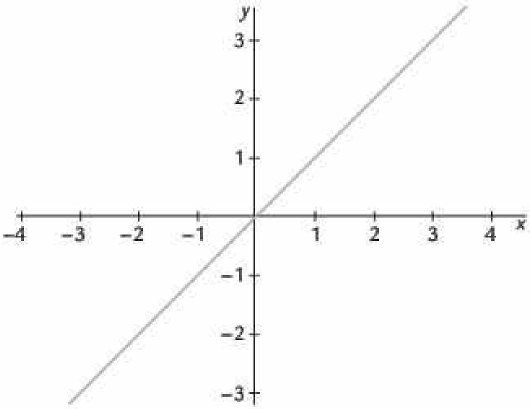
Una de las pruebas más importantes en los juegos olímpicos es la de velocidad. Este tipo de pruebas describe un claro ejemplo de traslación de trayectorias, ya que la distancia recorrida por los corredores de los carriles externos es la misma que la de los corredores de los carriles internos; sin embargo, sus posiciones de inicio son distintas para ajustar los cambios ocasionados por la curvatura de la pista. ¿Crees que el corredor de la última línea está en desventaja respecto del corredor del primer carril?



Definición de traslación de funciones

Se denomina traslación de funciones a los distintos cambios en el espacio del plano cartesiano, u otro sistema de coordenadas, que sufre una función representativa (lineal, cuadrática, trigonométrica, etc.) de acuerdo con los signos, coeficientes y constantes que la acompañan.

Por ejemplo, observa la función lineal original representada por $f(x) = x$, y que se muestra en la gráfica 2.55.

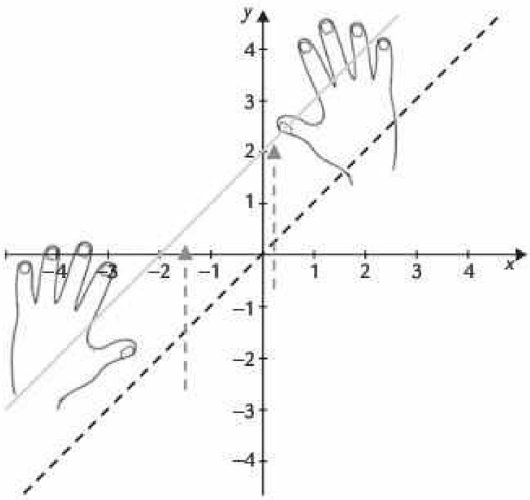


Gráfica 2.55

Sufre traslaciones dependiendo de la pendiente y la constante que la acompaña

Si agregamos la constante 2 a esta función, se obtiene la función $f(x) = x + 2$. El cambio en el espacio del plano cartesiano se vería afectado como se muestra en la gráfica 2.56.

La traslación de funciones equivaldría a tomar la gráfica y moverla de un lugar a otro según las condiciones dadas; o como si se trasportara un objeto, o se viajara en automóvil tantas manzanas al oeste y tantas al norte.



Gráfica 2.56

Entre los casos más representativos de traslación se encuentran los cambios que sufre una ecuación cuadrática.

Las distorsiones en el espacio de una ecuación cuadrática dependerán de:

1. El signo que acompañe a la variable cuadrática.
   a) Si el signo es positivo (+), será una parábola abierta hacia arriba "$\cup$", como en la gráfica 2.57.
   b) Si el signo es negativo (–), será una parábola abierta hacia abajo "$\cap$", como en la gráfica 2.58.
2. Si el coeficiente que acompañe a la variable cuadrática es entero o no.
   a) Si el coeficiente es mayor que uno, la parábola será más angosta. Cuanto mayor sea el número, más angosta será la parábola $\bigcup$, como en la gráfica 2.60.

b) Si el coeficiente es menor que uno, la parábola será más abierta. Cuanto menor sea el número, más ancha será la parábola , como en la gráfica 2.59.

3. El término independiente de la ecuación. Si el término independiente es positivo desplazará la gráfica hacia arriba, y si es negativo la desplazará hacia abajo, como en las gráficas 2.61 y 2.62.

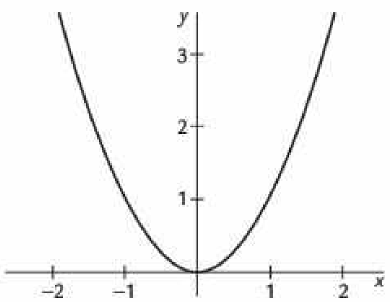
4. Si la expresión elevada al cuadrado tiene una constante, su desplazamiento será hacia la derecha o izquierda según sea el caso.

   a) Si tenemos la expresión $(x-h)^2$ la parábola se moverá hacia la derecha, como en la gráfica 2.64.

   b) Por el contrario, la expresión $(x+h)^2$ significa un movimiento de la gráfica a la izquierda, como en la gráfica 2.63.

EJEMPLO

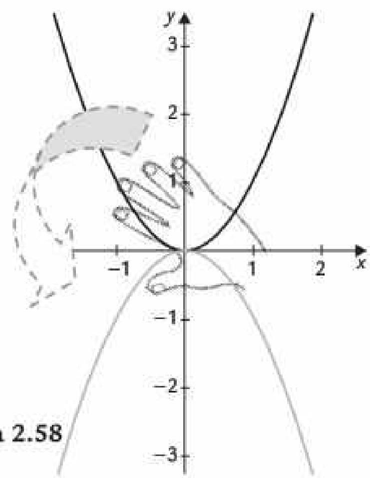
$f(x)=x^2$



Gráfica 2.57

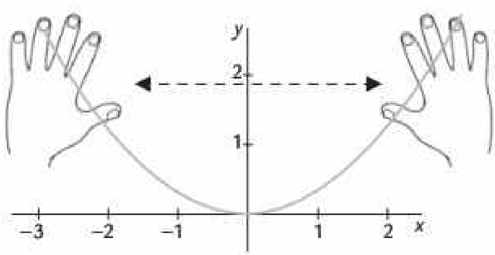
Si agregamos un signo menos (−) la función rotará 180°

$f(x)=-x^2$

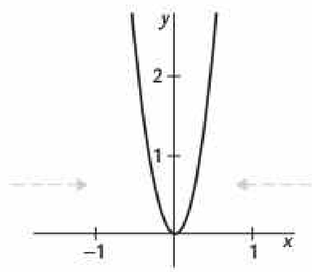


Gráfica 2.58

$f(x)=0.3x^2$



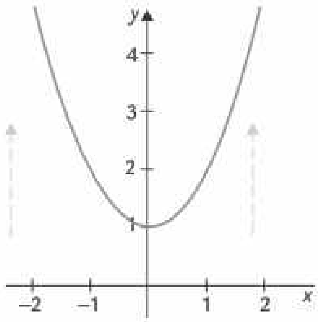
Gráfica 2.59



$f(x)=10x^2$

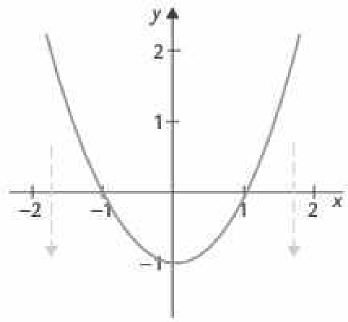
Gráfica 2.60

$f(x) = x^2 + 1$



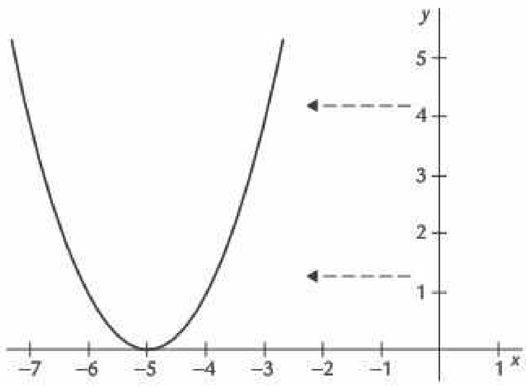
Gráfica 2.61

$f(x) = x^2 - 1$



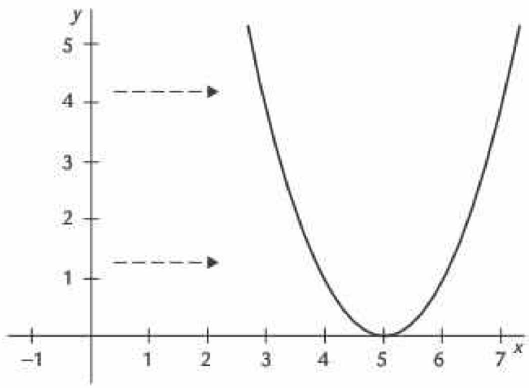
Gráfica 2.62

$f(x) = (x + 5)^2$



Gráfica 2.63

$f(x) = (x - 5)^2$



Gráfica 2.64

Hasta ahora, en este capítulo hemos visto diversos casos de traslaciones y cambios que sufren las funciones, y los efectos de un coeficiente fuera y dentro de una función trigonométrica; de acuedo con ello, ¿podrías deducir los cambios que sufre una función cúbica?, ¿una racional?, ¿una irracional?

ACTIVIDAD DE TRABAJO 2.14

Expresa cómo es la nueva gráfica según la traslación de las funciones originales.

1. $y = (x - 5)^2$
2. $y = -x^3$
3. $y = x^2 - 5$
4. $y = 4x - 3$
5. $y = -2x^2$
6. $y = -\sqrt{x}$
7. $y = -\sec(2x)$
8. $y = -\dfrac{1}{4}x + 5$

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra las siguientes actividades a tu portafolio de evidencias.

6. Mediante el uso de software, realiza las diferentes traslaciones que sufren las funciones representativas.
7. Realiza al menos los ejercicios impares de todas las actividades con el desarrollo completo de las mismas.
8. Presenta solamente los ejercicios impares de la actividad integradora.
9. Elige un problema de la vida real y tradúcelo al tipo de función que lo represente para generar su modelo matemático. Grafica la función y determina su dominio y su imagen. Explica de qué manera embonan las matemáticas en la vida, y cómo a través de ellas se pueden resolver problemas.

¿?

¿Comprendo qué es una función creciente?

¿Soy capaz de explicar los tres tipos de simetría que existen?

¿Soy capaz de reconocer una función periódica?

¿Comprendo qué es la composición de funciones?

¿Comprendo qué elementos determinan el tipo de traslación de las funciones?

¿Soy capaz de explicar qué cambios sufre una línea recta si se le suma una constante?

¿Soy capaz de explicar qué cambios en el espacio sufre una línea recta si se le resta una constante?

¿Comprendo cuándo una parábola es cóncava hacia arriba o hacia abajo?

ACTIVIDAD INTEGRADORA UNIDAD 2

PARTE I

Identifica el nombre, el dominio, la imagen, el vértice y las intersecciones con los ejes de las siguientes funciones.

1. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. $f(x)=\begin{cases} 5\,\text{sen}(x) & |x\geq 0 \\ -5\,\text{sen}(x) & |x<0 \end{cases}$

3. $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x(x+1)}$

4 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{36-x^2} \\ -\sqrt{36-x^2} \end{cases}$

5. $f(x)=x^2-9$

6. $f(x)=\log(5x-3)$

7. $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+5$

8. $f(x)=\dfrac{1}{(4-x^2)}$

9. $f(x)=\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-3$

10. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-16}}$

11. $f(x)=-(X-3)^2-1$

12. $f(x)=x^3+1$

13. $f(x)=\begin{cases}-X^2 & |X\geq 0\\ X^2 & |X<0\end{cases}$ $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

14. $y^2-\dfrac{3}{x+5}=0$

15. $f(x)=\ln(5x-10)$

16. $f(x)=\dfrac{1}{8-2x}$

17. $f(x)=2e^x$

18. $f(x)=\begin{cases}5x+1 & |x\geq 0\\ x+1 & |x<0\end{cases}$

19. $y^2+x-3=0$

20. $f(x)=3\log\left(\frac{1}{x}\right)$

21. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

22. $f(x)=x^2+2$

23. $f(x)=x^2-3x-10$

24. $f(x)=2\,\mathrm{sen}(4x)$

25. $f(x)=\dfrac{1}{2}\tan(2x)$

26. $f(x)=-\cot(2x)$

27. $f(x)=\mathrm{sen}\,(0.6)$

28. $f(x)=\begin{cases}2\csc(x) & |x\geq 0\\ -2\csc(x) & |x<0\end{cases}$

29. $f(x)=4\sec(2x)$

30. $f(x)=-\cot(x)$

31. $f(x)=\tan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

32. $f(x)=\begin{cases}3\cos(x) & |x\geq 0\\ -3\cos(x) & |x<0\end{cases}$

33. $f(x)=2^{x+1}$

34. $f(x)=-10^{2x}$

35. $f(x)=e^{-3x}$

36. $f(x)=\dfrac{1}{2}\log(x-2)$

37. $f(x)=-4\ln(2x+1)$

38. $f(x)=3\log(3-x)$

39. $y+x^2+4x+4=0$

40. $y-x=0$

41. $y^3+\dfrac{2}{x}-3=0$

42. $f(x)=\begin{cases}3 & |x=3\\ \dfrac{1}{x-3} & |x\neq 3\end{cases}$

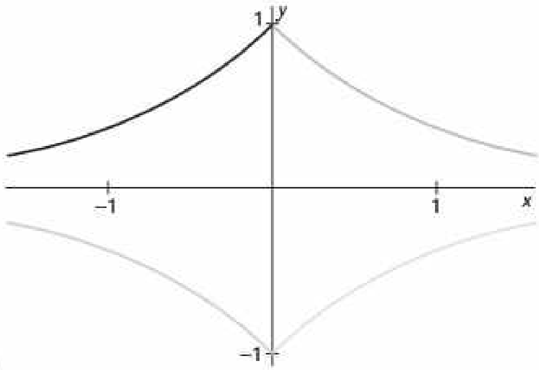
43. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{49-x^2} & |x<0\\ -\sqrt{49-x^2} & |x\geq 0\end{cases}$

44. $f(x)=\begin{cases}x^3 & |x\geq 0\\ -x^3 & |x<0\end{cases}$

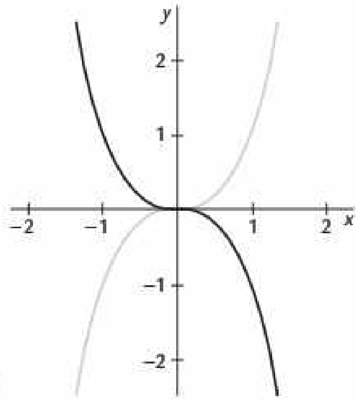
45. $f(x)=\begin{cases}x^2-5x-14 & |-2\leq x\leq 7\\ -x^2+5x+14 & |-2\leq x\leq 7\end{cases}$

PARTE II

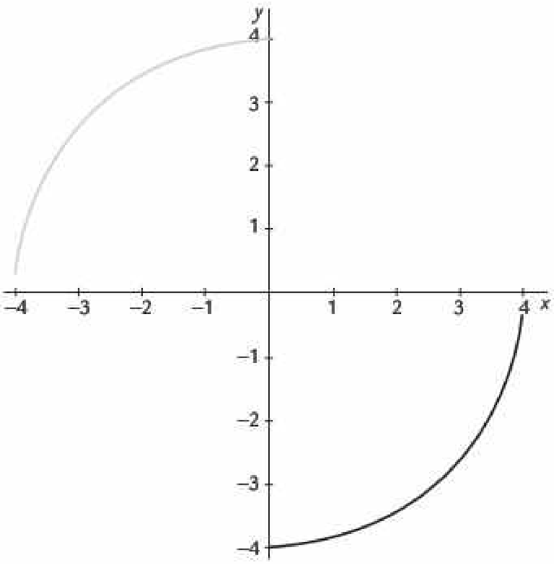
Determina el tipo de simetría de las siguientes gráficas.



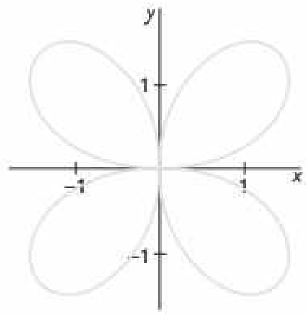
a)



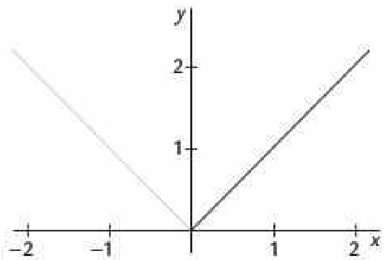
e)



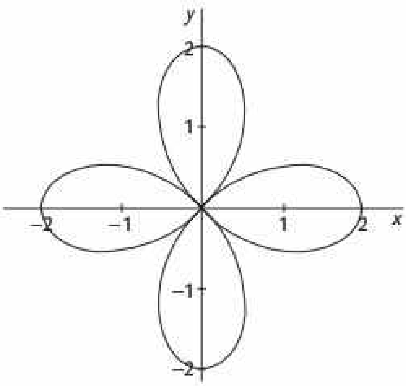
b)



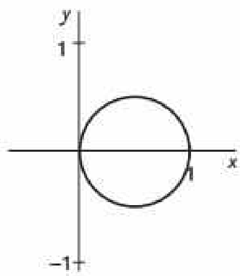
f)



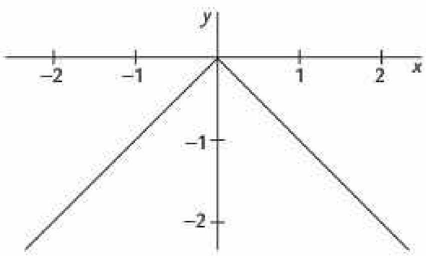
g)



c)



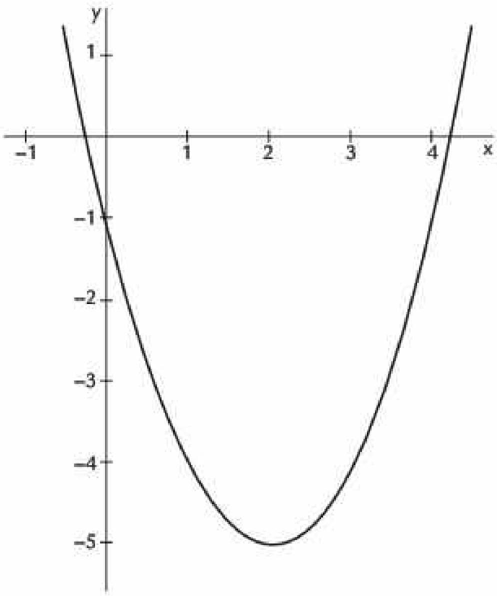
h)



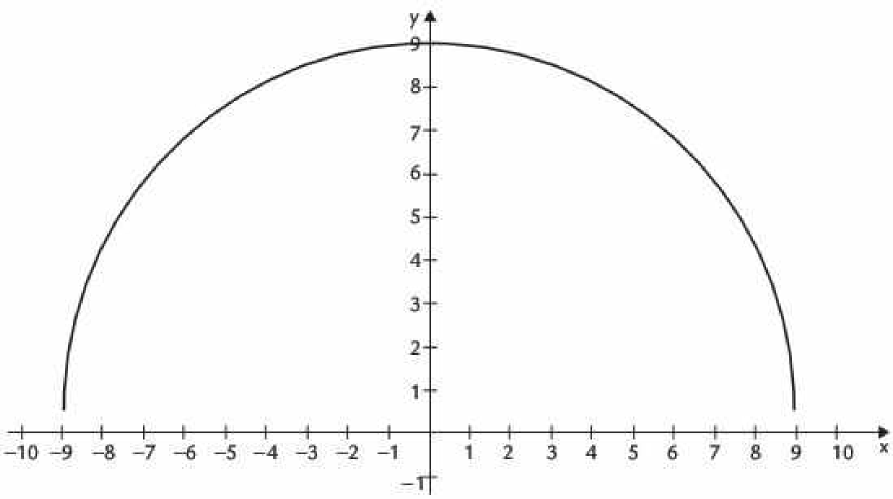
d)

PARTE III

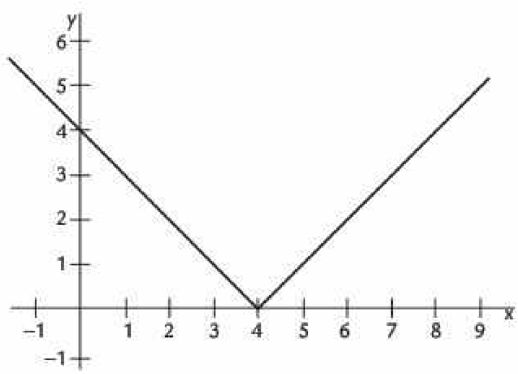
Determina los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.



a)



b)



c)

PARTE IV

Obtén el dominio según las siguientes operaciones de funciones.

1. $f(x) = e^x \circ g(x) = x^2 - 4$
2. $f(x) = \ln(x) \circ g(x) = e^x$
3. $f(x) = \dfrac{2}{x+3} \circ g(x) = \sqrt{x-1} \circ h(x) = \log(5x-10)$
4. $f(x) = x + 2 / g(x) = x^2 - 1$
5. $f(x) = \sqrt{x-1} \circ g(x) = \cos(x)$
6. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-5} \bullet g(x) = \sqrt{x+5}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Problemas de funciones

2.1. Encuentra la función parte por parte, así como el total a pagar, del siguiente recibo de electricidad (luz).

Facturación			
Concepto	**Kwh**	**Precio**	**Total**
1er. Escalón	100	1,969	196.90
2do. Escalón	100	2,379	237.90
Excedente	1,294	2,616	3,385.10
Cargo fijo (2)		46,390	92.78
Suma	1,494		3,912.68

Figura 2.13

2.2. Encuentra dos números enteros positivos cuya suma sea igual a 60 y el producto del cubo del primero por el segundo sea un máximo.

2.3. Encuentra la función correspondiente para conseguir que se formen los arcos de agua en la fuente de la figura 2.14.

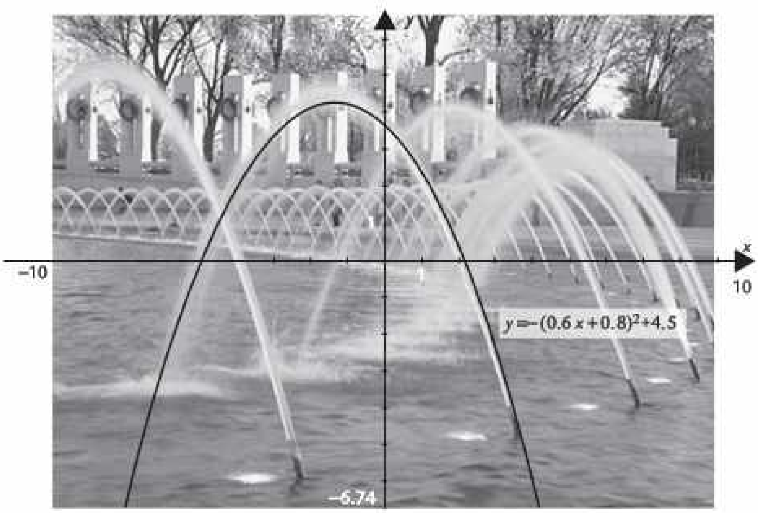


Figura 2.14

2.4. Calcula el área de la superficie de un cubo en función de:

a) Uno de sus lados x.

b) Su volumen V.

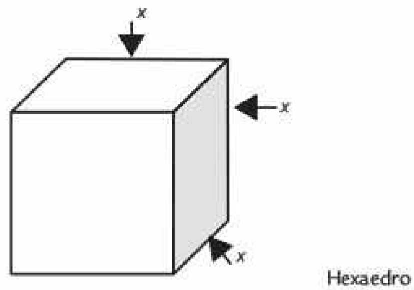


Figura 2.15

2.5. Una caja rectangular de 4 m^3 de volumen tiene base cuadrada. Expresa el área de la superficie de la caja en función de uno de los lados x de su base. La caja rectangular carece de tapa superior, como se ve en la figura 2.16.

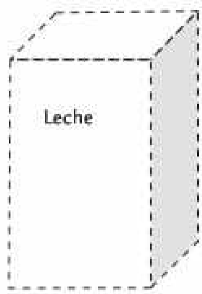


Figura 2.16

2.6. En una maquiladora se desea doblar un tubo de metal de tal manera que se formen un cuadrado y un círculo como los de las figuras 2.17 y 2.18. Exprese la suma de las áreas del cuadrado y del círculo como función de x si el tubo mide 120 cm.

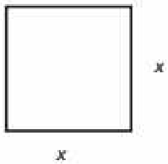
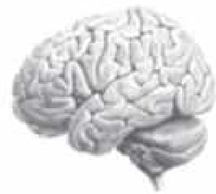


Figura 2.17

Figura 2.18

2.7. Asumamos que el peso de un cerebro humano es directamente proporcional al peso de su cuerpo. Si una persona pesa 120 kg, su cerebro es de aproximadamente 3.5 kg.

a) Encuentra el modelo matemático que exprese el peso aproximado del cerebro como una función del peso de una persona.



b) Determina el peso aproximado del cerebro de una persona si esta persona pesa 70 kg.

2.8. El costo de una llamada desde un teléfono móvil por plan es de \$1.50 los primeros 60 minutos; después del minuto 60 el precio cambia bruscamente a \$4.80 por minuto, y cada mensaje de texto cuesta \$0.80.

a) Encuentra un modelo matemático que exprese el costo de una llamada desde el teléfono móvil.

b) ¿Cuántos minutos habló y cuántos mensajes mandó una persona si la cuenta total fue de \$233.00?

2.9. En cierta ciudad, una pandilla despoja, en menos de 60 minutos, de 108 neumáticos a 34 vehículos, entre automóviles y motocicletas. Encuentra a cuántas motocicletas y a cuantos automóviles le robaron los neumáticos.

2.10. Deduce en cuántos años la capa de ozono se reducirá 75% de su tamaño actual, si se sabe que cada año se pierde 0.25%. Pronostica también en cuántos años sólo quedará 50% de la capa actual.

2.11. Encuentra el valor de la raíz positiva de $x=\sqrt{8+\sqrt{8+\sqrt{8+\sqrt{8+\dots}}}}$

2.12. Encuentra la diferencia de cuadrados que equivalen a los siguientes números al cubo, y crea una regla que permita expresar cualquier cubo como la diferencia de sus cuadrados.

$2^3=$	$9^3=$	$16^3=$
$3^3=$	$10^3=$	$17^3=$
$4^3=$	$11^3=$	$18^3=$
$5^3=$	$12^3=$	$19^3=$
$6^3=$	$13^3=$	$20^3=$
$7^3=$	$14^3=$	$21^3=$
$8^3=$	$15^3=$	$22^3=$

Problemas de geometría

2.13. Encuentra cuántos centímetros debe medir x para que el área total sea igual el área de la región limitada por la línea inclinada que forma el triángulo ABC (figura 2.19).

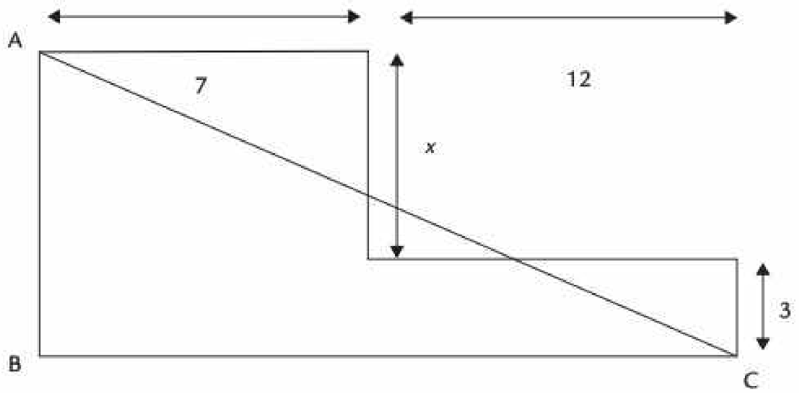


Figura 2.19

2.14. Una escalera de 5 m se encuentra recargada contra una barda de 3 m y toca una pared ubicada a 1.5 m atrás de la barda. ¿Cuál es la distancia del pie de la escalera contra la base de la barda?

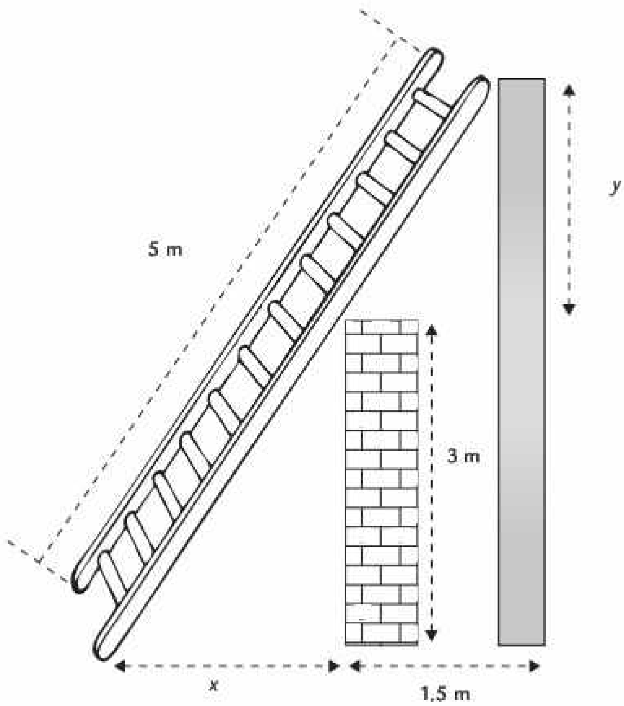


Figura 2.20

2.15. Utiliza las funciones trigonométricas para encontrar la altura de un edificio con los siguientes datos:

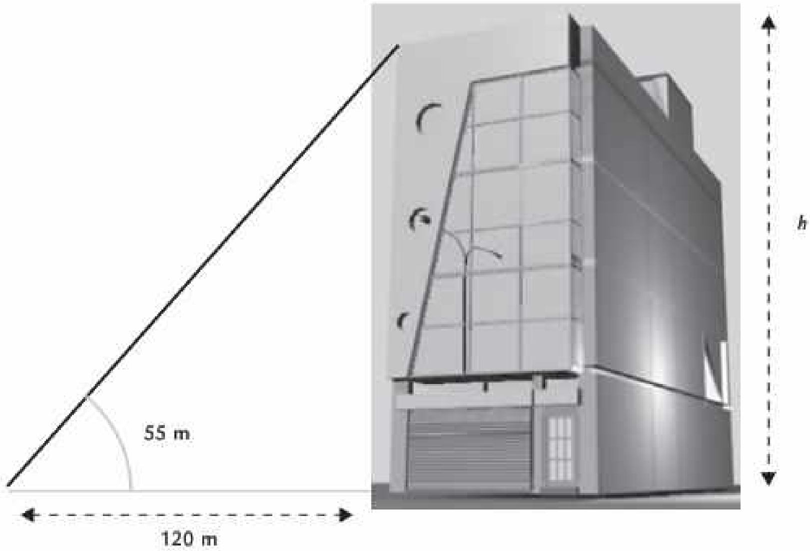


Figura 2.21

Problemas de economía y crecimiento

2.16. Si invierte x pesos al 7% de interés compuesto al año, entonces la cantidad $P(x)$ de la inversión después de un año es $P(x) = 1.07x$.

Encuentra la composición de $P \circ P$, $P \circ P \circ P$, $P \circ P \circ P \circ P$. ¿Qué representa esta composición? Encuentra una fórmula para la composición de n repeticiones de P.

2.17. Una compañía de autobuses tiene el precio, en Semana Santa, de $350.00 a cierto lugar turístico, con un promedio de 170 pasajeros; y en un periodo normal cobra $420.00 con un promedio de 80 pasajeros. Encuentra la ecuación de demanda y grafícala.

2.18. Una compañía vende al mayoreo cierto artículo. Si se ordenan hasta 100 piezas, el precio es de $20 por unidad; pero si son más de 100 piezas el precio es de $17.

a) Encuentra un modelo matemático que exprese el costo total de la orden como una función de la cantidad de piezas ordenadas.

b) Obtén la gráfica de la función.

c) ¿Cuál será el costo de ordenar 300 unidades?

2.19. Una persona invierte $20,000 en una cuenta de banco que paga el 9% de interés compuesto anualmente. Eso significa que la cantidad de dinero se multiplicará por 1.09 al final de cada año; así, la cantidad de la cuenta estará dada por la función exponencial

$$P(t) = 20000 \cdot 1.09^t.$$

Determina el tiempo necesario para que esa persona tenga $550,000 en el banco.

2.20. En una de las mayores cadenas de supermercados, el costo de adquirir cierto televisor es de \$399.99 si se ordenan menos de 200 piezas; sin embargo, si se ordenan más de 200 piezas el costo por televisor disminuye a \$320.

a) Encuentra un modelo matemático que exprese *el costo total de la orden como una función de la cantidad de piezas ordenadas*.

b) Obtén la gráfica de la función.

2.21. La familia de José decide comprar un automóvil compacto de \$150,000. José, que estudia administración, sabe que el valor presente de una anualidad consiste en n pagos iguales de R pesos, que generan una tasa de interés por periodo, y que está dado por la siguiente fórmula

$$VP = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

¿Cuáles serán los pagos que habrá determinado José si hubo un pago inicial de \$40,000, con una tasa de interés anual de 3% a un plazo de 5 años?

2.22. Juan decide hacer una inversión en el banco nacional, por lo que realiza un pago de \$2,500 y sabe, porque estudia administración, que tiene un interés de 6.8% de interés compuesto anual cada trimestre. Según los apuntes de José, la fórmula para el valor futuro de una anualidad es ligeramente diferente de la del valor presente y está dada por la fórmula

$$VF = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

¿Cuál será el valor de la inversión de Juan en 5 años?

2.23. Calcula el tiempo necesario para que la población de osos Panda en cierta región de China llegue a 500 ejemplares si tiene una población inicial de 180 osos, y el crecimiento está dado por

$$P(t) = \frac{100,000}{180+950e^{-t}}$$

2.24. Determina el tiempo t en años en que determinada ciudad tendrá 1 millón de habitantes, suponiendo que el crecimiento es exponencial y se tienen los siguientes datos:

Año	Población
2000	609,829
2010	701,838

2.25. Un secreto nacional se expande a 12,000 personas. La rapidez con que se expande el escándalo es directamente proporcional a las personas que lo han oído por el número de personas que no lo saben. Si 50 personas conocen el secreto, éste viajará con una velocidad de 350 personas por hora.

a) Encuentra una función que exprese la rapidez con que se esparce el secreto en relación con el número de personas que lo han escuchado.

b) ¿Qué tan rápido circula el rumor cuando lo han escuchado 600 personas?

c) Grafica la función.

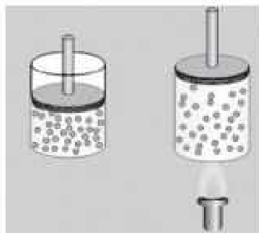
2.26. En 1980 el censo de México estimó que había 67.5 millones de habitantes y que el crecimiento era a una tasa anual de 2.6%. Si se estimaba que la población continuaría creciendo a esa tasa, ¿cuál era la población estimada en México para 2010 si el crecimiento está dado por $P(t)=64.7(1.026)^t$? Compara tu resultado con los datos del censo de 2010.

Problemas de termodinámica

2.27. El volumen de un gas a presión constante es directamente proporcional a la temperatura absoluta. A 190° el gas ocupa un volumen de 120 m^3.

a) Encuentra el modelo matemático que exprese el volumen como función de la temperatura.

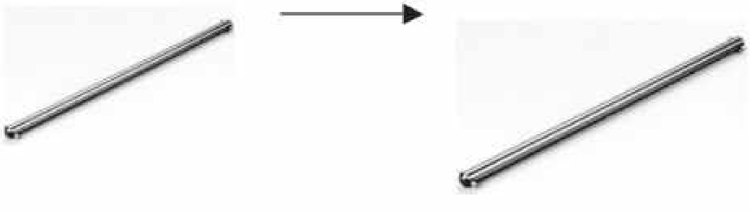
b) ¿Cuál es el volumen del gas a una temperatura de 240°?



2.28. De acuerdo con la ley de Boyle, la presión $p(\text{lb/in}^2)$ y el volumen $V(\text{in}^3)$ de cierto gas satisfacen la condición $pV=900$. ¿Cuál es el recorrido de valores posibles de p, dado que $250 \le V \le 450$?

2.29. Las piezas utilizadas en el giro aeroespacial deben tener una alta tolerancia a los grandes cambios de temperatura. Si una barra de aluminio utilizada en un avión militar tiene un largo de 25 cm a 32 °C y se sabe que los metales se dilatan a mayor temperatura, ¿cuál será la longitud de la barra cuando la temperatura generada por las turbinas sea de 150 °C, si la longitud de la barra está dada por la siguiente fórmula?

$$l=25+(t_f-t_0)\times 10^{-4}$$



2.30. La ley de Boyle establece que el volumen y la presión son inversamente proporcionales a temperatura constante. A 17 lb/in^2 el volumen de un gas es de 800 in^3. Si tenemos un volumen de 1,500 in^3, ¿cuál será la presión del gas en ese momento si la temperatura permanece constante?

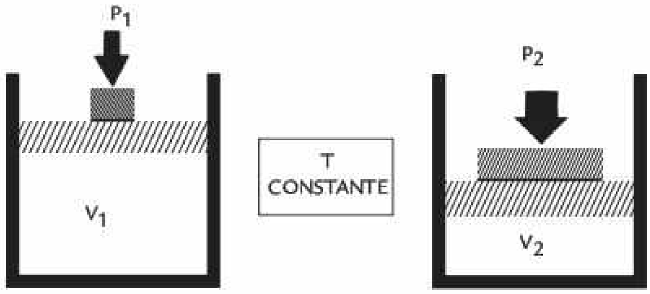


Figura 2.22

Problemas de física

2.31. Las ecuaciones para la caída libre en la superficie de Marte y Júpiter son $g = 1.86t^2$ y $g = 11.44t^2$ respectivamente. ¿Cuánto tardará una roca en caer desde el reposo para alcanzar una velocidad de 47.9 m/s?

2.32. Unos astronautas usaron como experimento el lanzamiento de una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 23 m/s. Se desconoce la gravedad del planeta, pero los exploradores esperaban que la pelota alcanzara una altura de $s = 25t - \frac{1}{2}gt^2$ metros.

Después de t segundos la pelota alcanzó una altura máxima a los 30 segundos de ser lanzada. ¿Podrías determinar el valor de la gravedad del planeta en que se encuentran?

2.32. La misma pelota es lanzada en el mismo planeta con una velocidad inicial de 37 m/s; entonces su altura máxima después de t segundos está dada por

$$y = 38t - 4t^2$$

¿Cuáles serán el tiempo y la altura máxima de la pelota lanzada en este nuevo planeta?

Problemas industriales

2.33. ¿Cuánto ácido deberá agregarse a 80 ml de una solución al 20% para que resulte una mezcla ácida al 60%?

2.34. Se sabe que la leche es un antiácido de acción leve aunque causa efecto de rebote por el calcio. Si una persona tiene gastritis y se sabe que el ácido gástrico tiene un pH entre 1 y 2, y la leche es casi neutra con un pH entre 6.6 y 6.8, calcule las diferencias de concentraciones del ion hidrógeno y cuántas veces es mayor la concentración de iones de hidrógeno del ácido gástrico que el de la leche.

2.35. La intensidad de un terremoto está determinada por la fórmula

$$R = \log\left(\frac{a}{T}\right) + B$$

donde R corresponde a la escala de Richter, a es la amplitud del terremoto, T es el periodo de la onda sísmica asociada en segundos, y B toma en cuenta el debilitamiento de la onda sísmica con el aumento de la distancia con respecto al centro del terremoto. Determina la diferencia entre el terremoto de México de 1985 que fue de 8.1 en la escala de Richter y el de Japón del 2011 con una magnitud de 9 grados en la escala de Richter.

2.36. La intensidad del sonido se mide en decibeles, el umbral de la audición humana es de 10^{-12} W/m^2 y la fórmula de la intensidad del sonido es

$$\beta = 10\log\left(I/I_0\right)$$

donde I_0 es el umbral de la audición humana, e I es la intensidad del sonido de otro lugar. Tomando como punto de partida los datos de la siguiente tabla, determina lo siguiente:

a) ¿En qué lugar está una persona cuando hay 150 decibeles?

b) La diferencia del umbral del sonido entre los perros y los humanos.

c) ¿Cuántos decibeles provoca un concierto de rock?

Sonido	Intensidad W/m^2
Umbral de la audición humana	10^{-12}
Susurro a 5 m	10^{-11}
Tráfico de una ciudad	10^{-5}
Despegue de un avión	10^{3}
Sonido del elefante	10^{-1}
Umbral del dolor	10^{0}
Umbral de audición del perro	10^{-5}
Concierto de rock	10^{-1}
Susurro de las hojas de los árboles	10^{-11}
Radio funcionando normal en la casa	10^{-8}
Automóvil en marcha moderada	10^{-7}

Conversación ordinaria	3.16^{-5}
Tren en movimiento	10^{-3}
Máquina remachadora	0.0316

Fuentes:
http://www.cubasolar.cu/biblioteca/energia/Energia18/HTML/articulo06.htm
http://www.lsu.edu/deafness/HearingRange.html

AUTOEVALUACIÓN

PARTE I

Identifica nombre, dominio, imagen, vértice e intersecciones con los ejes de las siguientes funciones.

1. $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{25-x^2}}$

2. $f(x)=6^{3x}$

3. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+3}{\sqrt{x+5}}\right)$

4. $y^2-\dfrac{3}{X+5}=0$

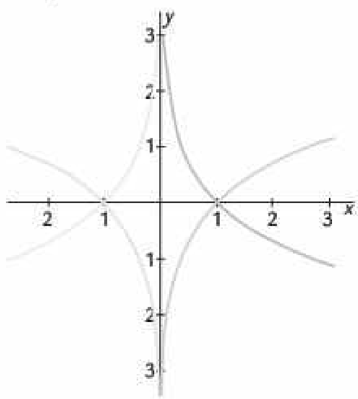
5. $f(x)=\begin{cases}\sec(x) & |x\geq 0\\ -\sec(x) & |x\geq 0\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}e^{x} & |x<0\\ -e^{x} & |x<0\\ e^{-x} & |x>0\\ -e^{-x} & |x>0\end{cases}$

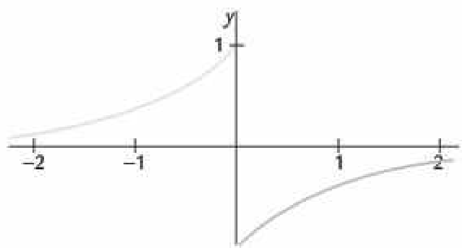
PARTE II

Determina el tipo de simetría de las siguientes gráficas.

1.

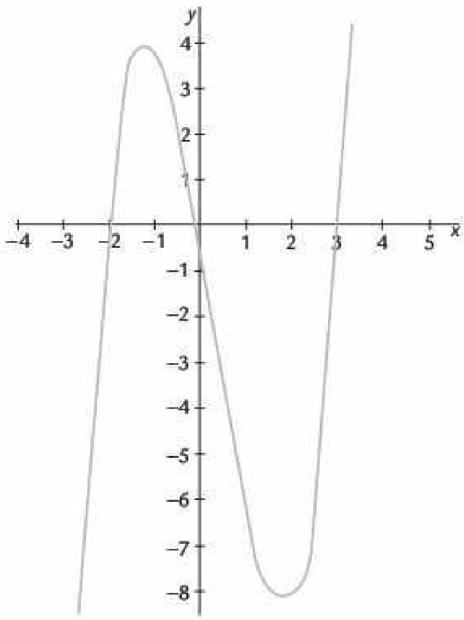


2.



PARTE III

Determina los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.



PARTE IV

Obtén el dominio según las siguientes operaciones de funciones.

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{25-x^2}{x^2-16}} \circ g(x)=x-7$
2. $f(x)=\csc(x)/g(x)=\sec(x)$
3. $f(x)=e^x \bullet g(x)=e^x$

LÍMITES Y CONTINUIDAD

3

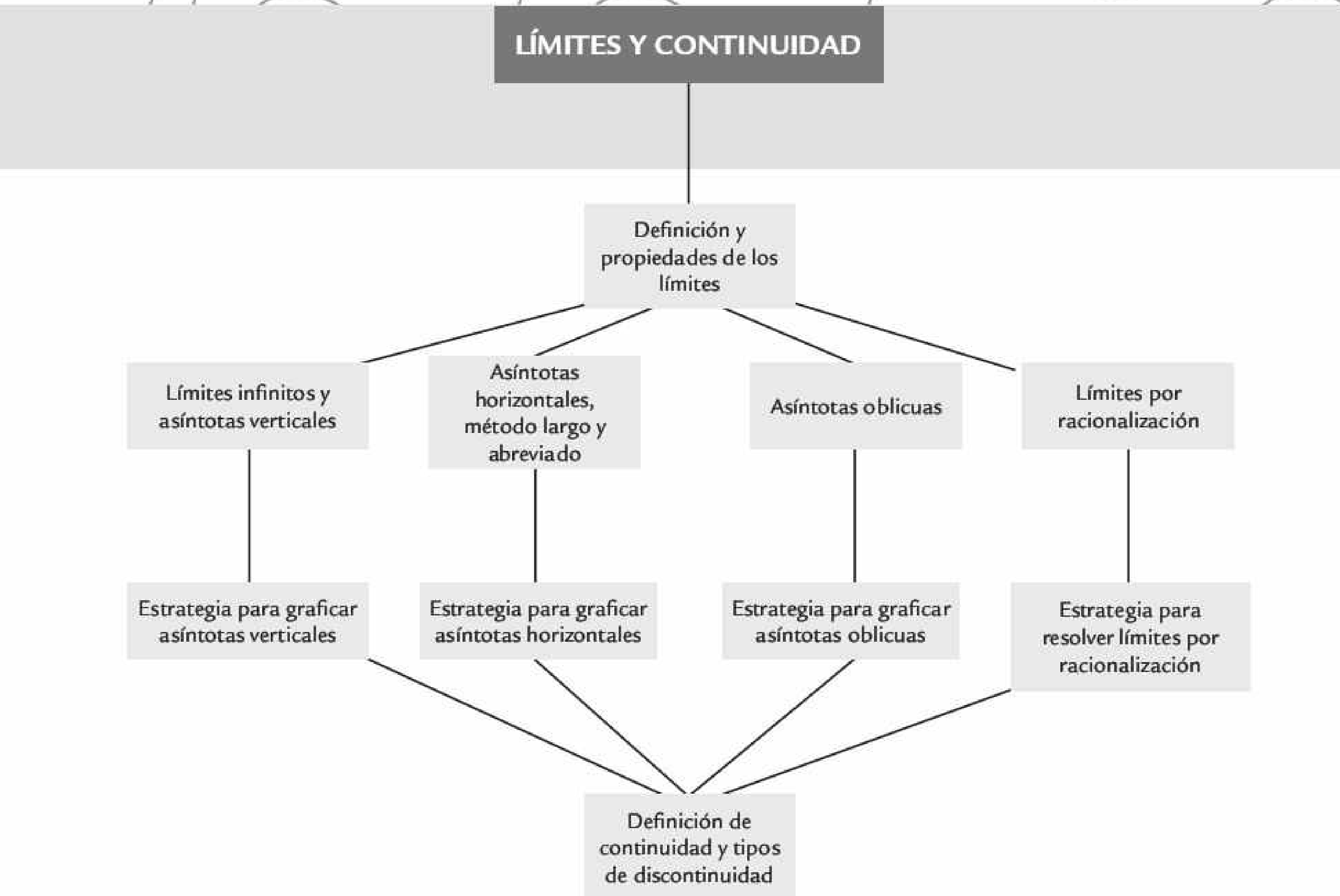
LÍMITES Y CONTINUIDAD

En este capítulo aprenderemos a obtener el límite de las funciones y, sobre todo, cómo graficar cualquier función racional mediante las estrategias propuestas, únicas y desarrolladas para este libro. Finalizaremos el tema con la continuidad de las funciones y de sus gráficas.

COMPETENCIAS POR DESARROLLAR

COMPETENCIAS	ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	HABILIDADES Y ACTITUDES
Comprender el concepto de límite de funciones y aplicarlo para determinar analíticamente la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, y mostrar gráficamente los diferentes tipos de discontinuidad.	Calcular "de manera práctica" el límite de una función (sustituyendo directamente el valor al que tiende la variable).	El alumno desarrollará la habilidad para identificar los diferentes tipos de límites.
Comprender los diferentes tipos de casos en que se presentan los límites.	Calcular el límite de una función utilizando las propiedades básicas de los límites.	El alumno tendrá la capacidad para bosquejar con las estrategias propuestas los diferentes tipos de límites.
Comprender los casos en los que una función presenta racionalización.	Plantear una función que requiere para el cálculo de un límite el uso de límites laterales.	El alumno tendrá la capacidad de utilizar sus habilidades algebraicas para resolver los casos de límites en los que se presente racionalización.
Comprender los diferentes tipos de discontinuidades.	Identificar límites infinitos y límites al infinito.	El alumno podrá resolver las funciones discontinuas para hacerlas continuas y graficarlas.
Explicar y resolver problemas que involucren el manejo de los límites.	Reconocer, a través del cálculo de límites, cuándo una función tiene asíntotas verticales y cuándo asíntotas horizontales.	
	Utilizar las estrategias propuestas para bosquejar los límites.	
	Plantear funciones donde se muestren analítica y gráficamente diferentes tipos de discontinuidad.	

ORGANIZADOR GRÁFICO



ANTECEDENTES

El origen de los límites se remonta hasta los antiguos griegos, que usaban los límites para calcular áreas; por ejemplo, si querían conocer el área de figuras amorfas las descomponían en triángulos muy pequeños, de modo que los triángulos ocuparan la totalidad de la figura. Luego sumaban el área individual de cada triángulo para tener una aproximación del área total de la figura; es decir, cuando el límite de los triángulos abarcara la totalidad de la figura.

Los límites se usan de manera cotidiana y son, de hecho, los que nos rigen y hacen posible que nuestra sociedad no sea anarquista; por ejemplo, la prueba de alcoholemia nos dice si una persona está capacitada en ese momento para operar un vehículo automotor, ya que mide la cantidad de alcohol por cada litro de sangre. Esta situación se determina mediante una medición y se compara con un estándar que establece que el límite permitido no se puede rebasar o habrá consecuencias graves. El individuo cree estar bien; sin embargo, si se rebasan los límites establecidos la persona pierde el sentido del equilibrio, y por lo tanto de la realidad, lo que lo convierte en un potencial peligro para sí mismo, para los que viajan con él y para los demás conductores.

Otro ejemplo es la *Ley de la Secretaría del Trabajo y Previsión Social*, que enuncia en cada artículo los deberes y obligaciones tanto de los patrones como de los obreros; establece límites para que cada uno se conduzca dentro de la misma empresa con la mejor disponibilidad para lograr un bien común. Si cualquiera de ellos se sale de esta normatividad hay consecuencias indeseables, como las huelgas, las declaraciones de quiebra, o serios accidentes que pueden costar hasta la vida. Inclusive, en el hogar, los padres imponen límites que no se deben pasar, pues de ello depende la armonía y las relaciones intrafamiliares. Los límites se utilizan a diario en la producción, ya que para generar bienes y servicios se cuenta con recursos que las más de las veces no son ilimitados; es decir, se tiene determinada cantidad de ellos, y esos recursos se deben aprovechar lo mejor posible para que la productividad de la empresa se incremente; de lo contrario, la empresa no obtiene ganancias y podría ir a la quiebra.

Sin embargo, a veces se pasan por alto todas estas situaciones y no se le encuentra utilidad a los límites.

Matemáticamente, un límite es importante porque nos ayuda a entender la tendencia de una función, y las funciones nos ayudan a entender cómo se comportan los fenómenos de la vida cotidiana o empresarial para estudiarlos de una manera más sencilla; veamos un ejemplo.

Se sabe que el precio de un disco duro a través del tiempo t (en meses) está dado por la función:

$$P(t) = \frac{at + 250}{t + b}$$

Si sabemos que el próximo mes el precio de este artículo será de $1,400.00 y al siguiente será de $1,250.00; determina:

a) El precio del artículo para este mes.

b) En qué mes el precio será de $800.00.

c) Qué ocurrirá con el precio a lo largo de 28 meses.

d) Qué ocurrirá con el precio a través del tiempo.

Esto se puede resolver con ayuda de los límites y otros conocimientos de álgebra.

La parte más interesante es cuando queremos contestar los incisos *c* y *d*, cuyas expresiones matemáticas quedan de la siguiente manera:

c) $\lim\limits_{t \to 28} P(t) = \dfrac{at + 250}{t + b}$

d) $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = \dfrac{at + 250}{t + b}$

A veces no es fácil entender el concepto de *límite matemático*; sin embargo, lo que hemos visto hasta aquí contribuye a que este concepto sea más claro. Desde luego, debemos introducirnos en el mundo de los límites matemáticos para poder entenderlos.

En la vida real el conocimiento de los límites tiene una gran relevancia, ya que nos ayuda a definir conceptos fundamentales como la continuidad, la velocidad instantánea, las tasas de cambio, así como el comportamiento exacto o muy aproximado de una función bajo condiciones determinadas y, por supuesto, también nos facilita comprender otros conceptos matemáticos importantes para la vida como la derivación, la integración y las sumas, entre otras herramientas matemáticas de gran aplicación.

Por lo anterior, conocer más de los límites matemáticos es importante para entender fenómenos que se pueden modelar con una función, y tomar decisiones con respecto a los datos arrojados por la aplicación de los límites.

3.1 Definición de límite

Un límite se denota como los valores de una función (hacia donde se dirige y) cuando x se aproxima a cierto número; en otras palabras, el par ordenado que le correspondería a y cuando x adopta un valor.

EJEMPLO

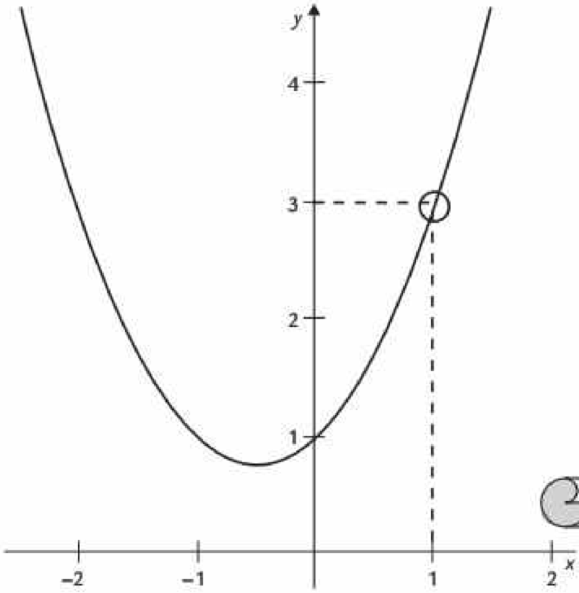
Se pide dibujar la gráfica de la función $f(x)$ dada por

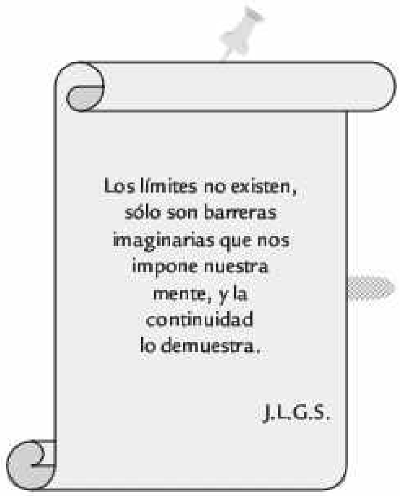
$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1} \text{ con } x \neq 1$$

Para todos los valores distintos de 1 es posible emplear las técnicas usuales para graficar, pero cuando $x = 1$ no sabemos qué esperar (note que cuando $x = 1$ se indetermina la función), y para esto usamos dos conjuntos de valores de x: uno que se aproxime por la derecha y otro que se aproxime por la izquierda (tabla 3.1).

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.3125	2.7100	2.9701	2.9970	?	3.0030	3.0301	3.3100	3.8125

En esta tabulación podemos apreciar que la función, es decir y, *se acerca al valor de 3 si el dominio de* x *se acerca tanto como se quiera a 1.*





Gráfica 3.1

La gráfica de esta ecuación (gráfica 3.1) resulta ser una parábola con un hueco en el punto (1,3); por lo que decimos que **cuando x tiende a 1, $f(x)$ se aproxima a 3.**

Definición formal de límite

Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a c, entonces el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Existen tres métodos, que estudiaremos más adelante, para hallar el límite de una función:

1. Método numérico (tabla de valores).
2. Método gráfico.
3. Método analítico (álgebra o cálculo).

3.2 Propiedades de los límites y límites especiales

Los límites también tienen propiedades que nos permiten determinar el comportamiento de las funciones y operar con ellos de una manera más sencilla.

1. *Propiedad de la función constante.* El límite de una constante es igual al valor de la constante.

   $\lim_{x \to c} b = b$ donde b es una constante.

Ejemplo: $\lim_{x \to 4} 3 = 3$

2. *Propiedad de la identidad.* El límite de una función identidad que se acerca a c, es c.

$$\lim_{x \to c} x = c$$

Ejemplo: $\lim_{x \to 4} x = 4$

3. *Propiedad de la función potencia.* El límite de una variable elevada a un exponente cuando x se acerca a c, es c elevada al exponente.

$$\lim_{x \to c} x^n = c^n$$

Ejemplo: $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$

Teorema

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que los límites $\lim_{x \to c} f(x)$ y $\lim_{x \to c} g(x)$ existen y son $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = K$, entonces:

1. $\lim_{x \to c} \left[bf(x) \right] = b \lim_{x \to c} f(x) = bL$ — Propiedad del factor constante

2. $\lim_{x \to c} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x) = L \pm K$ — Propiedad de la suma y propiedad de la diferencia

3. $\lim_{x \to c} \left[f(x) g(x) \right] = \lim_{x \to c} f(x) \lim_{x \to c} g(x) = LK$ — Propiedad del producto

4. $\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \frac{L}{K}$ si $K \neq 0$ — Propiedad del cociente

5. Si n es un entero positivo, entonces

$\lim_{x \to c} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x) \right]^n = L^n$ — Propiedad de la potencia

6. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ — Propiedad de la raíz

La propiedad 6 es válida si n es impar. Si n es par, se puede garantizar sólo si $\lim_{x \to c} f(x) > 0$.

Tabla 3.1 Límites trigonométricos.

Límites de funciones trigonométricas	
Funciones trigonométricas	**Límites trigonométricos especiales**
$\lim\limits_{x \to c} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(c)$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x \to c} \cos(x) = \cos(c)$	
$\lim\limits_{x \to c} \tan(x) = \tan(c)$	
$\lim\limits_{x \to c} \cot(x) = \cot(c)$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to c} \sec(x) = \sec(c)$	
$\lim\limits_{x \to c} \csc(x) = \csc(c)$	

ACTIVIDAD DE TRABAJO 3.1

I. Debate sobre qué significa el límite de una función. Encuentra los siguientes límites unilaterales.

II. Con base en las propiedades de los límites, resuelve los siguientes ejercicios.

1. $\lim\limits_{x \to 0} 5$
2. $\lim\limits_{x \to -7} x$
3. $\lim\limits_{x \to 2} x^4$
4. $\lim\limits_{x \to -4} 3x$
5. $\lim\limits_{x \to 1} \left[3x + 2x^2\right]$
6. $\lim\limits_{x \to 2} \left[x\left(x^2 - 1\right)\right]$
7. $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x-2}{x}\right)$
8. $\lim\limits_{x \to 0.5} \operatorname{sen}(x)$
9. $\lim\limits_{x \to \frac{3}{4}} \tan(x)$

¿?

¿Comprendí el concepto de límite?

¿Soy capaz de definir qué es un límite?

¿Soy capaz de usar cualquiera de los tres métodos para hallar un límite?

¿Dónde puedo aplicar los límites en la vida real?

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra las siguientes actividades a tu portafolio de evidencias.

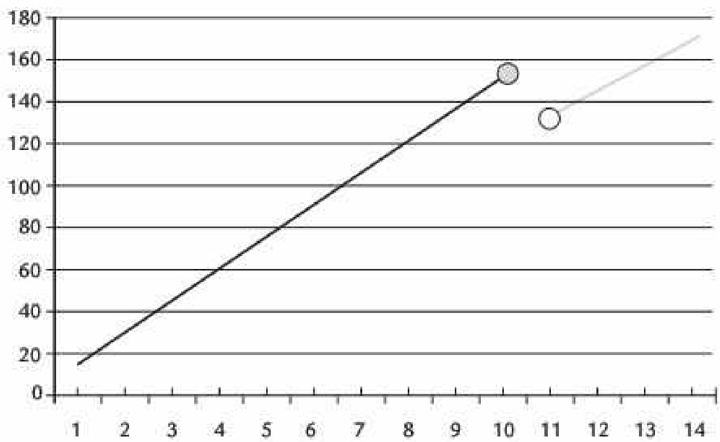
1. Explica el concepto de límite.
2. Investiga y describe tres actividades industriales en las que se aplican los límites.
3. Elabora fichas de trabajo con las propiedades y teorema de las propiedades de los límites, a fin de tenerlos a la mano para trabajar de una manera más sencilla.
4. Resuelve los ejercicios de la actividad 3.1.

3.3 Límites laterales y unilaterales

Supongamos que un comerciante vende jabón líquido a granel. Si le solicitan menos de 10 litros, cobra \$15.00 por cada litro; sin embargo, para promover pedidos cuantiosos, cobra \$12.00 por litro si llevan más de 10 litros. Así, si se compran x litros del producto y $C(x)$ es la función del costo total del pedido, entonces:

$$C(x)=\begin{cases}15x & \text{si} \quad 0<x\leq 10\\ 12x & \text{si} \quad x>10\end{cases}$$

Al graficar nos damos cuenta que existe una variación después del punto 10. Debido a esta situación es necesario que al considerar el límite se tomen valores menores que 10, pero muy cercanos, y después de 10. Es decir, el límite debe tomarse por la derecha y por la izquierda de 10, lo que significa que debemos tomar límites laterales.



Gráfica 3.2 *Gráfica de la función C(x).*

Escribimos entonces $lím_{x\to 10^-} C(x)$ y $lím_{x\to 10^+} C(x)$.

Esta nomenclatura debe ser clara, por lo que debemos conocer lo básico sobre límites.

Límites unilaterales

Los límites unilaterales indican que la función se aproxima a un determinado valor a medida que x se aproxima a c por la derecha o por la izquierda. Debido a las restricciones del dominio, una función puede tener límites unilaterales, como en el caso de la función raíz.

Límites laterales

Para que el límite exista, tanto el límite por la izquierda como el límite por la derecha deben ser iguales; en otras palabras, cuando el límite por la izquierda y por la derecha son diferentes, el límite no existe.

a) El límite por la derecha significa que x se aproxima a c tomando valores superiores cada vez más cercanos a c, y se denota por $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$.

b) El límite por la izquierda significa que x se aproxima a c tomando valores inferiores cada vez más cercanos a c, y se denota por $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$.

Este tipo de límite es útil para encontrar la continuidad de una función; asimismo, también sirve para calcular el límite de funciones que contienen raíces.

EJEMPLO

$$\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x-2}=0$$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{x-2}$ no existe porque para valores menores que 2 la función se indefine.

Por lo tanto, el límite de $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x-2}$ no existe.

Por último, los límites laterales pueden usarse para investigar el comportamiento de una función escalón o definida parte por parte.

Teorema de la existencia del límite

Si f es una función y c y L son números reales, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L si y sólo si

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=L=\lim_{x\to c^-} f(x)$$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 3.2

Encuentra los siguientes límites unilaterales.

1. $\lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{x-3}$
2. $\lim\limits_{x\to -2^-} x+6$
3. $\lim\limits_{x\to 0^-} x^3$
4. $\lim\limits_{x\to 2^+} \begin{cases} -x^2 & |x<0 \\ x^2 & |x\geq 0 \end{cases}$
5. $\lim\limits_{x\to -4^-} \sqrt{x+4}$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \begin{cases} x+1 & |x<0 \\ -x+5 & |\geq 0 \end{cases}$

¿?

¿Comprendo qué es un límite unilateral?

¿Soy capaz de calcular un límite por la derecha y un límite por la izquierda?

¿Comprendo cómo determinar si existe el límite de una función?

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra las siguientes actividades a tu portafolio de evidencias.

5. Resuelve los límites propuestos en la actividad 3.2.
6. Realiza un resumen breve sobre límites unilaterales.

3.4 Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas

Límites infinitos y asíntotas verticales

En la sección *Antecedentes* de este capítulo se plantea como ejemplo un problema de límites con la siguiente notación:

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \frac{at + 250}{t + b}$$

Esta notación es básica y muy común en los límites. En el ejemplo este límite define el comportamiento de la función del precio a través del tiempo. Se podría pensar que si el precio de un producto baja mes con mes, llegará un momento en que éste sea prácticamente nulo; sin embargo, con el análisis de los límites podemos percatarnos de que el precio se va a estabilizar en un determinado valor y, por tanto, se tendrá un precio mínimo a través del tiempo.

Otra aplicación de este tipo de límites es cuando se estudia cómo crece o decrece la población de alguna especie con el fin de predecir su situación a través del tiempo, para, con ello, tomar acciones que prevengan su extinción o sobrepoblación y así evitar que más tarde afecte a todo el ecosistema.

Límites infinitos

Los límites infinitos son aquellos en los que $f(x)$ crece o decrece sin límite cuando x se aproxima a c; y se definen como:

Sea $f(x)$ una función definida en todo número real de un intervalo abierto que contiene a c, excepto en la propia c; entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

Que el $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ o el $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ no significa que el límite existe; de hecho es todo lo contrario, indica la razón de su no existencia al denotar el comportamiento no acotado o no limitado de $f(x)$ cuando x se aproxima a c.

Los límites infinitos están relacionados con las asíntotas de una función.

Las asíntotas son la representación gráfica en forma de línea punteada de la ausencia de valores de una función cuando x se aproxima a un valor c. Es como si la línea punteada representara un "agujero negro" donde la continuidad de la gráfica se ve interrumpida y no cruza jamás dicha sección.

Asíntota vertical

Si $f(x)$ tiende al infinito cuando x tiende a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

NOTA: Como dato curioso, se dice que, en términos matemáticos, una asíntota es la mejor representación del amor platónico.

Teorema

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones en un intervalo que contiene a c, tal que $f(c) \neq 0$ y $g(c) = 0$, entonces la gráfica de la función: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene una asíntota vertical en $x = c$.

EJEMPLO

En la función $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ tenemos una asíntota vertical en $x = 3$ cuyos límites unilaterales son los siguientes: $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = -\infty$.

Para determinar si $f(x)$ se aproxima al ∞ o $-\infty$, hacemos una tabulación y, contrario a lo que proponen otros textos, el método que se sugiere sólo necesita dos puntos que muestren el cambio de signo. Tradicionalmente la tabulación se realiza acercándose lentamente al valor para el cual se desea observar el comportamiento de la función. Resulta más fácil usar ese valor de pivote para tabular y graficar la función para determinar el límite sin necesidad de acercarse lentamente. Un ejemplo de una tabulación y la gráfica de una función con sus límites y asíntotas se muestra en la gráfica 3.3.

Propiedades de límites infinitos

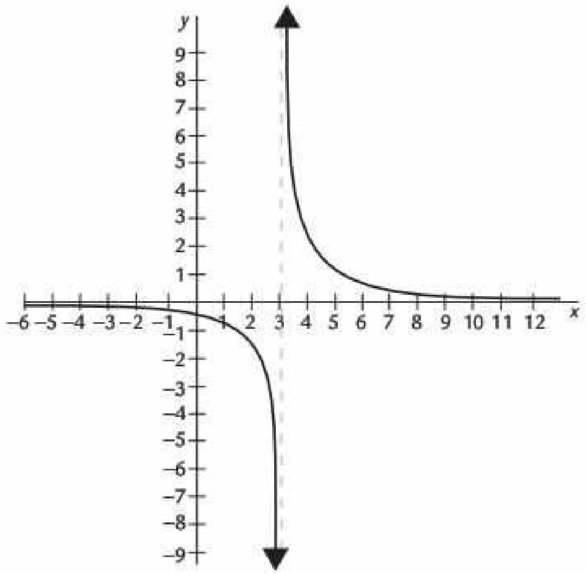
Sean c y L números reales, y $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = L$$

Entonces:

1. $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \infty$ Propiedad de la suma y propiedad de la diferencia
2. $\lim\limits_{x\to c}\left[k\,f(x)\right] = \infty$ si $k > 0$, y $\lim\limits_{x\to c}\left[k\,f(x)\right] = -\infty$ si $k < 0$ Propiedad del múltiplo escalar
3. $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)g(x)\right] = \infty$ si $L > 0$, y $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)g(x)\right] = -\infty$ si $L < 0$ Propiedad del producto
4. $\lim\limits_{x\to c}\left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right] = 0$ Propiedad del cociente

x	−1.000	0.000	2.000	2.500	2.900	3.000	3.100	3.500	4.000	5.000	6.000	7.000
$f(x)$	−0.250	−0.333	−1.000	−2.000	−10.000	?	10.000	2.000	1.000	0.500	0.333	0.250



Gráfica 3.3 *Asíntota vertical.*

Estrategia para graficar funciones racionales y sus asíntotas verticales

Graficar funciones racionales y sus asíntotas puede resultar una labor muy sencilla si conocemos o podemos predecir el comportamiento de la función cerca de las asíntotas, de tal manera que las asíntotas nos faciliten el dibujo al servir como "pivotes" para graficar nuestra función.

1. El primer paso para bosquejar funciones es identificar las asíntotas y colocarlas en nuestro sistema de coordenadas.
2. Después de identificar las asíntotas, por cada una de ellas buscaremos dos puntos: uno por la derecha y otro por la izquierda del límite. Si la función tiene dos asíntotas, buscaremos cuatro puntos: siempre uno por la derecha y uno por la izquierda de cada asíntota, y así sucesivamente hasta cuatro.
3. Por último, con los valores a la izquierda y a la derecha del límite observamos el cambio del signo: si el signo es positivo (+) la función tiende a $+\infty$; si el signo es negativo (−) la función tiende a $-\infty$.

EJEMPLO

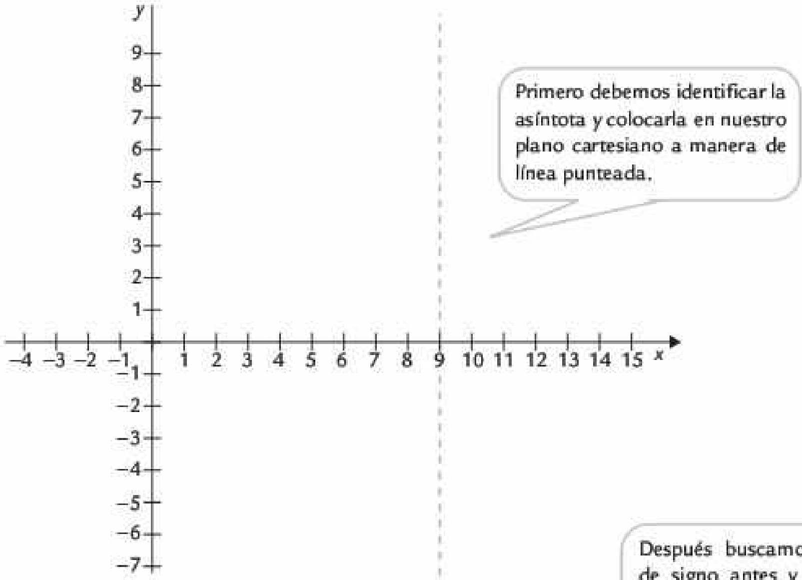
$$f(x)=\frac{4}{9-x}$$

Observamos que la función tiene una asíntota en $x=9$ ya que 9 hace 0 al denominador.

Como lo que nos importa es el cambio de signo, asignamos un número entero fácil de resolver $f(10)=\frac{4}{9-10}=-4$, lo que se traduce que tiende a $-\infty$.

Ahora hacemos lo mismo, pero con un entero menor, $f(8)=\frac{4}{9-8}=4$, lo que se traduce que tiende a ∞.

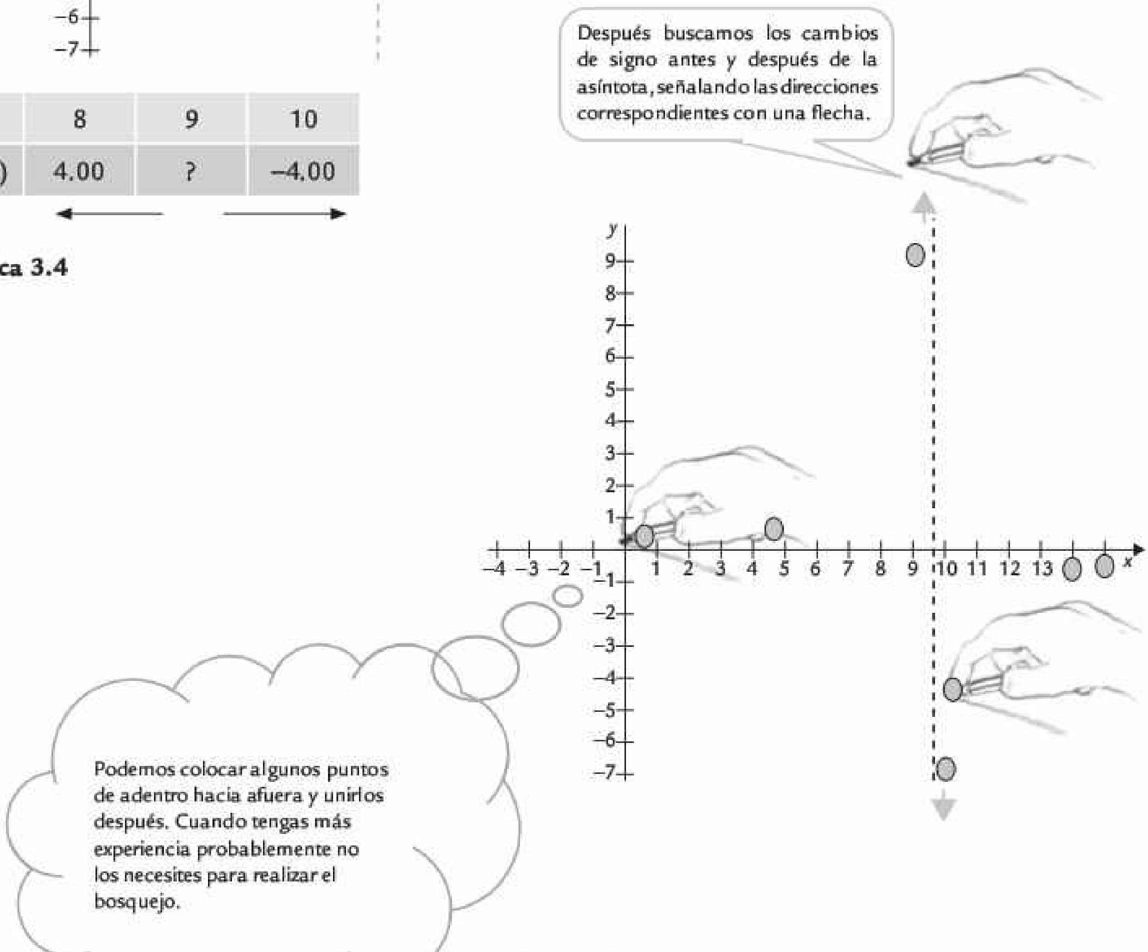
Ahora podemos bosquejar la gráfica, colocando primero la asíntota en nuestro sistema de coordenadas (gráficas 3.4, 3.5 y 3.6).



x	8	9	10
$f(x)$	4.00	?	−4.00

←　　→

Gráfica 3.4

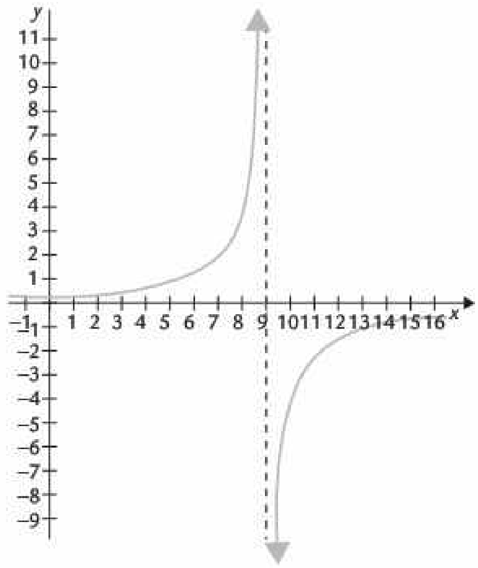


x	0	4	8	9	10	14	15
$f(x)$	0.44	0.80	4.00	?	−4.00	−0.80	−0.67

←　　→

Gráfica 3.5

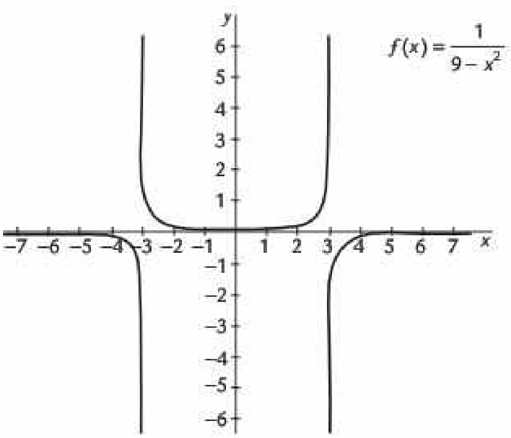
Entonces podemos inferir que el resultado de la gráfica será el siguiente.



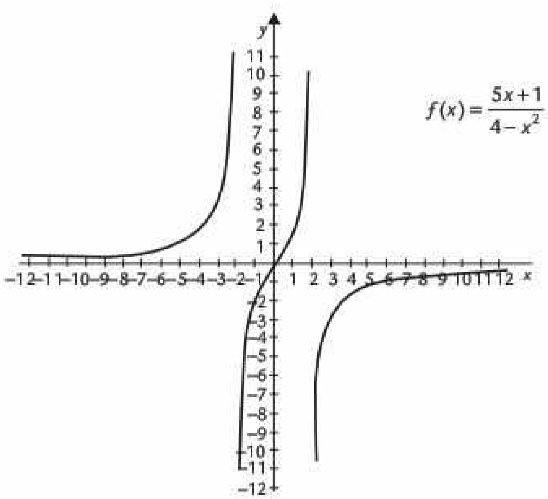
Gráfica 3.6

De lo anterior podemos obtener las siguientes conclusiones:

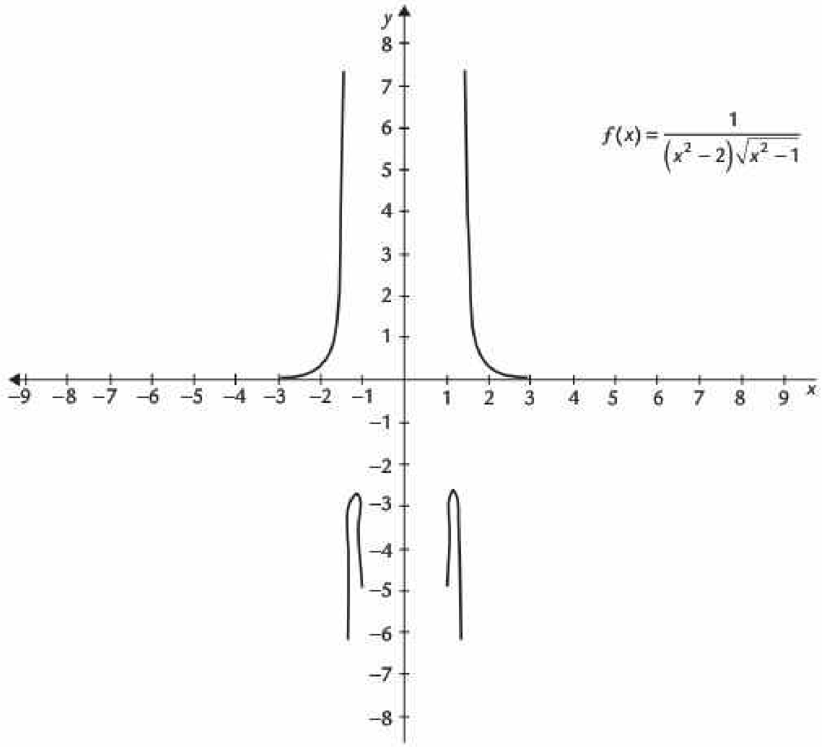
1. A la derecha y a la izquierda de la asíntota se forman dos L o U y su dirección varía, se pueden dirigir a ∞ o a $-\infty$.
2. El número de gráficas varía de acuerdo con la cantidad de asíntotas.
3. Al acercarnos a la asíntota, $f(x)$ se dispara y empieza a crecer o a decrecer rápidamente con cambios cada vez más pequeños de x, y la gráfica se torna casi vertical.
4. Cuanto más se alejen de la asíntota los valores que toma x, más se acerca $f(x)$ a 0 y empieza a tornarse horizontal.
5. Si existen más asíntotas, la parte central de la gráfica de $f(x)$ puede tomar forma de U o de S, o inclusive tomar formas más raras (vea las gráficas 3.7, 3.8 y 3.9).



Gráfica 3.7 *Función en forma de U.*



Gráfica 3.8 *Función en forma de S.*



Gráfica 3.9 *Función en formas variadas.*

ACTIVIDAD DE TRABAJO 3.3

I. Dadas las siguientes funciones, encuentra los límites y asíntotas verticales.

1. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{x+2}{x-3}$

2. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{1}{x}$

3. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{4x+4}{x+1}$

4. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{1}{x^3-1}$

5. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{9}{x-9}$

6. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{1}{|x|}$

7. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{1}{x^2-16}$

8. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{3}{x-4}$

9. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{x^2+3}{x-8}$

II. Utiliza la estrategia para bosquejar los siguientes límites verticales.

1. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{x+7}{5-x}$

2. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{2}{25-x^2}$

3. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{1}{x^2-9}$

4. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{1}{9-x^2}$

5. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{1}{x^3+1}$

6. $\displaystyle \lim_{x\to ?}\frac{-1}{|x|}$

Límites al infinito y asíntotas horizontales

Para expresar que el dominio de $f(x)$ se extiende indefinidamente hacia la derecha o hacia la izquierda de la recta real escribimos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Si la gráfica de $f(x)$ se aproxima a la recta $y = L$ cuando x crece sin límite, la recta $y = L$ recibe el nombre de asíntota horizontal.

Una asíntota horizontal es aquella línea imaginaria paralela al eje de las abscisas (x) que se forma por la ausencia de valores en y al extenderse x hacia ∞ o $-\infty$.

La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

NOTA: sólo puede haber dos asíntotas horizontales como máximo.

Regla del recíproco de la potencia

Si r es un número real positivo y c es cualquier número real, entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0 \ \text{y} \ \lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Existen dos métodos para obtener las asíntotas horizontales. El primero, método largo, consiste en desarrollar el procedimiento completo a fin de aplicar el límite y encontrar la asíntota; el segundo, método abreviado, consiste en tres reglas abreviadas resultantes del primer procedimiento.

Método largo para encontrar asíntotas horizontales

1. El primer paso consiste en encontrar la variable con mayor exponente.
2. Posteriormente se dividen todos y cada uno de los términos entre la variable de mayor exponente.
3. Por último, se sustituye el límite con el fin de igualar a 0 todos los términos que difieren de la variable más grande, dejando sólo aquellos términos de la función que contaban originalmente con dicha variable.

Es decir, la asíntota será la razón entre los coeficientes de la variable de mayor exponente.

EJEMPLO 1

Determina el límite de $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3}{4x^2-2}$

Como la variable de mayor grado en la función es x^2, dividimos cada término entre ella.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{3}{x^2}}{4-\frac{2}{x^2}}$$

Ahora sustituimos el límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{3}{\infty}}{4-\frac{2}{\infty}}$$

Por la regla del recíproco de la potencia sabemos que $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{3}{x^2}\right)=0$ y $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x^2}\right)=0$,

así que $\lim_{x\to\infty} \frac{5-0}{4-0} = \frac{5}{4}$.

Por lo tanto $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-3}{4x^2-2} = \frac{5}{4}$

EJEMPLO 2

Calcula el límite de $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{5x-2}$

El exponente de mayor grado en este ejemplo es x, no x^2, ya que ésta se encuentra en la raíz; entonces,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}}{\frac{5x}{x}-\frac{2}{x}}$$

Por lo que $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4+0}}{5-0} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4}}{5} = \pm\frac{2}{5}$

Método abreviado para encontrar asíntotas horizontales

Como se mencionó, éste es un método abreviado del proceso largo (completo), y consiste en tres sencillas reglas:

1. Si el grado del polinomio del numerador es igual al grado del polinomio del denominador, entonces la asíntota corresponderá a la razón entre los coeficientes de los términos con mayor exponente.

EJEMPLO

Para $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-2x^2}{3x^2-1}$ la asíntota es $-\dfrac{2}{3}$ ya que -2 y 3 son los coeficientes de los términos de mayor grado del numerador y del denominador, respectivamente.

2. Si el grado del denominador es mayor que el del numerador, entonces el límite será, por definición, cero, ya que al sustituir el límite, el numerador nos dará cero.

EJEMPLO

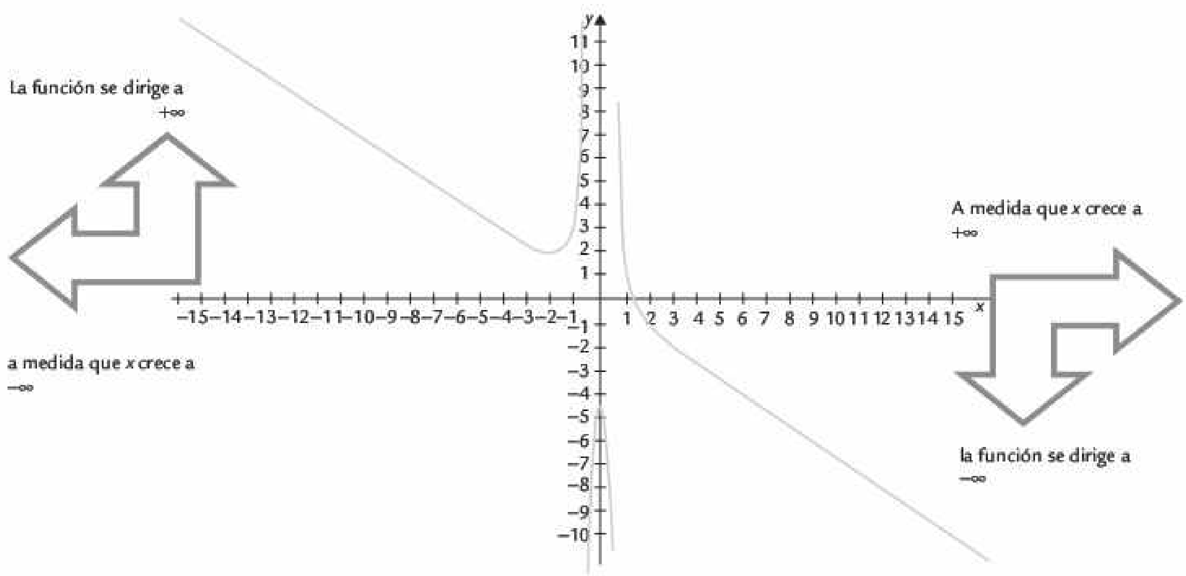
$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-2x}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\cancel{4}}{x^2}-\dfrac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}{\dfrac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{0-0}{\dfrac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-0}=\lim_{x\to\infty}\frac{0}{3}=0$$

3. Si el grado del denominador es menor que el grado del numerador, entonces el límite corresponderá a $\pm\infty$, según sea el caso, sin que exista una asíntota horizontal, tal como se puede apreciar en las gráficas 3.10 y 3.11.

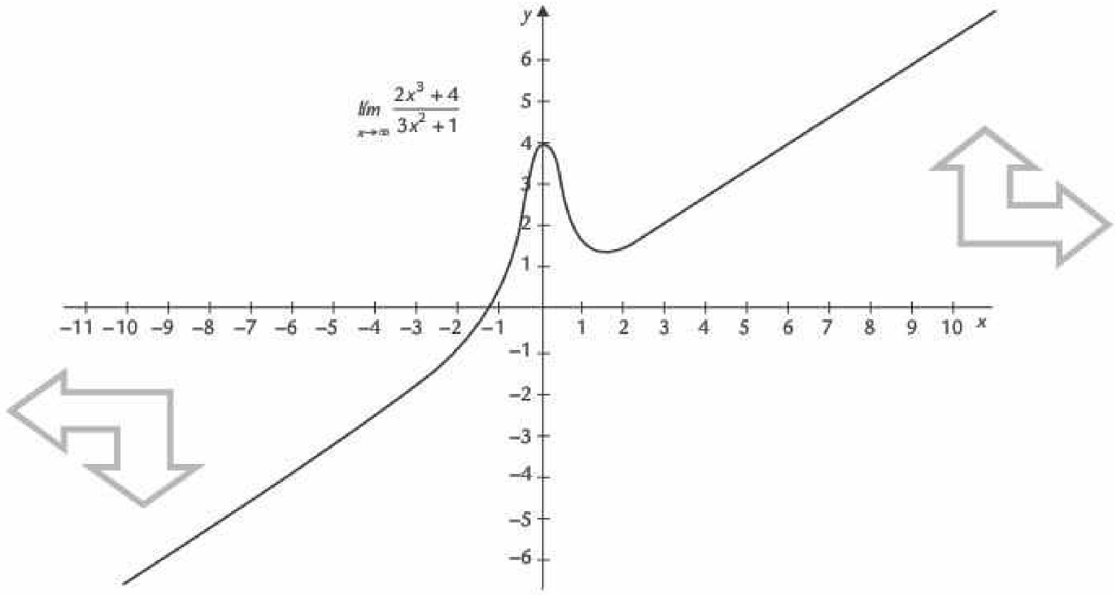
EJEMPLO

(Observa el comportamiento de las funciones con diferentes signos).

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3+4}{3x^2-1}$$



Gráfica 3.10



Gráfica 3.11

Estrategia para graficar funciones racionales con asíntotas horizontales

Las asíntotas horizontales es el segundo de los tres tipos de asíntotas en el tema de límites. Graficarlas con base en lo aprendido en la estrategia para asíntotas verticales no sólo nos ayudará a definir mejor si la función tiene forma de U o de L; también nos ayudará a entender mejor el comportamiento general de la función. Al igual que en el método para asíntotas verticales, el cruce de la asíntota vertical y la asíntota horizontal nos servirá como punto de partida para determinar el comportamiento de la función y para dibujar su gráfica.

1. El primer paso consiste en encontrar la o las asíntotas verticales igualando a cero el denominador, como vimos en su respectiva sección, y posteriormente colocándola en nuestro sistema de coordenadas (gráfica 3.12).
2. Después, ya sea usando el método corto o el largo, se obtiene el límite cuando x tiende al infinito, y se traza la asíntota horizontal a manera de una línea horizontal punteada (gráfica 3.12).
3. Luego, igual que en el caso de la asíntota vertical: se le da un valor antes y uno después de cada línea vertical para identificar el cambio de signo**; sin embargo, se debe hacer con valores muy cercanos a ésta para evitar errores.**
4. Por último, se bosqueja la función a partir de los cambios de signo y siguiendo la línea vertical hasta dar vuelta donde se encuentre la asíntota horizontal para formar nuestra L (gráficas 3.13 y 3.14).

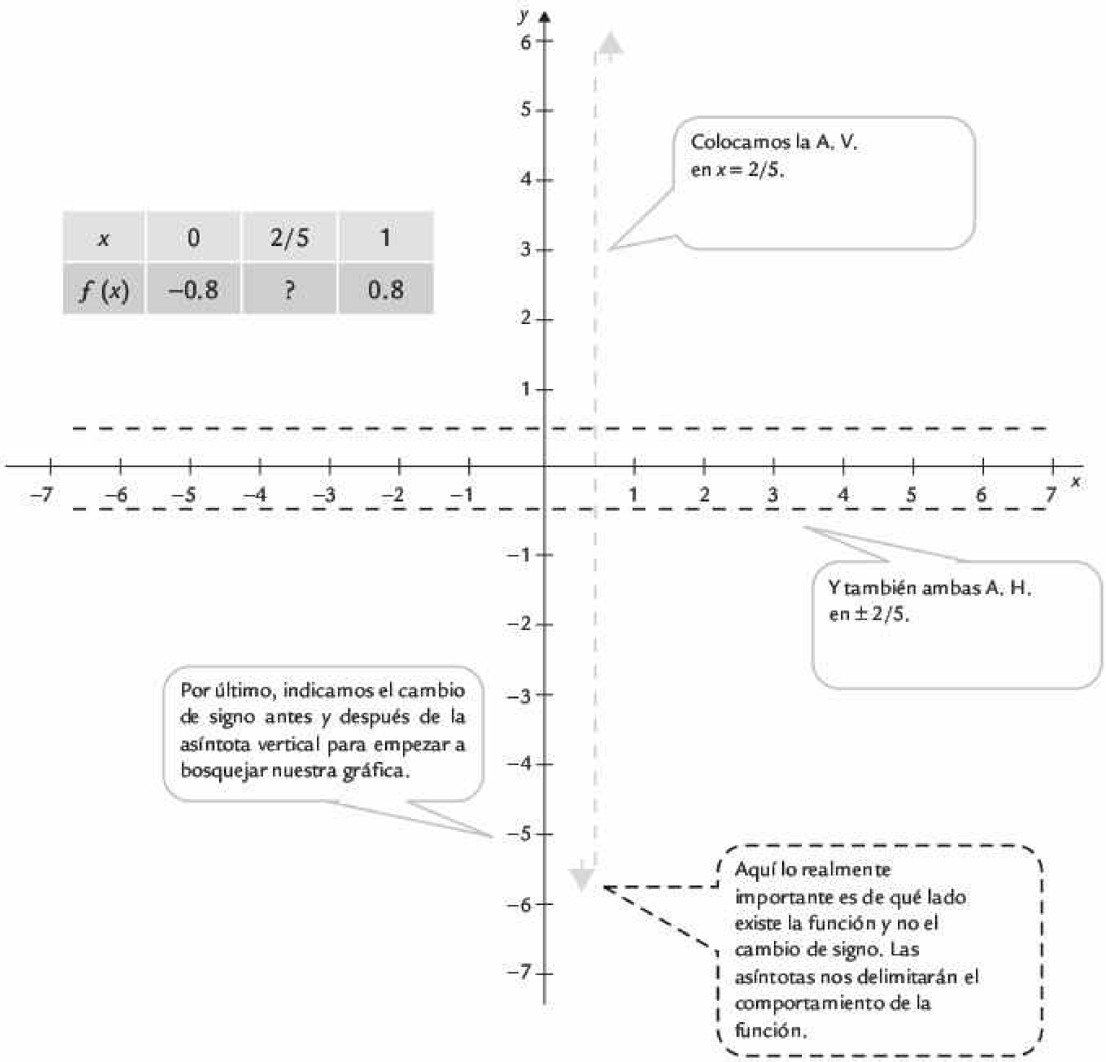
EJEMPLO

Grafica la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+3}}{5x-2}$.

La gráfica de esta función tiene dos asíntotas horizontales A. H. $y = \pm\frac{2}{5}$ Ahora procedemos a identificar la asíntota vertical A. V., igualando a cero el denominador.

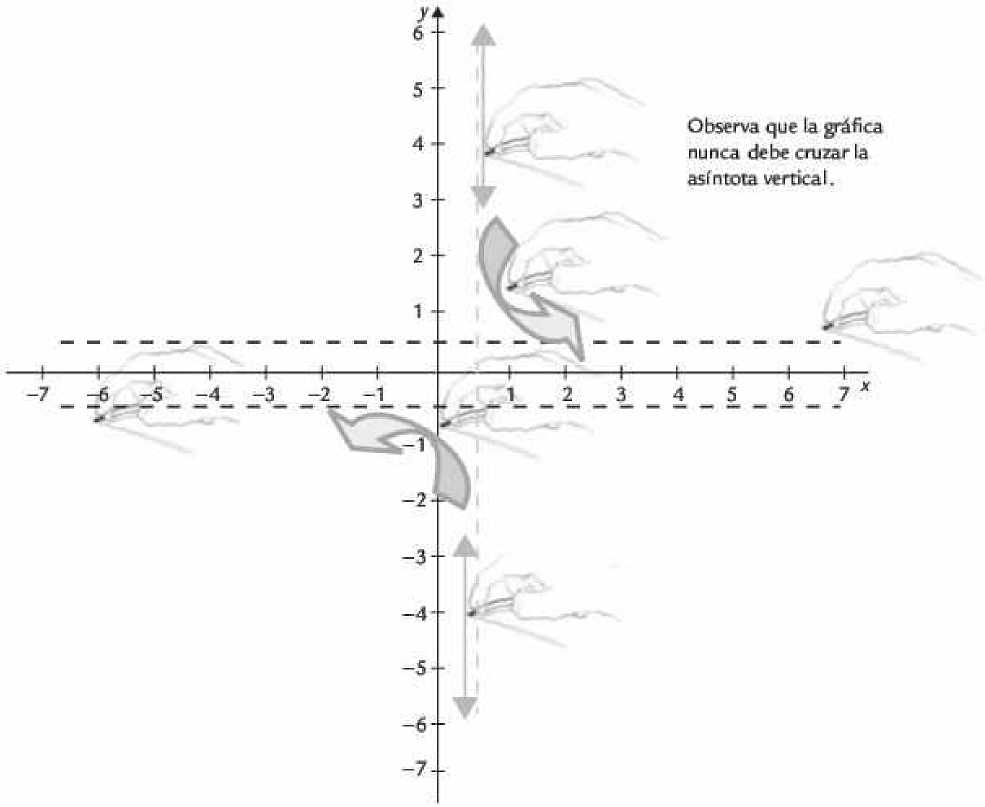
$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+3}}{5x-2} \rightarrow 5x-2=0 \rightarrow 5x=2 \rightarrow x=\frac{2}{5} \rightarrow \text{A. V. en } x=\frac{2}{5}$$

Ya con las asíntotas, procedemos a colocarlas en el plano cartesiano.



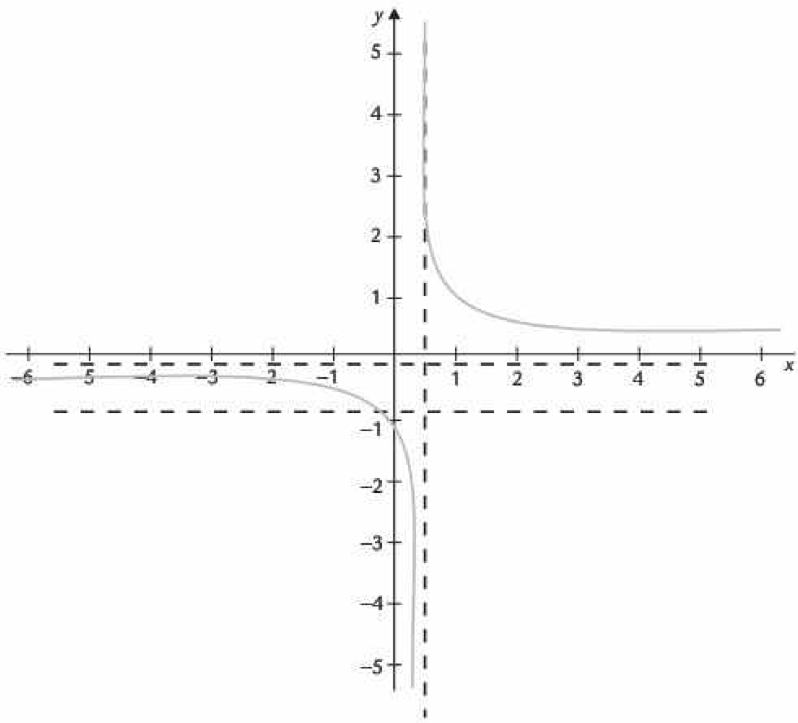
x	0	2/5	1
$f(x)$	−0.8	?	0.8

Gráfica 3.12



Gráfica 3.13

Con estos movimientos, el bosquejo de nuestra gráfica deberá quedar de la siguiente manera:



Gráfica 3.14 *Asíntota terminada.*

Como podemos observar, graficar funciones con asíntotas es muy fácil; sólo es cuestión de ubicar las asíntotas en el plano cartesiano y seguirlas a mano alzada para dibujar la gráfica.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 3.4

Dadas las siguientes funciones, encuentra las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{1+x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-3}{5x+4}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4}{x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{x+4}$
5. $\lim \dfrac{x+3}{x^2-5x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{2-e^x}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-x}{x^2+4x+4}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7}{5x^2-1}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{8x^2-1}}$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 3.5

Utiliza la estrategia para bosquejar los siguientes límites horizontales.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+4}}{5-2x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7+3x}{2-x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{3+4x^2}}{1-x}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{3x^2-4}}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2-5}{3x^2-9}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x+4}{5-3x^2}$

Asíntotas oblicuas

La gráfica de una función racional $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, donde $f(x)$ y $g(x)$ representan polinomios, tendrá una asíntota oblicua representada por una función lineal a la que llamaremos $q(x)$, la cual resulta a su vez del cociente de la función racional, si:

a) No tienen factores comunes.

b) El grado del numerador excede en exactamente un grado al del denominador.

c) El residuo $r(x)$ que resulta de dividir $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es diferente de cero.

NOTA: Toda función de este tipo posee una asíntota oblicua y una vertical.

Para determinar la asíntota oblicua, usaremos como recurso la división larga. Al obtener el resultado de la división tendremos también la ecuación de la asíntota oblicua.

EJEMPLO

Si $h(x)=\dfrac{x^2+3x+4}{2x+2}$ donde $f(x)=x^2+3x+4$ y $g(x)=2x+2$, entonces:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \overbrace{\tfrac{1}{2}x+1} \\
\hline
\underbrace{2x+2} & x^2+3x+4 \\
 & -x^2-x \\
 & \quad\;\; 2x+4 \\
 & \quad -2x-2 \\
 & \qquad\quad 2
\end{array}
$$

En este caso, la asíntota oblicua es una función lineal.

$g(x)$ o denominador de $h(x)$.

Residuo $r(x)$.

Por lo que la asíntota oblicua es $y=\frac{1}{2}x+1$.

Podemos ahora reescribir la función racional $h(x)$ como la suma de las funciones que resultaron de la división y posteriormente graficarla.

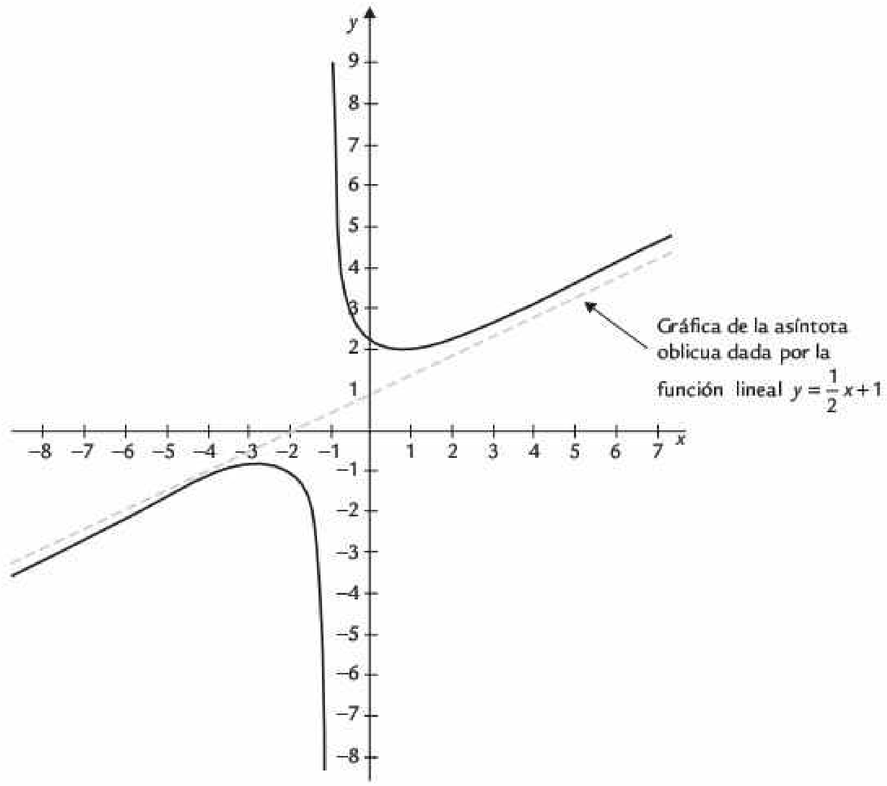
$$h(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\overbrace{\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)}+\frac{r(x)}{g(x)}=\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)+\frac{2}{\underbrace{2x+2}}$$

Cuando x es muy grande, $\dfrac{2}{2x+2}\to 0$, entonces la gráfica tiene como asíntota oblicua a la recta $\frac{1}{2}x+1$ (gráfica 3.15).

Estrategia para graficar funciones racionales con asíntotas oblicuas

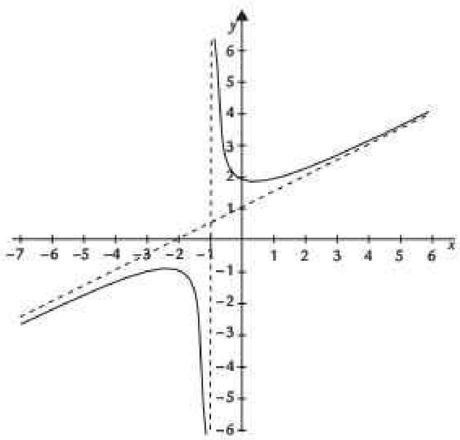
A diferencia de las gráficas de límites, que poseen asíntotas verticales y horizontales, al estudiante le puede parecer sumamente complicado bosquejar una gráfica que posea asíntotas oblicuas, especialmente si la tiene que realizar durante un examen que dura únicamente 60 minutos. Efectivamente, el bosquejo de las gráficas con este tipo de asíntotas requiere un poco más de trabajo, por lo que la siguiente estrategia ayudará a realizarlo de manera más rápida y fácil.

1. El primer paso es que el alumno tenga un buen dominio del bosquejo de gráficas con asíntotas verticales y horizontales.
2. Un requisito ineludible es que el alumno sepa dividir polinomios.
3. Para iniciar el bosquejo se recomienda colocar primero la asíntota vertical como una línea punteada en el plano cartesiano.
4. Después deberá obtener la función lineal de la asíntota oblicua mediante la división de polinomios.

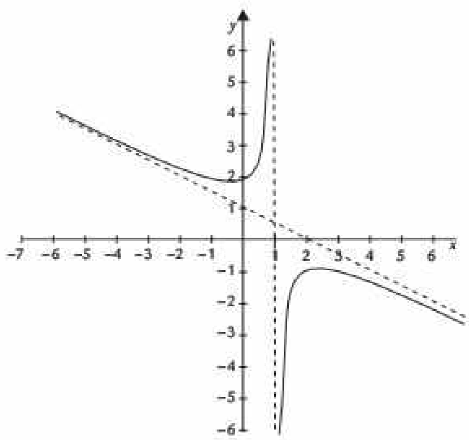


Gráfica 3.15 *Asíntota oblicua.*

5. Si la función lineal tiene pendiente positiva, la gráfica de la asíntota será creciente; es decir, crecerá de izquierda a derecha como en la gráfica 3.16; pero si la asíntota tiene pendiente negativa, la gráfica será decreciente como en la gráfica 3.17.



Gráfica 3.16 *Pendiente positiva, función lineal creciente.*



Gráfica 3.17 *Pendiente negativa, función lineal decreciente.*

6. Posteriormente se grafica la función lineal usando la intersección con los ejes.
7. Por último obtendrá coordenadas antes y después de la intersección de las dos asíntotas para graficar las dos U inclinadas de la función.

EJEMPLO

Retomando el ejercicio usado en la explicación de asíntotas oblicuas:

$$h(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2}$$

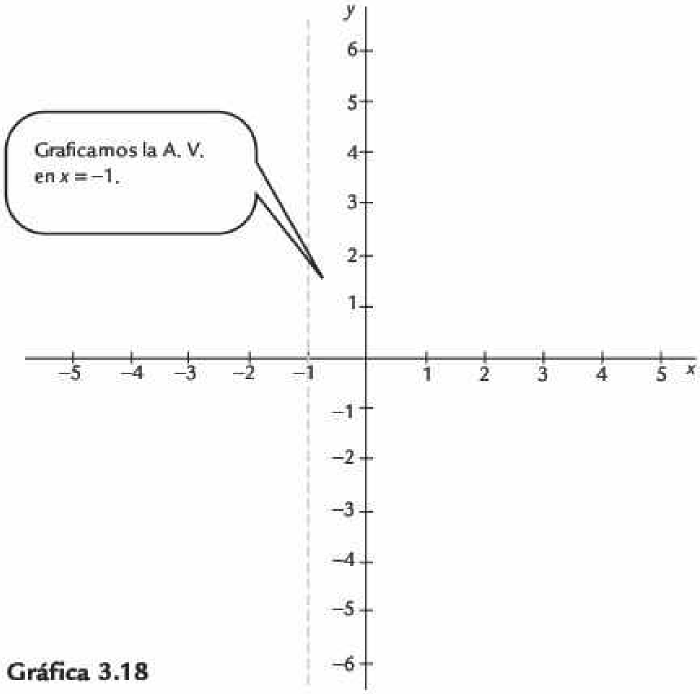
Identificamos la asíntota vertical igualando a cero el denominador

$h(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2}$

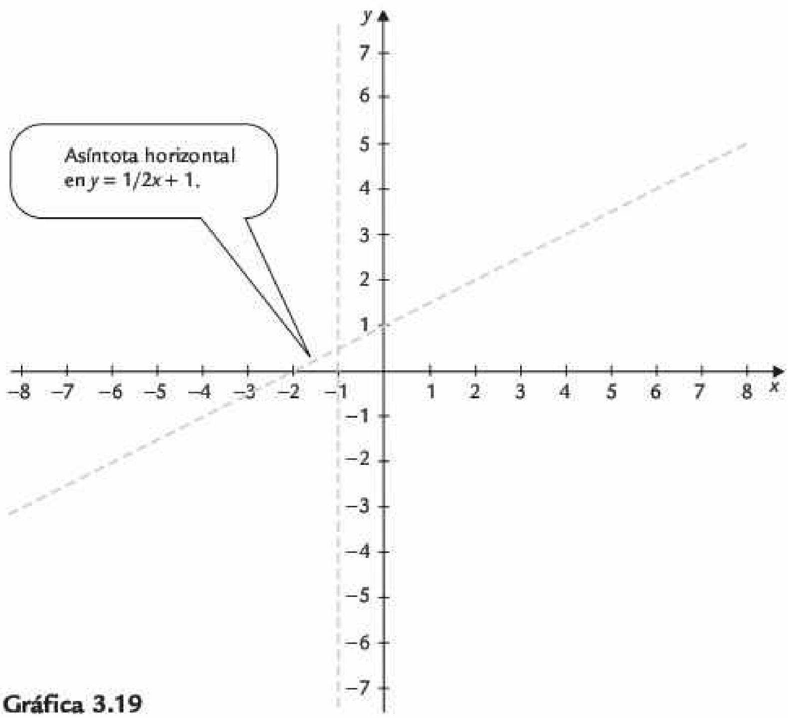
$2x+2=0$

$2x=-2$

$x=\frac{-2}{2}=-1 \therefore A.V.=-1$



Gráfica 3.18



Como ya habíamos identificado la función lineal $\frac{1}{2}x+1$, ahora obtendremos las intersecciones con los ejes:

$y=\frac{1}{2}x+1$

$y=\frac{1}{2}(0)+1=1$

$P_1(0,1)$

$y=\frac{1}{2}x+1$

$0=\frac{1}{2}x+1$

$\frac{1}{2}x=-1$

$x=-1(2)=-2$

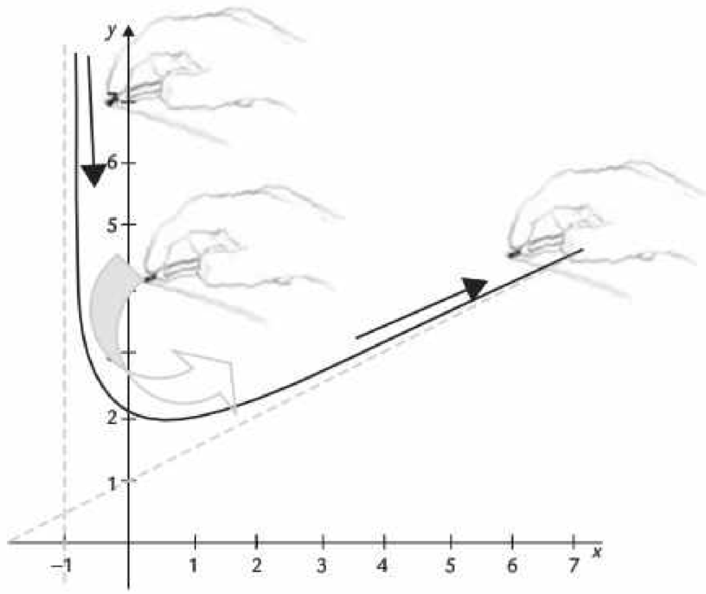
$P_2(-2,0)$

La gráfica se intersecta con los ejes en (0,1) y (−2,0). Se grafica.

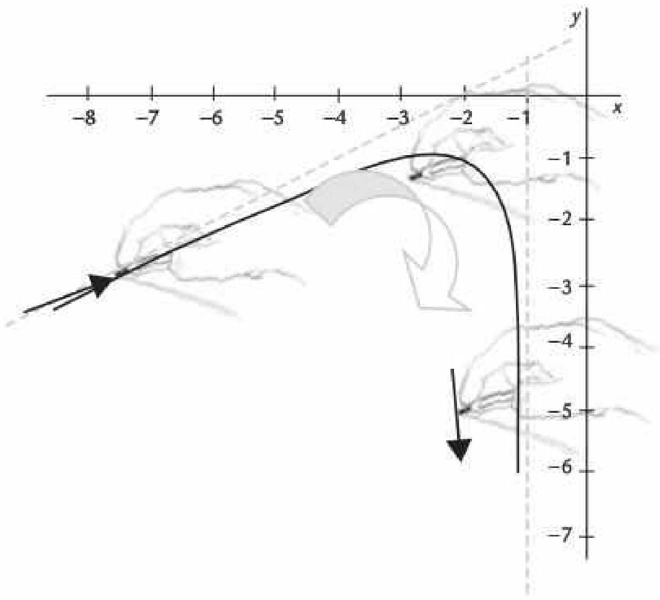
Gráfica 3.19

Ahora procedemos a dibujar la gráfica de la siguiente manera:

Se dibujan las U inclinadas a partir de donde se intersectan las dos asíntotas.

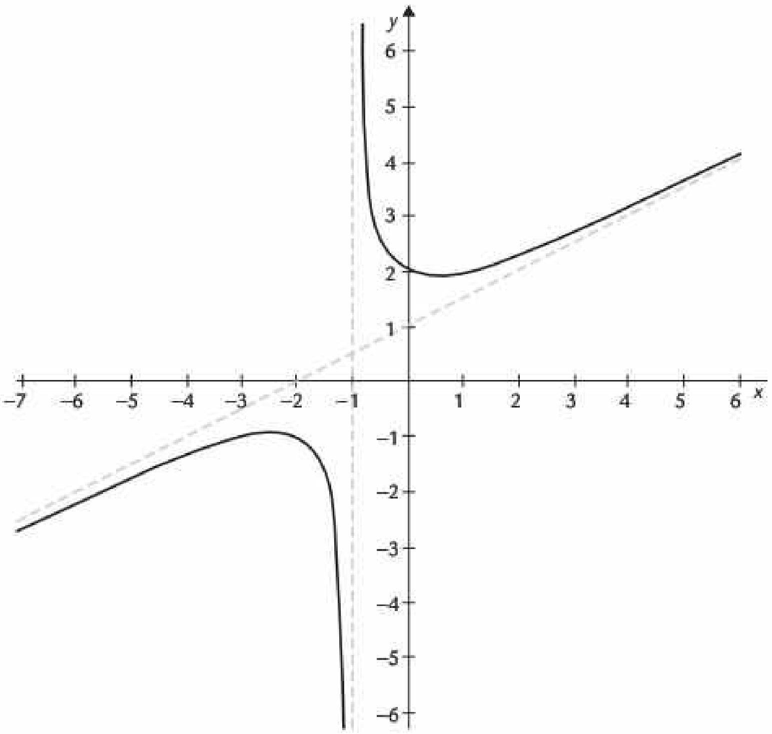


Gráfica 3.20



Gráfica 3.21

El resultado de este bosquejo se ilustra en la gráfica 3.22.



Gráfica 3.22

Podemos bosquejarlo como se ilustra, a mano alzada u obtener sólo algunos puntos para mayor precisión.

Después de esta estrategia, el estudiante deberá ser capaz de bosquejar, sin ningún problema y en cuestión de minutos, las "dolorosas" asíntotas oblicuas.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 3.6

Encuentra los límites y bosqueja las asíntotas verticales y oblicuas de las siguientes funciones.

1. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$
2. $f(x)=\dfrac{3x^2-2x}{2x+1}$
3. $f(x)=\dfrac{2x^2-x+6}{3x+5}$
4. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$
5. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$
6. $f(x)=\dfrac{5x^2-x}{2-x}$
7. $f(x)=\dfrac{4x^2-5x}{2x-6}$
8. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-7}{x-1}$
9. $f(x)=\dfrac{\frac{3}{2}x^2+18x-39}{6-3x}$

¿?

¿Soy capaz de explicar qué es un límite infinito y cuál es la diferencia con el límite al infinito?

¿Comprendo qué es una asíntota y soy capaz de explicar su significado?

¿Conozco los tipos de asíntotas que existen?

¿Comprendo el origen de una asíntota vertical?

¿Comprendo el origen de una asíntota horizontal?

¿Soy capaz de obtener la ecuación de una asíntota oblicua?

¿Soy capaz de trazar gráficas de funciones con ayuda de asíntotas?

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra las siguientes actividades a tu portafolio de evidencias.

7. Bosqueja las asíntotas verticales de los ejercicios impares aplicando la estrategia propuesta.
8. Bosqueja las asíntotas horizontales y verticales de los ejercicios impares aplicando la estrategia propuesta.
9. Bosqueja las asíntotas oblicuas y verticales de los ejercicios impares aplicando la estrategia propuesta.

3.5 Límites por racionalización

En ocasiones la función que describe un evento que se está estudiando tiene una forma racional en la que no es posible sustituir el límite directamente. Hay varios casos; uno de ellos es en el que el denominador es una raíz. En este caso es posible usar el proceso de racionalización para encontrar el límite de la función.

Racionalizar una función significa multiplicar por el factor que le hace falta a la variable para completar el entero, de tal manera que se elimine del denominador toda raíz o toda variable elevada a una fracción.

Límite por racionalización

El límite por racionalización es el proceso que aplicamos a la función racional para eliminar los radicales presentes ya sea en el numerador o en el denominador de toda variable, con el fin de que mediante este proceso se pueda factorizar y simplificar la expresión y así aplicar directamente el límite.

Estrategia para resolver los límites por medio de la racionalización

1. El primer paso es determinar si la función necesita racionalización o no, lo cual se hace mediante la sustitución directa del límite, de lo que debe resultar una indeterminación.
2. El siguiente paso es identificar el radical y multiplicar tanto el numerador como el denominador de la función racional por el conjugado del término que posea el radical.
3. El tercer paso es simplificar términos, con lo cual se espera que se elimine la indeterminación.
4. Por último, se sustituye el límite en la función.

EJEMPLO 1

Paso 1 : $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x}-4}{x-16} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{16}-4}{16-16} = \dfrac{0}{0}$

Al evaluar el valor del límite se indetermina la función; por lo tanto, la función necesita racionalizarse.

Identificamos el término que posee el radical

Multiplicamos por su conjugado...

Paso 2: $$\lim_{x\to 16} \frac{\boxed{\sqrt{x}-4}}{x-16}\left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}\right) = \lim_{x\to 16} \frac{x-16}{(x-16)\left[\sqrt{x}+4\right]}$$

...tanto el numerador como el denominador para que no se altere la función.

Paso 3 : $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\cancel{x-16}}{\cancel{(x-16)}\left[\sqrt{x}+4\right]} = \lim\limits_{x\to 16} \dfrac{1}{\sqrt{x}+4}$

Al multiplicar los numeradores y simplificar términos tenemos una nueva expresión para evaluar el límite.

Paso 4 : $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{1}{\sqrt{16}+4} = \dfrac{1}{8}$

Sustituyendo el valor del límite directamente obtenemos el resultado.

EJEMPLO 2

Paso 1 : $\lim_{x\to 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5} = \frac{25-25}{\sqrt{25}-5} = \frac{0}{0}$ Indeterminado

Paso 2 : $\lim_{x\to 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}\left(\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+5}\right) = \frac{(x-25)(\sqrt{x}+25)}{x-25}$

Paso 3 : $\lim_{x\to 25} \frac{(x-25)(\sqrt{x}+25)}{x-25} = \sqrt{x}+5$

Paso 4 : $\lim_{x\to 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5} = \lim_{x\to 25} \sqrt{x}+5 = \lim_{x\to 25} \sqrt{25}+5 = 10$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 3.7

Determina los siguientes límites mediante el proceso de racionalización.

1. $\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$
2. $\lim_{x\to 7} \frac{3-\sqrt{x+2}}{x-7}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}$
4. $\lim_{x\to 9} \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9}$
5. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}$
6. $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{x}}{x^2-9}$

3.6 Continuidad

Cuando en genética se estudia la mitosis se dice que la continuidad se mantiene de generación en generación si a lo largo del tiempo de estudio no hay variabilidad en la genética; es decir, si no hay alteraciones, mutaciones o aberraciones cromosómicas.

La continuidad también se usa para referir la duración o permanencia de un evento sin interrupción.

Aunque existen diferentes tipos de continuidad, la que nos interesa es la continuidad en las funciones matemáticas, sobre todo porque el hecho de que una función sea continua quiere decir que es derivable, y esto nos lleva a un mejor análisis de la función y, por lo tanto, del evento que representa.

Coloquialmente, decimos que una función es continua si su gráfica se puede trazar sin tener que levantar el lápiz del papel.

Formalmente, una función es continua en el punto $x = c$ si se cumplen las tres siguientes condiciones:

1. $f(c)$ está definida.
2. El $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Por el contrario, una función es discontinua si alguna de las tres condiciones no se cumple:

1. $f(c)$ no está definida.
2. El $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ no existe, o si los límites por la derecha y por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a c son diferentes.
3. El $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq f(c)$.

Existen dos tipos de discontinuidades: la de tipo removible y la de tipo no removible.

El tipo de discontinuidad removible ocurre si, y sólo si, las condiciones que fallan son la 1 y la 2; en cuyo caso el límite de la función cuando x tiende a c sí existe y podemos hacer continua la función "rellenando" la discontinuidad; es decir, haciendo que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

EJEMPLO 1

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Primero observemos el denominador de la función, ya que si existe uno o más valores para x que hagan el denominador cero, la función se volverá indefinida en esos valores; es decir, la discontinuidad estará en esos puntos.

El análisis del ejemplo anterior es el siguiente:

1. No está definida la función para $x = 2$; por lo tanto no se cumple la primera condición.

$$f(2) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{0} = \frac{0}{0}$$

Sin embargo, podemos "rellenar" la función para $x = 2$ factorizando el numerador y evaluando la función en el valor límite:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = x + 2$$

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

2. Los límites por la izquierda y por la derecha son iguales:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=x+2=\mathbf{4} \text{ y } \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=x+2=\mathbf{4}$$

El límite existe, por lo tanto sí se cumple la segunda condición.

3. Sí se cumple la tercera condición, ya que el $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$.

Con lo anterior concluimos que se trata de una discontinuidad removible en $x=2$.

EJEMPLO 2

$$f(x)=\frac{1}{x-2}$$

$f(2)$ no está definida

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty \neq \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\infty$$

La segunda condición no se cumple; por lo tanto, tenemos una función discontinua no removible.

EJEMPLO 3

$$f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ si } x\leq 5 \\ -x+10 \text{ si } x>5 \end{cases}$$

$f(5)=7$ por lo tanto, sí está definida

pero $\lim_{x\to 5^-} x+2=7 \neq \lim_{x\to 5^+} -x+10=5$

por lo que $f(5)\neq \lim_{x\to 5} f(x)$.

El límite no existe y la discontinuidad no es removible.

En resumen

1. Una función será continua si cumple con las tres condiciones matématicas de continuidad.
2. Existen dos tipos de discontinuidades, las removibles y las no removibles.
3. Si el límite por la izquierda y el límite por la derecha son iguales, se trata de una función ***discontinua removible*** en ese punto.
4. Si el límite por la derecha y el límite por la izquierda son diferentes, se trata de una función ***discontinua no removible.***
5. También podemos determinar la continuidad de una función a través de su dominio e imagen.
6. La importancia de la continuidad de una función radica en que:

   a) Si una función es continua es diferenciable en ese punto.

   b) Si una función es continua es integrable en ese punto (parte del teorema fundamental del cálculo).

Con base en lo descrito, ¿puedes decir si la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ es continua o discontinua?

En caso de que se tratara de una función discontinua, ¿puedes decir si esa discontinuidad es removible?

ACTIVIDAD DE TRABAJO 3.8

Determina si las siguientes funciones son continuas o si se trata de algún tipo de discontinuidad removible.

1. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$
2. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+4x+4}$
3. $f(x)=\dfrac{3x}{x+5}$
4. $f(x)=\begin{cases}-3\,\mathrm{sen}\,(x) & x<0\\ 3\,\mathrm{sen}\,(x) & x\geq 0\end{cases}$
5. $f(x)=\begin{cases}x-3 & x>3\\ \sqrt{9-x^2} & -3\leq x\leq 3\\ -x-3 & x<-3\end{cases}$
6. $f(x)=\dfrac{1}{|x-3|}$
7. $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^3-x}$
8. $f(x)=\begin{cases}x+3 & x\geq 2\\ x-7 & x<2\end{cases}$
9. $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<1\\ 2 & x=1\\ 3-x & x>1\end{cases}$
10. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+5x+6}$
11. $f(x)=\dfrac{x^2-10x+25}{(x-5)}$
12. $f(x)=\dfrac{x^2-12x+36}{2x-12}$

¿?

¿Soy capaz de explicar a qué se refiere la racionalización?

¿Soy capaz de definir coloquialmente la continuidad?

¿Comprendo la definición matemática de continuidad?

¿Reconozco cuándo una función es discontinua removible?

¿Soy capaz de hacer removible una discontinuidad?

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra las siguientes actividades a tu portafolio de evidencias.

10. Presenta todos los ejercicios de límites por racionalización.
11. Realiza los primeros seis ejercicios de continuidad.
12. Presenta solamente los ejercicios impares de la actividad integradora.

ACTIVIDAD INTEGRADORA UNIDAD 3

Encuentra los límites y las asíntotas, y bosqueja las siguientes funciones.

PARTE I

Encuentra los siguientes límites según se pide.

1. $\lim\limits_{x\to 2} -5x$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2+4x+4\right]$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\left[x^2\left(x+2\right)\right]$
4. $\lim\limits_{x\to 7}\left(\dfrac{x^2+3}{x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(x)\right)$
6. $\lim\limits_{x\to -\frac{3^+}{5}} \log(5x+3)$
7. $\lim\limits_{x\to 0^-} x^3+x$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to 3^+\\ x\to 3^-\\ x\to -3^+\\ x\to -3^-}} \sqrt{9-x^2}$
9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x\to 0^+}} \begin{cases} -\cos(x) \mid x<0 \\ \cos(x) \mid \geq 0 \end{cases}$

PARTE II

Encuentra los siguientes límites y asíntotas ya sean verticales, horizontales u oblicuas, y bosqueja las siguientes funciones.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+2}{1-x}$
2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{16-x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{|x-2|}$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x^2+11x+24}$
5. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x-4}{x+5}$
6. $\lim\limits_{x\to -10}\dfrac{1}{x^2-x-110}$
7. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-4}{x^2-x-12}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x+3}{2-x^2}$
9. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{\ln\left(x^2-4\right)}$
10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2-3x^2}{7x^2-2}$
11. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2}{6x^2-3}$
12. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-x}{\sqrt{5x^2-4}}$
13. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-7}}{3x-1}$
14. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x+3}$
15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-2x}{3x+4}$
16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+7}{5x+1}$
17. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+1}{x^3-x}$
18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^4}{x^5+1}$
19. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+3}{x^2-4x-21}$
20. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-1}{5-3e^x}$
21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2}{x+1}$
22. $\lim\limits_{x\to 1.5}\dfrac{7x^2+14x-21}{3-2x}$
23. $\lim\limits_{x\to 1.5}\dfrac{2x^2+8x}{2x-3}$
24. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{4x^2-3x+5}{3x-2}$

25. $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}} \dfrac{7x^2-5}{4-3x}$ 26. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x^2-6x}{2x-6}$ 27. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{1-x}$

PARTE III

Racionaliza los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to 36} \dfrac{x-36}{\sqrt{x}-6}$ 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x^2-4}$ 3. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{15-5\sqrt{x}}{x-9}$ 4. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{4-\sqrt{x}}{x-16}$

PARTE IV

Deduce si la función es continua o no y grafícala.

1. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2+2 \mid x>1 \\ -(x-2)^2+4 \mid x\le 1 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} \sec(x)-1 \mid x\ge 0 \\ -\sec(x)+1 \mid x<0 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} -x+1 \mid x<1 \\ 2x \mid x\ge 1 \end{cases}$

5. $f(x)=\dfrac{7x}{x-5}$

6. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{25-x^2} \\ \sqrt{x^2-25} \end{cases}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

3.1. Se toma un medicamento y la concentración de ésta en la sangre está dada por

$$f(t)=\frac{8t}{t^2+3}$$

¿Cuál es la cantidad de medicamento inmediatamente después de 6 horas?

3.2. El crecimiento de una población animal está dado por la siguiente ecuación:

$$f(t)=\frac{10}{5+6e^{-2x}}$$

a) ¿Cuál es la población inicial, en miles, de los animales?

b) ¿Se estabilizará la población animal con el paso del tiempo?

3.3. En el problema 2.27 del capítulo 2, Funciones y sus gráficas, determina si la población de osos Panda llegará a estabilizarse.

3.4. Determina la población inicial de bacterias del problema de aplicación 4.1 del capítulo 4.

3.5. La población de cierta especie en peligro de extinción, que se encuentra en una zona protegida, crece de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$f(t)=\frac{8(6+2t)}{1+0.02t}$$

a) ¿Cuántos ejemplares de esa especie habrá en 10 años?

b) ¿Se estabilizará la población de esta especie?

3.6. En cierta empresa maquiladora la curva de aprendizaje de determinada línea de producción está dada por la siguiente fórmula:

$$f(t)=100-60e^{-0.2t}$$

a) Determina el número de unidades producidas al momento en que un operario ingresa a trabajar (en $t=0$).

b) Determina el número de unidades producidas después de 12 horas de aprendizaje ($t=12$).

AUTOEVALUACIÓN

PARTE I
Encuentra los siguientes límites según se pide.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \left(\sec(x)\right)$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 3^+\\ x\to 3^-\\ x\to -3^+\\ x\to -3^-}} \sqrt{x^2-9}$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ x\to 0^+}} \begin{cases} -x^2-2 \mid x<0 \\ x \mid x=0 \\ x^2+2 \mid x>0 \end{cases}$

PARTE II
Encuentra los siguientes límites y asíntotas ya sean verticales, horizontales u oblicuas, y bosqueja las siguientes funciones.

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{x^2-16}$

2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{\left(x^2-9\right)\sqrt{x^2-4}}$

3. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{\ln\left(x-5\right)}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{8+5x^4}{2+4x^3}$

PARTE III
Racionaliza los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to 15} \dfrac{\sqrt{1+x}-4}{x-15}$

2. $\lim\limits_{x\to 32} \dfrac{x-32}{5-\sqrt{x-7}}$

PARTE IV
Deduce si la función es continua o no y grafícala.

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{|x|} \text{ si } x\geq 0 \\ -\dfrac{1}{|x|} \text{ si } x<0 \end{cases}$

2. $f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{x^2-1}$

3. $f(x)=\begin{cases} \cos(3x) \text{ si } x>0 \\ -\cos(3x) \text{ si } x\leq 0 \end{cases}$

DERIVADAS

4

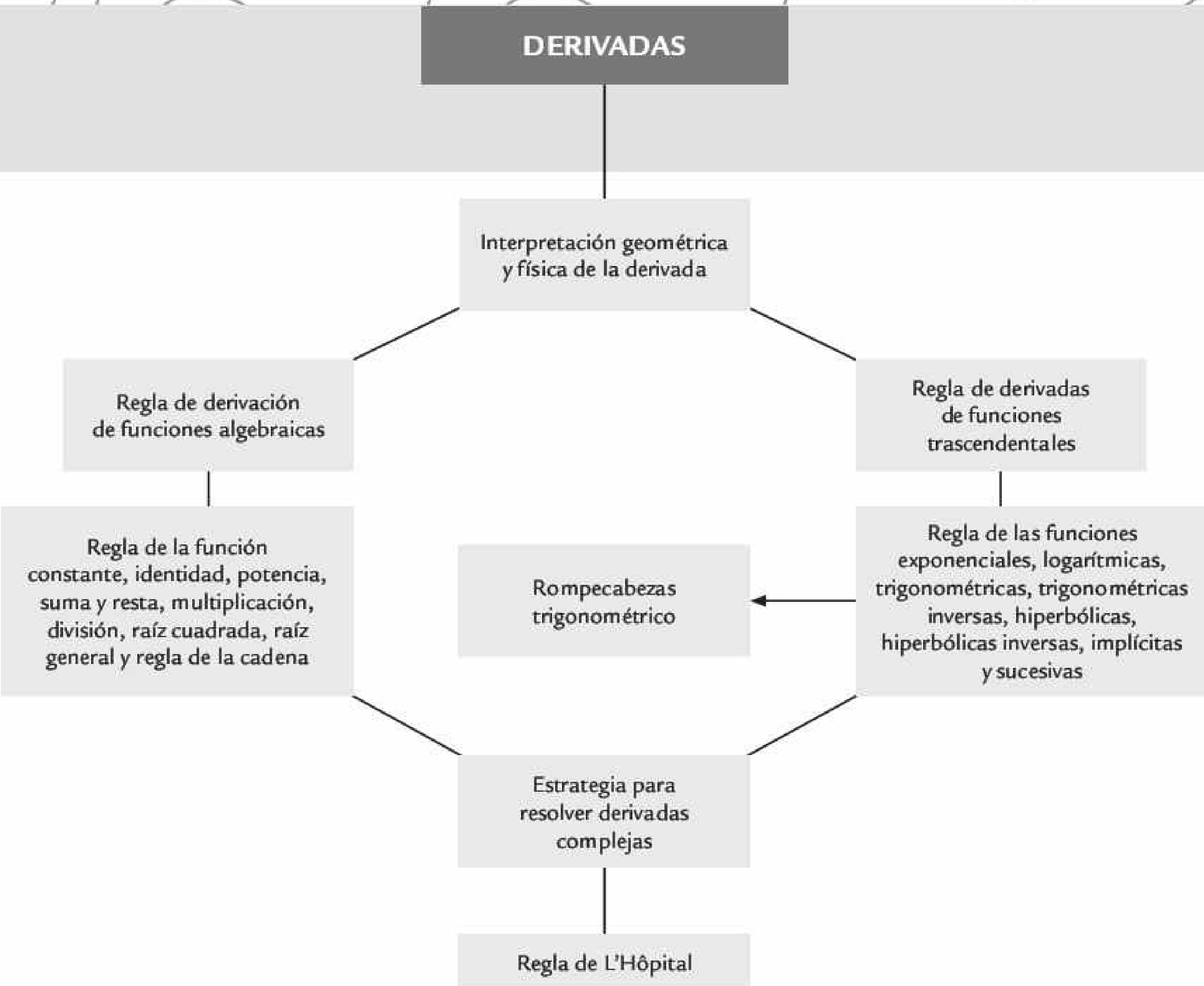
DERIVADAS

La derivada, junto con la integral, es una de las dos partes fundamentales del cálculo. La derivada nos sirve para medir tasas de cambio y tangentes. En este capítulo analizaremos la derivada desde el proceso del límite para ver cambios en un instante, y posteriormente estudiaremos las reglas para hallar la derivada de cualquier tipo de función. Asimismo, veremos algunas nemotecnias e identidades que nos facilitarán realizar cálculos y simplificar expresiones. Terminaremos el tema con la Regla de L'Hôpital, que nos sirve para límites indeterminados por medio del uso de derivadas, y por último propondremos una estrategia para resolver derivadas de funciones complejas, desarrollada en exclusiva para este libro.

COMPETENCIAS POR DESARROLLAR

COMPETENCIAS	ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	HABILIDADES Y ACTITUDES
Comprender el concepto de derivada para aplicarlo como la herramienta que estudia y analiza la variación de una variable con respecto a otra.	Reconocer el cociente de incrementos de dos variables como una razón de cambio.	El alumno desarrollará la habilidad para identificar qué regla debe usar para derivar los diferentes tipos de funciones.
Comprender y aplicar el concepto de razón de cambio para la resolución de problemas.	Reconocer la derivada como el límite de un cociente de incrementos.	El alumno aplicará correctamente los diferentes tipos de reglas de derivadas.
Comprender y analizar los diferentes tipos de reglas de derivación para usarlos correctamente en los diferentes tipos de problemas.	Mostrar que el valor de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto se puede obtener calculando la derivada de la función que corresponde a la curva en dicho punto.	El alumno hará uso de sus habilidades algebraicas para resolver y simplificar los diversos tipos de derivadas.
	Mostrar con una situación física o geométrica el concepto de incremento de una variable.	El alumno hará uso de sus conocimientos de límites para resolver los casos de indeterminación y aplicar la regla de L'Hôpital.
	Mostrar gráficamente las diferencias entre Δx y dx, así como entre Δy y dy.	
	Definir la diferencial de la variable dependiente en términos de la derivada de una función.	
	Demostrar, recurriendo a la definición, la derivada de la función constante y de la función identidad.	
	Calcular derivadas de funciones de la forma $f(x) = x^n$.	
	Reconocer las propiedades de la derivada y aplicarlas para el cálculo de funciones.	
	Plantear una expresión en la que se tenga una función de función y calcular la derivada mediante el uso de la regla de la cadena.	
	Reconocer la fórmula que debe usarse para calcular la derivada de una función y obtener la función derivada.	
	Calcular la diferencial haciendo uso de fórmulas de derivación.	
	Calcular las derivadas de orden superior de una función.	
	Reconocer, en el cálculo de límites, una forma indeterminada de "tipo L'Hôpital".	
	Aplicar el teorema de L'Hôpital para evitar indeterminaciones.	

ORGANIZADOR GRÁFICO



ANTECEDENTES

La derivada es una herramienta muy importante del cálculo; de hecho, junto con la integral, es una de sus bases. Entre sus muchísimas aplicaciones para la vida diaria destacan las relacionadas con tasas de cambio, la variación de una variable con respecto a otra, y la optimización de procesos, ya sean de índole social, económico, administrativo o industrial.

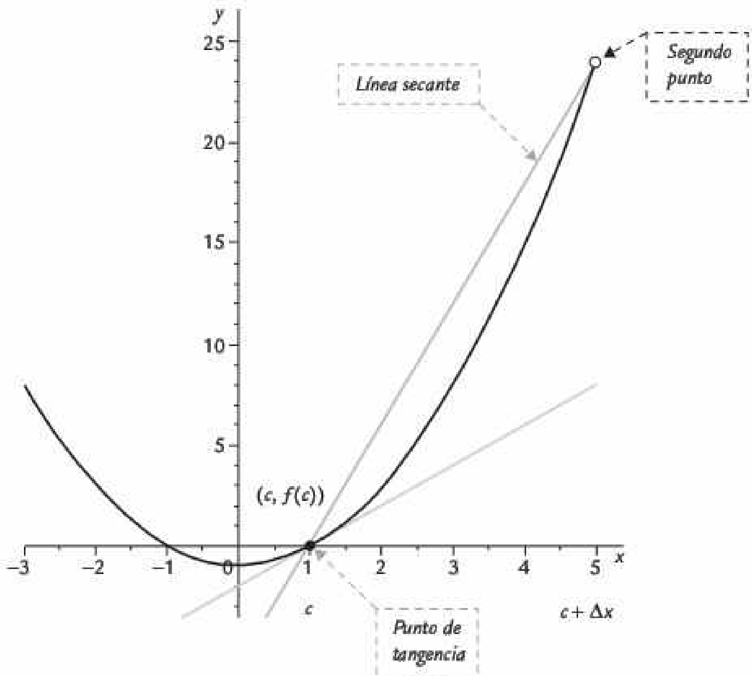
Otro uso de la aplicación de las derivadas en la vida diaria es en economía, donde se utilizan para resolver problemas de costos y de producción: la derivada representa el costo marginal de una función y el ingreso marginal de otra función; y los puntos de intersección de estas funciones son los puntos de equilibrio de producción, costos e ingresos, como en el siguiente caso: los costos de producción y los ingresos obtenidos de cierto número de partes en una maquiladora están dados por las funciones $C(x) = 4x + 650$ y $R(x) = 12x - (x^2)/30$. El objetivo es encontrar la función beneficio y los puntos de equilibrio.

Las derivadas se utilizan en el diseño industrial para optimizar dimensiones; como cuando se desea obtener el tamaño óptimo de un refrigerador al que se le debe reducir el volumen exterior pero maximizar su espacio interior. En este caso se utilizan las derivadas para encontrar los máximos y los mínimos, como veremos en los problemas de las cajas de la sección de aplicaciones.

Otro uso de las derivadas como tasas de cambio sería la velocidad instantánea; es decir, la razón que existe entre la posición de una partícula en un instante dx/dt. Otro ejemplo relacionado sería el de la aceleración, que es el cambio de velocidad con respecto al tiempo dv/dt.

4.1 Definición de la derivada

Para encontrar la línea tangente a una curva en un punto P tenemos que encontrar la pendiente en ese punto, es decir, la ecuación punto-pendiente. La pendiente de la línea tangente se puede aproximar utilizando una línea secante que pasa por el punto de tangencia y un segundo punto de la curva.

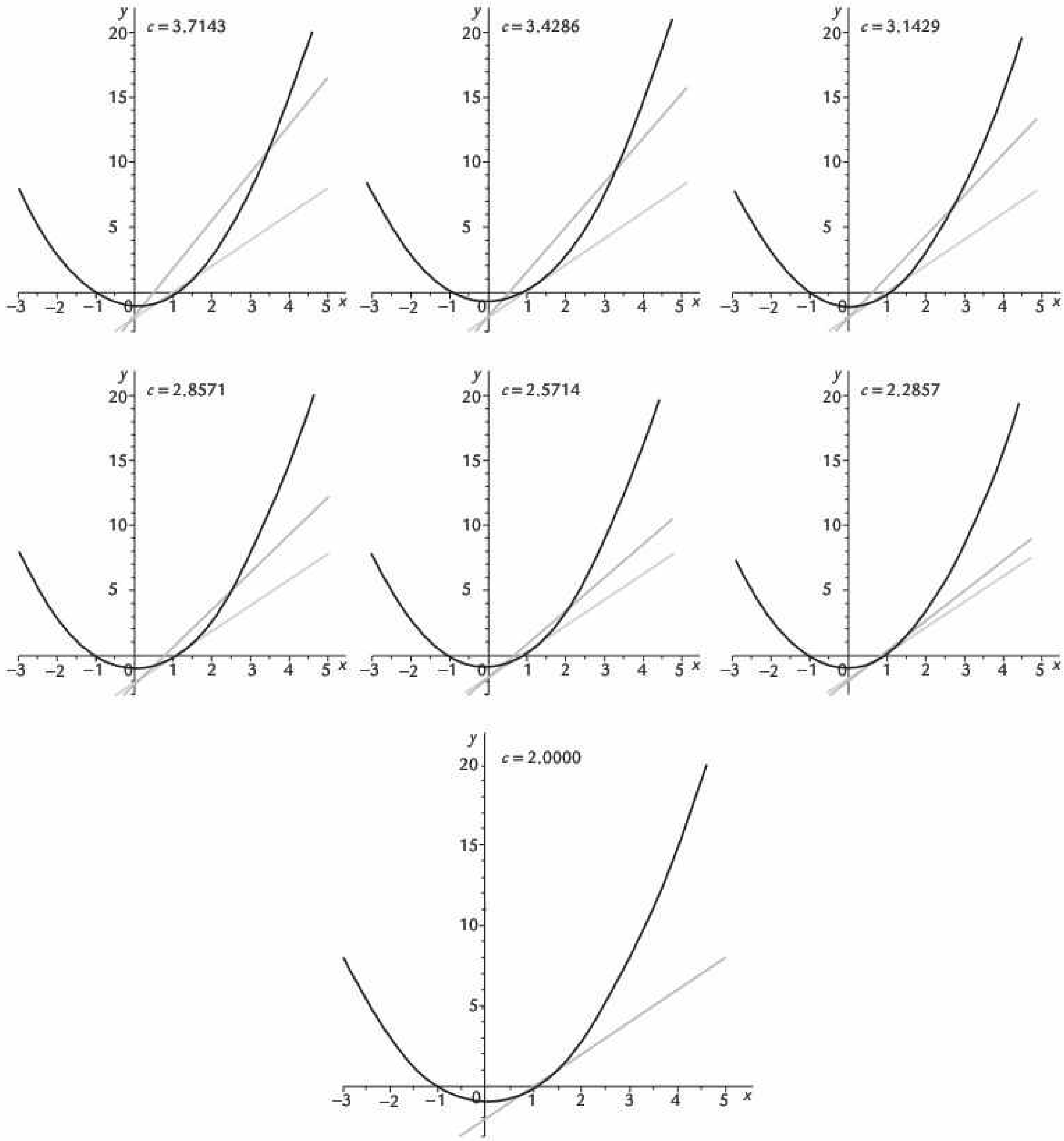


Gráfica 4.1

Si $(c, f(c))$ es el punto de tangencia y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ es el segundo punto de la gráfica, la pendiente de la línea secante está dada por la ecuación punto-pendiente donde se sustituyen los valores de x por c y sus incrementos; y los valores de y por $f(c)$ y sus incrementos, de modo que la ecuación de la pendiente tenga la siguiente forma:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{(c+\Delta x)-c}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$$

Mediante este proceso podemos encontrar la pendiente de la recta tangente a medida que Δx tiende a cero ($\Delta x \to 0$), que será el punto en que la línea secante se convertirá en la línea tangente (gráficas 4.2 a 4.8):



Gráficas 4.2 a 4.8

En otras palabras, cuando el límite de Δx tiende a cero, la pendiente de la línea secante es la pendiente de la línea tangente, o la línea secante es la recta tangente.

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra la siguiente actividad a tu portafolio de evidencias.

1. Realiza en computadora una gráfica de la interpretación geométrica de la derivada.

Definición de la recta tangente con pendiente *m* o definición analítica de la derivada

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c, y si el límite es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=m$$

entonces, la línea tangente que pasa por $(c, f(c))$ es la derivada de la función.

EJEMPLO

Encuentra la pendiente de la gráfica de $f(x)=-x^2+4x$ en los puntos (1,3) y (3,3).
Para encontrar la pendiente podemos realizar los siguientes pasos:

Paso 1. Sustituir x por $x+\Delta x$ en $f(x)$:

Función original

$$f(x)=-\ x^2\ +\ 4\ \ x$$

Sustitución de x por $x+\Delta x$

$$f(x+\Delta x)=-(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x)=-x^2-2x\Delta x-(\Delta x)^2+4x+4\Delta x$$

Se reescribe la función, pero cada x del problema es sustituida por $x+\Delta x$

Paso 2. Sustituir en la definición de límite:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overbrace{f(x+\Delta x)}-f(x)}{\Delta x}$$

Aquí se reescribe toda la función original sin olvidar que el signo menos multiplica a toda la función

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-x^2-2x\Delta x-(\Delta x)^2+4x+4\Delta x-(-x^2+4x)}{\Delta x}=\frac{-x^2-2x\Delta x-(\Delta x)^2+4x+4\Delta x+x^2-4x}{\Delta x}$$

Paso 3. Simplificar:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{-x^2}-2x\Delta x-(\Delta x)^2\cancel{+4x}+4\Delta x\cancel{+x^2}\cancel{-4x}}{\Delta x}=\frac{-2x\Delta x-(\Delta x)^2+4\Delta x}{\Delta x}$$

Paso 4. Factorizar Δx:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x\cancel{\Delta x}-(\Delta x)^{\cancel{2}}+4\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}=-2x-\Delta x+4$$

Paso 5. Determinar el límite para $\Delta x = 0$:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} -2x \cancel{-\Delta x} + 4 = \boxed{-2x+4}$ **Que representa la derivada de la función original.**

Para encontrar la pendiente sustituimos cada punto en la derivada; entonces:

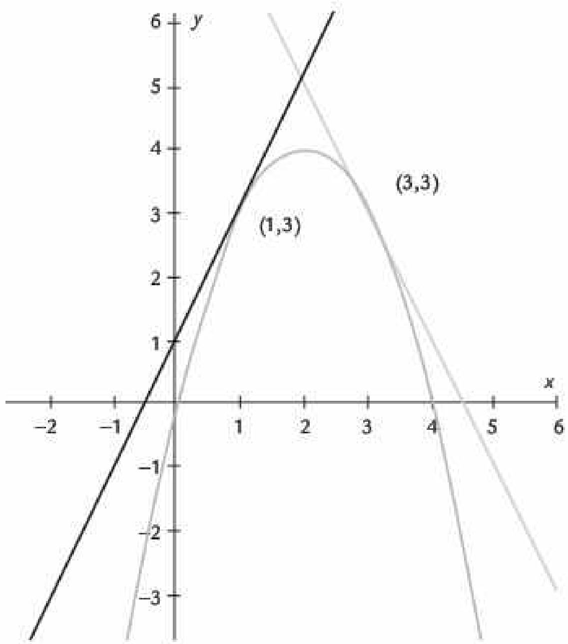
$$f(1) = -2(1) + 4 = 2$$
$$f(3) = -2(3) + 4 = -2$$

Y para encontrar las ecuaciones de la recta sustituimos en la fórmula punto-pendiente:

$$y = mx + b$$
$$3 = 2(1) + b$$
$$b = 1$$
$$y = mx + b$$
$$3 = -2(3) + b$$
$$b = 9$$

Entonces tenemos las dos rectas tangentes en los puntos dados:

$$y = 2x + 1$$
$$y = -2x + 9$$



Gráfica 4.9

¿?

¿Comprendo qué es una derivada?

¿Soy capaz de obtener la derivada de una función a partir de la definición formal de derivada?

¿Reconozco algunas situaciones reales en las que se aplica la derivada?

4.2 Interpretación geométrica y física de la derivada

Geométricamente, la derivada de una función en un punto representa el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

Aplicaciones de la derivada

La derivada está presente en aquellos casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una magnitud o situación. Es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de física, química, biología, y en ciencias sociales, como es el caso de la economía y la sociología.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.1

1. Explica el proceso mediante el cual la línea secante se convierte en línea tangente, utilizando software.

2. Investiga una situación real en la que esté involucrada la derivada.

¿?

¿Comprendo la interpretación geométrica de la derivada?

4.3 Reglas de derivación de funciones algebraicas

Usaremos la definición analítica o formal de la derivada para derivar algunas funciones; más adelante veremos que existen reglas básicas muy sencillas para encontrar esas mismas derivadas.

Regla de la función constante

CASO 1

Cierta universidad realizó un estudio para conocer el rendimiento de sus alumnos. Se encontró que el rendimiento promedio de cada alumno en un examen de dos horas es de $R(t) = 90 - t$, donde t es el tiempo en minutos.

La universidad quiere determinar en qué momento aumenta o disminuye el rendimiento.

Para resolver este problema necesitamos derivar $R(t)$; es decir, debemos derivar cada término de la función:

$$R'(t) = \frac{d}{dt}(90) - \frac{d}{dt}(t) = \frac{d(90)}{dt} - \frac{dt}{dt}$$

Sobre el primer término, $\dfrac{d(90)}{dt}$, se sabe que 90 es una constante.

La constante se puede representar mediante un número real o un símbolo, como π o 90, de modo que si la función constante es $f(x)=c$, y queremos la derivada $f'(x)=\dfrac{dc}{dx}$, entonces

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

En otras palabras, la derivada de una función constante es 0.

Regla de la función constante	
FÓRMULA	**EJEMPLO**
$\dfrac{d(c)}{dx}=0$	$\dfrac{d(5)}{dx}=0$

EJEMPLOS

$f(x)=7$ $\qquad \dfrac{d}{dx}=0$

$f(x)=\pi$ $\qquad \dfrac{d}{dx}=0$

$f(x)=-1$ $\qquad \dfrac{d}{dx}=0$

$f(x)=e$ $\qquad \dfrac{d}{dx}=0$

Regla de la función identidad

Para el caso del segundo término $\dfrac{dt}{dt}$ de $R'(t)=\dfrac{d}{dt}(90)-\dfrac{d}{dt}(t)=\dfrac{d(90)}{dt}-\dfrac{dt}{dt}$

Recordemos que la función identidad es de la siguiente forma:

$$f(x)=x$$

por lo que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x}+\Delta x-\cancel{x}}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

Regla de la función identidad	
FÓRMULA	**EJEMPLO**
$\dfrac{d(x)}{dx}=1$	$\dfrac{d(x)}{dx}=1$

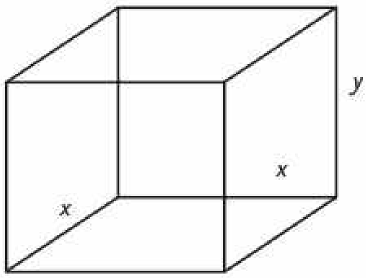
Aunque esta regla parezca muy simple y obvia, no debemos olvidarnos de ella, dado que nos ayuda a simplificar el uso de otras reglas de mayor complejidad, como es el caso de la regla de las potencias o la de la cadena.

Regla de las potencias

CASO 2

Se desea construir una cisterna de base cuadrada para almacenar 15,000 m^3 de agua. Si la tapa metálica cuesta el doble que la base de concreto, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la cisterna para que sea lo más económica posible?

Lo primero es bosquejar la cisterna y encontrar la función de la forma más sencilla que describa el problema.



$V = x^2 y = 15{,}000 \text{ m}^3$

Ésta es la función que describe el problema de las dimensiones

despejando

$$y = \frac{15{,}000}{x^2}$$

$$y = 15{,}000x^{-2}$$

Para obtener la función de costo es necesario saber cuál es la superficie total de concreto, por lo que:

$$S_{totalconcreto} = x^2 + 4xy$$

Sustituimos el valor de y:

$$S_{totalconcreto} = x^2 + 4x\left(\frac{15{,}000}{x^2}\right)$$

Simplificamos:

$$S_{totalconcreto} = x^2 + \left(\frac{60{,}000}{x}\right)$$

Lo siguiente es ver cuál es la función de la superficie metálica.

$S_{metálica}(x) = x^2$ puesto que sólo es la tapa.

La tapa metálica tiene las mismas dimensiones que la base de concreto; sin embargo, debemos recordar que el costo de la tapa es el doble de la base, por lo que la función del costo total de la cisterna es:

$$C(x) = 2x^2 + x^2 + \frac{60{,}000}{x} = 3x^2 + \frac{60{,}000}{x}$$

$$C(x) = 3x^2 + \frac{60{,}000}{x}$$

Ésta es la función que se ocupará al final para los cálculos de los costos

Lo más interesante viene en seguida pues se necesita derivar esta función para atacar el problema: ¿cómo derivar cada uno de los términos de la función de costo de la manera más sencilla?

La derivada de la función de costo se puede separar en tantos términos como tenga la función.

$$C'(x)=\frac{d\left(3x^2\right)}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\frac{60{,}000}{x}\right)=3\frac{dx^2}{dx}+60{,}000\frac{dx^{-1}}{dx}$$

Más adelante veremos que una constante acompañada de una variable puede *entrar* o *salir* de una derivada sin ningún problema, pero por el momento daremos más atención a las siguientes derivadas: $\frac{dx^2}{dx}$ y $\frac{dx^{-1}}{dx}$, para lo cual utilizaremos la regla de las potencias.

La regla de las potencias se utiliza cuando tenemos una variable elevada a un exponente entero y positivo. En otras palabras, esta fórmula se aplica a toda función polinomial.

Si n es un número entero positivo, entonces para $f(x) = x^n$, su derivada $f'(x)$ es $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$.

$$f(x)=x^n$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}\Delta x+C_0x^{n-1}(\Delta x)^2+\ldots(\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(nx^{n-1}+C_0x^{n-2}\Delta x+C_1x^{n-3}(\Delta x)^2\ldots(\Delta x)^{n-1}\right)}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

EJEMPLO 1

$$f(x)=x^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)^2-f\left(x^2\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2x\Delta x+(\Delta x)^2\cancel{-x^2}}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cancel{\Delta x}+(\Delta x)^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}}=2x+\Delta x$$

Como Δx es cero, entonces $2x+0=2x$.

Este mismo principio se puede usar incluso cuando se trate de un exponente fraccionario o negativo.

Regla de las potencias	
FÓRMULA	**EJEMPLO**
$\frac{d\left(x^n\right)}{dx}=nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}3x^2=6x$

EJEMPLO 2

$f(x) = 4x^3 - x$

2 **Restamos *uno* a los exponentes**

$$\frac{d}{dx} = (3) \cdot 4x^{\overbrace{3-1}} - (1)x^{\overbrace{1-1}}$$

1 **Bajamos los exponentes y los multiplicamos por los coeficientes de la variable**

Simplificamos y obtenemos: $\dfrac{d}{dx} = 12x^2 - 1$

En resumen

a) Al exponente de la variable siempre se le resta 1, ya sea que el exponente original sea positivo, negativo o fraccionario.

b) El exponente original siempre se multiplica por el coeficiente de la variable.

Regla de una constante por una función

Del caso 2 se tiene que la función de costo es la siguiente:

$$C(x) = 2x^2 + x^2 + \frac{60{,}000}{x} = 3x^2 + \frac{60{,}000}{x}$$

$$C(x) = 3x^2 + \frac{60{,}000}{x}$$

Por lo que la derivada queda de la siguiente manera:

$$C'(x) = \frac{d(3x^2)}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{60{,}000}{x}\right)$$

Para derivar se requirió de la derivada de las potencias, pero también necesitamos saber qué hacer con los coeficientes de cada término de la función.

La regla de la constante por una función es una forma abreviada de la regla de las potencias. Simplemente hace referencia a que, por comodidad, podemos aplicar una de las propiedades de las derivadas separando antes nuestra constante para derivar más fácilmente nuestra variable, sin olvidar que al final del proceso de derivación debemos multiplicar por esa constante. Para evitar errores, sólo es conveniente realizar este proceso si la derivada es muy complicada.

Si f es una función diferenciable y c es un número real, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right] = c\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] = cf'(x):$$

La regla anterior nos dice que cuando tenemos una constante multiplicando a una función su derivada es la constante por la derivada de la función.

Observemos que para derivar $cf(x)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cf'(x)$$

Para el caso específico en que la constante c multiplica a su variable x, la derivada será la constante c.

$$f(x) = cx$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{c(x+\Delta x) - c(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{cx} + c(\Delta x) \cancel{- cx}}{\Delta x} = \frac{c(\Delta x)}{\Delta x} = c$$

Regla de una constante por una función	
FÓRMULA	**EJEMPLO**
$\frac{d(cx)}{dx} = c$	$\frac{d}{dx} 7x = 7$

EJEMPLO

$$f(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

Separamos nuestra constante $\boxed{\frac{1}{3}} \leftrightarrow \left[\frac{d}{dx} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} \rightarrow \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \right]$

Por lo demás, aplicamos los mismos pasos que en la regla de las potencias

Al final multiplicamos nuestra constante por la derivada de la función. $\frac{d}{dx} = \frac{1}{3} \bullet \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{1}{9} x^{-\frac{2}{3}}$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.2

Resuelve las siguientes derivadas siguiendo el proceso de límite.

1. $f(x) = 7$
2. $f(x) = -x$
3. $f(x) = x + 2$
4. $f(x) = 3x$
5. $f(x) = 4x + 5$
6. $f(x) = x^2 + 2$
7. $f(x) = 3x^2 + 7$
8. $f(x) = 9x^2 + 6x + 4$
9. $f(x) = 10x - x^2$

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra la siguiente actividad a tu portafolio de evidencias.

2. Presenta al menos 8 derivadas utilizando el límite.

Regla para la suma y la diferencia de funciones

La regla para la suma y diferencia de funciones simplemente nos especifica que cuando tenemos dos o más términos separados por los signos + o –, podemos derivar *individualmente* cada término. Incluso si *debemos* aplicar reglas diferentes para sus respectivas derivadas, es decir, si tenemos un término con raíz, otro término con una función trigonométrica y un término más con logaritmo, todo lo que hay que hacer es aplicar las reglas individuales y luego sumar o restar las derivadas de todos los términos. En el siguiente ejemplo tendremos que aplicar la regla de la raíz más la regla trigonométrica, menos la regla del logaritmo.

FÓRMULA

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$f(x) = \boxed{\sqrt{x}} + \text{sen}(x) - \ln(x)$$

Podemos separar las funciones de acuerdo con los términos separados por + o por –.

$$f_1(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f_2(x) = \text{sen}(x)$$

$$f_2'(x) = \cos(x)$$

$$f_3(x) = \ln(x)$$

$$f_3'(x) = \frac{1}{x}$$

Al final agrupamos nuestros resultados individuales.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos(x) - \frac{1}{x}$$

EJEMPLO 1

$$f(x) = 2x^4 - 3x + 5$$

$$f'(x) = 8x^3 - 3$$

EJEMPLO 2

$$f(x) = (2x-2)^2 = 4x^2 - 8x + 4$$

$$f'(x) = 8x - 8$$

EJEMPLO 3

$$f(x)=(3x^2-1)(x+5)=3x^3-x+15x^2-5$$
$$f'(x)=9x^2-1+30x$$

EJEMPLOS 4 Y 5

$$f(x)=\frac{4x^3-5x^2+3}{x}=4x^2-5x+3x^{-1}$$

Aplicamos la regla de las potencias.

$$f'(x)=8x-5-3x^{-2}=8x-5-\frac{3}{x^2}$$

$$f(x)=\sqrt[7]{x^3}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}=x^{3/7}-3x^{-1/3}$$

Aplicamos la regla de las potencias.

$$f'(x)=\tfrac{3}{7}x^{-4/7}-\left(\tfrac{1}{\cancel{3}}\right)\cancel{3}x^{-4/3}=\frac{3}{7x^{4/7}}-\frac{1}{x^{4/3}}=\frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

Regla de la suma y la diferencia de funciones	
FÓRMULA	**EJEMPLO**
$\frac{d}{dx}(u\pm v)=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx}3x^2-x=6x-1$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.3

Resuelve las siguientes derivadas utilizando las fórmulas básicas.

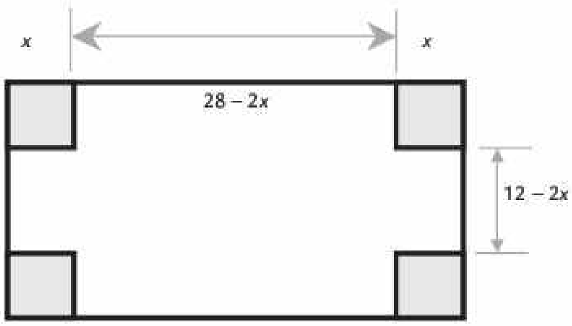
1. $f(x)=x^2-4x$
2. $f(x)=(x+3)^2$
3. $f(x)=-3x^2+4x$
4. $f(x)=5x^3+4x^4-3x^2+1$
5. $f(x)=ax^2+bx+c$
6. $f(x)=4-x^2$
7. $f(x)=x^2+8x$
8. $f(x)=-5x^2+8x$
9. $f(x)=\pi x$

Regla del producto

CASO 3

Don Juan desea construir una caja de cartón con una pieza rectangular de 12 cm de ancho por 28 cm de largo; la caja no tendrá tapa, así que para obtener el volumen máximo debe hallar las dimensiones óptimas para los lados y el fondo.

Para atacar el problema primero debemos saber cuál es el área de cada una de las figuras que conforman la caja, y después obtener la ecuación de volumen para dicha caja.



El área de la caja es:

$$A(x) = (28-2x)(12-2x)$$

El volumen está dado por:

$$V(x) = x(28-2x)(12-2x)$$
$$V(x) = (28x-2x^2)(12-2x)$$

Ahora debemos derivar esta última ecuación, y para ello necesitamos la regla de derivación de la multiplicación o producto.

Aplicaremos la regla del producto en ocasiones en que haya una multiplicación de dos o más términos. En el caso de que hubiera más de dos términos que se multiplican, lo que se debe hacer es:

a) Desarrollar una parte de la función para posteriormente aplicar la regla del producto sólo una vez.

O bien,

b) Aplicar varias veces la regla del producto.

La derivada del producto es igual al primer término por la derivada del segundo más el segundo término por la derivada del primero.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En realidad, no importa si no se aplica la regla en orden, siempre y cuando se sigan todos los pasos y se respeten los signos; desde luego, lo recomendable es hacerlo en orden.

EJEMPLO 1

$$f(x) = (x^4+3x)(x^2-2)$$

$$f'(x) = (x^4+3x)(2x) + (x^2-2)(4x^3+3)$$ Procedemos a desarrollar.

$$f'(x) = 2x^5 + 6x^2 + 4x^5 - 8x^3 + 3x^2 - 6$$ Ahora simplificamos.

$$f'(x) = 6x^5 - 8x^3 + 9x^2 - 6$$

EJEMPLO 2

$f(x)=(x^2+2x)(x+1)$

$f'(x)=(x^2+2x)(1)+(x+1)(2x+2)$ Aplicamos la regla.

$f'(x)=x^2+2x+2x^2+2x+2x+2$ Ahora simplificamos.

$f'(x)=3x^2+6x+2$

EJEMPLO 3

$f(x)=(x+3)(x-1)(x^2+2)$

Opción 1. Desarrollar una parte de la función.

$f(x)=(x^2+2x-3)(x^2+2)$ Ahora aplicamos la regla del producto.

$f'(x)=(x^2+2x-3)(2x)+(x^2+2)(2x+2)$ Procedemos a desarrollar.

$f'(x)=2x^3+4x^2-6x+2x^3+4x+2x^2+4$ Simplificamos.

$f'(x)=4x^3+6x^2-6x+4$

$f(x)=(x+3)(x-1)(x^2+2)$

Opción 2. Aplicar más de una vez la regla del producto.

$f(x)=[(x+3)(x-1)](x^2+2)$ Agrupamos términos y aplicamos la regla.

$f'(x)=[(x+3)(x-1)](2x)+(x^2+2)[(x+3)(1)+(x-1)(1)]$ Aplicamos otra vez la regla del producto.

$f'(x)=2x^3+4x^2-6x+(x^2+2)(2x+2)$ Desarrollamos.

$f'(x)=2x^3+4x^2-6x+2x^3+4x+2x^2+4$ Simplificamos.

$f'(x)=4x^3+6x^2-2x+4$

La opción que se tome al momento de realizar un ejercicio dependerá de las propias habilidades y de la complejidad de la función, ya que habrá ocasiones en las que no será posible desarrollar los términos de la función. Podríamos enfrentarnos a una multiplicación que contenga una función polinomial, una raíz y una función trigonométrica, por lo cual será más sencillo aplicar dos veces la regla del producto.

Regla del producto
$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.4

Resuelve las siguientes derivadas utilizando las fórmulas básicas.

1. $f(x)=(x^{-1}+2)(x^2+3)$
2. $f(x)=(x^{3/4})(x^2+2)$
3. $f(x)=(x+1)^2(x-5)$
4. $f(x)=(x^3+3x^2-5x)(2x-1)$
5. $f(x)=(x+1)(x-5)(x+6)$
6. $f(x)=(4x^5+7x^2)(x^3-1)$
7. $f(x)=(x^2-1)(x+1)(x-1)$
8. $f(x)=(3x^2+7)(2x-1)$
9. $f(x)=(3x+1)(2x^3+3)$

Regla de la división

CASO 4

Se calcula que el valor de ciertas acciones financieras en t meses después de salir del mercado vienen dadas por la función $y(t)$ en miles de pesos, y se desea saber en qué momento se pueden comprar las acciones al mejor precio.

$$y(t)=\frac{\sqrt{3t^2+5t}}{2t}$$

Para resolver este problema necesitamos derivar la función anterior, la cual es una división de dos funciones. Lo que tenemos que saber es cómo se deriva $y(t)$, y para ello necesitamos conocer la regla de la división o cociente.

La regla del cociente se aplica en aquellos casos en que existe una razón entre dos funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$. La función será diferenciable en todos los valores de x en los cuales $g(x) \neq 0$.

La fórmula del cociente implica que la derivada estará dada por el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador; todo esto dividido entre el cuadrado del denominador.

FÓRMULA

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

En este caso sí es imprescindible seguir en estricto orden la regla del cociente.

A continuación se muestran algunos ejemplos.

EJEMPLO 1

Es un error muy común olvidar que el signo de resta afecta a toda la segunda parte de la expresión

$$f(x)=\frac{3x^2-2}{x^3+7}$$

$$f'(x)=\frac{(x^3+7)(6x)-\overbrace{\left[(3x^2-2)(3x^2)\right]}}{(x^3+7)^2}=\frac{6x^4+42x-9x^4+6x^2}{(x^3+7)^2}$$

Ahora simplificamos términos.

$$f'(x)=\frac{-3x^4+6x^2+42x}{(x^3+7)^2}=\frac{-3x(x^3-2x-14)}{(x^3+7)^2}$$

Al final, para reducir más la expresión, podemos factorizar.

EJEMPLO 2

$$f(x)=\frac{-3x^2+2}{5x+1}$$

$$f'(x)=\frac{(5x+1)(-6x)-\left[(-3x^2+2)(5)\right]}{(5x+1)^2}=\frac{-30x^2-6x+15x^2-10}{(5x+1)^2}=\frac{-15x^2-6x-10}{(5x+1)^2}$$

EJEMPLO 3

$$f(x)=\frac{4x^2+1}{x-2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-2)(8x)-\left[(4x^2+1)(1)\right]}{(x-2)^2}=\frac{8x^2-16x-4x^2-1}{(x-2)^2}=\frac{4x^2-16x-1}{(x-2)^2}$$

EJEMPLO 4

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)(1)-\left[(x+1)(1)\right]}{(x-1)^2}=\frac{\cancel{x}-1\cancel{-x}-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

NOTA: ¿Podrías obtener los mismos resultados aplicando la regla del producto?

Regla de la división
$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

NOTA: La regla de la división parte de la regla de la multiplicación para funciones $g(x)^{-1}$. Es decir, podemos hacer uso de la ley de los exponentes para expresarlos de una u otra forma, y aplicar cualquiera de las dos reglas.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.5

Resuelve las siguientes derivadas utilizando las fórmulas básicas.

1. $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+2}$
2. $f(x)=\frac{(x+3)(x-5)}{x-7}$
3. $f(x)=\frac{-3x^4+5x^2+1}{x^2+5}$
4. $f(x)=\frac{x^3-1}{x}$
5. $f(x)=\left(\frac{3x^2+1}{x-5}\right)(7x^3+4)$
6. $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$
7. $f(x)=\frac{2x+3}{-x^2+2}$
8. $f(x)=\frac{x+3}{x^2-14x+49}$
9. $f(x)=\frac{1}{(x+5)^2}$

Regla de la función raíz cuadrada

En esta sección mostraremos cómo se deriva la función raíz.

CASO 5

$$\frac{d}{dx}\sqrt{3t^2+5t}=\frac{d}{dx}(3t^2+5t)^{1/2}$$

Para esta función necesitamos una regla.

Cuando nos enfrentemos a funciones irracionales de la forma $f(x)=\sqrt{x}$ su derivada estará dada por la siguiente fórmula:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{u}=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

La regla indica que la derivada de una función raíz cuadrada será igual a:

1. Poner la derivada de todo el radicando como *numerador*, dividido entre
2. Dos veces la función *original*.

EJEMPLO 1

Deriva $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-4x+2}.$

$u=x^2-4x+2$
$u'=2x-4$

Deriva de TODO el radicando

$$f'\left(x\right)=\frac{2x-4}{2\underbrace{\sqrt{x^2-4x+2}}}$$

Función ORIGINAL

Factor constante

NOTA: En este tipo de funciones y en las siguientes es conveniente identificar *u*, ponerla a un lado de la función original y hacer su derivada como en el ejemplo 1.

EJEMPLO 2

$f\left(x\right)=\sqrt{\left(x^2+1\right)}$

$u=x^2+1$

$u'=2x$

$$f'\left(x\right)=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{\left(x^2+1\right)}}=\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)}}$$

EJEMPLO 3

$f\left(x\right)=\sqrt{\left(x^3-7\right)}$

$u=x^3-7$

$u'=3x^2$

$$f'\left(x\right)=\frac{3x^2}{2\sqrt{\left(x^3-7\right)}}$$

Regla de la función raíz cuadrada
$\dfrac{d}{dx}\sqrt{u}=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

NOTA: En los casos en que tengamos funciones compuestas es imprescindible identificar *u*, ponerla por separado, derivarla y posteriormente aplicar la regla.

EJEMPLO 4

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3x}{1-x}}$$

$$u=\frac{x^2-3x}{1-x}$$ Recordemos que nuestra u será todo el radical.

$$u'=\frac{(1-x)(2x-3)-\left[(x^2-3x)(-1)\right]}{(1-x)^2}$$ Aplicamos la regla del cociente.

$$u'=\frac{-2x^2+5x-3+x^2-3x}{(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x-3}{(1-x)^2}$$

Observa que ya está hecha la mitad del trabajo; sólo tenemos que encontrar u', ya que el denominador siempre es 2 veces la función original

$$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{\frac{x^2-3x}{1-x}}}\rightarrow \text{Sustituimos } u' \text{ y tenemos que: } \frac{\frac{-x^2+2x-3}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2-3x}{1-x}}}$$

EJEMPLO 5

Observa en este ejemplo que en este tipo de derivadas la regla que va a predominar es la del producto.

$$f(x)=(x^2+5)\sqrt{x^2-1}$$

$$f'(x)=(x^2+5)\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2-1}(2x)$$ Reescribimos.

$$f'(x)=\frac{x(x^2+5)}{\sqrt{x^2-1}}+2x\sqrt{x^2-1}$$

Regla general de la función raíz

Para una función raíz n-ésima $f(x)=\sqrt[n]{x}$ o $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$, podemos aplicar la fórmula general de la raíz.

$$\frac{d}{dx}(u)^{\frac{1}{n}}=\frac{u'}{n(u)^{(1-\frac{1}{n})}}.$$

La ventaja de usar la regla general de la raíz sobre la regla de la cadena radica en que la regla general de la raíz pide solamente sustituir los términos adecuados.

EJEMPLO

Deriva la siguiente función utilizando la regla general de la función raíz.

$$f(x)=\left(-3x^2+2\right)^{\frac{1}{4}} \rightarrow f'(x)=\frac{-6x}{4\underbrace{\left(-3x^2+2\right)}_{\text{Función original}}^{1-\frac{1}{4}}}$$

En el numerador, colocar $\frac{du}{dx}$

Sustituir *N* por el radical

Función original

A un entero se le resta el exponente

$$f'(x)=\frac{-3x}{2\left(-3x^2+2\right)^{\frac{3}{4}}}$$

Regla general de la función raíz
$\frac{d}{dx}(u)^{\frac{1}{n}}=\frac{u'}{n(u)^{(1-\frac{1}{n})}}$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.6

Deriva las siguientes funciones utilizando la regla de la raíz cuadrada o la regla general de la raíz según sea el caso.

1. $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$
2. $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
3. $f(x)=\left(5x^2+7x\right)^{1/3}$
4. $f(x)=\sqrt[3]{2x-7}$
5. $f(x)=\sqrt{(x+2)\left(x^2+3\right)}$
6. $f(x)=\sqrt{-x^2+2}$
7. $f(x)=\sqrt{2x^3-1}$
8. $f(x)=\left(x^2+3\right)\sqrt{x^5+2}$
9. $f(x)=\sqrt[4]{x+2}$
10. $f(x)=\sqrt[5]{x^3+2x^2-x}$
11. $f(x)=\sqrt{\frac{1-3x^2}{x-9}}$
12. $f(x)=\sqrt{x}$

Regla de la cadena para funciones compuestas

CASO 6

La velocidad en km/h que alcanza un automóvil en una carrera de 500 m a campo traviesa está descrita por la función

$v(x)=(10x+45)^2$ donde x es la distancia recorrida.

¿Qué distancia ha recorrido el automóvil cuando alcanza su máxima velocidad?, ¿cuál es la velocidad máxima que alcanza?

Para solucionar este tipo de funciones sabemos que se debe derivar. Aunque en este ejemplo podemos desarrollar el binomio, puede ser que la función que se tenga sea más compleja o que sea una función compuesta.

La regla de la cadena dice que si $y = f(u)$ es una función derivable de u, y $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable de x, y

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ o, equivalentemente, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Si aplicamos la regla de la cadena a aquellas expresiones elevadas a un exponente diferente de 1, esta fórmula guarda mucha similitud con la regla de las potencias. Para poder usarla debemos considerar el interior de la expresión como una sola variable a la que llamaremos u y a la cual derivaremos usando la regla de la potencia.

De esta forma, si $y = f(u)$ donde $f(u)$ es una función derivable de u, y u es una función derivable de x, entonces:

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

En este caso, la regla de la cadena sigue los mismos pasos que la regla de las potencias.

1. Bajamos el exponente, cualquiera que éste sea.
2. Le restamos 1 al exponente original.
3. El interior de la función, es decir nuestra u permanece igual y se reescribe.
4. Por último multiplicamos por la derivada de u.

EJEMPLO 1

$$f(x) = \underbrace{\left(-3x^2+2\right)}_{u}^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(u)^{\frac{1}{4}-1} \bullet \frac{du}{dx}$$

Todo el interior es *u*

Multiplicar por la derivada de *u* con respecto de *x*

$$u = -3x^2 + 2$$

$$\frac{du}{dx} = u' = -6x$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(-3x^2+2\right)^{-\frac{3}{4}}(-6x) = \frac{-6x}{4\left(-3x^2+2\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{-3x}{2\left(-3x^2+2\right)^{\frac{3}{4}}}$$

Regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} f\left(g(x)\right) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

EJEMPLO 2

En este caso podemos hacer una de dos cosas: desarrollar una expresión elevada a la 99 potencia, lo cual sería absurdo, o aplicar la regla de la cadena.

$$f(x) = \left(3x^2 + 5x\right)^{99}$$
$$u = 3x^2 + 5x$$
$$u' = 6x + 5$$
$$f'(x) = 99\left(3x^2 + 5x\right)^{98}(6x+5)$$

Siempre es aconsejable al identificar nuestra *u* escribirla en una parte junto con su derivada

EJEMPLO 3

Veamos un caso en el que aplicarán la regla del producto y la regla de la cadena para derivar la función.

$$f(x) = \left(3x^2 + 7\right)^2 (4x-1)$$

Regla del producto:

$$f'(x) = \left(3x^2+7\right)^2 \left[(4x-1)\right]' + (4x-1)\left[\left(3x^2+7\right)^2\right]'$$

La derivada de $(4x-1)$ es:

$$\left[(4x-1)\right]' = 4$$

Para calcular la derivada de $\left(3x^2+7\right)^2$ debemos aplicar la regla de la cadena:

$$\left[\left(3x^2+7\right)^2\right]' = 2\left(3x^2+7\right)^{2-1}\left(3x^2+7\right)' = 2\left(3x^2+7\right)(6x) = (12x)\left(3x^2+7\right) = 36x^3 + 84x$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = (3x^2+7)^2(4) + (4x-1)(36x^3+84x)$$

Los dos errores más comunes de los estudiantes al aplicar la regla de la cadena

1. Olvidar multiplicar por $\dfrac{du}{dx}$.

EJEMPLO

$f(x) = (x^3-4x)^5 \rightarrow \cancel{5(x^3-4x)^4}$ Incorrecto.

$f(x) = (x^3-4x)^5 \rightarrow 5(x^3-4x)^4(3x^2-4)$ Correcto.

2. Sustituir $\dfrac{du}{dx}$ por la propia u y restarle el exponente.

EJEMPLO

$f(x) = (3x^2-1)^3 \rightarrow \cancel{3(6x)^2}$ Incorrecto.

$f(x) = (3x^2-1)^3 \rightarrow 3(3x^2-1)^2(6x)$ Correcto.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.7

Deriva las siguientes funciones usando la regla de la cadena.

1. $f(x) = (x^2+7)^{1/3}(x-2)$
2. $f(x) = (2x^3+5x)^4$
3. $f(x) = (7x-1)^{1/3}(x+2)$
4. $f(x) = (x+3)^2(x+2)$
5. $f(x) = (5x+1)^{10}$
6. $f(x) = (2x^2-4x^3)^5$
7. $f(x) = (x^6+5x^5+10x^4-3x^2+1)^2$
8. $f(x) = (x+1)^4$
9. $f(x) = (9-x)^{1/5}$

4.4 Reglas de derivadas de funciones trascendentales

Regla de las funciones exponenciales de base 10 y de base *e*

Funciones exponenciales de base 10

CASO 7

El ritmo o tasa de inflación anual es, en promedio, de 5% para los próximos 10 años; el costo aproximado C de bienes y servicios durante una década es

$$C(t) = P(1.05)^t$$

donde t es el tiempo en años y P es el costo anual.

Calcula la velocidad con la que aumenta el costo de los bienes en el tiempo.

Antes de empezar a analizar la regla de las funciones exponenciales debemos recordar que una función exponencial es la inversa de una función logarítmica de la misma base; es decir, si tenemos una función exponencial:

$$f(x) = a^x \text{, su inversa será } f(x) = \log_a(x)$$

Donde la base de ambas funciones está representada por la letra a y la variable por x.

Si $y = a^x$, entonces $x = \log_a$, y donde la función logarítmica es la inversa de la función exponencial para $b \neq 1$ y $b > 0$.

Ahora veamos cómo se obtuvo la fórmula directa de la derivada de una función exponencial.

$y = a^x$

Aplicamos el logaritmo a ambos lados para eliminar el exponente:

$\ln(y) = \ln(a^x)$

Aplicamos la ley de las potencias de los logaritmos:

$\ln(y) = x\ln(a)$

Derivamos los dos lados de la ecuación con respecto a la variable x:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln(a)$$

Ahora despejamos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y\ln(a)$$

Por último sustituimos y por su valor original, en este caso a^x:

$$\frac{dy}{dx} = a^x\ln(a)$$

Generalizando, la fórmula para cualquier caso sería:

$$f(x) = a^u$$
$$\frac{dy}{dx} = a^u \frac{du}{dx} \ln(a)$$

Para resolver las derivadas de funciones exponenciales podemos hacer todo el desarrollo o aplicar la fórmula directa; veamos ambos casos.

Desarrollo:

$$y = 3^{5x}$$

$\ln(y) = \ln(3^{5x})$ Aplicamos el logaritmo a ambos lados para eliminar el exponente.

$\ln(y) = 5x\ln(3)$ Aplicamos la ley de las potencias de los logaritmos.

$\boxed{\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}} = \underline{5\ln(3)}$ Derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a la variable x.

$\frac{dy}{dx} = y5\ln(3)$ Ahora despejamos $\frac{dy}{dx}$

Ya que $y = 3^{5x}$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = 3^{5x}5\ln(3)$$

Sustitución en fórmula:

$$y = 3^{5x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\boxed{3^{5x}}}_{\text{Función original}} \overbrace{(5)}^{\text{Derivada del exponente}} \underbrace{\ln(3)}_{\text{Logaritmo natural de la base}}$$

Funciones exponenciales de base e

El rendimiento V (en millones de pies cúbicos por acre) de un bosque de t años es $f(t) = 2e^{-2t} + 5t$.

a) Calcular el volumen límite de madera por acre cuando t tiende al infinito.

b) Calcular la velocidad de cambio de V cuando $t = 20$ y cuando $t = 60$ años.

Para encontrar la velocidad hay que derivar esta función. Si la descomponemos en dos funciones podemos derivar cada función por separado y al final hacer la suma de ambas. Por un lado tenemos la función $5t$ que no tiene problema para ser derivada; pero aún no sabemos cómo se deriva la función $2e^{2t}$.

La derivada de una función exponencial de base e es más sencilla que la derivada de una función exponencial de base 10, ya que el logaritmo natural de e es igual a 1, de modo que la fórmula directa queda de la siguiente manera:

$$f(x)=e^{u}$$
$$\frac{dy}{dx}=e^{u}\frac{du}{dx}$$

donde los pasos a seguir para derivar son los mismos:

$y=e^{x}$	
$\ln(y)=\ln(e^{x})$	Aplicamos el logaritmo a ambos lados para eliminar el exponente.
$\ln(y)=x\ln(e)$	Aplicamos la ley de las potencias de los logaritmos.
$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\ln(e)$	Derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a la variable x.
$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\ln(e)=1$	El logaritmo natural de e es igual a 1.
$\frac{dy}{dx}=y$	Ahora despejamos $\frac{dy}{dx}$.
$\frac{dy}{dx}=e^{x}$	Por último, sustituimos y por su valor original, en este caso e^{x}.

Al igual que en el caso de las funciones exponenciales de base 10, podemos aplicar todos los pasos aunque, obviamente, es más cómodo aplicar la regla directa, la cual sería:

1. Colocar de nuevo toda la función original como está.
2. Multiplicar por la derivada del exponente, representada por $\frac{du}{dx}$ de la función.

La regla directa quedaría entonces como:

$$y=e^{2x}$$
$$\frac{dy}{dx}=\boxed{e^{2x}}(2)$$

Derivada del exponente

Función original

Reglas de las funciones exponenciales	
FUNCIONES EXPONENCIALES DE BASE 10	**FUNCIONES EXPONENCIALES DE BASE e**
$f(x)=a^{u}$ $\frac{dy}{dx}=a^{u}\frac{du}{dx}ln(a)$	$f(x)=e^{u}$ $\frac{dy}{dx}=e^{u}\frac{du}{dx}$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.8

En las funciones impares aplica la regla directa. En las funciones pares aplica el procedimiento completo.

1. $f(x)=2^{2x}$	4. $f(x)=7^{2x}$	7. $f(x)=e^{x}(x+1)$
2. $f(x)=e^{-3x}$	5. $f(x)=e^{2x+1}$	8. $f(x)=-3^{4x^2}$
3. $f(x)=4e^{-2x}$	6. $f(x)=5^{2x+1}$	9. $f(x)=9^{x}$

Regla de las funciones logarítmicas

CASO 8

El término t en años de una hipoteca de \$200,000 con 7.5% de interés puede aproximarse utilizando la siguiente función.

$t=13.375\ln\left(\dfrac{x}{x-1{,}250}\right)$, $x>1{,}250$, donde x es el pago mensual en dólares.

Se propone encontrar la razón de cambio instantánea de t con respecto de x cuando $x=\$1{,}300.00$ y $x=\$1{,}700.00$

Para ello debemos derivar la función y utilizar la regla de los logaritmos.

Al igual que la regla de la función exponencial, la regla de la función logarítmica existe para el caso de base 10 y de base e y, al igual que en la función exponencial, lo más común son funciones de base e. La derivada de una función exponencial existe siempre y cuando $a\neq 1$ y $a>0$.

Ahora veremos la demostración de la fórmula por medio de límites.

$$\lim \frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a\left[(x+\Delta x)/(x)\right]}{\Delta x}$$ Regla de logaritmos.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$ Regla de los logaritmos $\log_a C^m = m\log_a C$

$$\lim_{x\to 0} \log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{1/x}$$ Regla de una potencia.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$\frac{1}{x}\lim_{x\to 0} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$ $1/x$ es fijo.

$$\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$ $\log_a$ es continuo.

$$\frac{1}{x}\log_a e$$

Al igual que con otro tipo de derivadas, como la de la raíz cuadrada, al utilizar la regla del logaritmo ***la mitad del trabajo ya está hecha***; sólo debemos encontrar u' y poner la función original en el denominador.

Caso de base natural

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$$

$$f'(x)=\frac{2x}{\underbrace{x^2+1}}$$

Derivada de la función original

Función original, lo que denota que la mitad del trabajo ya está hecha

Mismo ejemplo, pero con base 10:

$$f(x)=\log\left(x^2+1\right)$$

$$f'(x)=\frac{2x\log(e)}{x^2+1}\ \text{o}\ \frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln(10)}$$

Podemos concluir que ambas reglas son iguales, sólo que en el caso del logaritmo de base 10 también debemos multiplicarlo por $\log(e)$ o dividirlo entre $\ln(10)$.

NOTA: Un error muy común es forzar a que aparezca el logaritmo en el resultado; es importante observar que no existe en el caso del logaritmo de base natural.

Reglas de las funciones logarítmicas	
FUNCIONES LOGARÍTMICAS DE BASE 10	**FUNCIONES LOGARÍTMICAS DE BASE *e***
$\frac{d(\log u)}{dx}=\frac{u'\log e}{u}$ o $\frac{d(\log u)}{dx}=\frac{1}{\ln(10)x}$	$\frac{d(\ln u)}{dx}=\frac{u'}{u}$

EJEMPLOS

1. $-f(x)=x^2\ln(x)$

$$f'(x)=x^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{x}}+2x\ln(x)=x+2x\ln=x(1+2\ln(x))$$

2. $-f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

$$f'(x)=\frac{x\left(\frac{1}{x}-\ln(x)\right)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.9

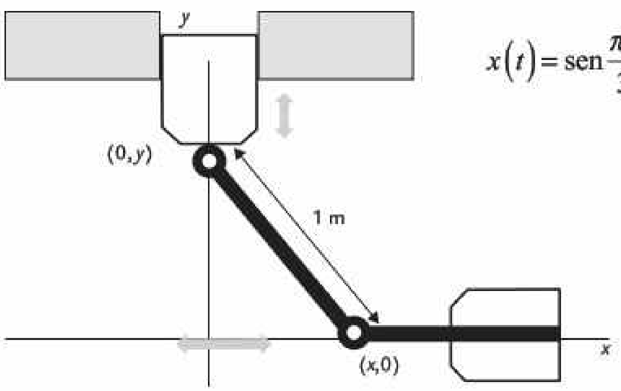
Aplica la regla de las funciones logarítmicas de base natural o de base 10, según sea el caso.

1. $f(x)=\ln(x^2+4x+4)$
2. $f(x)=\log(5x^3-7x+1)$
3. $f(x)=\ln(e^x)$
4. $f(x)=\ln\left((5x-7)^2\right)$
5. $f(x)=\ln\left((3x+5)(4x^2+6)\right)$
6. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x+1}\right)$
7. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
8. $f(x)=\log\left((3-x)^2\right)$
9. $f(x)=\log(e^x)$

Regla de las funciones trigonométricas

CASO 9

Para el diseño de una máquina se dice que los extremos de una varilla móvil de 1 m de longitud tienen las coordenadas $(x,0)$ y $(0,y)$. La posición del extremo que se apoya en el eje x es:



$x(t)=\operatorname{sen}\dfrac{\pi t}{3}$, donde t se mide en segundos.

¿Cuál es el punto más bajo que alcanza el extremo de la varilla que está en el eje y?

Encuentra la velocidad del extremo que se mueve por el eje y cuando el otro extremo está en (1/4,0).

Primero debemos derivar la función; pero para ello necesitamos saber cómo se derivan las funciones trigonométricas.

Las funciones trigonométricas suelen confundir al estudiante, sobre todo por el uso de las identidades trigonométricas tanto al momento de simplificar como al de derivar. Veamos ahora un ejemplo de este caso:

Método 1:

$$f(x) = \text{sen}(2x)$$
$$u = 2x$$
$$u' = 2$$

Aplicamos la fórmula directa:

$$f'(x) = 2\cos(2x)$$

Método 2:

$$f(x) = \text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x)$$ Identidad trigonométrica de ángulo doble.

Aplicamos la fórmula del producto:

$$f'(x) = 2\left(\text{sen}(x)\left(-\text{sen}(x)\right) + \cos(x)\left(\cos(x)\right)\right)$$
$$f'(x) = 2\left(\left(-\text{sen}^2(x)\right) + \cos^2(x)\right) = 2\left(\overbrace{\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)}\right)$$ Identidad trigonométrica de ángulo doble.
$$f'(x) = 2\cos(2x)$$

Como podemos observar, hay más de una forma de obtener el mismo resultado. El problema radica en qué fórmula usar, qué identidad usar, y qué y cómo simplificar. Ésta es la razón por la que al final de este capítulo se propone una estrategia sencilla que te sirva para que puedas identificar las reglas adecuadas y saber qué hacer al momento de derivar.

Por ahora te aconsejamos que consultes el uso de las identidades trigonométricas y consideres la posibilidad de simplificar la expresión antes de empezar a derivar para evitar pasos innecesarios y operaciones muy complejas. Asimismo, conviene revisar las identidades al momento de reducir términos, de manera que el resultado final se presente en términos más sencillos.

La siguiente tabla muestra las seis funciones trigonométricas y sus respectivas derivadas.

Tabla 4.1 Funciones trigonométricas y sus derivadas.

Funciones trigonométricas	Derivadas de funciones trigonométricas
sen(u)	$\cos(u)\dfrac{du}{dx}$
cos(u)	$-\text{sen}(u)\dfrac{du}{dx}$
tan(u)	$\sec^2(u)\dfrac{du}{dx}$

Tabla 4.1 Funciones trigonométricas y sus derivadas. (*Continuación*).

Funciones trigonométricas	Derivadas de funciones trigonométricas
$\cot(u)$	$-\csc^2(u)\dfrac{du}{dx}$
$\sec(u)$	$\sec(u)\tan(u)\dfrac{du}{dx}$
$\csc(u)$	$-\csc^2(u)\cot(u)\dfrac{du}{dx}$

Estas seis fórmulas directas de las funciones trigonométricas se obtuvieron, al igual que el resto de las fórmulas, mediante la definición formal de la derivada. Ejemplificaremos este proceso utilizando la función seno.

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen}(x)}{\Delta x}$$

Aplicamos la identidad trigonométrica: sumatoria de dos ángulos.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(\Delta x) + \operatorname{sen}(\Delta x)\cdot\cos(x)\right) - \operatorname{sen}(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos(x)\frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} - \operatorname{sen}(x)\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

Factorizamos y aplicamos el límite.

$$f'(x) = \cos(x)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}\right) - \operatorname{sen}(x)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}\right)$$

Resolvemos.

$f'(x) = \cos(x)(1) - \operatorname{sen}(x)(0)$ Por lo tanto la derivada de $\operatorname{sen}(x)$ será:

$$f'(x) = \cos(x)$$

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra la siguiente actividad a tu portafolio de evidencias.

3. Demuestra que la derivada de coseno es menos seno, utilizando el límite.

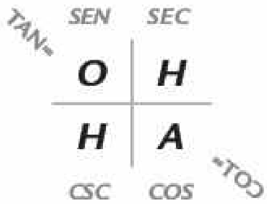
¿?

¿Soy capaz de aplicar las reglas de derivación (regla de la potencia, regla de la multiplicación y regla de la raíz)?

¿Conozco las derivadas de las funciones trigonométricas?

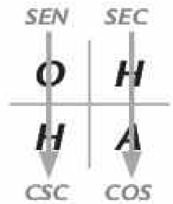
Rompecabezas trigonométrico

Al trabajar con funciones trigonométricas es conveniente saber a qué equivale cada función. Presentamos una manera muy sencilla de recordarlas, a la cual llamaremos *rompecabezas trigonométrico*:



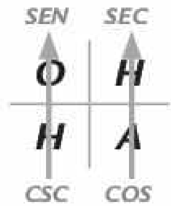
Esto se lee de la siguiente manera:

1. El seno y la secante se leen de arriba hacia abajo:



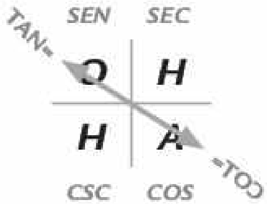
$$SEN = \frac{O}{H} \quad \text{y} \quad SEC = \frac{H}{A}$$

2. La cosecante y el coseno se leen de abajo hacia arriba.



$$CSC = \frac{H}{O} \quad \text{y} \quad COS = \frac{A}{H}$$

3. La tangente y la cotangente se pueden leer en forma diagonal.

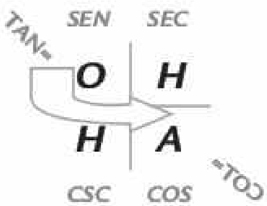


$$TAN = \frac{O}{A} \quad \text{y} \quad COT = \frac{A}{O}$$

4. Sin embargo, también podemos leer la tangente y la cotangente como la multiplicación de las dos funciones contiguas, es decir:

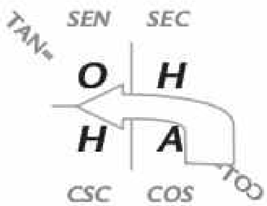
$$TAN = \left(SEN\right)\left(SEC\right)$$

$$TAN = \frac{O}{\cancel{H}}\frac{\cancel{H}}{A} = \frac{O}{A}$$



$$COT = \left(COS\right)\left(CSC\right)$$

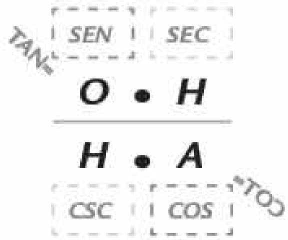
$$COT = \frac{A}{\cancel{H}}\frac{\cancel{H}}{O} = \frac{A}{O}$$



5. O bien, sería lo mismo con la división con la función de la esquina contraria:

$$TAN=\frac{SEN}{COS}$$

$$TAN=\frac{\frac{O}{H}}{\frac{A}{H}}=\frac{O\cancel{H}}{A\cancel{H}}=\frac{O}{A}$$



$$COT=\frac{COS}{SEN}$$

$$COT=\frac{\frac{A}{H}}{\frac{O}{H}}=\frac{A\cancel{H}}{O\cancel{H}}=\frac{A}{O}$$

6. Por último, y como ya lo habrás notado, la función contraria es la inversa de la otra función. Es decir, la cosecante es la inversa del seno, de la misma manera que la secante es la inversa del coseno. Lo mismo podríamos asegurar para la cotangente y la tangente, con lo que la expresión queda de la siguiente manera:

$$SEN=\frac{1}{SEC} \qquad SEC=\frac{1}{SEN}$$

$$COS=\frac{1}{SEC} \longleftrightarrow SEC=\frac{1}{COS}$$

$$TAN=\frac{1}{COT} \qquad COT=\frac{1}{TAN}$$

EJEMPLOS

Deriva las siguientes funciones trigonométricas.

1. $f(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

En este caso es más sencillo aplicar las propiedades de las funciones trigonométricas.

$$f(x)=\frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$f(x)=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ y ahora derivamos.

$$u=\frac{x}{2}$$

$$u'=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

2. $f(x)=\dfrac{2\tan(x)}{1-\tan(x^2)}$

En este caso es más sencillo aplicar las propiedades de las funciones trigonométricas.

$$f(x)=\frac{2\tan(x)}{1-\tan(x^2)}=\tan(2x)$$

$f(x)=\tan(2x)$ y ahora derivamos

$u=2x$

$u'=2$

$f'(x)=2\sec^2(2x)$

3. $f(x)=\ln(\text{sen}(x))$ Se deriva aplicando la regla del logaritmo.

$f'(x)=\dfrac{u'}{u}=\dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}=\dfrac{1}{\tan(x)}=\cot(x)$ Identidad trigonométrica.

4. $f(x)=(\ln(5x))(\text{sen}(2x))$ Se deriva aplicando la regla del producto.

$f'(x)=(\ln(5x))(2\cos(2x))+(\text{sen}(2x))\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5. $f(x)=\dfrac{1-\text{sen}(x)}{\cos(x)}$ Aplicamos la regla del cociente.

$f'(x)=\dfrac{\cos(x)(-\cos(x))-[(1-\text{sen}(x))(-\text{sen}(x))]}{(\cos(x))^2}$ Ahora desarrollamos la expresión.

$f'(x)=\dfrac{-\cos^2(x)+\text{sen}(x)-\text{sen}^2(x)}{(\cos(x))^2}$ Factorizamos el signo $(-)$.

$$f'(x)=\frac{-\left[\boxed{\cos^2(x)}-\text{sen}(x)+\boxed{\text{sen}^2(x)}\right]}{(\cos(x))^2}$$

Identificamos y aplicamos las identidades existentes:

$\text{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$

$$f'(x)=\frac{-\left[\boxed{1}-\text{sen}(x)\right]}{(\text{co}(x))^2}=\frac{-1+\text{sen}(x)}{(\cos(x))^2}$$

¿?

¿Soy capaz de identificar qué regla debo de aplicar según el tipo de función?

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.10

Resuelve las siguientes derivadas utilizando las reglas básicas de derivación.

1. $f(x)=\operatorname{sen}^2(3x)\cos^3(2x)$
2. $f(x)=\ln(\cos(3x))$
3. $f(x)=-3\cos(4x)$
4. $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}$
5. $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}$
6. $f(x)=\dfrac{1+\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}$
7. $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}(2x)}$
8. $f(x)=\dfrac{\sec(x)}{\sqrt{x}}$
9. $f(x)=\operatorname{sen}(\sqrt{2x})$
10. $f(x)=x+\operatorname{sen}(x)\cos(x)$
11. $f(x)=\csc(3x)\cos(3x)$
12. $f(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra la siguiente actividad a tu portafolio de evidencias.

4. Utiliza el rompecabezas trigonométrico para obtener las 16 funciones trigonométricas.

Regla de las funciones trigonométricas inversas

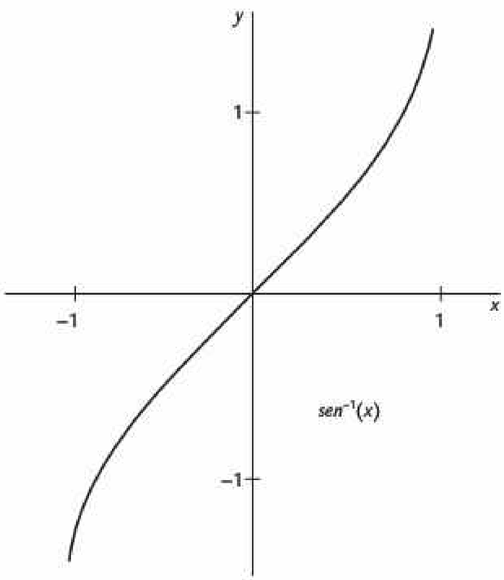
Las funciones trigonométricas inversas se usan en el cálculo moderno con el fin de proporcionar las fórmulas necesarias para funciones recurrentes en el cálculo integral, como $\dfrac{1}{1+x^2}$ y $\sqrt{1-x^2}$, ya que sin ellas sería imposible obtener la antiderivada de dichas funciones, lo que sería un verdadero inconveniente para los problemas de la vida real que así lo requirieran. En otras palabras, las derivadas de las funciones trigonométricas inversas se crearon para resolver integrales. Esto nos recuerda la relación inversa entre dichos procesos, establecida por Newton y Leibniz, asentada en el teorema fundamental del cálculo.

Por otro lado, la relevancia de las funciones trigonométricas inversas queda confinada a las funciones **seno**, **tangente** y **secante**, como aparece en la mayoría de las tablas de integrales, ya que las funciones restantes **coseno**, **cotangente** y **cosecante** sólo difieren en el signo ($-$), como se muestra en la tabla 4.2, por lo que al momento de integrar resulta más conveniente factorizar el signo ($-$) que recordar otras tres fórmulas más.

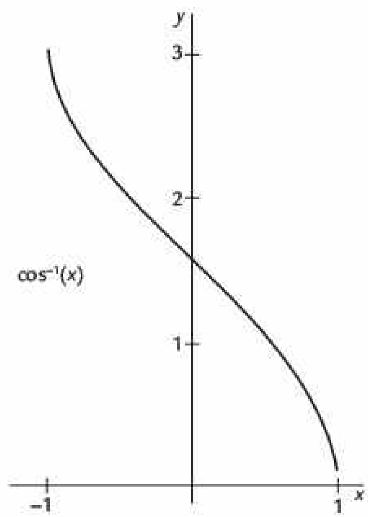
Tabla 4.2 Funciones trigonométricas inversas.

Funciones trigonométricas inversas	Derivadas	Dominio	Imagen
$\text{sen}^{-1}(u)$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}(u)$	$\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\tan^{-1}(u)$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$(-\infty,\infty)$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$
$\cot^{-1}(u)$	$\dfrac{-u'}{1+u^2}$	$(-\infty,\infty)$	$(-\pi,0)$
$\sec^{-1}(u)$	$\dfrac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\csc^{-1}(u)$	$\dfrac{-u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

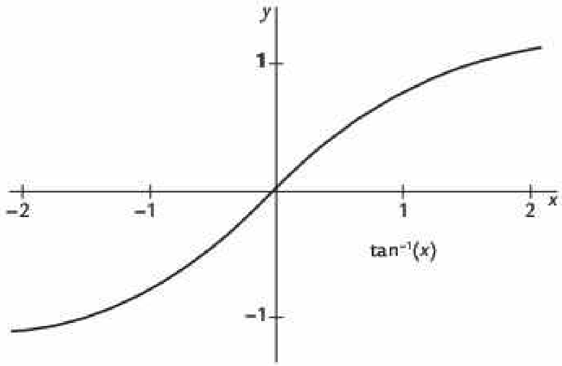
A continuación se ilustran las gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas.



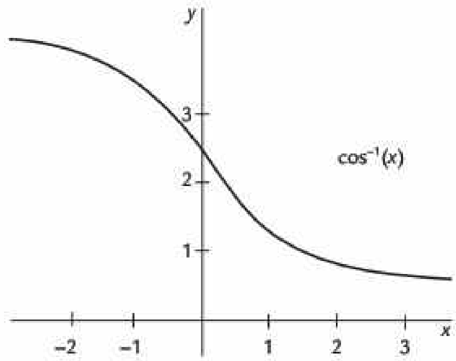
Gráfica 4.10



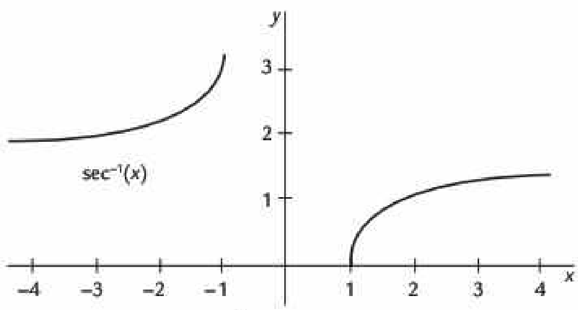
Gráfica 4.11



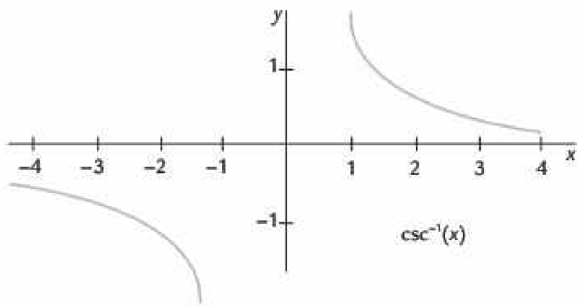
Gráfica 4.12



Gráfica 4.13



Gráfica 4.14



Gráfica 4.15

EJEMPLO 1

Deriva la siguiente función:

$$f(x) = \text{sen}^{-1}(4x)$$

$$u = 4x$$
$$u' = 4$$

Para derivar se usa la fórmula correspondiente y se hacen las sustituciones:

Colocamos la derivada del ángulo

$$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{4}{\sqrt{1-\underbrace{(4x)}_{}^2}} = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$$

Sustituimos *u*

EJEMPLO 2

Deriva la siguiente función:

$$f(x)=\tan^{-1}\left(\sqrt{x^2-3}\right)$$

$$u=\sqrt{x^2-3}$$

$$u'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$$

$$f'(x)=\frac{u'}{1+u^2}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}}{1+\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}}{1+x^2-3}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}}{\frac{x^2-2}{1}}$$ Ley de los extremos

$$f'(x)=\frac{x}{\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2-3}}$$

EJEMPLO 3

Deriva la siguiente función:

$$f(x)=\sec^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$$

$$u=\sqrt{x}$$

$$u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}\right)}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x-1}\right)}{1}}$$ Ley de los extremos.

$$f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$$

EJEMPLO 4

Deriva la siguiente función:

$$f(x) = \csc^{-1}(7x^4)$$
$$u = 7x^4$$
$$u' = 28x^3$$
$$f'(x) = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}} = \frac{28x^3}{7x^4\sqrt{(7x^4)^2-1}} = \frac{28x^3}{7x^4\sqrt{49x^8-1}}$$

¿?

¿Soy capaz de derivar las funciones trigonométricas inversas?

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.11

Resuelve las siguientes derivadas utilizando las fórmulas básicas.

1. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}$
2. $f(x) = \cos^{-1}(1-x^2)$
3. $f(x) = \cot^{-1}(x^2+3)$
4. $f(x) = \sec^{-1}(\ln(x))$
5. $f(x) = (x^2+1)(\tan^{-1}(x))$
6. $f(x) = \csc^{-1}(7x)$
7. $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$
8. $f(x) = \tan^{-1}(4x)$
9. $f(x) = \sec^{-1}(-3x)$

Regla de las funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas, pese a la similitud en el nombre con las funciones trigonométricas, no guardan relación alguna con ellas. En el capítulo 2 estudiamos que las funciones trigonométricas se definen ya sea a partir de un triángulo rectángulo o de un círculo unitario, y una característica distintiva de ellas es su periodicidad; sin embargo, las funciones hiperbólicas ni se definen con base en un triángulo rectángulo ni son periódicas.

De hecho, las funciones hiperbólicas provienen de la combinación de dos funciones exponenciales de base natural.

La repetición de tal combinación de estas funciones exponenciales ocurre tanto en ingeniería, que se decidió agruparlas bajo el nombre de ***funciones hiperbólicas***, las cuales aparecen sobre todo en los estudios de transmisión de electricidad y suspensión de cables.

Sin embargo, la terminología trigonométrica usada para designarlas proviene de la similitud entre las identidades trigonométricas y estas funciones exponenciales.

EJEMPLO

Identidad trigonométrica

$$\frac{\text{sen}}{\cos}=\frac{\frac{O}{\cancel{H}}}{\frac{A}{\cancel{H}}}=\frac{O}{H}=\tan$$

Identidad hiperbólica

$$\frac{\text{senh}}{\cosh}=\frac{\frac{e^{u}-e^{-u}}{\cancel{2}}}{\frac{e^{u}+e^{-u}}{\cancel{2}}}=\frac{e^{u}-e^{-u}}{e^{u}+e^{-u}}=\tanh$$

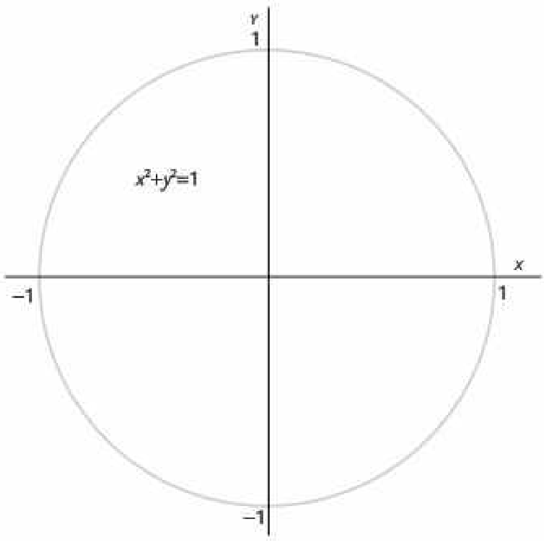
En otras palabras, las 16 relaciones que proporciona el *rompecabezas* trigonométrico se pueden aplicar a las funciones hiperbólicas.

TAN=

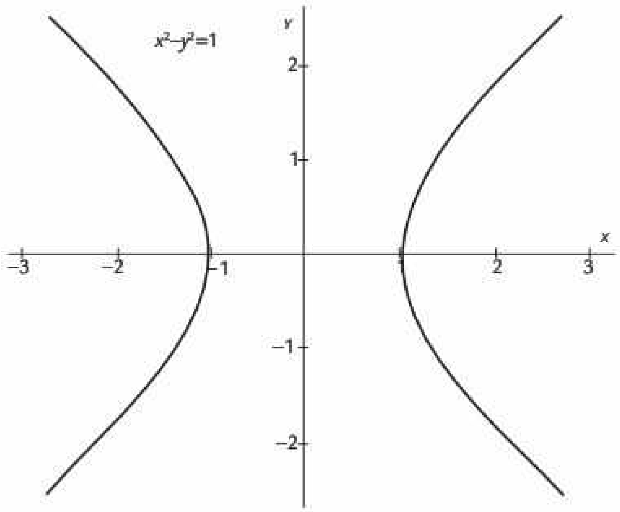
SENH	SECH
$e^{u}-e^{-u}$	2
2	$e^{u}+e^{-u}$
CSCH	COSH

COT=

La explicación de la relación entre las identidades trigonométricas y las hiperbólicas se basa en su similitud geométrica, la cual de hecho las hace diferir en un signo que provoca la diferencia entre el círculo de las funciones trigonométricas y la hipérbola:



Gráfica 4.16



Gráfica 4.17

De ahí que una identidad muy común de las funciones trigonométricas $\text{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$ difiera de la correspondiente identidad hiperbólica $\cosh^2(x)=1-\text{senh}^2(x)$ sólo en un signo. Con esta identidad cuadrática y la del *rompecabezas* ya tenemos 17 identidades hiperbólicas. Definiremos algunas más de manera similar.

Identidades hiperbólicas

1. De términos cuadráticos:

$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$

$\operatorname{sech}^2(x) + \tanh^2(x) = 1$

$\coth^2(x) - \operatorname{csch}^2(x) = 1$

2. Reducción de exponente:

$\operatorname{senh}^2(x) = \frac{1}{2}\cosh(2x) - \frac{1}{2}$

$\cosh^2(x) = \frac{1}{2}\cosh(2x) + \frac{1}{2}$

$\tanh^2(x) = \dfrac{\cosh(2x) - 1}{\cosh(2x) + 1}$

3. De ángulo doble:

$\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$

$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x)$

$\cosh(2x) = 1 + 2\operatorname{senh}^2(x)$

$\cosh(2x) = 2\cosh^2(x) - 1$

4. De ángulos compuestos:

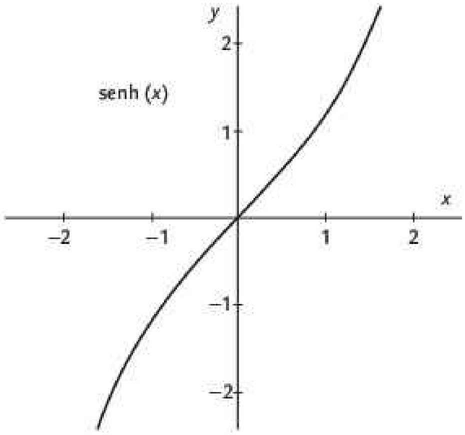
$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$

$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x) + \operatorname{senh}(y)$

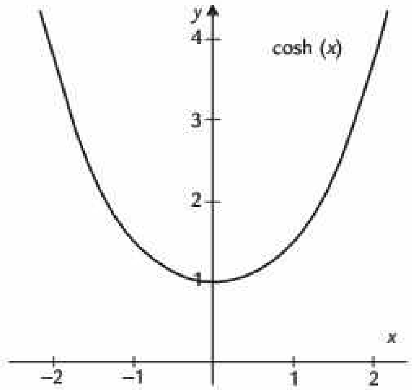
Tabla 4.3 Funciones hiperbólicas.

Funciones hiperbólicas	Fórmula	Derivada
$\operatorname{senh}(u)$	$\dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$	$\cosh(u) \cdot u'$
$\cosh(u)$	$\dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$	$\operatorname{senh}(u) \cdot u'$
$\tanh(u)$	$\dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$	$\operatorname{sech}^2(u) \cdot u'$
$\coth(u)$	$\dfrac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$	$-\operatorname{csch}^2(u) \cdot u'$
$\operatorname{sech}(u)$	$\dfrac{2}{e^u + e^{-u}}$	$-\operatorname{sech}(u) \cdot \tanh(u) \cdot u'$
$\operatorname{csch}(u)$	$\dfrac{2}{e^u - e^{-u}}$	$-\operatorname{csch}(u) \cdot \coth(u) \cdot u'$

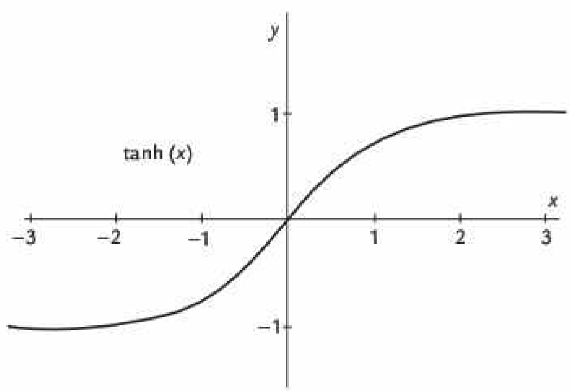
Las gráficas 4.18 a 4.23 ilustran las seis funciones hiperbólicas.



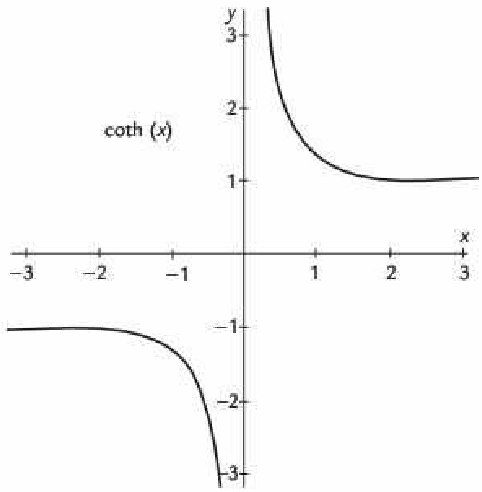
Gráfica 4.18



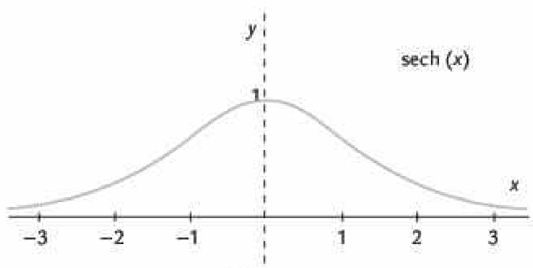
Gráfica 4.19



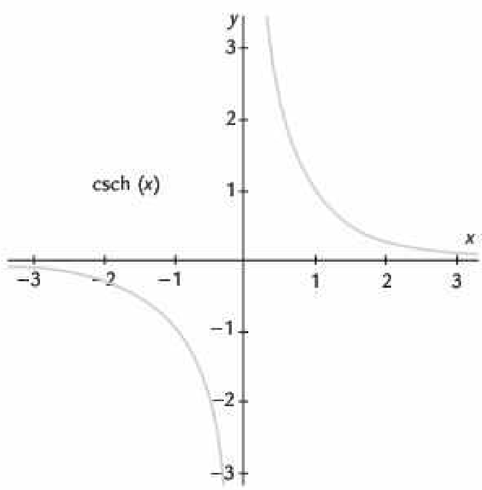
Gráfica 4.20



Gráfica 4.21



Gráfica 4.22



Gráfica 4.23

EJEMPLO 1

Deriva la siguiente función:

$f(x) = \text{senh}(x)\cosh(x)$ Aplicamos la regla del producto.

$f'(x) = \text{senh}(x)\text{senh}(x) + \cosh(x)\cosh(x)$

$f'(x) = \text{senh}^2(x) + \cosh^2(x)$ Y con la identidad de ángulo doble.

$f'(x) = \cosh(2x)$

EJEMPLO 2

Deriva la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1-\text{senh}(x)}{\cosh(x)}$$ Aplicamos la regla del cociente.

$$f'(x) = \frac{\cosh(x)(-\cosh(x)) - [(1-\text{senh}(x))\text{senh}(x)]}{\cosh^2(x)}$$ Simplificamos.

$$f'(x) = \frac{\boxed{-\cosh^2(x)} - \text{senh}(x) + \boxed{\text{sen}^2\text{h}(x)}}{\cosh^2(x)}$$ Factorizamos un signo y ordenamos para aplicar la identidad.

$$f'(x) = \frac{-(\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x) + \text{senh}(x))}{\cosh^2(x)} = \frac{-(1+\text{senh}(x))}{\cosh^2(x)}$$

Identidad de términos cuadráticos
$\cosh^2(x) - \text{senh}^2(x) = 1$

EJEMPLO 3

Deriva la siguiente función:

$f(x) = \ln(\text{csch}(x))$ Aplicamos $\frac{u'}{u}$.

$$f'(x) = \frac{-\cancel{\text{csch}(x)}\coth(x)}{\cancel{\text{csch}(x)}} = -\coth(x)$$

¿?

¿Conozco las identidades trigonométricas y las hiperbólicas y soy capaz de usarlas para derivar funciones?

¿Comprendo la naturaleza de las funciones hiperbólicas?

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.12

Resuelve las siguientes derivadas utilizando las fórmulas básicas.

1. $f(x)=1-\operatorname{sech}^2(x)$
2. $f(x)=\ln(\operatorname{senh}(-3x))$
3. $f(x)=\dfrac{\cosh(2x)-1}{\cosh(2x)+1}$
4. $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{senh}(x)-\cosh(x)}$
5. $f(x)=\cosh^2(5x)$
6. $f(x)=\dfrac{\operatorname{senh}(x)}{1+\cosh(x)}$
7. $f(x)=\operatorname{sech}(3x)\cosh(3x)$
8. $f(x)=\operatorname{senh}\left(\sqrt{7x}\right)$
9. $f(x)=\operatorname{senh}^2(x)$

Regla de las funciones hiperbólicas inversas

Al igual que las funciones trigonométricas inversas, la relevancia de las funciones hiperbólicas inversas radica en que proporcionan la forma primitiva para funciones recurrentes en el cálculo integral, ya que las funciones hiperbólicas están formadas por combinación (suma o resta) de funciones exponenciales; las funciones hiperbólicas inversas proporcionan las antiderivadas necesarias para funciones logarítmicas del tipo $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ y $\ln\left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.

De la misma manera que con las funciones trigonométricas inversas, la mayoría de las tablas de integrales sólo se expresan en términos de **seno, tangente** y **secante hiperbólica inversa**, ya que las funciones restantes sólo difieren en un signo ($-$), como se puede apreciar en la tabla 4.4.

La relación que existe entre las seis funciones hiperbólicas inversas no sólo se refiere a la función sino también a su contenido, estableciéndose de la siguiente forma:

$$\operatorname{senh}^{-1}(x)=\operatorname{csch}^{-1}\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x)=\operatorname{sech}^{-1}\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$$\tanh^{-1}(x)=\coth^{-1}\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

La tabla 4.4 ilustra la función, su fórmula y su derivada, también se presentan sus respectivas gráficas (4.24 a 4.29).

Tabla 4.4 Función, su fórmula y su derivada.

Función	Fórmula	Derivada	Dominio
$\text{senh}^{-1}(u)$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	Eje x
$\cosh^{-1}(u)$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \geq 1$
$\tanh^{-1}(u)$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\coth^{-1}(u)$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert > 1$
$\text{sech}^{-1}(u)$	$\ln\left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{1-x^2}}$	$0 < x \leq 1$
$\text{csch}^{-1}(u)$	$\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}$	$x \neq 0$

NOTA: Así como las derivadas de las funciones hiperbólicas son muy similares a las funciones trigonométricas, las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas se asemejan a sus correspondientes trigonométricas.

EJEMPLO 1

Deriva la siguiente función:

$$f(x)=\cosh^{-1}(x-1)$$

$$u=x-1$$
$$u'=1$$

Sustituimos en la fórmula u' y u

$$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x\cancel{+1}\cancel{-1}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

Si deseamos factorizar una x podemos llegar a:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-2}}$$

EJEMPLO 2

Deriva la siguiente función:

$$f(x) = \operatorname{senh}^{-1}(\ln(x))$$

$$u = \ln(x)$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{(\ln(x))^2+1}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{(\ln(x))^2+1}}{1}}$$

Ley de los extremos

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{(\ln(x))^2+1}}$$

EJEMPLO 3

Deriva la siguiente función:

$$f(x) = \operatorname{sech}^{-1}(\sqrt{x})$$

$$u = \sqrt{x}$$

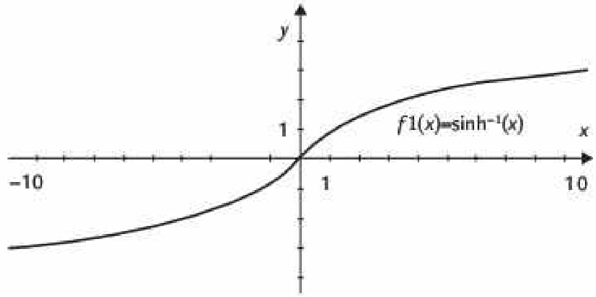
$$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}{1}}$$

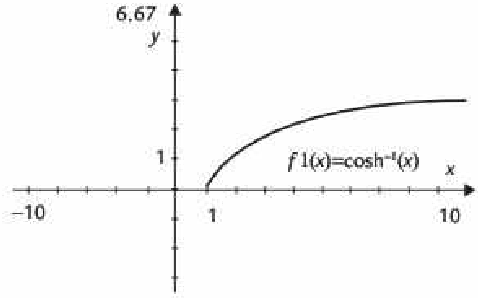
Ley de los extremos

$$f'(x) = \frac{-1}{2x\cdot\sqrt{1-x}}$$

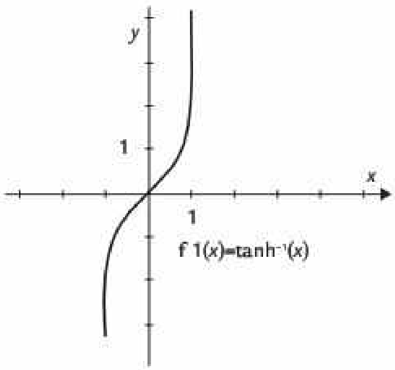
Las gráficas 4.24 a 4.29 ilustran las seis funciones hiperbólicas inversas.



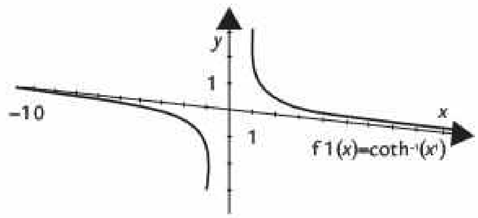
Gráfica 4.24



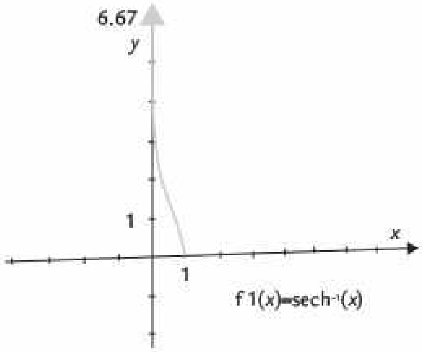
Gráfica 4.25



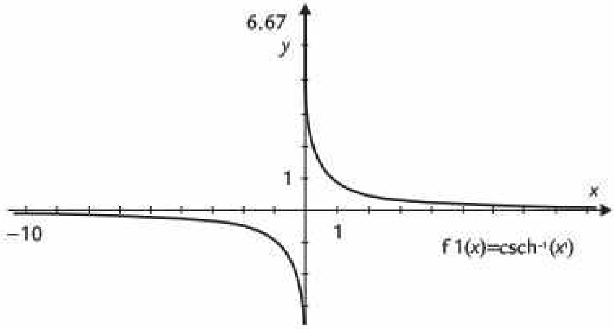
Gráfica 4.26



Gráfica 4.27



Gráfica 4.28



Gráfica 4.29

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.13

Resuelve las siguientes derivadas utilizando las fórmulas básicas.

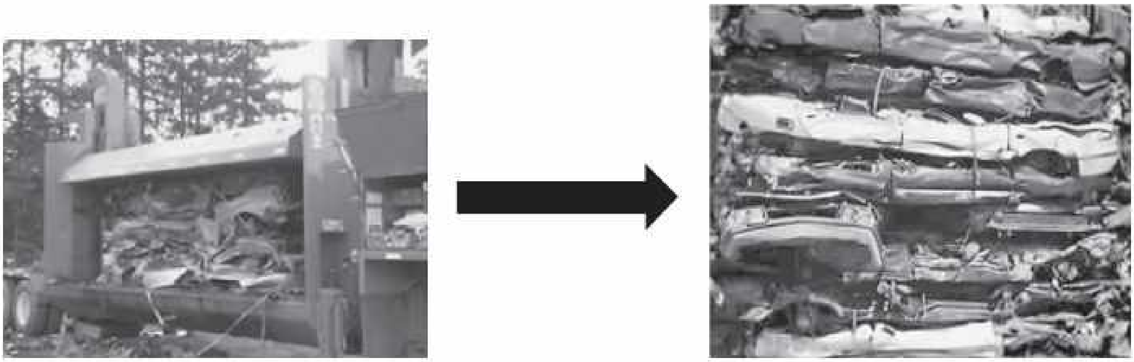
1. $f(x)=\operatorname{senh}^{-1}(3x^2)$
2. $f(x)=\cosh^{-1}(\sqrt{2x})$
3. $f(x)=\operatorname{csch}^{-1}(-7x^2)$
4. $f(x)=\coth^{-1}(x^{1/3})$
5. $f(x)=\tanh^{-1}(4x)$
6. $f(x)=\operatorname{sech}^{-1}(e^x)$
7. $f(x)=\cosh^{-1}(e^{-x})$

Regla de las funciones implícitas

CASO 10

En un lote de autos chatarra se desea comprimir un automóvil a una forma de base cuadrada. Si su altura y disminuye 8 cm/min y su volumen permanece constante, ¿a qué tasa aumenta la arista x de su base cuando x es de 2.5 m y su altura y es de 1.2 m?

La función $V = x^2y$ describe la relación entre x y y. Necesitamos derivar la función de volumen pero no sabemos cómo se deriva una función con dos variables, por lo cual se necesita la derivación implícita.



La regla de las derivadas implícitas se utiliza para aquellas funciones en las cuales la variable independiente y la dependiente no están definidas explícitamente por la función; es decir, no existe notación de funciones como $f(x)$. En dichas funciones puede ser muy laborioso despejar una variable con respecto a otra, por lo que al momento de derivar se hace al mismo tiempo con respecto a ambas variables, como si se aplicaran derivadas parciales.

Al igual que con muchas otras derivadas, podemos derivar de más de una forma. En este caso existen una estrategia y una fórmula directa. Veamos primero la estrategia.

Estrategia para funciones implícitas

1. Se realizan las derivadas parciales con respecto a cada variable (supongamos x, y).
   1.1. Cuando se deriva la variable dependiente debemos usar la terminología $\frac{dy}{dx}$ que indica que estamos derivando la variable dependiente y con respecto a x.

NOTA: Cuando realizamos la derivada parcial con respecto a x la y actúa como una constante, y viceversa.

2. El segundo paso es ordenar la función, dejando en el lado derecho todos los términos que contienen $\frac{dx}{dx}$, y en el izquierdo los que no contienen $\frac{dy}{dx}$.
3. Después factorizamos $\frac{dy}{dx}$.
4. Esta factorización nos permite pasar dividiendo todas las derivadas parciales con respecto a y al lado derecho de la ecuación, con lo que terminamos el proceso de derivación implícita.

EJEMPLO 1

Deriva la siguiente función:

$y\ \text{sen}(x) + x\cos(y) = 1$

1. En el primer paso hacemos la derivada parcial de x, y aplicamos la regla del producto.

NOTA: La derivada parcial con respecto a x aparece en gris, y en color sólido la derivada parcial con respecto a y.

$$y\cos(x) + \frac{dy}{dx}\ \text{sen}(x) + \cos(y) + (-\text{sen}(y))\ \frac{dy}{dx} = 0$$

2. Después agrupamos en el lado izquierdo los términos que contiene $\frac{dy}{dx}$, y en el izquierdo a los que no lo contiene.

$$\frac{dy}{dx}\ \text{sen}(x) - x\ \text{sen}(y)\ \frac{dy}{dx} = -(y\cos(x) + \cos(y))$$

3. Factorizamos el $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx}\ [\text{sen}(x) - x\ \text{sen}(y)] = -(y\cos(x) + \cos(y))$$

4. Por último, despejamos $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\left(y\cos(x) + \cos(y)\right)}{\text{sen}(x) - x\,\text{sen}(y)}$$

EJEMPLO 2

Deriva la siguiente función.

$4x^2y - 5xy + 8y^2 = 16$

1. Derivada parcial.

$$8xy + 4x^2\frac{dy}{dx} - 5y - 5x\frac{dy}{dx} + 16y\frac{dy}{dx} = 0$$

2. Ordenamos.

$$4x^2\frac{dy}{dx} - 5x\frac{dy}{dx} + 16y\frac{dy}{dx} = -8xy + 5y$$

3. Factorizamos $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx}\left[4x^2 - 5x + 16y\right] = -\left(8xy - 5y\right)$$

4. Despejamos $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\left(8xy - 5y\right)}{4x^2 - 5x + 16y}$$

Otro método consiste en utilizar una fórmula que nos diga que el resultado de derivar una función implícita será igual a una función racional en la que el numerador será la derivada parcial con respecto a la variable independiente (por lo común x) multiplicada por un signo (−), en tanto que el denominador corresponderá a la derivada parcial con respecto a la variable dependiente (y).

Es importante observar que mientras el resultado expresa la razón de la variable independiente entre la variable dependiente, la fórmula de las derivadas implícitas lo expresa al revés; es decir, en el numerador se determina cuál será la variable dependiente y en el numerador cuál será la variable independiente. Dicho de otra forma, la relación que existe es cruzada.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\delta x}{\delta y}$$

EJEMPLO 1

$$y^2 \ln\left(x^2\right) - x^2 = 2y - 3$$

Menos la derivada parcial con respecto a *x*, entre la derivada parcial con respecto a *y*

$$\frac{\delta y}{\delta x} \quad \frac{-\left(\frac{2y^2}{x} - 2x\right)}{2y\ln\left(x^2\right) - 2} = \frac{-\cancel{2}\left(y^2 - x^2\right)}{\cancel{2}x\left(y\ln\left(x^2\right) - 1\right)} = \frac{x^2 - y^2}{x\left(y\ln\left(x^2\right) - 1\right)}$$

EJEMPLO 2

$$\ln\left(y/x\right) + x \cdot e^y = 12$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} \quad \frac{\frac{1}{x} - e^y}{x \cdot e^y + \frac{1}{y}} = \frac{\frac{1 - x \cdot e^y}{x}}{\frac{x \cdot y \cdot e^y + 1}{y}} = \frac{y\left(1 - x \cdot e^y\right)}{x\left(x \cdot y \cdot e^y + 1\right)}$$

Regla de las funciones implícitas	
FÓRMULA	**EJEMPLO**
$\frac{dy}{dx} = \frac{-\delta x}{\delta y}$	$x^2 - 2xy^2 + y^3 = 6$

¿?

¿Comprendo y soy capaz de aplicar la regla de derivación de las funciones implícitas?

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.14

Resuelve las siguientes derivadas utilizando las fórmulas básicas.

1. $x^2+y^2=49$
2. $3x^3y^2+3x^2y^3=12$
3. $x^2-y^2=2$
4. $xy+2x-2y+3=0$
5. $x-3y=0$
6. $x^2y+xy^2=4$
7. $x^2y+xy+xy^2=6$
8. $x^3-x^2y+xy^2-y^3=8$
9. $\ln\left(x^2y^2\right)=e^{xy}$

Regla de las derivadas sucesivas o de orden superior

CASO 11

Un automóvil tiene un movimiento descrito por la siguiente función:

$$f\left(t\right)=5t^2+6t-2$$

Si queremos saber qué velocidad lleva el automóvil en cualquier momento, se debe derivar la función; si se quiere saber cuál es la aceleración del automóvil en cualquier momento, entonces se debe derivar la derivada; es decir, la función original se debe derivar dos veces. A este proceso se le llama derivación sucesiva.

La regla de las derivadas sucesivas (también llamadas de orden superior) es simplemente una extensión de las reglas anteriores. Es decir, a la derivada de la función original se le designa como primera derivada, pero es posible seguir derivando esta función resultante, obteniendo lo que se conoce como segunda derivada. Y así podríamos repetir el proceso hasta encontrar la tercera, cuarta, quinta, o incluso la n derivada.

Para poder identificar en qué ciclo de derivada nos encontramos, es conveniente que nos acostumbremos a usar la siguiente notación:

$f\left(x\right)$ es la función original

$f'\left(x\right)$ es la primera derivada

$f''\left(x\right)$ es la segunda derivada

$f'''\left(x\right)$ es la tercera derivada

$f''''\left(x\right)$ es la cuarta derivada

$f^5\left(x\right)$ es la quinta derivada

$\vdots \qquad \vdots$

$f^n\left(x\right)$ es la $n-$ésima derivada

NOTA: La regla de derivación que utilizaremos en la derivada sucesiva dependerá de la función resultante de la derivada anterior. Este método nos puede llevar a un proceso de derivación cada vez más complejo, más sencillo o incluso permanecer invariable como en el caso de las funciones trigonométricas y exponenciales.

EJEMPLO 1

$$f(x)=4x^3+3x^2-7x+5$$
$$f'(x)=12x^2+6x-7$$
$$f''(x)=24x+6$$
$$f'''(x)=24$$
$$f''''(x)=0$$

EJEMPLO 2

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{3x^2+7x-2}\right)$$
$$f'(x)=\frac{\frac{6x+7}{2\sqrt{3x^2+7x-2}}}{\sqrt{3x^2+7x-2}}=\frac{6x+7}{2\left(3x^2+7x-2\right)}$$
$$f''(x)=\frac{-\left(18x^2+42x+61\right)}{2\left(3x^2+7x-2\right)^2}$$
$$f'''(x)=\frac{\left(6x+7\right)\left(9x^2+21x+67\right)}{\left(3x^2+7x-2\right)^3}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$f^{n}(x)=$$

EJEMPLO 3

$$f(x)=\operatorname{sen}(x)$$
$$f'(x)=\cos(x)$$
$$f''(x)=-\operatorname{sen}(x)$$
$$f'''(x)=-\cos(x)$$
$$f''''(x)=\operatorname{sen}(x)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$f^{n}(x)=$$

EJEMPLO 4

$$f(x)=e^x$$
$$f'(x)=e^x$$
$$f''(x)=e^x$$
$$f'''(x)=e^x$$
$$f''''(x)=e^x$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$f^{n}(x)=$$

Por último, es posible que nos enfrentemos al caso de tener que hacer la derivada de una función implícita. Para ello debemos tener en cuenta que cuando derivemos con respecto a y su derivada será y'; en otras palabras, ***la derivada de* y *será sustituida por la primera derivada***, que en realidad es y', eliminando con esto las derivadas de orden inferior. Un ejemplo que aparece de manera repetitiva en todos los textos de matemáticas es la segunda derivada de la ecuación de un círculo cualquiera que sea su radio. Veamos:

$$x^2+y^2=9$$

Aplicamos la fórmula directa de las derivadas implícitas y tenemos que:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}y}=\frac{-x}{y}$$

La segunda derivada implícita se expresa como $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Aplicamos la regla del cociente:

$$\frac{-x}{y}=\frac{u}{v}=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y(-1)-\left[-x(y')\right]}{y^2}=\frac{-y+x\left(\frac{-x}{y}\right)}{y^2}$$

Sustituimos y' por la primera derivada

Obtenemos el común denominador:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{-y^2-x^2}{y}}{y^2}=\frac{-\left(\overbrace{y^2+x^2}\right)}{y^3}\quad=9$$

El numerador de la segunda derivada nos hace pensar en la función original, por lo tanto:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-(9)}{y^3}$$

De esta manera, el radio de la función se convierte en el numerador de la segunda derivada.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.15

Encuentra la derivada sucesiva que se pide, según sea el caso.

1. Segunda derivada de $x^2+y^2=12$
2. Segunda derivada de $x^2-y^2=7$
3. Décima derivada de $f(x)=\operatorname{sen}(x)$
4. Quinta derivada $f(x)=3x^4-4x^3+2x^2-x$
5. Segunda derivada de $f(x)=\ln(\cos(2x))$
6. Segunda derivada de $f(x)=\sqrt{x^2+5}$

Acertijo

¿Podrías obtener la segunda derivada sucesiva de los ejercicios de la actividad de trabajo 4.14?

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.16

Encuentra la derivada sucesiva que se pide, según sea el caso.

1. f'' de $\dfrac{-49}{y^3}$
2. f'' de $\dfrac{10y(x+y)(3x^2+4xy+3y^2)}{x^2(2x+3y)^3}$
3. f'' de $\dfrac{-2}{y^3}$
4. f'' de $\dfrac{2(y+x)}{(x-2)^2}$
5. f'' de 0
6. f'' de $\dfrac{6y(x+y)(x^2+xy+y^2)}{x^2(x+2y)^3}$
7. f'' de $\dfrac{2(x+y+1)\left[3x^2+3x(y+1)+3y^2+3y+1\right]y}{x^2(x+2y+1)^3}$
8. f'' de $\dfrac{12(x-y)(x^2+y^2)(x^2-4x\cdot y+y^2)}{(x^2-2x\cdot y+3y^2)^3}$
9. f'' de $\dfrac{2y}{x^2}$

¿?

¿Soy capaz de obtener la segunda derivada y, en general, las derivadas sucesivas de una función?

4.5 Regla de L'Hôpital

La regla de L'Hôpital se utiliza para la resolución de límites en aquellas funciones del tipo racional donde tanto el numerador como el denominador tienden a **CERO** al momento de sustituir el límite, de lo que resulta una forma indeterminada de la función, y en consecuencia el límite no es aparente por simple inspección.

Aunque es posible obtener cualquier límite por medio de tabulación, es un método muy tedioso y meticuloso incrementar ***x*** para conseguir el límite de la función. La regla de L'Hôpital nos ofrece una alternativa más viable al utilizar el método analítico para este tipo de situaciones, en la que se elimina la indeterminación por medio de la derivada ***de manera independiente del numerador y del denominador***, y propone que es posible derivar *las veces que sea necesario* hasta desaparecer la forma indeterminada de la función.

Regla de L'Hôpital	
Si $x \to a$ produce una forma indeterminada:	Si $x \to \infty$ produce una forma indeterminada:
$\lim\limits_{x \to a} \frac{G(x)}{H(x)} = \frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{G(x)}{H(x)} = \frac{\infty}{\infty}$
Entonces aplicamos la regla de L'Hôpital	
$\lim\limits_{x \to a} \frac{G(x)}{H(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{G'(x)}{H'(x)}$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{G(x)}{H(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{G'(x)}{H'(x)}$

En otras palabras, el límite de una función racional cuando $x \to a$ o $x \to \infty$ será igual al límite de sus derivadas.

EJEMPLO 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^3 - x^2}$$

Al momento de sustituir el límite tenemos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(0)}{0^3 - 0^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Lo que da por resultado una forma indeterminada.

Por lo cual nos vemos obligados a aplicar la regla de L'Hôpital.
Para hacerlo debemos:

1. Derivar el numerador.
2. Derivar el denominador.
3. Sustituir el límite.
4. Si al momento de sustituir el límite vuelve a resultar una forma indeterminada, hay que repetir los pasos hasta que desaparezca la indeterminación.

$$f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^3 - x^2}$$

Si

$g(x)=1-\cos(x)$ y $h(x)=x^3-x^2$, entonces

$g'(x)=\operatorname{sen}(x)$

$h'(x)=3x^2-2x$

Sustituimos en el límite:

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{3x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(0)}{3(0)^2-2(0)}=\frac{0}{0}$$

Por lo que repetimos los pasos anteriores.

$g''(x)=\cos(x)$

$h''(x)=6x-2$

$$f''(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{6x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(0)}{6(0)-2}=-\frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^3-x^2}=-\frac{1}{2}$$

EJEMPLO 2

$$f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-1}$$

Si $g(x)=x-\operatorname{sen}(x)$ y $h(x)=\cos(x)-1$, entonces:

$g'(x)=1-\cos(x)$

$h'(x)=-\operatorname{sen}(x)$

Sustituimos en el límite:

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{-\operatorname{sen}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(0)}{-\operatorname{sen}(0)}=\frac{0}{0}$$

Entonces repetimos los pasos anteriores.

$g''(x)=\operatorname{sen}(x)$

$h''(x)=-\cos(x)$

$$f''(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}(-\tan(x))=\lim_{x\to 0}(-\tan(0))=0$$

Por lo tanto:

$$f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-1}=0$$

EJEMPLO 3

$$f(x) = \underset{x\to\infty}{lím} \frac{\ln(3x)}{2\ln(x)}$$

$$f'(x) = \underset{x\to\infty}{lím} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}} = \underset{x\to\infty}{lím} \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 4

$$f(x) = \underset{x\to\infty}{lím} \frac{e^x}{x}$$

$$f'(x) = \underset{x\to\infty}{lím} \frac{e^x}{1} = e^\infty = \infty$$

NOTA: Cuando $x \to \infty,\ e^x = \infty$; pero cuando $x \to -\infty,\ e^x = 0$

¿?

¿Comprendo la utilidad de la regla de L'Hôpital?

¿Soy capaz de aplicar correctamente la regla de L'Hôpital?

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.17

Aplica la regla de L'Hôpital para determinar los siguientes límites.

1. $\underset{x\to\frac{2}{5}}{lím} \frac{5x-2}{x-\frac{2}{5}}$
2. $\underset{x\to 0}{lím} \frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$
3. $\underset{x\to 0}{lím} \frac{\sec(x)-1}{x}$
4. $\underset{x\to 0}{lím} \frac{x^3}{3x^2}$
5. $\underset{x\to 0}{lím} \frac{\tan(x)}{x}$
6. $\underset{x\to 0}{lím} \frac{e^{3x}-1}{\operatorname{sen}(x)}$
7. $\underset{x\to 0}{lím} \frac{x^2+x}{e^{7x}-1}$
8. $\underset{x\to\infty}{lím} \frac{\ln(x)}{x}$
9. $\underset{x\to\infty}{lím} \frac{e^{2x}+1}{x^2}$
10. $\underset{x\to\infty}{lím} \frac{x-1}{x}$
11. $\underset{x\to\infty}{lím} \frac{4\ln(x)}{\ln(7x)}$
12. $\underset{x\to\infty}{lím} \frac{3\ln(5x)}{2\ln(x)}$

4.6 Estrategia para resolver derivadas complejas

Ahora que conocemos las reglas de las derivadas, quizá te preguntes qué regla aplicar o qué hacer en el caso de funciones muy difíciles, como las funciones compuestas, en las cuales no funciona la regla directa, por lo que te proponemos el siguiente método.

EJEMPLO 1

1. Primero, imagina que tenemos esta función $f(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\right)$ compuesta por la regla de los logaritmos, raíces y división, y para resolverla fácilmente tenemos que pensar en cada uno de sus componentes de manera individual.

$$a=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$b=\sqrt{a}$$

$$f(x)=\ln(b)$$

2. Ahora empezamos a derivar individualmente el componente más interno desde adentro hacia afuera, y el resultado será la u' del siguiente componente; es decir, si tenemos que a es el componente más interno, entonces la derivada de a será la $\boldsymbol{u'}$ de la función de b.

$a=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ aplicamos la regla del cociente.

$$a'=\frac{2x\left(x^2+1\right)-\left[2x\left(x^2-1\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\cancel{2x^3}+2x\cancel{-2x^3}+2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Esto será nuestra siguiente u′ y así sucesivamente.

Ya que b está formada por la $\sqrt{a}$ aplicamos la regla de la raíz y simplemente sustituimos a y su derivada.

$$b'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{a'}{2\sqrt{a}}=\frac{\frac{\cancel{4}x}{\left(x^2+1\right)^2}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}}$$ aplicamos la ley de los extremos.

$$b' = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{x^2-1}}$$

Igualmente, b' será la u' a usar en la siguiente derivada:

$f(x) = \ln(b)$ aplicamos la regla de logaritmo natural que dice:

$f'(x) = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{b'}{b}$ para lo cual ya tenemos nuestra b'

$$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2 \cdot \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}}}{\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}}$$

Aplicamos la ley de los extremos.

$$f'(x) = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2 \cdot \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)}$$

Procedemos a simplificar.

$$f'(x) = \frac{2x}{\dfrac{\left(x^2+1\right)^{\cancel{2}} \cdot \left(x^2-1\right)}{\cancel{x^2+1}}}$$

Cancelamos el cuadrado con el denominador y obtenemos.

$$f'(x) = \frac{2x}{\left(x^2+1\right) \cdot \left(x^2-1\right)}$$

3. Recuerda que el resultado final estará determinado por la función más externa que es la ***regla dominante***.

EJEMPLO 2

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\ln\left(x^2+2\right)^2\right)$$

1. Si descomponemos la función podemos tener:

$$a = \left(x^2+2\right)^2$$
$$b = \ln(a)$$
$$f(x) = \operatorname{sen}(b)$$

2. Ahora procedemos a derivar cada componente y sustituirlo en el siguiente:

$$a = \left(x^2 + 2\right)^2$$

$$a' = 4x \cdot \left(x^2 + 2\right)$$

3. Sustituimos el resultado en el siguiente componente:

$$b = \ln\left(a\right)$$

$$b' = \frac{a'}{a}$$

$$b' = \frac{4x \cdot \cancel{\left(x^2 + 2\right)}}{\left(x^2 + 2\right)^{\cancel{2}}} = \frac{4x}{\left(x^2 + 2\right)}$$

4. Por último, resolvemos la función más externa:

$$f\left(x\right) = \text{sen}\left(b\right)$$

$$f'\left(x\right) = b' \bullet \cos\left(b\right)$$

$$f'\left(x\right) = \frac{4x}{\left(x^2 + 2\right)} \cdot \cos \ \ln\left(x^2 + 2\right)^2 \quad \text{o} \quad \frac{4x}{\left(x^2 + 2\right)} \cdot \cos\left(2 \cdot \ln\left(x^2 + 2\right)\right)$$

ACTIVIDAD DE TRABAJO 4.18

Utiliza la estrategia propuesta para resolver los siguientes ejercicios.

1. $f\left(x\right) = \ln\left(\sqrt{x^2 + x + 5}\right)$
2. $f\left(x\right) = \sqrt{\left(x^2 + 1\right)\left(x^3 + 1\right)}$
3. $f\left(x\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{3x + 5}{4 - x^2}}\right)$
4. $f\left(x\right) = \cosh\left(\ln \sqrt{x^2 + 1}\right)$

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra las siguientes actividades a tu portafolio de evidencias.

5. Utiliza la estrategia para obtener derivadas complejas y solucionar los primeros tres ejercicios.
6. Realiza en equipo, y por computadora, un formulario de todas las reglas vistas.
7. Realiza en equipo, y por computadora, las identidades de las funciones trigonométricas e hiperbólicas.
8. Realiza al menos, los ejercicios impares de todas las actividades, con su desarrollo completo.
9. Presenta solamente los ejercicios impares de la actividad integradora.
10. Resuelve la mitad de todos los problemas de aplicación.

ACTIVIDAD INTEGRADORA UNIDAD 4

Resuelve los siguientes ejercicios según se indique.

PARTE I
Deriva mediante la definición formal de la derivada.

1. $f(x) = -x^2 + 5$
2. $f(x) = 5x^2$
3. $f(x) = x^2 + 8x$
4. $f(x) = -5x^2 + 8x$
5. $f(x) = x^2 - 10x$
6. $f(x) = \frac{1}{3}x - 7$

PARTE II
Aplica directamente las fórmulas de las derivadas.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x + 2$
2. $f(x) = \ln(2x+1)$
3. $f(x) = (x^2+2)^3$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$
5. $f(x) = 2x^3 - 5x + 16$
6. $f(x) = (x^2 + 2x)(x+1)$
7. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x)$
8. $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$
9. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 + 3}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{(2-x^2)^3}$
11. $f(x) = -2x^2 + 5x^3$
12. $f(x) = \left(15x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{8x^2}}\right)^5$
13. $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{\sec(x)}$
14. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{senh}(3x)}{\cosh(3x)}}$
15. $f(x) = \sqrt{(x^3 - 7)}$
16. $f(x) = \left(\dfrac{-3x^2 + 2}{\sqrt{1 - x^3}}\right)$
17. $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x + 3$
18. $f(x) = \dfrac{1}{\sec(x)}\operatorname{sen}(x)$
19. $f(x) = \sec^{-1}(\ln(x))$
20. $f(x) = \sqrt{(x^2 + 1)}$
21. $f(x) = \left(\dfrac{-5x}{4x^2 + 3x}\right)$
22. $f(x) = \cot^{-1}(\ln(x))$
23. $f(x) = \operatorname{sen}(x)\tan(x)$
24. $f(x) = (2 - x^2)^3 \bullet e^{4x}$
25. $f(x) = -6x^3 + 15x^2 - 4x + 3$
26. $f(x) = \ln\left(\dfrac{4x^2 + 1}{x - 2}\right)$
27. $f(x) = (-3x^2 + 2)^{\frac{1}{4}}$

28. $f(x)=(2-x^2)\bullet(x+2)^3$
29. $f(x)=\ln\left(\frac{-3x^2+2}{5x+1}\right)$
30. $f(x)=\text{sen}^{-1}\left(\sqrt{3x}\right)$
31. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+2x-3}\right)$
32. $f(x)=\ln\left(\frac{e^x}{x^2-2}\right)$
33. $f(x)=\ln(\cos(x))$
34. $f(x)=(-3x^2+2)\bullet 3^{x^2}$
35. $f(x)=(x^2+2x)^4$
36. $f(x)=\tanh^{-1}(3x^3)$
37. $f(x)=\cos^3(2x)\,\text{sen}^2(3x)$
38. $f(x)=\sqrt{\frac{\text{sen}(2x)}{\cos(2x)}}$
39. $f(x)=\frac{\sec(x)}{1+\tan(x)}$
40. $f(x)=\cosh^2(3x)\,\text{csch}^2(3x)$
41. $f(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{x^3-2x}{x^2+1}}\right)$
42. $f(x)=(x^2+5)\sqrt{x^2+5}$
43. $f(x)=\sqrt[6]{x^3+3x^2-x}$
44. $f(x)=\frac{4-\frac{1}{x}}{x-3}$
45. $f(x)=\sqrt[5]{25-x^2}$
46. $f(x)=e^{e^x}$
47. $f(x)=\coth^{-1}(e^x)$

PARTE III

Obtén las derivadas implícitas.

1. $\ln(3x^2y)-\ln\left(\frac{y^2}{x}\right)=e^{xy}$
2. $y^3+x^2y^2-\ln(2x)=25$
3. $\text{sen}(x\cdot y)=1$
4. $\frac{x^2(1-y)}{y^2(1+x)}=3$

PARTE IV

Demuestra o comprueba.

1. Comprueba la derivada de $f(x)=\coth^{-1}(x)$ derivando su fórmula $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.
2. Encuentra que la derivada de $e^x\cos(y)=xe^y$ es igual a $\frac{e^x\cos(y)-e^y}{xe^y+e^x\text{sen}(y)}$.
3. Comprueba que la derivada de $\cosh^{-1}(x)$ mediante su fórmula $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ es igual a

   $\cosh^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

4. Demuestra por medio de límites que la derivada de coseno es menos seno.

5. Demuestra que la derivada de seno hiperbólico es coseno hiperbólico derivando su fórmula

$$\operatorname{senh}(x)=\frac{e^{u}-e^{-u}}{2} \quad \text{y} \cosh(x)=\frac{e^{u}+e^{-u}}{2}.$$

PARTE V

Encuentra las derivadas sucesivas.

1. Encuentra la segunda derivada de $f(x)=\cosh^{-1}(x)$.

2. Encuentra la segunda derivada implícita de:

   $x^2+xy+y^2=6$

3. Deduce la derivada 21 de:

   $f(x)=\cos(x)$

4. Encuentra la segunda derivada de:

   $f(x)=3\csc(2x)$

5. Encuentra la segunda derivada implícita de:

   $x^3-y^2=5$

PARTE VI

Utiliza la regla de L'Hôpital para encontrar los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{e^{x+1}-e}$ 2. $\lim\limits_{x\to \frac{4}{3}}\dfrac{4-3x}{x-\frac{4}{3}}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)-x}{\cos(x)-1}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Problemas de demografía o de crecimiento

4.1. Se agrega un antibiótico experimental a un cultivo de *Staphylococcus aureus* para probar su eficacia *in vitro*. El tamaño inicial de la población en t (horas) es de $S(t) = 10^5 + 20^4 t - 17^3 t^2$. Halla las razones del decrecimiento para $t = 0$, $t = 6$ y $t = 8$.

4.2. Un paciente tiene un tumor de forma esférica alojado en el cerebro. Si el radio del tumor mide 0.8 cm, y éste crece a razón de 0.002 cm al día, ¿cuál es la intensidad de crecimiento del volumen del tumor en ese momento?

4.3. Una cepa de *Staphylococcus* tiene un radio de 4 μm y forma esférica; la bacteria crece en el cuerpo a razón de 0.05 μm al día, ¿cuál es la intensidad del crecimiento del volumen de la célula en ese momento?

Problemas de electromagnetismo

4.4. La impedancia Z (en ohm) de un circuito en serie se relaciona con la resistencia en R (en ohm) y la reactancia de X (en ohm) por la ecuación $Z\sqrt{R^2+X^2}$. Si R crece 5 ohm/s y X decrece 3 ohm/s, ¿cuál es la razón de cambio de la impedancia cuando $R = 25$ ohm y $X = 12$ ohm?

4.5. Si dos resistores R_1 y R_2, se conectan en paralelo en un circuito eléctrico para crear un solo resistor, la resistencia final puede hallarse con la ecuación:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

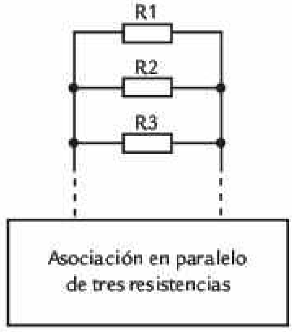
Si R_1 crece a razón de 1.5 ohm/s y R_2 decrece a razón de 0.8 ohm/s, ¿cuál es la resistencia final del circuito cuando $R_1 = 90$ ohm y $R_2 = 45$ ohm?

4.6. ¿Cuál es el cambio de watts de un reflector con resistencia de 20 ohm y corriente de 4 amperes, si la corriente disminuye 0.2 amperes? Los watts están dados por la fórmula $W = RI^2$.

4.7. Un circuito eléctrico es alimentado por una batería E de 150 volts. La corriente de 1 ampere satisface la ley de Ohm. Si la resistencia del circuito varía entre $30 < R < 75$, ¿cuál es el rango de valores de los amperes?

4.8. En un circuito la impedancia cambia 4 ohm/s mientras que la reactancia crece 2.5 ohm/s. Si la resistencia del circuito es de 30 ohm y la reactancia es de 9 ohm, ¿cuál es el cambio de la resistencia en ese instante?

4.9. Tres resistores, R_1, R_2 y R_3, están conectados en paralelo en un circuito eléctrico para crear un solo resistor; la resistencia final es de 0.000342 ohm. Encuentra la razón de crecer o decrecer de la tercera resistencia cuando $R_1 = 75$ ohm, $R_2 = 80$ ohm y $R_3 = 65$ ohm, mientras que R_1 decrece a razón de -1.5 ohm/s y R_2 crece a razón de 3 ohm/s.



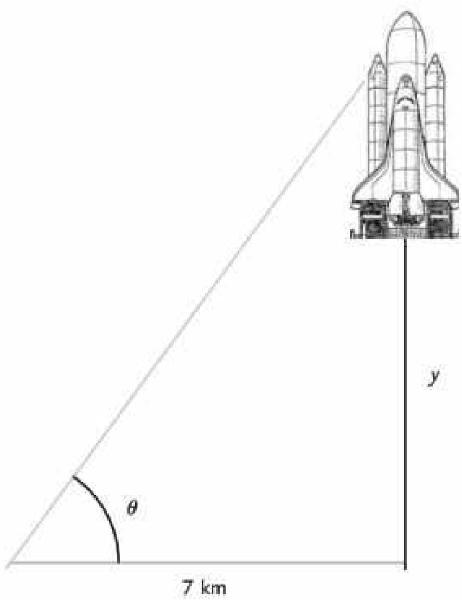
4.10. ¿Cuál es el cambio en el amperaje de un foco si el voltaje inicial es de 75 voltios con una resistencia de 35 ohm y hay un aumento de 0.7 v/s en el voltaje?

Problemas de física

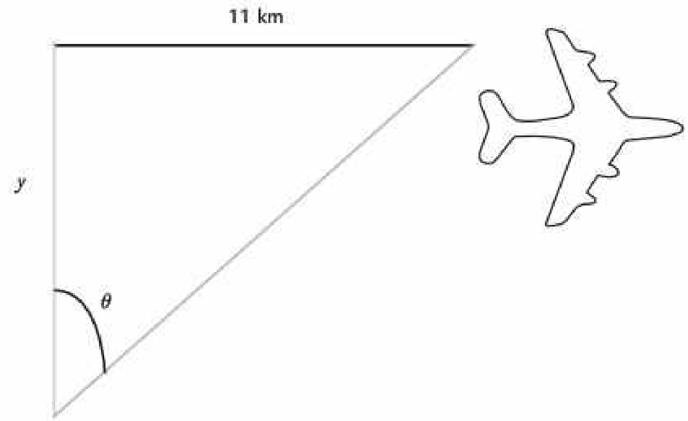
4.11. Encuentra la velocidad promedio del viaje desde una ciudad a otra con una distancia de 278 km y un tiempo de 3.5 h.

4.12. La energía cinética de una partícula de masa m se mueve a una rapidez $k = \frac{1}{2}mv^2$. Una partícula con masa de 15 gramos tiene en cierto momento una velocidad de 45 cm/s y una aceleración de 7 cm/s^2. ¿A qué razón está cambiando la energía cinética en ese momento?

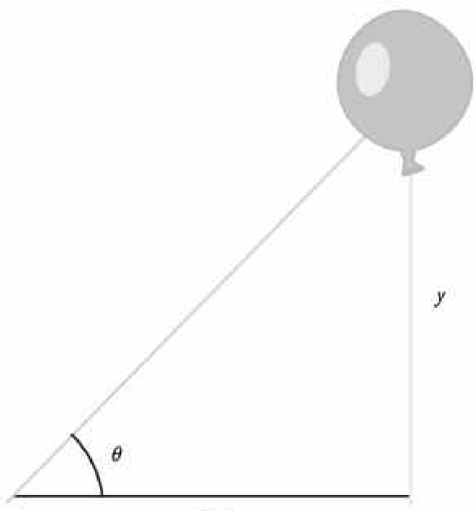
4.13. En un lanzamiento de la NASA, un cohete se rastrea en una estación de radar a 7 km de la plataforma de lanzamiento. Si el ángulo de elevación θ de la línea de visión aumenta 5° por segundo cuando θ es igual a 75°, ¿cuál es la velocidad del cohete en ese instante?



4.14. Un avión se dirige horizontalmente hacia su destino mientras es observado por una persona que se encuentra a 11 km de distancia. Si el ángulo de elevación θ de la línea de visión del observador es de 4° por segundo cuando θ es igual a 15°, ¿cuál es la velocidad del avión en ese instante?



4.15. Un globo que se eleva verticalmente es observado por una persona que está a 15 m del punto directamente abajo del globo. ¿Cuál es la tasa a la que sube el globo cuando el ángulo entre el suelo y la línea de visión del observador es de 67° y aumenta 2° por segundo?



4.16. La altura de un objeto con respecto al suelo está dada por:

$s = -14t^2 + 81t + 120$

Obtén lo siguiente:

a) La velocidad del objeto cuando $t = 0$.

b) Su altura máxima y cuándo la alcanza.

c) Su velocidad cuando $s = 0$

4.17. Un automovilista viaja en carretera a 120 km/h cuando se ve obligado a frenar 6.5 s antes de un cruce de ganado que se encuentra a 25 m, derrapando cierta distancia hasta detenerse. La función de posición del automóvil está dada por $x(t) = 120t - 6t^2$. ¿Alcanzó a frenar el automóvil antes del cruce, y cuál fue su desaceleración?

4.18. El cohete del problema 4.13 tiene una velocidad aproximada de 28,000 km/h, que equivale a 7,777.77 m/s. Sin embargo, en la teoría de la relatividad espacial la ley de contracción de Lorentz dice que un objeto (en este caso el cohete) parece variar de longitud a los ojos de un observador dependiendo de la velocidad con que se viaje. Si el cohete en tierra tiene una longitud de 750 m, ¿cuál es la longitud que pareciera tener a los ojos del observador? ¿A qué velocidad del cohete variará 4 m su longitud? ¿Qué pasaría si la velocidad del cohete se aproximara a la velocidad de la luz?

4.19. En física, la energía cinética de un cuerpo está dada por un medio de la masa por la velocidad al cuadrado, ¿cuál sería la velocidad de la partícula si tuviera una energía cinética de 16,000 joules y una masa de 800 g?

4.20. En t segundos, las posiciones de dos partículas en una recta coordenada son:

$$P_1 = 2t^3 + 8t^2 - 7t + 5 \qquad\qquad P_2 = -4t^3 - 3t^2 + 6t - 3$$

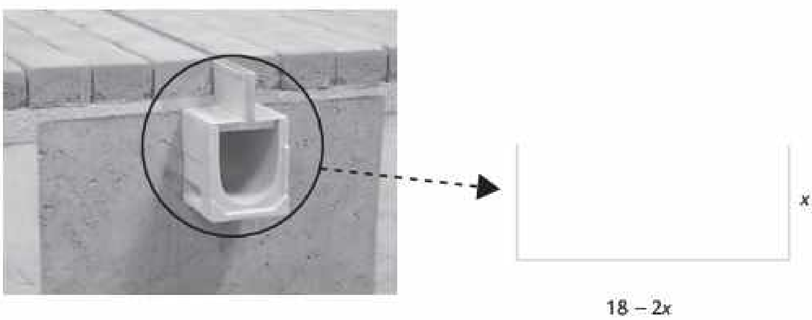
¿En qué momento las partículas tienen la misma velocidad?

Problema industrial

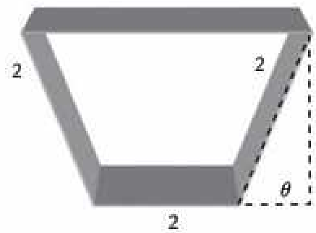
4.21. En un lote de autos chatarra se desea comprimir un automóvil a una forma de base cuadrada. Si su altura y disminuye 8 cm/min y su volumen permanece constante, ¿a qué tasa aumenta la arista x de su base cuando x es de 2.5 m y su altura es de 1.2 m?

Problemas de ingeniería civil

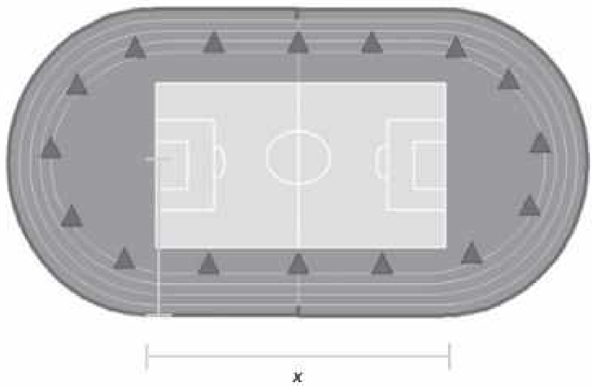
4.22. Un ingeniero civil necesita construir ciertos departamentos de tal manera que cuenten con un canal pluvial, ya que la región es muy lluviosa. El material que se tiene es una larga hoja de forma rectangular con 18 pulg de ancho; la idea es formar un canal doblando sus lados, ¿cuál será el doblez para obtener la máxima capacidad del canal?



4.23. El mismo ingeniero civil del problema anterior tiene como trabajo realizar otra canaleta de aluminio y 6 pies de ancho, doblando hacia arriba 2 pies con una inclinación. Encuentra el ángulo que maximizará el volumen del canal.

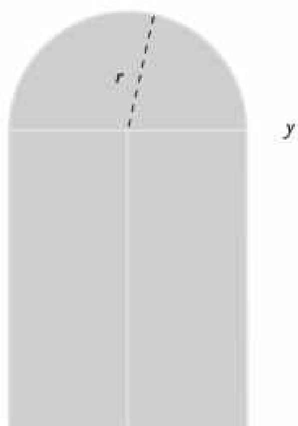


4.24. Se desea construir una pista de atletismo para las próximas olimpiadas. Si el perímetro del terreno es de 200 m y se desea construir una pista central de futbol soccer, ¿cuáles son las dimensiones que maximizarán el área del terreno?

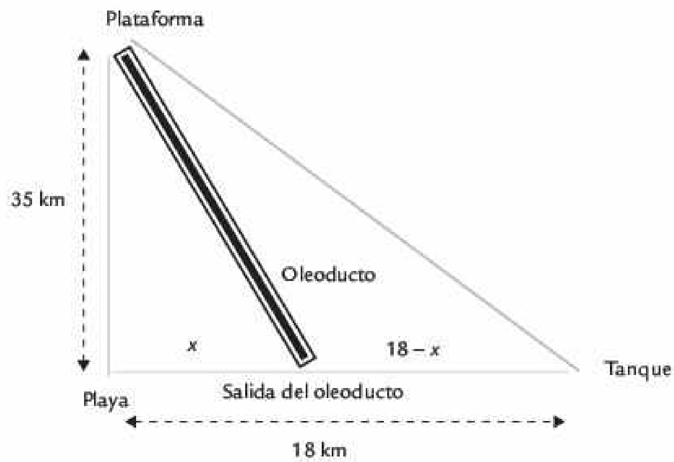


4.25. En una iglesia se desean construir ventanas rectangulares con un semicírculo en la parte superior, ¿cuáles serán las dimensiones máximas de la ventana si el perímetro con que se cuenta es de 15 m?

NOTA: Recuerda que se trata de un semicírculo, no de un círculo entero.

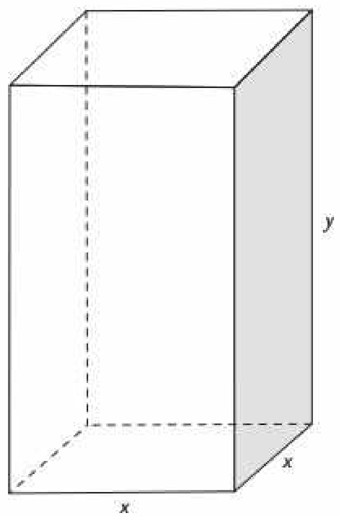


4.26. Se va a construir un oleoducto desde una plataforma marina (la cual se localiza 35 km al norte mar adentro), hasta los tanques de almacenamiento en la playa a 18 km al este. Si el costo de construcción de cada kilómetro de oleoducto en el mar es de $2,500,000 y en tierra el costo se reduce a $850,000, ¿cuál deberá ser la distancia del oleoducto para que el costo de la construcción sea el mínimo?

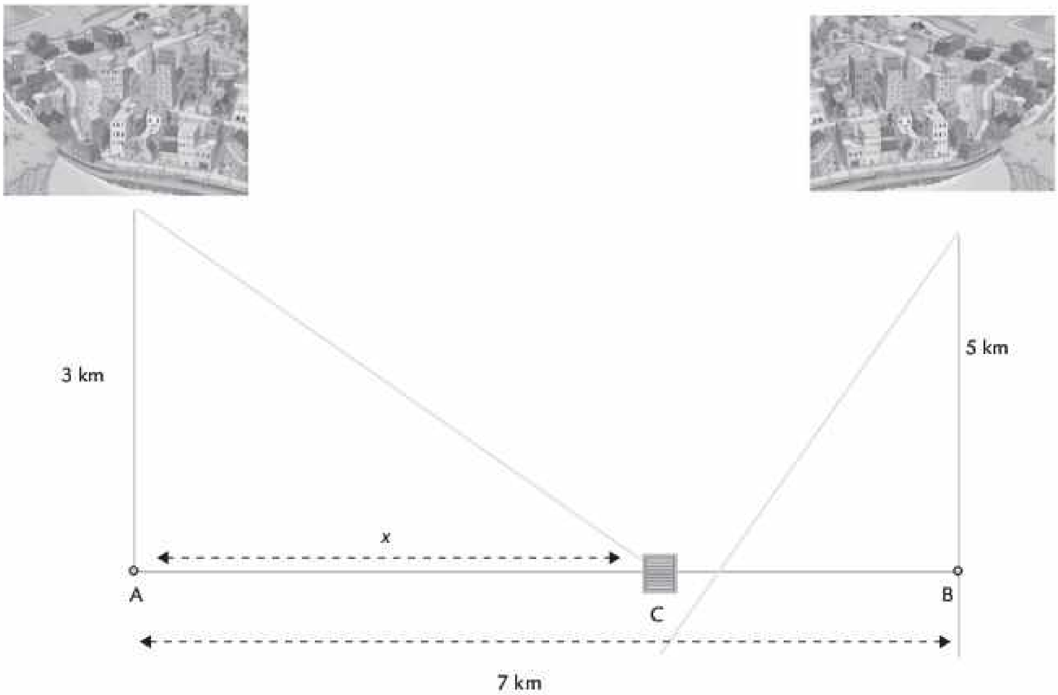


4.27. Se requiere construir un nuevo oleoducto en otra región del país, que vaya desde una plataforma marina ubicada 32 km al norte mar adentro, hasta los tanques de almacenamiento en la playa a 16 km al este. Si el costo de construcción de cada km de oleoducto en el mar es de $2,700,000, mientras que en tierra el costo se reduce a $900,000, ¿cuál será la distancia del oleoducto para que el costo de la construcción sea el mínimo; cuál es la distancia del oleoducto y qué ángulo forma con la playa?

4.28. Se requiere construir una fosa séptica de 120 m^3 para el aparcadero de casas rodantes en una región turística. El material para construir la base cuadrada y los lados de concreto tiene un costo de $350.00 por m^2, pero el material para construir la tapa, un tipo especial de acero, tiene un costo de $550.00 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la fosa séptica que minimizarán el costo de su construcción?



4.29. Dos poblados desean conectarse al servicio de televisión por cable. Están a 3 y 5 km sobre los puntos A y B más cercanos de la línea del cable; sin embargo, se necesitan conectar sobre una caja que se encuentra en un punto C de la línea del cable, la cual mide 7 km de largo. ¿Cuál deberá ser la ubicación del técnico para colocar la caja C sobre la línea del cable para minimizar el cable usado?



4.30. A uno de los tinacos para agua, con capacidad de 3,500 L, que se colocaron en las nuevas construcciones departamentales se le rompen las tuberías por las heladas de la temporada y se vacía en menos de 90 minutos. El volumen del tinaco en t minutos está dado por la fórmula:

$$V(t)=\frac{1}{3}(90-t)^2=\frac{t^2}{3}-60t+2{,}700$$

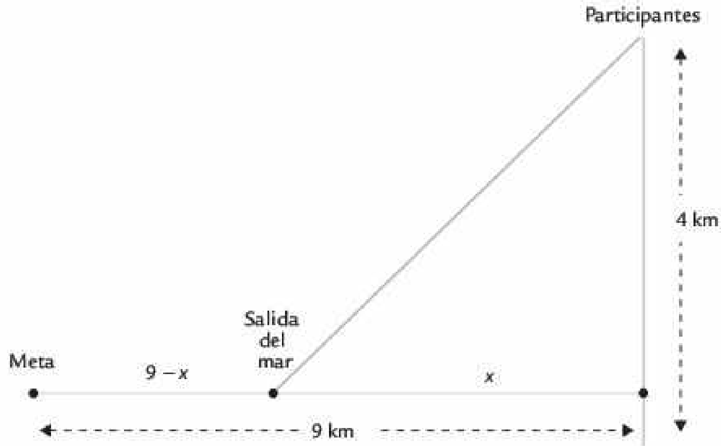
Determina la tasa instantánea a que fluye el agua hacia afuera del tanque en el tiempo $t = 20$ min y $t = 80$; encuentra también la tasa promedio a que fluye el agua durante ese lapso.

Problemas de deportes y salud

4.31. Una prueba hecha a un corredor indica que durante una carrera de 10 km la masa corporal disminuye de acuerdo con la tasa de deshidratación y la ingesta de líquidos (entre otros factores, como temperatura, condición física, etc.). Si el nivel inicial de líquidos en el cuerpo es de 5 L y tiene una ingesta pobre de 0.3 L/h mientras la tasa de sudoración es de 2.1 L/h con una sudoración inicial de 0.1 L, encuentra el porcentaje de deshidratación si la masa inicial es de 75.8 kg. La fórmula está dada por:

$$m=m_0t-(L_0-S_0)$$

4.32. En un concurso de resistencia, los participantes están 4 km mar adentro y tienen que llegar a un sitio en la orilla de la playa que está a 9 km al oeste. Si un participante puede nadar a 6 km/h y correr a 15 km/h ¿hacia qué punto de la orilla debe nadar para hacer el menor tiempo posible?



4.33. En una persona hipertensa, la disminución en la presión sanguínea depende de la cantidad de un antihipertensivo. Si se administran x miligramos de una sustancia, la disminución de la presión está dada por:

$f(x)=\frac{1}{4}x^2(k-x)$ si $x\in[0,k]$, donde k es una constante positiva.

¿Cuál será la cantidad de miligramos que minimice más la presión sanguínea?

4.34. A una semana de la noche de graduación, una estudiante decide bajar de peso para que le ajuste bien el vestido, por lo cual decide comprar unas pastillas de dieta y comer 1.2 kg al día. Si tiene un peso inicial de 68 kg y lo reduce a 62 kg en tres días, ¿cuál es la tasa de pérdida de peso generada por las pastillas?

4.35. Un niño tiene una infección que inicia con 25 bacterias, las cuales se duplican cada hora. Cuando empiezan a aparecer síntomas de la infección se le administra un antibiótico beta-lactámico que actúa de acuerdo con la siguiente fórmula:

$S(t) = 8^5 - 23^4t^2 + 28^3t^3$

¿Cuál será el nivel de infección en 24 horas?, ¿a qué hora la población de bacterias será 0?

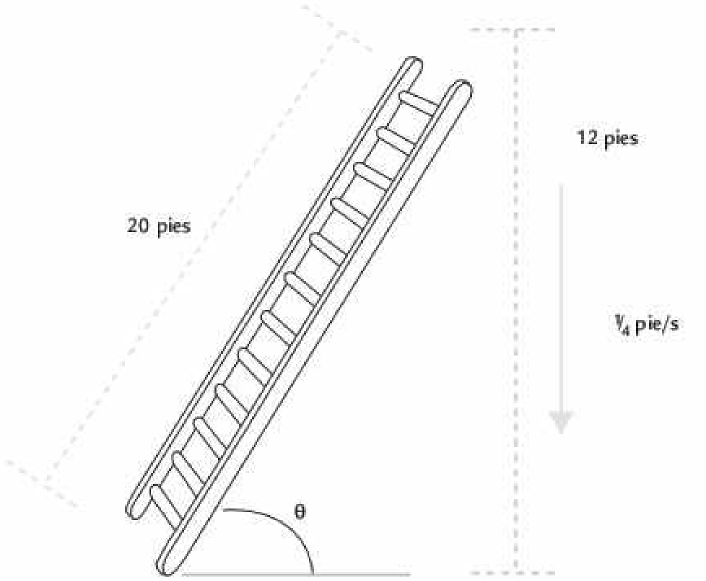
$P(B)=25\cdot 2^t$ $\qquad$ $S(t)= 8^5-23^4t^2+28^3\,t^3$

Problemas de geometría

4.36. El volumen de un cilindro recto varía ya que su radio r crece a una tasa de 5 cm por minuto y su altura h decrece a una tasa de 6 cm por minuto. ¿A qué tasa varía el volumen cuando el radio es de 14 cm y la altura de 9 cm?

4.37. El área de un triángulo equilátero se incrementa a razón de 5 pulg^2/min. ¿Cuál es la razón a la cual se incrementa uno de sus lados cuando el lado mide 7 pulg?

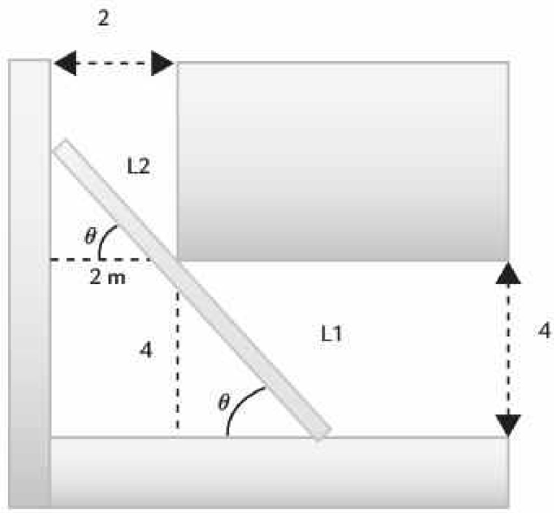
4.38. Una escalera de 20 pies de longitud está apoyada contra una pared, de modo que su extremo superior se desliza hacia abajo a una tasa de $\frac{1}{4}$ pie/s. ¿Cuál es la tasa de variación de medida del ángulo formado por la escalera contra el piso cuando el extremo superior está a 12 pies sobre el piso?



4.39. Una escalera de 23 pies de longitud está apoyada contra una pared, de modo que su extremo superior se desliza hacia abajo a una tasa de $\frac{1}{2}$ pie/s. ¿Cuál es la tasa de variación de medida del ángulo formado por la escalera contra la pared cuando el extremo superior está a 15 pies sobre el piso?

4.40. Un hombre de 1.7 m de estatura camina, a una velocidad de 1.8 m/s, hacia un edificio donde se encuentra inclinada una escalera; si a 20 m del edificio hay una lámpara en el piso, ¿qué tan rápido se acorta la sombra del hombre proyectada en el edificio cuando está a 10 m de éste?

4.41. Se desea pasar una varilla de un pasillo a otro. El primer pasillo tiene 4 m de ancho, mientras que el segundo tiene sólo 2 m. ¿Cuáles son las mayores dimensiones posibles de la varilla?

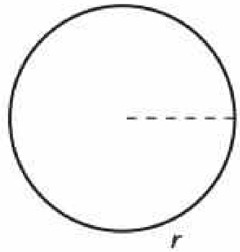


4.42. Utiliza las derivadas para comprobar que a partir del área de las siguientes figuras se puede obtener el perímetro de las mismas.

a) Cuadrado.

b) Círculo.

c) Deduce la función del área de un triángulo equilátero, en función de su perímetro:

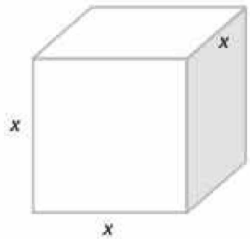


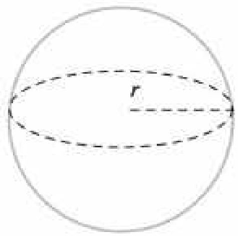
4.43. Utiliza las derivadas para comprobar que a partir del volumen de las siguientes figuras se puede obtener su área:

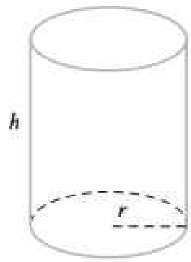
a) Cubo.

b) Esfera.

c) Cilindro.







4.44. Se ha inflado un globo a una razón de 175 cm^3. ¿Cuál es la tasa de cambio del radio del globo? ¿Cuál era la tasa de cambio de su superficie cuando su radio era de 30 cm?

4.45. Un árbol de 22 m se encuentra a 4.5 m de una barda. Durante una tormenta el árbol se rompe y al caer queda apoyado contra la barda, que mide 3 m, Determina a qué altura se rompió el árbol si la copa apenas roza lo alto de la barda.

AUTOEVALUACIÓN

Resuelve los siguientes ejercicios según se indique.

PARTE I
Deriva mediante la definición formal de la derivada.

1. $f(x)=(x-3)^2$ 2. $f(x)=5x^3$

PARTE II
Aplica directamente las fórmulas de las derivadas.

1. $f(x)=\dfrac{3e^{ax}}{a^3}$ 3. $f(x)=\log\left(\sqrt{x-5}\right)$ 5. $f(x)=\left(x^2-9\right)\sqrt[3]{x+7}$

2. $f(x)=\operatorname{senh}^{-1}\left(\sqrt{x-1}\right)$ 4. $f(x)=2\operatorname{senh}(4x)\cosh(4x)$ 6. $f(x)=2^{3x^2-x}$

PARTE III

Obtén las derivadas implícitas.

1. $\ln\left(x^3y\right)-x\cdot e^y+4\ln\left(\dfrac{x}{y^2}\right)=7$ 2. $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(y)}=1$ 3. $\dfrac{2x^4}{\sqrt[3]{y}}=7$

PARTE IV

Demuestra o comprueba.

1. Encuentra que la derivada de $x\ln(y)-y\ln(x)=1$ es igual a $\dfrac{y\left(y-x\ln(y)\right)}{x\left(x-y\ln(x)\right)}$.

2. Comprueba la identidad cuadrática $\cosh^2(x)-\operatorname{senh}^2(x)=1$

   si se sabe que $\operatorname{senh}(x)=\dfrac{e^u-e^{-u}}{2}$ y $\cosh(x)=\dfrac{e^u+e^{-u}}{2}$.

PARTE V

Encuentra las derivadas sucesivas de:

1. Encuentra la segunda derivada de:

   $$f(x)=\ln\left(\sqrt{4-x^2}\right)$$

2. Encuentra la tercera derivada de:

   $$f(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}$$

PARTE VI

Utiliza la regla de L'Hôpital para encontrar los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sech}(x)-1}{x^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7\ln(2x)}{\ln(x)}$

ESTUDIO GENERAL DE CURVAS

5

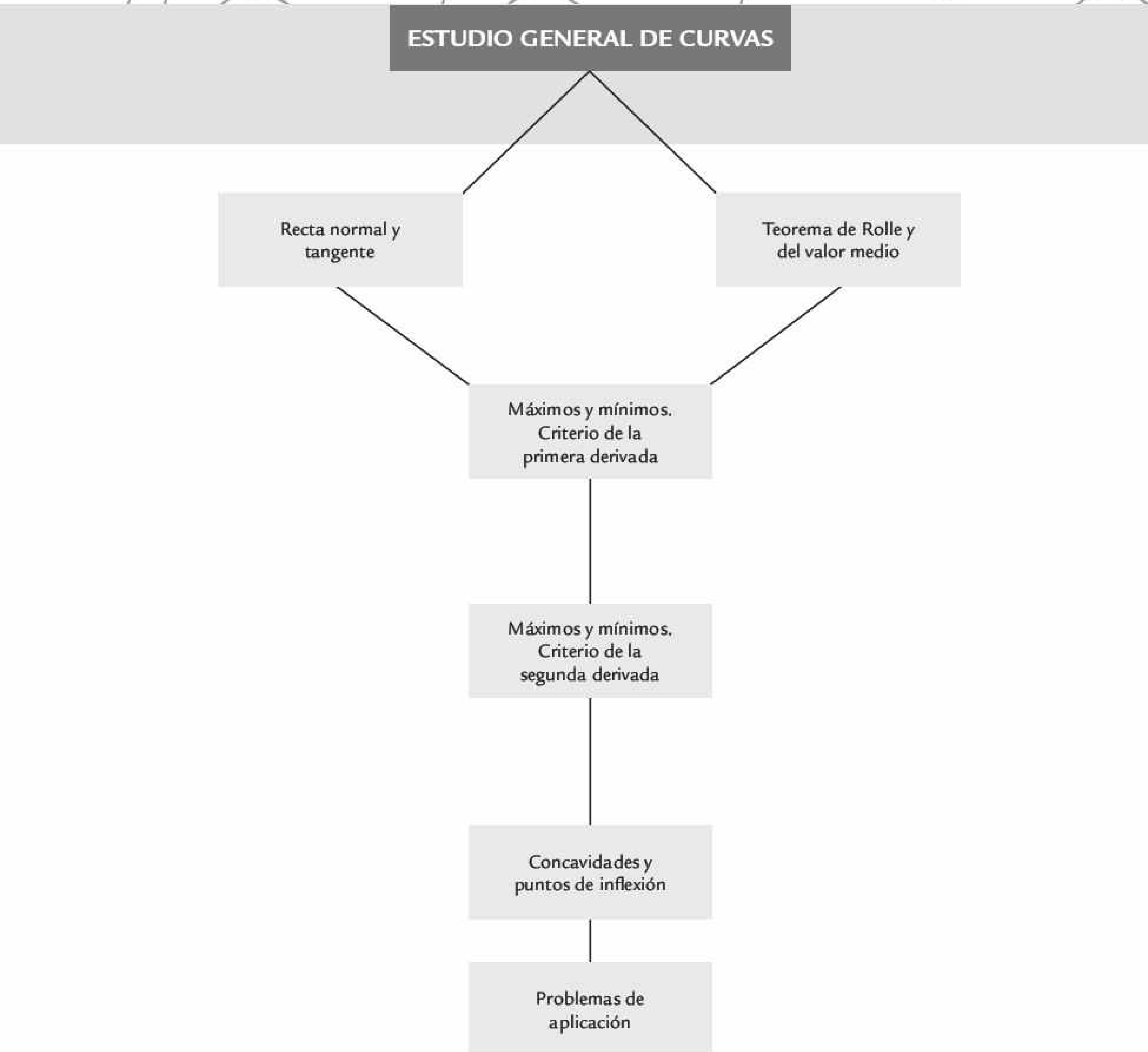
ESTUDIO GENERAL DE CURVAS

Terminaremos la teoría del cálculo diferencial con el tema del estudio de curvas. En este tema se agrupa una serie de herramientas que nos permiten entender el comportamiento de las curvas (gráficas) mediante procesos analíticos. De esta manera podemos realizar su trazo en el plano cartesiano gracias al análisis de máximos y mínimos, intervalos crecientes, decrecientes, concavidades y puntos de inflexión.

COMPETENCIAS POR DESARROLLAR

COMPETENCIAS	ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	HABILIDADES Y ACTITUDES
Comprender y utilizar el concepto de análisis de curvas.	Utilizar la derivada para calcular la pendiente de rectas tangentes a una curva en puntos dados.	El alumno desarrollará la capacidad de bosquejar curvas mediante el uso del cálculo.
Aplicar el concepto de la derivada para la solución de problemas de optimización y de variación de funciones, y el del diferencial en problemas que requieren aproximaciones.	Aplicar la relación algebraica que existe entre las pendientes de rectas perpendiculares para calcular, a través de la derivada, la pendiente de la recta normal a una curva en un punto.	El alumno será capaz de resolver problemas de optimización usando el cálculo.
	Determinar si dos curvas son ortogonales en su punto de intersección.	El alumno será capaz de resolver problemas que involucren diferenciales a través de los diversos conceptos analizados.
	Aplicar el teorema de Rolle en funciones definidas en un cierto intervalo y explicar su interpretación geométrica.	
	Aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial en funciones definidas en un cierto intervalo, y explicar su interpretación geométrica.	
	Determinar, a través de la derivada, cuándo una función es creciente y cuándo es decreciente en un intervalo.	
	Obtener los puntos críticos de una función.	
	Determinar cuándo un punto crítico es un máximo o un mínimo o un punto de inflexión (criterio de la primera derivada).	
	Explicar la diferencia entre máximos y mínimos relativos y máximos y mínimos absolutos de una función en un intervalo.	
	Mostrar, a través de la derivada, cuándo una función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.	
	Determinar, mediante el criterio de la segunda derivada, los máximos y los mínimos de una función.	
	Analizar en un determinado intervalo las variaciones de una función dada: creciente, decreciente, concavidades, puntos máximos, puntos mínimos, puntos de inflexión y asíntotas.	
	Resolver problemas de optimización planteando el modelo correspondiente y aplicando los métodos del cálculo diferencial.	
	Resolver problemas de aproximación haciendo uso de las diferenciales.	

ORGANIZADOR GRÁFICO



ANTECEDENTES

En este capítulo final abordaremos un conjunto de temas conocidos como estudio de curvas y aplicación de la derivada. Después de analizar estos conceptos desarrollaremos el bosquejo correcto de una función utilizando las herramientas vistas a lo largo de todo el libro.

Para empezar, veremos la aplicación directa de las derivadas en la solución de problemas, es decir, qué significa la derivada de una función en un punto o en otro; veamos un ejemplo:

En una clase de economía, después de una explicación se deduce que el modelo de producción de cierta empresa se comporta como una función cúbica; sin embargo, Enrique, uno de los alumnos, no comprende qué significa esto, pero nota que el objeto llega a un punto máximo y empieza a descender hasta otro punto, para luego volver a subir. Económicamente, ¿qué significan para la empresa estos puntos y cómo debería interpretar Enrique estos sucesos?

Este ejemplo puede representarse en la gráfica 5.1, donde podemos ver una función cúbica; interpretar correctamente el mínimo y el máximo es muy importante, ya que de ello puede depender el beneficio de un producto, la producción máxima, el costo mínimo o los puntos de equilibrio.

Éste sería un ejemplo de aplicación de las derivadas, sin embargo el tema va mucho más allá: las derivadas son muy utilizadas en la optimización de problemas de tasas de cambio, de diseño, de física y de electromagnetismo, entre muchos otros. Algunas de estas aplicaciones ya se trataron en el capítulo 4; otras más las veremos aquí y dejaremos una buena parte a la curiosidad del lector para seguir investigando sobre el tema.

5.1 Estudio general de curvas

Bajo el concepto de estudio de curvas se agrupa una serie de métodos analíticos que nos ayudan a comprender y deducir el comportamiento gráfico de una función.

A lo largo de este libro, principalmente en el capítulo 2, en el que analizamos los diferentes tipos de funciones y los métodos para graficarlos, y el bosquejo de funciones racionales con el apoyo de las asíntotas, que tratamos en el capítulo 3, ya estarás familiarizado con las gráficas de los diferentes tipos de funciones. Ahora te preguntarás cómo encaja la derivada en la gráfica de funciones.

La derivada prueba ser una poderosa herramienta que ayuda a comprender con exactitud los cambios en el plano y en el espacio que sufre una función.

Mediante la derivada podemos obtener las intersecciones con el eje x; los intervalos en los cuales las funciones son crecientes, decrecientes o constantes; los puntos en los cuales la pendiente de la recta tangente cambia, también llamados puntos de inflexión; deducir concavidades y concluir los puntos exactos en los que la función tiene un máximo o un mínimo. Con estos datos, obtenidos mediante la aplicación de la derivada, junto con nuestros conocimientos previos sobre funciones, podemos lograr un dibujo exacto de la función.

En este capítulo analizaremos los métodos de estudio de curvas correspondientes al cálculo diferencial; en especial, el criterio de la primera y segunda derivadas, el teorema de Rolle y del valor medio, y el estudio de la recta normal y tangente a la curva, con los cuales concluiremos la parte teórica de este libro.

Finalmente, la mejor manera de entender el comportamiento de las funciones es por medio de la práctica. El uso de software o calculadoras graficadoras serán de gran ayuda al momento de iniciar nuestro estudio, permitiéndonos entender y visualizar la función y revisar nuestros resultados.

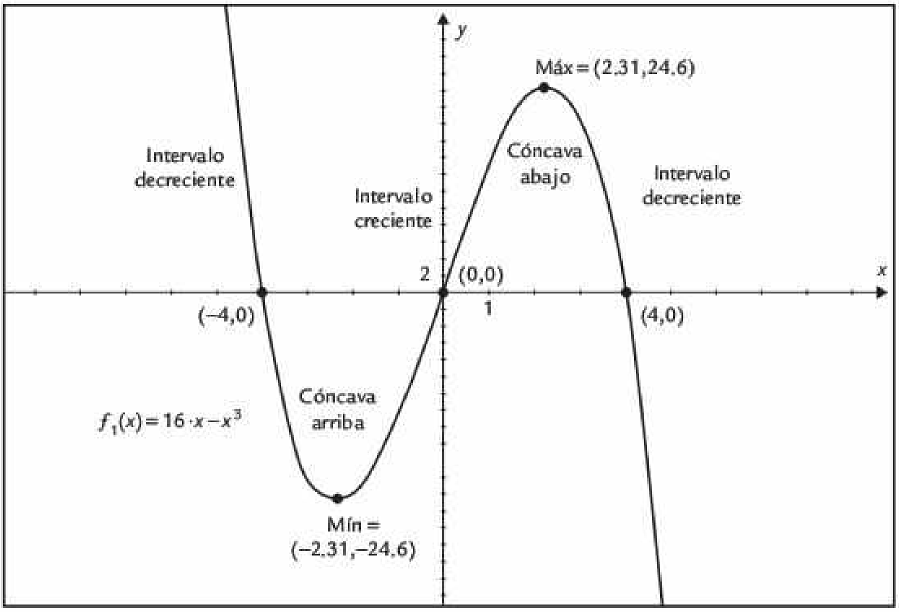
Por ejemplo, si nos encontramos una función como la del siguiente párrafo, mediante los conceptos vistos en el estudio de curvas, podremos obtener los datos suficientes para hacer un bosquejo exacto de la función.

Digamos que tenemos la función $y = 16x - x^3$ [$f_1(x)$ en la gráfica 5.1]. Mediante la factorización podemos obtener los puntos de intersección con el eje x -4, 0, 4, y con la primera derivada podemos obtener los puntos críticos $x = -2.31$ y $x = 2.31$, y con ello determinar si los intervalos antes o después de esos números son crecientes o decrecientes. Así, antes del -2.31, el intervalo es decreciente y el intervalo posterior creciente, con lo que se forma una concavidad hacia arriba en la gráfica hasta el siguiente número crítico, y después de este número crítico se forma otro intervalo decreciente, formando una concavidad hacia abajo. Posteriormente, mediante el criterio de la segunda derivada podremos afirmar si el punto en cuestión es un máximo o un mínimo y, finalmente, si se sustituyen los números críticos en la ecuación original obtendremos el par ordenado del máximo o el mínimo.

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra la siguiente actividad a tu portafolio de evidencias.

1. Comenta la importancia que tiene el estudio de curvas.



Gráfica 5.1

¿Comprendo la utilidad del estudio de curvas?

5.2 Recta normal, recta tangente e intersección de curvas

Un automóvil viaja por una autopista a una velocidad constante de 120 km/h. Si el automóvil derrapa en la curva, ¿cuál será la velocidad y la trayectoria en el momento en que salga de la curva? La trayectoria del automóvil al derrapar y salir de la curva es un ejemplo de línea tangente, al instante en que una porción de la curva toca tangencialmente o en un solo punto, a una recta.

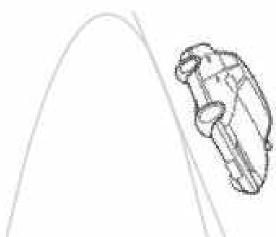


Figura 5.1

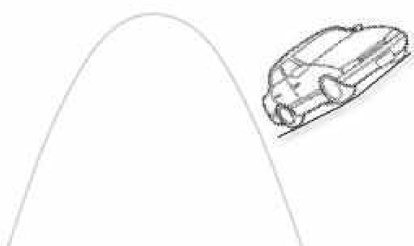
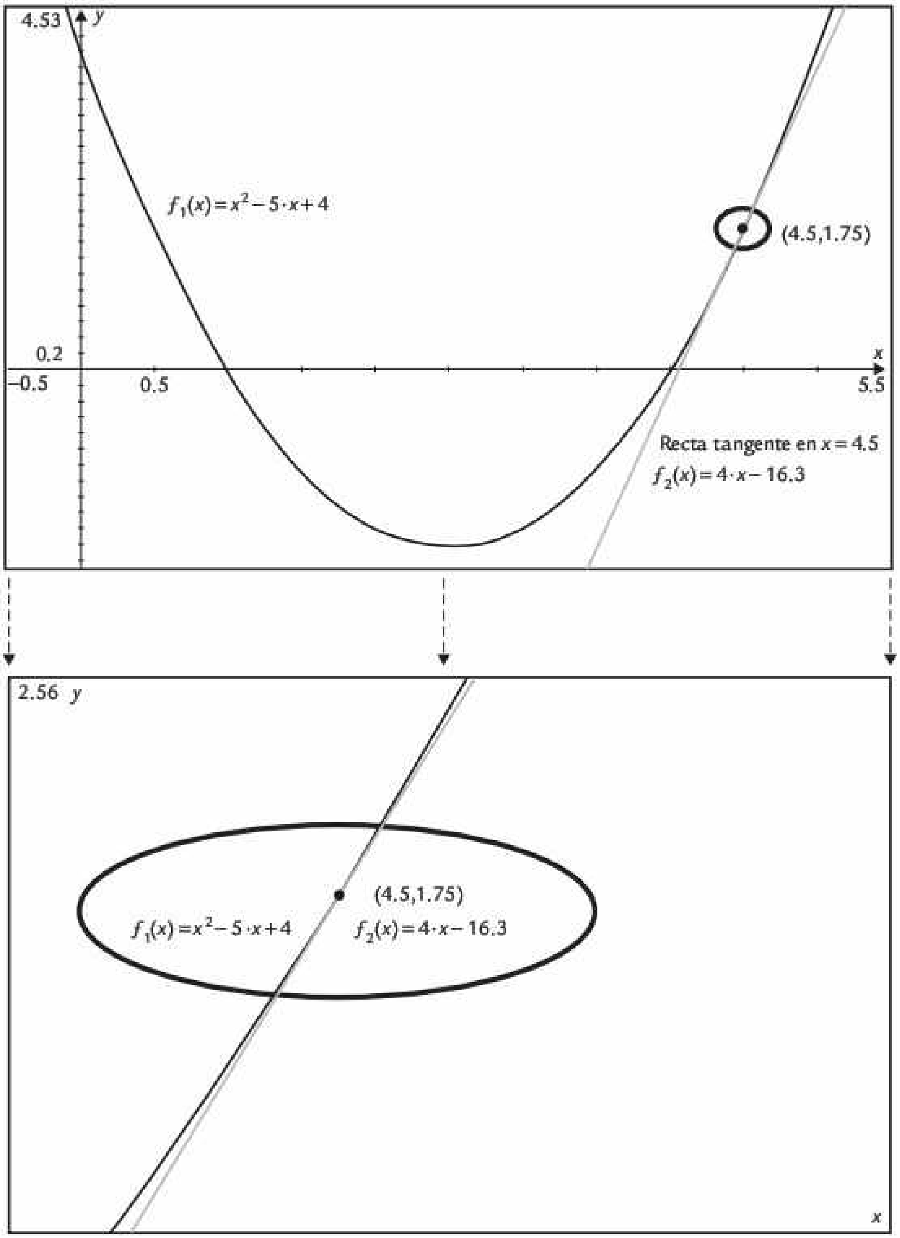


Figura 5.2

Por otro lado, si un automóvil sale de una curva y trata de tomar una carretera que se encuentre a 90° con respecto de la recta de tangencia a la curva en ese punto, la dirección del automóvil será totalmente perpendicular y se tratará de otro concepto matemático importante que se llama recta normal.

Una línea tangente es aquella recta que representa la pendiente o la dirección que tiene en el plano la curva en un punto dado. La importancia de la recta tangente radica en que representa la variación de la pendiente de una función en un punto, ya que la ecuación de la recta tangente proviene directamente de la derivada de una función y su relación con el punto en que la recta toca la curva (gráficas 5.2 y 5.3). Por ejemplo, si tenemos las siguientes gráficas:

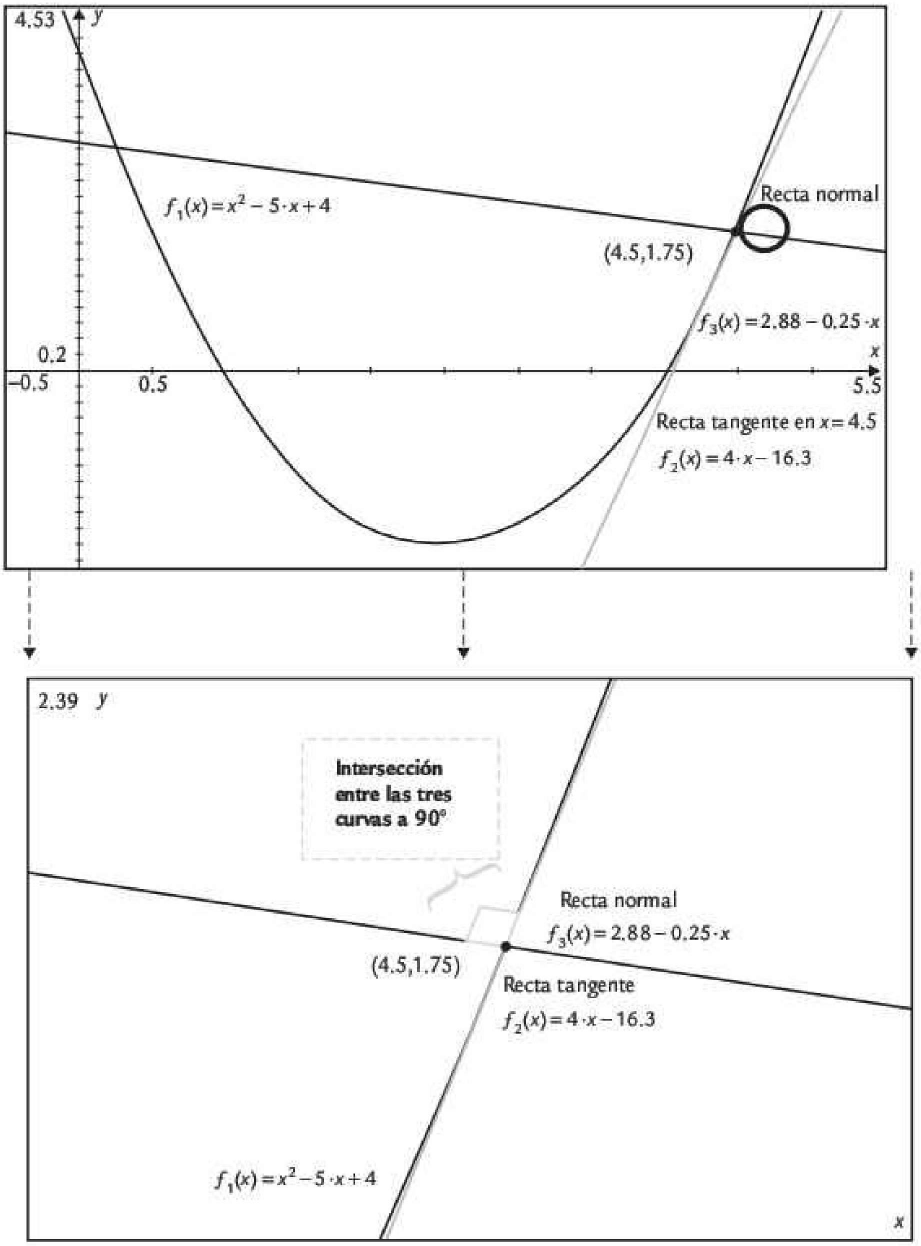


Gráficas 5.2 y 5.3

Esto significa que si nos acercamos al punto de tangencia, es decir donde la línea recta toca a la curva, en ese instante la función va creciendo de manera similar a como lo hace la línea recta. En este caso, la ecuación de la recta tangente es $y = 4x - 16.3$ [$f_2(x)$ en las gráficas 5.2 y 5.3], por lo que la pendiente es 4, de modo que la distancia en y cambia 4 unidades por cada unidad que cambia en x.

La otra recta a estudiar es la recta normal, que es aquella recta perpendicular que forma un ángulo de 90° con la recta que toca a la curva en el punto de tangencia.

La ecuación de la recta normal se obtiene mediante el recíproco negativo de la pendiente de la recta tangente, con lo que se logra la perpendicularidad entre las rectas (gráficas 5.4 y 5.5). En el ejercicio anterior la recta tangente es $f_2(x) = 4x - 16.3$, la pendiente es 4 y su recíproco negativo es $-1/4$; por lo que la intersección gráfica entre las tres curvas quedaría como se muestra en las gráficas 5.4 y 5.5.



Gráficas 5.4 y 5.5

Estrategia para obtener las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva

El problema de encontrar la línea tangente en un punto c de una curva resulta en una metodología sumamente sencilla. Más aún, encontrar la recta normal en el mismo punto una vez obtenida la ecuación de la recta tangente se traduce en menos pasos debido al uso de algunos valores comunes.

Veamos los pasos a seguir para encontrar la recta tangente a la curva:

1. Evaluar $f(x)$, a la que llamaremos y_0, en el punto inicial x_0.
2. Evaluar la derivada de la función en x_0, con lo que obtendremos la pendiente de la recta tangente, que denominaremos m_T.
3. Encontrar la ordenada al origen b sustituyendo en la fórmula $b = y_0 - m_T x_0$.
4. Finalmente, la ecuación de la recta tangente estará dada por la ecuación de la línea recta de la forma punto pendiente $y_T = m_T x + b$.

NOTA: Recordemos que la derivada de toda función corresponde a la pendiente de la recta tangente en el punto dado.

EJEMPLO 1

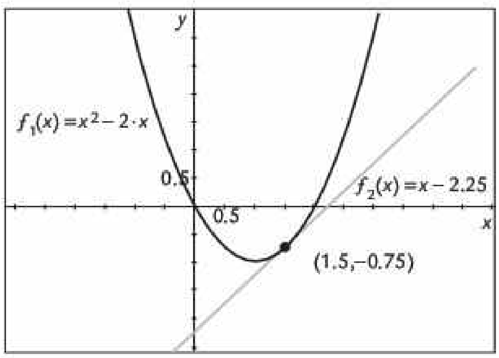
Encontrar la recta tangente a la curva $f_1(x) = x^2 - 2x$ en el punto inicial $x_0 = 1.5$.

1. Obtenemos y_0 evaluando $f(1.5) = (1.5)^2 - 2(1.5) = -0.75 \therefore y_0 = -0.75$.

   Si x_0 corresponde al valor de la abscisa de la línea tangente en el punto c, y_0 es el par de la ordenada en dicho punto (x_0, y_0).
2. Si $f_1(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$, entonces evaluamos en la derivada para obtener la pendiente $f'(1.5) = 2(1.5) - 2 = 1 \therefore m_T = 1$.
3. Determinamos $b = \underbrace{-0.75}_{y_0} - (1)\underbrace{(1.5)}_{xX} = -2.25$.
4. Sustituimos m_T y b en la ecuación punto pendiente $y = m_T x + b$, con lo que la ecuación de nuestra recta tangente queda de la siguiente forma:

$$f_2(x) = x - 2.25$$

La representación gráfica de la recta tangente y a la curva quedaría de la siguiente manera:



Gráfica 5.6

Los pasos para encontrar la ecuación de la recta normal son equivalentes a los que se siguen para obtener la ecuación de la recta tangente.

Si ya se tienen los valores de y_0 y de la pendiente m_T de la recta tangente, podemos usarlos en los pasos 1 y 2 para determinar los demás valores de nuestra ecuación, de lo contrario, deberán obtenerse previamente.

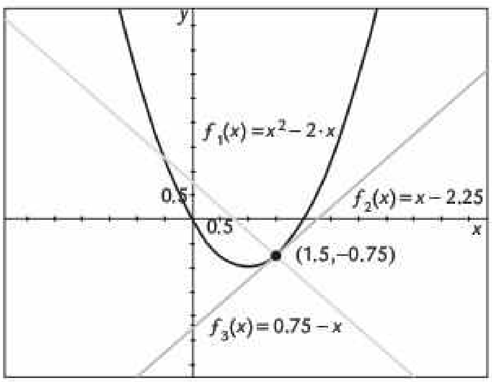
1. La pendiente de la recta normal corresponde al recíproco negativo de la pendiente de la recta tangente. Para determinarla, sustituimos el valor de m_T en $m_N = -\dfrac{1}{m_T}$.
2. Encontraremos b con la pendiente de la recta normal y el valor y_0 sustituyendo los valores en $b = y_0 - m_N x_0$.
3. Sustituimos en la fórmula punto pendiente $y_N = m_N x + b$ los valores obtenidos para obtener la ecuación de la recta normal.

EJEMPLO 2

Usamos los valores y_0 y m_T obtenidos en el ejemplo 1 para calcular la ecuación de la recta normal.

1. $m_N = -\dfrac{1}{m_T} = -\dfrac{1}{1} = -1$
2. La ordenada de la recta normal será $b = -0.75 - (-1)(1.5) = 0.75$.
3. La ecuación de la recta normal en el punto $x_0 = 1.5$ queda dada por $y_N = 0.75 - x$.

Ahora procedemos a ilustrar las tres ecuaciones:



Gráfica 5.7

NOTA: Si al momento de intersectar nuestras rectas tangentes y normales éstas no forman un ángulo de 90° entre sí, habrá que revisar el procedimiento.

EJEMPLO 3

Encontrar las ecuaciones de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - x$, en $x_0 = 1.2$, y de la recta normal

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=x^3-x \\ &f(1.2)=(1.2)^3-1.2=0.528 \\ &y_0=0.528 \end{aligned}\right\}$$

Evaluamos $f(x)$ con x_0 para obtener y_0

Para la pendiente evaluamos x_0 en la derivada

$$\left\{\begin{aligned} &f'(x)=3x^2-1 \\ &f'(1.2)=3(1.2)^2-1=\frac{83}{25} \\ &m_T=\frac{83}{25} \end{aligned}\right.$$

$$b=y_0-m_T x_0=0.528-\left(\frac{83}{25}\right)(1.2)=-\frac{36}{25}$$

$$X_0$$

Con estos datos podemos formar la ecuación de la recta tangente:

$$y=\frac{83}{25}x-1.44$$

Para formar la recta normal sólo necesitamos m_N y b con la nueva pendiente.

$$m_N=-\frac{1}{m_T}=-\frac{1}{(83/25)}=-\frac{25}{83}$$

La pendiente de la recta normal será el recíproco negativo de la pendiente tangente

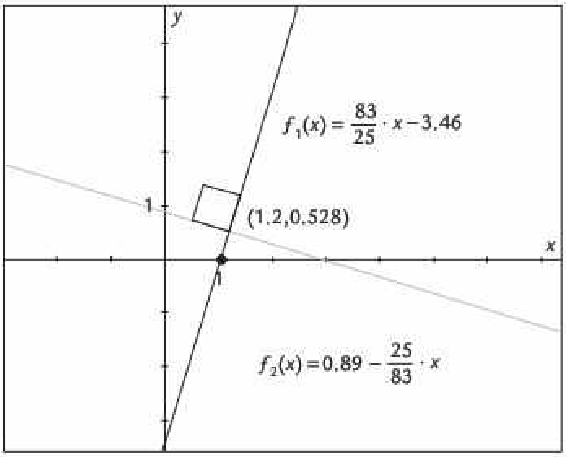
$$b=y_0-m_N x_0=0.528-\boxed{\left(-\frac{25}{83}\right)}(1.2)=0.89$$

La pendiente es lo que hace que la ordenada al origen b sea diferente en las ecuaciones

Sustituimos los datos en la ecuación de la recta ordenada al origen para obtener la recta normal:

$$y=0.89-\frac{25}{83}x$$

Ahora, si graficamos ambas ecuaciones éstas deben intersectarse en el punto (1.2,0.528) y formar un ángulo de 90°.



Gráfica 5.8

ACTIVIDAD DE TRABAJO 5.1

I. Obtén la ecuación de la recta tangente de las siguientes funciones en el punto dado.

1. $x^2+5x-3, x=1.5$
2. $x^3+3x^2-7x+5, x=3$
3. $36-x^2, x=5$
4. $x^2+15x-16, x=2.2$
5. $x-x^3, x=2.5$
6. $3x^2+6x-12, x=1.8$
7. $x^2+5x, x=3.5$
8. $2x^4-3x^2, x=2.1$
9. $3e^{2x}, x=1$

II. Obtén la ecuación de la recta normal de las siguientes funciones en el punto dado.

1. $5x^4+3x^2, x=2$
2. $8x^3-4x^2, x=1$
3. $27x-9x^3, x=3$
4. $6x^2+18x, x=1.4$
5. $4x^3+7x, x=6$
6. $12x^2-3x^3, x=0.5$
7. $\sqrt{x+8}, x=-3$
8. $\sqrt[3]{x}, x=2$
9. $8x-12x^2, x=3.2$

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra las siguientes actividades a tu portafolio de evidencias.

2. Presenta los ejercicios impares de la ecuación de la recta tangente.
3. Presenta los ejercicios impares de la ecuación de la recta normal.

Recta normal y recta tangente de ecuaciones implícitas

Ya vimos cómo obtener la ecuación de la recta tangente y de la recta normal en una ecuación explícita, y también cómo obtener sus definiciones. Ahora veremos una ecuación en su forma implícita.

De la misma forma que con la ecuación explícita, es posible obtener estas rectas y graficarlas, siempre y cuando se proporcionen los datos necesarios; para ello se requerirá la ecuación en su forma implícita y las coordenadas (x,y), como se explica en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO

$xy + y - 1 = 0$ en el punto $\left(3, \frac{1}{4}\right)$

$$y' = \frac{-y}{x+1}$$

El primer paso es obtener la derivada implícita

$$y' = \frac{-\frac{1}{4}}{3+1} = -\frac{1}{16}$$

Después sustituimos los valores, con lo que obtenemos la pendiente de la recta tangente

Utilizamos la ecuación punto pendiente:

$$y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$$

$$\underbrace{y - \boxed{\tfrac{1}{4}} = \boxed{-\frac{1}{16}}\left(x - \boxed{3}\right)}$$

$$y = \frac{-\left(x-7\right)}{16}$$

Sustituimos estos tres valores en la ecuación punto pendiente con lo que obtenemos la recta tangente

Para obtener la recta normal, una vez obtenida la pendiente de la recta tangente, se multiplica por su recíproco negativo y se siguen los mismos pasos:

$$m_{\mathrm{N}} = \frac{-1}{m_{\mathrm{T}}} = \frac{-1}{\frac{-1}{16}} = 16$$

Pendiente de la recta normal

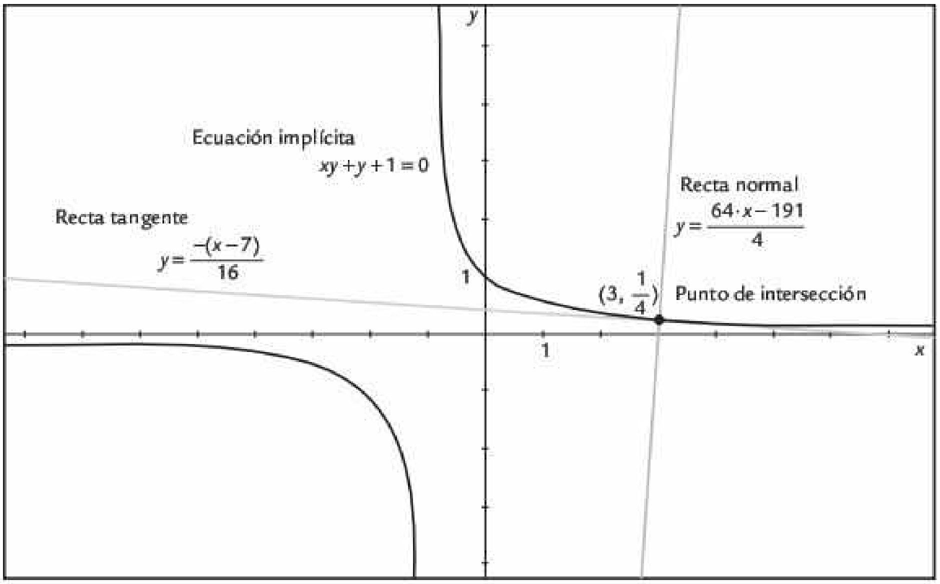
$$y - \tfrac{1}{4} = 16\left(x - 3\right)$$

Sustitución en la forma punto pendiente

$$y = \frac{64x - 191}{4}$$

Recta normal

Ahora podemos graficar y ver la intersección de las tres ecuaciones como se ilustra en la gráfica 5.9, para comprobar la veracidad de los resultados. Recordemos que el ángulo que forman la recta tangente y la recta normal debe ser de 90° para que el resultado sea correcto.



Gráfica 5.9

ACTIVIDAD DE TRABAJO 5.2

Obtén la ecuación de la recta normal y de la recta tangente de las siguientes ecuaciones implícitas.

1. $xy-4y=7$ en $(2,3)$
2. $x^2y-5xy+8=0$ en $(-1,2)$
3. $xy^2-3xy+6=0$ en $(3,4)$
4. $xy-y=-1$ en $(5,-7)$
5. $x^2y-xy^2=2$ en $(2,2)$
6. $5xy^2-3xy=4$ en $(1,-4)$

¿?

¿Soy capaz de explicar qué es la recta tangente?

¿Soy capaz de explicar qué es la recta normal?

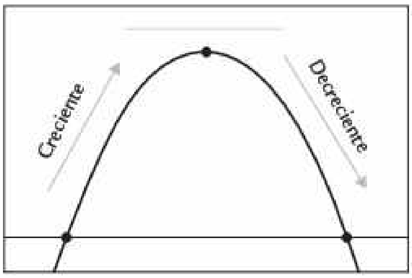
5.3 Teorema de Rolle

A Jorge, quien actualmente está viendo el estudio de curvas, le llamó mucho la atención el teorema de Rolle porque le parece un tema muy importante y con mucho significado en la vida real. Este teorema asegura que si una curva cruza o toca dos veces el eje x, en algún punto de la curva ubicada en el intervalo que delimitan esas intersecciones se podrá trazar una línea tangente horizontal, lo que asegura un máximo o un mínimo. Por ejemplo, en el caso de curvas que describen el volumen de una caja, el costo de producción o los ingresos, y cuya gráfica cruce al menos un par de veces el eje x, el teorema de Rolle nos asegura que la función se maximiza o se minimiza.

El teorema de Rolle supone la existencia de una línea tangente horizontal que se ubica en el punto c de un máximo o un mínimo formado por la unión de intervalos crecientes y decrecientes (gráficas 5.10 y 5.11). La importancia de este teorema radica en que afirma la existencia de al menos una línea horizontal entre cada dos intersecciones con el eje x, siempre y cuando la función sea continua en dichas intersecciones.

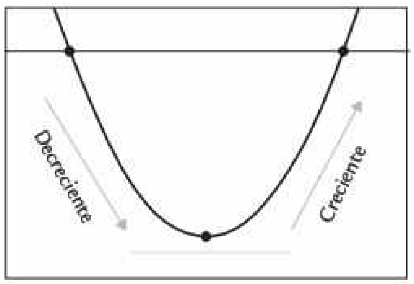
Esto se debe a que la continuidad de la función entre las intersecciones obliga a la curva a cambiar de dirección en el punto en el que la derivada es cero, con lo cual se genera un máximo o un mínimo y se forma, por lo tanto, el punto de tangencia para la recta horizontal.

En otras palabras, para que una curva pueda intersectarse dos veces con el eje x tiene que existir un intervalo donde la curva es creciente, un punto donde la derivada es cero y un intervalo donde la curva es decreciente para volver a intersectarse con el eje x. Podemos hacer el mismo análisis para el caso de un mínimo.



Máximo

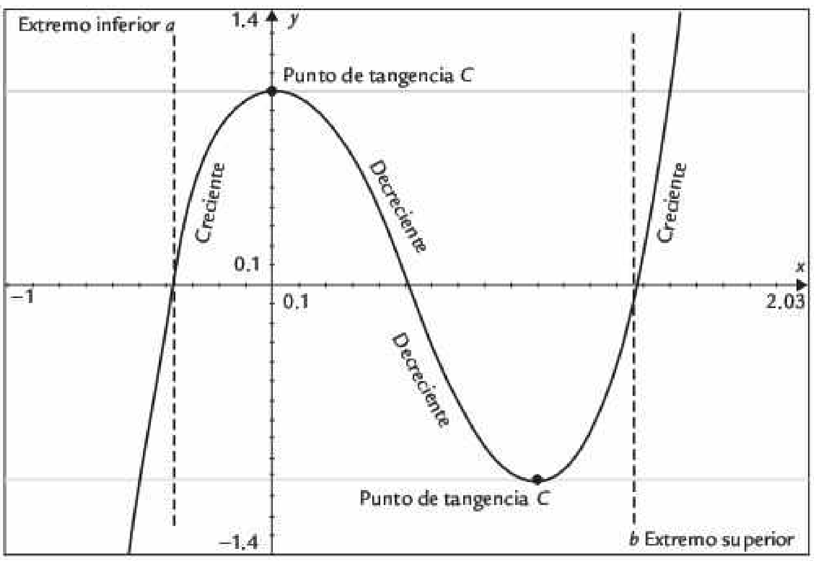
Gráfica 5.10



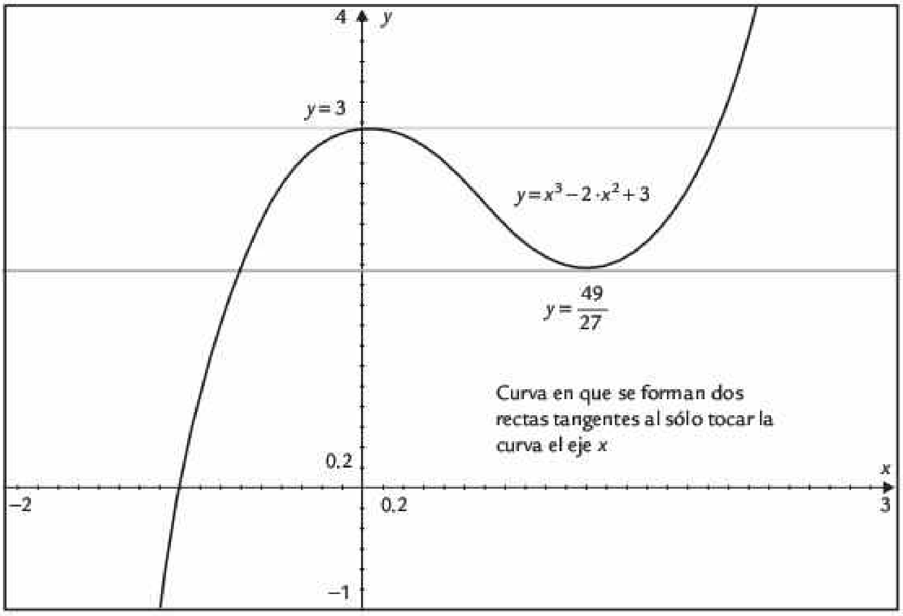
Mínimo

Gráfica 5.11

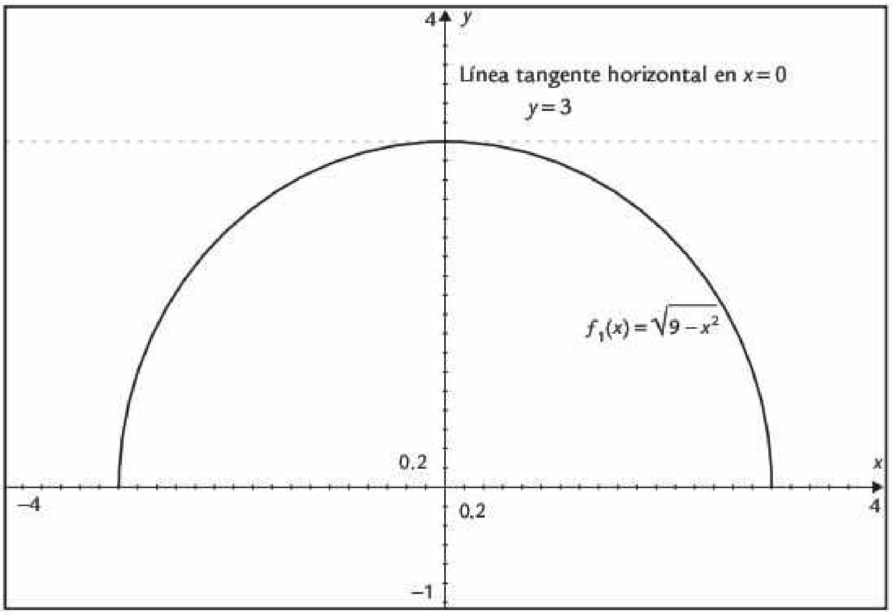
La formación de las rectas tangentes en el teorema de Rolle se puede visualizar en las curvas de las gráficas 5.12 a 5.14.



Gráfica 5.12



Gráfica 5.13



Gráfica 5.14

Teorema de Rolle

Si una función es continua en un intervalo cerrado [a, b] y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto c en (a, b) en el que

$$f'(c) = 0$$

por lo que la recta que toca el punto c será horizontal.

Para encontrar la línea horizontal sólo necesitamos tres pasos:

1. Comprobar que al evaluar en la función el extremo superior y el extremo inferior del intervalo, el resultado es el mismo.
2. Encontrar los ceros de la derivada.
3. Sustituir las soluciones de la derivada en la función original para encontrar la recta horizontal.

EJEMPLO 1

Encontrar la línea tangente horizontal de $f(x) = x - x^2$ en el intervalo cerrado [0,1].

1. $f(0) = 0 - 0^2 = 0$

   $f(1) = 1 - 1^2 = 0$

   Si al evaluar los extremos del intervalo obtenemos el mismo resultado, procedemos al siguiente paso; de lo contrario, no existe una línea horizontal

2. Derivamos e igualamos a cero: $f'(x) = 1 - 2x$

   $1 - 2x = 0$

   $-2x = -1$

   $x = -1/-2 = ½$

   La solución de la derivada representa la existencia de un punto *c* en el que la recta tangente es horizontal

3. Sustituimos el punto *c* en la función original para hallar y graficar la recta:

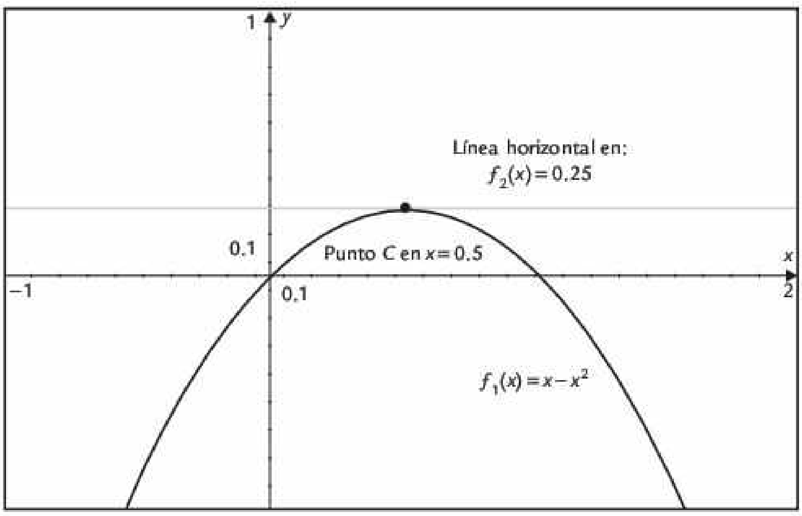
   $f(x) = x - x^2$

   $f(½) = (½) - (½)^2$

   Ecuación de la recta horizontal

   $f(x) = 0.25$

Recuerda que la gráfica de toda **función constante** es una línea recta horizontal en ese punto, como se representa en la gráfica 5.15.



Gráfica 5.15

EJEMPLO 2

Verificar si la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ cumple con la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado $[-\frac{1}{2},1]$.

1. $f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2})^3 - 3(-\frac{1}{2})^2 = -1$

   $f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 = -1$ ✓

   Cumple con la condición

2. $f(x) = 6x^2 - 6x$

$$6x^2 - 6x = 0$$
$$6x(x-1) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1$$

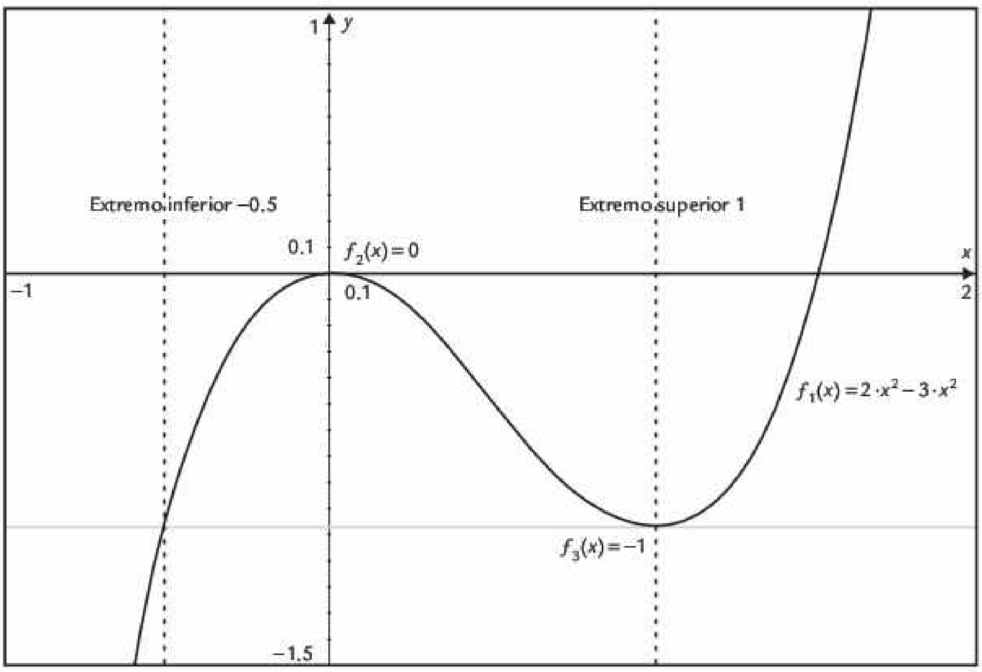
Observa que en este intervalo hay dos soluciones

3. Por último, evaluamos ambas soluciones para encontrar las rectas tangentes.

   $f(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 = 0$

   $f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 = -1$

Es decir, existirán dos rectas tangentes horizontales: una en 0 y otra en −1, las cuales se representan en la gráfica 5.16.



Gráfica 5.16

ACTIVIDAD DE TRABAJO 5.3

Determina un punto c que satisfaga las condiciones del teorema de Rolle en los intervalos de las siguientes funciones.

1. $f(x)=x^{3/2}-x^{1/2}$ en $[0,1]$
2. $f(x)=7\cos(x)$ en $[\pi,3\pi]$
3. $f(x)=x^3-2x^2$ en $[0,2]$
4. $f(x)=2-x^2$ en $[-2,2]$
5. $f(x)=x^2-x^{1/3}$ en $[0,1]$
6. $f(x)=8x-4x^2$ en $[0,2]$
7. $f(x)=9x-3x^2$ en $[1,2]$
8. $f(x)=2\operatorname{sen}(x)$ en $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$
9. $f(x)=x^4-2x^2$ en $[-2,2]$
10. $f(x)=\cosh^2(x)$ en $[-1,1]$
11. $f(x)=x^5-8x^2$ en $[0,2]$
12. $f(x)=x^{1/2}-x^2$ en $[0,1]$

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra la siguiente actividad a tu portafolio de evidencias.

4. Demuestra el teorema de Rolle.

¿?

¿Comprendo la utilidad del teorema de Rolle?

5.4 Teorema del valor medio

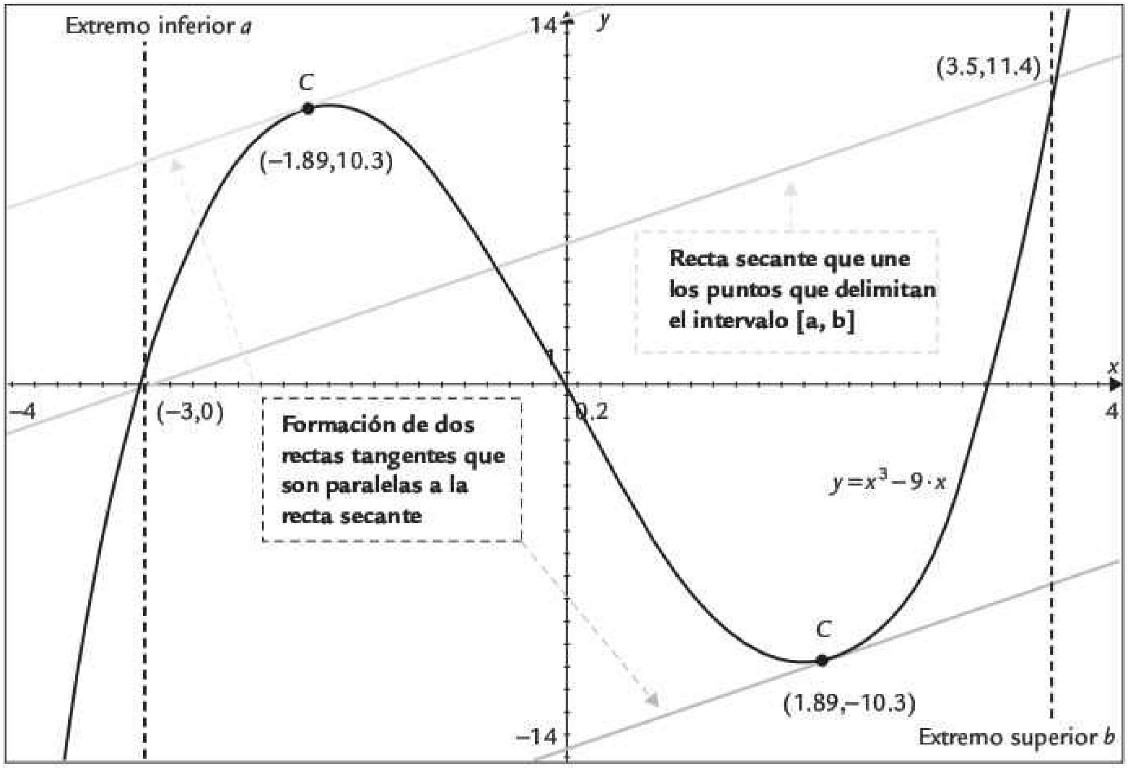
Una competencia de kayak empieza desde un punto A del río y sigue una trayectoria curvilínea que termina en el punto B. Para grabar esta competencia y asegurarse que los participantes no hagan trampa, se planea que un automóvil situado en la orilla del río siga una trayectoria recta del punto A al punto B y observe en todo momento a los kayak. ¿Existirá otra línea paralela que haga esto? (Gráfica 5.17).

El teorema del valor medio es una generalización del teorema de Rolle, A este teorema también se le conoce como el teorema de Bonnet-Lagrange, teorema del punto medio o teorema de los incrementos infinitos. En esencia, el teorema del valor medio afirma la existencia de una recta inclinada que es tangente a la curva de una función continua en el punto c. Esta recta es paralela a la recta secante que se formaría si uniéramos los puntos que delimitan un intervalo del dominio de una función (gráfica 5.17).

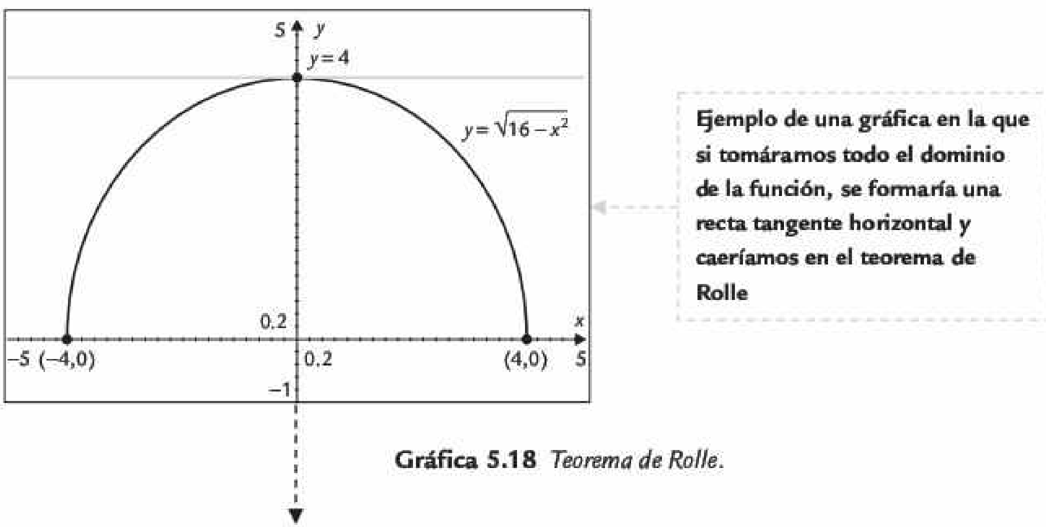
Aunque el teorema del valor medio no se utiliza para resolver problemas reales, su importancia en el cálculo radica en que es útil para poder probar otros teoremas, como el de Taylor.

El siguiente esquema muestra la hipótesis del teorema del valor medio.

Esquema de la formación de rectas tangentes en los puntos *c* descritos por el teorema del valor medio.

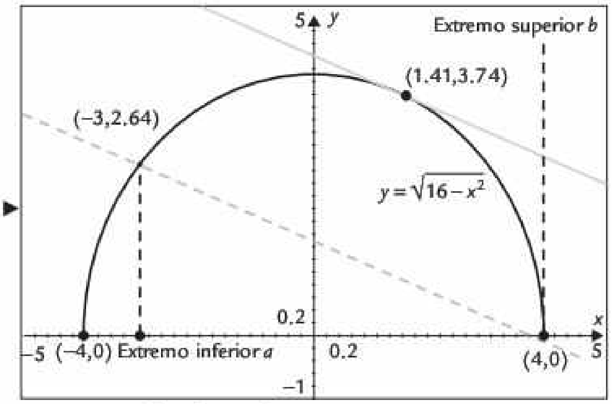


Gráfica 5.17



Gráfica 5.18 *Teorema de Rolle.*

Sin embargo, si definimos el intervalo [-3, 4], el teorema del valor medio sí se cumpliría con una recta tangente inclinada paralela a la línea secante



Gráfica 5.19 *Teorema del valor medio.*

Teorema del valor medio

Si una función es continua en un intervalo cerrado [a, b] y diferenciable en (a, b) entonces existe al menos un punto c en (a, b) tal que la línea tangente a la curva en el punto c es paralela a la secante que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Es decir:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ tal que } f'(c) \text{ representa los ceros de la derivada} \Rightarrow f'(c)=f'(x)$$

Para aplicar el teorema del valor medio con el fin de encontrar la ecuación de la línea tangente paralela a la secante, usamos los siguientes pasos:

1. Evaluamos los extremos de los intervalos en la función original.
2. Encontramos $f'(c)$ con la fórmula del valor medio.
3. Igualamos la derivada con $f'(c)$ y despejamos x.

EJEMPLO 1

Dada la función $f(x)=3x^3-x+1$, encuentra la ecuación de la línea tangente paralela a la secante que se forma con los valores que determinan el intervalo cerrado [−1, 2].

1. Evaluamos $f(b)$ y $f(a)$.

$$f(b)=3(2)^3-(2)+1=23$$

$$f(a)=3(-1)^3-(-1)+1=-1$$

Extremo superior e inferior del intervalo, respectivamente

2. Utilizamos la fórmula $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para encontrar $f'(c)$.

$$f'(c)=\frac{23-(-1)}{2-(-1)}=8$$

Donde *c* representa los ceros de la derivada

3. Igualamos la derivada de la función a $f'(c)$.

$$f(x) = 3x^3 - x + 1$$
$$f'(x) = 9x^2 - 1$$

Derivada de la función

$$f'(x) = f'(c)$$
$$9x^2 - 1 = 8$$
$$9x^2 = 8 + 1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$
$$x_1 = -1$$
$$x_2 = 1$$

Como al igualar la derivada con $f'(c)$ obtenemos dos soluciones, quiere decir que dentro de ese intervalo existirán dos líneas tangentes inclinadas a la curva en los puntos $X_1 = -1$ y $X_2 = 1$

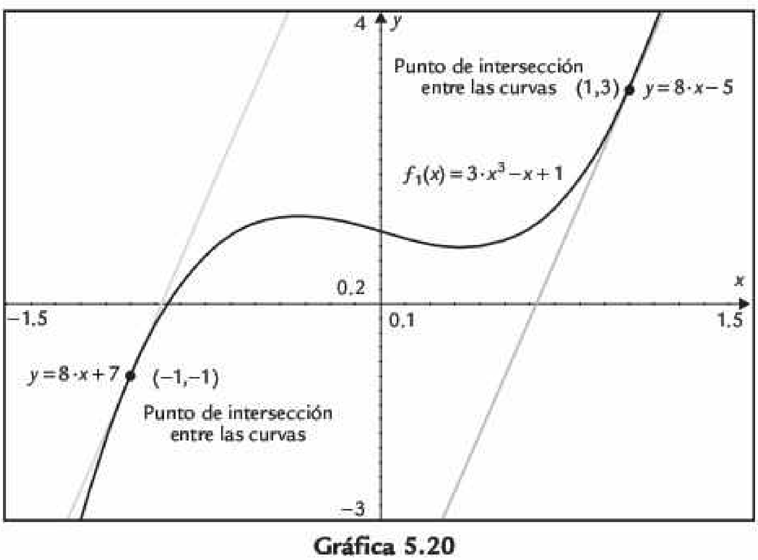
Por el teorema del valor medio podemos decir que existen dos líneas tangentes a la curva. Encontremos sus ecuaciones y grafiquemos las ecuaciones de ambas rectas tangentes (gráfica 5.20).

Ecuación de la recta tangente 1

$$f(x) = 3x^3 - x + 1, x_1 = -1$$
$$y_1 = 3(-1)^3 - (-1) + 1 = -1$$
$$f'(x) = 9x^2 - 1$$
$$m_T = 9(-1)^2 - 1 = 8$$
$$b = y_1 - m_T x_1 = -1 - (8)(-1) = 7$$
$$y = 8x + 7$$

Ecuación de la recta tangente 2

$$f(x) = 3x^3 - x + 1, x_2 = 1$$
$$y_2 = 3(1)^3 - (1) + 1 = 3$$
$$f'(x) = 9x^2 - 1$$
$$m_T = 9(1)^2 - 1 = 8$$
$$b = y_2 - m_T x_2 = 3 - (8)(1) = -5$$
$$y = 8x - 5$$



Gráfica 5.20

EJEMPLO 2

Utiliza el teorema del valor medio para hallar la recta tangente en el intervalo [2,3] que es paralela a la secante de la función $f(x) = 3x - 5x^2$.

1. $$f(3)=3(3)-5(3)^2=-36$$
$$f(2)=3(2)-5(2)^2=-14$$

2. $$f'(c)=\frac{-36-(-14)}{3-2}=-22$$

$$f(x)=3x-5x^2$$
$$f'(x)=3-10x$$

3. $$3-10x=-22$$
$$-10x=-22-3$$
$$x=\frac{-25}{-10}=\frac{5}{2}$$

Por lo tanto 5/2 satisface la hipótesis del teorema del valor medio

Una vez encontrado el punto c en el que se ubica la recta tangente, lo usamos como x_0 para formar la ecuación de la recta y graficar la intersección de las curvas.

Ecuación de la recta tangente

$$f(x)=3x-5x^2,\ f'(c)=x_0=\frac{5}{2}$$

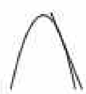
$$y_0=3\left(\frac{5}{2}\right)-5\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{-95}{4}$$

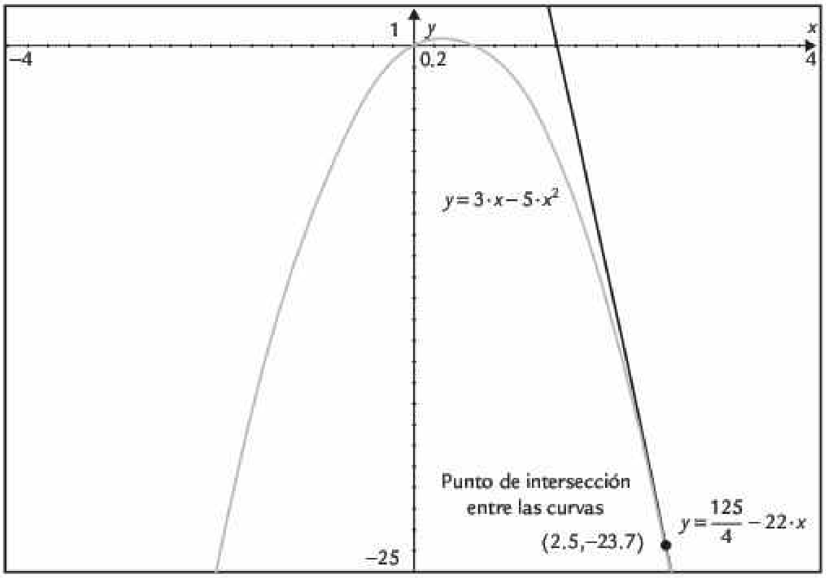
$$f'(x)=3-10x$$

$$m_T=3-10\left(\frac{5}{2}\right)=-22$$

$$b=y_0-m_Tx_0=\frac{-95}{4}-(-22)\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{125}{4}$$

$$y=\frac{125}{4}-22x$$





Gráfica 5.21

ACTIVIDAD DE TRABAJO 5.4

Determina un punto c que satisfaga las condiciones del teorema del valor medio en los intervalos de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^2 - x$ en $[1,3]$
2. $f(x) = \text{sen}(2x)$ en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
3. $f(x) = x^3 + 3x$ en $[1,2]$
4. $f(x) = x^2 - 9$ en $[-1,2]$
5. $f(x) = \sqrt{x-4}$ en $[5,6]$
6. $f(x) = 27 - x^2$ en $[-1,2]$
7. $f(x) = 4 - x - x^2$ en $[1,3]$
8. $f(x) = x^2 - x - 2$ en $[-2,-1]$
9. $f(x) = \ln(x+5)$ en $[-1,3]$
10. $f(x) = -x^2 + 2$ en $[0,2]$
11. $f(x) = x^4 - 2x$ en $[1,3]$
12. $f(x) = x^3 - x$ en $[-1,2]$

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra la siguiente actividad a tu portafolio de evidencias.

5. Demuestra el teorema del valor medio.

¿?

¿Comprendo la importancia y la utilidad del teorema del valor medio?

5.5 Máximos y mínimos. Criterio de la primera derivada

En una zapatería desean determinar el volumen que maximice una caja de zapatos para sus nuevos modelos. Uno de sus empleados, Pepe, recuerda que utilizando las derivadas se puede obtener el volumen máximo, y que formando la ecuación del volumen a partir de las mediciones del cartón y derivando el resultado sabría si el volumen obtenido sería un máximo o un mínimo. Recuerda también que para el máximo debe tomar los ceros de la derivada y formar intervalos: si el primer intervalo es positivo y el segundo negativo, Pepe habrá descubierto el volumen máximo de la caja de zapatos (problema 5.9).

El análisis de la primera derivada es de vital importancia en el estudio de curvas ya que gracias a este criterio podemos deducir los intervalos en que la función crece o decrece y, en consecuencia, realizar un bosquejo aproximado de la gráfica; sin embargo, debe complementarse con otros análisis para determinar los puntos exactos de los máximos y mínimos, puntos de inflexión e intersección con los ejes para que el trazo de la gráfica sea más exacto.

El primer paso, y el más importante, para realizar el análisis de una curva consiste en encontrar las intersecciones con los ejes, ya sea evaluando la función con la variable independiente igual a cero (x) para encontrar las intersecciones con el eje y, y encontrando los valores de x que igualen a cero la función.

Después, mediante el criterio de la primera derivada podemos deducir si la función tiene un intervalo creciente o decreciente entre las intersecciones con el eje x.

Para realizar este procedimiento debemos obtener los números críticos, es decir, los valores de x que igualen a cero la primera derivada de la función.

Números críticos

Se denomina número crítico a aquel número real c en el cual la derivada de la función es igual a cero.

$$f'(c) = 0$$

Puntos críticos

El punto correspondiente de la gráfica, es decir las coordenadas en el plano que se obtienen al sustituir el número crítico en la función, se denomina punto crítico y se define de la siguiente manera:

$$(c, f(c))$$

Utilizamos los números críticos para formar los intervalos. Se sugiere ubicar los números críticos en una recta numérica y elegir un valor que sea menor, y otro que sea menor para cada número crítico. Después se evaluará cada valor elegido en la derivada de la función para observar el signo del resultado.

Si al evaluar el número elegido el resultado es positivo concluiremos que en ese intervalo la función es creciente; esto quiere decir que a medida que x crece, y también crece. Si al evaluarlo en la derivada de la función el resultado es negativo, concluiremos que en ese intervalo la función es decreciente ya que a medida que x crece, y decrece.

INTERVALO DONDE LA CURVA ES CRECIENTE	$x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$
INTERVALO DONDE LA CURVA ES DECRECIENTE	$x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$

Mediante las intersecciones con los ejes y el análisis de los signos de la derivada de la función podemos realizar un bosquejo más cercano de la curva, como se observa en la gráfica 5.22. Solamente nos faltaría analizar los puntos exactos en los que la función tiene máximos o mínimos, las concavidades y puntos de inflexión, temas que dejaremos para las secciones correspondientes.

EJEMPLO

Bosquejar la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 8$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$ — **Obtenemos la primera derivada y sus soluciones**

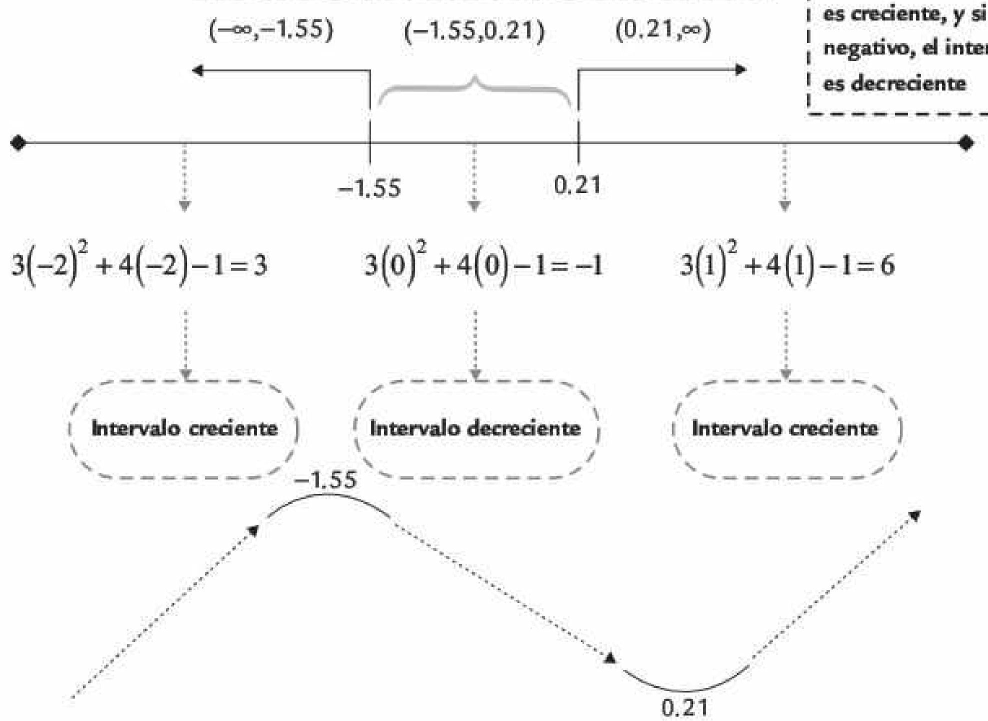
$3x^2 + 4x - 1 = 0$

$x_1 = -1.55$

$x_2 = 0.21$

Colocamos las soluciones sobre la recta numérica para formar los intervalos y elegimos cualquier número dentro de esos intervalos

Si al evaluarlo dentro de la derivada el resultado es positivo, el intervalo es creciente, y si es negativo, el intervalo es decreciente



Gráfica 5.22

Para bosquejar la gráfica colocamos los intervalos crecientes o decrecientes antes o después de los ceros de la primera derivada, que representarán los máximos o mínimos de dicha función.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 5.5

Determina en los siguientes ejercicios, mediante el criterio de la primera derivada, los intervalos en los que la función crece o decrece.

1. $f(x)=x^2-15x+56$
2. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x-8$
3. $f(x)=4x-2x^2$
4. $f(x)=3x^3-2x^2+6$
5. $f(x)=4x^2-5x^3$
6. $f(x)=x^2-8x-33$
7. $f(x)=6x^2-3x^3$
8. $f(x)=81x-\frac{1}{3}x^3$
9. $f(x)=2x+\frac{5}{x}$

¿?

¿Comprendo cómo aplicar el criterio de la primera derivada?

¿Soy capaz de explicar en términos matemáticos qué es un número crítico?

¿Soy capaz de determinar los puntos críticos de una función?

5.6 Máximos y mínimos. Criterio de la segunda derivada

El patrón de Pepe le pregunta si está seguro que el dato que encontró era el máximo volumen posible de la caja de zapatos. Para comprobarlo, Pepe utilizó de nuevo las derivadas, pero en esta ocasión volvió a derivar la primera derivada y sustituyó en ella los números críticos. Si el resultado es negativo, el volumen será un máximo, pero si el dato es positivo el volumen será un mínimo.

Encontrar el volumen máximo o mínimo de un recipiente no es el único uso de las derivadas ni de los criterios de la derivada; todo lo contrario, son herramientas que nos ayudan a optimizar problemas; por lo tanto, son útiles en todo tipo de situaciones en las que se requiera conocer la mejor solución a problemas de economía, geometría, producción y costos, entre otros.

Si mediante el criterio de la primera derivada establecemos los intervalos en los cuales la curva crece o decrece, a través del criterio de la segunda derivada determinaremos si el número crítico se trata de un máximo o de un mínimo.

Máximos

Máximo absoluto es aquel punto x_1 en el plano para el cual no existe $f(x_2) \geq f(x_1)$ dentro del dominio de la función (gráfica 5.23).

Máximo relativo es aquel número crítico c tal que $f(c) \geq f(x)$ dentro de un intervalo [a, b] de la función (gráfica 5.24).

¿?

¿Comprendo la utilidad del criterio de la segunda derivada?

¿Soy capaz de determinar el máximo absoluto de una función?

¿Soy capaz de describir qué es un mínimo relativo y la diferencia entre este concepto y el de mínimo absoluto?

5.7 Concavidades y puntos de inflexión

Pepe vuelve con el estudio de la caja y anota en su cuaderno todos los datos. Ahí grafica la ecuación del volumen y observa que se forma una especie de N. Esto le llama la atención, revisa sus notas y recuerda que a las curvaturas de las gráficas que tienen esta forma se les llama concavidades. También recuerda que existen puntos en las gráficas donde la pendiente cambia de signo, y que se les denomina puntos de inflexión. Con este material Pepe tiene, ahora sí, bien comprendido el estudio de curvas. Por cierto, Pepe es también el automovilista que se salió de la curva y el participante en el kayak, por lo que a estas alturas él y tú seguramente comprenden bien el análisis de curvas.

Concluiremos el estudio de curvas con el análisis de la estructura de concavidades y los puntos de inflexión, como se presentan en las gráficas 5.27 a 5.32.

Una concavidad es la forma de un segmento de curva cuyo trazo en el plano forma una región geométrica que asemeja a un hueco, depresión o sinuosidad.

Un punto de inflexión es la coordenada en la cual la línea tangente cambia de signo.

Podemos decir que:

Existe una concavidad hacia arriba (aquella formada por un segmento de gráfica decreciente seguido de uno creciente) si la segunda derivada evaluada en x que está en el intervalo de la concavidad, es positiva; es decir, si $f''(x) > 0$; o más generalmente, si en aquel intervalo del dominio de $f(x)$ existe una recta tangente por debajo de un punto x de [a, b].

$\cup$

Existe una concavidad hacia abajo (aquella formada por un segmento de gráfica creciente seguido de uno decreciente) si la segunda derivada evaluada en x que está en el intervalo de la concavidad es negativa; es decir, si $f''(x) < 0$; o más generalmente, si en aquel intervalo del dominio de $f(x)$ existe una recta tangente por arriba de un punto x en [a, b].

$\cap$

Punto de inflexión

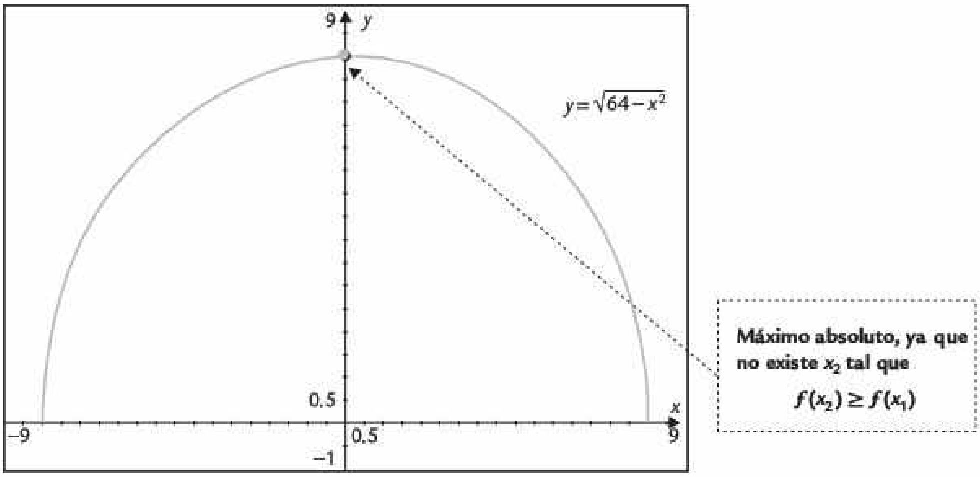
En un punto de inflexión, la gráfica de la función cambia de concavidad. Esto puede ocurrir si $f''(x) = 0$ o si $f''(x)$ no existe. Es decir, los puntos para los cuales $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe, son "candidatos" viables para ser puntos de inflexión, lo que significa que puede darse el caso de que para un valor x del dominio de una función, se cumpla que $f''(x)$ es cero pero el punto $(x, f(x))$ no es punto de inflexión.

Mínimos

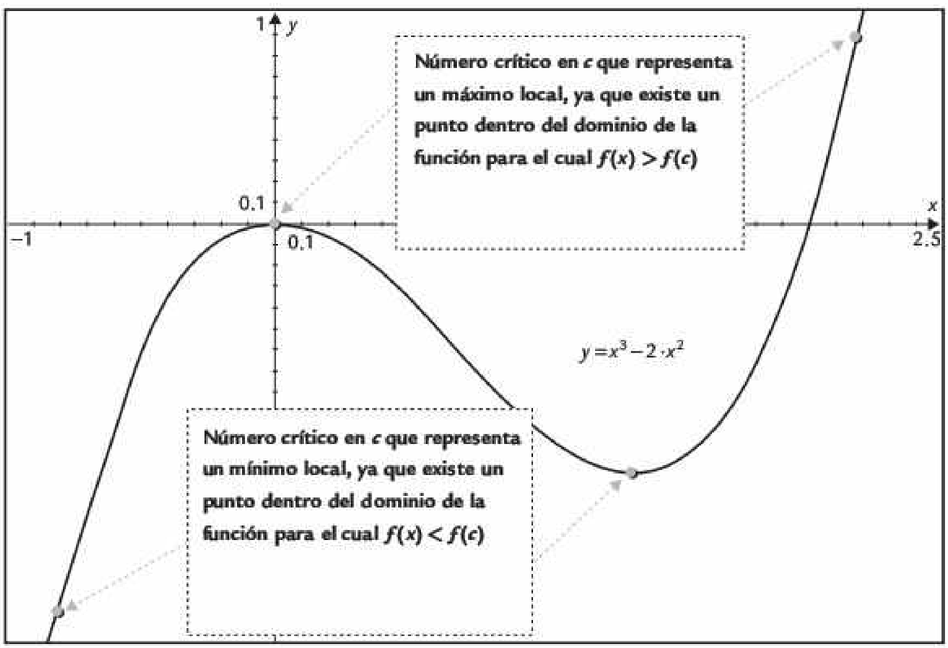
Mínimo absoluto es aquel punto x_1 en el plano para el cual no existe $f(x_2) \leq f(x_1)$ dentro del dominio de la función (gráfica 5.25).

Mínimo relativo es aquel número crítico c tal que $f(c) \leq f(x)$ dentro de un intervalo [a, b] de la función (gráfica 5.24).

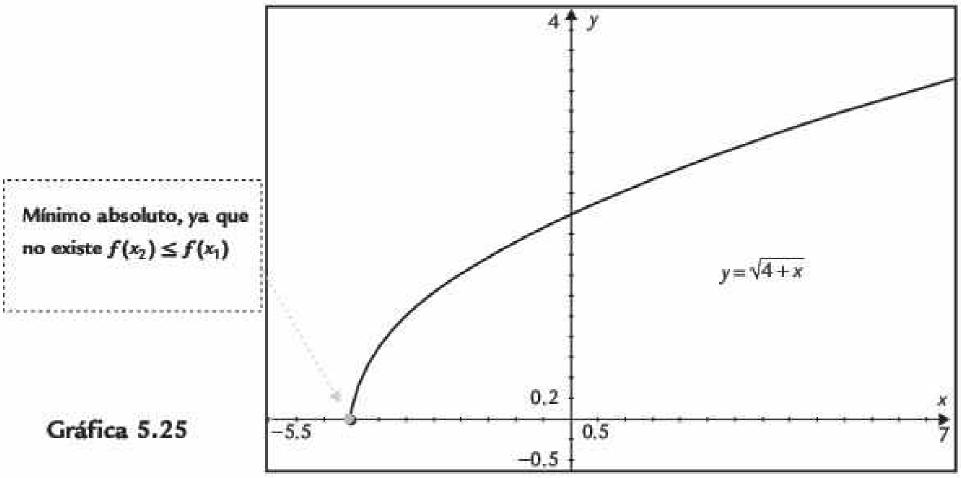
Ejemplos de gráficas de máximos y mínimos absolutos y relativos.



Gráfica 5.23



Gráfica 5.24



Gráfica 5.25

Es decir, si al evaluar el número crítico en la segunda derivada el resultado es positivo, el número crítico forma un mínimo; pero si el resultado es negativo se trata de un máximo.

Criterio de la segunda derivada
Si $f''(x) > 0$ entonces x es un mínimo relativo.
Si $f''(x) < 0$ entonces x es un máximo relativo.

Para localizar el punto crítico, es decir, las coordenadas exactas del máximo o mínimo, debemos evaluar el número crítico en la función original con el fin de obtener el par ordenado correspondiente, es decir y.

A partir de los datos obtenidos mediante estos dos criterios y de las intersecciones con los ejes x y y, y con las nociones adquiridas mediante el estudio de las funciones, contamos con las herramientas suficientes para realizar un bosquejo detallado de la curva. Continuaremos con el ejemplo de la primera derivada y agregaremos los detalles de la segunda derivada para definir mejor su trazo en el plano cartesiano.

EJEMPLO

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 8$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 + 4x - 1}$$

$$3x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -1.55 \\ x_2 &= 0.21 \end{aligned}\right\} \text{Números críticos}$$

$$\boxed{f''(x) = 6x + 4}$$

$$f''(-1.55)=6(-1.55)+4=-5.3 \qquad -$$

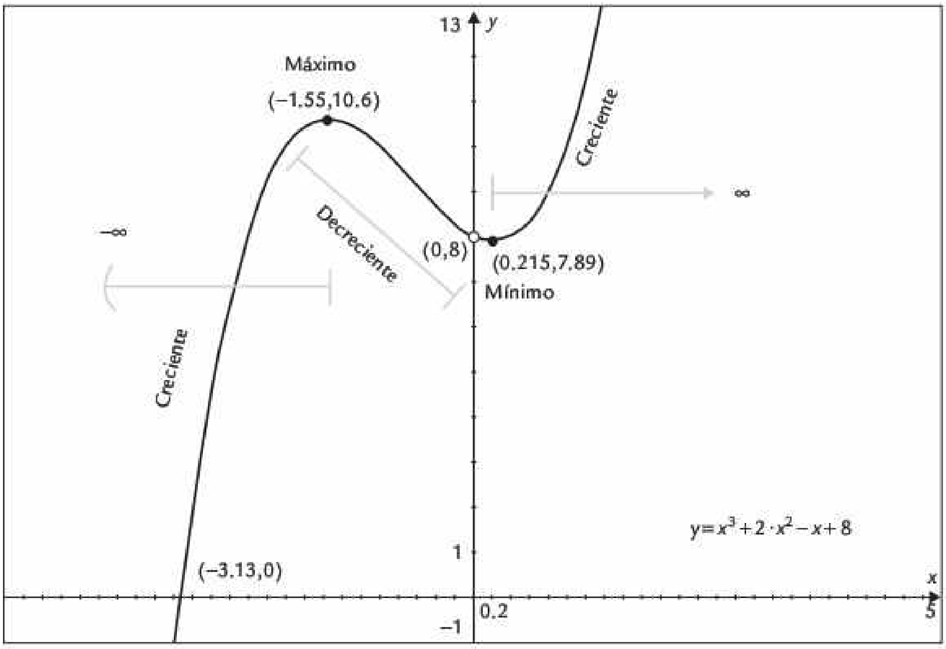
$$f''(0.21)=6(0.21)+4=5.26 \qquad +$$

Lo que importa al evaluar en la segunda derivada es el signo, si es negativo se trata de un máximo, pero si es positivo hablamos de un mínimo

Para hallar las coordenadas exactas del máximo o del mínimo evaluamos los números críticos en la función original (gráfica 5.26).

$$f(-1.55)=(-1.55)^3+2(-1.55)^2-(-1.55)+8=10.63$$

$$f(0.21)=(0.21)^3+2(0.21)^2-(0.21)+8=7.89$$

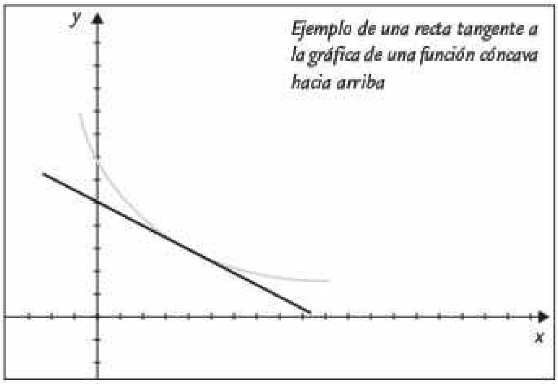


Gráfica 5.26

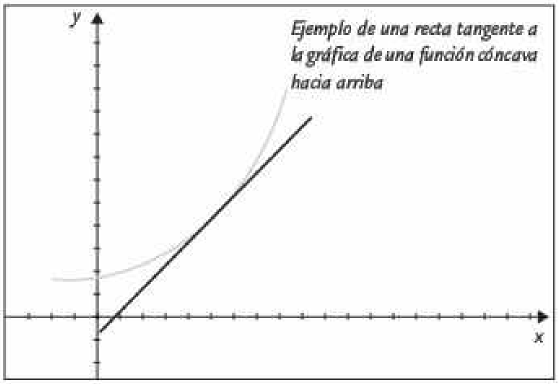
ACTIVIDAD DE TRABAJO 5.6

Encuentra y determina si los números críticos de las siguientes funciones pertenecen a un máximo o a un mínimo.

1. $f(x)=x^2-5$
2. $f(x)=8-(x+3)^2$
3. $f(x)=x^3-3x$
4. $f(x)=4x^3-2x^2-8x$
5. $f(x)=5x^3-7x^2-9x$
6. $f(x)=x^2+\frac{3}{x}$
7. $f(x)=15+30x+6x^2-3x^3$
8. $f(x)=8-x^3$
9. $f(x)=x^2+10x+9$

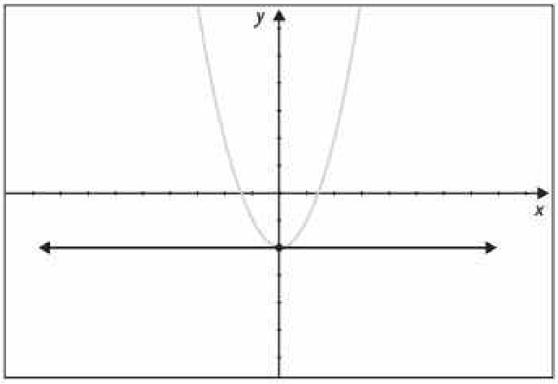


Gráfica 5.27

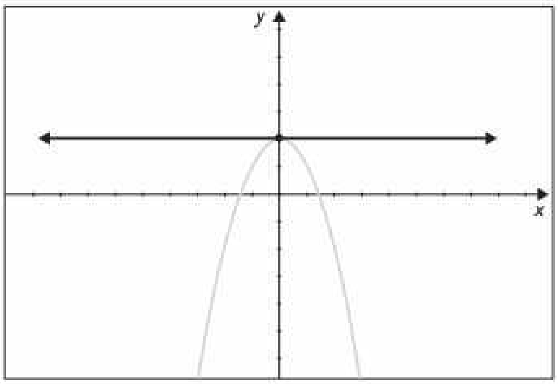


Gráfica 5.28

Función cóncava hacia arriba y su recta tangente en el mínimo absoluto

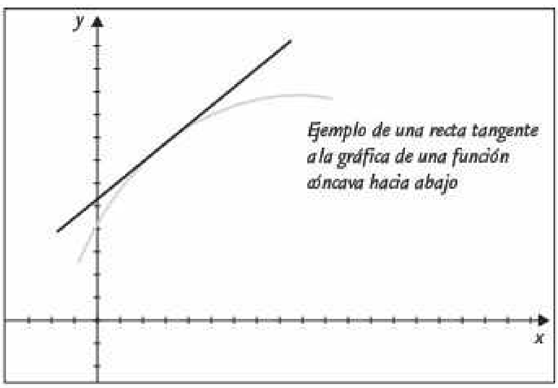


Gráfica 5.29

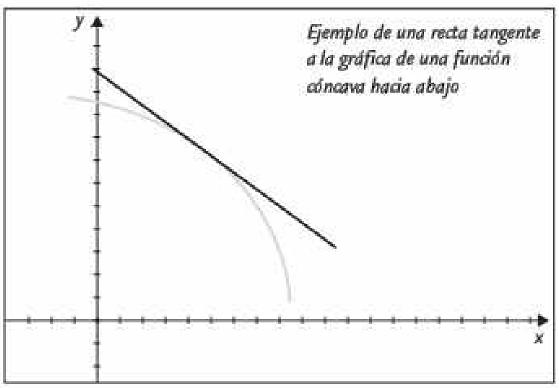


Función cóncava hacia abajo y su recta tangente en el máximo absoluto

Gráfica 5.30



Gráfica 5.31



Gráfica 5.32

EJEMPLO 1

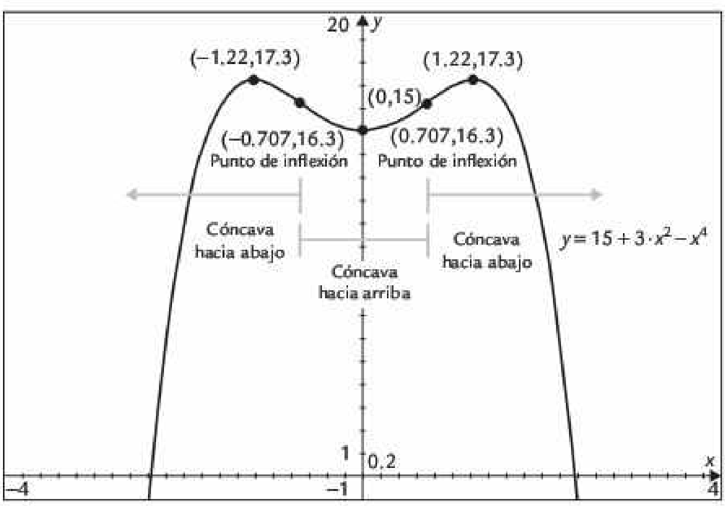
Traza la gráfica de la función $y = 15 + 3x^2 - x^4$

$$f'(x) = 6x - 4x^3$$
$$f''(x) = 6 - 12x^2$$

$$6 - 12x^2 = 0$$
$$-12x^2 = -6$$
$$x^2 = \frac{-6}{-12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0.707$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

Puntos de inflexión

$$f''(x) = 6 - 12x^2$$
$$f''(-1) = 6 - 12(-1)^2 = -6 \rightarrow (-)$$
$$f''(0) = 6 - 12(0)^2 = 6 \rightarrow (+)$$
$$f''(1) = 6 - 12(1)^2 = -6 \rightarrow (-)$$



Gráfica 5.33

EJEMPLO 2

Traza la gráfica de la función $y = x^3 + x^2 - 20x$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 20$

$3x^2 + 2x - 20 = 0$

$x_1 = -2.94$

$x_2 = 2.27$

Números críticos

$f'(-3) = 3x^2 + 2x - 20 = 1 \quad \rightarrow (+)$

$f'(0) = 3x^2 + 2x - 20 = -20 \quad \rightarrow (-)$

$f'(3) = 3x^2 + 2x - 20 = 13 \quad \rightarrow (+)$

$f''(x) = 6x + 2$

$6x + 2 = 0$

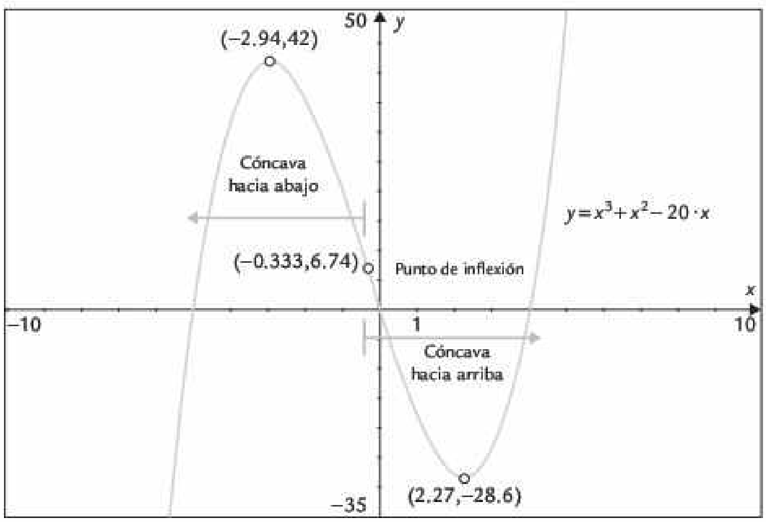
$x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} = -0.333$

$f''(-1) = 6(-1) + 2 = -6 + 2 = -4 < 0$

Por lo tanto, la función es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Y $f''(0) = 6(0) + 2 = 0 + 2 = 2 > 0$ por lo tanto, la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

Se puede concluir que el punto (–0.333,6.74) es punto de inflexión.



Gráfica 5.34 *Ejemplo 2.*

NOTA: Mientras que el criterio de la primera derivada da los números críticos, la segunda derivada puede darte los puntos de inflexión.

EJEMPLO 3

Traza la gráfica de la función $y=-\left(3-x\right)^2+7$

$$f\left(x\right)=-x^2+6x-2$$

$$f'\left(x\right)=-2x+6 \quad \text{] } \textit{Primera derivada}$$

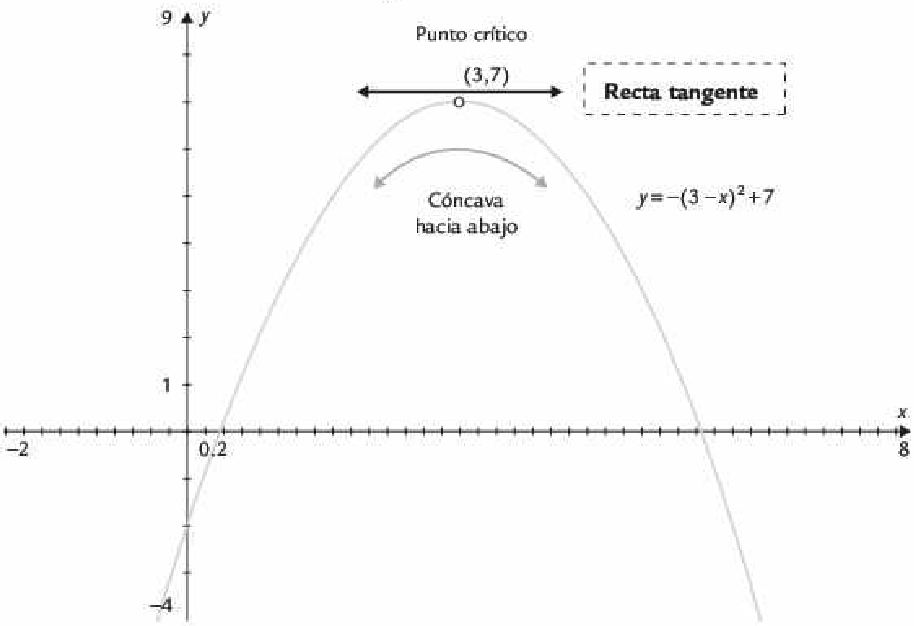
$$-2x+6=0$$

$$-2x=-6$$

$$x=\frac{6}{2}=3 \longleftarrow \textit{Número crítico}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''\left(x\right)=-2 \\ f''\left(3\right)=-2 \end{array}\right] \textit{Segunda derivada}$$

Si al evaluar el número crítico en la segunda derivada el resultado es negativo, entonces se trata de un máximo y, por lo tanto, de una curva cóncava hacia abajo



Gráfica 5.35

El último método consiste en obtener la ecuación de la recta tangente a partir del número crítico.

EJEMPLO 4

Retomemos la función del ejemplo anterior para encontrar la ecuación de la recta tangente.

Al evaluar el número crítico en la ecuación $y = -x^2 + 6x - 2$ en primera derivada, y sustituyendo los valores resultantes en la ecuación punto pendiente, obtenemos

$$y_0 = -(3)^2 + 6(3) - 2 = 7$$
$$m_T = -2(3) + 6 = 0$$
$$b = y_0 - m_T x_0 = 7 - (0)(3)$$
$$y_T = 7$$

Ecuación de la recta tangente

Por lo tanto, se trata de una recta tangente horizontal en $y = 7$, como se muestra en la gráfica 5.35.

ACTIVIDAD DE TRABAJO 5.7

Realiza el bosquejo de las siguientes curvas. Utiliza los criterios de la primera y la segunda derivadas, el análisis de concavidades y la localización de los puntos de inflexión.

1. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 8$
2. $f(x) = 10x^3 + 3x^4 - 6x^5$
3. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 12x + 7$
4. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 1$
5. $f(x) = x^6 - 12x^4 + 18x^2 + 15$
6. $f(x) = x^2 + 4x - 32$
7. $f(x) = 150 + 36x^2 - 3x^4$
8. $f(x) = x^4 - 5x^2 - 21$
9. $f(x) = x^3 - 64x$

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Desarrolla e integra las siguientes actividades a tu portafolio de evidencias.

6. Analiza y grafica 8 funciones mediante el criterio de la primera derivada, segunda derivada, análisis de concavidades y de puntos de inflexión.
7. Presenta solamente los ejercicios impares de la actividad integradora.

¿?

¿Soy capaz de usar los criterios estudiados para determinar las concavidades de una gráfica?

¿Comprendo el concepto de punto de inflexión?

¿Realmente ya soy capaz de realizar el bosquejo de curvas?

ACTIVIDAD INTEGRADORA UNIDAD 5

Bosquejo de curvas.

PARTE I

Encuentra la recta tangente y normal a las siguientes curvas.

1. $-\sqrt{36-x^2}, x=4.2$
2. $\ln|x-7|, x=8.5$
3. $x^2-\dfrac{4}{x}, x=-1.5$
4. $10x-15x^2, x=3.3$
5. $\sqrt{x+8}, x=2.1$
6. $e^{2x+1}, x=1.8$

PARTE II

Encuentra la recta tangente y normal a las siguientes ecuaciones implícitas.

1. $x^2y-7xy^2=3$ en $(3,8)$
2. $y-xy=-3$ en $(-2,5)$

PARTE III

Verifica si los siguientes ejercicios cumplen con la hipótesis de Rolle.

1. $f(x)=2x^2-6x$ en $[-1,4]$
2. $f(x)=3\cos(x)-3$ en $[0,2\pi]$
3. $f(x)=2x^2-12$ en $[-1,1]$
4. $f(x)=3x-x^2$ en $[0,3]$
5. $f(x)=x^{2/3}+8$ en $[-1,1]$
6. $f(x)=4x^2-4x$ en $[-1,2]$
7. $f(x)=5x^2-25x$ en $[-1,6]$
8. $f(x)=x^3-x^{1/2}$ en $[0,1]$
9. $f(x)=\operatorname{senh}^2(x)$ en $[-2,2]$

PARTE IV

Verifica si los siguientes ejercicios cumplen con la hipótesis del teorema del valor medio.

1. $f(x)=\sqrt{x^2-25}$ en $[5,6]$
2. $f(x)=x^2+3x-6$ en $[1,4]$
3. $f(x)=3x^2+2x$ en $[1,2]$
4. $f(x)=x^2+8x+16$ en $[3,4]$
5. $f(x)=x^2+x-42$ en $[6,7]$
6. $f(x)=4x^3-5x$ en $[1,3]$
7. $f(x)=-x^2+28x-49$ en $[0,2]$
8. $f(x)=8x-x^2$ en $[1,4]$
9. $f(x)=x^2-6x+9$ en $[1,3]$

PARTE V

Utiliza el criterio de la primera y de la segunda derivada para bosquejar las siguientes curvas.

1. $f(x)=5x^4-4x^5$
2. $f(x)=7+3x^2-x^4$
3. $f(x)=x^4-5x^2+4x+3$
4. $f(x)=x(x+7)(x-5)$
5. $f(x)=9x-3x^3$
6. $f(x)=6x^5+3x^4-5x^3-1$

PARTE VI

Realiza el análisis completo de las siguientes funciones y traza su bosquejo.

1. $f(x)=3x-8x^2$
2. $f(x)=4x^2-3x^{2/3}$
3. $f(x)=x^3-9x+8$
4. $f(x)=5+6x^3-7x^4-4x^5$
5. $f(x)=2x^3-8x$
6. $f(x)=8+5x-4x^3$
7. $f(x)=x^4-8x^2+2x-1$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Problemas de economía

En economía el cálculo diferencial se utiliza para resolver problemas de costos y de producción. $C(x)$ representa el costo de producir x unidades de un determinado artículo y su derivada $C'(x)$ se denomina costo marginal; $R(x)$ es el ingreso de la venta de x unidades, y $R'(x)$ es el ingreso marginal. Por último, la función $P(x)=R(x)-C(x)$ se denomina función de beneficio. Los puntos en los cuales $R(x)$ es igual a $C(x)$ se denominan puntos de equilibrio.

5.1. En una maquiladora, los costos de producción e ingreso de cierto arnés están dados por las siguientes funciones: $C(x)=3x+800$ y $R(x)=15x-(x^2)/40$. Encuentra la función beneficio y los puntos de equilibrio.

5.2. Encuentra el nivel de producción óptimo que maximizará el beneficio con un costo de $C(x)=7x^2-1250x+840$ y un ingreso de $R(x)=1200-900x$.

5.3. El departamento de ingeniería desea obtener el costo marginal de la producción de 120 piezas de un nuevo artículo, y el costo real de 140 piezas del mismo artículo; la función del costo está dada por:

$$C(x)=1{,}200+300x-\frac{x^2}{150},0\le x\le 1{,}000 \longleftarrow \boxed{\text{Función del costo real}}$$

$$C'(x)=300-\frac{x}{75} \longleftarrow \boxed{\text{Función del costo marginal}}$$

Problemas de diseño industrial

El cálculo diferencial se utiliza en la industria principalmente para resolver problemas de optimización.

5.4. Una empresa de hamburguesas propuso a 5 maquiladoras desarrollar una freidora que maximice el volumen a partir de una hoja de acero inoxidable de 18 pulgadas de ancho por 24 pulgadas de largo. Para ello hay que cortar un cuadrado en cada esquina y doblar hacia arriba los lados resultantes. El contrato para producir 100 freidoras será asignado a la maquiladora que logre encontrar el mayor volumen al menor costo.

5.5. Un empresario mexicano desea incursionar en el mercado de la venta de bebidas embotelladas (refrescos). Sabe que para competir en este campo debe ofrecer un producto con valor agregado, para lo cual tiene en mente lanzar una presentación más grande del producto al mismo precio que sus competidores: la lata promedio contiene 355 ml, mientras que la suya contendrá 800 ml. El costo de producción de cada tapa es de \$0.08 por cm^2 (centímetro cuadrado) y el del cilindro es de \$0.05 por cm^2. Encuentra las dimensiones que minimizarán los costos de producción.

5.6. Una empresa quiere construir una olla de metal para completar su línea de utensilios de cocina, y desea que esa olla contenga exactamente 2 litros. Obtén las dimensiones que minimizarán la cantidad de material a utilizar para fabricar esa olla.

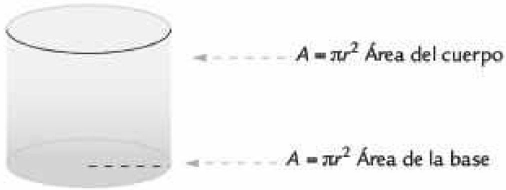


Figura 5.3

5.7. Cierta empresa de electrodomésticos requiere construir un horno de base cuadrada cuyo volumen sea de 1.5 m^3. Si el material para la base tiene un costo de \$120.00 por m^2 (metro cuadrado) y el material para los lados es de \$75.00 por m^2, ¿cuáles son las dimensiones para minimizar el costo del horno, y por lo tanto en de la producción?

5.8. En una maquiladora se elaboran dos productos: un aro dentado y un disco. Si tenemos que $C = 6x^2 + 72y$, donde C es el costo total de producción de una jornada de 8 horas, x es el número de máquinas utilizadas en la elaboración del aro, y y es el número de máquinas que se emplean en la elaboración del disco. Si durante una jornada de 8 horas se dispone de 21 máquinas, ¿cuántas de estas máquinas deben trabajar para que el costo total sea el mínimo?

5.9. Cierta empresa zapatera desea construir una caja con tapa para su nueva línea de zapatos. A partir de una hoja de cartón con las siguientes medidas, encuentra el volumen máximo para la caja.

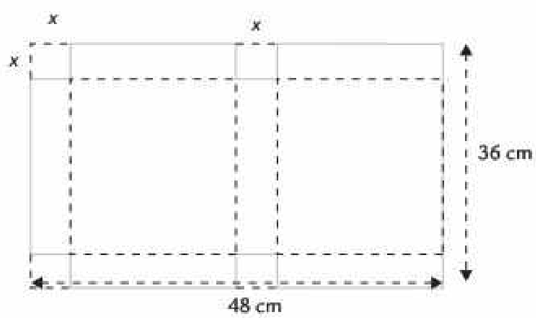


Figura 5.4

5.10. Una cadena de comida rápida acaba de poner una franquicia en cierta ciudad y trata de posicionarse en el mercado ofreciendo una pizza a buen precio y mejor calidad. El tamaño de la pizza dependerá de las dimensiones de la caja. Si cuenta con una hoja de cartón de las dimensiones y dobleces que se presentan en seguida, ¿cuál debe ser el valor de x y de los dobleces para obtener las mayores dimensiones posibles de la caja?

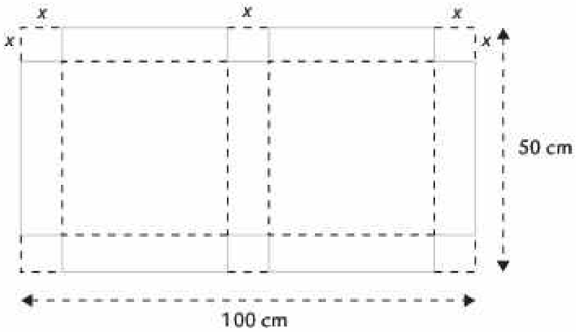


Figura 5.5

5.11. En un puerto pesquero, una cooperativa planea exportar sus productos en latas circulares que contengan 100 cm^3. Si el costo de las tapas es de \$0.1 por cm^2 y el del cilindro es de \$0.05 por cm^2. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la lata para minimizar los costos?

AUTOEVALUACIÓN

PARTE I

Encuentra la recta tangente y normal a las siguientes curvas.

1. $\operatorname{sen}(2x)+4,\ x=\frac{\pi}{2}$
2. $x^3+\frac{3}{x},\ x=0.5$
3. $x^2-\sqrt{x},\ x=2$

PARTE II

Encuentra la recta tangente y normal a la siguiente ecuación implícita.

1. $6xy+4xy^2=9$ en $(4,3)$

PARTE III

Verifica si los siguientes ejercicios cumplen con la hipótesis de Rolle.

1. $f(x)=x^2-1$ en $[-3,3]$
3. $f(x)=8x-x^4$ en $[0,2]$
2. $f(x)=x^{1/3}-x^3$ en $[-1,1]$

PARTE IV

Verifica si los siguientes ejercicios cumplen con la hipótesis del teorema del valor medio.

1. $f(x)=\sqrt{36-x^2}$ en $[2,3]$
2. $f(x)=2x^3+3x^2$ en $[2,3]$
3. $f(x)=x^2-2x-35$ en $[3,5]$

PARTE V

Utiliza el criterio de la primera y de la segunda derivada para bosquejar las siguientes curvas.

1. $f(x)=x^{2/3}\left(x^2-5x-6\right)$
2. $f(x)=x^{2/3}-3x^2$
3. $f(x)=x^3-2x+5$

PARTE VI

Realiza el análisis completo de las siguientes funciones y traza su gráfica.

1. $f(x)=\sqrt{8-x^2}$
2. $f(x)=x^{2/3}\left(x^2+5x-36\right)$
3. $f(x)=x^5-4x^{\frac{3}{2}}$

FORMULARIO

DERIVADAS

1. $\dfrac{d}{dx}f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Derivadas de funciones básicas

2. $\dfrac{d}{dx}x=1$

3. $-\dfrac{d(c)}{dx}=0$

4. $\dfrac{d(cx)}{dx}=c$

5. $\dfrac{d(cx^n)}{dx}=ncx^{n-1}$

6. $\dfrac{d(cu^n)}{dx}=ncu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

7. $\dfrac{d}{dx}cu=c\cdot\dfrac{du}{dx}$

8. $\dfrac{d}{dx}(u\pm v)=\dfrac{du}{dx}\pm\dfrac{dv}{dx}$

9. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{u}=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

10. $\dfrac{d}{dx}(u)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{u'}{n(u)^{1-\frac{1}{n}}}$

11. $\dfrac{d(uv)}{dx}=uv'+u'v$

12. $\dfrac{d\left(\dfrac{u}{v}\right)}{dx}=\dfrac{vu'-v'u}{v^2}$

Derivadas de funciones exponenciales

13. $\dfrac{d(a^u)}{dx}=a^u\dfrac{du}{dx}\ln a$

14. $\dfrac{d(e^u)}{dx}=e^u\dfrac{du}{dx}$

15. $\dfrac{d(u^v)}{dx}=vu^{n-1}+u^v\dfrac{dv}{dx}\ln u$

Derivadas de funciones logarítmicas

16. $\dfrac{d(\log u)}{dx}=\dfrac{u'\log e}{u}$ o $\dfrac{1}{\ln(10)x}$

17. $\dfrac{d(\ln u)}{dx}=\dfrac{u'}{u}$

Derivadas de funciones trigonométricas

18. $\dfrac{d(\operatorname{sen} u)}{dx}=\cos u\dfrac{du}{dx}$

19. $\dfrac{d(\cos u)}{dx}=-\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$

20. $\dfrac{d(\tan u)}{dx}=\sec^2 u\dfrac{du}{dx}$

21. $\dfrac{d(\cot u)}{dx}=-\csc^2 u\dfrac{du}{dx}$

22. $\dfrac{d(\sec u)}{dx}=\sec u\tan u\dfrac{du}{dx}$

23. $\dfrac{d(\csc u)}{dx}=-\csc u\cot u\dfrac{du}{dx}$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

24. $\dfrac{d(\operatorname{sen}^{-1}u)}{dx}=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

25. $\dfrac{d(\cos^{-1}u)}{dx}=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

26. $\dfrac{d(\tan^{-1}u)}{dx}=\dfrac{u'}{1+u^2}$

27. $\dfrac{d(\cot^{-1}u)}{dx}=-\dfrac{u'}{1+u^2}$

28. $\dfrac{d(\sec^{-1}u)}{dx}=\dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

29. $\dfrac{d(\csc^{-1}u)}{dx}=-\dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

Derivadas de funciones hiperbólicas

30. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}(u)=\cosh(u)\cdot u'$

31. $\dfrac{d}{dx}\cosh(u)=\operatorname{senh}(u)\cdot u'$

32. $\dfrac{d}{dx}\tanh(u)=\operatorname{sech}^2(u)\cdot u'$

33. $\dfrac{d}{dx}\coth(u)=-\operatorname{csch}^2(u)\cdot u'$

34. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}(u)=-\operatorname{sech}(u)\cdot\tanh(u)\cdot u'$

35. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch}(u)=-\operatorname{csch}(u)\cdot\coth(u)\cdot u'$

$\operatorname{senh}(u)=\dfrac{e^u-e^{-u}}{2}$ $\quad\operatorname{csch}(u)=\dfrac{2}{e^u-e^{-u}}$

$\cosh(u)=\dfrac{e^u+e^{-u}}{2}$ $\quad\operatorname{sech}(u)=\dfrac{2}{e^u+e^{-u}}$

$\tanh(u)=\dfrac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}$ $\quad\coth(u)=\dfrac{e^u+e^{-u}}{e^u-e^{-u}}$

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas

36. $\operatorname{senh}^{-1}(u)=\dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$

37. $\cosh^{-1}(u)=\dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$

38. $\tanh^{-1}(u)=\dfrac{u'}{1-u^2}$

39. $\coth^{-1}(u)=\dfrac{u'}{1-u^2}$

40. $\operatorname{sech}^{-1}(u)=\dfrac{-u'}{|u|\sqrt{1-u^2}}$

41. $\operatorname{csch}^{-1}(u)=\dfrac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}$

Derivadas de funciones implícitas

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\dfrac{\delta}{\delta x}}{\dfrac{\delta y}{\delta x}}$$

INTEGRALES

Fórmulas de integración algebraica

1. $\int dx = x + c$
2. $\int adx = a\int dx = ax + c$
3. $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$
6. $\int (du \pm dv = \int du \pm \int dv$

Integración de exponenciales

7. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
8. $-\int e^u du = e^u + c$

Integración de funciones trigonométricas

9. $-\int \operatorname{sen} udu = -\cos u + c$
10. $\int \cos udu = \operatorname{sen} u + c$
11. $\int \sec^2 udu = \tan u + c$
12. $\int \csc^2 udu = -\cot u + c$
13. $\int \sec u \tan udu = \sec u + c$
14. $\int \csc u \cot udu = -\csc u + c$
15. $\int \tan udu = -\ln|\cos u| + c$
 $= \ln|\sec u| + c$
16. $\int \cot udu = \ln|\operatorname{sen} u| + c$
17. $\int \sec udu = \ln|\sec u + \tan u| + c$
18. $\int \csc udu = \ln|\csc u - \cot u| + c$

Fórmulas de términos cuadráticos

19. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + c$
20. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u} + c\right|$
21. $-\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c$
22. $-\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$
23. $-\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c$
24. $-\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$
25. $-\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du$
 $= \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c$
26. $-\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du$
 $= \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

Integración por partes

27. $-\int udv = uv - \int vdu$

Integración por sustitución trigonométrica

a) Si $\sqrt{a^2 - u^2}$ Hágase $u = a \operatorname{sen} z$
y........$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos z$

b) Si $\sqrt{u^2 + a^2}$ Hágase $u = a\tan z$
y........$\sqrt{u^2 + a^2} = a\sec z$

c) Si $\sqrt{u^2 - a^2}$ Hágase $u = a\sec z$
y........$\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan z$

Integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$$

Fórmulas de variaciones trigonométricas

28. $\int \operatorname{sen}^n u \cos u\, du = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u}{n+1} + c$
29. $\int \cos^n u(-\operatorname{sen} u)\, du = \frac{\cos^{n+1} u}{n+1} + c$
30. $\int \tan^n u \sec^2 u\, du = \frac{\tan^{n+1} u}{n+1} + c$
31. $\int \cot^n u(-\csc^2 u)\, du =$
 $\frac{\cot^{n+1} u}{n+1} + c$
32. $\int \sec^n u \sec u \tan u\, du =$
 $\frac{\sec^{n+1} u}{n+1} + c$
33. $\int \csc^n u(-\csc u \cot u)\, du =$
 $\frac{\csc^{n+1} u}{n+1} + c$

Leyes de los logaritmos

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln(a)^n = n\ln(a)$

$Log_N(N) = 1$

$Log_N(1) = 0$

$Log_N(N)^x = x$

$Log_x(N) = \frac{log(N)}{log(x)}$

Leyes de los exponentes

$a^0 = 1; \quad a^1 = a$

$a^r a^s = a^{r+s}$

$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

$(a^r)^s = a^{rs}; \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\text{sen} = \frac{o}{h} = \frac{1}{\csc}$$

$$\cos = \frac{a}{h} = \frac{1}{\sec}$$

$$\tan = \frac{o}{a} = \frac{\text{sen}}{\cos} = \frac{1}{\cot}$$

$$\cot = \frac{a}{o} = \frac{\cos}{\text{sen}} = \frac{1}{\tan}$$

$$\sec = \frac{h}{a} = \frac{1}{\cos}$$

$$\csc = \frac{h}{o} = \frac{1}{\text{sen}}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

De ángulo doble

$$\text{sen}\, 2A = 2\,\text{sen}\, A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \text{sen}^2 A$$

$$\cos 2A = 1 - 2\,\text{sen}^2 A$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$$

De Pitágoras

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$\csc^2 A - \cot^2 A = 1$$

Reducción de exponente

$$\text{sen}^2 A = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2A$$

$$\cos^2 A = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2A$$

$$\tan^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$$

De multiplicación

$$\text{sen}\, A \csc A = 1$$

$$\tan A \cot A = 1$$

$$\text{sen}\, A \csc A = 1$$

$$\cos A \sec A = 1$$

Mitad de un ángulo

$$\text{sen}^2 \frac{x}{2} - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}\cos x$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\cos x$$

$$2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2} - 1 = -\cos x$$

$$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen}\, A \cos B \pm \cos A\, \text{sen}\, B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \pm \text{sen}\, A \pm \text{sen}\, B$$

$$\text{sen}\, A + \text{sen}\, B = 2\,\text{sen}\, \tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\text{sen}\,\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}\text{sen}(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\text{sen}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

$$\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

Fórmulas de ángulos compuestos

1. $\text{sen}(x+y) = \text{sen}\, x \cos y + \cos x\, \text{sen}\, y$
2. $\text{sen}(x-y) = \text{sen}\, x \cos y - \cos x\, \text{sen}\, y$
3. $\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x \cos x$
4. $\text{sen}\, x = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$
5. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$
6. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$
7. $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
8. $\cos\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$
9. $\text{sen}\, x + \text{sen}\, y = 2\,\text{sen}\,\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
10. $\text{sen}\, x - \text{sen}\, y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\,\text{sen}\,\dfrac{x-y}{2}$
11. $\cos x - \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
12. $\cos x - \cos y = -2\,\text{sen}\,\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
13. $2\,\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y = -\cos(x+y) + \cos(x-y)$
14. $2\,\text{sen}\, x \cos y = \text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)$
15. $2\cos x\, \text{sen}\, y = \text{sen}(x+y) - \text{sen}(x-y)$
16. $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$
17. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
18. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
19. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan x^2}$
20. $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{\text{sen}\, x}$

Diferenciales

$$dx = \Delta x$$
$$dy \neq \Delta y$$
$\Delta y = y_2 - y_1$ de la curva

$dy = y_2 - y_1$ de la recta tangente

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Integración numérica

1. Regla del punto medio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x\left[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \ldots f(\bar{x}_n)\right]$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n};\ \bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$

2. Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$x_i = a + i\Delta x; \quad \Delta x\frac{b-a}{n}$$

3. Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$
$$\frac{\Delta x}{3}\begin{bmatrix} f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots \\ 2f(x_{n-3}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \end{bmatrix}$$

donde n es par y $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

Integración numérica

Tipo 1

a) Si $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo número $t \geq a \therefore$

$$\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

b) Si $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para todo número $t \leq b \therefore$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

siempre y cuando haya este límite y sea un número finito

c) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ convergen entonces por definición:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Tipo 2

a) Si f es continua en $[a,b)$ y discontinua en b,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx;$$

si este límite es un número finito.

b) Si f es continua en $(a,b]$ y discontinua en a,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx;$$

si este límite es un número finito.

c) Si f tiene una discontinuidad en c, y $a < c < b$, y si son convergentes tanto $\int_c^b f(x)\,dx$ como $\int_a^c f(x)dx$, por definición $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$

Aplicación de la integral

1. *Longitud del arco*

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{dy}{dx}^{2}}\, dx$$

2. *Momentos de un área plana*

$$Mx = A\bar{y};\ My = A\bar{x}$$

Series

1. $e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

2. $\text{sen}(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!}$

3. $\cos(x) = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}(-1)^k}{(2k)!}$

Ecuación de la línea recta

$$y = mx + b$$
$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Fórmula general de las ecuaciones cuadráticas

Si $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Método de Newton Rapson para localizar raíces

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Linealización de $f(x)$

En $(a, f(a))$

$L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Teoremas de cálculo

1. Teorema del valor intermedio. Si f es continua en [a, b] y $f(a) < \text{N} < f(b)$, existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = \text{N}$.
2. Teorema del valor medio. Si $a < c < b$, entonces
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$
3. Teorema de Rolle. Si $f(a) = f(b)$, existe c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$
4. Teorema del valor medio para integrales. Si f es continua en [a, b] existe un número c en [a, b] tal que:
$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a) \text{ o}$$
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Asíntotas

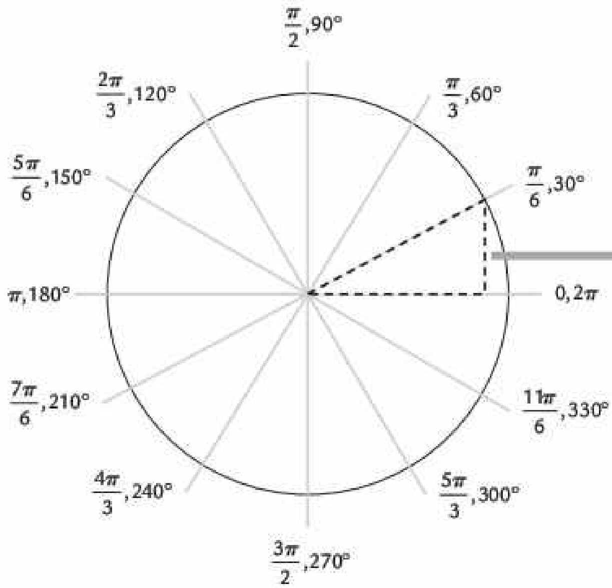
Si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ entonces:

1. La asíntota vertical se localiza haciendo $g(x) = 0$ y se resuelve para x.
2. La asíntota horizontal se encuentra así:

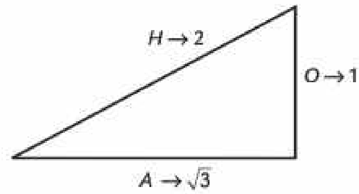
   a) Si $f(x)$ es de menor grado que $g(x)$, la asíntota horizontal es $y = 0$; es decir, está en el eje x.

   b) Si $f(x)$ es de igual grado que $g(x)$, la asíntota horizontal es el cociente de dividir el coeficiente de mayor grado de $f(x)$ entre el coeficiente de mayor grado de $g(x)$.

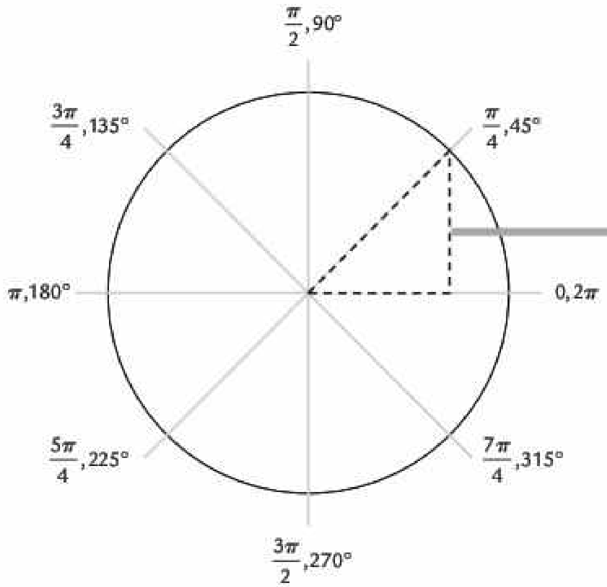
   c) Si $f(x)$ es de mayor grado que $g(x)$, la asíntota es oblicua y es el cociente de dividir $f(x)$ entre $g(x)$ cuando $x \to \infty$.



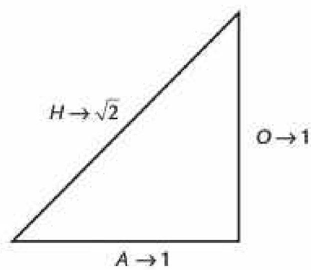
RELACIÓN ENTRE EL TRIÁNGULO DE 30° Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



30°	60°
$\text{sen} = \frac{1}{2}$	$\text{sen} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos = \frac{1}{2}$
$\tan = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\tan = \sqrt{3}$
$\cot = \sqrt{3}$	$\cot = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sec = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sec = 2$
$\csc = 2$	$\csc = \frac{2}{\sqrt{3}}$



RELACIÓN ENTRE EL TRIÁNGULO DE 45° Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



$\text{sen} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan = 1$

$\cot = 1$

$\sec = \sqrt{2}$

$\csc = \sqrt{2}$

BIBLIOGRAFÍA

Buchberger, B., Collins, G. y Loos, R. (1982). *Computer Algebra*. Computing Suplementum, Núm. 4. Springer. Viena.

Cervantes Aguilar, M. A. (2007). *Apuntes*. México. ITN.

Edwards C. Henry y David E. Penney. (2008). *Cálculo con trascendentales tempranas*. (7a. ed.). México. Pearson/Prentice Hall.

Demana, Franklin D., Bert K. Waits, Gregory D. Foley, Daniel Kennedy y Robert Blitzer. (2009). *Matemáticas universitarias introductorias con nivelador MYMATHLAB*. (7a. ed.). México. Pearson/Prentice Hall.

Gil S. Jorge Luis. *Apuntes virtuales*. México. Universidad Tecmilenio.

Larson, Ron. (2009). *Matemáticas 1* (*Cálculo diferencial*). (1a. ed.). México. McGraw-Hill.

Leithold, Louis. (1998). *El cálculo con geometría analítica*. (7a. ed.). México. Oxford University Press.

Recio, Tomás y Laureano González-Vega. *Una introducción al álgebra computacional y a la geometría algorítmica y su incidencia en la secundaria y el bachillerato*. Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación. Universidad de Cantabria. España.

Thomas, George, Maurice Wei y Joel Hass. (2010). *Cálculo de una variable* (12a. ed.). México. Pearson/Prentice Hall.

Zill, Dennis G. (1987). *Cálculo con geometría analítica*. (1a. ed.). México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Información digital complementaria

http://canek.uam.mx/Calculo1/Teoria/Optimizacion/FTOptimizacion.pdf

http://cas.jeuxcasio.com/en/

http://casio.foroactivo.com/

http://education.ti.com/calculators/downloads/US/#Software

http://en.wikipedia.org/wiki/Computer_algebra_system

http://math.exeter.edu/rparris/

http://maxima.sourceforge.net/compalg.html

http://maxima.sourceforge.net/download.html

http://maxima.sourceforge.net/es/3rdpartycode.html

http://www.aulacasio.com/

http://www.calculadoras.cl/foro/

http://www.calculadoras.cl/foro/

http://www.calculadoras.cl/foro/

http://www.casio.com/products/Calculators_%26_Dictionaries/Graphing/