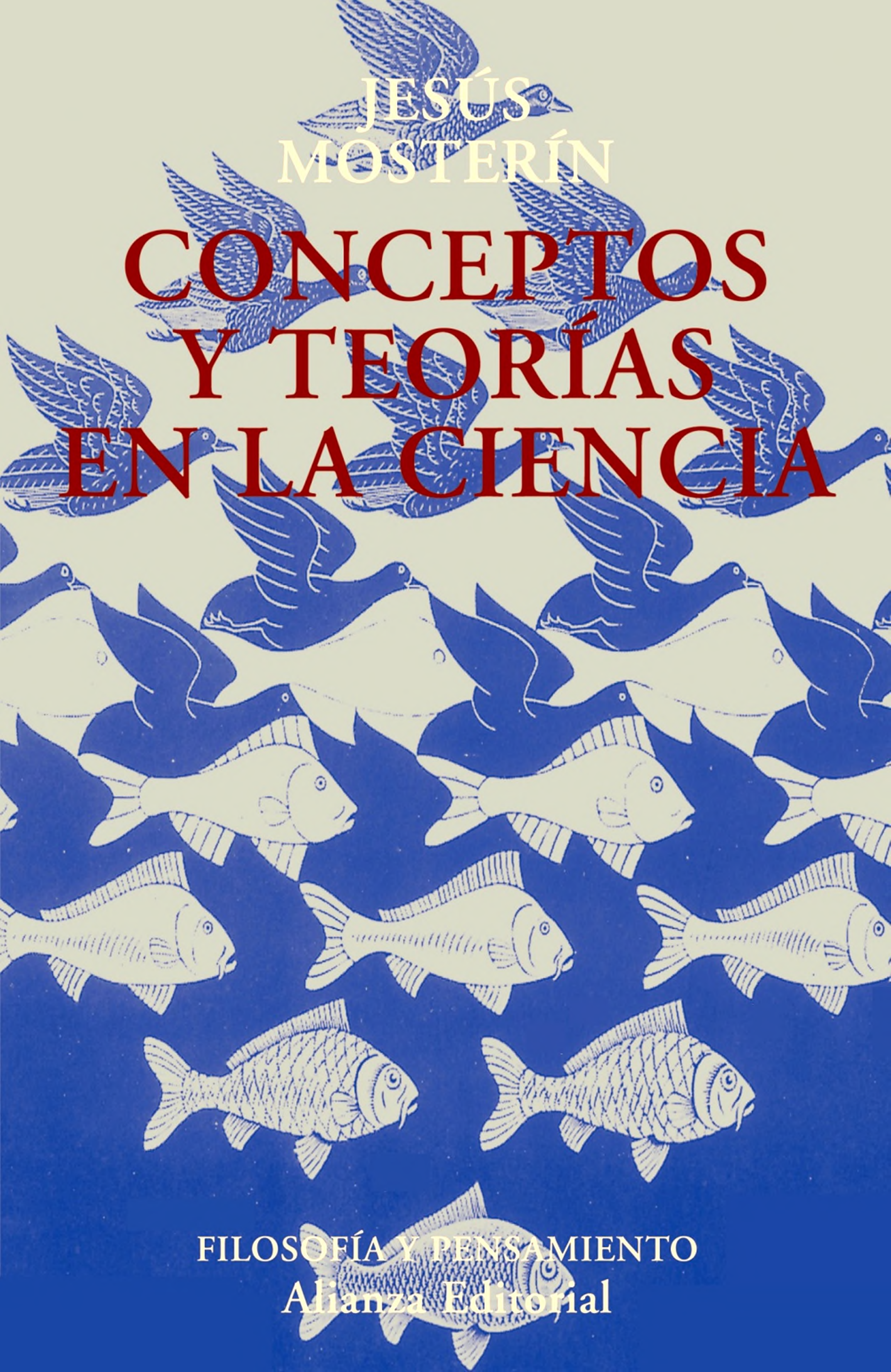


JESÚS MOSTERÍN

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA

FILOSOFÍA Y PENSAMIENTO

Alianza Editorial

JESÚS MOSTERÍN

CONCEPTOS Y TEORÍAS EN LA CIENCIA

Alianza Editorial

Primera edición en «Alianza Universidad»: 1984
Primera edición en «Ensayo»: 2000
Primera reimpresión: 2003

Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15; 28027 Madrid; teléf. 91 393 88 88
www.alianzaeditorial.es
ISBN: 84-206-6741-2
Depósito legal: M. 32.499-2003
Compuesto e impreso en Fernández Ciudad, S. L.
Printed in Spain

ÍNDICE

PRÓLOGO A LA TERCERA EDICIÓN

El núcleo duro de la filosofía de la ciencia está constituido por el análisis de los resultados intelectuales de la empresa científica, y en especial por el de las teorías científicas y de los conceptos empleados en su formulación. En este libro se abordan varios temas fundamentales de la filosofía de la ciencia de un modo que, sin menoscabo del rigor, pretende ser directo y accesible. No se rehúyen las fórmulas y los signos matemáticos, cuando facilitan la comprensión, pero tampoco se abusa de la formalización. La gran aceptación que han tenido las ediciones anteriores entre estudiantes y estudiosos de la filosofía de la ciencia se debe sin duda al carácter ágil y conciso de los ensayos que el libro reúne, que tratan de combinar la claridad con la precisión. Por eso he resistido la tentación de mejorar la presentación a base de complicarla, introduciendo temas y nociones más difíciles de las teorías avanzadas de la ciencia actual. El nivel de las explicaciones y ejemplos sigue siendo elemental.

Esta recopilación de artículos no constituye en modo alguno un libro de texto, ni un tratado sistemático. La filosofía de la ciencia todavía está en plena ebullición y las cosas aún no están maduras para síntesis definitivas (en contraste con la lógica formal, por ejemplo). Sin embargo, aunque los capítulos del libro son como catas dispares en la temática epistemológica, todos ellos están escritos desde la misma perspectiva y se complementan mutuamente. Dado el origen independiente de los artículos que lo componen, ciertas repeticiones y discrepancias terminológicas son inevitables, aunque en esta nueva edición he procurado reducirlas al mínimo, suprimiendo algunos pasajes repetitivos y unificando los signos y los términos técnicos. De todos modos, algunas repeticiones permanecen, a fin de conservar el carácter de legibilidad independiente de cada capítulo, tan apreciado por los lectores.

Los principales cambios en el contenido de esta edición respecto a las anteriores consisten en la supresión de un artículo y la incorporación de tres nuevos capítulos. Se ha suprimido el anterior artículo sobre funciones y composición de relaciones, de tema puramente lógico, y que no tenía nada que ver con el resto del libro, según se me hizo observar en diversas ocasiones. Las nuevas incorporaciones son: el capítulo 2 sobre «Los conceptos métricos», que viene a ampliar y profundizar la presentación de los mismos en el capítulo 1, que se había quedado corta; el capítulo 4 sobre «Mereología, conjuntos y ontología biológica», que introduce la polémica actual sobre las especies biológicas y complementa el carácter más meramente abstracto y formal del capítulo 3; y el capítulo 9 sobre «Teorías y modelos», que analiza y define de un modo sistemático las principales propiedades metamatemáticas de las teorías, sirviendo así de punto de partida preciso para las consideraciones de los capítulos siguientes. Así, el libro sale considerablemente reforzado en sus dos temas principales, que le dan título: los conceptos científicos y las teorías científicas. También se ha añadido al final una breve lista de referencias y sugerencias bibliográficas y se han corregido las erratas detectadas. En conjunto, los cambios han sido tan numerosos que se ha efectuado la recomposición entera del texto.

Los cuatro primeros capítulos tratan de los conceptos científicos. Los tres siguientes, de temas históricos. Los capítulos 8 al 12 dilucidan la estructura y función de las teorías científicas. Los dos últimos se ocupan de discusiones y polémicas. En conjunto, espero que proporcionen al lector una cierta familiaridad con el análisis formal de conceptos y teorías. En cualquier caso, no es necesario leerlos todos, ni leerlos en el orden en que aparecen. El lector puede confeccionar su propio menú.

Los signos lógicos empleados son los cinco conectores $\neg$ (no), $\wedge$ (y), $\vee$ (o), $\Rightarrow$ (si ..., entonces ...), $\Leftrightarrow$ (si y sólo si), y los dos cuantificadores $\forall$ (para cada) y $\exists$ (hay un). Los signos conjuntistas son los habituales. En especial, $\in$ es la pertenencia, $\subseteq$ la inclusión, $\cup$ la unión, '$f: A \to B$' significa que f es una función cuyo dominio es A y cuyo recorrido está incluido en B. Espero que el uso de estos signos facilite y no entorpezca la lectura de las páginas que siguen. En cualquier caso, si algo no se entiende o no interesa en una primera lectura, sálteselo el lector.

Moià, enero de 2000

Jesús MOSTERÍN

CAPÍTULO 1

LA ESTRUCTURA DE LOS CONCEPTOS CIENTÍFICOS

El mundo nos bombardea continuamente con todo tipo de radiaciones, roces y mensajes. Nuestro aparato sensorial selecciona y procesa esa información bruta que nos llega del mundo. Si tuviéramos otro aparato sensorial diferente del que tenemos, percibiríamos el mundo de distinto modo. Si nuestra retina fuese sensible a otro intervalo distinto del espectro electromagnético, veríamos un paisaje infrarrojo o ultravioleta muy distinto al que vemos. Si nuestros oídos fueran sensibles a otras frecuencias, escucharíamos un mundo ahora inaudito para nosotros. Y si tuviéramos sentidos sensibles a la radioactividad o al magnetismo, percibiríamos el mundo de un modo ahora inimaginable. Esto no significa que nuestros sentidos inventen el mundo ni que nuestras percepciones no sean objetivas. Tan objetiva es una foto en blanco y negro como una foto en color y como una radiografía. Pero nuestro aparato sensorial condiciona nuestra percepción del mundo y determina las pautas en las que ésta es posible. El mundo percibido es la resultante de al menos dos factores: nuestro aparato sensorial y el mundo exterior.

De igual modo, lo que pensemos y digamos del mundo no depende sólo de él, sino también de nuestro sistema conceptual, que selecciona, condiciona y determina los aspectos del mundo que tenemos en cuenta, en los que pensamos y de los que hablamos. El mundo pensado es también la resultante de al menos dos factores: nuestro sistema conceptual y el mundo real.

En nuestra actividad científica tenemos que partir de nuestro aparato sensorial y del sistema conceptual plasmado en nuestro lenguaje ordinario. Pero difícilmente podría ponerse en marcha la empresa científica si no nos fuera posible trascender las limitaciones de nuestro aparato sensorial y conceptual. Mediante un *hardware* adecuado, mediante instrumentos apropiados que constituyen como extensiones de nuestros sentidos —telescopios, microscopios, cámaras fotográficas y de cine, balanzas, voltímetros, cuentarrevoluciones, veletas, brújulas, barómetros, magnetófonos, antenas de radio, etc.—, podemos discriminar mucho más finamente que con nuestros sentidos y podemos captar mensajes y radiaciones inasequisibles a nuestro aparato sensorial. De igual modo podemos extender y precisar nuestro sistema conceptual mediante un *software* adecuado, introduciendo conceptos más precisos y de mayor alcance que los del lenguaje ordinario, conceptos científicos que nos permiten describir hechos y formular hipótesis con una precisión y universalidad crecientes.

El progreso de la ciencia no siempre consiste en el aumento del número de verdades que conocemos. La noción de verdad es relativa a la de enunciado, y ésta a la de concepto. Qué verdades haya depende de qué conceptos empleemos. Y muchas veces el progreso de la ciencia consiste no en un aumento del número de verdades expresadas con un sistema conceptual dado, sino en el cambio del sistema conceptual, en su ampliación o extensión o en su sustitución por otro.

El mundo no está estructurando de por sí de un modo unívoco. Somos nosotros los que lo estructuramos al proyectar sobre él nuestros conceptos. Así, propiedades como la temperatura o la inteligencia no son instrínsicamente cualitativas o cuantitativas, sino que ese carácter sólo está en los conceptos que empleamos para hablar de ellas. Sin embargo, una vez introducidos ciertos conceptos de un determinado modo, ya no podremos usarlos a nuestro antojo, sino sólo siguiendo los perfiles que la realidad adopte al proyectar sobre ella dichos conceptos.

El importante papel desempeñado por los conceptos en la teorización científica ha despertado el interés de los metodólogos y filósofos de la ciencia, que en las últimas décadas les han prestado una atención especial. Lo primero que salta a la vista es la gran variedad de los conceptos científicos. Unos —como *pez, fuerza* o *calor*— proceden del lenguaje ordinario, algunas de cuyas nociones intuitivas precisan; otros —como *ARN mensajero, fonema* o *entropía*— constituyen creaciones artificiales ligadas a nuevos descubrimientos o teorías. Pero unos y otros se articulan de mil modos distintos en el seno de múltiples y heteróclitas teorías. ¿Cómo hincar el diente en esta profusión de conceptos distintos? La investigación reciente ha mostrado que uno de los puntos de vista más fecundos para el estudio metacientífico de los conceptos es el de su estructura formal o matemática. De hecho, la profusa variedad de los conceptos científicos se reduce desde este punto de vista a unos pocos tipos básicos, fundamentalmente a tres: los conceptos clasificatorios, los conceptos comparativos y los conceptos métricos[1].

Clasificaciones: condiciones formales de adecuación

Un concepto clasificatorio sirve para referirnos a un grupo determinado de objetos o sucesos que tienen algo en común. Los sustantivos y adjetivos del lenguaje ordinario suelen corresponder a conceptos clasificatorios: hombre, mujer, árbol, camión, azul, puntiagudo, muerto. Algunos de los conceptos clasificatorios del lenguaje ordiario —*bicho, pájaro, enorme*— son demasiado vagos para poder ser incorporados al lenguaje científico, pues no determinan unívocamente la clase de las cosas a las que se aplican. Sin embargo

[1] Esta división de los conceptos científicos aparece claramente formulada en Carl G. Hempel: *Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science*, The University of Chicago Press, 1952, pp. 50 y ss. El lector puede consultar también W. Stegmuller: *Theorie und Erfahrung*, Springer Verlag, Heidelberg, 1970. (Ed. cast.: *Teoría y experiencia*, Ariel, 1979.)

otros, más precisos —como *urraca, olmo* o *hirviente*—, pueden ser incorporados sin más trámite que el de la explicitación de las notas comunes a todos los objetos a los que se aplican. De todos modos, el repertorio de conceptos clasificatorios de un lenguaje natural determinado —sea el náhuatl o el inglés, el swahili o el italiano— es siempre muy limitado y claramente insuficiente para las necesidades de la ciencia. Así, cada pueblo suele disponer de conceptos de los animales y plantas visibles y frecuentes en la zona que habita, pero no de los organismos invisibles a simple vista o de los animales de otras partes del mundo. Por ello, las comunidades científicas se ven obligadas a introducir numerosos conceptos clasificatorios nuevos y artificiales en el lenguaje científico.

En la ciencia los conceptos clasificatorios no suelen introducirse aisladamente, sino en conjuntos llamados clasificaciones. Para que una clasificación —o sistema de conceptos clasificatorios— sea aceptable ha de cumplir dos tipos de condiciones de adecuación. Por un lado, unas condiciones formales de adecuación, comunes a todas las ciencias, y, por otro, ciertas condiciones materiales de adecuación peculiares de la ciencia de que se trate.

En una de sus obras el escritor argentino Jorge Luis Borges cita una imaginaria enciclopedia china, según la cual «los animales se dividen en (a) pertenecientes al Emperador, (b) embalsamados, (c) amaestrados, (d) lechones, (e) sirenas, (f) fabulosos, (g) perros sueltos, (h) incluidos en esta clasificación, (i) que se agitan como locos, (j) innumerables, (k) dibujados con un pincel finísimo de pelo de camello, (l) etcétera, (m) que acaban de romper el jarrón, (n) que de lejos parecen moscas» [2]. Esta presunta clasificación nos choca y sorprende porque viola completamente las condiciones formales de adecuación que esperamos satisfaga. En efecto, aunque el ámbito de objetos a clasificar parece ser el de los animales, algunos de los conceptos no se refieren a animales (como los dibujados con un pincel o las sirenas), otros no se sabe a qué se refieren

[2] En «El idioma analítico de John Wilkins», incluido en Jorge Luis Borges: *Obras completas,* Emecé Ed., Buenos Aires, 1974, p. 708.

(etcétera), los mismos animales caen bajo varios de estos conceptos (pertenecientes al Emperador, amaestrados) y hay animales que no caen bajo ninguno de esos conceptos.

En general, cuando hablamos de una clasificación esperamos que esté perfectamente delimitado cuál sea el ámbito o dominio de individuos que vamos a clasificar, que a cada concepto clasificatorio corresponda al menos un individuo de ese ámbito, que ningún individuo caiga bajo dos conceptos clasificatorios distintos y que todo individuo del ámbito en cuestión caiga bajo alguno de los conceptos de la clasificación.

La extensión de un concepto es la clase de las cosas a las que ese concepto se aplica. Si identificamos los conceptos clasificatorios con sus extensiones, entonces podemos resumir las condiciones formales de adecuación de una clasificación (no solapante) diciendo que la clasificación debe constituir una partición, en el sentido matemático de este término.

Sea A una clase cualquiera de objetos. Una colección de conjuntos $B_1 \dots B_n$ constituye una partición de A si y sólo si (1) cada uno de esos conjuntos es un subconjunto no vacío de A, (2) no hay ningún elemento común a dos de esos conjuntos y (3) cada elemento de A está en alguno de esos conjuntos. Es decir, $\{B_1 \dots B_n\}$ es una *partición* de A si y solo si se cumplen las tres condiciones:

(1) $B_i \subseteq A \wedge B_i \neq \emptyset$ para cada $i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$.

(2) $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j\,(1 \leqslant j, i \leqslant n)$.

(3) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = A$.

Así, la clasificación de los mamíferos en órdenes (monotremas, marsupiales, insectívoros, dermópteros, quirópteros, primates, etcétera) constituye una partición del conjunto de los mamíferos.

Particiones y relaciones de equivalencia

El concepto de partición está estrechamente ligado al de relación de equivalencia. Como es bien sabido, una relación de equivalencia es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Es decir, una relación R es una *relación de equivalencia* en una clase A si y sólo si (1) todo individuo de A está en la relación R consigo mismo, (2) si x está en la relación R con y, entonces también y está en la relación R con x, y (3) siempre que u esté en la relación R con w y w esté en la relación R con z, también u estará en la relación R con z. Por ejemplo, la identidad es una relación de equivalencia, así como también lo es la de paisanaje entre humanes y la de congruencia entre triángulos.

Sea R una relación de equivalencia en A. Sea x un elemento de A. Mediante x_R designamos la clase de equivalencia de x respecto a R, es decir, la clase de todos los elementos de A que están con x en la relación R.

$$x_R = \{y \in A \mid y R x\}$$

De aquí se sigue que las clases de equivalencia de x e y respecto a R serán la misma si y sólo si x está en la relación R con y.

Llamemos *conjunto cociente* de A respecto a R (en signos A/R) al conjunto de todas las clases de equivalencia de elementos de A respecto a R, es decir,

$$A/R = \{x_R \mid x \in A\}$$

Por definición, ninguna de las clases de equivalencia de A/R es vacía, dos clases de equivalencia distintas de A/R no tienen elementos comunes (pues si los tuviesen, serían la misma clase) y entre todas abarcan A entera, pues para cada elemento $x \in A$, x está en x_R y por tanto

$$\bigcup_{x \in A} x_R = A$$

Por tanto, si R es una relación de equivalencia en A, el conjunto cociente de A respecto a R es una partición de A.

A la inversa, toda partición da lugar a una relación de equivalencia. Sea $Q = \{B_1 \ldots B_n\}$ una partición de A. Podemos definir la relación R_Q entre elementos de A del siguiente modo: para cada dos elementos x y z de A, x está en la relación R con z si y sólo si tanto x como z están en la misma subclase B_i de A. Es decir,

$$R_Q = \{\langle x, z\rangle \in A^2 \mid \text{hay un } i (1 \leqslant i \leqslant n) \text{ tal que } x \in B_i \text{ y } z \in B_i\}$$

La relación R_Q es reflexiva en A (pues cada elemento de A estará en la misma B_i que él mismo), simétrica (pues si x está en la misma subclase que y, y también estará en la misma que x) y transitiva. R_Q es una relación de equivalencia.

En resumen podemos decir que toda partición da lugar a una relación de equivalencia y que toda relación de equivalencia da lugar a una partición.

En la química se usan diversas clasificaciones de los átomos. Consideremos la relación de equivalencia en que están dos átomos si y sólo si tienen exactamente el mismo número de protones y el mismo número de neutrones en su núcleo. Esta relación de equivalencia da lugar a la partición o clasificación del conjunto de los átomos en isótopos. Sin embargo, la relación de equivalencia en que están dos átomos si y sólo si tienen el mismo número de protones en su núcleo da lugar a la clasificación de los átomos en elementos químicos. Y, claro está, la clasificación de los átomos en elementos químicos determina unívocamente una relación de equivalencia en la que están dos átomos si y sólo si ambos pertenecen al mismo elemento. Esta relación coincide con la anterior, pues dos átomos pertenecen al mismo elemento químico si y sólo si poseen el mismo número de protones en su núcleo.

En la fonología de una lengua determinada podemos clasificar los sonidos emitidos y captados por los hablantes valiéndonos de la relación de equivalencia en que están dos sonidos si y sólo si son intercambiables sin que varíe el significado de la proferencia de que forman parte. Así, los sonidos de *e* abierta /ε/ y *e* cerrada /e/ son intercambiables en castellano —la proferencia /mέsa/ significa lo mismo que /mésa/—, pero no en francés —la proferencia /epɛ́/, espeso, significa algo distinto que /epé/, espada. Esta relación de equivalencia da lugar a la clasificación de los sonidos de una lengua en fonemas.

En geometría euclídea, la relación de paralelismo es una relación de equivalencia entre las rectas del plano. Esta relación da lugar a la partición del conjunto de las rectas en direcciones. La dirección de una recta es precisamente la clase de equivalencia de esa recta respecto a la relación de paralelismo, es decir, la clase de todas las rectas paralelas a ella.

Vemos que la clasificación siempre tiene la misma estructura, aunque se establezca en ciencias tan distintas como la química, la fonología y la geometría. Cada átomo pertenece a un y sólo un elemento. Cada sonido de una lengua pertenece a un y sólo un fonema. Cada recta de un plano pertenece a una y sólo una dirección.

Clasificaciones: condiciones materiales de adecuación

En la práctica científica no sólo se exige que una clasificación satisfaga las condiciones formales de adecuación que acabamos de comentar, sino también que satisfaga ciertas condiciones materiales de adecuación peculiares de la ciencia de que se trate. Esto mismo suele expresarse en la pretensión de que la clasificación sea natural. Pero ¿qué significa que una clasificación sea natural? Limitémonos a considerar el asunto en lo que atañe a la zoología. ¿Qué es una clasificación zoológica natural?

Podemos clasificar a los animales en tres clases: la de los que no llegan a los 2 años de vida, la de los que mueren entre los 2 y los 80 años y la de los que viven más de 80 años. Esto constituye una clasificación formalmente correcta de los animales. En efecto, los tres casos se dan, cada animal se encuentra en alguno de esos casos y ningún animal está a la vez en dos de esos casos. Sin embargo, esta clasificación sería rechazada por la comunidad de los zoólogos por no ser natural. ¿Por qué no es natural? ¿Y por qué es natural la clasificación de los animales en filos o *phyla* (anélidos, moluscos, etc.)? La respuesta es que podemos enunciar muchas e interesantes leyes generales acerca de los anélidos, por ejemplo, pero no acerca de los animales que viven entre 2 y 80 años. El identificar un animal concreto como anélido nos permite hacer muchas predicciones sobre ese animal, mientras que el identificarlo como viviendo entre 2 y 80 años no nos permite predecir gran cosa acerca de él.

En general, suele considerarse que una clasificación es más natural que otra si los conceptos que constituyen la primera son más fecundos científicamente, en el sentido de que sirven para formular leyes más generales o más precisas o con más poder explicativo o predictivo. Ésta es la razón que ya llevó a Aristóteles a incluir los cetáceos entre los mamíferos, y no entre los peces. Así resultaba posible formular leyes generales acerca de los peces —todos los peces son ovíparos, todos los peces son de sangre fría, todos los peces respiran por agallas, etc.— que no hubieran valido de haber sido incluidos los cetáceos entre los peces.

A la hora de concretar más lo que se entiende por clasificación natural en zoología, las opiniones discrepan, dando lugar a diversas escuelas de taxonomía, tales como la evolutiva y la fenética. Según la taxonomía evolutiva, una clasificación natural ha de reflejar las relaciones filogenéticas entre los animales, agrupando en las mismas clases o taxones a los animales que están evolutivamente emparentados entre sí. Según la taxonomía fenética, la clasificación más natural será aquella que mejor refleje el parecido actual entre los animales, agrupando en los mismos taxones a los animales que más caracteres comunes compartan, con independencia de su genealogía.

La polémica entre taxónomos evolutivos y taxónomos fenéticos se extiende también a la cuestión de si el humán inventa (como quieren los segundos) o más bien descubre (como pretenden los primeros) los diversos taxones biológicos y en especial las especies. Así escribe Ernst Mayr, uno de los más ilustres taxónomos evolutivos, que «los taxones inferiores no son colecciones arbitrarias, sino comunidades reproductivas mantenidas juntas por relaciones de cortejo y separadas de otras unidades similares no por las decisiones arbitrarias del clasificador, sino por los mecanismos aisladores codificados en el programa genético de cada organismo» [3]. Robert Sokal, uno de los iniciadores de la taxonomía fenética, propone por el contrario «basar las clasificaciones enteramente en el parecido, definiendo como clasificaciones naturales aquellas que determinan taxones cuyos miembros son en algún sentido más similares entre sí que con los miembros de los otros taxones. De este concepto de naturalidad se sigue... que la clasificación natural será también la más predictiva» [4].

No es éste el lugar de estudiar esta interesante polémica. Sólo nos interesa señalar cómo, junto a las condiciones formales de adecuación de una clasificación, estructurales y comunes a todas las ciencias, en cada ciencia particular se suelen exigir condiciones materiales de adecuación o naturalidad, aunque, como muestra el caso de la biología, no siempre la comunidad científica está en completo acuerdo sobre en qué consista esa naturalidad.

Jerarquías de clasificaciones

Dadas dos clasificaciones del mismo dominio de objetos, a veces es posible compararlas en cuanto a finura y, a veces, no. Así, por ejemplo, la clasificación de los primates en prosimios y simios no es comparable con la clasificación de los mismos en machos y hembras. La clasificación de los libros por su fecha de publicación no es comparable con su clasificación por el lugar de su impresión. Sin embargo, la clasificación de los mamíferos en familias sí es

[3] Ernst Mayr: *Principles of Systematic Zoology*, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1969, pp. 76-77.

[4] Robert Sokal: «Numerical Taxonomy», *Scientific American*, diciembre de 1966, pp. 108-109. Los principios de la taxonomía fenética se encuentran muy bien expuestos en P. Sneath y R. Sokal: *Numerical Taxonomy*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1973.

comparable con su clasificación en órdenes. La primera es más fina que la segunda. Y la clasificación del territorio nacional por municipios es más fina que su clasificación en provincias.

Sean $A = \{A_1, ..., A_n\}$ y $B = \{B_1, ..., B_m\}$ clasificaciones o particiones del mismo dominio *D*. Entonces podemos decir que *A* es tanto o más fina que *B* si y sólo si para cada $A_i \in$ A y cada $B_j \in B$ ocurre que $A_i \subseteq B_j$ o $A_i \cap B_j = \varnothing$.

Suele ser característico de las ciencias en que los conceptos clasificatorios desempeñan un papel importante el que las clasificaciones no aparezcan solas, sino que se usen diversas clasificaciones de finura decreciente del mismo dominio, engarzadas entre sí y formando jerarquías, donde por jerarquía entendemos una sucesión de clasificaciones comparables entre sí y de finura decreciente.

Más precisamente, decimos que *H* es una jerarquía taxonómica sobre *D* si y solo si hay B_1 ... B_n, tales que:

(1) $H = \{B_1 ... B_n\}$.
(2) Para cada $i(1 \leqslant i \leqslant n)$: B_i es una partición de *D*.
(3) Para cada $i(1 \leqslant i \leqslant n-1)$: B_i es tanto o más fina que B_{i+1}.

Aquí *D* es el dominio básico de individuos, y cada B_i es una categoría de nivel *i*.

En general, una jerarquía sobre *D* es una clase de categorías sobre *D*. Una categoría sobre *D* es una partición de *D*, es decir, una clase de taxones de *D*. Y un taxón de *D* es una clase de elementos de *D* que pertenece a una de las particiones de *D* consideradas.

La jerarquía taxonómica más conocida es la jerarquía procedente de Linné para la clasificación de los organismos. La jerarquía linneana L abarca 7 categorías, cada una de las cuales es una partición del conjunto de los organismos:

L = {especie, género, familia, orden, clase, filo, reino}

Cada organismo es miembro de un taxón de cada una de esas siete categorías. Así, el perro Lassie es a la vez miembro del taxón

Canis familiaris (de la categoría especie), del taxón *Canis* (de la categoría género), del taxón *Canidae* (de la categoría familia), del taxón *Carnivorae* (de la categoría orden), del taxón *Mammalia* (de la categoría clase), del taxón *Craniata* (de la categoría filo) y del taxón *Animalia* (de la categoría reino).

Aunque las jerarquías taxonómicas más conocidas son las de la biología, también en otras ciencias nos encontramos con diversas clasificaciones de finura decreciente que forman jerarquías. Pensemos en las clasificaciones de los átomos en química. Una clasificación muy fina es la partición de los átomos en isótopos, otra menos fina es su partición en elementos, otra aún menos fina es su partición en grupos o familias. Por tanto,

H = {isótopo, elemento, grupo}

constituye una jerarquía sobre el dominio de todos los átomos. Cada átomo es miembro de un taxón de cada una de esas categorías. Así, por ejemplo, un átomo determinado puede ser a la vez miembro del taxón *potasio*-39 (de la categoría isótopo), del taxón *potasio* (de la categoría elemento) y del taxón *alcalino* (de la categoría grupo)[5].

Conceptos comparativos

Así como los conceptos clasificatorios corresponden a los sustantivos y adjetivos del lenguaje ordinario, así también los conceptos comparativos encuentran su punto de partida en un rasgo de nuestra lengua cotidiana: el llamado por los gramáticos grado comparativo de los adjetivos. El lenguaje ordinario no sólo nos permite «clasificar» a nuestros congéneres en altos o bajos; también nos permite precisar que un determinado humán, aunque bajo, es más alto que otro. Expresiones como «más alto», «más

[5] Lo dicho hasta aquí sobre las clasificaciones, particiones, relaciones de equivalencia y jerarquías se encuentra ampliado en el capítulo 3, «Taxonomía formal».

viejo», «mayor», «mejor», «más ligero», etc., corresponden a conceptos comparativos.

Introducir un concepto comparativo para una característica que los individuos de un dominio poseen en mayor o menor grado consiste en definir dos relaciones (una de coincidencia y otra de precedencia) respecto a esa característica, es decir, indicar cuándo dos objetos de ese dominio coinciden respecto a esa característica y cuándo uno precede al otro respecto a ella. Un concepto comparativo sirve así para establecer comparaciones en más y menos. Si identificásemos los conceptos cualitativos con los clasificatorios y los cuantitativos con los métricos, resultaría que en la ciencia se usan otros tipos de conceptos además de los cualitativos y cuantitativos: los conceptos comparativos (o topológicos). Los conceptos comparativos no sólo permiten diferenciar más finamente que los clasificatorios, sino que además representan un primer paso para la posterior introducción de conceptos métricos.

Llamemos $\sim$ y $\prec$ a las relaciones de coincidencia y precedencia respecto a una característica determinada que los objetos de un dominio A poseen en mayor o menor grado. El concepto comparativo $\langle \sim, \prec \rangle$ ha de cumplir ciertas condiciones formales de adecuación para ser científicamente aceptable. En primer lugar, $\sim$ ha de ser una relación de equivalencia en A (es decir, todo objeto ha de coincidir consigo mismo respecto a la característica de que se trate; si un objeto coincide con otro, entonces también el otro ha de coincidir con el uno; y si uno coincide con otro y ese otro con un tercero, entonces el primero ha de coincidir con el tercero). $\prec$ ha de ser transitiva en A (es decir, si un objeto es menos —respecto a la característica en cuestión— que otro y ese otro menos que un tercero, entonces el primero es menos que el tercero). Además, $\prec$ ha de ser $\sim$-irreflexiva (es decir, el que un objeto coincida con otro respecto a la característica estudiada excluye que sea mayor o menor que él respecto a esa misma característica). Finalmente, todos los miembros de A han de ser comparables respecto a $\langle \sim, \prec \rangle$ (es decir, dados dos objetos cualesquiera, o bien coinciden entre sí, o bien uno de ellos es más o menos que el otro respecto a la característica de que se trate).

Podemos resumir las condiciones formales de adecuación de un concepto comparativo $\langle \sim, \prec \rangle$ en un dominio A exigiendo que $\langle A, \sim, \prec \rangle$ constituya un sistema comparativo. $\langle A, \sim, \prec \rangle$ es un *sistema comparativo* si y solo si para cualesquiera elementos x, y, z de A ocurre que:

(1) $x \sim x$
(2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
(3) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$
(4) $x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$
(5) $x \prec y \Rightarrow \neg\, x \prec y$
(6) $x \prec y \vee x \sim y \vee y \prec x$

Un ejemplo típico de concepto comparativo es el concepto de *dureza* usado en mineralogía. Este concepto comparativo de dureza sobre el dominio de los minerales se basa en el test del rayado. Dados dos minerales, x y z, decimos que x es más duro que z si y sólo si x raya a z, pero z no raya a x. Y decimos que x coincide respecto a dureza con z si ocurre que ni x raya a z ni z raya a x (o x y z son el mismo mineral). Este concepto comparativo de dureza cumple las 6 condiciones formales de adecuación formuladas en la definición de sistema comparativo. Las condiciones (1), (2) y (5) se cumplen por definición. El que las otras condiciones también se cumplen constituye una hipótesis empírica (por ahora bien confirmada) de la mineralogía.

Otro ejemplo de concepto comparativo (uno que sirve de primer paso para la posterior introducción de un concepto métrico) es el concepto (premétrico) de *masa*. Este concepto comparativo de masa tiene como dominio el ámbito de los cuerpos manejables (es decir, ni demasiado pequeños ni demasiado grandes, sino manipulables con la mano) y se basa en el test de la balanza. Dados dos objetos x y z, decimos que x coincide respecto a masa con z si, colocados ambos en sendos platillos de una balanza, ésta permanece equilibrada (o bien si *x* y *z* son el mismo cuerpo). Y decimos que *x* tiene más masa que *z* si colocados ambos en sendos platillos de la balanza, ésta se desequilibra a favor del platillo donde hemos colocado *x*. Este concepto comparativo de masa cumple las 6 condiciones formales de adecuación. En este caso las condiciones (1) y (5) se cumplen por definición, mientras que al suponer que también se cumplen las demás, estamos haciendo diversas hipótesis (por lo demás triviales, claro) tanto sobre el comportamiento de la naturaleza como sobre el buen estado de nuestra balanza.

En paleontología se emplea un concepto comparativo de *antigüedad* cuando resulta difícil datar absolutamente los fósiles hallados en un yacimiento estratificado. El dominio de ese concepto comparativo de antigüedad está constituido por los fósiles que se encuentran en los diversos estratos geológicos del yacimiento. Decimos que un fósil *x* coincide respecto a antigüedad con un fósil *z* si y sólo si *x* y *z* se encuentran en el mismo estrato. Y decimos que *x* es más antiguo que *z* si *x* se encuentra en un estrato inferior a aquel en el que se encuentra *z*. También este concepto cumple las 6 condiciones formales de adecuación, y como en el primer caso, también aquí (1), (2) y (5) se cumplen por definición, y que se cumple el resto es una hipótesis basada en nuestras ideas acerca de la formación de las rocas sedimentarias y la fosilización de los restos de organismos.

Cuando queremos precisar más nuestras nociones acerca de un ámbito determinado, con frecuencia resulta más fácil introducir un concepto comparativo que uno métrico. Así podríamos tratar de precisar el concepto de fortaleza (muscular) en un dominio de humanes mediante el test de echarse un pulso (sería más fuerte que otro el que, echándose un pulso, derribase al otro; coincidirían los que, echándose un pulso, ni derribasen ni fuesen derribados). Pero estaría por ver si este concepto cumple más o menos las condiciones formales de adecuación, y si sirve para algo.

El concepto de metal es en principio clasificatorio. Clasificamos los elementos químicos en metales y no metales. Pero al definir lo que entendemos por metal (elemento que posee en la capa más externa de la corteza un número pequeño de electrones, de los que puede desprenderse fácilmente, dando lugar a iones positivos; presenta gran conductividad eléctrica y calórica, etc.), es evidente que unos elementos poseen esas características en un grado mayor que otros. Algunos elementos (como los alcalinos) son «muy metales»; otros (como los halógenos) no son nada metales; los demás ocupan grados intermedios. El mismo estaño se comporta en una de sus formas como metal, y en otra, como no metal. Por ello, podríamos tratar de reformular nuestra noción de *metalidad* como concepto comparativo, explicitando criterios que nos sirviesen para decidir, de dos elementos cualesquiera, si coinciden respecto a metalidad o si uno es más metálico que el otro. Y hemos visto como, además del concepto métrico de masa, hay un concepto (previo) comparativo de masa. El punto a retener es que el ser clasificatorio, comparativo o métrico, como el ser cualitativo o cuantitativo, no son propiedades de las cosas, sino de los conceptos que empleamos para pensar en las cosas y hablar de ellas.

Señalamos, finalmente, que si bien no siempre es fácil (ni posible) pasar de un sistema clasificatorio a otro comparativo, la inversa (es decir, pasar de un concepto comparativo a una clasificación) siempre es posible, fácil e incluso trivial. En efecto, sea $\langle \sim, < \rangle$ un concepto comparativo sobre un dominio D. La relación de coincidencia $\sim$ (que, como sabemos, es una relación de equivalencia) determina entonces unívocamente una partición o clasificación de D, a saber, $D/\sim$, es decir, el conjunto cociente de D respecto a $\sim$. Esta partición, además de soler ser de gran finura, tiene la ventaja de estar (irreflexivamente) ordenada por la relación $<$, con lo que obtenemos una mayor información sobre las interrelaciones mutuas entre las diversas clases que constituyen esa clasificación.

Conceptos métricos

Los conceptos métricos, también llamados conceptos cuantitativos o magnitudes, no tienen correspondencia en el lenguaje ordinario. Son una creación original de los lenguajes científicos. Son característicos de los estadios más avanzados de la ciencia. Piénsese que la revolución científica del siglo XVII consistió en gran parte en la introducción y uso sistemático de los conceptos métricos en la física, que durante los dos mil años anteriores había estado basada en los conceptos cualitativos.

Los conceptos métricos asignan números reales o vectores o tensores a objetos o sucesos. Los conceptos métricos —como *masa* o *tiempo*— que asignan números reales a determinados objetos o sucesos se llaman *magnitudes escalares*. Los conceptos métricos —como *fuerza* o *velocidad*— que asignan vectores se llaman *magnitudes vectoriales*. Los conceptos métricos —como *curvatura*— que asignan tensores se llaman *magnitudes tensoriales*. Para simplificar nuestro tratamiento, vamos a limitarnos aquí a hablar de las magnitudes escalares, aunque *mutatis mutandis* lo mismo podría ser dicho de las vectoriales o de las tensoriales. Cuando en lo sucesivo hablemos de concepto métrico, queremos decir concepto métrico escalar.

En una primera aproximación podemos decir que un concepto métrico f en un dominio A es simplemente $f: A \to \mathbb{R}$, es decir, una aplicación del dominio A sobre el conjunto de los números reales, o, con otras palabras, una asignación de un número real a cada uno de los objetos de A. Así, el concepto métrico de *masa* asigna un número real a cada cuerpo, el de *longitud* asigna un número real a cada dos señales en una superficie plana de un cuerpo o a cada dos cuerpos, el de *tiempo* asigna un número real a cada dos sucesos, el de *frecuencia* asigna un número real a cada onda, el de *resistencia* asigna un número real a cada conductor eléctrico, el de *índice cefálico* asigna un número real a cada cabeza, el de *producto nacional bruto* asigna un número real a cada economía nacional y año, el de *tasa de natalidad* asigna un número real a cada población y año, etc.

En una segunda aproximación podemos observar que con frecuencia tratamos de introducir un concepto métrico en un ámbito en el que ya disponemos de un concepto comparativo. La *metrización* de un ámbito o de una característica consiste precisamente en la introducción de un concepto métrico en ese ámbito o para esa característica. (No hay que confundir metrización y medida. La *medida* supone que ya disponemos de un concepto métrico y consiste en la búsqueda del número real o vector que ese concepto métrico asigna a un objeto o suceso determinado.) Muchas veces de lo que se trata es de metrizar un ámbito ya previamente ordenado, es decir, se trata de metrizar un sistema comparativo o, dicho todavía con otras palabras, se trata de introducir un concepto métrico para algo para lo que ya disponemos de un concepto comparativo. Si $\langle A, \sim, \prec \rangle$ es un sistema comparativo que pretendemos metrizar mediante la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, lo primero que debemos exigir es que f conserve el orden establecido por $\langle \sim, \prec \rangle$ en A, es decir, que f asigne el mismo número real a los objetos coincidentes y que, si un objeto precede a otro, entonces f asigne un número real menor al primer objeto que al segundo. Más precisamente, la condición formal de adecuación de un concepto métrico f que pretenda metrizar el sistema $\langle A, \sim, \prec \rangle$ de la que estamos hablando exige que para cada dos objetos x y z de A ocurra que:

(1) si $x \sim z$, entonces $f(x) = f(z)$
(2) si $x \prec z$, entonces $f(x) < f(z)$

Un concepto métrico de este tipo no sólo asignará números a las cosas, sino que además nos ofrecerá una cierta información sobre el orden en que están esas cosas respecto a la característica que hayamos metrizado. Aquí lo que habremos hecho habrá sido representar determinadas características cualitativas o empíricas de los objetos del dominio A (de personas, minerales, poblaciones o lo que sea) por características cuantitativas o matemáticas de los números reales. Lo que habremos hecho será, pues, establecer un homomorfismo entre el sistema empírico comparativo $\langle A, \sim, \prec \rangle$ y el sistema numérico $\langle \mathbb{R}, =, < \rangle$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales y $=$, $<$ son la identidad y la relación «menor que» entre números reales.

Esta representación de un sistema empírico en otro numérico constituye la esencia del concepto métrico. En una tercera aproximación, podemos decir que un concepto métrico f es un homomorfismo de un sistema empírico en un sistema numérico homólogo. Un *sistema* está constituido por un dominio de individuos y una serie de relaciones y funciones en ese dominio. Dos sistemas son *homólogos* si tienen el mismo número de relaciones y de funciones y si los números arios se corresponden (es decir, si la primera relación de un sistema es binaria, también lo es la del otro, etc.).

Sean $\mathcal{A} = \langle A, R_1 \dots R_n, g_1 \dots g_m \rangle$ y $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S_1 \dots S_n, h_1 \dots h_m \rangle$ dos sistemas homólogos. Decimos que f es un *homomorfismo* de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{R}$ si y solo si ocurren las siguientes tres cosas: (1) f es una función que a cada objeto de A asigna un número real, es decir, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. (2) Siempre que los objetos $a_1 \dots a_n$ de A están entre sí en la relación R_i, los correspondientes números reales $f(a_1) \dots f(a_n)$ están también entre sí en la correspondiente relación S_i. (3) Siempre que la función g_i de $\mathcal{A}$ asigna a n objetos $a_1 \dots a_n$ de A otro objeto a_{n+1} de A, la correspondiente función h_i de $\mathcal{R}$ asigna a los correspondientes números reales $f(a_1) \dots f(a_n)$ el correspondiente número real $f(a_{n+1})$.

Con esto queda precisado lo que entendemos por concepto métrico: un concepto métrico es un homomorfismo de un sistema empírico en un sistema numérico. El análisis estructural de la metrización de un sistema empírico suele constar de cuatro pasos: (1) Definición del sistema empírico. (2) Formulación de axiomas o hipótesis que expresan ciertas características cualitativas de ese sistema empírico. (3) Prueba de un teorema de representación, que afirma la existencia de un homomorfismo de ese sistema empírico en cierto sistema numérico. (4) Prueba de un teorema de unicidad, que indica hasta qué punto el homomorfismo es unívoco, es decir, cuáles son las transformaciones (llamadas permisibles) del homomorfismo dado, que también constituyen homoformismos del mismo sistema empírico en el mismo sistema numérico.

Aquí no vamos a desarrollar este análisis [6], sino que nos limitaremos a distinguir y ejemplificar algunos de los principales tipos de conceptos métricos.

[6] El lector interesado en el análisis de los conceptos métricos como homomorfismos —que constituye una de las áreas más activas de la actual filosofía de la ciencia— puede leer el capítulo 2 de este libro, «Los conceptos métricos», así como acudir a las obras señaladas en «Referencias y lecturas suplementarias», al final del libro.

A veces se identifica el concepto métrico con una escala, pero otras veces se identifica una *escala* con un homomorfismo concreto de un sistema empírico en un sistema numérico, y el *concepto métrico* con la clase de todos los homomorfismos del primer sistema en el segundo. Así, para un concepto métrico dado, varias transformaciones de escalas serían permisibles. Y el hecho de que un mismo concepto métrico pueda expresarse en varias escalas corresponde evidentemente a la práctica científica.

Escalas ordinales

Las escalas ordinales son las más pobres desde el punto de vista de la información que nos suministran. De hecho, su rendimiento teórico no es mayor que el de los conceptos comparativos. Se limitan a asignar números, conservando el orden de un sistema comparativo dado.

La escala de Richter para la intensidad de los terremotos, la de Beaufort para la de los vientos y la de Mohs para la dureza de los minerales son típicos ejemplos de escalas ordinales. Consideremos la última de las citadas.

Como ya vimos anteriormente, en mineralogía se dispone de un concepto comparativo de dureza basado en el test del rayado. Siempre que asignemos números a los minerales de tal manera que a dos minerales les corresponda el mismo número o a uno de ellos un número menor que el otro según que coincidan en cuanto a dureza o el uno sea menos duro que el otro conforme al test del rayado, tendremos una escala ordinal de dureza. El minerólogo alemán Friedrich Mohs en 1822 decidió asignar números a algunos minerales, estableciendo así la «escala de Mohs». En concreto asignó el 1 al talco, el 2 al yeso, el 3 a la calcita, el 4 a la fluorita, el 5 al apatito, el 6 a la ortosa, el 7 al cuarzo, el 8 al topacio, el 9 al corindón y el 10 al diamante. Si un mineral por el test del rayado resulta ser, por ejemplo, más duro que el cuarzo y más blando que el topacio, se le asigna un número intermedio entre el 7 y 8, como el 7,5.

Sea M el conjunto de los minerales. Sean $\sim$ y $\prec$ las relaciones de coincidencia respecto a dureza y de menor dureza según el test del rayado. La escala de Mohs es un homomorfismo f del sistema empírico $\langle M, \sim, \prec \rangle$ en el sistema numérico $\langle \mathbb{R}, =, < \rangle$, tal que f(talco) = 1, f(yeso) = 2, f(calcita) = 3, f(fluorita) = 4, etcétera.

La escala de Mohs se limita a expresar numéricamente el hecho de que un mineral es más o menos duro que otro, pero no nos dice *cuánto* más o menos duro es que el otro. No mide diferencias de dureza. Esta limitación es común a todas las escalas ordinales. Precisamente por ello, son muchas las transformaciones permisibles, es decir, las transformaciones del homomorfismo dado que dan lugar a homomorfismos del mismo tipo.

Sean f y h dos funciones que asignan números reales a los elementos de un dominio A. Decimos que h es una *transformación monótona* de f si para cada dos elementos x y z de A ocurre que si $f(x) < f(z)$, entonces $h(x) < h(z)$, y que si $f(x) = f(z)$, entonces $h(x) = h(z)$. Pues bien, si f es un homomorfismo de un sistema empírico en un sistema numérico y constituye una escala ordinal, cualquier transformación monótona de f será también un homomorfismo del mismo sistema empírico en el mismo sistema numérico y, por tanto, será igualmente una escala ordinal. Si en vez de asignar 1 al talco, 2 al yeso, 3 a la calcita, 4 a la fluorita, etc., como hacía Mohs, asignamos 0 al talco, 500 al yeso, 500,5 a la calcita, 507 a la fluorita, etc., esa asignación sigue siendo una escala ordinal de dureza. Precisamente esta indeterminación es la que impide que pueda haber una fórmula general para pasar de una escala ordinal a otra (correspondiente al mismo concepto).

Escalas proporcionales

Las escalas proporcionales son las más ricas desde el punto de vista de la información que suministran. No sólo nos dicen que un objeto es más o menos que otros respecto a alguna característica, sino que nos señalan en qué proporción exacta el uno es más o menos eso que el otro.

Las escalas correspondientes a los conceptos básicos de la física, como *masa, longitud* o *tiempo*, son escalas proporcionales, que, además, constituyen magnitudes aditivas o extensivas, por disponer en sus correspondientes sistemas empíricos de una operación correspondiente a la adición.

Ya habíamos aludido al concepto comparativo de masa, basado en el test de la balanza y aplicable al dominio de los objetos físicos manejables. Consideremos ahora la operación empírica consistente en colocar dos objetos juntos (que por convención dan lugar a un nuevo objeto) en el mismo platillo de la balanza, y designemos esta operación mediante el signo $\perp$. Sea $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$ el sistema empírico formado por el conjunto de los objetos físicos manejables, las relaciones de coincidencia y precedencia respecto al test de la balanza y la operación de colocar juntos dos objetos en el mismo platillo, de la que acabamos de hablar. Una escala de masa es un homomorfismo de $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$ en $\langle \mathbb{R}, =, <, + \rangle$, es decir, una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cualesquiera x y z de A: (1) si $x \sim z$, entonces $f(x) = f(z)$, (2) si $x \prec z$, entonces $f(x) < f(z)$ y (3) $f(x \perp z) = f(x) + f(z)$.

Hay muchas funciones que cumplen esas condiciones, muchas escalas. ¿Cómo fijar una? Eligiendo un objeto cualquiera de A y asignándole convencionalmente un número cualquiera. Así, en la escala métrica decimal se elige un determinado cilindro de platino e iridio (el «kilo patrón») que se conserva en el museo de pesas y medidas de Sèvres y se le asigna el número 1.000. Con esto queda fijada la escala de masa en gramos.

A diferencia de lo que pasaba con las escalas ordinales, no todas las transformaciones monótonas de escalas proporcionales dan lugar a escalas proporcionales. Supongamos que un frasco destapado tiene 200 gramos de masa, y su tapa, 100 gramos. Por tanto, el frasco tapado tendrá 300 gramos de masa. Una transformación monótona h de la escala métrica decimal en gramos m podría asignar al frasco el número 2, a su tapa, el 1, y al frasco tapado, el 9. Pero esa función no sería un homomorfismo de $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$ en $\langle \mathbb{R}, =, <, + \rangle$. En efecto, mientras que

$$m(\text{frasco} \perp \text{tapa}) = m(\text{frasco}) + m(\text{tapa}) = 200 + 100 = 300$$

ocurriría que

$$m(\text{frasco} \perp \text{tapa}) = 9 \neq h(\text{frasco}) + h(\text{tapa}) = 2 + 1 = 3$$

En realidad, la mayoría de las transformaciones monótonas de una escala proporcional *no* son escalas proporcionales. Sólo las transformaciones similares dan lugar de nuevo a escalas proporcionales.

Sea f una función que asigna números reales a los elementos de A. Una función $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una *transformación similar* de f si y solo si hay un número positivo fijo k tal que para cada objeto x de A ocurre que $h(x) = k \cdot f(x)$, es decir, $h(x)$ es siempre el producto de $f(x)$ por un número positivo fijo. Pues bien, un homomorfismo f de un sistema empírico en un sistema numérico constituye una *escala proporcional* si y sólo si cualquier transformación similar de f es también un homomorfismo del mismo sistema empírico en el mismo sistema numérico.

De aquí se sigue que para pasar de una escala proporcional a otra basta siempre con multiplicar por un número fijo. Así, para pasar de una escala en kilos a otra en gramos basta con multiplicar por 1.000; para pasar de una escala en libras a otra en kilos basta con multiplicar por 0,453, etc.

Para citar otro ejemplo de escalas proporcionales, consideremos el concepto métrico de longitud. Sea $\langle B, \sim, \prec, \Delta \rangle$ el sistema formado por el conjunto de las barras metálicas, las relaciones de coincidencia y precedencia empírica respecto a longitud y la operación de concatenación de barras a lo largo de una línea recta, es decir, la operación de colocar una barra a continuación de otra. Ahora podemos definir una escala de longitud como un homomorfismo del sistema empírico $\langle B, \sim, \prec, \Delta \rangle$ en el sistema numérico $\langle \mathbb{R}, =, <, + \rangle$. Como hay muchas funciones $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ que constituyen homomorfismos de $\langle B, \sim, \prec, \Delta \rangle$ en $\langle \mathbb{R}, =, <, + \rangle$, para fijar una hemos de elegir un objeto de B y asignarle un número determinado. Así, en la escala métrica decimal se eligió (en 1889) una barra de platino-iridio conservada en el museo de pesas y medidas de Sèvres y se le asignó el número 1.

Como en el caso de la masa, y puesto que aquí también nos las habemos con escalas proporcionales, con la longitud ocurre que no toda transformación monótona, sino sólo toda transformación similar conduce de una escala de longitud a otra. Por ello, para pasar de una escala de longitud a otra basta con multiplicar por un número fijo. Así, para pasar de una escala en millas a otra en metros, basta con multiplicar por 1.609; para pasar de una distancia en metros a otra en centímetros, basta con multiplicar por 100, etc.

Téngase en cuenta que aquí hemos introducido la longitud sólo respecto a barras metálicas (o la masa respecto a objetos manejables). Esto no es sino el primer paso para luego ir extendiendo estos conceptos mediante leyes científicas a ámbitos más amplios, o, si se prefiere, éstos no son sino los primeros de una sucesión de conceptos métricos de masa y longitud de alcance creciente. Téngase también en cuenta que nos hemos limitado a señalar las condiciones formales de adecuación de los conceptos métricos (resumidas en la exigencia de que constituyan homomorfismos de sistemas empíricos en sistemas numéricos), dejando de lado las condiciones materiales de adecuación, que, por ejemplo, en la física han llevado a una constante revisión de los objetos patrones o estándar que sirven para fijar las escalas. Así, y puesto que acabamos de hablar del concepto de longitud, podemos recordar cómo la comunidad de los físicos ha ido pasando de una escala de longitud basada en la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por Dunkerque y Barcelona (1799) a otra basada en la barra del museo de Sèvres (1889), a otra (1960) basada en la longitud de onda de la radiación emitida por el isótopo kriptón-86 excitado a la temperatura del triple punto del nitrógeno (–210°C) y a otra (1983) basada en el trayecto recorrido por la luz en el vacío durante 1/299792458 segundos.

Magnitudes extensivas e intensivas

Hemos visto que los conceptos de masa o de longitud son (clases de) homomorfismos de un sistema empírico que contiene una operación binaria de combinación de objetos (la colocación de dos objetos juntos en la balanza, la concatenación de barras una a continuación de otra) en un sistema numérico que contiene la adición. Las magnitudes de este tipo se llaman *magnitudes aditivas* o *extensivas*. Lo esencial de una magnitud aditiva f estriba en la correspondencia entre la operación binaria de combinación y la adición. Si a la primera la designamos por $\perp$, siempre ocurre que para cada dos individuos x y z del dominio:

$$f(x \perp y) = f(x) + f(y)$$

Así, la masa de un objeto compuesto de dos partes es igual a la suma de las masas de sus partes. La longitud del objeto resultante de colocar dos objetos en línea recta uno a continuación de otro es igual a la suma de sus longitudes. Esto no sólo ocurre con la masa o la longitud. Lo mismo ocurre con el tiempo (si un proceso se divide en dos partes tales que la segunda se inicia al acabarse la primera, la duración del proceso global es igual a la suma de las duraciones de sus partes). El tiempo es también una magnitud aditiva o extensiva.

Es necesario explicitar exactamente las operaciones del sistema empírico para poder determinar si un concepto métrico que lo represente sobre un sistema numérico es una magnitud aditiva o no. Consideremos el caso de la resistencia eléctrica. Como es bien sabido, en un circuito podremos colocar varias «resistencias», es decir, varios conductores, en serie o en paralelo. Sea C el conjunto de los conductores eléctricos, sea M la relación en que está un conductor con otro cuando el primero ofrece menor o igual resistencia a la corriente eléctrica que el segundo y sea $\perp$ la operación de colocar conductores en serie. El concepto métrico de resistencia es una magnitud aditiva, pues sus escalas son homomorfismos de $\langle C, M, \perp\rangle$ en $\langle \mathbb{R}, \leqslant, +\rangle$. Si en vez de considerar la operación de colocar conductores en serie hubiéramos elegido la de colocar conductores en paralelo, la resultante magnitud no habría sido aditiva. Las resistencias en serie se adicionan; en paralelo, no.

Las magnitudes que no son extensivas o aditivas se llaman *intensivas.* La misma operación de combinación de objetos puede dar lugar tanto a conceptos métricos extensivos como intensivos. Así, respecto a la operación de combinar dos economías nacionales para formar una unión económica, los conceptos de *producto nacional bruto* o de *población* son extensivos o aditivos (pues el producto nacional bruto de la unión es igual a la suma de los productos nacionales, y la población total es igual a la suma de las poblaciones), mientras que los conceptos de *renta per cápita* o de *tasa de natalidad* son intensivos. Respecto a la operación de vaciar el contenido de dos recipientes en un tercero, el concepto de *volumen* es extensivo o aditivo, pero no los de *temperatura* o de *densidad.*

Metrización fundamental y derivada

La metrización de un rasgo o característica de un ámbito determinado consiste en la introducción de un concepto métrico o magnitud para esa característica en ese ámbito determinado, o, dicho con más precisión, en el establecimiento de un homomorfismo (o clase de homomorfismos) entre el sistema empírico formado por dicho ámbito y dicha característica, y un determinado sistema numérico.

En la práctica la metrización suele realizarse simplemente mediante una definición en función de otras magnitudes previamente introducidas. Así, podemos introducir el concepto métrico de *densidad* mediante la definición:

$$\text{densidad de } x = \frac{\text{masa de } x}{\text{volumen de } x}$$

suponiendo que ya disponemos de los conceptos de masa y volumen. Igualmente podemos introducir el concepto métrico de *renta per cápita* mediante la definición:

$$\text{renta per cápita de } x = \frac{\text{producto nacional de } x}{\text{población de } x}$$

suponiendo que previamente hayamos introducido los conceptos de producto nacional y población.

Cuando introducimos un concepto métrico en función de otros previamente introducidos, decimos que se trata de una metrización derivada. La mayoría de las metrizaciones son derivadas. Por ejemplo, la introducción del concepto métrico de velocidad como derivada de la posición *r* de aceleración como derivada de la velocidad constituye una metrización derivada.

De todos modos, y aunque la mayoría de las magnitudes se introduzcan en función de otras, este procedimiento no puede seguirse con todas. Con alguno o con algunos conceptos métricos hay que empezar, alguna o algunas magnitudes han de ser introducidas sin presuponer la previa introducción de otras. En estos pocos pero importantes casos hablamos de metrización fundamental.

La introducción del concepto métrico de masa de que antes habíamos hablado constituye una metrización fundamental, pues no presuponía ninguna otra magnitud previa.

Los conceptos introducidos por metrización fundamental suelen referirse a ámbitos relativamente limitados. El concepto métrico de masa introducido fundamentalmente sólo era aplicable a los objetos físicos manejables. Pero no sólo queremos hablar de la masa de esos objetos. También queremos hablar de la masa de los átomos o de las estrellas, que no son manejables ni pueden colocarse en los platillos de una balanza. A este concepto generalizado de masa llegamos a través de una serie de hipótesis y teorías, de las que se desprende que el primer concepto de masa está correlacionado universalmente con otros conceptos de más amplio alcance, en función de los cuales podemos definir luego un nuevo concepto métrico de masa de más universal aplicabilidad[7].

En la génesis de muchos conceptos métricos importantes observamos esos dos momentos: la precisión de la idea intuitiva para un ámbito restringido y la posterior ampliación de su alcance, redefiniéndolo en función de los nuevos conocimientos logrados.

Ventajas de los conceptos métricos

Las ventajas de los conceptos métricos respecto a los clasificatorios o comparativos son evidentes. El vocabulario científico resulta mucho más simple, claro y manejable. Con un solo concepto métrico tenemos infinitas posibles situaciones ya descritas y ordenadas, sin esfuerzo alguno de memoria. Si pretendiésemos sustituir un concepto métrico como el de temperatura por una serie de conceptos clasificatorios (gélido, frío, fresco, tibio, etc.), no sólo descendería considerablemente el nivel de precisión de nuestro lenguaje, sino que cargaríamos nuestra memoria con gran cantidad de términos distintos (y con su orden relativo).

[7] Hablando con más precisión, podemos decir que el concepto generalizado de masa es el término (al menos provisional) de una sucesión de conceptos métricos de masa distintos y de amplitud creciente, que tienen en común el corresponder a un mismo conceptor (en este caso, al de masa) de una misma teoría abstracta (por ejemplo, de la mecánica clásica, o de la relativista restringida, etc.), estando integrados esos distintos conceptos de masa en otros tantos sistemas físicos distintos y de creciente amplitud, que tienen en común el ser todos ellos modelos de la teoría abstracta en cuestión. Para las nociones de conceptor y teoría abstracta, véanse los capítulos 8, 10, 11 y 12.

Los conceptos métricos no sólo permiten formular leyes científicas mucho más sencillas y precisas que las formulables con términos cualitativos, sino que incluso tienen la ventaja heurística de facilitar la búsqueda de esas leyes. En efecto, si sospechamos una correlación entre dos magnitudes *f* y *h*, podemos medir los valores de *f* y *h* para diversos objetos o sucesos y, mediante un eje de coordenadas en el que los valores de *f* y de *h* estén marcados en los ejes de ordenadas y abscisas, respectivamente, señalar en el plano los puntos $\langle f(x_1), h(x_1)\rangle$, $\langle f(x_2), h(x_2)\rangle$, $\langle f(x_3), h(x_3)\rangle$, etc. A continuación podemos trazar la curva más sencilla que pase por esos puntos y considerar la fórmula analítica que describa esa curva como hipótesis. Posteriores mediciones confirmarán esa fórmula, o bien nos obligarán a trazar una curva más complicada, reformulando entonces la hipótesis, etc. De este modo se llega en algunos casos a la formulación de leyes científicas interesantes.

La razón profunda de todas las ventajas que se pueden aducir estriba en que los conceptos métricos constituyen un puente entre el mundo real y el mundo ideal de la matemática.

El mundo real de la naturaleza y la sociedad es un mundo en gran parte opaco a nuestra inteligencia, lleno de oscuros recovecos, siempre sorprendente, huidizo y poco manipulable intelectualmente. El mundo de la matemática, por el contrario, es un mundo transparente, un mundo abierto a nuestra inteligencia, que lo ha creado y que lo abarca y manipula sin sorpresas, es un mundo perfectamente estructurado y ordenado, en el que nos movemos con toda facilidad. Por eso, en cuanto los problemas que se plantean en el mundo real resultan demasiado complicados e inabarcables, la mejor estrategia para su solución suele consistir en representarlos como problemas relativos al mundo de la matemática, como problemas matemáticos, para los que ya sabemos cómo hallar una solución, solución que luego podemos retraducir al mundo real. Los conceptos métricos llevan a cabo esa representación del mundo real en el mundo de los números y nos permiten esa transposición de nuestras preguntas y de nuestros problemas sobre el mundo natural o social al mundo de la matemática, donde podemos usar todo el arsenal del cálculo diferencial e integral, del cálculo vectorial o tensorial, de la teoría de la probabilidad o la programación lineal, etc., para su solución y respuesta. Ésta es la razón de que en general elijamos sistemas con el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales como sistemas numéricos en los que representar nuestros problemas. Aunque para realizar todas las medidas posibles e imaginables bastaría con los números racionales, la elección del conjunto de los números reales nos permite el uso de una artillería matemática más potente (como derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, etc.) para la resolución de nuestros problemas.

Es de esperar que una mejor comprensión de la estructura de la conceptualización científica no sólo sirva para subrayar una vez más, y por debajo de la confusa proliferación de las distintas especialidades, la profunda unidad de la empresa científica, sino que, además, contribuya a facilitar la introducción de nuevos y más precisos y fecundos conceptos en las áreas hasta ahora menos desarrolladas de la ciencia.

CAPÍTULO 2

LOS CONCEPTOS MÉTRICOS

Así como no se puede dibujar sin líneas, ni se puede pintar sin colores, tampoco se puede hablar ni pensar sin conceptos. Esto vale tanto para la vida cotidiana como para la actividad científica. De hecho, muchos de los conceptos científicos actuales provienen de conceptos cotidianos, aunque durante el viaje se hayan transformado, ganando sobre todo en precisión. Así, las nociones químicas de hierro (átomo con 26 protones en su núcleo) o de agua (H_2O) precisan nociones previas del lenguaje ordinario. Lo mismo ocurre con los conceptos métricos o magnitudes (conceptos que aplican números a cosas) tales como la edad, la energía o la distancia. Aquí vamos a tratar de los conceptos métricos, que hacen de puente entre el mundo empírico real y el mundo ideal de las matemáticas, permitiéndonos así construir modelos matemáticos de la realidad. ¿Cómo pasar de los sistemas cualitativos a los numéricos, como introducir las magnitudes? Ésta es la pregunta a la que tratamos de responder.

La mayor parte de los ejemplos aquí usados proceden de la física, pero no de la física más actual, que es excesivamente complicada para una presentación elemental como ésta, sino de la física clásica más sencilla y primaria. La problemática lógica y filosófica es la misma, pero las posibilidades de comprensión por parte del no especialista son mucho mayores. Las dos grandes teorías de la física actual son la mecánica cuántica, sobre todo en su forma de teoría cuántica de campos, y la teoría general de la relatividad. Las nociones de la primera se definen como operadores y otras entidades matemáticas sobre un espacio de Hilbert (un cierto espacio vectorial complejo infinitodimensional). Las de la segunda se definen en un espaciotiempo, que es una variedad diferencial provista de una métrica (un campo tensorial que aplica un tensor covariante simétrico de orden 2 a cada punto de la variedad). Aquí, sin embargo, nos limitaremos a considerar la estructura de las magnitudes más sencillas y fundamentales de la ciencia clásica elemental, e incluso éstas no en toda su amplitud, sino sólo en sus estadios iniciales, cuando la matematización empieza a despegar de las observaciones cualitativas efectuadas en el laboratorio.

Medida y metrización

Metrizar un ámbito cualitativo consiste en representarlo numéricamente. Esta representación numérica toma la forma de una escala. Una escala es un homomorfismo de un sistema cualitativo empírico en un sistema numérico. Un concepto métrico o magnitud es un conjunto de escalas del mismo tipo (transformables unas en otras mediante transformaciones permisibles) del mismo sistema empírico en el mismo sistema matemático. Aunque hay otros tipos de sistemas empíricos sobre los que se pueden definir otros tipos de escala, aquí nos limitaremos a considerar las escalas ordinales sobre sistemas comparativos, las escalas proporcionales sobre sistemas extensivos y las escalas de intervalos sobre sistemas de diferencias. Y aunque también hay conceptos métricos no escalares (por ejemplo, los vectoriales), aquí nos limitamos a considerar los escalares (que asignan números reales a los objetos del sistema empírico).

Hay que distinguir claramente los problemas de medición de los de metrización. Cuando ya disponemos de un concepto métrico para un ámbito determinado, y de lo que se trata es de averiguar cuál es el valor (el número) que (una escala de) ese concepto asigna a un objeto determinado del dominio, nos encontramos ante una tarea de medida. Cuando, por el contrario, carecemos de un concepto métrico para un ámbito que de momento sólo nos es dado cualitativamente, y de lo que se trata es de introducir por primera vez un concepto métrico que lo cuantifique, nos encontramos ante un problema de metrización.

Metrizar es introducir un concepto métrico donde no lo había. Es una tarea importante, pero que sólo en raras ocasiones es preciso llevar a cabo. Medir es hallar el valor que la función métrica asigna a un objeto. En todos los laboratorios del mundo se realizan constantemente medidas (a veces millones de medidas cada día). Es el trabajo cotidiano de la ciencia experimental.

Dentro de la metrización, se distingue la fundamental de la derivada. En general, cuando introducimos un concepto métrico, lo hacemos sencillamente definiéndolo en función de otros conceptos métricos previamente definidos. Así, por ejemplo, definimos la densidad d como la masa m partida por el volumen V: $d(x) = m(x)/V(x)$. Con ello la densidad queda definida, pero sólo a condición de que previamente ya sepamos qué es la masa y el volumen. Se trata de una metrización derivada.

Naturalmente, no podemos introducir todos los conceptos métricos de un modo derivado. Algunos deberán ser definidos o introducidos de un modo directo, primitivo o fundamental (al menos al principio, y aunque luego experimenten extensiones de su ámbito de aplicación en función de complejas interrelaciones teóricas).

Sistemas comparativos

Algunas cuestiones exigen una respuesta binaria, de sí o no. Por ejemplo, si un átomo determinado es carbono, si un mamífero determinado es macho o hembra, si un número natural es primo o no. Otras cuestiones más bien se resisten a ese tipo de tratamiento. Si nos interesa la altura de las personas, podríamos calificarlas —con el lenguaje ordinario— en altas y bajas. Pero esa clasificación no nos lleva muy lejos. Ya el mismo lenguaje ordinario nos invita a ir más allá, estableciendo comparaciones de altura mediante el llamado grado comparativo de los adjetivos. Aunque Fulano y Mengano sean ambos altos (o ambos bajos), lo que nos interesa es saber si Fulano es más o menos alto que Mengano. El concepto de ser más bajo (o más alto) es un concepto comparativo. Otros conceptos comparativos son el de ser más duro (entre minerales), el de ser más antiguo (entre estratos geológicos) o el de ser más rápido (entre corredores).

Un concepto clasificatorio de altura nos dice que tanto x como y son altos, por lo que no resulta muy informativo. Un concepto comparativo de altura nos dice que x es más alto que y, lo que ya nos informa más, pero no nos dice cuánto más alto es x que y (si x es sólo un poquitín más alto que y, o si x es el doble de alto que y...). Un concepto métrico, finalmente, nos dice cuál es la altura de x, cuál es la de y y qué diferencia exacta hay entre ambas. Es el concepto más informativo. De todos modos, el pasar por un concepto comparativo es con frecuencia una etapa necesaria para llegar a disponer de un concepto métrico.

Introducir un concepto comparativo en un dominio A requiere especificar una relación de equivalencia $\sim$ y una relación de orden débil $<$. Una relación de orden débil es asimétrica, transitiva y $\sim$-conectada. La relación de equivalencia corresponde a la coincidencia o indiferencia respecto a la propiedad de que se trate (altura, dureza...). La relación de orden débil corresponde a la precedencia o inferioridad respecto a esa propiedad. Se supone que las relaciones $\sim$ y $<$ son cualitativas y determinables de un modo empírico y operativo (aceptando a veces ciertas idealizaciones). Si el ámbito A está bien definido, y las relaciones $\sim$ y $<$ cumplen las condiciones indicadas, decimos que $\langle A, \sim, < \rangle$ constituye un sistema comparativo.

En general, $\langle A, \sim, \prec \rangle$ es un *sistema comparativo* si y solo si $\sim$ y $\prec$ son relaciones binarias en A tales que para cualesquiera x, y, $z \in A$:

(1) $x \sim x$
(2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
(3) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$
(4) $x \prec y \Rightarrow \neg\, y \prec x$
(5) $x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$
(6) $x \prec y \vee y \prec x \vee x \sim y$

Escalas ordinales

Un sistema cualitativo empírico es la base sobre la que establecer una escala, que no es sino un homomorfismo de ese sistema empírico en cierto sistema matemático. Ese homomorfismo es una función o aplicación del dominio A del sistema empírico en algún conjunto matemático (por ejemplo, en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales) que preserva las relaciones del sistema empírico.

Una escala asigna números (o vectores o tensores) a los elementos de un sistema empírico, de tal manera que esos números y sus interrelaciones matemáticas reflejen las interrelaciones empíricas entre los elementos del sistema empírico. El homomorfismo en que consiste la escala es como una traducción al lenguaje y al sistema matemático correspondiente del sistema empírico cualitativo inicial, que así queda cuantificado de alguna manera.

Una función h es una transformación (de cierto tipo) de otra función f, si h se obtiene a partir de f mediante una fórmula del tipo correspondiente. Dada una escala de cierto tipo, son transformaciones permisibles aquellas transformaciones que siempre convierten escalas de ese tipo en otras escalas de ese mismo tipo. Precisamente un tipo de escala puede caracterizarse como cierto grupo de transformaciones.

Una función es una transformación monótona de otra si ambas crecen juntas. Es decir, la función h es una transformación monótona de la función f si y solo si para cada $x, y \in A$: $h(x) < h(y) \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

Las escalas más débiles son las ordinales. Una escala ordinal es una función que se limita a asignar números a los objetos del sistema empírico, de tal manera que, si un objeto precede a otro respecto a la propiedad de que se trate, se le asigne al primero un número menor que al segundo, y si coinciden, se les asigne el mismo número. No hay pretensión alguna de expresar cuantitativamente las diferencias o las proporciones. La escala de Mohs para la dureza de los minerales es un ejemplo de escala ordinal.

Una *escala ordinal* sobre el sistema comparativo $\langle A, \sim, \prec \rangle$ es un homomorfismo de $\langle A, \sim, \prec \rangle$ en $\langle \mathbb{R}, =, < \rangle$, es decir, una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $x, y \in A$:

$$x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$$
$$x \prec y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Teorema de representación: Si $\langle A, \sim, \prec \rangle$ es un sistema comparativo, entonces hay al menos una escala ordinal sobre $\langle A, \sim, \prec \rangle$.

Teorema de unicidad: Si $\langle A, \sim, \prec \rangle$ es un sistema comparativo, f es una escala ordinal sobre $\langle A, \sim, \prec \rangle$ y h es una transformación monótona de f, entonces h es también una escala ordinal sobre $\langle A, \sim, \prec \rangle$.

Sistemas extensivos

La estructura de un sistema comparativo es demasiado débil para determinar una función que nos permita no sólo constatar que un objeto es mayor que otro (respecto a cierta propiedad), sino también medir exactamente en qué proporción el primer objeto es mayor que el segundo, en cuánto lo supera. Para ello necesitamos enriquecer la estructura del sistema comparativo, añadiéndole una nueva operación empírica $\perp$ de combinación o concatenación de objetos. Dados dos objetos x, y del dominio, siempre ha de ser posible combinarlos de tal modo que su combinación, $x \perp y$, sea considerada como un nuevo objeto. Además queremos que esa operación de combinación corresponda de alguna manera a la adición de números. La operación de verter el contenido de dos botellas iguales en un tercer recipiente es «aditiva» respecto a volumen o masa, pero no lo es respecto a temperatura. El volumen y la masa del líquido contenido en el recipiente final es el doble que el volumen o la masa del líquido en una de las botellas, pero la temperatura resultante no es el doble de la temperatura previa, sino la misma temperatura. Sólo las operaciones del primer tipo conducen a sistemas extensivos, que, a su vez, nos permiten luego definir sobre ellos magnitudes aditivas.

Un sistema extensivo es la expansión de un sistema comparativo mediante la introducción de una operación binaria $\perp$ de combinación o concatenación de dos objetos cualesquiera de A para formar otro objeto de A. Esta operación $\perp$ debe ser asociativa, conmutativa respecto a $\sim$, monótona respecto a $\prec$, positiva y arquimediana. Esta última condición exige que, por mucho que y sea inferior a x, siempre habrá un número natural n tal que la concatenación de y consigo mismo n veces sea superior a x. La manera más sencilla de entender esta condición es exigir que haya en A copias exactas de los objetos de A, de tal manera que la concatenación de x consigo mismo sea la concatenación de x con una copia exacta de x. La concatenación de x consigo mismo n veces puede ser definida recursivamente así: (i) $1x = x$; (ii) $(n + 1)x = nx \perp x$.

En general, $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$ es un *sistema extensivo* si y solo si $\perp$ es una operación binaria en A tal que para cualesquiera $x, y, z \in A$:

(0) $\langle A, \sim, \prec \rangle$ es un sistema comparativo
(1) $x \perp (y \perp z) \sim (x \perp y) \perp z$
(2) $x \perp y \sim y \perp x$
(3) $x \prec y \Leftrightarrow x \perp z \prec y \perp z \Leftrightarrow z \perp x \prec z \perp y$
(4) $x \prec x \perp y$
(5) $\exists n \in \mathbb{N}\ x \prec ny$

Escalas proporcionales

Las escalas proporcionales son las más informativas. Asignan números a los objetos de un sistema extensivo de tal modo que la función resultante no sólo conserva el orden del sistema empírico, sino también traduce adecuadamente la operación empírica de combinación de objetos como una adición de números. Toda escala proporcional es una escala ordinal, pero no a la inversa.

Una transformación similar de una función es otra función que resulta de multiplicar cada valor de la primera por un número positivo. Es decir, h es una transformación similar de f si y sólo si hay un $k \in \mathbb{R}^+$, tal que para cada $x \in A$: $h(x) = k \cdot f(x)$. Toda transformación similar es monótona, pero no a la inversa.

Una *escala proporcional* sobre un sistema extensivo $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$ es un homomorfismo de $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$ en $\langle \mathbb{R}, =, <, + \rangle$, es decir, una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $x, y \in A$:

$$x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$$
$$x \prec y \Rightarrow f(x) < f(y)$$
$$f(x \perp y) = f(x) + f(y)$$

Teorema de representación: Si $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$ es un sistema extensivo, entonces hay al menos una escala proporcional sobre $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$.

Teorema de unicidad: Si $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$ es un sistema extensivo, f es una escala proporcional sobre $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$ y h es una transformación similar de f, entonces h es también una escala proporcional sobre $\langle A, \sim, \prec, \perp \rangle$.

Un sistema extensivo no determina unívocamente una escala proporcional más que hasta transformaciones similares. Si queremos construir una escala concreta, procedemos del siguiente modo. Elegimos un objeto cualquiera (o clase de equivalencia de objetos) del dominio y le asignamos convencionalmente un número cualquiera (normalmente, el 1). Ese objeto (o clase de objetos equivalentes) es la unidad estándar o patrón de la escala.

Una vez efectuada esa elección por nuestra parte, las propiedades del sistema extensivo determinan unívocamente los valores de la escala proporcional para el resto de los objetos, de tal modo que se preserva el orden y la operación resulta aditiva. Las diversas escalas sobre el mismo sistema extensivo se basan en la elección de objetos no equivalentes como patrón o en la asignación de números distintos al mismo patrón. En cualquier caso, cada una de esas escalas es una transformación similar de cualquier otra de ellas.

El sistema extensivo de masa

Aquí vamos a considerar someramente la metrización fundamental de los tres conceptos básicos de la mecánica: los de masa, longitud y tiempo.

Cuando sostenemos dos objetos (por ejemplo, dos libros), uno en cada mano, con frecuencia tenemos la impresión subjetiva de que uno de ellos es más pesado que el otro. Puesto que en la superficie terrestre la aceleración gravitatoria es constante, el peso de los objetos es proporcional a su masa. Un libro nos parece más pesado que el otro porque es más pesado que el otro. Y es más pesado porque tiene más masa. Otras veces nos parece que ambos libros coinciden en cuanto a masa.

Algunos japoneses afirman que el resultado de un combate de sumo está casi siempre determinado por la masa de los contendientes. El más masivo es el que gana. Para comprobar esta hipótesis tenemos que disponer de un procedimiento que nos permita comparar sus masas respectivas.

Desde tiempo inmemorial la comparación entre objetos mesoscópicos en cuanto a su masa se ha efectuado con ayuda de la balanza de brazos iguales. Supongamos que queremos introducir un concepto comparativo de masa para un dominio de objetos mesoscópicos manejables, como piedras o cilindros metálicos, y que disponemos de una balanza, en cuyos platillos podemos colocar dichos objetos sin dificultad.

En primer lugar, introducimos una relación $\sim_M$ de coincidencia en cuanto a masa. Por convención, todo objeto coincide en cuanto a masa consigo mismo. Dos objetos distintos coinciden en cuanto a masa si y sólo si, colocados en sendos platillos de la balanza, la equilibran. Esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva, y, por tanto, es una relación de equivalencia.

En segundo lugar, introducimos una relación $\prec_M$ de precedencia en cuanto a masa. Por convención, un objeto nunca es menos masivo que él mismo, nunca se precede en cuanto a masa. Dados dos objetos distintos, el primero es menos masivo que el segundo si y sólo si, colocados en sendos platillos de la balanza, ésta se desequilibra a favor del segundo objeto (es decir, el platillo que contiene el segundo objeto se hunde mientras que el otro sube). Esta relación es asimétrica y transitiva, y, por tanto, es una relación de orden parcial estricto.

La relación $\prec_M$ de precedencia en cuanto a masa es $\sim_M$-conectada, es decir, para cada objetos x, y ocurre: $x \prec_M y$ o $y \prec_M x$ o $x \sim_M y$. Por tanto, $\prec_M$ es un orden débil. Dados dos objetos, siempre uno de ellos desequilibra la balanza a su favor, o ambos la equilibran. Así es el mundo. (Podría ser de otra manera; la balanza podría ponerse a oscilar indefinidamente, por ejemplo, pero de hecho eso no ocurre.)

En tercer lugar, introducimos la operación $\perp_M$ de concatenación o combinación empírica de objetos. Dados dos objetos x, y, la combinación $x \perp_M y$ consiste en colocar ambos objetos en el mismo platillo de la balanza (con lo que ambos, juntos, pasan a ser considerados como un nuevo objeto, que es su concatenación). Esta operación $\perp_M$ es asociativa, conmutativa y monótona respecto a $\prec_M$. También vamos a considerar que es arquimediana, aunque esto representa una gran idealización.

El sistema cualitativo formado por el conjunto A de los objetos mesoscópicos manejables, la relación de coincidencia $\sim_M$, la relación de precedencia $\prec_M$ y la operación de concatenación $\perp_M$, $\langle A, \sim_M, \prec_M, \perp_M \rangle$, constituye un sistema extensivo.

El concepto métrico de masa

Dado el sistema extensivo que acabamos de describir, basta con elegir uno de los objetos (o una clase de equivalencia de ellos) como unidad, estándar o patrón y asignarle un número para determinar unívocamente una escala de masa.

Hasta la Revolución francesa, había una enorme variedad de escalas (mal definidas, pero todas distintas entre sí) tanto para la masa (o, más bien, el peso) como para otras magnitudes, lo cual creaba todo tipo de confusiones, abusos y problemas. Los Estados Generales habían solicitado varias veces acabar con la anarquía de las unidades de medida. En 1791, y a sugerencia de Talleyrand, la Asamblea Constituyente encargó a la Académie des Sciences que diseñara un nuevo y unificado sistema de pesas y medidas. La Académie nombró un ilustre comité, presidido por Borda, del que formaban parte varios de los mejores científicos del momento, como Lagrange, Condorcet, Monge y Laplace, y que mantenía estrecho contacto con Lavoisier. La Asamblea Constituyente aprobó ese mismo año 1791 (antes de que se instaurara el Terror) las propuestas de la Académie. Talleyrand emigró a Inglaterra durante el Terror. Tras su vuelta a París, en 1798 convocó una conferencia internacional de científicos para perfeccionar el sistema métrico decimal, que en 1799 fue declarado solo sistema legal en Francia. Su actual sucesor se llama desde 1960 el sistema internacional (SI).

En 1799 los padres del sistema métrico decimal eligieron como patrón de masa la de un decímetro cúbico de agua a 4ºC (temperatura de máxima densidad del agua) y, más específicamente, la de un cilindro metálico de esa masa fundido al efecto por encargo de la Académie. En 1889, este viejo cilindro fue reemplazado por otro nuevo. En efecto, la Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada ese año proclamó como patrón de masa un cilindro (de 3,98 cm de altura y diámetro) hecho de una aleación de 90% de platino y 10% de iridio. Este cilindro, conservado bajo una triple campana de vidrio, y junto a 6 copias, en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sèvres, sigue siendo el estándar o patrón de masa en el SI. La masa es la única magnitud básica del SI, cuya unidad (el kilogramo) no se basa en un proceso de la naturaleza, sino en un objeto artificial convencional: el kilogramo patrón.

De todos modos, el concepto métrico de masa, tal y como lo hemos introducido aquí, sólo se aplica a objetos mesoscópicos manejables, no a átomos o estrellas, por ejemplo, que no pueden colocarse en los platillos de una balanza. A partir de este concepto de masa, y mediante una serie de ampliaciones sucesivas (en realidad, una serie de conceptos distintos de dominio o alcance creciente), se extiende su ámbito de aplicación. Estas ampliaciones son extensiones conservadoras del concepto anterior, en el sentido de que conservan los mismos valores para los objetos del ámbito previamente metrizado.

La extensión del concepto de masa en la mecánica clásica tiene lugar mediante el establecimiento de relaciones basadas en sus leyes fundamentales. Esto presentaba inicialmente un problema, pues las dos leyes relevantes (la segunda ley de Newton y la ley de la gravitación) parecían dar lugar a dos nociones distintas de masa, las llamadas masa inercial y masa gravitatoria. La masa inercial se determina [en base a la segunda ley de Newton, $F = m(x) \cdot a(x)$] a partir de la aceleración producida por una fuerza conocida:

$$\text{masa inerte de } x = \frac{F}{a(x)}$$

La masa gravitatoria, por el contrario, se determina [en base a la ley de la gravitación universal, $F_{xy} = G \cdot m(x) \cdot m(y)/r^2$, donde r es la distancia entre x e y] a partir de la medición de la fuerza gravitatoria ejercida por la tierra T sobre un cuerpo x:

$$\text{masa gravitatoria de } x = \frac{F_{Tx} \cdot r^2}{G \cdot m(T)}$$

Afortunadamente ambas masas —la inercial y la gravitatoria— son iguales, como R. Eötvös comprobó experimentalmente a principios de nuestro siglo. (No era necesario que lo fueran, pero de hecho lo son.)

Otra cuestión distinta, planteada y respondida afirmativamente por E. Mach dentro de su programa de reducción de la dinámica a la cinemática, es la de si sería posible definir la masa en términos puramente cinemáticos, como la longitud y el tiempo, con lo que su metrización sería derivada, no fundamental. En función de la posición (reducible a la longitud) y el tiempo se define la aceleración (como segunda derivada de la posición por el tiempo). Y en función de la aceleración trató Mach de definir la masa. Dos objetos tienen la misma masa si y sólo si, al interactuar (por ejemplo, mediante una colisión frontal), obtienen ambos la misma aceleración. Un objeto tiene una masa *n* veces superior a otro si, al interactuar, el segundo adquiere una aceleración *n* veces mayor que el primero. Esta interesante propuesta de Mach ha tropezado sin embargo con dificultades.

Al pasar a otras teorías no newtonianas, como la relatividad especial, la noción de masa cambia profundamente. La masa de un objeto o de una partícula ya no es invariante respecto a su velocidad, sino que depende esencialmente de ella. Se trata de un concepto muy distinto de masa, que (con buena voluntad) puede considerarse como una ampliación del concepto clásico a objetos que se mueven a velocidades próximas a la de la luz, extensión conservadora (dentro de los márgenes de medida efectiva) respecto a los objetos a baja velocidad.

El sistema extensivo de longitud

En el lenguaje cotidiano decimos que unos humanes son más altos que otros, que una gasolinera está más lejos de aquí que otra, que un barco tiene mayor eslora que otro, que una falda es más corta que otra, etc. Comparamos cosas respecto a su longitud, como más cortas o largas que otras.

Supongamos que queremos introducir un concepto comparativo de longitud para un dominio de barras metálicas rígidas a temperatura constante.

Introducimos una relación $\sim_L$ de coincidencia respecto a longitud del siguiente modo: Cada barra, por convención, coincide consigo misma respecto a longitud. Dos barras distintas son equivalentes o coincidentes respecto a longitud si y sólo si, yuxtapuestas colateralmente la una junto a la otra de tal manera que sus extremos iniciales coincidan, sus extremos finales coinciden también. Esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, una relación de equivalencia.

Introducimos luego una relación $\prec_L$ de precedencia: Por convención, ninguna barra es más corta que sí misma. Dadas dos barras distintas, y yuxtapuestas colateralmente la una junto a la otra de tal manera que sus extremos iniciales coincidan, la primera barra es más corta que la segunda si y sólo si el extremo final de la segunda sobresale o se extiende más allá que el de la primera. Esta relación es asimétrica y transitiva, y por tanto es un orden parcial estricto.

Además, dadas dos barras cualesquiera, siempre ocurre que una de ellas es más corta que la otra, o que la otra es más corta que la una, o que ambas coinciden en cuanto a longitud. Por tanto, la relación $\prec_L$ de ser más corta es una relación de orden débil.

Finalmente, introducimos también una operación $\perp_L$ de combinación o concatenación de barras, consistente en colocar colinealmente una barra a continuación de la otra, de tal modo que una empiece donde termine la otra y que ambas estén en la misma recta. Incluso podríamos pensar en un mecanismo para ajustar firmemente una barra a la otra por su extremo, formando una nueva barra rígida. En cualquier caso, consideramos que la concatenación indicada de dos barras es una nueva barra.

El sistema cualitativo formado por el conjunto A de las barras metálicas rígidas, la relación de coincidencia $\sim_L$, la relación de precedencia $\prec_L$ y la operación de concatenación $\perp_L$, $\langle A, \sim_L, \prec_L, \perp_L \rangle$, constituye un sistema extensivo.

El concepto métrico de longitud

Dado el sistema extensivo que acabamos de describir, basta con elegir una de las barras (o una clase de equivalencia de ellas) como unidad, estándar o patrón y asignarle un número para determinar unívocamente una escala de longitud. Esta escala de longitud puede luego ser extendida hasta abarcar otros objetos rígidos con una arista (yuxtaponible colateralmente a una barra), posiciones en el espacio, distancias, etc., todo lo cual presenta problemas que no vamos a analizar aquí. En cualquier caso, el primer paso consiste en la elección de una unidad estándar.

La unidad de longitud elegida por el Comité de la Académie des Sciences en 1791 fue la diezmillonésima parte del cuadrante de un merididano terrestre. Como los meridianos podían ser diferentes, se eligió uno determinado: el que pasa por Dunkerque. Entre 1792 y 1799 se llevó a cabo la medición por triangulación de un arco de diez grados de latitud sobre ese meridiano (el arco comprendido entre Dunkerque y Barcelona). Hoy sabemos que tuvo un error de 2 partes en 10.000. En realidad el cuadrante de ese meridiano terrestre tiene 10.002.288,3 m, no 10.000.000 m. Esta medida tenía una precisión de casi una parte en 10^4. En 1798 se fabricó el prototipo del metro, una barra de platino, depositada en los Archivos Nacionales y aprobada por la Asamblea Legislativa al año siguiente. Con la introducción de este prototipo se aumentó la precisión en un orden de magnitud, alcanzando una parte en 10^5. La unidad de longitud, el metro (como la de masa, el kilogramo), no se basaría en un concepto, sino en un objeto artificial concreto, el metro patrón. El metro era la longitud de esa barra, con independencia del meridiano.

La Conferencia General de Pesas y Medidas de 1889 estableció como unidad estándar de longitud la distancia (a 0°C de temperatura) entre dos marcas sobre una nueva barra metálica de perfil en forma de «X», hecha de una aleación de 90% de platino y 10% de iridio y conservada en la Oficina de Pesas y Medidas de Sèvres. Otras barras-copias eran comparadas con ella mediante un microscopio reversible especial. Esta nueva barra estándar y los procedimientos de comparación que la acompañaban hicieron posible incrementar la precisión por otro orden de magnitud, llegándose así a casi una parte en 10^7. Entre 1899 y 1960, esta barra sirvió de patrón fundamental para la medida de longitudes.

En los años cincuenta todo el mundo era consciente de que ninguna barra metálica era completamente estable. Las ondas de luz coherente proporcionarían un estándar mucho más invariable, y diversas lámparas atómicas fueron ensayadas. Finalmente se eligió el kriptón, un gas noble de número atómico 36, que aparece en la naturaleza (en la atmósfera) en forma de diversos isótopos, de los cuales el más frecuente es el kriptón-86. El espectro del kriptón se compone de 36 líneas, la mayoría amarillas o verdes, correspondientes a las transiciones de energía de los 36 electrones del átomo. La línea elegida para la definición del metro estándar es una particular línea (luz) de color anaranjado.

En 1960, la Conferencia General de Pesas y Medidas decidió cambiar el estándar de longitud, redefiniendo el metro como una longitud igual a 1.650.763,73 veces la longitud de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del isótopo kriptón-86. Con esto la precisión de la medida se multiplicaba por 100 y alcanzaba una parte en 10^9. El comparador de barras mediante microscopio reversible de Sèvres fue sustituido por una compleja instalación que permite la comparación directa con el estándar definido en función de la radiación del kriptón-86. Además el nuevo estándar tenía la ventaja de ser reproducible en cualquier laboratorio adecuadamente equipado del mundo, sin necesidad de ir a Sèvres.

La lámpara de kriptón-86 permitió incrementar la precisión, pero seguía teniendo problemas, relacionados muchos de ellos con la dificultad de conseguir luz suficientemente coherente (que mantuviera su longitud de onda durante suficiente tiempo como para recorrer un metro, por ejemplo). Pronto se vio que el desarrollo de la tecnología del láser permitía conseguir una luz mucho más coherente que la de la lámpara de kriptón, y se pensó en redefinir el estándar de longitud mediante el láser. Pero no llegó a ser así, pues una solución más radical y definitiva acabó imponiéndose. Esta solución se basa en el hecho (comprobado hasta la saciedad y principio fundamental de la teoría especial de la relatividad) de que la velocidad de la luz en el vacío es una constante absoluta. Puesto que la luz en el vacío recorre siempre la misma longitud por unidad de tiempo, y puesto que la medida del tiempo había adquirido una precisión mayor que todas las demás, bastaba con definir el metro como la longitud recorrida por la luz en el vacío en una fracción determinada de segundo.

En octubre de 1983 la Conferencia General de Pesas y Medidas decidió redefinir el metro, incrementando su precisión en una potencia de 10 (un orden de magnitud) y alcanzando una exactitud de una parte en 10^{10}. A partir de entonces, el metro se define oficialmente como la longitud (o distancia) recorrida por la luz en el vacío en la fracción 1/299792458 de segundo.

Con esta definición, el estándar de longitud se define en función del estándar de tiempo (el segundo). Por tanto, y en teoría, podría considerarse que la metrización de la longitud deja de ser primitiva o fundamental, para convertirse en derivada.

El sistema extensivo de tiempo

Así como atribuimos masa y longitud a los objetos, atribuimos duración a los procesos. Unos procesos duran más o menos que otros. Los viajes, las enfermedades y nuestra propia vida son más o menos breves. Todos tenemos una experiencia subjetiva del tiempo y la duración. El lenguaje ordinario tiene recursos (adverbios temporales, tiempos verbales, etc.) para expresar la duración. Sin embargo, la noción objetiva de tiempo y duración está necesariamente relacionada con los relojes. Cualquier proceso periódico o cíclico o repetitivo puede ser considerado como un reloj (más o menos bueno, según que su ciclo sea más o menos regular). Entre los ciclos regulares bien conocidos están las oscilaciones de los péndulos.

Supongamos que queremos introducir un concepto comparativo de tiempo para las oscilaciones de un conjunto de péndulos.

Primero definimos una relación $\sim_T$ de coincidencia en cuanto a duración. Dos péndulos coinciden en la duración de su periodo si, puestos en marcha a la vez, alcanzan también a la vez el punto inferior de su trayectoria en cada una de sus oscilaciones.

Luego definimos una relación $<_T$ de precedencia en cuanto a duración en la que están dos procesos o periodos si el primero es más breve que el segundo. Un péndulo tiene un periodo más breve que otro si, puestos en marcha a la vez, el primero completa su primer periodo mientras el segundo todavía no lo ha completado. El procedimiento podría precisarse mediante un detector fotoeléctrico que reaccionase a la interrupción de un rayo luminoso que pase por el punto inferior de la trayectoria del péndulo.

Finalmente introducimos una operación $\perp_T$ de combinación o concatenación de oscilaciones de péndulos distintos. Para concatenar dos péndulos *x* e *y*, ponemos en marcha una oscilación o periodo de *y* exactamente en el momento en que *x* completa su oscilación o periodo. El detector fotoeléctrico puede también ser usado aquí. En cualquier caso, consideramos que esas dos oscilaciones juntas (desde el inicio de la primera hasta el final de la segunda) forman una nueva oscilación o periodo.

El sistema cualitativo formado por el conjunto *A* de las oscilaciones de los péndulos, la relación de coincidencia $\sim_T$, la relación de precedencia $<_T$ y la operación de concatenación $\perp_T$, $\langle A, \sim_T, <_T, \perp_T \rangle$, constituye un sistema extensivo.

El concepto métrico de tiempo

Dado el sistema extensivo que acabamos de describir, basta con elegir uno de los objetos (o una clase de equivalencia de ellos) como unidad, estándar o patrón y asignarle un número para determinar unívocamente una escala de tiempo. Más tarde esa escala puede ser extendida a otros procesos estrictamente periódicos (es decir, coordinables con las oscilaciones de algún péndulo, aunque sea ideal) y, finalmente, a todo tipo de procesos. El camino es escabroso, pero transitable.

Según Aristóteles, «el tiempo es la medida del movimiento, según lo anterior y lo posterior»[1]. Esa medida del movimiento viene dada por el número de ciclos que recorre un reloj mientras dura ese movimiento. El tiempo es lo que miden los relojes (es decir, los sistemas cíclicos estrictamente periódicos). Durante la mayor parte de la historia los únicos relojes fiables eran los astronómicos, los movimientos cíclicos aparentes del Sol y de la Luna, que correspondían a la rotación de la Tierra en torno a su eje (el día), a la translación orbital de la Luna en torno a la Tierra (el mes) y a la translación orbital de la Tierra en torno al Sol (el año). Hoy sabemos que esos relojes celestes no son perfectos, pero hay que reconocer que nos han prestado un buen servicio como aproximaciones satisfactorias.

Para medir procesos más breves que un día los relojes celestes no servían (sobre todo si el día estaba nublado). Por ello el ingenio humano ha producido una serie de relojes o sistemas cíclicos artificiales que sirviesen para medir tiempos pequeños, como las horas, los minutos o los segundos: relojes de sol, de arena, de velas, de agua o mecánicos. En Europa, hacia 1300, los mejores relojes ganaban o perdían 15 minutos por día, es decir, sólo lograban una precisión de una parte en 100. Sin embargo en China, por la misma época, una larga tradición de perfeccionamiento de los relojes de agua había conducido en algunos casos a relojes con un error de sólo medio minuto por día, es decir, una precisión 30 veces mayor que en Europa. La relojería europea experimentó un gran progreso en el siglo XVI y, tras la incorporación por Huygens de los principios galileanos del péndulo, los nuevos relojes de péndulo redujeron el error a 10 segundos por día, alcanzando así una precisión de una parte en 10^4. De hecho, hasta 1950 los mejores relojes disponibles siguieron siendo los de péndulo.

[1] *Physiké A.*, 219 b.

Los fundadores del sistema métrico no se preocuparon de definir una nueva unidad de tiempo. En vez de ello, propusieron la unidad natural existente, el día, y se limitaron a sugerir múltiplos y submúltiplos decimales del mismo. Pero esa propuesta no prosperó.

Finalmente se adoptó como unidad de tiempo el segundo, definido en función del movimiento rotacional de la Tierra como la fracción 1/86.400 (= 24·60·60) del día solar medio. Pero el día solar medio no es constante, va creciendo lentamente. Por ello en 1956 el segundo fue redefinido oficialmente en el SI en función del movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol, es decir, del año solar o tropical. El ecuador celeste y la eclíptica sólo se cruzan en dos puntos: los equinoccios. El centro del Sol, en su trayectoria aparente por la eclíptica, cruza el ecuador celeste dos veces al año. El tiempo comprendido entre dos cruces sucesivos por el equinoccio de primavera se llama un año tropical. Lo malo es que este año tropical también varía, se va reduciendo lentamente. Por eso, había que fijar un año determinado, y se eligió el 1900. El segundo sería la fracción 1/31556925974 del año tropical 1900. De todos modos este segundo «efemérico» así definido sólo estuvo oficialmente vigente durante 11 años.

En 1967 se dio una nueva definición del segundo, que aprovechaba los avances de la ciencia y tecnología atómicas. El segundo pasó a ser definido en función de un cierto número de oscilaciones de la radiación generada por un reloj atómico basado en el comportamiento del isótopo cesio-133.

El cesio es un metal alcalino de número atómico 55. Casi todo el cesio presente en la naturaleza tiene la forma de isótopo 133.

Los átomos no pueden encontrarse más que en ciertos niveles de energía bien determinados. Toda transición entre dos de estos niveles se acompaña de la emisión o de la absorción de un fotón u onda electromagnética de frecuencia invariable. En la última capa del átomo de cesio hay un solo electrón. Si el spin de ese electrón tiene dirección opuesta al spin del núcleo, el átomo de cesio está en su nivel de energía más bajo posible. El nivel inmediatamente superior de energía se alcanza si el spin del electrón externo cambia de dirección y se alinea con el del núcleo. El átomo de cesio pasa del primer estado al segundo (es decir, realiza una transición entre dos niveles hiperfinos) absorbiendo la energía de una radiación electromagnética muy determinada (de 9.192.631.770 hertz, o ciclos por segundo). Si pasa del segundo estado al primero, pierde la energía previamente ganada emitiendo un fotón de la misma frecuencia.

El átomo de cesio gira en torno a su eje de rotación o spin. Colocado en un campo magnético de cierta intensidad, su eje de rotación describe un círculo (como una peonza girando en el suelo) o precesión. Esta precesión puede ser detectada y estimulada por una emisión de radio de una frecuencia de 9.192.631.770 vibraciones o ciclos por segundo, que es la que corresponde a la transición entre dos niveles hiperfinos de isótopo cesio-133. En ello se basa la (desde 1967) definición oficial de la unidad de tiempo: «El segundo es la duración de 9.192.631.770 ciclos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del átomo de cesio-133».

¿Cómo conseguir una radiación electromagnética de la frecuencia deseada (9.192.631.770 hertz)? Mediante un reloj de cesio, que, simplificadamente, consiste en lo siguiente: Un horno eléctrico calienta cesio-133, con lo que se produce un chorro de átomos de cesio. Un selector magnético filtra y deja pasar sólo los átomos en el nivel más bajo de energía. Éstos penetran en una cámara sometida a radiación electromagnética procedente de un oscilador de cuarzo, que pretende acercarse lo más posible a la frecuencia deseada de 9.192.631.770 hertz. La radiación de ese tipo transmite su energía a los átomos con los que interacciona, que pasan al nivel siguiente de energía. Un nuevo selector magnético elimina los átomos de nivel más bajo de energía. Finalmente, un detector cuenta los átomos que llegan hasta el final (los de energía más alta). Un servomecanismo de retroalimentación modula la producción de ondas electromagnéticas en el oscilador. Si la radiación producida es la correcta, muchos átomos realizan la transición y son detectados al final del proceso. Si la radiación se desvía de la correcta, entonces menos átomos son detectados al final, con lo que el detector envía al oscilador una señal que automáticamente altera su frecuencia, hasta que de nuevo se consiga que un número máximo de átomos alcance el detector. Cuando esto ocurre, ello garantiza que la radiación electromagnética producida tiene exactamente la frecuencia deseada. Esta frecuencia puede entonces ser transformada por divisores electrónicos de frecuencia en señales a intervalos exactos elegidos (por ejemplo, cada microsegundo). Estos relojes de cesio permiten una precisión superior a una parte entre 10^{12}, que es la máxima precisión alcanzada hasta ahora en cualquier tipo de medición.

Sistemas de diferencias

A veces no resulta posible introducir en un sistema comparativo una operación de combinación empírica representable aditivamente, que nos permita definir una escala proporcional. ¿Implica esa situación que tengamos que conformarnos con una mera escala ordinal? No siempre. A veces es posible establecer comparaciones entre pares de objetos (o entre diferencias entre objetos) respecto a la propiedad que nos interesa metrizar (como la temperatura o las preferencias), lo que a su vez nos permite introducir una escala de intervalos, más informativa que la meramente ordinal (aunque menos que la proporcional).

En un sistema de diferencias no sólo comparamos entre sí dos objetos cualesquiera del dominio respecto a si poseen más o menos la propiedad en cuestión, sino que también comparamos las diferencias entre pares de objetos respecto a esa propiedad. Si se trata de preferencias, no sólo preferimos una cosa a otra, sino que preferimos más a *x* sobre *y* que a *z* sobre *w* (es decir, estamos más dispuestos a canjear *y* por *x* que a canjear *w* por *z*). Si se trata de temperaturas cualitativas (comparadas mediante un tubo de mercurio no calibrado), no sólo podemos decir que un líquido está menos caliente que otro (pues la columna de mercurio dentro del tubo sube menos), sino que también podemos comparar las diferencias entre dos tazas de café y entre dos vasos de agua, comprobando si el recorrido del mercurio en el tubo al pasar de una taza de café a otra es menor o mayor que al pasar de un vaso de agua a otro. Por ejemplo, podemos definir las relaciones de equivalencia y precedencia entre pares de líquidos en función de la distancia entre marcas hechas sobre el tubo de mercurio sin graduar, que indican los diversos niveles de expansión del mercurio al contacto del tubo con líquidos diversos.

Un sistema de diferencias es la expansión de un sistema comparativo (con universo A) mediante la introducción de dos relaciones cualitativas binarias en $A \times A$, es decir, no entre objetos de A, sino entre pares de objetos de A. Una de estas relaciones, E, es una relación de equivalencia en $A \times A$. La otra, D, es una relación de precedencia u orden débil en $A \times A$. Estas relaciones deben satisfacer ciertas condiciones, que son las que aseguran que luego se pueda introducir la correspondiente escala de intervalos.

En vez de '$(x, y)\ D\ (z, w) \vee (x, y)\ E\ (z, w)$' escribimos '$(x, y)\ D \cup E\ (z, w)$', que se lee (x, y) está en la relación D o en la relación E con (z, w), es decir, la diferencia entre x e y es equivalente o menor que la diferencia entre z y w.

La segunda condición de la definición del sistema de diferencias indica que la relación se invierte si trastocamos el orden de los pares. La tercera indica una monoticidad débil. La cuarta asegura la solubilidad de las ecuaciones. La quinta usa la noción de sucesión estándar estrictamente acotada. Una sucesión cualquiera, a_1, a_2, ..., a_i, ... de elementos de A es una sucesión estándar estrictamente acotada de A si y sólo si (1) las diferencias entre elementos sucesivos son equivalentes, es decir, $(a_1, a_2)\ E\ (a_i, a_{i+1})$, (2) las diferencias entre elementos sucesivos no son nulas, es decir, no $(a_1, a_2)\ E\ (a_1, a_1)$, y (3) hay cotas en A que acotan estrictamente la sucesión, es decir, hay $b, c \in A$ tales que para cada a_i: $(b, c)\ D\ (a_1\ a_i)\ D\ (c, b)$.

En general, $\langle A, \sim, \prec, E, D\rangle$ es un *sistema de diferencias* (algebraicas) si y solo si para cualesquiera $x, y, z \in A$:

(0) $\langle A, \sim, \prec \rangle$ es un sistema comparativo
(1) E es una relación de equivalencia en $A \times A$
D es una relación de orden débil en $A \times A$
(2) $(x, y)\ D \cup E\ (z, w) \Rightarrow (w, z)\ D \cup E\ (y, x)$
(3) $(x, y)\ D \cup E\ (z, u)\ \wedge\ (v, w)\ D \cup E\ (s, l) \Rightarrow (x, w)\ D \cup E\ (z, l)$
(4) $(x, x)\ D \cup E\ (y, z)\ \wedge\ (y, z)\ D \cup E\ (w, x) \Rightarrow \exists uv \in A\ [(u, x)\ E\ (y, z)\ \wedge\ (w, v)\ E\ (y, z)]$
(5) Toda sucesión estándar estrictamente acotada de A es finita.

Escalas de intervalos

Una transformación lineal positiva de una función es otra función que resulta de multiplicar cada valor de la primera por un número positivo fijo y añadir al resultado otro número determinado. Es decir, h es una transformación lineal positiva de f si y sólo si hay un $k \in \mathbb{R}^{+}$ y un $s \in \mathbb{R}$, tales que para cada $x \in A$: $h(x) = k \cdot f(x) + s$. Toda transformación similar es lineal positiva (para $s = 0$), pero no a la inversa. Y toda transformación lineal positiva es monótona, pero no a la inversa.

Una *escala de intervalos* sobre un sistema de diferencias $\langle A, \sim, \prec, E, D \rangle$ es un homomorfismo de $\langle A, \sim, \prec, E, D \rangle$ en $\langle \mathbb{R}, =, <, =_d, <_d \rangle$ (donde $=_d <_d$ son la igualdad y la relación de precedencia entre diferencias numéricas), es decir, una función $f: A \to \mathbb{R}$, tal que para cada $x, y \in A$:

$$x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$$
$$x \prec y \Rightarrow f(x) < f(y)$$
$$(x, y)\ E\ (z, w) \Rightarrow f(x) - f(y) = f(z) - f(w)$$
$$(x, y)\ D\ (z, w) \Rightarrow f(x) - f(y) < f(z) - f(w)$$

Teorema de representación: Si $\langle A, \sim, \prec, E, D \rangle$ es un sistema de diferencias, entonces hay al menos una escala de intervalos sobre $\langle A, \sim, \prec, E, D \rangle$.

Teorema de unicidad: Si $\langle A, \sim, \prec, E, D\rangle$ es un sistema de diferencias, f es una escala de intervalos sobre $\langle A, \sim, \prec, E, D\rangle$, y h es una transformación lineal positiva de f, entonces h es también una escala de intervalos sobre $\langle A, \sim, \prec, E, D\rangle$.

Un sistema de diferencias no determina unívocamente una escala de intervalos más que hasta transformaciones lineales positivas. Si queremos construir una escala concreta, procedemos del siguiente modo. Elegimos dos objetos no equivalentes (o dos clases de equivalencia de objetos) del dominio y les asignamos convencionalmente dos números distintos. Esos objetos (o clases de equivalencia de objetos) y los números que les asignamos fijan la escala. Una vez efectuada esa elección por nuestra parte, las propiedades del sistema de diferencias determinan unívocamente los valores de la escala de intervalos para el resto de los objetos, de tal modo que se preserva el orden y las diferencias. Las diversas escalas sobre el mismo sistema de diferencias se basan en la elección de pares de objetos no equivalentes como patrones o en la asignación de números distintos a los mismos patrones. En cualquier caso, cada una de esas escalas es una transformación lineal positiva de cualquier otra de ellas.

El concepto métrico de temperatura

Las magnitudes que consisten en escalas de intervalos son magnitudes intensivas. Ejemplos típicos de magnitudes intensivas son la temperatura (en la física) y la utilidad (en la teoría económica o en la teoría de la decisión). La temperatura (métrica) es un homomorfismo del sistema de diferencias cualitativas de temperatura en un sistema matemático sobre los números reales y los pares de números reales. La utilidad es un homomorfismo del sistema de diferencias entre preferencias cualitativas y el correspondiente sistema matemático. Consideremos el caso de la temperatura. Supongamos que ya disponemos de un sistema cualitativo de diferencias $\langle A, \sim, \prec, E, D\rangle$ de temperatura en el dominio A de los líquidos presentes en el laboratorio, basado en el tubo de mercurio sin graduar. Toda asignación *f* de números reales a los líquidos de *A* que preserve las relaciones de equivalencia y precedencia entre líquidos de *A* y entre pares de (o diferencias entre) líquidos de *A* será una escala de temperatura. ¿Cómo fijar una escala determinada? Aquí ya no basta con elegir un solo objeto o proceso y asignarle un número (como en el caso de las magnitudes extensivas). En primer lugar, elegimos un cierto tipo de líquidos del dominio *A* y asignamos un número *c* a estos líquidos cuando se encuentran en un estado determinado y fácilmente reproducible. Luego asignamos otro número distinto *k* a los líquidos del mismo tipo que se encuentran en otro estado determinado y fácilmente reproducible, pero distinto del anterior.

En el caso de la escala Celsius, lo que hacemos es asignar el número 0 al agua en el punto de fusión (el triple punto del agua, es decir, la temperatura a la cual agua líquida, hielo y vapor pueden coexistir en un recipiente cerrado) y el número 100 al agua en el punto de ebullición. En el caso de la escala Fahrenheit, a esos dos puntos les asignamos los números 32 y 212. En el caso de la escala Kelvin, los números 273,16 y 373,16. Así, el intervalo de la escala Kelvin es el mismo que el de la escala Celsius. La Conferencia Internacional de Pesas y Medidas de 1967 adoptó como unidad de temperatura del sistema internacional (SI) el Kelvin, definido como «la fracción 1/273,16 de la temperatura termodinámica del triple punto del agua». Los físicos utilizan la escala Kelvin para medir las temperaturas, pues esta escala asigna el número 0 al estado de frío absoluto (es decir, de nulo movimiento molecular o nula energía cinética promedia de las moléculas), lo cual se corresponde bien con la noción actual de la temperatura de un gas como la energía cinética promedia de las moléculas del gas. Sin embargo, con esta última consideración abandonamos el lenguaje de la termodinámica fenomenológica, en el que nos movíamos hasta ahora, para entrar en el de la teoría cinética de gases o mecánica estadística, que en gran parte ha venido a sustituirla. De todos modos, y con grandes dosis de buena voluntad, podemos esperar que la nueva temperatura sea una extensión conservadora de la anterior, al menos aproximadamente.

Cualquier transformación lineal positiva de una escala de intervalos es otra escala de intervalos (otro homomorfismo del mismo sistema de diferencias cualitativas en el mismo sistema numérico). Las escalas de temperatura (como la escala Celsius, la escala Fahrenheit y la escala Kelvin o absoluta) son escalas de intervalos, obtenibles unas a partir de otras mediante transformaciones lineales positivas. Así, para pasar de la escala Celsius a la escala Fahrenheit hemos de multiplicar el valor Celsius por 9/5 y añadir 32 al resultado. Es decir,

$$T_F(x) = \frac{9}{5}\, T_C(x) + 32$$

A la inversa, para pasar de la escala Fahrenheit a la escala Celsius, multiplicamos el valor Fahrenheit por 5/9 y añadimos –160/9 al resultado:

$$T_C(x) = \frac{5}{9}\, T_F(x) - \frac{160}{9}$$

Para pasar de la escala Celsius a la escala Kelvin, hemos de multiplicar el valor Celsius por 1 y añadir 273,16 al resultado:

$$T_K(x) = T_C(x) + 273{,}16$$

Para pasar de la escala Kelvin a la escala Celsius, multiplicamos el valor Kelvin por 1 y añadimos –273,16 al resultado:

$$T_C(x) = T_K(x) - 273{,}16$$

Comparación de escalas y sistemas cualitativos

Concluimos esta breve presentación de los principales tipos de conceptos métricos y escalas, resumiendo algunas de sus interrelaciones.

Todo sistema comparativo permite definir escalas ordinales, que son unívocas hasta transformaciones monótonas crecientes. Todo sistema de diferencias permite definir escalas de intervalos, que son unívocas hasta transformaciones lineales positivas. Todo sistema extensivo permite definir escalas proporcionales, que son unívocas hasta transformaciones similares.

Las escalas más informativas son las proporcionales. Todas las escalas proporcionales son automáticamente también escalas de intervalos y escalas ordinales. Las escalas de intervalos son menos informativas que las proporcionales, pero más que las meramente ordinales. Todas las escalas de intervalos son automáticamente también escalas ordinales. Las escalas meramente ordinales son las más pobres en información y no merecen ser consideradas como magnitudes, pues su rendimiento teórico no va más allá del de los meros conceptos comparativos.

Toda transformación similar es también una transformación lineal positiva, pero no a la inversa. Toda transformación lineal positiva es una transformación monótona creciente, pero no a la inversa.

El rol de los conceptos métricos en la ciencia

La realidad que nos rodea es enormemente compleja y en gran parte resulta opaca a nuestra comprensión y manipulación intelectual. Sin embargo, el mundo ficticio de la matemática, que nosotros hemos creado, es mucho más transparente y mejor conocido. Además, disponemos de técnicas conceptuales potentísimas para resolver los problemas acerca del mundo matemático formulados en el lenguaje de las matemáticas.

Afortunadamente, y desde el siglo XVII, hemos salido del marasmo en que nos había sumido el intento por comprender directamente la realidad y hemos aprendido a conquistarla por la ruta indirecta de la modelización cuantitativa. Construimos modelos matemáticos de la realidad empírica y trasladamos a esos modelos los problemas que la realidad nos plantea. Esos problemas, así traducidos al lenguaje matemático, son susceptibles de ser analizados y resueltos matemáticamente. Y la solución matemática, retraducida al lenguaje empírico, se convierte en una solución satisfactoria de nuestros iniciales problemas reales. Al menos, eso es lo que ocurre si nuestro modelo matemático es suficientemente bueno. En cualquier caso, son los conceptos métricos los que juegan el papel clave de intermediarios en este taumatúrgico ir y venir entre realidad opaca y ficción transparente.

Resulta sorprendente que ese rodeo por el mundo ficticio de la matemática nos proporcione representaciones fiables del mundo real de los procesos físicos y soluciones eficaces a nuestros problemas empíricos. Parece milagroso que algo tan extravagante funcione. Como dice Eugene Wigner, «el milagro de la adecuación del lenguaje de la matemática para la formulación de las leyes de la física es un don maravilloso que nosotros no entendemos ni merecemos»[2]. Quizá no lo merezcamos, pero si, a pesar de todo, tratamos de entenderlo, tendremos que seguir avanzando en nuestra comprensión de la estructura, dinámica y papel de los conceptos métricos en la empresa científica.

[2] E. Wigner, en «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences», publicado en *Symmetry and Reflections*, p. 237.

CAPÍTULO 3

TAXONOMÍA FORMAL

Clasificar

Una de las actividades científicas más frecuentes es la que consiste en clasificar [1] los individuos de un ámbito determinado, de tal modo que podamos hablar, pensar y formular leyes o hipótesis sobre ellos con más facilidad. Cuando nos ponemos a clasificar un dominio de objetos, no consideramos terminada nuestra tarea hasta que la clasificación o colección de clases introducidas los abarca a todos. Esto puede precisarse diciendo que el resultado de clasificar un conjunto A ha de constituir un recubrimiento de A.

Un recubrimiento de A es una familia de subconjuntos no vacíos de A tal que la unión de todos ellos es idéntica a A. Formalmente,

1.1 G es un recubrimiento de $A \Leftrightarrow G \subseteq \mathcal{P}A \wedge \varnothing \notin G \wedge \bigcup G = A$

[1] Según la ya clásica definición de G. Simpson en *Principles of Animal Taxonomy* (Columbia University Press, Nueva York, 1961), p. 11, «taxonomía es el estudio teórico de la clasificación, incluyendo sus bases, principios, procedimientos y reglas». Aquí entendemos por *taxonomía formal* la parte más abstracta de la taxonomía, que se limita a considerar y explicar las estructuras formales o matemáticas implícitas en la actividad de clasificar.

Las clases que constituyen una clasificación pueden solaparse, pueden ser solapantes. Por ejemplo, la clasificación de los humanos por nacionalidades es solapante, pues hay individuos con doble nacionalidad. La clasificación de los estudiantes de una universidad por la facultad en que están matriculados puede ser solapante, pues algunos alumnos pueden estar matriculados en más de una facultad. La clasificación ecológica de los animales por el tipo de ecosistemas en que se encuentran es solapante, pues algunos animales moran en ecosistemas de diverso tipo. Frente a esta clasificación ecológica, la clasificación sistemática de los animales no admite solapamientos, sino que pretende clasificarlos de tal modo que un mismo animal no pueda estar en dos clases distintas (de mismo nivel), es decir, pretende ser una clasificación no solapante. La clasificación de los átomos en elementos químicos y la clasificación de los humanes por su año de nacimiento también son no solapantes. El resultado de clasificar A no solapadamente constituye no sólo un recubrimiento de A, sino incluso una partición de A.

Una partición de A es un recubrimiento de A cuyas clases son todas disjuntas entre sí, es decir, sin elementos comunes. Formalmente,

1.2 G es un partición de $A \Leftrightarrow G \subseteq \mathcal{P}A \wedge \emptyset \notin G \wedge \bigcup G = A$
$\wedge \forall XY(X \in G \wedge Y \in G \wedge X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset)$

Las clasificaciones más importantes científicamente son las no solapantes, y a ellas nos limitaremos aquí. En lo sucesivo, siempre que hablemos de clasificaciones, queremos decir clasificaciones no solapantes.

Suele llamarse clasificación tanto a la actividad de clasificar como al resultado de esa actividad, la partición. Esta ambigüedad es inofensiva. Más grave es que, a veces, se utiliza la misma palabra 'clasificación' para referirse a dos actividades o procesos totalmente distintos: la clasificación de un dominio de individuos en clases, por un lado, y el diagnóstico o identificación [2] de uno de esos individuos como perteneciente a una de esas clases previamente establecidas, por otro. La primera constituye una actividad científica creativa, mientras que la segunda es una mera práctica. Esta distinción es paralela a la que puede establecerse entre metrización (introducción de una magnitud métrica en un campo previamente cualitativo) y medición (determinación del valor concreto de esa magnitud para un individuo determinado). No puede haber medición sin metrización previa, como no puede haber diagnóstico sin previa clasificación.

El médico diagnostica la dolencia concreta que padece el paciente en un momento dado interpretándola o reconociéndola como (elemento de) una enfermedad determinada, lo cual presupone una previa clasificación de las dolencias concretas en enfermedades. El naturalista de campo, o el aficionado provisto de una guía de campo, diagnostica o identifica una planta o un pájaro que tiene ante sus ojos como perteneciente a una cierta clase de una clasificación previamente establecida. A las clases establecidas por una clasificación las llamamos taxones. En este sentido, una enfermedad (clase de dolencias) o un elemento químico (clase de átomos) o una especie biológica (clase [3] de organismos) es un taxón, y, por tanto, el diagnóstico es el proceso que asigna un individuo de un dominio determinado al taxón que le corresponde (al que pertenece).

El diagnóstico es, pues, una función que a cada individuo de un dominio determinado asigna el taxón de una clasificación o partición dada de ese dominio al que el individuo en cuestión pertenece.

[2] La mayoría de los biólogos sistemáticos usan el término «identificación» para este proceso, pero esa terminología puede ser confundente en estudios formales. Por eso preferimos aquí el término «diagnóstico», utilizado, por ejemplo, en N. Jardine y R. Sibson: *Mathematical Taxonomy*, John Wiley, Londres, 1971, p. 267.

[3] Para simplificar la exposición formal, aquí suponemos que una especie es una clase de organismos. Sin embargo, aunque a toda especie corresponde una clase de organismos, la especie misma —en el sentido de la biología evolucionista— no es una clase (entidad abstracta), sino una entidad histórica concreta, sometida a nacimiento, evolución y extinción (o bifurcación). Para más detalles, véase el capítulo 4.

Puesto que todo individuo pertenece a un y sólo un taxón de una partición dada, el taxón al que ese individuo pertenece está unívocamente determinado. La función diagnóstico d_Q depende de la partición dada Q. Sea Q una partición de A. d_Q: $A \rightarrow Q$. Definimos:

1.3 $$d_Q = \{ \langle a, Z \rangle \mid a \in A \wedge Z \in Q \wedge a \in Z \}$$

La tarea de diagnosticar o identificar $a \in A$ respecto a la partición Q de A significa calcular el valor $d_Q(a)$. Para ello, a veces, nos servimos de la observación de los síntomas observables de a y los comparamos con los síndromes (conjuntos de síntomas característicos) de los diversos taxones. Otras veces hemos de considerar ciertas relaciones en que a está o no está con otros individuos, etc.

La nomenclatura es la asignación de nombres convenidos por la comunidad científica a los diversos taxones distinguidos en la clasificación. Pero aquí no vamos a ocuparnos del diagnóstico ni de la nomenclatura, sino sólo del resultado directo de la clasificación: las particiones.

Particiones y relaciones de equivalencia

Como es bien sabido, hay una estrecha correlación entre las particiones y las relaciones de equivalencia. Aquí mismo usaremos más adelante una cierta relación de equivalencia para definir una partición (la fusión de dos particiones dadas) que nos interesa caracterizar.

Una relación de equivalencia en A es una relación $R \subseteq A \times A$, que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Por ejemplo, la identidad es una relación de equivalencia en cualquier conjunto. El paralelismo es una relación de equivalencia entre rectas. El tener el mismo número de protones en el núcleo es una relación de equivalencia entre átomos.

Si R es una relación de equivalencia en A y x en un miembro de A, entonces el conjunto de todos los miembros de A que están en la relación R con x se llama la clase de equivalencia (respecto a R) de x, simbolizada como x_R. x mismo es un representante de x_R. Definimos:

2.2 $$x_R = \{y \in A \mid yRx\}$$

De aquí se sigue como corolario que dos clases de equivalencia x_R y z_R son idénticas si y sólo si sus representantes x y z están entre sí en la relación de equivalencia R.

2.3 $$\forall x\, z \in A\ (x_R = z_R \Leftrightarrow xRz)$$

Llamemos Part_A al conjunto de todas las particiones de A. Y llamemos Eq_A al conjunto de todas las relaciones de equivalencia en A. La correlación aludida anteriormente consiste en que cada partición de A determina una cierta relación de equivalencia en A, y cada relación de equivalencia en A determina una cierta partición de A.

Sea Q una partición de A. La relación de equivalencia R_Q inducida o determinada por Q es la relación en que están dos individuos de A si y sólo si ambos pertenecen al mismo Q-taxón. Definimos:

2.4 $$R_Q = \{\langle x, y\rangle \in A^2 \mid d_Q(x) = d_Q(y)\}$$

Fácilmente se comprueba que R_Q es una relación de equivalencia.

Sea R una relación de equivalencia en A. La partición A/R de A inducida o determinada por R es el llamado espacio cociente de A respecto a R, es decir, la clase de todas las clases de equivalencia respecto a R de elementos de A. Definimos:

2.5 $$A/R = \{x_R \mid x \in A\}$$

Fácilmente se comprueba que A/R es una partición de A.

Precisamente una partición cualquiera de A coincide con el espacio cociente de A respecto a la relación de equivalencia inducida por esa partición. En resumen:

2.6 $$R \in \mathrm{Eq}_A \Rightarrow A/R \in \mathrm{Part}_A$$

2.7 $$Q \in \mathrm{Part}_A \Rightarrow R_Q \in \mathrm{Eq}_A$$

2.8 $$Q \in \mathrm{Part}_A \Rightarrow Q = A/R_Q$$

Con frecuencia se introducen las particiones mediante relaciones de equivalencia. La partición de las rectas del plano en direcciones es la partición inducida por la relación de equivalencia de paralelismo, es decir, el conjunto cociente de las rectas por el paralelismo. La partición de los átomos en elementos químicos es la partición inducida por la relación de equivalencia de tener igual número de protones en el núcleo, es decir, el conjunto cociente de los átomos por la igualdad del número de protones. La partición de los fonos de una lengua en fonemas es la partición inducida por la relación de equivalencia de sustituibilidad *salva significatione*, es decir, el conjunto cociente de los fonos por la sustituibilidad *salva significatione*.

Llamemos I_A a la identidad restringida a A, es decir, $I_A = \{\langle x, y\rangle \in A^2 \mid x = y\}$, y llamemos A^2 a la clase de todos los pares de elementos de A, es decir, $A^2 = A \times A$.

Como fácilmente se comprueba, I_A es no sólo una relación de equivalencia en A, sino incluso la mínima relación de equivalencia en A, en el sentido de que está incluida en todas las demás. A^2, por el contrario, no sólo es también una relación de equivalencia en A, sino que además es la máxima, en el sentido de que todas las demás están incluidas en ella. En resumen:

2.9 $$I_A \in \mathrm{Eq}_A$$

2.10 $$I_A = \bigcap \mathrm{Eq}_A$$

2.11 $$\text{para toda } R\text{: } (R \in \mathrm{Eq}_A \Rightarrow I_A \subseteq R)$$

2.12 $$A^2 \in \mathrm{Eq}_A$$

2.13 $$A^2 = \bigcup \mathrm{Eq}_A$$

2.14 $$\text{para toda } R\text{: } (R \in \mathrm{Eq}_A \Rightarrow R \subseteq A^2)$$

2.15 $\langle \mathrm{Eq}_A, \subseteq\rangle$ es una ordenación parcial, con mínimo, I_A, y máximo, A^2.

La relación de mayor o igual finura

Un dominio A de individuos puede clasificarse o partirse de muy diversas maneras, tantas como elementos posee Part_A. Así por ejemplo, los animales pueden clasificarse geográficamente, según el continente u océano en que viven, o ecológicamente, según el tipo de biotopo que habitan, o sistemáticamente por especies, o sistemáticamente por órdenes, etc. Unas clasificaciones o particiones son, a veces, más finas que otras, pero con frecuencia son incomparables entre sí. La clasificación geográfica de los animales es incomparable con su clasificación sistemática en especies, pero esta última es comparable con su clasificación sistemática en órdenes y resulta más fina que ella.

Una partición es más (o igual de) fina que otra cuando hace todas las distinciones que esa otra hace, y quizá todavía algunas más. Más precisamente, una partición P es más (o igual de) fina que Q si y sólo si cada taxón de P está incluido en un taxón de Q. Cada especie está incluida en un género y en un orden. Por eso la clasificación de los animales en especies es más fina que la clasificación en géneros o en órdenes. Simbolicemos la relación de mayor o igual finura (o de menor o igual tosquedad) entre particiones mediante '$\preccurlyeq$'. Sean P y Q particiones de A. Definimos:

3.1 $$P \preccurlyeq Q \Leftrightarrow \forall X \in P\, \exists Z \in Q\, (X \subseteq Z)$$

Otra condición equivalente (no entre recubrimientos en general, pero sí entre particiones) es la de que cada taxón de la primera partición esté incluido en o sea disjunto con cada taxón de la segunda.

3.2 $$P \preccurlyeq Q \Leftrightarrow \forall X \in P\, \forall Z \in Q\, (X \subseteq Z \vee X \cap Z = \varnothing)$$

Como fácilmente se aprecia, la relación $\preccurlyeq$ de mayor o igual finura entre particiones de A es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, es una relación de orden parcial en Part_A. Esta ordenación parcial tiene un mínimo, el conjunto de todas las clases unitarias o singletones de A, al que simbolizaremos por Sng_A, y tiene un máximo, $\{A\}$. En efecto, Sng_A no sólo es una partición de A, sino que además es más fina que cualquier otra partición de A. Y $\{A\}$ no sólo es una partición de A, sino que es la más grosera de todas las particiones de A.

3.3 $$\mathrm{Sng}_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$$
3.4 $$\forall Q \in \mathrm{Part}_A : \mathrm{Sng}_A \preccurlyeq Q$$
3.5 $$\forall Q \in \mathrm{Part}_A : Q \preccurlyeq \{A\}$$

En resumen, $\langle \mathrm{Part}_A, \preccurlyeq \rangle$ es una ordenación parcial con mínimo, Sng_A, y máximo, $\{A\}$.

Jerarquías taxonómicas

Un mismo dominio de individuos puede clasificarse de muy diversas maneras, dando lugar a distintas particiones del mismo. Así, podemos clasificar los minerales por su color, o por su estructura cristalina, o por su composición química, o por el lugar en que se encuentran, etc. Todas estas clasificaciones son independientes unas de otras y son incomparables entre sí en cuanto a finura. No forman una jerarquía taxonómica.

Otras veces, sin embargo, nos encontramos con clasificaciones interdependientes, cuyas particiones son comparables entre sí. Así podemos clasificar las dolencias que nos aquejan en hereditarias y adquiridas. Más finamente, podemos clasificar las adquiridas en traumáticas, degenerativas e infecciosas. Todavía más finamente, podemos clasificar las infecciosas en víricas, bacterianas, fúngicas, etc. Podemos seguir afinando más y clasificar las bacterianas producidas por bacilos, por estreptococos, etc. Y aún más finamente podemos clasificar las dolencias bacterianas producidas por bacilos en enfermedades como el tétanos, la tuberculosis, etc. Todas estas clasificaciones son comparables entre sí en cuanto a finura. Forman una jerarquía taxonómica. Todos los individuos (en este caso, las dolencias concretas) que sean miembros de un taxón de la partición más fina (en este caso, la partición en enfermedades) serán también miembros de un mismo taxón en cada una de las otras clasificaciones. Todas las dolencias concretas que sean casos de tuberculosis serán producidas por bacilos, de origen bacteriano, infecciosas y adquiridas.

La mayoría de los subconjuntos de Part_A, es decir, la mayoría de los conjuntos de particiones de A, contienen particiones incomparables entre sí en cuanto a finura. Si ocurre que un conjunto H de particiones de A sólo contiene particiones comparables entre sí en cuanto a finura, diremos que H constituye una jerarquía taxonómica sobre A.

4.1 H es una jerarquía taxonómica sobre $A \Leftrightarrow$
$H \subseteq \mathrm{Part}_A \wedge \forall X\, Y \in H\, (X \preccurlyeq Y \vee Y \preccurlyeq X)$

Habíamos visto en 3 que $\langle \mathrm{Part}_A, \preccurlyeq \rangle$ es una ordenación parcial. Un subsistema de $\langle \mathrm{Part}_A, \preccurlyeq \rangle$ que constituya una ordenación total (o lineal o cadena, según la terminología que se prefiera) constituye siempre una jerarquía taxonómica sobre A. Por eso una definición alternativa de jerarquía taxonómica es:

4.2 H es una jerarquía taxonómica sobre $A \Leftrightarrow$
$H \subseteq \mathrm{Part}_A \wedge \langle H, \preccurlyeq \rangle$ es una ordenación total

En el contexto de una jerarquía taxonómica H, las diversas particiones que forman H se suelen llamar categorías de H. Así los individuos del dominio básico A son miembros de los taxones de las diversas particiones o categorías. Los taxones mismos son miembros de las particiones o categorías. Y las particiones o categorías son miembros de la jerarquía taxonómica.

Las jerarquías taxonómicas más conocidas son las usadas en la biología. La llamada jerarquía taxonómica linneana consta de 7 categorías: especie, género, familia, orden, clase, filo (o *phylum*) y reino, que constituyen otras tantas particiones del dominio de los organismos. Así, un organismo concreto, por ejemplo esta abeja que pasa ahora zumbando por aquí, pertenece a la especie *Apis mellifera,* al género *Apis,* a la familia *Apidae,* al orden *Hymenoptera,* a la clase *Insecta,* al filo *Arthropoda* y al reino *Animalia.* Cada uno de los taxones citados está incluido en todos los siguientes. Cuando decimos que esta abeja pertenece, por ejemplo, al género *Apis,* queremos decir que pertenece al taxón *Apis,* el cual, a su vez, pertenece a la categoría *género* (o, si se prefiere, en latín, *genus*). Esta abeja es un individuo que es miembro del taxón *Apis.* El taxón *Apis* es miembro de la categoría *género.* La categoría *género* es miembro de la jerarquía taxonómica linneana.

A partir de la jerarquía linneana se obtienen a veces otras jerarquías taxonómicas más amplias añadiendo nuevas categorías, como *tribu* (entre género y familia) o *cohorte* (entre orden y clase), o como las formadas con los prefijos *super* y *sub* (*superfamilia, subfamilia,* etc.).

Dada una jerarquía taxonómica H, cada categoría de esa jerarquía tiene un cierto rango o nivel. Puesto que todas las categorías o particiones de H son comparables entre sí, podemos ordenarlas de tal modo que la más fina aparezca en primer lugar (tenga rango 1), la siguiente más fina tenga rango 2, etc., hasta llegar a la menos fina, que tendrá máximo rango o nivel. Así, en la jerarquía taxonómica linneana, la categoría *especie* tiene rango 1, la categoría *género* tiene rango 2, la categoría familia tiene rango 3, la categoría *orden* tiene rango 4, la categoría *clase* tiene rango 5, la categoría *phylum* tiene rango 6 y la categoría *reino* tiene rango 7.

Sea H una jerarquía taxonómica que conste de n particiones o categorías. Puesto que $\langle H, \preccurlyeq \rangle$ es una ordenación total, hay un isomorfismo de $\langle H, \preccurlyeq \rangle$ con $\langle \{1, 2, ..., n\}, \leqslant \rangle$, es decir, una función biyectiva f: $H \to \{1, 2, ..., n\}$, tal que para cada $X, Y \in H$:

$$X \preccurlyeq Y \Leftrightarrow f(X) \leqslant f(Y)$$

Esta función está unívocamente determinada y constituye el rango. Para cualquier $X \in H$:

4.3 $$\text{rango}\,(X) = f(X)$$

Naturalmente esta definición sólo vale para jerarquías finitas, es decir, con un número finito de particiones o categorías, que son las que se usan en la ciencia. Si quisieran considerarse también jerarquías infinitas, bastaría con tomar segmentos iniciales cualesquiera de la clase Ω de todos los ordinales, en vez de segmentos iniciales de $\mathbb{N}$, como hemos hecho aquí.

El rango de una categoría o partición de una jerarquía taxonómica es un número natural. Cuanto menor es el rango, tanto mayores la finura de la partición. Para cualesquiera particiones X, Y de una jerarquía H:

4.4 $$X \leqslant Y \Leftrightarrow \text{rango}\,(X) \leqslant \text{rango}\,(Y)$$

También se suele decir que un taxón tiene rango, a saber, el rango de la categoría a la que ese taxón pertenece. Así, en la jerarquía taxonómica linneana, el género *Apis* tiene rango 2, es decir, el género *Apis* pertenece a la categoría *género*, que es la que propiamente tiene rango 2.

La paradoja de Gregg

Los biólogos clasifican los organismos en taxones de diverso rango. Normalmente los taxones de rango superior incluyen varios taxones de cada rango inferior y, por ello, tienen más miembros que ellos y son extensionalmente distintos de ellos. Así, por ejemplo, la clase *Insecta* incluye muchos otros órdenes, además de *Hymenoptera;* el orden *Hymenoptera* incluye otras muchas familias, además de *Apidae.* La familia *Apidae* incluye otros géneros, además de *Apis,* etc. Así pues, el caso normal consiste en que un taxón de cierto nivel es un subconjunto propio de otro taxón de nivel superior, pero no coincide con él. Estos taxones normales, que incluyen varios taxones de nivel inferior dado, se llaman taxones politípicos. Sin embargo, no todos los taxones son politípicos, también los hay monotípicos. Veamos algunos ejemplos.

Los botánicos clasifican las plantas del modo ya indicado, en especies, géneros, familias, órdenes, etc. Asi los ginkgos, los conocidos árboles procedentes de la China con hoja en forma de abanico, pertenecen a la especie *Ginkgo biloba,* al género *Ginkgo,* a la familia *Ginkgoaceae* y al orden *Ginkgoales.* Pero todos esos taxones, de diferente rango, contienen exactamente los mismos individuos: los ginkgos. El orden *Ginkgoales* incluye una sola familia, que incluye un solo género, que posee una sola especie. Todos esos taxones son monotípicos.

Los ornitólogos clasifican las aves dentro de las categorías de la jerarquía linneana. Los kiwis, primitivas aves sin alas típicas de Nueva Zelanda, son los únicos animales pertenecientes al género *Apteryx,* a la familia *Apterygidae* y al orden *Apterygiformes,* que, por tanto, son taxones monotípicos. El orden *Apterygiformes* contiene una sola familia, *Apterygidae,* que a su vez incluye un solo género, *Apteryx,* el cual, sin embargo, se subdivide en 3 especies distintas.

Los ornitorrincos son unos primitivos mamíferos australianos y los zoólogos los agrupan en una sola especie, *Ornithorhynchus anatinus,* que es la única de que consta el género *Ornithorhynchus,* que a su vez es el único incluido en la familia de los *Ornithorhynchidae.* Los tres taxones mencionados son, por tanto, monotípicos.

Los oricteropos o cerdos hormigueros son unos mamíferos africanos de largo morro cilíndrico y poderosas patas delanteras, que les sirven para excavar la tierra. Los zoólogos los clasifican en una sola especie, *Orycteropus afer,* que es la única de que consta el género *Orycteropus,* que a su vez es el único que está incluido en la familia *Orycteropodidae* y en el orden *Tubulidentata.* Todos estos taxones son también monotípicos.

Si los taxones de la clasificación biológica son conjuntos, entonces los taxones monotípicos (que tienen los mismos elementos) han de ser idénticos, pues dos conjuntos con los mismos elementos son el mismo conjunto. Pero los biólogos sistemáticos, que establecen las clasificaciones, piensan que una especie es siempre algo muy distinto de una familia, por ejemplo. Por tanto, aunque una familia y una especie tengan los mismos elementos (organismos), serán taxones distintos. El primero que se dio cuenta de esta dificultad fue John R. Gregg, y desde entonces se conoce como la paradoja de Gregg.

Desde 1954, en que Gregg[4] llamó la atención sobre la paradoja que lleva su nombre, se han propuesto diversos intentos de solución.

En 1957 Parker-Rhodes[5] propuso definir un taxón superior no como un conjunto de individuos (es decir, de organismos), sino como el conjunto de sus taxones inmediatamente inferiores. Con esto se soluciona la paradoja de Gregg, pero se aparta uno también de la noción intuitiva de taxón. Así un taxón de clase ya no sería un conjunto de organismos, sino un conjunto de órdenes. No podríamos seguir diciendo que este gato es un mamífero. La solución resulta insatisfactoria.

En 1964 A. Sklar[6] propuso añadir a las n particiones de una jerarquía H n conjuntos (disjuntos con $\bigcup H$, por ejemplo, conjuntos de números naturales) $G_1, ..., G_n$, tales que para cada i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$: $G_i \subseteq G_j$, pero $G_j \nsubseteq G_i$, de tal modo que cada taxón X de rango k deviniese $X \cup G_k$... Así (para retomar nuestro último ejemplo de taxones monotípicos), la especie *Orycteropus afer* devendría {oricteropos} ∪ {1}, el nuevo género *Orycteropus* sería {oricteropos} ∪ {1, 2}, la nueva familia *Orycteropodidae* sería {oricteropos} ∪ {1, 2, 3} y el orden *Tubulidentata* sería {oricteropos} ∪ {1, 2, 3, 4}. Con esto se soluciona la paradoja de Gregg, pues cada taxón es distinto de sus correspondientes toxones superiores y está incluido en ellos. Se trata de un truco técnico formalmente correcto, pues se conservan las relaciones de per-

[4] John R. Gregg: *The Language of Taxonomy*, Columbia University Press, Nueva York, 1954.

[5] A. F. Parker-Rhodes: «Review of The Language of Taxonomy», *Philosophical Review*, 66, 1957.

[6] Abe Sklar: «On Category Overlapping in Taxonomy». Incluido en *Form and Strategy in Science* (editado por J. R. Gregg y F. T. Harris), Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1964.

tenencia de los organismos a los taxones (en este sentido es un progreso respecto a la solución de Parker-Rhodes) y las de inclusión entre taxones, al tiempo que se distinguen los taxones monotípicos de distinto rango (que se diferencian ahora por poseer algún número más o menos). Pero resulta artificioso concebir los taxones como conjuntos de algo más que de organismos, y resulta insatisfactorio decir que el número 1 es un cerdo hormiguero.

En 1966 R. C. Buck y D. L. Hull[7] propusieron definir intensionalmente, mediante listas de propiedades, los taxones, de tal modo que se exigieran más propiedades para la pertenencia a los taxones de menor rango. Pero aquí hay una cierta confusión, pues los taxones siguen siendo considerados como conjuntos, es decir, como entidades extensionales. Y dos conjuntos que tienen los mismos elementos son idénticos, cualquiera que sea el camino que sigamos para definirlos.

En 1969 propuso N. Jardine[8] la primera solución satisfactoria de la paradoja de Gregg, que consistía en definir un taxón T como un par ordenado $\langle D, r\rangle$, donde D es la extensión del taxón y r es su rango. Así, aunque T_1, T_2 y T_3 sean taxones monotípicos (es decir, de igual extensión, D) de distinto rango (es decir, de rango r_1, r_2, r_3, donde $r_1 \neq r_2 \neq r_3$), sin embargo, son distintos taxones, pues $\langle D, r_1\rangle \neq \langle D, r_2\rangle \neq \langle D, r_3\rangle$.

Desde un punto de vista intuitivo, lo más satisfactorio es considerar los taxones como conjuntos de organismos. El problema de Gregg puede resolverse (o, mejor dicho, disolverse) por el trivial expediente de distinguir los taxones a secas, que serán meros conjuntos de organismos, de los taxones jerarquizados, que serán pares ordenados de taxones a secas y rangos. Por tanto dos taxones monotípicos coinciden en cuanto taxones a secas (son el mismo conjunto de organismos), pero difieren en cuanto taxones jerar-

[7] Roger C. Buck y David L. Hull: «The Logical Structure of Linnaean Hierarchy», *Systematic Zoology*, 15, 1966.

[8] Nicholas Jardine: «A Logical Basis for Biological Classification», *Systematic Zoology*, 18, 1969.

quizados (pues poseen rango distinto). Y el que los consideremos de un modo u otro depende de nosotros, no de ellos.

Superposición de particiones

Frecuentemente obtenemos nuevas e interesantes particiones superponiendo dos particiones que ya teníamos. La nueva partición así obtenida es más fina que ambas y recoge todas las distinciones hechas por cualquiera de ellas. Si Q y G son particiones de A, una manera usual de representar la superposición de Q y G consiste en dibujar una tabla cuyas filas corresponden a los taxones de Q y cuyas columnas corresponden a los taxones de G. Los cuadros o casillas de la tabla representan entonces la nueva partición, que es la superposición de las dos anteriores. Por ejemplo, sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $Q = \{Q_1, Q_2\}$, donde $Q_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $Q_2 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, y $G = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$, donde $G_1 = \{0\}$, $G_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $G_3 = \{2, 4\}$ y $G_4 = \{6, 8\}$. La tabla

		G			
		G_1	G_2	G_3	G_4
Q	Q_1	0	1, 3	2, 4	
	Q_2		5, 7, 9		6, 8

representa la superposición de Q y G. Esta superposición, $\{\{0\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 7, 9\}, \{6, 8\}\}$, es ella misma una nueva partición de A. Las casillas vacías de la tabla no forman parte de la superposición de Q y G, pues queremos que ésta sea una partición, y una partición es una colección de clases no vacías.

La superposición de particiones para la producción de nuevas particiones ocurre en casi todas las ciencias, aunque no ha solido ser analizada[9]. En fonología, por ejemplo, la partición de las consonantes por su punto de articulación (en labiales, labiodentales, interdentales, alveolares, etc.) se superpone con frecuencia con la partición de las consonantes por su modo de articulación (en oclusivas, fricativas, africadas, vibrantes, etc.) para así producir una nueva partición o clasificación de las consonantes, que es más fina y más informativa que cualquiera de las otras dos, tomadas por separado. No todos los ejemplos son tan triviales como éste. Uno de los más potentes resultados teóricos de la química, la tabla periódica de los elementos, es la partición de los elementos químicos que resulta de la superposición de la partición de los elementos químicos en grupos (en gases inertes, metales alcalinos, etc.) y de la partición de los elementos químicos en períodos. El hecho de que la mayoría de los taxones de la partición resultante contienen un solo miembro, mientras que dos de ellos tienen quince, complica la representación gráfica de la tabla, pero es evidente que se trata de una superposición de dos particiones dadas. Otro ejemplo teóricamente fecundo de superposición de particiones, esta vez proveniente de la astronomía, está constituido por el diagrama de Hertzsprung-Russell, que es la partición de las estrellas que resulta de la superposición de la partición de las estrellas en clases espectrales y de la partición de las estrellas en magnitudes absolutas.

La superposición o producto de dos particiones P y Q del mismo dominio A, que simbolizaremos mediante $P \otimes Q$, consiste en la clase de todas las intersecciones no vacías de taxones de P con taxones de Q. La operación $\otimes$ de superposición se define así:

6.1 $\quad P \otimes Q = \{Z \mid \exists X \in P \exists Y \in Q (Z = X \cap Y \wedge Z \neq \varnothing)\}$

A partir de esta definición se puede probar que la superposición de dos particiones de A es siempre a su vez una partición de A, que $\otimes$ conduce de particiones de A a particiones de A.

[9] Kirkhoff y Domotor definieron operaciones de producto y suma de particiones, equivalentes a las de superposición y fusión aquí introducidas.

6.2 $$\otimes : \text{Part}_A \times \text{Part}_A \to \text{Part}_A$$

Prueba. Sean P y Q particiones de A. Hemos de probar que $P \otimes Q$ es también una partición de A, lo cual a su vez nos obliga a pasar revista a las 4 condiciones de la definición de partición. (1) $P \otimes Q \subseteq \mathscr{P}A$. En efecto, cada elemento de $P \otimes Q$ es la intersección de dos subconjuntos de A y, por tanto, es él mismo un subconjunto de A. (2) $\varnothing \notin P \otimes Q$, por definición de $P \otimes Q$. (3) $\bigcup (P \otimes Q) = A$. Sea $a \in \bigcup (P \otimes Q)$. Para algún $Z \in P \otimes Q$, $a \in Z$. Para algún $X \in P$ y algún $Y \in Q$, $Z = X \cap Y$. Luego $a \in X \cap Y$, $a \in X$, y (puesto que $X \subset A$, ya que $X \in P$ y P es una partición de A) $a \in A$. Por tanto $\bigcup (P \otimes Q) \subseteq A$. Sea ahora $b \in A$. Puesto que P y Q son particiones de A, $b \in d_P(b)$ y $b \in d_Q(b)$, por tanto $b \in d_P(b) \cap d_Q(b)$ y por consiguiente, para algún $X \in P$ (a saber, $d_P(b)$) y algún $Y \in Q$ (a saber, $d_Q(b)$), $b \in X \cap Y$. Pero este $X \cap Y$, que no es vacío, pues tiene b como elemento, es un miembro de $P \otimes Q$, por definición de $P \otimes Q$. Luego $b \in \bigcup (P \otimes Q)$. Por tanto $A \subseteq \bigcup (P \otimes Q)$. Con lo que queda probado que $\bigcup (P \otimes Q) = A$. (4) Si $X \in P \otimes Q$, $Y \in P \otimes Q$ y $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \varnothing$. Sea $X \in P \otimes Q$ y $Y \in P \otimes Q$. Entonces habrá $X_1, Y_1 \in P$ y $X_2, Y_2 \in Q$, tales que $X = X_1 \cap X_2$ e $Y = Y_1 \cap Y_2$. Si $X \cap Y \neq \varnothing$, entonces $X_1 \cap X_2 \cap Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$, con lo que $X_1 \cap Y_1 \neq \varnothing$ y $X_2 \cap Y_2 \neq \varnothing$, y, por tanto, $X_1 = Y_1$ y $X_2 = Y_2$ (pues P y Q son particiones), y, por consiguiente, $X = Y$. Luego si $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \varnothing$, que es lo último que quedaba por demostrar.

La operación $\otimes$ de superposición es asociativa, conmutativa e idempotente, es decir, para cualesquiera particiones P, Q, G del mismo dominio:

6.3 $$(P \otimes Q) \otimes G = P \otimes (Q \otimes G)$$

6.4 $$P \otimes Q = Q \otimes P$$

6.5 $$P \otimes P = P$$

El semigrupo $\langle \mathrm{Part}_A, \otimes \rangle$ tiene un elemento absorbente, Sng_A, y un elemento neutro, $\{A\}$, es decir, para cada partición P de A:

6.6 $$P \otimes \mathrm{Sng}_A = \mathrm{Sng}_A$$

6.7 $$P \otimes \{A\} = P$$

¿Es la superposición de dos particiones siempre comparable con ellas respecto a finura? Sí. La superposición es siempre más o igual de fina que cada una de las particiones superpuestas. Para cualesquiera particiones P, Q, de A:

6.8 $$P \otimes Q \leqslant P; \qquad P \otimes Q \leqslant Q$$

De aquí se sigue como corolario que la cardinalidad (el número de miembros) de la superposición es igual o mayor que la de las particiones superpuestas:

6.9 $$|P \otimes Q| \geqslant |P|; \qquad |P \otimes Q| \geqslant |Q|$$

¿Es el semigrupo $\langle \mathrm{Part}_A, \otimes \rangle$ un grupo? No, no lo es. Si A tiene al menos 2 elementos, entonces $\langle \mathrm{Part}_A, \otimes \rangle$ no es un grupo, pues no puede haber una formación de inverso. En efecto, si A tiene 2 o más elementos, siempre habrá particiones de A que tengan 2 o más miembros. Sea Q una de ellas. Si $\langle \mathrm{Part}_A, \otimes \rangle$ fuera un grupo, tendría que haber un inverso de Q, es decir, una partición Q' de A, tal que $Q \otimes Q' = \{A\}$. Pero entonces $2 \leqslant |Q| \leqslant |Q \otimes Q'|$, por el corolario 6.9. Pero $|Q \otimes Q'| = |\{A\}| = 1$. De donde se sigue que $2 \leqslant 1$. Esta contradicción muestra que no puede haber un inverso de Q y que, por tanto $\langle \mathrm{Part}_A, \otimes \rangle$ no es un grupo.

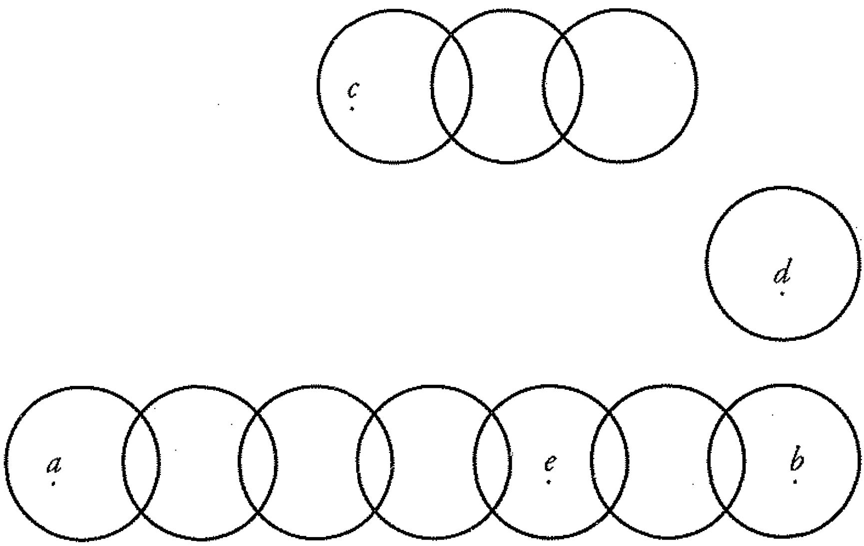
La superposición de dos particiones sólo es fecunda o interesante cuando ambas particiones superpuestas son incomparables. Sólo en ese caso se genera una partición nueva. Si las dos particiones superpuestas son comparables, su superposición se limita a reproducir la más fina de ellas. Sean P, Q particiones de A.

6.10 $$P \preccurlyeq Q \Rightarrow P \otimes Q = P$$

Prueba. Supongamos que $P \preccurlyeq Q$. Sea $Z \in P \otimes Q$. Entonces (por 6.1) hay un $X \in P$ y un $Y \in Q$, tales que $Z = X \cap Y$ y $Z \neq \emptyset$. Por 3.2 y puesto que $P \preccurlyeq Q$, tenemos que $X \subseteq Y \vee X \cap Y = \emptyset$. Pero $X \cap Y = Z \neq \emptyset$. Luego $X \subseteq Y$. Por tanto, $X \cap Y = X$ y, teniendo en cuenta que $Z = X \cap Y$, tenemos que $Z = X$. Luego $Z \in P$, pues $X \in P$. Así pues, $P \otimes Q \subseteq P$. Sea $Z \in P$. Entonces (por 3.1) hay un $Y \in Q$ tal que $Z \subseteq Y$. Luego $Z = Z \cap Y$ y, además, $Z \neq \emptyset$, ya que $Z \in P$ y P es una partición. Luego $Z \in P \otimes Q$, por 6.1. Así pues, $P \subseteq P \otimes Q$. En resumen, $P \otimes Q = P$.

Fusión de particiones

Sea G un conjunto de subconjuntos de A, es decir, $G \subseteq \mathcal{P}A$. Decimos que un individuo cualquiera $a \in A$ es G-conectable con otro individuo $b \in A$ si podemos pasar de un conjunto de G que contiene a a otro conjunto de G que contiene b a través de una serie de conjuntos no disjuntos intermedios. En la figura siguiente los círculos representan conjuntos de G.



Mirando la figura, diremos que *a* es conectable con *b* y con *e*, pero no con *c* o con *d*. Simbolicemos mediante K_G la relación de *G*-conectabilidad. Sea $G \subset \mathcal{P}A$. Sean $a, b \in A$. Definimos:

7.1 $$aK_Gb \Leftrightarrow \exists Z_1 \ldots Z_n \in G(a \in Z_1 \wedge b \in Z_n \wedge Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing \wedge \ldots \wedge Z_{n-1} \cap Z_n \neq \varnothing)$$

Sea *G* un recubrimiento de *A*. Está claro que la relación K_G de *G*-conectabilidad es reflexiva, simétrica y transitiva en *A*. Para cualquier recubrimiento *G* de *A*:

7.2 K_G es una relación de equivalencia en *A*.

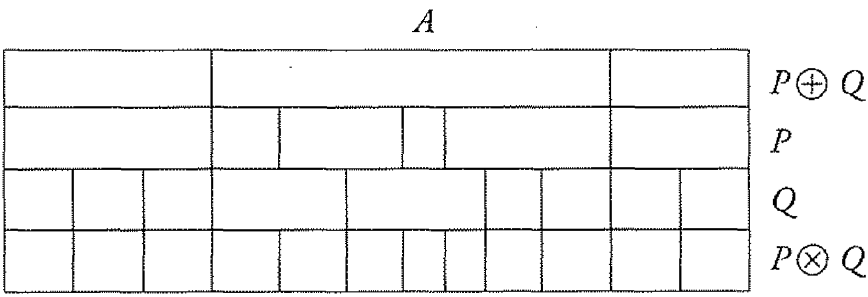
Consideremos ahora dos particiones cualesquiera de *A*, por ejemplo *P* y *Q*. Evidentemente la unión $P \cup Q$ será un recubrimiento de *A* y $K_{P \cup Q}$ será una relación de equivalencia en *A*. La relación $K_{P \cup Q}$ de $P \cup Q$-conectividad es la relación de equivalencia en que están dos elementos cualesquiera de *A* si y sólo si es posible conectar el uno con el otro a través de una serie de taxones solapantes de entre los pertenecientes a cualquiera de las dos particiones *P* o *Q*. Como ya vimos, toda relación de equivalencia en *A* induce una partición de *A*, a saber, el espacio cociente de *A* por esa relación. Esto nos permite definir una nueva operación entre particiones, a la que llamaremos fusión o suma y a la que simbolizaremos por «$\oplus$». Sean *P* y *Q* particiones de *A*. Definimos:

7.3 $$P \oplus Q = A/K_{P \cup Q} = \{x_{K_{P \cup Q}} \mid x \in A\}$$

De esta definición de $P \oplus Q$ como espacio cociente de *A* por una relación de equivalencia se sigue por 2.6 que $\oplus$ es una operación que lleva de particiones de *A* a particiones de *A*, es decir, que la fusión de dos particiones siempre es de nuevo una partición.

7.4 $$\oplus : \mathrm{Part}_A \times \mathrm{Part}_A \rightarrow \mathrm{Part}_A$$

Quizá no esté de más tratar de captar intuitivamente la diferencia entre la superposición y la fusión de particiones. Dadas dos particiones P y Q del mismo dominio A, su superposición $P \otimes Q$ es la partición que hace todas (y solas) las distinciones que hacen P o Q, mientras que su fusión $P \oplus Q$ es la partición que hace sólo aquellas distinciones comunes a P y Q. El siguiente cuadro puede ayudar a visualizar estas operaciones. Se trata de partir el conjunto A de los puntos de la línea horizontal dibujada. Las particiones P, Q, $P \otimes Q$ y $P \oplus Q$ de A se representan mediante filas de casillas.



La operación $\oplus$ de fusión es asociativa, conmutativa e idempotente, es decir, para cualesquiera particiones P, Q, G del mismo dominio:

7.5 $$(P \oplus Q) \oplus G = P \oplus (Q \oplus G)$$

7.6 $$P \oplus Q = Q \oplus P$$

7.7 $$P \oplus P = P$$

Como fácilmente se comprueba, cada una de las operaciones de superposición y fusión es absorbente respecto a la otra, es decir, para cualesquiera particiones P y Q del mismo dominio:

7.8 $$P \otimes (P \oplus Q) = P; \qquad P \oplus (P \otimes Q) = P$$

Hemos definido la operación de fusión de dos particiones de A como el espacio cociente de A por la relación de conectabilidad en la unión de ambas particiones. Ahora presentamos otra manera (equivalente) de definir la fusión de dos particiones.

Cuando fusionamos dos particiones, juntamos en un solo taxón todos los taxones de ambas particiones que son comunicables entre sí por un camino de taxones no disjuntos. La noción intuitiva de camino puede precisarse mediante una función numérica que oscila entre taxones comunicados (no disjuntos) de ambas particiones. Dos taxones son comunicables si hay un camino de uno al otro. Un grupo máximo de taxones comunicables forman una isla. Y la fusión de ambas particiones es precisamente el conjunto de esas islas, que forman una nueva partición. Las siguientes definiciones precisan esta caracterización de la fusión.

Un *camino* en dos particiones P y Q es una función f: $\mathbb{N} \rightarrow P \cup Q$, tal que $f(n) \in P$ si n es par, $f(n) \in Q$ si n es impar, y para todo n: $f(n) \cap f(n+1) \neq \emptyset$.

Un taxón $Z \in P \cup Q$ es *comunicable* (respecto a las particiones P y Q) con otro taxón $W \in P \cup Q$ si y solo si existe un camino f en P y Q, y números n, $m \in \mathbb{N}$, tales que $f(n) = Z$ y $f(m) = W$.

Dado un taxón $Y \in P \cup Q$, la *isla* de Y (respecto a las particiones P y Q) es la unión de todos los taxones comunicables con Y.

$$\text{Isla}\ (Y) = \bigcup\{Z \mid Z \in P \cup Q \wedge Z \text{ es comunicable con } Y\}$$

Con esto estamos en posición de ofrecer la definición alternativa de fusión [10]. Para cualesquiera particiones P, Q:

$$P \oplus Q = \{\text{Isla}\ (Z) \mid Z \in P \cup Q\}$$

El retículo de las particiones

El hecho de que las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ tengan las propiedades aquí señaladas indica que el conjunto de las particiones a A consti-

[10] La introducción de la noción de fusión de particiones y las dos definiciones (la 7.3 y ésta) de esta operación aquí presentadas se deben a Enrique Casanovas.

tuye de algún modo un retículo. En efecto, así es. Ya habíamos visto que $\langle \mathrm{Part}_A, \leqslant \rangle$ constituía una ordenación parcial. Un retículo es una ordenación parcial en la que cada par de elementos posee un ínfimo (una máxima cota inferior) y un supremo (una mínima cota superior). Ahora bien, dadas dos particiones cualesquiera de A, por ejemplo P y Q, su ínfimo es precisamente su superposición, $P \otimes Q$, y su supremo es precisamente su fusión, $P \oplus Q$. Por tanto, $\langle \mathrm{Part}_A, \leqslant, \otimes, \oplus \rangle$ constituye un retículo. Probémoslo.

Como ya habíamos visto en 6.8, para cualesquiera particiones P, Q de A:

8.1 $$P \otimes Q \leqslant P; \qquad P \otimes Q \leqslant Q$$

Por tanto, $P \otimes Q$ es una cota inferior de P y Q. Para demostrar que es el ínfimo de P y Q aún nos queda por probar que $P \otimes Q$ es la máxima de sus cotas inferiores. Sean P y Q particiones de A:

8.2 $$\forall G \in \mathrm{Part}_A (G \leqslant P \wedge G \leqslant Q \Rightarrow G \leqslant P \otimes Q)$$

Prueba. Sea G una partición de A, tal que $G \leqslant P$ y $G \leqslant Q$. Tenemos que probar ahora que $G \leqslant P \otimes Q$, es decir, por 3.1, que para cada $X \in G$ hay un $Z \in P \otimes Q$, tal que $X \subseteq Z$. Sea $X \in G$. Puesto que $G \leqslant P$ y $G \leqslant Q$, habrá un $Y \in P$ y un $W \in Q$, tales que $X \subseteq Y$ y $X \subseteq W$. Por tanto, $X \subseteq Y \cap W$. Además, $Y \cap W \neq \varnothing$, pues $X \neq \varnothing$, ya que es un taxón de una partición. Luego hay un Z, a saber $Z = Y \cap W$, tal que $Z \in P \otimes Q$, por 6.1 y $X \subseteq Z$.

De 8.1 y 8.2 se sigue:

8.3 $$\inf\{P, Q\} = P \otimes Q$$

La fusión de dos particiones es una cota superior de ambas particiones. Para cualesquiera particiones P, Q del mismo dominio A:

8.4 $$P \leqslant P \oplus Q; \qquad Q \leqslant P \oplus Q$$

Prueba. Sea $X \in P$ un taxón cualquiera de P. Puesto que $X \neq \emptyset$, hay al menos un elemento en X; llamémoslo a: $a \in X$. Sea x un elemento cualquiera de X. Entonces $x\, K_{P \cup Q}\, a$, por la definición 7.1. Por tanto, $x \in a_{K_{P \cup Q}}$. Así pues, para cualquier $x \in A$ ocurre que $x \in a_{K_{P \cup Q}}$, es decir, $X \subseteq a_{K_{P \cup Q}}$, donde $a_{K_{P \cup Q}} \in P \oplus Q$, por 7.3. En resumen, para cada taxón $X \in P$ hay un taxón $Y \in P \oplus Q$ (a saber, $a_{K_{P \cup Q}}$), tal que $X \subseteq Y$ y, por consiguiente, $P \preccurlyeq P \oplus Q$. De igual modo se prueba $Q \preccurlyeq P \oplus Q$.

Una vez probado que $P \oplus Q$ es una cota superior de P y de Q, para demostrar que es el supremo de P y Q, nos queda por probar que $P \oplus Q$ es la mínima de las cotas superiores de P y Q. Sean P y Q particiones de A.

8.5 $\quad \forall G \in \mathrm{Part}_A (P \preccurlyeq G \wedge Q \preccurlyeq G \Rightarrow P \oplus Q \preccurlyeq G)$

Prueba. Sea G una partición de A, tal que $P \preccurlyeq G$ y $Q \preccurlyeq G$. Tenemos que probar que $P \oplus Q \preccurlyeq G$, es decir, que para cada $X \in P \oplus Q$ hay un $W \in G$, tal que $X \subseteq W$. Sea $X \in P \oplus Q$. $X \neq \emptyset$, pues X es un taxón, y por tanto tendrá al menos un miembro $a \in X$. Puesto que P es una partición de A y $a \in A$, para algún $Y \in P$ ocurre que $a \in Y$. Puesto que $P \preccurlyeq G$, hay un $W \in G$, tal que $Y \subseteq W$ y, por tanto, $a \in W$. Éste es el W que buscábamos. Hemos de probar que $X \subseteq W$. Sea $x \in X$. Hemos de probar que $x \in W$. Puesto que $P \oplus Q$ es un conjunto de clases de equivalencia, por 7.3, y $a \in X \in P \oplus Q$, resulta que $X = a_{K_{P \cup Q}}$. Puesto que $x \in X$, ocurre que $a\, K_{P \cup Q}\, x$. Por tanto, hay taxones $Z_1 \ldots Z_n \in P \cup Q$ tales que $a \in Z_1 \wedge x \in Z_n \wedge Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset \wedge \ldots \wedge Z_{n-1} \cap Z_n \neq \emptyset$, según la definición 7.1. Puesto que $P \preccurlyeq G$ y $Q \preccurlyeq G$, cada taxón de P o de Q está incluido en un taxón de G, por lo que habrá $V_1, \ldots, V_n \in G$, tales que $Z_i \subseteq V_i$ (para $1 \leqslant i \leqslant n$). Como $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ y, por tanto, $V_1 = V_2$, pues G es una partición (y si $V_1 \neq V_2$, entonces $V_1 \cap V_2 = \emptyset$). De igual modo: $V_2 = V_3, \ldots, V_{n-1} = V_n$. Puesto que $a \in W$ y $a \in V_1$ (pues $a \in Z_1$ y $Z_1 \subseteq V_1$), y tanto W como V_1 son taxones de la partición G, $W = V_1$. Así pues, $W = V_1 = V_2 = \ldots = V_n$. Puesto que $x \in Z_n$, $Z_n \subseteq V_n$ y $V_n = W$, resulta que

$x \in W$. Por consiguiente $X \subseteq W$, que es lo que había que probar. Luego $P \oplus Q \preccurlyeq G$.

De 8.4 y 8.5 se sigue:

8.6 $$\sup \{P, Q\} = P \oplus Q$$

De 8.3 y 8.6, y del hecho de que $\langle \mathrm{Part}_A, \preccurlyeq \rangle$ es una ordenación parcial, se sigue que las particiones de un dominio dado A forman un retículo respecto a las operaciones de superposición y de fusión. Para cualquier A:

8.7 $$\langle \mathrm{Part}_A, \preccurlyeq, \otimes, \oplus \rangle \text{ es un retículo}$$

Un retículo es complementario si para cada uno de sus elementos hay al menos un complemento, es decir, otro elemento tal que el ínfimo de ambos es el elemento mínimo de la ordenación parcial correspondiente y el supremo de ambos es el elemento máximo. En el caso particular del retículo de las particiones de A, un complemento de un elemento $a \in A$ es otro elemento $b \in A$, tal que $a \otimes b = \mathrm{Sng}_A$ y $a \oplus b = \{A\}$. De hecho cada partición de A tiene al menos un complemento, aunque no vamos a exponer aquí la prueba, que es un poco complicada. Pero anotamos que:

8.8 $$\langle \mathrm{Part}_A, \preccurlyeq, \otimes, \oplus \rangle \text{ es un retículo complementario}$$

Un álgebra de Boole es un retículo complementario y distributivo. ¿Es el retículo de las particiones de A un álgebra de Boole? No, no lo es, pues no es distributivo. Si fuera distributivo, valdría que para cualesquiera particiones P, Q, G: $P \otimes (Q \oplus G) = (P \otimes Q) \oplus (P \otimes G)$. Consideremos ahora un contraejemplo. Sea $A = \{0, 1, 2\}$, $P = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$, $Q = \{\{0, 1\}, \{2\}\}$, $G = \{\{0, 2\}, \{1\}\}$.

Resulta que:

$$P \otimes (Q \oplus G) = P \otimes \{A\} = P$$

$$(P \otimes Q) \oplus (P \otimes G) = \mathrm{Sng}_A \oplus \mathrm{Sng}_A = \mathrm{Sng}_A$$

Pero

$$\mathrm{Sng}_A = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\} \neq \{\{0\}, \{1, 2\}\} = P$$

Por tanto, el retículo no es distributivo.

En un retículo distributivo cada elemento tiene a lo sumo un complemento. Pero puesto que el retículo de las particiones no es distributivo, una partición puede tener más de un complemento. Y, en efecto, así es. El mismo contraejemplo que acabamos de considerar ejemplifica también esta multiplicidad de complementos, pues tanto Q como G son complementos de P, como fácilmente se comprueba.

CAPÍTULO 4

MEREOLOGÍA, CONJUNTOS Y ONTOLOGÍA BIOLÓGICA

Desde 1974, año de publicación del artículo de M. Ghiselin «Una solución radical al problema de la especie», se ha desatado entre los filósofos de la biología una polémica vigorosa sobre la cuestión de si los taxones biológicos, y en particular las bioespecies (especies de organismos), son clases o individuos. Obviamente no son ninguna de estas cosas, pero la falta de recursos conceptuales adecuados ha tendido a oscurecer la discusión. D. Hull ha mostrado convincentemente que las bioespecies (entidades que nacen, evolucionan y se dividen o se extinguen) no son clases, aunque ha tenido menos éxito en la defensa de su tesis de que las especies son individuos. Diversos filósofos, como A. Rosenberg y M. Williams, han aceptado la posición de Ghiselin y Hull, aunque otros, como P. Kitcher y A. Caplan, mantienen sus dudas. Varios biólogos dedicados a la sistemática, como E. Mayr, N. Eldredge y R. Willmann, también han aceptado la tesis de que las especies son individuos como la única compatible con la teoría darwiniana de la evolución. Otros simpatizan con el fondo de la tesis, pero se resisten a usar la palabra 'individuo' (normalmente reservada a organismos) para referirse a especies.

¿Qué es un individuo?

El universo es un continuo. El mundo al que se confronta nuestra percepción es una realidad continua. Pero el mundo no es perfectamente homogéneo. Presenta todo tipo de junturas, bordes y discontinuidades —algunas graduales, otras abruptas. Una entidad histórica o cosa concreta es simplemente un trozo del mundo, un pedazo de universo, un fragmento de la realidad espaciotemporal.

El mundo es un continuo, pero es demasiado grande y difícil de manejar como para ser tratado como una unidad singular. Parece que nos invita a segmentarlo. Si queremos hablar o pensar con algún detalle acerca de la realidad, tenemos que cortarla o partirla de algún modo. Es algo que hacemos constantemente y con facilidad. Una de las habilidades cognitivas más importantes de los mamíferos es nuestra capacidad de segmentar porciones del mundo como objetos individuales. Desde luego, hay muchas maneras distintas de dividir el mundo. Un in-dividuo es un trozo del mundo al que decidimos no dividir.

Para identificar una porción del mundo como una cosa concreta es útil (y a veces imprescindible) hacer uso del espaciotiempo como marco de referencia. Un individuo ocupa una región del espaciotiempo. Si dos presuntos individuos coinciden espaciotemporalmente, son el mismo individuo. Y si no se solapan completamente, son individuos distintos.

En el sentido menos exigente de «individuo», podemos decir que hay tantos individuos como regiones espaciotemporales no vacías del universo: muchísimos. Los individuos en este amplísimo sentido son los individuos *arbitrarios*. Basta, pues, con especificar cualquier región espacio-temporal no vacía para atrapar a un individuo (en este sentido tan tenue de la palabra).

Cualquier región del espaciotiempo determina un individuo arbitrario, pero, desde luego, algunos individuos son menos arbitrarios (o más naturales) que otros. La Luna entera es un individuo más natural que la región consistente en el hemisferio norte de la

Luna, la corona solar durante el año 1501 y mi nariz a partir de hoy. ¿Por qué? Si preguntamos por los criterios de naturalidad, podemos apelar a condiciones como la continuidad, la cohesión, la interacción y la delimitación o confinamiento [1].

Si miramos la superficie terrestre desde arriba, una isla se nos aparece como una cosa continua, un archipiélago como una cosa dispersa. En el espacio un planeta es un objeto continuo, mientras que un sistema planetario es una cosa dispersa. En los países secos, el agua sólo fluye en los cauces de los ríos durante la estación de las lluvias. Tales ríos son sistemas dispersos en el tiempo, mientras que los ríos que fluyen continuamente son individuos continuos.

Una región *continua* del espaciotiempo es una porción del espaciotiempo cuyos puntos forman un conjunto conectado, es decir, tal que es posible alcanzar cualquier punto de la región desde cualquier otro punto de la región a través de un camino continuo de puntos de la región. Nada impide que un individuo continuo pueda tener «burbujas» en su interior, como el queso de Emmental. Sobre la superficie de la Tierra los océanos forman un sistema continuo (del que los continentes son «burbujas»), mientras que los continentes sólo forman un sistema disperso (no es posible llegar de Australia a América por un camino continental). Una cosa *dispersa* es una cosa que no es continua. Un objeto disperso puede ser continuo en el espacio, pero no en el tiempo (como el río que fluía por el mismo cauce, pero sólo intermitentemente, en la estación de las lluvias); o puede ser continuo en el tiempo, pero no en el espacio (como el sistema solar); o puede ser discontinuo tanto en el tiempo como en el espacio (como el follaje de un árbol caducifolio). Un individuo concreto es espacio-temporalmente conectado, pero no necesita ser continuo en el espacio todo el tiempo. La explosión de una granada o una luminaria de fuegos artificiales o un pólipo con sus medusas son también individuos continuos. Quizá lo sea también el universo entero. Si, además, el individuo es espacialmente conectado en cada instante de su duración temporal,

[1] Compárese Mishler y Brandon, 1987.

decimos que es fuertemente continuo. Si no, que sólo es débilmente continuo.

Un individuo paradigmático es fuertemente continuo. Si no, nos sentimos inclinados a decir que no es un in-dividuo, sino un dividuo. Individuos dispersos son realmente dividuos. Grupos de gente, poblaciones, bioespecies, archipiélagos, cúmulos de galaxias y otros sistemas similares son cosas concretas, entidades históricas, pero más bien dividuos que individuos.

Si un individuo es continuo o disperso depende, al menos parcialmente, de la escala usada en la descripción. Para poder decir que el sistema es continuo, ha de ser continuo a alguna escala. Desde luego, en el caso de los individuos de nuestra experiencia cotidiana, la escala mesoscópica es la apropiada. ¿Es una galaxia un individuo continuo o una entidad dispersa? ¿Y un átomo? ¿Y la proyección de un filme? Todo depende de la escala espaciotemporal considerada. Una dificultad a tener en cuenta en la identificación de los individuos con las regiones continuas del espaciotiempo es el hecho de que muchos sistemas que a primera vista parecen individuos, como un átomo o una galaxia, son estructuras casi completamente vacías. Por ejemplo, casi toda la masa del átomo está concentrada en su núcleo, que sólo ocupa una minúscula fracción de 10^{-12} del volumen del átomo.

Un individuo no necesita ser una entidad monolítica y homogénea. Con frecuencia podemos discernir otros individuos que son partes suyas. Una página es una parte del libro, una hoja es una parte del árbol, una estrella es parte de la galaxia, mi pie derecho es parte del individuo arbitrario formado por mi pie derecho y la estrella Alpha Centauri. Este último individuo (el formado por mi pie derecho y la estrella Alpha Centauri) carece de toda cohesión, sus dos partes constituyentes son completamente heterogéneas y no tienen nada que ver la una con la otra. Las estrellas de la galaxia, por el contrario, se mantienen unidas por la fuerza de la gravedad que cada una de ellas ejerce sobre todas las demás. Y la hoja está íntimamente conectada con el resto del árbol en aspectos importantes, histórica, anatómica y funcional-mente. La galaxia tiene cierta cohesión y el árbol es un individuo claramente cohesivo.

Un todo es *cohesivo* si todas sus partes se mantienen juntas, por alguna característica integradora o por alguna fuerza que las junta. Las partes del todo cohesivo se resisten a separarse, hay una adherencia y continuidad cualitativa entre ellas, como si tuvieran que estar juntas. Esta caracterización es demasiado vaga, pero en muchas situaciones concretas la noción de cohesión es muy intuitiva. Aunque en este momento hay una continuidad espacial entre mi brazo y la mesa, el individuo formado por ambos (mi brazo y la mesa) carecería de cohesión alguna. Mi brazo es cohesivo, consta de tejidos animales ensamblados de tal manera que trabajan conjuntadamente. La mesa también es cohesiva, hecha toda ella de madera y diseñada para proporcionar una superficie práctica para escribir. Aunque en este momento mi brazo está al menos tan en contacto con la mesa como con el resto de mi cuerpo, mi cuerpo entero tiene una cohesión interna de la que carece por completo el individuo formado por mi brazo y la mesa.

A veces tenemos la impresión intuitiva de que un objeto es cohesivo por la interacción que observamos entre sus partes. Cuando un contenedor cargado con mercancías heteróclitas es transportado por un camión, las partes del camión (motor, eje, ruedas, frenos, batería...) interactúan de un modo sincronizado de tal modo que el camión entero se mueve. Las mercancías en el contenedor, sin embargo, no interactúan de ningún modo interesante. Por tanto, el camión es un individuo interactivo, mientras que el individuo formado por los contenidos del contenedor es un individuo inerte. Un individuo es *interactivo* si sus diferentes partes se afectan unas a otras y trabajan coordinadamente para llevar a cabo cierta función (intrínseca, como la supervivencia del organismo, o extrínseca, como la locomoción del camión).

La *delimitación* o confinamiento es la cualidad de estar bien delimitado o circunscrito en el espaciotiempo, de tener bordes o fronteras nítidos y bien definidos. Es lo contrario de ser difuso o indefinido en extensión.

El trozo del universo que es un individuo ocupa una región del espaciotiempo. Cualquier región está definida por sus fronteras. Un individuo debe tener bordes espaciales y temporales. Estas fronteras pueden ser intrincadas o simples, difusas o precisas, ocultas o conspicuas, arbitrariamente trazadas o naturales. Muchos individuos naturales poseen capas específicas que marcan físicamente sus fronteras, como ocurre con la pared bacteriana, la membrana nuclear del núcleo de la célula eucariota, la piel de la rana o la del elefante, que son fronteras, respectivamente, de la bacteria, del núcleo, de la rana o del elefante.

El océano tiene fronteras relativamente nítidas: el suelo rocoso del fondo del océano y la superficie del mar. La atmósfera terrestre o la corona solar tienen fronteras superiores muy difusas. En general, la cuestión de si los bordes de un individuo son nítidos o difusos depende también parcialmente de la escala de observación o descripción.

¿Qué es un conjunto?

Una vez que hemos fragmentado el mundo de cualquier manera que queramos, contemplamos los innumerables fragmentos y nos sentimos abrumados por la inmensa multiplicidad que hemos introducido. Para muchos propósitos, nos gustaría volver a reunir algunos de esos fragmentos y juntarlos de nuevo. Cuando un jarro cerámico cae al suelo y se rompe físicamente en muchos fragmentos, podemos recoger físicamente todos esos fragmentos en una bolsa. Sin embargo, cuando fragmentamos el mundo, distinguiendo en él partes o individuos, la operación es puramente mental. No cortamos nada físicamente.

Según Cantor, un conjunto es una colección (*Zusammenfassung*). Cuando coleccionamos objetos en un conjunto, no es necesario reunirlos en una bolsa. Basta con considerarlos juntos, con representarlos juntos, con enfocar nuestra atención en ellos conjuntamente. Como la fragmentación del mundo en individuos, la colección de los fragmentos en clases también es una operación mental o representacional. Como escribe Kitcher, «coleccionar ciertos objetos es representárselos juntos» [2].

Hay tres maneras principales de reunir cosas en conjuntos: (1) mediante una lista de los elementos del conjunto; (2) mediante una condición necesaria y suficiente de pertenencia al conjunto; y (3) mediante una definición recursiva.

Mediante una *lista* podemos coleccionar cualquier número finito de individuos para los que tengamos un nombre o denominación. No se requiere que esos individuos interactúen entre sí, ni que tengan nada en común, aparte del mero hecho de tener sus nombres en la lista. (En la Roma clásica las clases sociales estaban caracterizadas exactamente por la lista completa o censo de sus miembros, preservada y puesta al día por los censores.) Un conjunto introducido mediante una lista es una mera y nuda colección, cuyos miembros no necesitan compartir propiedad o relación alguna (aparte de la de figurar en la lista).

Mediante una *condición necesaria y suficiente* de pertenencia podemos coleccionar cualquier número (finito o infinito) de objetos que sean similares en el sentido de compartir una cierta propiedad común —la propiedad o complejo de propiedades expresada en la condición definitoria. No necesitamos disponer de nombres o denominaciones para esos objetos. Basta con que tengan la propiedad común mencionada. Un conjunto introducido mediante una condición necesaria y suficiente es un *tipo*. Un tipo tiene una definición (la condición definitoria) y una esencia (las consecuencias de la definición). Todos sus miembros comparten tanto la propiedad definitoria como cuantas otras propiedades se sigan de ella.

La manera recursiva de coleccionar las cosas es de algún modo intermedia entre la lista y la condición. En una *definición recursiva* primero hacemos referencia a uno o varios individuos iniciales y luego definimos una cierta relación de descendencia, de tal modo que los elementos del conjunto son los descendientes del (o de los)

[2] Kitcher, 1984, p. 129.

individuo(s) inicial(es) por esa relación. Empezamos por indicar cierto individuo inicial o cierto grupo previamente especificado de individuos iniciales. Luego introducimos una relación binaria de descendencia, de tal modo que cuantos objetos estén en la extensión transitiva de esa relación con el (o con los) individuo(s) inicial(es) sean coleccionados en el conjunto. El conjunto así definido recursivamente es el mínimo conjunto que incluye a los individuos iniciales y está clausurado respecto a la relación binaria de descendencia. Como en el caso de la lista, los individuos así coleccionados no necesitan compartir ninguna propiedad específica. Todo lo que necesitan compartir es cierta relación (la extensión transitiva de la de descendencia) con los elementos iniciales. Como en el caso de la condición necesaria y suficiente, no es necesario disponer de nombres para los objetos así coleccionados. Un conjunto introducido recursivamente de objetos así interrelacionalados constituye un *linaje*. Si el linaje es finito, puede representarse mediante un árbol o diagrama genealógico.

La teoría de conjuntos trata de conjuntos *arbitrarios*. La mayoría de los conjuntos arbitrarios no son listas, ni tipos, ni linajes. La mayoría de los conjuntos arbitrarios no pueden ser definidos de modo alguno. (Recuerda que hay una infinidad supernumerable de conjuntos arbitrarios, pero sólo una infinidad numerable de posibles definiciones.)

Con frecuencia agrupamos o coleccionamos los trozos del mundo por sus similitudes percibidas o supuestas. Si varios individuos son similares en algún respecto, tienen algo en común, comparten algo. Lo que comparten es una propiedad o forma. Comparten una propiedad, porque satisfacen la misma condición o criterio, porque pasan por el mismo filtro, porque caen bajo el mismo concepto. El concepto o criterio expresado en la condición necesaria y suficiente es un concepto tipológico, y la extensión de una concepto tipológico —el conjunto de todas las cosas a las que se aplica— es un tipo.

A cada tipo de individuos concretos corresponde una cosa concreta, a saber, la cosa dispersa compuesta por todos los objetos de ese tipo. Si consideramos cada individuo concreto como un conjunto de puntos espaciotemporales y formamos la unión de todos los conjuntos de puntos correspondientes a los objetos de ese tipo, obtenemos una nueva cosa concreta correspondiente al tipo entero.

Cuando Ghiselin, Mayr y Hull hablan de clases, quieren decir tipos. Por ejemplo, Mayr escribe: «La pertenencia a una clase está determinada estrictamente por la similaridad, es decir, por la posesión de ciertas características compartidas por todos y solos los miembros de esa clase. Para ser incluidos en una clase determinada, los objetos deben compartir ciertas características que constituyen los criterios de pertenencia o... propiedades definitorias» [3]. Por tanto, cuando Ghiselin, Mayr y Hull han estado argumentando que una clase es algo opuesto a un individuo, lo que querían decir es que un tipo es lo contrario de un individuo. En efecto, un tipo no es lo mismo que un individuo, pero para cada tipo de individuos hay un individuo cuyas partes son precisamente los miembros de ese tipo. Otra cuestión distinta es la de si tal individuo es muy natural. En la mayoría de los casos, no lo es.

Las definiciones recursivas son frecuentes en la matemática. Si ya disponemos del 0 y de la relación del siguiente, podemos definir el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, mediante las dos cláusulas: (1) 0 pertenece a $\mathbb{N}$; (2) si x pertenece a $\mathbb{N}$ y z es el siguiente de x, entonces z pertenece a $\mathbb{N}$. De este modo los números naturales no son definidos por la posesión de una propiedad común, sino por estar relacionados de cierto modo (y en cualquier número de pasos intermedios) con un objeto especificado, el 0. Los números naturales quedan así caracterizados como los descendientes del 0 por la relación de descendencia (o, mejor dicho, de precedencia).

Las definiciones recursivas son también frecuentes en la gramática. El proyecto de la gramática generativa consiste en suministrar una definición recursiva del lenguaje, es decir, del conjunto de las oraciones gramaticalmente correctas de una lengua. También son

[3] Mayr, 1987, p. 147.

frecuentes en la informática, donde todos los lenguajes de programación están recursivamente definidos. Y en la lógica. Baste recordar cómo el conjunto de todas las fórmulas bien formadas de la lógica proposicional está definido recursivamente, como las hileras de signos obtenibles a partir del conjunto de las letras proposicionales mediante aplicaciones sucesivas de ciertas operaciones (negación, disyunción, etc.). Lo mismo sucede con el lenguaje de la lógica de primer orden.

Desde luego, la aplicabilidad de las definiciones recursivas no está restringida a los campos de la lingüística, la matemática o la ciencia de la computación. Supongamos que sabemos quiénes eran los doce apóstoles y que conocemos el proceso de ordenación episcopal. Entonces, y dando por sentada la doctrina eclesiástica al respecto, podemos definir el conjunto de los obispos del siguiente modo: (1) los doce apóstoles —aquí ponemos la lista: Pedro, Juan, Tomás...— son obispos; y (2) si x es un obispo y x ordena episcopalmente a z, entonces z es también un obispo. Definiciones similares pueden darse del conjunto de los cristianos (por la relación del bautismo) o del conjunto de los maestros Zen.

Muchas corporaciones eligen sus miembros por cooptación, es decir, los nuevos miembros son elegidos por los antiguos. Ése es el caso, por ejemplo, de la Real Academia Española de la Lengua, cuyos miembros desde su fundación carecen de cualificación específica común alguna. El conjunto de sus miembros sólo puede ser caracterizado de un modo recursivo, indicando la lista de los miembros iniciales —nombrados por el rey Felipe V— y describiendo el procedimiento de votación para cubrir las vacantes. Algo parecido ocurre con otras academias e institutos.

Especies y organismos como individuos y como conjuntos

Una bioespecie, considerada como una cosa histórica (dispersa), es simplemente la suma o unión de sus organismos. No hay nada en la bioespecie aparte de los organismos que son sus miembros (o, si se prefiere, sus partes). También una multitud coincide con la suma o unión de la gente que la compone. El sistema formado por la Tierra y la Luna está en similar situación. Otros casos son diferentes.

El organismo como individuo —como región espaciotemporal— es más que simplemente la suma o unión de sus células. También está compuesto por partes no celulares y no vivientes como el retículo inorgánico de los huesos, o el plasma de la sangre (que en su 90% es agua), o incluso las células muertas que componen el duramen (la madera dura en el centro del tronco de los árboles) o el pelo de los animales. Estos compuestos del organismo que no son células vivas son indispensables para su viabilidad y supervivencia y contribuyen a su cohesión e integración funcional. Por tanto, el organismo va más allá del conjunto de sus células de un modo en que la bioespecie no va más allá del conjunto de sus organismos.

Una galaxia también es más que simplemente el conjunto de las estrellas de que consta (y de sus planetas). Las nubes intergalácticas de gas y polvo también son constituyentes importantes de la galaxia, como lo es con frecuencia su agujero negro central. En cualquier caso, y de hecho, el 90% de la masa de las galaxias se compone de la llamada materia oscura. Por tanto, la galaxia va más allá del conjunto de sus estrellas. Y los componentes extraestelares de la galaxia participan plenamente en el juego gravitacional que mantiene unida a la galaxia.

Si algo es un individuo, un organismo lo es. Los organismos son muy continuos en el espaciotiempo, son extremadamente cohesivos y sus partes interactúan obviamente de un modo estrecho. También poseen bordes nítidamente definidos.

Un organismo está compuesto básicamente (aunque a veces no exclusivamente) de células. El conjunto S de las células de un organismo sexual puede definirse recursivamente del siguiente modo: (1) el zigoto que dio origen al organismo pertenece a S; (2) si x pertenece a S y x se divide por mitosis en z y w, entonces z y w pertenecen también a S.

Según esta definición, el organismo sexual empieza con la formación del zigoto por fusión de los dos gametos de los progenitores, se desarrolla en el espaciotiempo por mitosis sucesivas y muere lentamente, acabando de morir cuando muere la última de sus células.

Una bioespecie sexual es una entidad histórica, un individuo arbitrario y también un individuo natural, aunque no tan natural como el organismo. Una bioespecie no es continua en el espacio, por lo que es meramente un individuo disperso. Una bioespecie es cohesiva por la posesión compartida de un acervo génico que va cambiando a lo largo del tiempo y al que cada generación contribuye, y a veces también por compartir mecanismos específicos comunes de reconocimiento de las parejas potenciales (*mate recognition*). Sin embargo, esta cohesión es menor que la de los organismos individuales. La mayoría de sus partes (o miembros) pueden ser destruidos sin que se destruya la especie. La bioespecie interactúa hasta cierto punto, a través del cruce y la competición entre sus miembros. Pero esto es muy poco en comparación con la intensa interacción entre los diversos órganos del mismo organismo.

La bioespecie está bien definida sincrónicamente (en el espacio) mediante el aislamiento reproductivo de otras especies. También puede estar bien definida diacrónicamente (en el tiempo), al menos si uno adopta una perspectiva estrictamente cladista, según la cual todas las especies nacen en un evento de especiación (por bifurcación de la especie paternal) y mueren por extinción o por otro episodio de bifurcación filética[4]. La bifurcación (o división de la especie previa en dos nuevas) ha de ser absoluta, es decir, sólo cuando los mecanismos de aislamiento genético están a pleno rendimiento a través de todas las poblaciones involucradas, podemos decir que ha tenido lugar la bifurcación, el evento de especiación. Si, por el contrario, admitimos —con C. Darwin y E. Mayr— la posibilidad de la anagénesis, es decir, de la especiación gradual sin

[4] Véase, por ejemplo, R. Willmann, 1985, o M. Ridley, 1989.

bifurcación, o de la bifurcación de una rama lateral sin especiación en la principal, entonces la bioespecie no está bien definida en el tiempo.

Aunque la bioespecie es una entidad histórica, está evidentemente dividida en partes separadas, discretas y autónomas, a saber, los organismos que la componen. Y los organismos son casos paradigmáticos de individuos. Por tanto, a cada bioespecie le corresponde un conjunto: el conjunto de los organismos que son partes de esa bioespecie.

¿Es posible definir ese conjunto sin mencionar el todo individual, la bioespecie entera? Sí, podemos definirlo recursivamente, al menos si estamos hablando de una especie cladista, si conocemos la población originaria —la que resulta del evento de especiación y que da origen a la nueva especie— y la especie muere por extinción o se bifurca y conocemos la fecha de esa bifurcación (digamos, t_0). En el primer caso podemos definir el conjunto S de los organismos de la especie por las dos cláususlas: (1) si x pertenece a la población original, entonces x pertenece a S; y (2) si x pertenece a S y x es progenitor de y, entonces y pertenece a S. En el segundo caso, la cláusula (2) de la definición ha de ser reemplazada por: (2) si x pertenece a S, y x es progenitor de z, y z ha nacido antes de t_0, entonces z pertenece a S.

Las clases no evolucionan. Las entidades históricas (individuos o dividuos) evolucionan, es decir, cambian con el tiempo, poseen una historia (por eso las caracterizamos como históricas). Las bioespecies son las cosas que evolucionan en el proceso de la evolución biológica. Son entidades históricas. Son porciones razonablemente bien definidas de la realidad. Su interés teórico es obvio, pero también es obvia la necesidad práctica que tenemos de disponer de conceptos clasificatorios tipológicos de organismos, de tipos definidos por características comunes (morfoespecies).

El taxonomista no tiene más remedio que empezar usando los conceptos tipológicos que tenga a mano. Sin embargo, ha de estar dispuesto a introducir cuantas modificaciones, excepciones y complicaciones sean necesarias para mantener su sistema de morfoespecies tan próximo y coincidente como sea posible con la historia filética real de las bioespecies. Si se descubre que dos presuntas especies se entrecruzan fecundamente en sus márgenes, ambas deben ser reclasificadas y reunidas como una única especie. Si dos especies gemelas (dos grupos casi indistinguibles morfológicamente pero que nunca se cruzan) se descubren, han de ser reconocidas como especies distintas en la taxonomía. El tipo, la morfoespecie, es como el síndrome de la bioespecie. Sus condiciones necesarias y suficientes son meros síntomas de la bioespecie. La definición recursiva es la definición más satisfactoria del taxón, la que mejor se adecua a los constreñimientos de la teoría evolutiva, pero no es operativa. Por eso necesitamos aproximaciones tipológicas en la práctica.

Sí, las bioespecies son individuos, pero también determinan conjuntos de organismos. Los organismos son individuos indudables, pero sus células también forman conjuntos definibles recursivamente. Tanto las especies como los organismos pueden ser considerados como individuos (sui generis) y como conjuntos (aunque no meros conjuntos). Las principales diferencias entre las especies y los organismos son:

1. La bioespecie como individuo —como región espaciotemporal— es simplemente la unión o suma mereológica de sus organismos. Sin embargo, el organismo como individuo —como región espaciotemporal— es más que la mera unión de sus células. También está compuesto de partes no celulares y no vivas. Incluso podríamos preguntarnos si los microbios que habitan los intestinos de las vacas y las termitas (sin los que éstas no podrían digerir la celulosa de la hierba y la madera de la que se alimentan) forman parte de las vacas y termitas que los hospedan. Y lo mismo podríamos preguntarnos respecto a nuestras propias bacterias intestinales, sin las cuales tampoco podríamos vivir. Desde el punto de vista de la interacción, hospedantes y huéspedes, simbiontes y parásitos con frecuencia forman sistemas unitarios interdepen-

dientes. En cualquier caso, el organismo va más allá del mero conjunto de sus células de un modo del que la especie no va más allá del conjunto de sus organismos.

2. La bioespecie es una entidad dispersa. El organismo es continuo. Y algunos sienten una tendencia intuitiva a considerar que un individuo disperso no es un individuo genuino, sino un dividuo.

3. La cohesión interna e interacción mutua de sus partes es mucho mayor en el organismo que en la bioespecie.

Mereología

La mereología extensional clásica fue introducida por S. Lesniewski en 1916 y desarrollada por él en los años siguientes. Fue reformulada por H. Leonard y N. Goodman como cálculo de individuos en 1940.

La mereología clásica es equivalente (isomorfa) al álgebra de Boole completa (sin 0, según algunos autores). S. Lesniewski, H. Leonard, N. Goodman, P. Simons y otros autores excluyen el individuo vacío, pero R. Martin, R. Carnap, M. Bunge y otros lo aceptan en sus sistemas mereológicos. De hecho, no hay razón para rechazar el individuo vacío como un individuo arbitrario, una vez que uno acepta partes impropias y sumas arbitrarias, por ejemplo.

La mereología trata de la relación en que están las partes con el todo, la relación en que unos objetos están con otros cuando los primeros son partes de los segundos. Cualquier todo es parte de sí mismo. Y el objeto vacío es parte de cada todo. Una parte propia de un todo es una parte de ese todo distinta de la parte vacía y del todo mismo. La suma (mereológica) de dos objetos es el objeto constituido por la consideración de los dos objetos como un único objeto, que contiene como sus partes las partes de ambos. El producto mereológico o solapamiento de dos objetos está constituido por las partes que ambos objetos comparten.

Un álgebra de Boole es un sistema $(A, \sqcup, \sqcap, -, 0, 1)$, donde $\sqcup$ y $\sqcap$ son operaciones binarias en A, $-$ es una operación monaria en A, y 0 y 1 son elementos de A que satisfacen los siguientes axiomas:

(1)	$x \sqcup (y \sqcup z) = (y \sqcup x) \sqcup z$	$x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$
(2)	$x \sqcup y = y \sqcup x$	$x \sqcap y = y \sqcap x$
(3)	$x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$	$x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$
(4)	$x \sqcup -x = 1$	$x \sqcap -x = 0$
(5)	$x \sqcup 0 = x$	$x \sqcap 1 = x$

Un álgebra de Boole induce un orden parcial $\sqsubseteq$ entre sus miembros de acuerdo con la definición: $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqcup y = y$. Si B es un subconjunto del universo A de un álgebra de Boole y si hay un $c \in A$ tal que para cada $x \in B$, $x \sqsubseteq c$, decimos que c es una cota superior de B. El supremo de B es la mínima de las cotas superiores de B (si la hay). Un álgebra de Boole es completa si cada subconjunto suyo tiene un supremo.

Los axiomas de la mereología son los del álgebra de Boole completa, provistos de la siguiente interpretación:

$x \sqsubseteq y$	:	x es una parte de y
$x \sqsubset y$	:	x es una parte propia de y
$x \sqcup y$	:	suma mereológica o unión de x e y
$x \sqcap y$	:	producto mereológico o solapamiento de x e y
0	:	el individuo vacío
1	:	el individuo universal
$-x$	:	el complemento de x, es decir, el individuo universal menos x

La suma mereológica corresponde a la unión del álgebra de Boole, que es el supremo (o mínima cota superior) de dos miembros del álgebra. La mereología clásica acepta la suma mereológica de un número cualquiera de objetos, sin restricción alguna. Esta generosidad la convierte en un álgebra de Boole completa. Esta exigencia es muy fuerte y ha atraído muchas críticas, pues parece ir contra nuestras intuiciones de lo que es un individuo natural.

Un átomo (en el sentido mereológico) es un objeto sin partes propias. La mereología clásica puede ser atomística o sin átomos. En la mereología atomística cada objeto se compone de átomos, un objeto es parte de otro si y sólo si todos los átomos del primero son átomos del segundo, y dos objetos son idénticos si y sólo si tienen los mismos átomos. La teoría resultante es muy simple y fluida. Por transposición del teorema de representación para álgebras de Boole, cada (realización de la) mereología atomística es isomorfa al álgebra de los subconjuntos del conjunto de sus átomos (excluyendo sólo al conjunto vacío, caso de que trabajemos con una mereología sin objeto vacío).

Las masas o materiales (en el sentido de las cosas a las que se refieren los nombres masivos como «agua», «aire» o «mantequilla») son realizaciones perfectas de la mereología clásica[5].

Hay una correspondencia entre las clases de individuos y los todos enteros compuestos de partes. Para cada clase de individuos hay una nueva cosa concreta, que es la suma mereológica de todos esos individuos, considerados como partes de la nueva cosa. A la clase $B = \{b_1 \ldots b_n\}$ corresponde la cosa entera $a = \bigsqcup B = b_1 \sqcup \ldots \sqcup b_n$. Para cada cosa concreta compuesta (a cierto nivel) de partes hay una clase que tiene a esas partes como miembros. A la cosa entera $a = b_1 \sqcup \ldots \sqcup b_n$ corresponde la clase $B = \{b_1 \ldots b_n\}$.

Una bioespecie es una entidad histórica, una cosa concreta, que se compone de sus miembros (los organismos de esa bioespecie) como partes. Esos organismos, considerados como individuos, son los elementos de la clase que es la extensión del concepto «... pertenece a la bioespecie». Desde luego, tanto el concepto como la clase se definen por referencia a la cosa concreta que es la bioespecie. Por otro lado, a cada clase de organismos le corresponde el todo concreto que es la suma mereológica de sus miembros (y que, en general, no es una bioespecie).

[5] Simon, 1987, p. 158.

Si identificamos a un individuo concreto arbitrario con la región del espaciotiempo que ocupa, y a esta región con el conjunto de sus puntos, a cada individuo concreto x le corresponde el conjunto de sus puntos $p(x)$. Entonces para cada clase A de individuos concretos existe la cosa concreta $\bigsqcup A$, que ocupa la región del espaciotiempo $\bigcup\{p(x)|x\in A\}$.

La teoría de conjuntos trata de clases arbitrarias. Establece los constreñimientos que cualquier clase arbitraria debe satisfacer. Un tipo natural tiene que satisfacer esos constreñimientos y, además, otras condiciones suplementarias. La mayoría de las clases arbitrarias no son tipos naturales. (La mayoría de las sucesiones de letras no constituyen textos literarios, aunque cada texto literario sea una sucesión de letras.) Los individuos de los que trata la mereología son también individuos arbitrarios. Cada individuo natural tiene que satisfacer los constreñimientos de la mereología y, además, otras condiciones suplementarias. La mayoría de los individuos arbitrarios no son individuos naturales. Los subconjuntos arbitrarios de los tipos naturales o las intersecciones, uniones o diferencias arbitrarias de tipos naturales tampoco son, en general, tipos naturales. Lo mismo ocurre con los todos mereológicos y sus partes. Las partes mereológicas arbitrarias de un individuo natural no son, en general, individuos naturales. Y tampoco lo son las sumas, productos y diferencias mereológicas arbitrarias de individuos naturales.

Las partes arbitrarias de un individuo pueden ser más o menos naturales. Una parte natural de un todo natural es una parte arbitraria de ese todo que es ella misma una entidad natural o entera (algo como una célula, o un órgano, o un organismo, o una población, o una molécula, o un lago, o una estrella).

La idea de J. Lovelock de Gaia como una entidad viviente puede ser fácilmente incorporada en la mereología. La biota (parte viviente de la biosfera) entera es como un gigantesco ser vivo, cuyas partes son las diferentes especies y comunidades. Es como si las diversas especies fueran tejidos diferentes, y las diversas comunidades, órganos distintos. La biota puede ser considerada como el individuo universal correspondiente a una mereología atomística, cuyos átomos son las células. Todos los órganos, organismos, poblaciones, bioespecies y comunidades son partes de este individuo universal. Lo que no es intuitivo es el resultado de que las colecciones arbitrarias de células serían consideradas como partes genuinas u objetos. Esto podría ser evitado eligiendo una mereología más débil, sin sumas arbitrarias de objetos. Desde luego, eso ya no sería un álgebra de Boole, pero al menos seguiría siendo un orden parcial con un máximo (la biota).

Antes de Darwin se consideraba que las especies son clases y que sólo sus miembros son individuos. Estas clases serían las extensiones de los correspondientes conceptos tipológicos, formas o esencias invariables y eternas (o creadas por Dios al principio). Pero desde Darwin sabemos que las especies surgen en un lugar y en un momento histórico dado por especiación (aislamiento reproductivo de una subpoblación), que carecen de esencia inmutable, pues el acervo génico de la población va variando continuamente, y que un día desaparecen (por bifurcación o extinción). Ghiselin, Hull, Mayr y otros muchos pusieron de relieve que las clases son entidades conjuntistas, invariables, eternas y que no ocupan posición alguna en el espaciotiempo, por lo que no se parecen en nada a las especies. Las especies nacen, van cambiando a lo largo del tiempo y finalmente mueren, como los individuos. Las especies son entidades históricas, espaciotemporalmente localizadas, como los individuos. Es cierto que son individuos dispersos, por lo que más bien merecerían ser llamados dividuos que individuos, pero en cualquier caso las bioespecies son cosas concretas, sistemas espaciotemporales, entidades poblacionales (en jerga de Mayr), sustancias primeras (en jerga aristotélica) y no sustancias segundas, no universales, no clases, ni conjuntos, ni formas, ni esencias. Por tanto, la consideración mereológica sustituye o complementa a la conjuntista: los organismos, que son sustancias individuales indudables, son partes de sus especies, que también son a su vez entidades concretas, al igual que lo son las células de que se componen los organismos.

Así como la teoría cuántica de campos es la manera de hacer compatible la mecánica cuántica con la relatividad especial, así también la consideración de las especies como sistemas históricos concretos es la manera de hacer compatible la sistemática biológica con la teoría de la evolución.

CAPÍTULO 5

MATERIA Y ATOMISMO

El concepto de materia no es un concepto científico, sino filosófico. No es un concepto primitivo ni derivado de ninguna teoría científica, como lo son, en cambio, los de masa, entropía, carga eléctrica y leptón. El concepto de materia fue introducido en la filosofía por Aristóteles. Este concepto aristotélico de materia fue abandonado en la edad moderna, en que la palabra 'materia' pasó a designar lo que los antiguos habían llamado cuerpo, que para ellos era algo muy distinto. El atomismo corporeísta jugó un importante papel en el desarrollo de la ciencia en el siglo XIX y principios del XX, pero actualmente está en crisis (debido a su excesivo éxito, por así decir). En la confusa situación en que ahora nos encontramos quizá no esté de más echar una ojeada retrospectiva sobre el viejo concepto aristotélico de materia, que ya no nos parece tan desfasado como hace 100 años y que incluso quizá pueda arrojar un poco de luz (sólo un poco, desde luego) sobre algunas realidades y problemas de la actual física de partículas. Pero empecemos por el principio, es decir, por la etimología.

Etimología de 'materia'

La palabra latina *mater,* de inequívoco origen indoeuropeo, significa madre y se aplica tanto a los humanes como a los animales en general e incluso a las plantas. En este último caso —aplicada a las plantas y en especial a los árboles— *mater* designa el tronco principal del que brotan las ramas. De este sentido de *mater* deriva la palabra latina *materia* (o *materies*), que designa la sustancia de que está hecho el tronco y también el tronco mismo del árbol, por contraposición a la corteza y a las ramas. Éste es el sentido primigenio de *materia* en latín [1]. Puesto que es de la parte dura del árbol —el tronco libre de corteza y ramas— de donde se saca la madera que se emplea en carpintería y construcción, *materia* pasó a significar madera, en especial madera de construcción, en oposición a *lignum,* madera de quemar, leña. Los derivados latinos de *materia* se mueven en la misma órbita semántica. Así, *materia crispa* significa madera llena de vetas, y el verbo *materiare* significa construir con madera, de donde a su vez se derivan el adjetivo *materiarius,* de madera *(materiarius faber* es el carpintero, *materiaria fabrica,* la carpintería, etc.), y el sustantivo *materiatio,* obra de madera o carpintería. Como la madera era el principal material empleado en la construcción de muebles, casas, barcos, etc., la palabra *materia* acabó identificándose con material en general, como cuando Ovidio dice que el trabajo empleado en hacer una determinada obra valía más que los materiales en ella empleados, *materiam superabat opus.*

Resumiendo podemos decir que en latín *materia* significa básicamente madera. Y aunque las palabras castellanas 'materia' y 'madera' significan actualmente cosas distintas, ambas tienen el mismo origen, pues ambas derivan de la *materia* latina.

La palabra latina *materia* se empleó también para traducir la voz griega ὕλη y así pasaron a ella todas las connotaciones de esta

[1] Véase, por ejemplo, A. Ernout y A. Meillet: *Dictionnaire étymologique de la langue latine. Histoire des mots,* Libr. Klincksieck, París, 1967, p. 390.

última, que en parte ya poseía. En efecto, la palabra griega *hýlē* —ὕλη— significaba primigeniamente árbol o bosque. Luego pasó a designar la madera que se saca del bosque, tanto la madera de construcción como la leña de quemar. Finalmente y por extensión *hýlē* pasó a significar no sólo la madera de construcción, sino en general todos los materiales de construcción, tanto la madera como la piedra, etc. A partir de Aristóteles, que la incorporó a su terminología especializada, *hýlē* pasó a significar también material en general, cualquier material. Pero hasta entonces había significado básicamente madera, leña, árbol o bosque. Ése es, por ejemplo, el único significado que tiene todavía en Platón. Incluso en su última obra, las *Leyes*, escrita mientras Aristóteles desarrollaba ya su propia filosofía, la palabra ὕλη sigue significando madera o leña. Así, Platón habla de la madera de construcción naval —ναυπηγησίμης ὕλης—[2], de la leña bien seca —ὕλην ξηρὰν— para calentar los baños[3], etc. Y todos los numerosos compuestos derivados de *hýlē* hacen referencia al bosque o a la madera: así, *hylobios*, que vive en el bosque; *hylódromos*, que corre por el bosque; *hylotómos*, leñador; *hylofágos*, comedor de madera, etc. Incluso en nuestro tiempo los zoólogos han dado al gibón (el primate de largos brazos especialmente adaptado a la vida arborícola en las junglas asiáticas) el nombre que servía de epíteto a Pan: *Hylobates* —de ὑλοβάτης, frecuentador de los bosques.

El concepto aristotélico de materia

La palabra 'materia' —*hýlē*— fue introducida en la filosofía por Aristóteles, con quien deja de designar un material o componente determinado de las cosas —la madera— para pasar a significar material o componentes en general. De hecho caracteriza la materia de dos maneras distintas: por un lado, como sustrato —*hypo-*

[2] Platón: *Leyes*, 705 c 1.

[3] Ibídem, 761 c 7.

kéimenon— del cambio entitativo, y por otro, como aspecto de la entidad.

En el libro I de la *Física* Aristóteles analiza las condiciones o principios del cambio, que se reducen a tres: la ausencia previa de una cierta forma o determinación (antes del cambio), esa forma o determinación ya realizada (después del cambio) y el sustrato o sujeto del cambio, aquello en que el cambio se da, lo que permanece en el cambio y recibe la forma o determinación. Así cuando enjalbegamos una casa, el sustrato es la casa misma, que recibe la forma de la enjalbegadura, de que antes carecía. Se trata aquí de un cambio accidental. Pero en el cambio entitativo o sustancial, una cosa deja de ser lo que era para transformarse en otra entidad distinta. El pan y el pescado que comemos se transforman en carne y huesos nuestros. El lingote de bronce se transforma en estatua de Afrodita. La lana de la oveja se transforma en túnica. El sustrato de estos cambios entitativos es precisamente la materia. «Llamo materia —define Aristóteles en la *Física*— al sustrato primero de cada cosa, a partir del cual se genera...[4]»

La observación de la actividad de los artesanos, que hacen sus obras con ciertos materiales, sugiere esta identificación de la materia como sustrato con el material. «Llamo materia —escribe Aristóteles en la *Política*— al sustrato a partir del cual se fabrica una obra, por ejemplo la lana para el tejedor y el bronce para el escultor[5].»

Aristóteles piensa que un solo tipo de explicación no puede dar cuenta de la diversidad y complejidad de los cambios o eventos naturales, sino que es necesario recurrir a cuatro tipos distintos de explicación, correspondientes a otros tantos aspectos que pueden distinguirse en las entidades: son las famosas cuatro *aitiai* o aspectos de la entidad. Dos *aitiai* o aspectos correlativos son los de materia —*hýlē*— y forma —*eîdos* o *morphḗ*.

La materia es un aspecto de la entidad, el aspecto en que nos fijamos cuando nos preguntamos por los materiales o componen-

[4] Aristóteles: *Physiké A.*, 192 a 31.
[5] Aristóteles: *Política*, 1256 a 8.

tes de que está hecha o compuesta. En cada cosa Aristóteles distingue sus materiales o componentes —su materia—, por un lado, y la estructura o composición que adoptan esos materiales o componentes en ella —su forma—, por otro. Así, la madera o el mármol son la materia de la estatua, la figura de Afrodita es su forma. Los ladrillos y vigas son la materia de la casa, su disposición en paredes, vanos y techos, su forma.

El concepto aristotélico de materia es correlativo al de forma. La materia es siempre *materia de* algo. Y lo que es materia de algo puede, por su lado, en sí mismo, no ser materia, sino entidad completa, por cuya materia podemos a su vez preguntarnos. Los ladrillos y las vigas constituyen la *materia de* la casa. Pero un ladrillo es a su vez una entidad, cuya materia es la arcilla, y una viga es otra entidad, cuya materia es la madera. A su vez la arcilla es una entidad cuya materia son ciertos elementos simples (agua, tierra, etc.). Como dice Aristóteles, «la materia es algo relativo, pues a otra forma distinta corresponde otra materia» [6].

Este concepto de materia no es absoluto, sino relativo: no indica una cosa o realidad determinada, sino un punto de vista desde el que mirar cualquier cosa o realidad, punto de vista correlativo al de forma o estructura. Todo compuesto es materia estructurada, pero lo que es materia respecto a esa estructura es forma respecto a su propia materia. Como ha señalado W. Wieland, «Aristóteles habla siempre de la materia sólo en cuanto que es *materia de* algo; en cuanto materia carece de propiedades determinadas. 'La' materia como realidad universal y unitaria es algo que no se encuentra en Aristóteles» [7].

J. Moravcsik ha señalado que el sentido de materia en Aristóteles es el de componente o, mejor dicho, el de conjunto de componentes, mientras que el de forma es el de estructura o ley de composición [8]. El ejemplo favorito de Aristóteles es el de sílaba. La

[6] Aristóteles: *Physiké A.*, 194 b 9.
[7] W. Wieland: *Die aristotelische Physik*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1962, p. 140.
[8] J. Moravcsik: «Aristotle on adequate explanations», *Syhthese*, vol. 28 (1974), pp. 3-17.

materia de la sílaba son las letras de que se compone. Su forma o estructura, el orden en que esas letras están dadas.

Toda entidad —con una sola excepción— es para Aristóteles un *sýnolon*, un sistema compuesto de materia y forma, de componentes y estructura. Todos los objetos tienen materia, componentes. Los objetos sensibles tienen materia sensible —*hýlē aisthetḗ*—; los objetos inteligibles, como los matemáticos, tienen materia inteligible —*hýlē noetḗ*. Como dice Wieland, «no hay 'la' materia, sino sólo en cada caso una materia determinada» [9]. Esa materia determinada puede incluso ser por así decir inmaterial, es decir, no sensible. Los puntos constituyen la materia del círculo; las letras son la materia de la sílaba; y las premisas son la materia del silogismo. En efecto, los círculos, las sílabas y los silogismos son sistemas estructurados y, por tanto, tienen materia, es decir, componentes.

De todos modos, los entes que ocupan nuestra atención son preferentemente los cuerpos u objetos visibles, compuestos de materia sensible y estructura. Cuando decimos que la materia de *A* es *B*, la de *B* es *C*, la de *C* es *D*, etc., llega un momento en que hemos llegado a los cuerpos más sencillos. Éstos son los elementos: agua, tierra, aire y fuego. Los elementos de Aristóteles coinciden con los de Empédocles, pero él los deduce de las dos oposiciones básicas que acepta: caliente-frío y húmedo-seco. Cada cuerpo simple tiene 2 de esas formas, una de cada oposición. Sus combinaciones posibles son 4: el aire (que tiene la forma caliente-húmedo), el fuego (que tiene la forma caliente-seco), el agua (frío-húmedo) y la tierra (frío-seco). No hay más posibilidades.

	caliente	frío
húmedo	aire	agua
seco	fuego	tierra

[9] W. Wieland: Ibídem, p. 211.

Empédocles pensaba que los elementos eran inalterables. Pero los elementos aristotélicos pueden transformarse unos en otros. Así, cambiando una de sus formas (húmedo por seco), el aire se transforma en fuego. Incluso es posible (aunque más difícil) que un elemento cambie sus dos formas, como cuando el agua se transforma en fuego. Ahora bien, en todo cambio ha de haber un sustrato que permanezca y reciba la nueva forma. ¿Cuál es el sustrato que permanece en las transformaciones entre elementos? La materia primera —*prṓtē hýlē*—, que carece de forma y, por tanto, no puede existir independientemente, sino sólo adaptando una de las formas elementales: aire, fuego, agua o tierra. La materia de algo, en cuanto tal materia, es siempre incognoscible. Sólo es cognoscible en cuanto provista a su vez de forma, pues la forma es lo único que podemos conocer. Pero la materia primera carece por completo de forma. Por ello es por completo incognoscible, pues no hay en ella nada que conocer.

El mundo de Aristóteles es el mundo experiencial, vivencial, de las cosas con que cotidianamente nos topamos. Estas cosas cambian y sólo podemos entender su cambio distinguiendo en ellas aspectos distintos, considerándolas desde distintos puntos de vista. Los conceptos aristotélicos de materia y forma no se refieren a realidades absolutas, sino a puntos de vista que en cada caso enfocan algo distinto, puntos de vista que se obtienen por reflexión de sentido común sobre la práctica lingüística cotidiana.

Distinto es el caso del concepto de cuerpo, que en la filosofía antigua jugó un papel muy diferente del de materia.

Etimología de 'cuerpo'

La palabra castellana 'cuerpo' viene del latín *corpus*, que primariamente significa el cuerpo del animal, y en especial del humán, por contraposición a su vida o actividad vital. De ahí que se utilizase también para designar el cuerpo inerte o sin vida, el cadáver. Precisamente del significado de *corpus* como cuerpo muerto se deriva el inglés *corpse,* cadáver. Esta acepción fue reforzada por el uso de *corpus* como traducción latina del término griego σῶμα.

En griego antiguo *sôma* —σῶμα— empezó significando cuerpo muerto, cadáver; ése es, por ejemplo, el único significado que la palabra tiene en Homero [10]. Luego pasó a significar también cuerpo vivo —de donde deriva el adjetivo castellano «somático»—, y así aparece ya en Hesíodo [11]. Empédocles y los atomistas —Leucipo y Demócrito— fueron los primeros que emplearon *sôma* en el sentido de cuerpo físico en general, sentido que luego recogería también Aristóteles: «el cuerpo es lo limitado por una superficie» [12], es decir, el continuo tridimensional, el sólido, que, como tal, cae bajo la categoría de la cantidad continua, como la línea o la superficie [13].

El atomismo especulativo

Algunos filósofos griegos, como los atomistas y los estoicos, defendieron la tesis del pansomatismo o corporeísmo universal, es decir, la tesis de que todas las entidades son cuerpos. Para Platón, por ejemplo, había muchas entidades (las formas subsistentes, las entidades matemáticas, los dioses, las mentes humanas, etc.) incorpóreas. Esto es lo que niegan los corporeístas. No hay nada incorpóreo. Todo es cuerpo. Un tipo especial de corporeísmo es el atomismo.

Parménides había sentado la tesis de que lo único que existe es lo existente y que lo existente es homogéneo, eterno, ingenerable, inalterable, indestructible, único y continuo. De ahí se seguía la paradójica conclusión de que la aparente multiplicidad y cambio que observamos en el mundo es meramente ilusoria. Los razonamientos empleados por Parménides y sus seguidores, aunque invá-

[10] Por ejemplo, Homero: *Ilíada,* 3,23 y 7,79.
[11] Por ejemplo, Hesíodo: *Los trabajos y los días,* 540.
[12] Aristóteles: *Physiké A.,* 204 b 5.
[13] Aristóteles: *Categorías,* 4 b 24.

lidos, parecían inexpugnables. Uno de sus discípulos, Meliso, había concluido que, aunque sólo había una cosa, lo existente, si hubiera muchas, éstas habrían de tener las mismas propiedades que Parménides atribuía a lo existente. Leucipo vio aquí la posibilidad de combinar la férrea lógica de Parménides con la evidente multiplicidad y cambio de las cosas visibles.

Leucipo y Demócrito aceptaron que lo existente es homogéneo, eterno, ingenerable, inalterable e indestructible. Pero no es único ni continuo, sino múltiple y discreto. Este fraccionamiento de lo existente requiere la aceptación del vacío y no existente como aquello que fracciona o separa los trozos de existente. Estos trozos de existente son cuerpos simples, homogéneos, eternos, ingenerables, inalterables, indestructibles, indivisibles —*á-tomos*— y sólo se diferencian unos de otros por su figura y tamaño, que de todos modos siempre es muy pequeño, por lo que no son visibles a simple vista.

El atomismo afirma (como todo corporeísmo) que todas las cosas son cuerpos, pero divide los cuerpos en simples y complejos. Los únicos cuerpos realmente existentes son los simples, que son eternos, inalterables, etc., aunque invisibles y sin cualidades. Los cuerpos complejos, que son los cuerpos que vemos, cambiantes y cualificados, no son sino momentáneas configuraciones o conglomerados de cuerpos simples indivisibles o átomos. La generación y destrucción de estos cuerpos complejos que vemos se explica por la agregación y disgregación de los ingenerables e indestructibles cuerpos simples, que no vemos. Esa agregación y disgregación se debe en último término al choque casual de los átomos en su ciego movimiento a través del vacío. Para explicar el mundo visible basta, pues, con postular los átomos y el vacío.

Tanto Aristóteles como los atomistas estaban fundamentalmente interesados en el análisis de los objetos naturales que vemos cada día y coincidían en considerar tales objetos naturales como cuerpos complejos, es decir, como sistemas estructurados compuestos de cuerpos más simples. Pero diferían en el énfasis y también en el fondo de cuestión. Los atomistas enfatizaban el papel de los cuerpos componentes en la explicación de las propiedades y funcionamiento del sistema compuesto. Aristóteles, por el contrario, ponía el énfasis en la estructura que adoptaban los componentes como principio de explicación. Las diferencias básicas de fondo eran dos; (1) Según los atomistas hay (o es posible) un análisis definitivo y absoluto de los cuerpos complejos en cuerpos últimos simples y permanentes. Según Aristóteles no hay (y no es posible) un tal análisis, sino sólo un análisis provisional y relativo en componentes y estructura. (2) Según los atomistas los cuerpos más simples (los átomos) son eternos e inalterables, no estando sometidos a más cambio que el meramente local, mientras que para Aristóteles incluso los cuerpos más simples (los elementos) son alterables y destruibles, pues están sometidos al cambio entitativo, transformándose en determinadas circunstancias unos en otros.

Mientras que Aristóteles se había limitado básicamente a analizar y sistematizar los puntos de vista desde los que se pueden considerar las cosas, Leucipo y Demócrito habían propuesto una tesis física y metafísica audaz y omniabarcadora. En cualquier caso y durante los 2000 años siguientes, ninguna de las dos filosofías hizo la más mínima contribución al desarrollo de la ciencia física.

La ciencia física se constituyó en el siglo XVII frente a la oposición del aristotelismo esclerótico y dogmático de las universidades. No es de extrañar por eso que acogiera con gran simpatía la antigua filosofía atomista, como más adecuada para servir de telón de fondo a la nueva empresa intelectual. El atomismo antiguo, ligeramente corregido para hacerlo compatible con el cristianismo, sirvió de ideología filosófica dominante en la incipiente comunidad científica. Esto no vale sólo para los resucitadores explícitos del atomismo, como Pierre Gassendi, sino incluso para los creadores de la física, y en especial para Newton. Recordemos el siguiente pasaje de la *Óptica* de Newton: «Tras considerar todas estas cosas, me parece muy probable que Dios haya creado desde el comienzo la materia en forma de partículas sólidas, masivas, duras, impenetrables y móviles, con tales tamaños y figuras, con tales otras propiedades y en una proporción tal al espacio que resulten lo más apropiadas al fin para el que fueron creadas. Estas partículas primitivas, al ser sólidas, son incomparablemente más duras que cualesquiera cuerpos porosos formados a partir de ellas. Tan duras, incluso, como para no gastarse ni romperse nunca en pedazos, pues ningún poder ordinario es capaz de dividir lo que el mismo Dios ha hecho uno en la primera creación... Puesto que la naturaleza ha de ser perdurable, los cambios de las cosas corpóreas han de ser atribuidos exclusivamente a las diversas separaciones y nuevas asociaciones de los movimientos de estas partículas permanentes...» [14]. Si dejamos de lado las alusiones a la creación divina, Newton nos presenta aquí un resumen perfecto de la tesis atomista.

El atomismo científico

El atomismo tan entusiastamente abrazado por muchos científicos de los siglos XVII y XVIII no pasó nunca de ser una mera especulación filosófica sin ningún tipo de apoyo empírico y aceptada en función de su sola plausibilidad intrínseca. El atomismo deja de ser especulativo para convertirse en una hipótesis científica a principios del siglo XIX y no por obra de los físicos, sino de los químicos.

Los químicos mezclan diversas sustancias simples (o elementos) para obtener otras compuestas. A partir de Lavoisier, los químicos empezaron a medir cuidadosamente la cantidad de cada sustancia utilizada o resultante. Y estas mediciones fueron las que proporcionaron una base empírica creciente a la hipótesis atomista. El químico francés J. L. Proust evitó las turbulencias de la Revolución francesa y el Directorio dedicándose a la investigación en Madrid, donde fue generosamente protegido por Carlos IV. En 1799 Proust logró probar con toda precisión que el carbonato de cobre contiene

[14] I. Newton: *Óptica*, libro III, parte 1, pp. 345-346 de la traducción española por Carlos Solís, Ed. Alfaguara, Madrid, 1977.

proporciones exactamente fijas (en cuanto al peso) de carbono, oxígeno y cobre. En la reacción que da lugar al carbonato de cobre siempre intervienen exactamente 5,3 partes de cobre y 4 partes de oxígeno por cada 1 parte de carbón. Proust multiplicó los experimentos y observaciones y llegó a formular la ley de Proust o *ley de la proporción definida,* que dice que todos los compuestos tienen proporciones definidas y fijas de sus elementos componentes. Después de una polémica con Berthollet, resultó que Proust tenía razón. Y la única explicación razonable de la ley de la proporción definida era la hipótesis atómica. En efecto, si los compuestos químicos eran moléculas formadas por átomos de los elementos, puesto que los átomos son trozos indivisibles e inalterables, la proporción en peso de los componentes sería siempre exactamente la misma. Si una molécula del compuesto *y* se formaba de dos átomos de *x* y cinco átomos de *z*, y el átomo de *x* pesaba el doble que el de *z*, se necesitarían cuatro partes (en peso) de la sustancia *x* por cada cinco partes (en peso) de la sustancia *z* para producir *y*.

El químico inglés John Dalton descubrió que los mismos elementos químicos pueden combinarse de más de una manera, pero entonces las distintas combinaciones obedecen a proporciones definidas completamente distintas, correspondientes a sencillas relaciones entre números enteros, y dan lugar a sustancias diferentes. Así, podemos combinar tres partes (en peso) de carbono con ocho partes de oxígeno para obtener dióxido de carbono. Pero también podemos combinar tres partes de carbono con cuatro partes de oxígeno, obteniendo de este modo monóxido de carbono. Es decir, con la misma parte de carbono podemos combinar partes de oxígeno tales que la una es el doble de la otra. Esto es fácilmente explicable en función de la hipótesis atomista. En efecto, si el monóxido de carbono consta de moléculas formadas por un átomo de carbono y un átomo de oxígeno y el dióxido de carbono consta de moléculas formadas por un átomo de carbono y dos átomos de oxígeno y el peso de un átomo de oxígeno es 4/3 del peso de un átomo de carbono, entonces trivialmente resulta que para formar monóxido o dióxido de carbono hay que combinar pesos de oxígeno y carbono en las proporciones observadas. En 1803 Dalton generalizó estos resultados en su *ley de las proporciones múltiples.* En 1808, finalmente, Dalton publicó *A new system of chemical philosophy,* en que se introduce la hipótesis atomista como la única que da cuenta de las leyes cuantitativas de la química entonces conocidas, como las de proporción definida y de proporciones múltiples, recién mencionadas. Con esta obra el atomismo se convierte en una teoría científica (de la química).

El proceso de sentar la química sobre bases atomistas culmina con la tabla periódica de los elementos, publicada hacia 1870 por Meyer y Mendeléyev. Desde entonces sabemos que los diversos compuestos químicos no son sino moléculas formadas por los átomos de sus elementos componentes y que cada elemento químico corresponde a un tipo característico de átomos básicamente iguales. En las reacciones químicas cambian los compuestos, las moléculas, las combinaciones de átomos, pero los átomos mismos permanecen inalterados, indivisibles y eternos, como los átomos de Demócrito. Precisamente la *ley de conservación de la masa,* formulada por Lavoisier y base de toda la química del siglo XIX, era ahora interpretada como la expresión cuantitativa de la inalterabilidad de los átomos.

Animados por la nueva respetabilidad científica proporcionada al atomismo por la química, los físicos se tomaron más en serio la hipótesis atomista. Consecuencia importante de ello fue el desarrollo de la termodinámica estadística o teoría cinética de los gases —debido a Maxwell, Boltzmann y Gibbs—, en que las magnitudes fenomenológicas como la temperatura se interpretan como resultantes de los movimientos de los átomos y moléculas, en este caso como su velocidad media.

A principios del siglo XX ya nadie duda de la verdad del atomismo [15]. Los últimos incrédulos se convierten (W. Ostwald, 1908) o se mueren (Ernst Mach, 1916).

[15] El proceso de aceptación gradual y creciente de la existencia de los átomos por la comunidad científica durante el siglo XIX se encuentra expuesto en R. M. Gardner: «Realism and instrumentalism in 19th-century atomism», *Philosophy of Science,* vol. 46 (1979), pp. 1-34.

La relativización del atomismo

Todos los cuerpos que observamos son sistemas o conglomerados de otros cuerpos, y eso ya lo sabía Aristóteles. La gracia y la originalidad del atomismo consistían en postular unos cuerpos últimos, unos cuerpos simples, eternos, inalterables, indivisibles y carentes de estructura interna, que serían los componentes de todos los demás. La existencia de los átomos establecida por los químicos del siglo XIX es un hecho archicomprobado y que ya no podrá ponerse nunca en duda. Pero conforme los físicos han ido estudiando esos átomos químicos, la hipótesis atomista original se ha ido viniendo abajo hasta quedar totalmente arrinconada.

Desde luego que hay átomos químicos. Pero éstos no son los cuerpos últimos, simples y carentes de estructura que había postulado el atomismo. Los átomos químicos son cuerpos estructurados, compuestos a su vez de (en terminología aristotélica) materia (sus componentes) y forma (la estructura que adoptan esos componentes en el átomo).

A partir del descubrimiento de los rayos catódicos (corriente eléctrica en el vacío) en 1875, de los rayos X en 1895 y de la radiactividad en 1896, se fue viendo claro que la concepción atomista del mundo físico era demasiado simplista. En 1897 J. Thomson descubrió el electrón como partícula de rayo catódico. En 1907 se descubrió el protón o partícula de rayo positivo. En 1911 R. Millikan logró medir exactamente la carga eléctrica y la masa del electrón. Y ese mismo año Rutherford presentó la primera hipótesis sobre la estructura interna del átomo: el átomo sería una especie de sistema planetario en miniatura, donde diversos electrones, ligeros y con carga eléctrica negativa, giran a modo de planetas en torno a un núcleo pesado y cargado positivamente, que desempeña el papel de sol. Dos años después, en 1913, Niels Bohr refina la hipótesis de Rutherford, incorporando a ella la cuantificación de la energía, descubierta por Max Planck en 1900.

Los átomos tenían, pues, estructura, pero esta estructura no correspondía a las previsiones de la mecánica newtoniana. Para dar cuenta del comportamiento de los electrones en el interior del átomo fue preciso desarrollar (entre 1924 y 1927) una nueva mecánica, la mecánica cuántica.

Hacia 1930 se sabía que el átomo es un sistema compuesto de un núcleo positivo y electrones negativos y se disponía de una teoría adecuada de su estructura interna: la mecánica cuántica. ¿No resultaría a la postre que los viejos atomistas tenían razón, sólo que los cuerpos simples últimos no serían los átomos, sino los electrones, los protones y los fotones?

En 1932 J. Chadwick descubrió el neutrón y Heisenberg propuso que las partículas de rayos α (núcleos de helio) constan de 2 protones y 2 neutrones. Ese mismo año se descubrió el positrón, antipartícula del electrón (es decir, exactamente igual que el electrón pero con carga eléctrica de signo contrario). A partir de entonces, y hasta ahora, cada año se han ido descubriendo nuevas partículas.

En 1961 Gell-Mann y Neeman propusieron su camino de ocho sendas (*eightfold-way*), una especie de tabla periódica para clasificar las aproximadamente 30 partículas hasta entonces descubiertas (y con las que no se sabía bien qué hacer) según su carga eléctrica, su masa y su extrañeza (un número cuántico introducido en 1956 por Gell-Mann a fin de explicar la lentitud relativa con que ciertas nuevas partículas se desintegraban).

En 1963 Gell-Mann y Zweig propusieron la hipótesis de los quarks para introducir orden y simplicidad en la selva de las nuevas partículas. Todos los hadrones (partículas que experimentan las interacciones fuertes) serían combinaciones de quarks, de los cuales habría tres tipos: *up*, *down* y *strange*. Así, por ejemplo, el protón es una combinación de dos quarks del tipo *up* y un quark del tipo *down* (u u d), mientras que el neutrón es una combinación de un quark del tipo *up* con dos quarks del tipo *down* (u d d).

Lo que nos interesa subrayar es que los cuerpos simples últimos y sin estructura de los atomistas cada vez se nos escurren más de entre las manos. Resulta que los átomos son sistemas estructurados de núcleo y electrones. Pero resulta luego que el núcleo es a su vez un sistema estructurado de protones y neutrones. Y ahora resulta que los protones son a su vez sistemas estructurados de quarks. ¿Cuáles son los verdaderos átomos? ¿Los átomos químicos, los núcleos, los protones, los quarks? La respuesta depende de la fecha en que se formule la pregunta. Lo que está claro es que la noción de átomo queda así relativizada y va pareciéndose a la noción aristotélica de materia, que, como vimos, es siempre relativa, *materia de* algo.

Como ha señalado el físico americano Victor Weisskopf en su discurso de ingreso en la Académie de Sciences de París en noviembre de 1979, no podemos estar seguros de que los quarks sean los últimos componentes del mundo físico, que incluso podría tener estructura de juego de muñecas rusas. Una muñeca rusa está hueca y puede abrirse por el medio, separando la parte superior de la inferior. Pero dentro de ella hay otra muñeca rusa de tamaño algo menor, que también puede abrirse, con lo que en su interior encontramos una tercera muñeca rusa, de tamaño menor al de la segunda, etc. ¿Cuántas muñecas rusas incrustadas unas en otras nos encontraremos en nuestra exploración del mundo físico? ¡Quién sabe! Incluso es posible que esa situación se repita indefinidamente. Cuanto más penetramos en el micromundo, más exótico y asombroso es todo y más profunda es nuestra ignorancia y nuestra falta de intuición.

Recordatorio de la situación actual

Lo que actualmente creemos saber sobre los componentes últimos de la realidad física es lo siguiente. Las partículas elementales o últimas son de tres clases: leptones, quarks y mediadores. Leptones y quarks forman los componentes últimos de los sistemas físicos. Y la estructura de esos sistemas depende de cuatro fuerzas fundamentales, mediadas por los mediadores.

Los leptones actualmente conocidos son de 12 tipos: electrones (descubiertos en 1897), muones (descubiertos en 1936), tauones (descubiertos en 1975-77), neutrinos electrónicos (descubiertos en 1953), neutrinos muónicos (descubiertos en 1961) y neutrinos tauónicos (descubiertos en 1975-77), así como sus correspondientes antipartículas: antielectrones o positrones (descubiertos en 1932), antimuones, antitauones, antineutrinos electrónicos, antineutrinos muónicos y antineutrinos tauónicos. Todos los leptones tienen en común el tener 1/2 $\hbar$ de spin y el ser insensibles a la interacción fuerte.

Los quarks actualmente conocidos son también de 12 tipos: *up, down* y *strange* (postulados en 1963 por Gell-Mann y Zweig), *charmed* (postulado por Glashow y exigido por el descubrimiento del mesón Ψ en 1974, descubrimiento que valió a Richter y Ting el premio Nobel de física de 1976), *top* y *bottom* (exigido el segundo por el descubrimiento del mesón Y en 1977 y postulado el primero por razones de simetría), así como sus correspondientes antipartículas: *antiup, antidown, antistrange, anticharmed, antitop* y *antibottom.* Los quarks son sensibles a la interacción fuerte y han sido postulados como componentes de los aproximadamente 200 hadrones conocidos: los bariones se componen de tres quarks, los antibariones de tres antiquarks y los mesones de un quark y un antiquark. Por ejemplo, el mesón π^+ se compone de un quark del tipo *up* y un antiquark del tipo *antidown* ($u\,\bar{d}$). El mesón Ψ, descubierto en 1974 por Richter y Ting, es una combinación de quark y antiquark encantados o *charmed* ($c\,\bar{c}$). El mesón Y, descubierto en 1977 por Lederman, es otra combinación de quark y antiquark, *bottom* y *antibottom* ($b\,\bar{b}$).

Las fuerzas básicas que determinan la estructura de los sistemas formados por leptones y quarks son cuatro: la gravitatoria, la débil, la electromagnética y la interacción fuerte (por orden de intensidad creciente y alcance decreciente). Teorías recientes postulan que todas estas interacciones se basan en la emisión y absorción de un tipo especial de partículas: los mediadores. Los mediadores de la interacción electromagnética son los bien conocidos *fotones,* objeto de la electrodinámica cuántica. Los mediadores de la interacción débil son los tres *bosones intermediarios* W^+, W^- y Z^0, objeto de la teoría de Salam-Weinberg, que da un tratamiento unificado a las interacciones electromagnética y débil (y por la que Weinberg, Glashow y Salam recibieron el premio Nobel de física de 1979). La existencia de estos tres bosones intermediarios fue experimentalmente comprobada en el CERN en 1983. Los mediadores de la interacción fuerte son ocho *gluones* (objeto de la cromodinámica cuántica). Los mediadores de la interacción gravitatoria son los *gravitones,* postulados por la teoría de la relatividad general y las teorías de la supergravitación, aunque por ahora han eludido toda comprobación experimental.

Todas estas entidades son postuladas por teorías que tratan de explicar lo que ocurre en los aceleradores de partículas. En estos aceleradores las partículas se aceleran hasta que adquieren una gran masa-energía. A velocidades próximas a la de la luz se hacen chocar unas partículas con otras, con lo que éstas se aniquilan y otras nuevas de igual masa-energía son creadas. Estas aniquilaciones y creaciones son el pan nuestro de cada día de la física de partículas. Así, el mesón Y (ýpsilon) se produjo primero colisionando protones en el laboratorio Fermi, de Chicago, en 1977, y luego colisionando electrones y positrones en el acelerador Petra, de Hamburg.

De nuevo Aristóteles

El atomismo clásico es insostenible. En efecto, lo esencial de la hipótesis atomista clásica es que hay cuerpos simples inalterables, ingenerables e indestructibles, sean éstos los que sean. Pero eso no es cierto. Los únicos candidatos actuales a cuerpos simples últimos serían los leptones y los quarks. Y en los aceleradores de electrones, por ejemplo, cada día se aniquilan electrones y positrones por millones, y se crean hadrones (y, por supuesto, quarks) también por millones. De esto al menos podemos estar seguros: ninguna de las partículas hoy conocidas o postuladas es ingenerable o indestructible. Todas pueden aniquilarse o crearse (aunque sólo según ciertas leyes y condiciones, claro).

La materia de la que trata la actual física de partículas no incorpora los postulados de la teoría atomista clásica, pues sus cuerpos últimos no se limitan al cambio local, sino que están también sometidos al aumento o disminución (por ejemplo, de masa) e incluso al cambio entitativo, aniquilándose, creándose y transformándose unos en otros. Bien es cierto que estas aniquilaciones y creaciones no son arbi-trarias, ya que satisfacen ciertos principios de conservación de números cuánticos y de simetría. Pero esto no palía en absoluto las dificultades de la visión atomista [16]. K. Schrader-Frechette predijo [17] una crisis general del paradigma atomista y de la concepción corriente de que la materia está compuesta de partículas elementales. «Quizá —escribe— no tenemos más razón para decir que la materia está compuesta de partículas elementales que para decir que no lo está. Y por tanto, quizá, no tenemos más razón para prestar nuestra adhesión al paradigma de las partículas elementales que para no prestársela [18].» Schrader-Frechette cree que este paradigma ya hace aguas y va a hundirse, pero no sabe decir qué lo sustituirá. Su crítica parece exagerada y poco convincente, pero es sintomática de la insatisfacción por la concepción atomista tradicional.

¿Qué permanece en las aniquilaciones y creaciones de partículas, además de la conservación de ciertos números cuánticos? ¿Qué sirve de sustrato a esas generaciones y destrucciones? No, desde luego, algo parecido a los átomos democríteos. Más bien algo parecido a la materia primera de Aristóteles. Patrick Suppes ha

[16] Incluso puede considerarse que el concepto actual de partícula ya no responde en absoluto al patrón atomista. Después de escuchar la presente ponencia, Mario Bunge me comentaba que «la física de campos refutó el atomismo, aunque no las hipótesis atómicas (físicas y químicas)... Las "partículas" cuánticas no son partículas de estilo clásico, sino zonas de campos de densidad muy grande».

[17] K. Schrader-Frechette: «Atomism in crisis: an analysis of the current high energy paradigm», *Philosophy of Science*, vol. 44 (1977), pp. 409-440.

[18] Ibídem, p. 411.

escrito: «Las colisiones de electrones y otras partículas para producir nuevas partículas, tal como se observa, por ejemplo, en las cámaras de burbujas y en otros experimentos, constituyen simplemente un buen apoyo para la noción aristotélica de cambio de forma de la materia. Los datos de la cámara de burbujas apoyan especialmente la definición de materia de Aristóteles... En resumen, la situación parece indicar que la teoría de la materia de Aristóteles proporciona una manera excelente de considerar tanto los fenómenos de la física de altas energías como el tipo de fenómenos macroscópicos en que se fijaba Aristóteles» [19].

Ni siquiera la vieja teoría aristotélica de los elementos nos parece ya tan extraña. Comparémosla con la actual teoría de los quarks. Los *στοιχεῖα* o elementos de Aristóteles corresponden a los tipos (o sabores, *flavours*) de quarks. Las *εναντίωσεις* u oposiciones pueden compararse a las cargas o números cuánticos de los quarks. En la teoría de los quarks, a partir de los números, cargas o propiedades cuánticas consideradas se deducen todas las combinaciones posibles, que serán los tipos aceptables de partículas. En la teoría aristotélica de los elementos, a partir de las dos oposiciones (números, cargas o propiedades cuánticas, casi diría uno) que reconoce, la térmica (caliente (+), frío (–)) y la hidrónica (húmedo (+), seco (–)), se deducen todas las combinaciones posibles, que serán los elementos aceptables. Los elementos pueden transformarse unos en otros, cambiando sus cargas (térmica e hidrónica), lo mismo que las partículas pueden transformarse unas en otras, etc.

A la teoría aristotélica de la materia y la forma como aspectos de todas las cosas corresponde la actual tendencia a considerar las cosas como sistemas, es decir, como universos o conjuntos de elementos (la materia), provistos de estructura (la forma). La teoría de un tipo de cosas consiste precisamente en la caracterización de su común estructura. Y, evidentemente, los elementos del univer-

[19] P. Suppes: «Aristotle's concept of matter and its relation to medern concepts of matter», *Synthese*, vol. 28 (1974), pp. 46-47.

so de un sistema pueden a su vez ser sistemas, conjuntos estructurados. La relatividad de las nociones sistémicas se corresponde bien con la relatividad de las nociones aristotélicas.

Todas las realidades que conocemos se componen de materia y estructura. El materialismo y el estructuralismo son puntos de vista complementarios. El estructuralismo puro, como el de Platón, olvida que una estructura siempre es estructura de algo. Y el materialismo puro es irremediablemente ingenuo y apenas ha sido sostenido, pues incluso los atomistas clásicos reconocían que los cuerpos complejos eran conglomerados estructurados de componentes atómicos. La diferencia [20] entre Aristóteles y los atomistas clásicos era en gran parte una cuestión de énfasis. Y conforme la ciencia de nuestro tiempo ha ido poniendo más énfasis en la estructura que en los componentes, en los principios de conservación de números cuánticos y simetrías que en las partículas conservadas, las viejas nociones aristotélicas han ido ganando nueva actualidad.

No exageremos: los detalles de la filosofía aristotélica no tienen nada que ver con la ciencia actual. Las complejas estructuras matemáticas de nuestra física teórica se parecen bien poco a las formas cualitativas en que pensaba Aristóteles. Pero su concepto de materia podría estar más próximo a la física de hoy que las concepciones del atomismo clásico.

[20] Naturalmente entre Aristóteles y los atomistas había otras diferencias además de las aquí señaladas. Por ejemplo, el mundo físico aristotélico era un continuo, mientras que el de los atomistas se reducía a partículas discretas, separadas por un vacío absoluto. Es evidente que en toda la historia de la física ha habido tendencias continuistas (teorías de campos) y tendencias corpusculares, reflejadas en nuestro siglo en las distintas visualizaciones del electrón como onda o como corpúsculo. Pero el tema es demasiado complicado para tratarlo aquí. En cualquier caso, la versión actual de la mecánica clásica —la teoría cuántica de campos— más bien excluye el vacío absoluto de los atomistas clásicos.

CAPÍTULO 6

KANT COMO FILÓSOFO DE LA CIENCIA

Motivación de Kant

La filosofía de Kant, como la de Platón, responde a una doble motivación, teórica y práctica. La preocupación teórica de ambos pensadores es la misma: salvar y justificar la ciencia. La práctica es distinta: salvar y justificar el orden político-social, en Platón; salvar la moralidad y religiosidad pietista, en Kant.

En una época de aguda crisis social, subsiguiente a la derrota de Atenas en la guerra del Peloponeso, Platón trataba de salvar el ideal aristocrático de gobierno de la *polis.* Y frente al escepticismo y relativismo de los sofistas, trataba de salvar la posibilidad de un saber riguroso y absoluto, de la ciencia, introduciendo para ello su famosa doctrina de las formas. Porque eso al menos estaba claro para Platón: hay que defender la ciencia a toda costa. «Hay que combatir con todas las fuerzas de la argumentación a quien sustente tesis que impliquen la abolición de la ciencia, del saber, del intelecto, cualesquiera que sean esas tesis [1].»

Kant había crecido en el seno de una familia numerosa y humilde, donde, según su propio testimonio, nunca vio ni oyó

[1] Platón: *Sofistes*, 249b, c.

nada que no fuera conforme a la honradez, la decencia y la veracidad. Su padre sentía horror de la mentira. Su madre era una mujer extraordinariamente piadosa, que le dio una firme educación moral y lo inscribió en el Collegium Fridericianum (dirigido por el pietista Albert Schulz), al que Kant asistió durante ocho años. Finalmente su principal profesor de filosofía en la Universidad de Königsberg, donde estudió, fue Martin Knutzen, también un pietista. El pietismo era un movimiento que rechazaba a los clérigos, las instituciones eclesiásticas y los dogmas, pero que insistía en el sentimiento religioso, en la fe interior y en el cumplimiento de deber. A la defensa de esa religiosidad intimista y no dogmática y de esa moralidad rigurosa dedicaría Kant una parte muy importante de su filosofía. La otra parte —que es la que aquí nos interesa— la dedicaría a defender y justificar la ciencia. Esta justificación parecía tanto más necesaria cuanto que los recientes análisis y críticas escépticas de Hume parecían haberla dejado en entredicho.

En la universidad estudió Kant matemáticas y física, además de filosofía. La física, primero la de Leibniz y luego la de Newton, le impresionó vivamente. De hecho Leibniz y Newton son los dos autores que Kant más veces cita en sus obras. Y «un Newton» es para Kant el paradigma de máxima inteligencia (a veces contrapuesto a «un hotentote»). A la justificación de la mecánica newtoniana (y de la geometría euclídea) dedicaría Kant la parte teórica de su filosofía.

Analítico y sintético

Como es bien sabido, Kant divide las proposiciones (o juicios) en analíticas y sintéticas, por un lado, y en *a priori* y *a posteriori*, por otro. Las proposiciones analíticas carecen de contenido fáctico, no dicen nada nuevo, son hueras, vacías, meras tautologías. Las sintéticas poseen contenido fáctico, dicen algo, son informativas. Las proposiciones *a priori* son universales y necesarias y su validez es cognoscible con independencia de la experiencia. Las *a posteriori* son contingentes y particulares, y sólo la experiencia permite contrastar su verdad o falsedad.

Si las leyes de la matemática y la física fueran analíticas, serían poco interesantes y poco informativas, aunque eventualmente seguras. Si esas mismas leyes fueran *a posteriori*, serían inseguras y contingentes, aunque eventualmente informativas. Pero Kant quiere que las leyes de la matemática y de la física sean todo lo formidables que una proposición pueda ser, quiere que sean a la vez sintéticas (es decir, informativas) y *a priori* (es decir, seguras). Para Kant es evidente que las leyes de la matemática y de la física son sintéticas *a priori*. Eso es para él un punto de partida, una posición a defender, un dato a explicar. Kant no se pregunta *si* las leyes de la matemática y la física son sintéticas *a priori*. Sólo se pregunta *cómo* es posible que lo sean, de qué manera tenemos que estar hechos nosotros para que nuestras leyes científicas sean sintéticas *a priori*.

La caracterización kantiana de las nociones de analítico y sintético (así como de *a priori* y *a posteriori*) deja bastante que desear.

Kant define las proposiciones *analíticas* como aquellas en que el predicado está contenido en el sujeto, y las *sintéticas* como aquellas en que el predicado no está contenido en el sujeto. Esta definición presupone (1) que todas las proposiciones son del tipo sujeto-predicado universalizado, es decir del tipo «todo S es P», donde S y P son conceptos, y (2) que los conceptos complejos son uniones o sumas de características o conceptos simples. Ambas presuposiciones son inaceptables.

La presuposición (1) de que todas las proposiciones son del tipo «todo S es P» es falsa en general, y especialmente falsa respecto a las leyes y teoremas de la geometría euclídea y de la mecánica newtoniana, que son las proposiciones que más interesan a Kant en este contexto. Una proposición de la geometría euclídea dice que «hay al menos tres puntos distintos que no están en la misma recta». Otra de la mecánica newtoniana afirma que «dos partículas cualesquiera se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias». Evidentemente ninguna de estas dos proposiciones es del tipo «todo S es P» y, por tanto, la definición kantiana de analítico y sintético no se aplica a ellas, por lo que la pregunta de si son analíticas o sintéticas «en el sentido kantiano» carece de sentido.

Al establecer su distinción, Kant pensaba en proposiciones como «todo mamífero (es decir, vertebrado vivíparo, de sangre caliente, etc.) es vertebrado» y, en general del tipo «todo S es P», donde S = P + H + ... Pero por mucha presión que apliquemos, no lograremos meter la proposición «hay al menos tres puntos distintos que no están en la misma recta» y la ley de la gravitación universal en el zapato o molde «todo S es P» y, por tanto, no habrá manera de decidir si estas proposiciones son analíticas o sintéticas. ¿Cómo explicar tal descuido por parte de Kant en un punto tan central de su teoría? Sin duda por su excesiva confianza en la lógica aristotélica tradicional, que él suponía ya perfecta y acabada desde Aristóteles, confianza sin duda acrecentada por la asunción acrítica de dicho análisis por parte de Leibniz.

La presuposición (2) de que los conceptos son simples o complejos y de que estos últimos son la suma de varios conceptos simples es igualmente inaceptable. Esta idea, que Kant acepta acríticamente, viene de Leibniz. Durante su etapa juvenil (hasta 1682) Leibniz pensaba que sólo hay un número finito de conceptos simples, alcanzables mediante un análisis finito de los conceptos complejos. Según Leibniz, una proposición es verdadera si y sólo si el predicado está contenido en el sujeto, es decir, si todos los conceptos simples, notas o características de que se compone el predicado son también conceptos simples, notas o características del sujeto. Basado en esta concepción de la verdad, Leibniz descubrió en 1679 (contaba entonces 34 años) un ingenioso procedimiento de decisión de todas las verdades, que en cierto modo puede considerarse como un precedente de la gödelización. A cada concepto simple asignamos biunívocamente un número primo —su número característico. A cada concepto complejo asignamos como número característico suyo el producto de los números característicos de los conceptos simples que lo componen. Debido a la desconposición unívoca de todo número natural en factores primos y a las leyes de la divisibilidad, el enunciado «todo S es P» es verdadero si y sólo si el número característico del sujeto S es divisible por el número característico del predicado P. De ahí que Leibniz propusiera realizar un diccionario que asignara a cada concepto su número característico. Con ello se habrían acabado las discursiones. Bastaría mirar en el diccionario y dividir los números correspondientes para saber quién tiene razón.

Kant como lógico

En 1770 fue nombrado Kant profesor titular de lógica y metafísica de la Universidad de Königsberg, cargo que ocupó hasta su muerte. Sin embargo hay que reconocer que Kant no fue un lógico brillante. Ya hemos visto que define sus básicas nociones de analítico y sintético de un modo tan restringido que las deja indefinidas para los casos (las leyes de la geometría y la mecánica) que más le interesan. La vaga alusión a que las proposiciones analíticas se basan en el principio de contradicción no contribuyen a arreglar las cosas. Desde luego cualquier proposición que ejemplifique un principio lógico es analítica, pero el principio de contradicción no es más que uno entre otros, y una proposición que ejemplifique cualquier otro principio lógico no es menos analítica que una que ejemplifique el de contradicción. Por otro lado no está nada claro que toda proposición analítica ejemplifique algún principio lógico, y desde luego mucho menos que ejemplifique precisamente el principio de contradicción.

La insatisfactoria definición kantiana de lo analítico y sintético se basaba implícitamente en el análisis leibniziano de las proposiciones, como acabamos de ver. Pero en Leibniz había al menos una explicación de los supuestos, una invención de nuevos métodos e incluso una conciencia de los problemas. Nada de eso se observa en Kant, cuya aceptación acrítica de la concepción leibniziana da lugar a un tratamiento irreflexivo y de segunda mano de la estructura lógica de los enunciados.

En sus lecciones de lógica (publicadas en 1800) Kant señala que la lógica salió ya perfecta de las manos de Aristóteles y que es imposible que experimente nuevos progresos en cuanto a su contenido. Pero Kant nunca tuvo el sentido lógico de Aristóteles. La silogística aristotélica ya le resultaba demasiado sutil, formal y complicada. En contraste con Leibniz, que completó creativamente la silogística, llevándola a su perfección, Kant consideró que de la silogística le sobraba todo, excepto los dos únicos modos *Barbara* y *Celarent.* Aristóteles había construido la silogística axiomáticamente, mostrando cómo todos los modos podían reducirse a (deducirse de) los dos primeros, *Barbara* y *Celarent,* mediante ciertas reglas como las de conversión. Leibniz completó las tres figuras aristotélicas con la cuarta y reunió los 24 modos válidos, mostrando cómo podían ser deducidos tomando como axiomas muchas combinaciones distintas de modos (no sólo *Barbara* y *Celarent*). Kant, por el contrario, rechaza todos los modos silogísticos distintos de *Barbara* y *Celarent* como impuros y confusos. En su obra, significativamente titulada *Die falsche Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren* (La falsa sutileza de las cuatro figuras silogísticas), publicada en 1762, Kant afirma que «es imposible realizar inferencias simples y puras en más de una figura», que «sólo la primera figura... posee fuerza demostrativa», que «la división en figuras... es falsa e imposible», etc.[2].

En resumen, Kant sigue de un modo acrítico e irreflexivo a Aristóteles y Leibniz en su insuficiente y primitivo análisis de la estructura lógica de las proposiciones, pero al mismo tiempo se muestra incapaz de comprender lo mejor de la lógica aristotélica y leibniziana, el magnífico sistema formal de la silogística, que él considera exageradamente sutil.

[2] P. 28.

Kant como filósofo de la matemática

Cuando Kant habla de matemática, está pensando casi siempre en la geometría euclídea, en la forma en que ésta aparece formulada en los *Elementos* de Euclides.

Cada vez que un teorema aparece en los *Elementos* se procede de la misma manera. Primero se formula el teorema, en general. Esta formulación se llama *prótasis.* Luego se señala una figura particular, que se dibuja al lado y que ejemplifica aquello de que habla el teorema. Esta ejemplificación se llama *ékthesis.* A continuación se dice que lo que afirma el teorema en general vale en especial de esta figura mostrada por *ékthesis.* Luego se realiza una o varias construcciones auxiliares (*kataskeuè*). Finalmente se lleva a cabo la prueba (*apódeixis*) de que lo que afirma el teorema vale para la figura mostrada por *ékthesis.* En esta prueba se hace uso de los axiomas, de las definiciones y de los teoremas previamente demostrados, así como de las propiedades de la figura y de las construcciones auxiliares. Finalmente se concluye que el teorema es válido en su formulación general. Por ejemplo, el teorema 47 del libro I corresponde al llamado teorema de Pitágoras y aparece formulado así: «En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los que comprenden el ángulo recto». Esto es la *prótasis.* A continuación viene la *ékthesis:* «Sea ABG el triángulo rectángulo, siendo BAG el ángulo recto», seguida de la afirmación «digo que el cuadrado del lado BG es igual a los cuadrados de los lados BA y AG». Luego se realizan una serie de construcciones auxiliares, ilustradas sobre el dibujo de la figura. Finalmente viene la demostración (*apódeixis*) de que «el cuadrado del lado BG es igual a los cuadrados de los lados BA y AG», para terminar concluyendo: «Por tanto, en los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiene el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto, que es lo que había que demostrar».

Kant considera que el método matemático por excelencia es el método usado por Euclides, consistente en demostrar un teorema general probando que lo que el teorema dice se cumple en una figura particular previamente construida, dibujada o ejemplificada.

En 1763 la Real Academia de Ciencias de Berlín había convocado un concurso, en el que había que responder a la pregunta: «¿Son las verdades metafísicas en general, y en particular los principios fundamentales de la teología natural y de la moral, susceptibles de recibir demostraciones tan claras como las de la geometría? Y, si no lo son, ¿cuál es la naturaleza de su certeza?». Kant ganó el concurso con su *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral* (Investigación sobre la claridad de los principios de la teología natural y de la moral), de 1765, en que establece las diferencias entre la argumentación matemática y la filosófica. La primera diferencia, según Kant, estriba en que la matemática parte de definiciones de conceptos claros y precisos y procede a deducir consecuencias a partir de ellas, mientras que la filosofía se ocupa de conceptos que le son dados como confusos (*verworren*) e imprecisos y trata de llegar a definiciones de los mismos. Aquí, pues, la tarea de la filosofía queda caracterizada como análisis conceptual. La segunda diferencia, según Kant, estriba en que en la matemática los conceptos generales se ejemplifican siempre mediante construcciones e intuiciones individuales y las argumentaciones se refieren a esos representantes concretos de los conceptos, mientras que en la filosofía los conceptos generales no pueden ser ejemplificados mediante construcciones e intuiciones individuales, sino que tienen que ser comparados y pensados de un modo abstracto. «En la geometría —escribe Kant—, para reconocer las propiedades de todo círculo, se dibuja uno, y, en vez de trazar todas las líneas posibles que se corten en su interior, se trazan dos. De estas dos líneas se demuestran las relaciones y en ellas se contempla en concreto la regla general de las relaciones de las líneas que se cruzan en cualquier círculo [3].»

[3] Pp. 73-74.

Esta concepción de la diferencia entre el método matemático y el filosófico permanecería siempre vigente en Kant. Al final de la *Kritik der reinen Vernunft* (Crítica de la razón pura), de 1781, en el apartado dedicado a la «doctrina trascendental del método», Kant señala que «el conocimiento filosófico sólo considera lo particular en lo general, mientras que el matemático considera lo general en lo particular, incluso en lo individual...»[4]. «El conocimiento filosófico es el conocimiento racional a partir de conceptos; el matemático, a partir de la construcción de conceptos. Pero construir un concepto significa representar *a priori* su intuición correspondiente. Así construyo un triángulo representando el objeto correspondiente a este concepto, bien en la intuición pura, mediante la imaginación, o en la intuición empírica, sobre el papel, pero en ambos casos *a priori*...»[5]

En el lenguaje kantiano, «intuición» (*Anschauung*) significa representación individual, y «construcción» significa producción de una tal representación. La construcción en que se basa la geometría es el trazado de una figura (en la imaginación o sobre el papel, da igual); el álgebra y la aritmética, en el trazado de signos gráficos.

Ahora bien, ¿cómo podemos estar seguros de que el resultado de esas construcciones individuales tiene valor universal? ¿Cómo justificar la validez *a priori*, universal y necesaria, de los teoremas de la matemática y, en especial, de los de la geometría? ¿Cómo explicar la matemática aplicada, la universal aplicabilidad empírica de la geometría pura? La respuesta kantiana es bien conocida: Sólo podemos representar u observar las cosas en la medida en que las forzamos a adoptar las formas *a priori* de nuestra sensibilidad. Ahora bien, nuestras construcciones matemáticas no hacen sino articular esas formas *a priori*.

Los conceptos matemáticos requieren siempre de la *ékthesis*, del caso concreto, del ejemplo. Ese ejemplo ha de ser construido en

[4] I. Kant: *Kritik der reinen Vernunft*, A 714.

[5] Ibídem, A 713.

concreto, pero *a priori*. Ello sólo es posible —según Kant— mediante la intuición pura, previa a toda experiencia, del marco perceptual del espacio y el tiempo. Este marco tiene validez general para todas las cosas conocidas o fenómenos, pues las cosas sólo pueden ser conocidas en la medida en que se ajusten a él.

La concepción kantiana del espacio y el tiempo

Al principio Kant había defendido una concepción abierta del espacio, basada en la propuesta leibniziana de considerar el espacio como un sistema de interrelaciones entre sustancias. En 1746, en su primer escrito, Kant había sostenido que la proposición de que el espacio tiene 3 dimensiones es contingente. Las sustancias podían concebiblemente relacionarse de otra manera y dar lugar a más dimensiones, a otros tipos de espacio distintos del euclídeo. «Una ciencia de todos estos posibles tipos de espacio —escribe Kant— sería indudablemente la más grande geometría que una mente finita podría tratar de desarrollar[6].»

En los 20 años siguientes la concepción relacional y abierta del espacio va siendo sustituida en Kant por la concepción newtoniana del espacio absoluto. Así, en 1768, en *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume* afirma que «el espacio absoluto tiene una realidad propia, independiente de la existencia de toda materia». Y dos años más tarde, en su disertación de 1770, *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis*, aparece ya su concepción del espacio y el tiempo como intuiciones puras, y de la tridimensionalidad como una propiedad necesaria del espacio.

La concepción leibniziana del espacio no podía dar cuenta del presunto carácter apodíctico de la geometría. Pero ahora, en la disertación de 1770, el espacio, concebido como forma de la sensibilidad, como esquema subjetivo impuesto a toda posible sensa-

[6] I. Kant: *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte*, §10.

ción, explica la necesidad de la geometría. El mundo espaciotemporal que vemos, y al que se refiere la matemática, es un mundo de apariencias, de fenómenos. Aparte y detrás de él hay un mundo real, no intuitivamente cognoscible por la sensibilidad, pero simbólicamente sabible por la razón y objeto de la metafísica. Las principales líneas de la posterior concepción kantiana del espacio y el tiempo ya están aquí.

La *Kritik der reinen Vernunft*, publicada en 1781, rechaza como ilusoria la posibilidad de un presunto saber metafísico acerca del mundo real no fenoménico, pero por lo demás incorpora la concepción del espacio y el tiempo contenida en la disertación de 1770. Esta concepción se presenta en el contexto epistemológico de la justificación de la validez universal y necesaria de la matemática y, en especial, de la geometría euclídea. La pregunta fundamental es: ¿Cómo son posibles los juicios sintéticos *a priori* en la geometría euclídea? La respuesta es: La geometría euclídea es la teoría del espacio euclídeo, que es la forma que nuestra sensibilidad impone a todo objeto, al percibirlo. No podemos percibir objetos más que percibiéndolos en el espacio euclídeo. Por eso todos los objetos percibidos necesariamente se conforman a lo que dice la geometría euclídea. El espacio euclídeo y el tiempo absoluto son —en metáfora usual y adecuada— como las gafas a través de las cuales vemos todos los objetos de experiencia. Si esas gafas son azules, ya *a priori* podemos decir que necesariamente lo veremos todo azul. Las relaciones espaciotemporales se dan entre todos los perceptos, porque nosotros se las imponemos al percibirlos. No es que el mundo real sea euclídeo. Lo que es euclídeo es el mundo perceptual, apariencial, y eso por la sencilla razón de que el mundo real sólo puede aparecérsenos y hacérsenos perceptible dejándose previamente violentar y conformar por las formas de nuestra sensibilidad, que —ellas— son euclídeas. De lo que podemos estar seguros, según Kant, no es de que el mundo real sea euclídeo (eso sería una mera afirmación metafísica imposible de controlar), sino de que el mundo que percibimos será siempre euclídeo. Por eso la geometría euclídea es válida universal y necesariamente de cualesquiera objetos que podamos percibir.

La concepción kantiana del espaciotiempo es genial en cuanto que por primera vez reconoce que nuestro aparato sensorial conforma la percepción de lo percibido. Si tuviéramos otro aparato sensorial distinto, tendríamos otras percepciones diferentes.

El *a priori* sensorial tiene una indudable realidad biológica, como han subrayado múltiples pensadores conocedores de la neurofisiología de la percepción humana, desde Hermann von Helmholz hasta Konrad Lorenz. Cada especie animal experiencia y capta un mundo distinto, producto tanto de los estímulos *a posteriori* del mundo exterior como de las formas *a priori* de su aparato neurosensorial. Nosotros, los humanes, vemos lo que vemos, oímos lo que oímos, etc., porque tenemos el aparato neurosensorial que tenemos y no otro. Pero las consecuencias de idealismo que Kant y muchos kantianos sacan de esta situación son inaceptables. Las estructuras perceptuales incorporadas en nuestro aparato neurosensorial son *a priori* respecto al individuo, pues nace con ellas, le son innatas. Pero son *a posteriori* respecto a la especie, que las ha ido adquiriendo en el curso de la evolución, bajo la constante presión selectiva de la realidad exterior. Si precisamente estas estructuras sensoriales han superado las dificultades y han sobrevivido, es porque estaban bien adaptadas al mundo real, que es en el que las especies evolucionan, se adaptan y sobreviven. Como escribe Konrad Lorenz: «Las 'gafas' de las formas de nuestra sensibilidad y de nuestro pensamiento, como... espacio y tiempo, son *funciones* de una organización neurosensorial, que se ha desarrollado al servicio de la supervivencia de la especie. A través de esas gafas vemos una imagen real de la realidad, bien que esta imagen esté simplificada de un modo crasamente utilitarista: sólo hemos desarrollado un 'órgano' para aquellos aspectos del mundo-en-sí cuya captación era esencial para la supervivencia de nuestra especie»[7].

[7] Konrad Lorenz: *Die Rückseite des Spiegels*, Piper Verlag, Múnich, 1973, p. 17.

Kant pretende basar el saber matemático en el conocer intuitivo, la geometría en la percepción. Y puesto que nuestro aparato neurosensorial (lo que Kant llama las formas *a priori* de nuestra sensibilidad) determina unívocamente nuestra posibilidad de percepción, así también determinaría unívocamente nuestra geometría. Pero de hecho eso no ocurre. La geometría es una teoría abstracta, simbólica, que no depende para nada de la percepción, como Hilbert demostraría un siglo más tarde.

La filosofía kantiana de la matemática es una defensa de la tesis de que la geometría euclídea es necesaria y la única posible. Pero pronto la historia se encargaría de refutar esa tesis con el posterior desarrollo de las geometrías no euclídeas por Gauss, Bolyai, Lobachevski y otros. Ni siquiera ha resultado sostenible la tesis kantiana de que la geometría euclídea sea la única aplicable en física. De hecho la geometría no euclídea de Riemann es la que se aplica en la teoría general de la relatividad. E incluso en el caso euclídeo es falsa la pretensión de que sólo basándose en la intuición de figuras espaciales concretas puede hacerse geometría. Tales figuras son desde luego muy útiles en la geometría euclídea plana y tridimensional. Pero en nuestro siglo nos hemos acostumbrado a estudiar geometrías (euclídeas, si se quiere) *n*-dimensionales (para cualquier número natural *n*) e incluso geometrías infinitodimensionales, respecto a las cuales carecemos por completo de intuición espacial, de ayuda intuitiva en nuestro aparato neurosensorial (las formas *a priori* de nuestra sensibilidad), teniendo que limitarnos a desarrollarlas de un modo puramente simbólico y conceptual.

De todos modos hay que señalar que la filosofía de la matemática de Kant ha tenido notable, aunque desigual, influencia. Así, Frege la aceptaba respecto a la geometría, pero la rechazaba en lo que se refiere a la aritmética. Brouwer (el fundador del intuicionismo), por el contrario, la aceptaba respecto a la aritmética, pero la rechazaba en lo que toca a la geometría. Precisamente el nombre de 'intuicionismo' (a primera vista extraño) le viene a esa lógica y filosofía de la matemática de la aceptación por su fundador, Brouwer, de la doctrina kantiana de la construcción de los números en la intuición del tiempo.

Temprano interés de Kant por la dinámica

Kant estudió física en la Universidad de Königsberg. Su primera publicación, escrita cuando contaba sólo 22 años, apareció el año 1746 bajo el título *Gedanken vor der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte und Beurteilung der Beweise, derer sich Herr von Leibniz und andere Mechaniker in dieser Streitsache bedient haben* (Pensamientos sobre la verdadera estimación de las fuerzas vivas y examen de las pruebas que Leibniz y otros mecánicos han presentado en esta discusión). Se trataba de un libro de 255 páginas dedicado a la discusión entre los cartesianos y los leibnizianos acerca de cómo medir las fuerzas.

Descartes había definido la fuerza de un móvil como el producto de su masa por su velocidad y había formulado un principio de conservación de la cantidad total de fuerza (lo que ahora llamaríamos un principio de conservación del momento lineal). Leibniz consideró insuficiente e insatisfactoria la dinámica cartesiana. En su lugar introdujo los conceptos de fuerza viva y fuerza muerta. La fuerza muerta es la que depende de la posición del cuerpo, lo que ahora llamamos su energía gravitatoria potencial. La fuerza viva es el producto de la masa por el cuadrado de la velocidad, es decir, el doble de lo que hoy llamamos energía cinética. La pérdida de fuerza muerta correspondía, según Leibniz, a un aumento de fuerza viva. Este principio venía a equivaler a lo que ahora llamamos el principio de conservación de la energía mecánica total (cinética + gravitatoria potencial) de un sistema. Descartes pensaba en la colisión de bolas, en la que se conserva el momento lineal. Pero ese principio cartesiano de conservación del momento lineal no se aplica a otros casos, como la oscilación de un péndulo, que sin embargo sí cumple el principio de conservación de la energía mecánica total. En efecto, cuanto más alto está el centro de masa del péndulo, menor es su energía cinética, pero mayor es su energía (gravitatoria) potencial, y a la inversa ocurre cuanto más bajo está. Aquí triunfa el análisis leibniziano.

En su publicación de 1746 se nos muestra Kant como muy al corriente de las discusiones entre cartesianos y leibnizianos acerca de las fuerzas vivas, citando repetidamente a los hermanos Bernoulli y tomando finalmente partido por la definición leibniziana (masa por el cuadrado de la velocidad), siempre que se dé un movimiento libre.

Las especulaciones cosmológicas de Kant

Si el trabajo de 1746 sobre las fuerzas vivas se mueve todavía dentro de las coordenadas de la física leibniziana, poco después Kant descubre y asimila la mecánica de Newton, que a partir de entonces se convertirá ya para él en la mecánica definitiva. Durante los 9 años siguientes compagina su actividad de tutor de familias nobles de las cercanías de Königsberg con el interés por la mecánica y la cosmología, fruto del cual es su importante obra de 1755 titulada *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels, oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprunge des ganzen Weltgebäudes nach Newtonischen Grundsätzen abgehandelt* (Historia natural general y teoría del cielo, o ensayo sobre la constitución y el origen mecánico del universo entero, tratado según los principios de Newton).

El libro comienza con un resumen de lo que entonces se sabía acerca del sistema solar, compuesto del Sol y los seis planetas conocidos (Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno), el satélite de la Tierra —la Luna—, 4 satélites de Júpiter y 5 de Saturno, y los cometas. Todos los planetas describen sus órbitas en aproximadamente el mismo plano y se conforman a las leyes de Kepler, explicables a su vez por la resultante de la actuación simultánea de la fuerza centrífuga y la gravitatoria sobre cada planeta. Los 6 planetas mencionados ya habían sido descubiertos en la más remota antigüedad, por los babilonios y otros pueblos. En 1781 (el año de la publicación de la *Kritik der reinen Vernunft*) William Herschel descubriría un nuevo planeta, Urano. En 1846 Leverrier y Adams predecirían la existencia de Neptuno y calcularían su posición, en la que efectivamente sería localizado. El descubrimiento de Plutón habría de esperar hasta 1930.

Uno de los rasgos notables del sistema solar, subrayado por Kant, es la coplanaridad de las órbitas planetarias, es decir, el hecho de que todas ellas se encuentren aproximadamente en el mismo plano —el de la eclíptica. El plano orbital que más se desvía del de la eclíptica es el de Plutón (forma un ángulo de 27°), pero esto aún no se sabía en tiempos de Kant. De los conocidos entonces, la mayor desviación la presentaba el de Mercurio (7°).

En esta obra aparece ya la tendencia kantiana a considerar que las cosas tienen que ser necesariamente como Newton las había descrito. Newton había calculado la masa de la Tierra, Júpiter y Saturno y había constatado que la densidad de la Tierra era la mayor y la de Saturno la menor. De aquí pronto se había concluido que la densidad de los planetas era inversamente proporcional a su distancia al Sol. Cuanto más próximos al Sol, más densos; cuanto más alejados, menos densos. Hoy sabemos que esta correlación no se da en todos los casos. Así la masa (expresada en gramos por cm^3) de Saturno es de 0,7, la de Urano (que está más lejos del Sol) es de 1,2 y la de Neptuno (que está todavía más lejos) es de 1,7, lo que contradice esa presunta ley, si bien es cierto que Kant no podía tener en cuenta la densidad de planetas que aún estaban por descubrir. La densidad de Venus (5,2) es también ligeramente inferior a la de la Tierra (5,5), a pesar de estar más cerca del Sol.

Kant pensaba que la densidad de los planetas era siempre inversamente proporcional a su distancia al Sol, tal y como había conjeturado Newton, pero que ello no era una mera cuestión de hecho, sino que necesariamente tenía que ser así. A esta cuestión dedica el segundo capítulo de la segunda parte, titulado «Acerca de la diversa densidad de los planetas y de la relación entre sus masas», en el que, basándose en sus ideas cosmogónicas, concluye que «las masas de los planetas tienen que ser tanto más densas cuanto más cercanos estén al Sol, y tanto menos densas cuanto mayor sea la distancia»[8]. Esta cuestión es importante para Kant y en ella se basa su concepción acerca de los habitantes de los diversos planetas, expuesta en la tercera parte de su libro, titulada «Sobre los habitantes de los astros». Kant estaba convencido de que la mayoría de los astros y, desde luego, de los planetas estaban habitados. Esta misma opinión la compartía también William Herschel, el mayor astrónomo de su tiempo. Según Kant, los habitantes de los diversos planetas son tanto más sutiles e inteligentes cuanto más sutil y ligera es la materia de que están hechos y, por tanto, cuanto menos denso es el planeta en el que viven. Los más tontos y pesados de espíritu son los habitantes de Mercurio, el planeta más denso y próximo al Sol. Los más inteligentes y despiertos de espíritu son los habitantes de Júpiter y Saturno, los planetas menos densos y más alejados del Sol.

«Hay que reconocer —escribe Kant— que las distancias de los astros al Sol determinan ciertas situaciones, que a su vez influyen decisivamente en las propiedades de las naturalezas pensantes...»[9] En efecto, «el humán, que forma todos sus conceptos y representaciones a partir de las impresiones que el universo, por medio del cuerpo, produce en su alma, depende completamente de la constitución de la materia a la que el creador lo ha ligado, tanto respecto a la claridad de sus conceptos y representaciones como respecto a la capacidad de combinarlos y compararlos, que es a lo que llamamos capacidad de pensar»[10]. Pero si la capacidad de pensar depende de la constitución de la materia de que está hecho el pensante, ésta a su vez depende de la distancia del planeta al Sol. «La materia de la que están hechos los habitantes de los diversos planetas, e incluso sus animales y plantas, tiene que ser tanto más ligera y

[8] I. Kant: *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*, p. 40.
[9] Ibídem, p. 174.
[10] Ibídem, p. 180.

fina, y la elasticidad de las fibras y su estructura interna tiene que ser tanto más perfecta cuanto más alejados del Sol estén los planetas»[11]. Nosotros, los humanes, habitantes de la Tierra, ocupamos una posición intemedia: no somos tan torpes como los de Mercurio o Venus ni tan inteligentes como los de Júpiter o Saturno. Un hotentote terrestre les parecería un Newton a los habitantes de Mercurio, pero el mismo Newton parecería un mono a los de Saturno[12]. «La perfección del mundo espiritual, al igual que la del material, crece y progresa en los planetas desde Mercurio hasta Saturno e incluso más allá de él (si hay otros planetas) en una gradación constante, según la proporción de sus distancias al Sol[13].» En esta gradación la Tierra ocupa una posición intermedia. Por ello podemos pecar. «¿No hace falta un cierto término medio entre la sabiduría y la sinrazón para que se dé la desgraciada capacidad de pecar? Probablemente los habitantes de los astros más alejados son demasiado sabios y de elevado espíritu como para caer en la locura del pecado, mientras que los habitantes de los planetas inferiores están demasiado apegados a su densa materia y carecen de un espíritu suficientemente capaz como para ser responsables de sus actos ante el tribunal de la justicia[14].» En efecto, sólo los habitantes de la Tierra y de Marte ocupan esa posición intermedia en que el pecado es posible.

En su *Allgemeine Naturgeschichte* Kant se plantea la pregunta por el origen del sistema solar, y le da una respuesta genial con la formulación, por vez primera, de la hipótesis de la nebulosa, adelantándose así 40 años a Laplace.

Newton había criticado la teoría cartesiana de los torbellinos, pero se había abstenido de proponer él mismo hipótesis cosmogónica alguna, conforme a su lema *hypothesis non fingo.*

En 1745 el conde de Buffon había propuesto su cosmogonía catastrofista, según la cual había que buscar el origen del sistema

[11] Ibídem, p. 186.
[12] Ibídem, p. 187.
[13] Ibídem, p. 189.
[14] Ibídem, p. 197.

solar en algún lejano momento en que un gigantesco cometa se habría acercado tanto al Sol que habría logrado arrancar (por atracción gravitatoria) de él gran cantidad de materia, que en parte se habría dispersado y en parte habría acabado formando los planetas. Hoy sabemos que los cometas tienen una masa mucho menor de la que pensaba Buffon, por lo que nunca hubieran sido capaces de arrancar gran cantidad de materia del Sol. A principios del siglo XX Bickerton, Jeffreys, Jeans y otros presentaron una teoría cosmogónica parecida a la de Buffon, sólo que basada en la casi colisión de otra estrella con el Sol. La gran masa atribuida a los cometas por Buffon es otra consecuencia más de la generalización, admitida por Kant y casi todos los pensadores del siglo XVIII, de la constatación newtoniana de la densidad decreciente de los planetas con satélites por él conocidos (la Tierra, Júpiter y Saturno). Como ya vimos, según esa generalización la densidad de un cuerpo celeste del sistema solar sería tanto mayor cuanto más próximo estuviera al Sol. Por tanto los cometas, que se acercan más al Sol que ningún planeta, tendrían una máxima densidad.

En 1755, en el primer capítulo de la segunda parte de su *Allgemeine Naturgeschichte* Kant propuso por primera vez la hipótesis cosmogónica del origen del sistema solar por la rotación y contracción de una nube o nebulosa gaseosa primitiva. Esta hipótesis encuentra un serio apoyo en el hecho de que todos los planetas se mueven casi en el mismo plano y que todos giran sobre su eje con un movimiento de rotación de igual sentido que su movimiento de traslación en torno al Sol y que la rotación del Sol mismo. De hecho hay alguna que otra excepción, como la representada por el planeta Venus, cuya rotación es retrógrada y de sentido contrario a la de los demás planetas y a la de su propia traslación. Pero la superficie de Venus está siempre cubierta por espesas nubes y sólo en nuestro siglo ha sido posible descubrir su rotación retrógrada. Kant parte de una distribución uniforme de las partículas materiales en el espacio. Una de esas partículas, mayor que sus vecinas, atrae a éstas, con lo que empieza a formarse un núcleo de masa creciente, que atrae a partículas más y más alejadas, cuyas colisiones van generando un movimiento de creciente rotación en la nebulosa original, que acaba dando lugar al Sol y los planetas, satélites y cometas. Este proceso explica tanto el que todos los planetas se encuentren en el mismo plano como el que todos tengan movimiento de rotación y traslación de igual sentido y el que los planetas sean tanto más densos cuanto más cercanos al Sol estén.

En 1796 Laplace expondrá la misma teoría, ya mucho más elaborada matemática y físicamente, en su *Exposition du système du monde*. Laplace no cita a Kant, y no sabemos si conocía su trabajo de 1755. Al principio habría habido una nebulosa gaseosa incandescente, dotada de un movimiento rotatorio, que lentamente se enfriaba y contraía. Al contraerse, aumentaba su velocidad. En efecto, la ley de conservación del momento angular exige que, al disminuir el radio de una masa en rotación, aumente su velocidad, a fin de mantener constante el momento angular. Al aumentar la velocidad angular, la aceleración del giro determinó un aumento de la fuerza centrífuga, que a su vez dio lugar al desprendimiento de anillos de materia de la superficie del núcleo de la nebulosa en contracción. El núcleo central acabó siendo el Sol y los anillos desprendidos acabaron dando origen a los planetas, que seguían girando en el mismo sentido que sus anillos generadores (y que el Sol).

La hipótesis de Kant y Laplace, refinada y completada por von Weizäcker en 1944 y por otros posteriormente, vuelve a estar en boga en la cosmología de nuestros días.

Además de sus especulaciones cosmogónicas, Kant presentó en su *Allgemeine Naturgeschichte* una grandiosa visión de la estructura del universo. Nuestro sistema solar no es un caso aislado. Cada estrella es el centro de otro sistema solar. Y a su vez muchísimos sistemas solares juntos forman otro sistema de orden superior, un sistema galáctico o galaxia, como, por ejemplo, la Vía Láctea, de la que nuestro Sol forma parte. Cada galaxia es como un universo-isla. Pero nuestra Vía Láctea no es sino una de las innumerables galaxias que pueblan el universo y que a su vez se articulan en sistemas de orden aún superiores, en lo que hoy llamaríamos cúmulos y supercúmulos galácticos. Según Kant este proceso sería indefinidamente extendible a sistemas cada vez más amplios, lo cual (a partir del nivel de supercúmulos galácticos) ha resultado ser una mera especulación. De todas formas la visión kantiana de un universo lleno de innumerables galaxias, cada una de ellas compuesta de muchísimas estrellas, centros de otros tantos sistemas solares, anticipaba ideas más tarde expuestas por William Herschel y sólo universalmente admitidas bien avanzado el siglo XX.

Otra importante anticipación estriba en la sugerencia por Kant de que la fricción de las mareas frena la rotación de la Tierra. Eso ha resultado ser correcto, aunque todavía se tardaría un siglo más en poder demostrarlo.

La evolución de la filosofía kantiana de la física

En su trabajo de 1746, *Von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte*, Kant estaba aún inmerso en el mundo de la física cartesiano-leibniziana. En los años siguientes descubre y asimila la obra de Newton y otros mecánicos posteriores y su posición se hace más dogmática y puramente newtoniana: la mecánica de Newton es la única mecánica verdadera posible, y la base de su cosmología, presentada en 1755 en *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*. En esta obra se observa ya la tendencia kantiana a considerar cada tesis newtoniana como necesaria, incluso en cosas tan aparentemente contingentes como la correlación de densidades entre los planetas, tendencia que culminará en sus obras posteriores.

En la *Kritik der reinen Vernunft*, Kant pretende ya fundamentar los principios más generales de la mecánica de Newton en las condiciones de toda experiencia posible, salvándolos así de las críticas de Hume. A pesar de esas críticas siempre sería posible considerar la mecánica de Newton como una útil herramienta intelectual y como una fuente altamente fiable de explicaciones y predicciones. Pero esto no bastaba a Kant, para quien las leyes de la mecánica tenían que ser formidables, óptimas, necesarias, apodípticas, seguras, al tiempo que informativas y ricas de contenido, es decir, en su jerga, sintéticas *a priori*.

Para Kant es un hecho incuestionable que la mecánica de Newton —como la geometría de Euclides— proporciona leyes sintéticas *a priori* de la naturaleza. En 1783, dos años después de la aparición de la *Kritik der reinen Vernunft*, Kant publica una especie de aclaración y resumen de la misma, titulado *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können* (Prolegómenos a cualquier metafísica futura que pretende presentarse como ciencia). En §15 Kant constata: «Ahora poseemos realmente una ciencia natural pura, que formula las leyes de la naturaleza *a priori* y con toda la necesidad característica de las proposiciones apodípticas... Existe, por tanto, de hecho una ciencia pura de la naturaleza, y la pregunta que se plantea es: ¿cómo es posible esta ciencia?». De todos modos, en la *Kritik der reinen Vernunft* y en los *Prolegomena* Kant distingue todavía entre los principios generales de la física de Newton (como el principio de causalidad), que serían puros y *a priori*, y los principios empíricos, que dependerían parcialmente de la experiencia, como las leyes del movimiento. Esta distinción irá desapareciendo en la evolución posterior del pensamiento kantiano.

En 1786 publica Kant *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* (Fundamentos metafísicos de la ciencia natural), donde ya varias de las leyes del movimiento de Newton aparecen como deducidas *a priori* a partir de los principios del entendimiento puro y sin intervención ninguna de la experiencia. Los más importantes principios del entendimiento puro, ya expuestos en la *Kritik der reinen Vernunft*[15], son los llamados por Kant analogías de la experiencia, que le sirven ahora para obtener otras tantas leyes de la mecánica. La primera analogía de la experiencia es el principio de permanencia de la sustancia: «En todo cambio fenoménico permanece la sustancia y la cantidad de sustancia no

[15] I. Kant: *Kritik der reinen Verunft*, A 229-266.

aumenta ni disminuye en la naturaleza». A partir de aquí obtiene ahora (en 1786) Kant la «primera ley de la mecánica: En todo cambio de la naturaleza corpórea se conserva inalterada la cantidad total de materia, sin aumento ni disminución» [16]. El principio de conservación de la masa sería, pues, sintético *a priori*. La segunda analogía de la experiencia es el principio de causalidad: «Todo cambio se produce según la ley de la conexión de causa y efecto». De aquí se sigue ahora la «segunda ley de la mecánica: Todo cambio de la materia tiene una causa externa. Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o movimiento rectilíneo y uniforme, a no ser que sea forzado a abandonar este estado por una fuerza exterior» [17], es decir, la primera ley del movimiento de los *Principia Mathematica* de Newton. La tercera analogía de la experiencia es el principio de la interacción simultánea: «Todas las sustancias, en cuanto que pueden ser percibidas simultáneamente en el espacio, están en interación general entre sí». De aquí se sigue ahora la «tercera ley de la mecánica: En toda transmisión de movimiento la acción y la reacción son iguales» [18], es decir, la tercera ley del movimiento de Newton.

Como síntoma del creciente apriorismo kantiano, vemos que dos de las tres leyes del movimiento de Newton, todavía consideradas como principios parcialmente empíricos en la *Kritik der reinen Vernunft* (1781) y en los *Prolegomena* (1783), aparecen ya como principios *a priori* en los *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* (1786). En esta última obra incluso se permite Kant una crítica velada a Newton por presentar como basados en la experiencia principios (las leyes del movimiento) que son necesarios *a priori* [19].

En la última etapa de su vida, finalmente, este proceso de creciente apriorismo no hace sino acentuarse. En el *Opus postumum*, que recoge los escritos de Kant sobre este tema entre 1795 y 1804,

[16] I. Kant: *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, p. 116.
[17] Ibídem, p. 119.
[18] Ibídem, p. 121.
[19] Ibídem, p. 130.

año de su muerte, vemos a Kant pretendiendo deducir *a priori* varias leyes concretas de la física. La constitución de la mente humana determina los tipos de posibilidad física, así como la presencia de ciertas fuerzas y de un éter omnipresente. En este Kant ya senil se aprecia una tendencia a hacer que sea el sujeto quien *pone* el mundo, como en Fichte. El contacto con la experiencia y con la ciencia viva se ha roto, y el idealismo especulativo hace su aparición.

El apriorismo de las leyes de la naturaleza

La naturaleza es para Kant la totalidad de los objetos de experiencia. Las leyes de la naturaleza valen para todos los objetos naturales, es decir, para todos los objetos de experiencia, pues se limitan a describir las condiciones de toda experiencia posible, es decir, las condiciones de aplicación de los conceptos del entendimiento a los perceptos de la sensibilidad. «Los principios de la experiencia posible son igualmente las leyes generales de la naturaleza, que pueden ser descubiertas *a priori*. De este modo queda resuelto el problema planteado en nuestra segunda pregunta: ¿Cómo es posible una ciencia natural pura? [20]»

Las leyes de la naturaleza son sintéticas *a priori*, tienen validez universal, pues representan la estructura de toda experiencia posible. Sólo conforme a ellas podemos aplicar conceptos a perceptos, podemos tener experiencia. La experiencia —*Erfahrung*— es precisamente el lugar privilegiado en que el mundo perceptual es no sólo percibido, sino además pensado. Pero sólo podemos pensarlo de acuerdo con las categorías, esquemas y principios de nuestro entendimiento. No se trata de categorías y principios que estén dados en la experiencia (en ese caso serían inseguros, *a posteriori*), sino de categorías y principios que ponemos nosotros en la experiencia. Sólo hay experiencia en la medida en que los ponemos, sólo con ellos podemos aplicar conceptos a perceptos, podemos pensar los

[20] I. Kant: *Prolegomena*, §23, p. 306.

objetos empíricos. No es de extrañar, pues, que toda experiencia se ajuste a ellos, que ningún pensamiento empírico los contradiga.

¿Cuáles son en concreto esas leyes de la naturaleza, que descubrimos *a priori*, como dadas por la estructura misma de nuestro aparato pensante, de nuestro entendimiento? Ya hemos visto que la doctrina kantiana fue variando a este respecto. En la *Kritik der reinen Vernunft* y en los *Prolegomena* se trataría sólo de los principios más generales de la concepción mecanicista newtoniana, tales como el principio de causalidad y de conservación de la masa. Más adelante se incluyen también las leyes del movimiento y al final incluso leyes más concretas.

Kant pensaba, por ejemplo, que es imposible hacer física sin introducir el principio de causalidad, pensaba que una física indeterminista sería imposible. También aquí la historia posterior se encargaría de refutarle, al igual que le pasó con la geometría. Ya Max Planck (buen conocedor de Kant, por otra parte) trató siempre la causalidad como una mera hipótesis, no como un *a priori* del pensamiento humano. Siguiendo sus huellas, la mecánica cuántica sustituyó la causalidad por las meras relaciones de probabilidad. E incluso, rizando el rizo y dando por completo la vuelta a la tortilla, en nuestro tiempo se ha propuesto (por Patrick Suppes) definir la noción misma de causalidad en función de la probabilidad. A sería causa de B si y sólo si la probabilidad de B sola es menor que la probabilidad condicional de B, dado A. En símbolos,

$$A \text{ causa } B \Leftrightarrow p(B) < p(B \mid A).$$

Naturalmente, tampoco la conservación de la masa es una condición necesaria para hacer física. Como es bien sabido, en mecánica relativista la masa no se conserva, sino que aumenta con la velocidad y se transforma con frecuencia en energía. Desde luego difícilmente podríamos achacar a Kant el no conocer desarrollos científicos que se producirán tras su muerte. Pero, por otro lado, Kant es un filósofo importante, que merece ser tratado en serio. Y tratar en serio a un filósofo significa no limitarse a entenderlo-interpretarlo-en-su-contexto-y-situación, sino también preguntarse si tenía razón o no en lo que decía, dónde se equivocó y dónde señaló caminos que aún permanecen abiertos.

Kant señaló 3 etapas en la organización cognitiva de las impresiones que recibimos del mundo exterior: (1) Las sensaciones brutas son organizadas mediante las formas puras de la sensibilidad (espacio y tiempo) y dan lugar a las percepciones. (2) Las percepciones son interrelacionadas mediante los conceptos puros del entendimiento (categorías) y dan lugar a juicios y proposiciones empíricas. (3) Las proposiciones empíricas se organizan mediante los principios regulativos de la razón en teorías cada vez más amplias y comprensivas. En su análisis de las 3 etapas Kant introdujo distinciones y enfoques cuya fecundidad aún no se ha agotado.

Kant tuvo razón en subrayar la importancia de las grandes teorías (como la geometría euclídea y la mecánica newtoniana) en la empresa científica, globalmente motivada por los principios regulativos de la razón, frente a anteriores (y ¡posteriores!) planteamientos más atomistas y estériles, centrados en problemas de inducción o contrastación de tesis particulares. Pero en su entusiasmo por tales teorías, les atribuyó un carácter necesario, inevitable y apodíctico que luego resultaron no tener. Respecto a la geometría euclídea, confundió su ejemplificación en la intuición con su estructuración como teoría abstracta. Es posible que sólo la geometría euclídea sea intuitiva, pero desde luego otras muchas geometrías distintas pueden ser simbólicamente desarrolladas como teorías abstractas. Respecto a la mecánica newtoniana, no concibió sus nociones fundamentales como términos primitivos de un cierto lenguaje (sustituible por otros lenguajes), sino como formas necesarias del entendimiento humano, sin las que éste es incapaz de funcionar, lo que evidentemente no son.

Percibir y pensar

Kant fue el primer filósofo que se tomó en serio la distinción fundamental entre el percibir y el pensar. La percepción no es un tipo confuso de pensamiento, como habían creído Descartes y Leibniz. Tampoco el pensamiento es una percepción especialmente clara. Percepción y pensamiento son dos procesos radicalmente distintos.

Nuestra percepción, nuestro mundo perceptual, experiencial, vivencial, depende de las formas *a priori* de nuestra sensibilidad, de la estructura innata de nuestro aparato neurosensorial. No podemos percibir, experienciar, conocer, más que aquello que pasa por el filtro de nuestro aparato neurosensorial. En esto Kant tenía razón. Pero Kant quiso extender esta tesis a nuestro pensamiento, a nuestra teorización científica, y aquí se equivocó. No es que no haya formas *a priori* del saber, del pensar, del teorizar, pero estas formas no son las del entendimiento, sino las del lenguaje que empleamos para articular nuestra ciencia, nuestro pensamiento, nuestra teoría. Y así como no es posible cambiar de aparato neorosensorial, aunque queramos, pues éste es innato y nos viene dado (como a todas las especies animales) por nuestra clave genética, sí que es posible cambiar de lenguaje, de marco conceptual, de simbolismo. El lenguaje es convencional; está en nuestra mano cambiarlo, adoptando otras convenciones. Pero nuestro aparato neurosensorial no es convencional, está dado por la naturaleza.

Como es bien sabido, los humanes sólo podemos captar, percibir, experienciar, una parte pequeña del espectro electromagnético, la correspondiente a la luz visible (del rojo al violeta). Otros animales captan otras partes del mismo. Esta limitación nuestra es irremediable. Nunca lograremos ver las ondas de radio o los rayos X. Sin embargo, podemos pensar en el resto del espectro electromagnético, podemos inferirlo, saberlo, construir su teoría, etc. Nuestra capacidad científica, simbólica, lingüística, traspasa sin problemas los límites estrechos que nuestra sensibilidad impone a nuestra capacidad de percibir.

Kant tuvo razón en subrayar la diferencia entre percepción y pensamiento. Y tuvo también razón en señalar la importancia de la experiencia, es decir, del punto de contacto entre percepción y pensamiento, entre perceptos y conceptos, entre sensibilidad y lenguaje. La gran red de la ciencia es un enorme tejido simbólico, que sin embargo en algunos de sus nudos «toca tierra» y se moja en la percepción. Esos nudos constituyen la experiencia, y el análisis filosófico de la experiencia, iniciado por Kant, sigue estando por hacer.

CAPÍTULO 7

LA POLÉMICA ENTRE FREGE Y HILBERT ACERCA DEL MÉTODO AXIOMÁTICO

A principios de siglo tuvo lugar una polémica memorable entre Frege y Hilbert (o, quizá más exactamente, de Frege contra Hilbert). La polémica resulta memorable tanto por la importancia de sus protagonistas y del tema discutido como por el hecho de que las confusiones y ambigüedades que determinaron su esterilidad aún perviven parcialmente entre nosotros.

En 1900 Hilbert era probablemente el más grande matemático de su tiempo y Frege era, sin duda, el más grande lógico viviente. Pero ahí se acaba la analogía. A pesar de su juventud —tenía entonces 37 años— Hilbert había cosechado numerosos éxitos profesionales, era catedrático de la prestigiosa Universidad de Göttingen y se había podido permitir el lujo de rechazar varias otras cátedras que le habían sido ofrecidas. Hilbert era ya famoso y su fama no había hecho sino aumentar con la publicación el año anterior de su obra *Grundlagen der Geometrie*[1]. El reconocimiento que recibía de la comunidad matemática quedó reflejado en su participación estelar en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en París en 1900, en que propuso a sus colegas de

[1] D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, 1899. (10.ª edición, B. G. Teubner, Stuttgart, 1972.)

todo el mundo una célebre lista de 23 problemas que debían tratar de resolver durante el siglo XX que entonces comenzaba. Frege, por el contrario, a pesar de su mayor edad —era 14 años más viejo que Hilbert—, era un oscuro docente de la Universidad de Jena que nunca llegaría a alcanzar la posición de profesor ordinario y cuya obra —intrínsecamente importante— no había logrado el reconocimiento ni la difusión que merecía.

El tema de la polémica era nada menos que el de la naturaleza del método axiomático, método que ha gozado siempre de un prestigio incomparable en la tradición científica de Occidente, ya desde la época en que Aristóteles identificó ciencia perfecta con teoría axiomática. Ahora bien, ¿qué es una teoría axiomática?

Hasta 1899 se había entendido por teoría axiomática algo distinto de lo que se entendería a partir de la publicación en ese año de los *Grundlagen der Geometrie*, por Hilbert. Pero ni Hilbert supo describir adecuadamente lo que hacía ni Frege logró darse cuenta del alcance y el sentido último de ese nuevo hacer. Por ello la polémica resultó estéril.

La esterilidad de la polémica se debió a una razón fundamental. Para hablar de dos métodos distintos, casi podría decirse de dos mundos distintos, tanto Frege como Hilbert empleaban exactamente las mismas palabras. Cuando Frege empleaba la palabra «axioma», quería decir algo completamente distinto que cuando Hilbert empleaba la misma palabra «axioma». Y lo mismo ocurría con las palabras «definición», «prueba», «teoría», etc. Hilbert había revolucionado el método, pero había conservado las viejas palabras para designar las nuevas realidades, con lo cual la comunicación entre los nuevos y los viejos axiomáticos resultaba imposible. Esa confusión y ambigüedad de las palabras que empleamos para hablar de las teorías no se ha disipado del todo ni siquiera en nuestros días. Por eso vale la pena rememorar aquella inconclusa polémica.

El desarrollo de la polémica

Frege y Hilbert se habían conocido en 1895 con ocasión de un congreso científico celebrado en Lübeck, donde Frege había presentado una ponencia sobre las ventajas de su escritura conceptual tanto respecto al lenguaje ordinario como respecto al simbolismo de Peano y donde ambos habían intercambiado opiniones sobre el papel de los signos en la matemática, intercambio que tuvo una breve continuación epistolar. Durante el semestre de invierno 1898-99 Hilbert dio un curso en Göttingen sobre geometría axiomática, entre cuyos oyentes se encontraba Heinrich Liebmann, que envió un ejemplar de los apuntes del curso a Frege, que era amigo de su padre. La reacción de Frege ante las novedades metodológicas de Hilbert, manifestada en dos cartas a Liebmann [2], fue negativa, impresión negativa que se confirmó tras la atenta lectura por Frege de los *Grundlagen der Geometrie*, publicados poco después y que constituían una versión ampliada del curso de Göttingen que Frege ya conocía. El 27 de diciembre de 1899 Frege escribió directamente a Hilbert una larga carta [3] en la que sometía su libro a una crítica dura y algo pedante, acusándole de total falta de rigor. Hilbert debió de sentirse irritado, pero apreciaba a Frege y, armándose de paciencia, le contestó dos días después explicándole diversos aspectos esenciales de su nuevo método. El 6 de enero de 1900 replicó Frege con otra larga carta, lúcida y agresivamente polémica, de la que Hilbert se limitó a acusar recibo. La suerte de la polémica estaba echada. Hilbert se expresaba con excesiva falta de precisión para el gusto del lógico genial y pedantemente preciso que era Frege. Y Frege, que tan aguda y lúcidamente criticaba la desafortunada terminología hilbertiana, era incapaz de ver, más allá de los árboles de sus críticas de detalle, el bosque del nuevo

[2] La correspondencia entre H. Liebmann y Frege está recogida en G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel* (ed. por G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel y A. Veraart), Felix Meiner Verlag, Hamburgo, 1976, pp. 147-151.

[3] La correspondencia entre D. Hilbert y G. Frege está recogida en G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner Verlag, Hamburgo, 1976, pp. 55-80.

método que Hilbert había descubierto y que iba a revolucionar la matemática.

Al pasar los meses sin recibir cabal contestación de Hilbert, Frege volvió a insistir con otra carta, a la que Hilbert volvería a responder escuetamente, por falta de tiempo. En vista de que la discusión epistolar no progresaba, Frege propuso a Hilbert publicar la correspondencia intercambiada, pero Hilbert prefería no hacerlo. En noviembre de 1903 Hilbert escribió a Frege agradeciéndole el envío del tomo II de sus *Grundgesetze* e invitándole a ir a Göttingen, a fin de proseguir oralmente sus discusiones, ya que no tenía tiempo para hacerlo por escrito. Pero Frege no aceptó y ahí se acabó el contacto entre ellos. Frege se fue haciendo huraño con el tiempo. No aceptó la invitación de Couturat a participar en el Congreso de Filosofía de París en 1900 ni tampoco la de Russell a tomar parte en el Congreso Matemático de Cambridge en 1912. Prefería el contacto por escrito al personal.

En 1903 Frege publicó en el Anuario de la Unión Alemana de Matemáticos dos artículos «Sobre los fundamentos de la geometría» [4], en los que recogía y ampliaba sus críticas a Hilbert anteriormente expresadas en sus cartas. Hilbert no se dignó responder, pero A. Korselt replicó a Frege con un artículo [5] en el que salía en defensa de Hilbert. En 1906 Frege replicó a su vez a Korselt publicando una serie de tres artículos «Sobre los fundamentos de la geometría» [6], en los que sus análisis resultan especialmente lúcidos y profundos, llegando a exponer las características del nuevo método axiomático iniciado por Hilbert de un modo mucho más claro y explícito de lo que nunca lo había hecho el propio Hilbert, pero

[4] G. Frege: «Über die Grundlagen der Geometrie», *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung*, vol. 12 (1903), pp. 319-324 y 368-375. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften* (ed. por J. Angelelli), G. Olms, Hildesheim, 1967, pp. 262-272.

[5] A. Korselt: «Über die Grundlagen der Geometrie», *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung*, vol. 12 (1903), pp. 402-407.

[6] G. Frege: «Über die Grundlagen der Geometrie» (I, II y III), *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung*, vol. 15 (1906), pp. 293-309, 377-403 y 423-430. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften* (ed. por J. Angelelli), Hildesheim, 1967, pp. 281-323.

sin llegar a aceptar ni entender la importancia ni el sentido último del proceder hilbertiano.

El método axiomático concreto o clásico

Hemos dicho que la esterilidad de la polémica entre Frege y Hilbert se debió fundamentalmente a la falta de comunicación, producida por la ambigüedad y confusión de las palabras empleadas por ambos, que eran las mismas pero se referían a dos concepciones radicalmente distintas del método axiomático: la concepción antigua o tradicional, representada por Frege, y la concepción iniciada por Hilbert y otros matemáticos de su tiempo.

La concepción antigua o tradicional del método axiomático aparece ya formulada con toda claridad en los *Analíticos Posteriores* de Aristóteles y encuentra su plasmación paradigmática poco después en los *Elementos* de Euclides.

Una teoría axiomática, según la entendían Aristóteles y Euclides, es un conjunto de verdades acerca de un ámbito determinado de la realidad, conjunto organizado de tal manera que casi todos los conceptos que intervienen en la teoría son definidos a partir de unos pocos conceptos primitivos, que no se definen, y casi todas las verdades que componen la teoría son demostradas a partir de unas pocas verdades primeras o axiomas, que no se demuestran. Los conceptos primitivos no necesitan ser definidos, pues los conocemos intuitivamente. Y los principios primeros o axiomas no necesitan ser demostrados, pues su verdad es evidente y la captamos por intuición. Aplicar el método axiomático a un ámbito determinado de la realidad consiste en organizar nuestro saber acerca de ese ámbito en forma de teoría axiomática.

Esta concepción del método axiomático permaneció básicamente inalterada hasta finales del siglo XIX, si bien algunos detalles terminológicos y epistemológicos sufrieron ciertas variaciones. Así, a los principios primeros indemostrados, a los que Aristóteles llamaba axiomas e hipótesis, Euclides los llamaba principios comunes y postulados. Con el tiempo acabó generalizándose el nombre de axiomas para todos ellos. Así, también, mientras que Aristóteles pensaba que captamos la verdad de los axiomas de la geometría mediante una facultad de intelección a la que él llamaba *νοῦς*, Kant consideraba que la verdad de los axiomas de la geometría se capta en una especial intuición pura del espacio. Pero en que los axiomas eran verdades evidentes, captadas por algún tipo de intuición, prácticamente todos estaban de acuerdo. Incluso los empiristas extremos, que pretendían que llegábamos a los axiomas por inducción, aceptaban al menos que los axiomas eran verdades acerca de un ámbito determinado de la realidad.

Frege expuso y analizó el método axiomático tradicional con más claridad y precisión que nadie. Además lo perfeccionó considerablemente mediante la formalización. El método axiomático clásico consistía en explicitar los axiomas (que eran ideas verdaderas evidentes) y en exigir que todas las demás ideas afirmadas en la teoría fueran demostradas a partir de esos axiomas. Pero Frege se dio cuenta de que para maximizar el rigor de las demostraciones no basta con explicitar su punto de partida —los axiomas—, sino que también es necesario explicitar los métodos admisibles de demostración —las reglas de inferencia. La unívoca explicitación de las reglas de inferencia requería a su vez la formalización o formulación regimentada de axiomas, teoremas y pruebas. Pero para Frege la formalización sólo involucraba una precisión sintáctica, no un cambio semántico. Los enunciados del lenguaje ordinario daban lugar a las fórmulas del lenguaje formal, pero las fórmulas seguían siendo enunciados verdaderos, seguían expresando ideas, seguían cargadas de contenido significativo, seguían siendo *inhaltlich*. Frege representa la culminación de la concepción tradicional del método axiomático, que él expone con rigor incomparable.

Las geometrías no euclídeas

En la segunda mitad del siglo XIX se había reavivado el interés por el método axiomático, al tiempo que entraban en crisis algunos de sus supuestos tradicionales. A esta crisis contribuyó poderosamente el desarrollo de las geometrías no euclídeas. Ya Gauss había descubierto la posibilidad de desarrollar geometrías distintas de la euclídea e incompatibles con ella, pero había renunciado a publicar sus resultados por miedo al escándalo de los espíritus obtusos[7]. Bolyai y Lobatchevski desarrollaron geometrías que tomaban como axioma la negación del axioma euclídeo de las paralelas, y no vacilaron en publicar sus resultados. Así pues, en la segunda mitad del siglo XIX había diversos axiomas sobre las paralelas (correspondientes a teorías geométricas distintas) incompatibles entre sí. Todos estos axiomas no podían ser verdaderos al mismo tiempo. A lo sumo uno de ellos podía ser verdadero. Entre los geómetras se fue abriendo paso la opinión de que no había más razón para considerar verdadero a uno de estos axiomas que a los otros. Por tanto, ninguno de ellos era verdadero. Y si el axioma de las pararelas no era verdadero, tampoco tenían por qué serlo los demás. Así acabó considerándose que los axiomas son unos meros esquemas abstractos, que en sí mismos no son verdaderos ni falsos. Estos desarrollos resultaban inaceptables para los defensores de la concepción clásica del método axiomático, no sólo para los espíritus obtusos (como ya había previsto Gauss), sino incluso para mentes tan agudas como la de Frege.

Frege se opuso tenazmente a la nueva tendencia (que cada vez se abría más paso entre los geómetras) a considerar que en la matemática hay sitio para distintas geometrías, que cada geometría describe una estructura abstracta distinta y que ninguna geometría es en sí misma verdadera ni falsa. En su escrito póstumo «Sobre geometría euclídea», redactado durante la época de su polémica con Hilbert, escribe Frege patéticamente: «Nadie puede servir a la vez

[7] Véase, por ejemplo, la carta de C. F. Gauss a F. A. Taurinus de 1824.

a dos señores. No es posible servir a la vez a la verdad y a la falsedad. Si la geometría euclídea es verdadera, entonces la geometría no euclídea es falsa; y si la geometría no euclídea es verdadera, entonces la geometría euclídea el falsa. Si por un punto exterior a una recta pasa siempre una paralela a esa recta y sólo una, entonces para cada recta y para cada punto exterior a ella hay una paralela a esa recta que pasa por ese punto y cada paralela a esa recta por ese punto coincide con ella. Quien reconoce la geometría euclídea como verdadera, debe rechazar como falsa la no euclídea, y quien reconoce la no euclídea como verdadera, debe rechazar la euclídea... Ahora se trata de arrojar a una de ellas, a la geometría euclídea o a la no euclídea, fuera de la lista de las ciencias y de colocarla como momia junto a la alquimia y a la astrología... ¡Dentro o fuera! ¿A cuál hay que arrojar fuera, a la geometría euclídea o a la no euclídea? Ésa es la cuestión» [8]. La pregunta era retórica, pues para Frege resultaba claro que la geometría euclídea era la única verdadera y que todas las geometrías no euclídeas eran falsas.

La postura de Frege frente a las geometrías no euclídeas es completamente retrógrada y es un síntoma de su falta de comprensión y simpatía hacia las nuevas tendencias que se abrían camino en la matemática. Según el nuevo punto de vista, cada geometría describe una estructura abstracta. Los teoremas de la teoría no expresan de por sí ideas verdaderas o falsas acerca de ningún ámbito determinado de la realidad, aunque sean susceptibles de interpretación en diversos ámbitos. En definitiva, una geometría no es verdadera o falsa, aunque sí es verdadera o falsa la afirmación de que esa geometría es aplicable a un ámbito determinado de la realidad. Alguien podría haber pensado que, a pesar de todo, hay un ámbito privilegiado, el espacio físico, y que la geometría verdadera sería la aplicable en ese ámbito. Pero esta postura tampoco habría aportado consuelo duradero a los defensores a ultranza de la geometría

[8] G. Frege: *Über Euklidische Geometrie.* Publicado póstumamente en G. Frege: *Nachgelassene Schriften* (ed. por H. Hermes, F. Kambartel y F. Kaulbach), Felix Meiner Verlag, Hamburgo, 1969, pp. 182-184.

euclídea, como Frege. En efecto, pocos años después descubriría Einstein que si identificamos los puntos con las partículas físicas y las rectas con los rayos de luz, entonces resultaba que en el espacio físico así definido lo que se cumple no es la geometría euclídea, sino la geometría de Riemann, que es una geometría no euclídea.

¿De dónde le venía a Frege su seguridad en la verdad de la geometría euclídea? De su concepción kantiana de la geometría, cuyos axiomas se captarían por una intuición pura del espacio. «Al llamar sintéticas *a priori* a las verdades de la geometría, Kant ha descubierto su verdadera esencia[9].» Pero, al juzgar que Kant había descubierto la verdadera esencia de la geometría, Frege no se equivocaba menos que el mismo Kant se había equivocado cuando juzgó que la lógica había salido perfecta e incapaz de progreso de la mente de Aristóteles. Y lo mismo que la obra de Frege era la refutación más palpable del juicio kantiano sobre la lógica, la obra de los geómetras no euclídeos y de Hilbert era la más palpable refutación del juicio de Frege sobre la concepción kantiana de la geometría. En descargo de Kant habría que decir que éste no podía conocer una lógica que se desarrollaría 100 años más tarde, mientras que Frege sí conocía la geometría no euclídea. En general la actitud de Frege respecto a la geometría es bastante paradójica. Frege, fundador del programa logicista de reducción de la matemática a la lógica, excluye por completo a la geometría de su programa. Y Frege, crítico implacable de la concepción kantiana de la aritmética, acepta sin más y como definitiva la concepción kantiana de la geometría.

El método axiomático abstracto o hilbertiano

Al mismo tiempo que se daban a conocer las geometrías no euclídeas, un análisis más cuidadoso de los *Elementos* de Euclides reve-

[9] G. Frege: *Die Grundlagen der Arithmetik.* Breslau, 1884, pp. 101-102. Reimpreso en G. Olms Verlag, Hildesheim, 1977.

laba sus numerosas lagunas, que serían rellenadas en 1882 con la publicación por Moritz Pasch de la primera axiomatización lógicamente satisfactoria de la geometría euclídea. Y diversos matemáticos de la escuela italiana —Pieri, Veronese, Peano, etc.— habían empezado a propugnar explícitamente una concepción más abstracta del método axiomático. Todos estos fermentos culminaron en 1899 con la publicación por Hilbert de sus *Grundlagen der Geometrie.*

Con Hilbert el nuevo método axiomático alcanza su madurez, al menos respecto a la práctica del mismo. En el capítulo primero de los *Grundlagen der Geometrie* presenta los axiomas de la geometría euclídea, divididos en cinco grupos (de incidencia, de orden, de congruencia, de paralelas y de continuidad). Aquí no se hace uso de intuición ni conocimiento previo ninguno, sino que lo único que es lícito suponer de los puntos, rectas y planos, etc., es lo que explícitamente se dice de ellos en los axiomas. A la inversa, cualquier sistema de cosas de las que se pueda decir lo mismo que los axiomas dicen de los puntos, rectas, etc., puede considerarse como un modelo de la geometría. Como Hilbert indica a Frege en su carta del 29-12-1899: «Cada teoría no es sino un tinglado o esquema de conceptos junto con ciertas relaciones necesarias entre ellos, y sus elementos básicos pueden ser pensados arbitrariamente. Si entiendo por puntos, etc., cualquier sistema de cosas, por ejemplo el sistema formado por amor, ley, deshollinador, etc., y considero que todos mis axiomas resultan válidos para esas cosas, entonces también resultan válidos para esas cosas mis teoremas, como, por ejemplo, el de Pitágoras. Con otras palabras: cada teoría puede ser aplicada a una infinidad de sistemas de elementos básicos» [10].

Grundlagen der Geometrie aportó muchas y notables novedades a la geometría, desde el desarrollo de la geometría plana, y en especial de la teoría de las proporciones, con independencia del axioma arquimediano, cuya prescindibilidad mostró Hilbert, hasta las pruebas de consistencia e independencia ya aludidas, pasando por

[10] G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel,* Hamburgo, 1976, p. 67.

importantes resultados sobre los teoremas de Desargues y de Pascal. Con la publicación de esta obra se impuso el nuevo método axiomático, y ello a pesar de que Hilbert no exponía en absoluto en qué consistía ese método, limitándose a aplicarlo sin comentarios. Pero, como ha señalado Freudenthal, «en el ejemplo profundamente elaborado de una teoría axiomática, como lo son los *Grundlagen*, hay una fuerza de convicción infinitamente mayor que en las exposiciones filosóficas y programáticas...» [11].

Frege, analista del método hilbertiano

Frege, que se oponía frontalmente al nuevo método axiomático, acompañó (sobre todo en sus artículos de 1906) sus críticas de análisis frecuentemente iluminadores y profundos de aspectos del mismo, análisis muy superiores a cuanto el mismo Hilbert había dicho de su propio método.

Así, analizando el funcionamiento de las palabras «punto», «recta», etc., en la geometría axiomática de Hilbert, Frege se da cuenta de que dichas palabras son como lugares vacíos que sirven para expresar generalidad, lo mismo que ocurre con las letras en álgebra. E incluso llega a proponer y ejemplificar el uso de letras para indicar esos lugares, tal y como haríamos ahora. «Si las palabras 'punto', 'recta', etc., no designan nada, sino que se limitan a indicar generalidad como las letras en la aritmética, sería muy útil para una más clara comprensión de la situación que empleásemos efectivamente letras con esa finalidad. Vamos a estipular lo siguiente: En vez de 'el punto *A* está en el plano α' diremos '*A* está en la relación-*p* con α'. En vez de 'el punto *A* está en la recta *a*' diremos '*A* está en relación-*q* con *a*'. En vez de '*A* es un punto' diremos '*A* es un Π' [12].»

[11] H. Freudenthal: «Die Grundlagen der Geometrie und die Wende des 19. Jahrhunderts», *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, vol. 7 (1961), pp. 16-17.

[12] G. Frege: «Über die Grundlagen der Geometrie, II», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 15 (1906), p. 388. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften* (ed. por J. Angelelli), Hildesheim, 1967, pp. 304-305.

Analizando las múltiples interpretaciones a que Hilbert somete sus conceptos, Frege propone comparar la teoría axiomática de Hilbert con un sistema de ecuaciones con varias incógnitas. Cada sistema de conceptos que satisface la teoría es como una solución de esas ecuaciones [13]. Con esto Frege se acerca mucho a la posterior aclaración de la situación por Tarski en función del concepto de modelo. Pero Frege se deja llevar por su espíritu polémico, preguntándose: «¿Quién nos dice que este sistema de ecuaciones tenga alguna solución y que ésta sea unívoca?» [14]. Que el sistema tiene alguna solución debería estar claro para Frege, pues Hilbert mismo la ha presentado en el modelo aritmético que le sirve para probar su consistencia. Pero la solución no es, ni pretende ser, unívoca. Precisamente en la multiplicidad de soluciones, interpretaciones o modelos ve Hilbert —y con él toda la matemática posterior— la principal ventaja del nuevo método axiomático.

Frege es un crítico implacable del uso más bien confundente que Hilbert hace de las palabras «definir» y «definición», que tan pronto emplea en el sentido de definiciones nominales explícitas —como cuando define el triángulo— como en el sentido de determinación mediante los axiomas. Contra las definiciones explícitas Frege no tiene nada: son meras estipulaciones. Pero se niega a aceptar que los axiomas definan —implícitamente, se diría luego, aunque la expresión no es de Hilbert— los conceptos (de primer orden) de *punto, recta, plano, ... incide con..., ... es congruente con..., ... está entre... y...*, como pretendía Hilbert. En esto tenía razón Frege. Pero Hilbert veía claro que con sus axiomas algo quedaba definido, aunque no sabía expresarlo bien. El propio Frege se lo articuló mejor en su carta de 6 de enero de 1900, cuando le escribe: «Me parece que lo que usted en realidad quiere definir son conceptos de segundo orden, pero que usted no los distin-

[13] G. Frege: «Über die Grundlagen der Geometrie», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 12 (1903), p. 370. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, Hildesheim, 1967, p. 268.

[14] Ibídem.

gue claramente de los de primer orden» [15]. En efecto, los axiomas de Hilbert definen algo —como él decía—, pero lo que definen —y no implícita, sino explícitamente— no son los conceptos de primer orden de punto, recta, etc., sino el concepto de segundo orden de espacio euclídeo, o, como hoy diríamos, la estructura abstracta de espacio euclídeo.

Aquí como en tantas otras cosas Frege podía hacer aportaciones esenciales al desarrollo, aclaración y explicitación del nuevo método axiomático, con lo que se hubieran quemado etapas que luego costaría arduos esfuerzos y largo tiempo recorrer. Pero el carácter polémico y huraño de Frege, unido a una cierta altivez de Hilbert, condujeron la polémica al estéril marasmo en que acabó.

Consistencia

En el capítulo segundo de sus *Grundlagen* ofrece Hilbert una prueba de la consistencia de sus axiomas, indicando un modelo numérico, es decir, un sistema de cosas que satisfacen todos los axiomas de la teoría y donde los puntos son ciertos pares de números algebraicos, las rectas, ciertos tríos de números algebraicos, donde la incidencia de una recta con un punto quiere decir la validez de una cierta ecuación numérica, etc. Con esto queda probada la consistencia de los axiomas, no la consistencia absoluta, claro, pero sí la consistencia relativa al análisis matemático.

La falta de comprensión por Frege del nuevo método se manifiesta en sus críticas a la prueba de consistencia de Hilbert, a quien echa en cara el cambio de significado de palabras como «punto», que en el libro de Hilbert tan pronto significan punto como par de números algebraicos (que es algo muy distinto), etc. Hilbert, por el contrario, ve en esa multiplicidad de interpretaciones la principal ventaja del nuevo método axiomático.

Frege considera completamente inútil ofrecer una prueba de

[15] G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburgo, 1976, p. 74.

consistencia de los axiomas, pues la consistencia se sigue de la verdad y los axiomas son por definición verdaderos. Frege escribe a Hilbert: «Llamo axiomas a los enunciados verdaderos, pero indemostrados... De la verdad de los axiomas ya se sigue que éstos no se contradicen entre sí. Por tanto eso no requiere prueba alguna adicional» [16]. Como señala Dummett [17], no deja de resultar irónico que Frege dijera esto precisamente poco antes de que Russell descubriese que los axiomas del propio Frege eran contradictorios. Pero Frege mantuvo hasta el final su concepción tradicional de la verdad de los axiomas y de la superfluidad de las pruebas de consistencia de los mismos.

En su carta de respuesta a la citada de Frege, Hilbert responde a la objeción fregeana de que no es necesario probar la consistencia de los axiomas, pues ésta se sigue de su verdad: «Siempre que yo pienso, escribo y hablo sobre estos temas, cada vez digo precisamente lo contrario: Si los axiomas arbitrariamente establecidos, junto con sus consecuencias, no se contradicen entre sí, entonces son verdaderos, entonces existen las cosas definidas por los axiomas. Éste es para mí el criterio de la verdad y de la existencia» [18]. La manera de expresarse de Hilbert no es correcta. Si los axiomas no son contradictorios, son consistentes, pero no verdaderos. Los axiomas abstractos en el sentido de Hilbert no son el tipo de entidad de la que pueda predicarse la verdad o falsedad. ¿Qué decir de su segunda afirmación, la de que de la consistencia de los axiomas se sigue —en terminología actual— la existencia de un modelo? Hoy sabemos que toda teoría consistente de primer orden posee un modelo. Por tanto Hilbert tenía parte de razón. Pero no tenía toda la razón, pues su geometría axiomatizada era una teoría de segundo orden (por el axioma de continuidad) y no ocurre que toda teoría consistente de segundo orden tenga un modelo. De

[16] G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburgo, 1976, p. 63.

[17] M. Dummett: *Frege on the Consistency of Mathematical Theories*. En M. Schirn (ed.): *Studien zu Frege I. Logik und Philosophie der Mathematik*, Frommann-Holzboog, Stuttgart, 1976, p. 241.

[18] En G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburgo, 1976, p. 66.

todos modos, si aceptamos modelos generales no estándar de segundo orden, entonces sí que también cada teoría consistente de segundo orden tiene un modelo, pero es dudoso que Hilbert los aceptase o pudiese pensar siquiera en ellos.

Dummett ha escrito que «cuando nos las habemos con una teoría genuina, es decir, una para la que tenemos una interpretación determinada, bajo la cual creemos que sus axiomas son verdaderos, no tiene sentido hablar de que encontramos un tal modelo (es decir, uno que sirva para probar su consistencia), pues ya tenemos un modelo» [19]. Esto parece una defensa de la postura de Frege, pero no lo es. Dummett se refiere a la aritmética, no a la geometría. Y en el caso de la geometría euclídea, que es el que nos ocupa, no poseemos tal modelo (el candidato más obvio, que sería el espacio físico, no lo es o al menos es muy discutible que lo sea). De ahí el interés en buscar un tal modelo en zonas más seguras, como pueda ser el análisis matemático (restringido a números algebraicos).

Independencia

Su concepción abstracta del método axiomático permite a Hilbert ofrecer pruebas de independencia de sus axiomas, probando que cada axioma es independiente de los demás mediante la indicación de un sistema que satisface a los demás axiomas, pero no a aquel cuya independencia se trata de probar. Con lo cual, al tiempo que prueba la independencia del axioma de las paralelas, prueba la consistencia de la geometría no euclídea (relativa a la euclídea). El proceder de Hilbert en sus pruebas de independencia es irreprochable, pero Frege no las aceptaba, pues le echaba en cara el uso de modelos en que algún axioma resultaba falso, lo cual sería absurdo, pues un axioma no puede ser falso.

[19] M. Dummett: *Frege on the Consistency of Mathematical Theories*. En M. Schrin (ed.): *Studien zu Frege I. Logik und Philosophie der Mathematik*, Stuttgart, 1976, p. 242.

En 1900 y 1903 Frege se limita a rechazar las pruebas hilbertianas de independecia. Pero luego dedica mayor atención al tema y en sus artículos de 1906 llega a hacer propuestas constructivas al respecto. Empieza por definir la independencia de una idea o proposición respecto a otras como la imposibilidad de inferir la primera a partir de las últimas en un número finito de pasos[20]. (Esto, sabemos hoy, sólo es aceptable si el cálculo es suficiente —o semánticamente completo—, lo cual no es el caso del de Frege ni de ninguno de segundo orden.)

Luego Frege, adelantándose a Tarski, constata que con las pruebas de independencia se inicia una nueva actividad en la matemática, lo que luego se llamaría la metamatemática. «¿Cómo podemos probar la independencia de una proposición respecto de un grupo de otras proposiciones? Lo primero sobre lo que hay que llamar la atención es que con esta pregunta penetramos en un territorio que hasta ahora ha sido ajeno a la matemática. Pues aunque la actividad matemática como la de cualquier otra ciencia se realiza mediante proposiciones, las proposiciones mismas no son por lo demás objeto de su consideración. También la independencia de una proposición respecto a un grupo de proposiciones es distinta de las relaciones que normalmente son objeto de la investigación matemática...»[21]

A continuación Frege propone un método para probar la independencia de proposiciones[22]. El método para probar que una proposición o idea α es independiente de n ideas $\beta_1 \ldots \beta_n$ consiste en sustituir las constantes no lógicas que aparecen en $\alpha, \beta_1 \ldots \beta_n$ por otras constantes distintas de la misma categoría tales que $\beta_1 \ldots \beta_n$ se transforman en ideas verdaderas y α en una idea falsa. Lo cual, como ya señaló Steiner[23], es equivalente al proceder hilbertiano,

[20] G. Frege: «Über die Grundlagen der Geometrie, III», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 15 (1906), pp. 423-424. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, Hildesheim, 1967, p. 318.

[21] Ibídem. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, p. 320.

[22] Ibídem. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, pp. 321-322.

[23] H. G. Steiner: «Frege und die Grundlagen der Geometrie, II», *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, vol. 11 (1964), p. 42.

aunque Frege parece no haberse dado cuenta de ello. En cualquier caso aquí abandonó sus, por lo demás, muy prometedoras reflexiones sobre el tema.

Deducción

En una teoría axiomática abstracta los teoremas se prueban a partir de los axiomas según las reglas de inferencia establecidas y sin tener en cuenta para nada las posibles interpretaciones de los mismos. Lo único que una tal prueba nos garantiza entonces —si las reglas son correctas— es que cada interpretación que satisfaga los axiomas —que los convierta en ideas verdaderas— satisfará también los teoremas —los convertirá igualmente en ideas verdaderas. Esta manera abstracta y formal de proceder es descrita correctamente por Frege «como si hubiera que probar una mera formulación que no exprese idea alguna, y como si luego hubiera que asignar a esa formulación ideas distintas en dominios distintos». Pero a continuación añade: «¡Absurdo! Una mera formulación sin contenido no puede ser probada» [24].

Frege no admite las pruebas abstractas por dos razones. En primer lugar, porque parten de axiomas abstractos o —como él dice— pseudoaxiomas, que no expresan idea alguna, mientras que una inferencia sólo puede partir de una idea y llevar a otra. «De que los pseudoaxiomas no expresan idea alguna se sigue además que no pueden ser premisas de una cadena de inferencias... Con los pseudoaxiomas no tenemos todavía ninguna idea y, por lo tanto, tampoco premisa alguna [25].» En segundo lugar Frege no acepta la inferencia basada en las solas reglas de inferencia, capaces de aplicarse a meras formulaciones, sino que exige que la inferencia se base en actos psíquicos de juicio. «Una inferencia no

[24] G. Frege: «Über die Grundlagen der Geometrie, II», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 15 (1906), p. 385. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, Hildesheim, 1967, p. 302.
[25] Ibídem. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, p. 306.

pertenece al campo de los signos, sino que es un acto de enjuiciamiento [*Urteilsfällung*], que se realiza sobre la base de juicios anteriores según las leyes lógicas. Cada premisa es una idea reconocida como verdadera y en el juicio inferencial se reconoce igualmente una cierta idea como verdadera[26].» Como ha señalado Resnik[27], de ahí se sigue que no se puede hacer una inferencia a partir de una premisa cuya verdad no se reconoce y que la inferencia lógica pierde su intersubjetividad. Si fulano acepta α como verdad, puede inferir $\alpha \vee \beta$ a partir de α. Si mengano no acepta α como verdad, no puede inferir $\alpha \vee \beta$ a partir de α. La inferencia lógica pasa así a depender de hechos psíquicos subjectivos, tales como el de que alguien acepte o no la verdad de una idea. Como el mismo Resnik ha indicado[28], con esto cae Frege en el psicologismo, que él tanto había combatido, y abandona sin darse cuenta su principio de separación tajante entre lógica y psicología. (Y además, como ha señalado P. Geach[29], en el suplemento a *Grundgesetze II* el mismo Frege se ve obligado a realizar —y realiza— inferencias a partir de premisas no aseveradas.)

Es curioso que Hilbert, utilizando palabras cargadas de significado intuitivo —'punto', 'recta', etc.—, pretenda emplearlas como signos vacíos de significación, *inhaltsleer*, y que, careciendo de un cálculo deductivo o de reglas de inferencia explícitamente formuladas, pretenda proceder de un modo formal y abstracto en sus deducciones, mientras que Frege, empleando signos y expresiones formalizadas, pretende escribir enunciados de significación unívoca, *inhaltlich*, y, disponiendo de un cálculo deductivo formal perfectamente desarrollado, pretenda limitarse a registrar la cadena de juicios por la que un sujeto va reconociendo la verdad de ciertas ideas.

[26] Ibídem. Reimpreso en G. Frege: *Kleine Schriften*, pp. 303-304.

[27] M. D. Resnik: «The Frege-Hilbert Controversy», *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 34 (1973-74), pp. 386-403. Publicado en alemán en M. Schirn (ed.): *Studien zu Frege I. Logik und Philosophie der Mathematik*, Stuttgart, 1876, p. 210.

[28] Ibídem. Véase M. Schirn (ed.): *Studien zu Frege I*, pp. 211-212.

[29] P. Geach: *Second Order Quantification in Frege*. Simposio sobre Lógica y Filosofía en Frege, celebrado en Peñíscola en noviembre de 1979.

En realidad Frege podría haber aportado a las deducciones formales abstractas de Hilbert el soporte de un sistema explicitado de reglas de inferencia que aquéllas requerían para su perfección. Pero Frege prefirió polemizar, en vez de colaborar en la empresa hilbertiana, y Hilbert no echó mano del cálculo de Frege, sino que acabó desarrollando el suyo propio treinta años más tarde, aunque reconociendo la primacía de Frege en este campo.

Teorías concretas y abstractas

La polémica resultó estéril, a pesar de que entre sus dos protagonistas ya poseían todos los prerrequisitos necesarios para zanjarla mediante un salto hacia adelante. Pasaron los años, Frege murió y Hilbert acabó dándose cuenta de que en realidad Frege y él habían estado hablando de cosas distintas. Así, en la introducción al tomo I de sus *Grundlagen der Mathematik*[30], publicado en 1934, Hilbert distingue claramente entre lo que llama allí *inhaltliche Axiomatik* y *formale Axiomatik,* o, como diríamos nosotros, entre teorías concretas y teorías abstractas. Cuando él había hablado antes de teoría, se refería siempre a las teorías abstractas, mientras que Frege lo hacía a las concretas. Por eso no se entendían y la polémica fue un diálogo de sordos.

Según Hilbert, el desarrollo consecuente del método axiomático conduce a las teorías abstractas, tanto en la matemática como en la física. Ya en su carta a Frege del 29-12-1899 Hilbert señala que «naturalmente todos los teoremas de una teoría electromagnética son también válidos para cada sistema de cosas que pongamos en lugar de la electricidad, el magnetismo, etc., siempre que resulten satisfechos los correspondientes axiomas» [31]. Y 35 años más tarde, en *Grundlagen der Mathematik,* pone como ejemplos de

[30] D. Hilbert y P. Bernays: *Grundlagen der Mathematik I,* Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, 1934 (2.ª edición, 1968), p. 2.
[31] G. Frege: *Wissenschaftlicher Briefwechsel,* Hamburgo, 1976, p. 67.

teoría axiomática abstracta, junto a la geometría euclídea, la mecánica de Newton y la termodinámica de Clausius[32]. E incluso postula la necesidad de probar la consistencia de las teorías abstractas de la física mediante la indicación de modelos aritméticos de las mismas[33].

Pero en definitiva ¿qué es una teoría abstracta y qué es una teoría concreta? ¿En qué se diferencian? La ontología fregeana puede ayudarnos a responder a esta cuestión.

Como es bien sabido, las categorías fundamentales de la ontología de Frege son las de objeto y función[34]. Todo lo que hay o es objeto o es función. Un objeto es algo completo o saturado —*gesättigt*. Una función es algo incompleto o insaturado —*ungesättigt*. Pero al añadir un objeto (el argumento) a la función (monaria), la completamos o saturamos, obteniendo así otro objeto (el valor de esa función para el primer objeto). Frege exigía que la función estuviese determinada o definida para todos los objetos sin excepción, es decir, que asignase un valor a cada uno de ellos. De todos modos esa exigencia representa una complicación innecesaria e inesencial de su concepción. De hecho nos basta con que la función esté definida para los objetos de un ámbito o dominio determinado, su dominio de definición.

Una teoría abstracta es homóloga con un sistema (o entidad formada en el caso más sencillo por una clase no vacía —su universo— y una serie de relaciones y funciones sobre esa clase) cuando tiene tantos conceptores relacionales y funcionales como relaciones y funciones tiene el sistema, y cuando los correspondientes números arios son los mismos.

Haciendo uso de las categorías ontológicas fregeanas, podríamos decir que una teoría concreeta es un determinado objeto, a

[32] D. Hilbert y P. Bernays: *Grundlagen der Mathematik I*, p. 1.

[33] Ibídem, p. 3.

[34] La ontología fregeana está claramente expuesta en sus artículos *Funktion und Begriff*, *Über Begriff und Gegenstand* y *Was ist eine Function?*, reimpresos en *Kleine Schriften* (ed. por J. Angelelli) y traducidos al español por U. Moulines en G. Frege: *Estudios sobre semántica*, Ariel, Barcelona, 1971 (reedición, 1984).

saber, un conjunto de proposiciones (verdaderas o falsas) sobre un cierto sistema. Una teoría abstracta, por el contrario, no sería un objeto, sino una función, a saber, una función que tiene como dominio de definición el conjunto de los sistemas homólogos con ella y tal que a cada sistema homólogo aplica unívocamente una teoría concreta determinada. A la teoría concreta que la teoría abstracta aplica a un sistema dado se la llama también la interpretación de esa teoría abstracta en ese sistema.

Una teoría abstracta es una función compuesta. Cada una de las fórmulas que la componen es a su vez una función que a cada sistema homólogo aplica unívocamente una idea o proposición. Según que esa idea sea verdadera o falsa, decimos que el sistema satisface o no esa fórmula. El conjunto de las ideas que las diversas fórmulas de la teoría abstracta aplican a un sistema determinado constituye precisamente la teoría concreta que esa teoría abstracta aplica a ese sistema (o, equivalentemente, la interpretación de esa teoría abstracta en ese sistema). Y si la teoría concreta aplicada por la teoría abstracta es verdadera (es decir, si todas sus ideas lo son), entonces decimos que ese sistema es un modelo o realización de esa teoría abstracta.

Como vemos, no sólo a nivel sintáctico, metodológico y semántico, sino incluso a nivel ontológico Frege poseía los instrumentos conceptuales para obtener una clarificación del método axiomático abstracto. Desde su polémica con Hilbert ha llovido mucho y mucho se ha progresado. Pero la completa clarificación de lo que sea una teoría abstracta y una concreta y de las interrelaciones entre ambas —tanto en la matemática (donde las cosas se han aclarado bastante, gracias al desarrollo de la teoría de modelos) como en la física (donde el asunto apenas ahora empieza a ser investigado) y aun en otros campos— sigue constituyendo un reto para cualquier filosofía rigurosa de la ciencia.

CAPÍTULO 8

HISTORIA Y TEORÍA ABSTRACTA

Sistema y estructura

Voy a sostener la tesis de que toda teoría es matemática. Naturalmente esta tesis sólo es defendible si usamos la palabra *teoría* en cierto sentido [1], pero no en otros.

Se ha cometido un crimen y enseguida circulan diversas teorías acerca de quién haya sido el asesino o de cuáles hayan sido sus motivos. Evidentemente estas teorías no tienen nada de matemáticas. Son meras hipótesis acerca de ciertos individuos concretos, sus relaciones y sus motivos. Nosotros no vamos a llamarlas teorías. Vamos a llamarlas historias o, mejor dicho, hipótesis históricas.

La palabra *historia* suele usarse frecuentemente en un sentido sumamente restringido, como teniendo que ver únicamente con los asuntos humanos y su ordenación temporal. Nosotros vamos a usar *historia* en un sentido mucho más amplio, que además es su sentido originario. La historia, así entendida, trata de todo tipo de asuntos, humanos o no humanos, y no tiene por qué ser temporal.

[1] En el capítulo anterior hemos establecido la distinción entre teorías concretas y teorías abstractas. En este capítulo usaremos siempre la palabra *teoría* en el sentido de *teoría abstracta.*

En toda ciencia hay un componente histórico y otro teórico, hay historia y teoría.

Tanto la historia como la teoría son de algún modo tinglados lingüísticos, descripciones. ¿Descripciones de qué? Una historia es la descripción de un sistema. Una teoría es la descripción de una estructura. De momento quizá esto no resulte muy iluminador, dado el uso confuso e intercambiable que suele hacerse de las palabras *sistema* y *estructura*.

Por sistema, a veces, se entiende sencillamente conjunto, como cuando se llama sistema de ecuaciones a un conjunto de ecuaciones. Otras veces por sistema se entiende método, como cuando nos hablan del mejor sistema para dejar de fumar. En algunos contextos se usa *sistema* como sinónimo de lo que aquí llamaremos estructura, como en el caso de los sistemas cristalinos (monoclínico, triclínico, etc.) en cristalografía. En otros muchos casos, finalmente (y es el uso que aquí vamos a retener), por *sistema* se entiende un conjunto bien delimitado de objetos, junto con ciertas propiedades, posiciones e interrelaciones bien definidas entre los mismos. Así, hablamos del sistema bancario español, del sistema monetario internacional, del sistema solar, del ecosistema del lago Baikal o del sistema relacional formado por los números enteros y la relación *menor que* entre ellos.

La palabra *estructura* se emplea a veces para designar el conjunto de vigas y columnas de un edificio, como cuando se dice de él que tiene una estructura metálica. En la lógica matemática se usa *estructura*[2] por bastantes autores como sinónimo de lo que aquí llamamos sistema. En la mayor parte de los casos, finalmente —y éste será el sentido que aquí retendremos— se emplea *estructura*

[2] La palabra *estructura* se usa frecuentemente de un modo ambiguo en la lógica y en la matemática. Por un lado se llama estructura a lo que aquí llamamos sistema, por ejemplo, a un grupo concreto. Por otro lado se llama estructura a lo que aquí llamamos estructura, por ejemplo, a lo que tienen en común todos los grupos, la estructura de grupo. Algunos autores tratan de distinguir ambas nociones, llamándolas respectivamente estructura y especie de estructura, o estructura concreta y estructura abstracta. En este capítulo usaremos siempre la palabra *estructura* en el sentido de *estructura abstracta* (o especie de estructura).

para referirse a ciertos rasgos más o menos formales comunes a varios sistemas. Así hablamos de la estructura del átomo de helio (es decir, de algo que tienen en común todos los átomos de helio), de la estructura hexagonal que con frecuencia se encuentra en los paneles de miel, de la estructura de un compuesto químico (expuesta en su fórmula estructural), de la estructura radial de los equinodermos, de la estructura alfabética de ciertas enciclopedias, de la estructura de grupo que tienen muchos sistemas matemáticos, etc.

En el sentido en que aquí usamos estas palabras, una estructura es algo más abstracto que un sistema. En cierto modo podemos decir que un sistema es una cosa, aunque se trate de una cosa sumamente compleja. Siguiendo una tradición de vieja prosapia platónica, podemos llamar formas a los rasgos comunes a varias cosas. Las formas son así más abstractas que las cosas. Pues bien, si los sistemas son cosas, las estructuras son las formas de esas cosas, las formas de los sistemas. Naturalmente una misma cosa puede tener varias formas (de animal, de gato, de hembra, de cuadrúpedo, de pelaje pardo moteado de gris, etc.), y de igual modo un mismo sistema puede tener varias estructuras. Por ejemplo, el sistema formado por los números enteros y la adición tiene estructura de semigrupo, de grupo, de grupo abeliano, etc.

Historia y teoría

Después de haber indicado de un modo provisional el sentido en que vamos a emplear las palabras *sistema* y *estructura,* podemos volver a las nociones de historia y teoría.

La noción clásica de historia era muy amplia. Para Aristóteles lo peculiar de la historia consiste en que se ocupa de lo particular. Desde luego, la historia, tal como la concebían los griegos y los romanos, no tenía por qué ser temporal ni tenía por qué ocuparse de los asuntos humanos. Al estudio temporal de los asuntos humanos lo llamaban *crónica.* La crónica es un tipo de historia entre otros. Pero no toda historia es crónica. Por ejemplo, la mayor parte de lo que ahora llamamos geografía y etnografía era también historia para los griegos. De hecho los primeros libros de historia, las *Historiai* de Herodoto, el «padre de la historia», son una mezcla de geografía, etnografía y crónica. Así, por ejemplo, el libro segundo, que trata de Egipto, dedica los primeros capítulos a la geografía del país y en especial al río Nilo, sus fuentes, su curso y sus crecidas; los siguientes capítulos tratan de la etnografía de los egipcios, sus costumbres y su religión; y los capítulos últimos constituyen una crónica del antiguo Egipto, desde Menes, su primer rey, hasta el reinado de Amasis. Así como no toda historia es crónica, así tampoco toda historia trata de asuntos humanos. La obra más extensa de Aristóteles, que recoge una enorme cantidad de observaciones zoológicas, se llama *Historia de los animales (Perì ta zôia historíai),* y no es cronológica ni de tema específicamente humano. El biólogo antiguo Plinio llamaba *historia naturalis* a la descripción de la naturaleza, y esa expresión se ha conservado. Los museos de minerales, plantas y animales siguen llamándose museos de historia natural. Y en la primera página de un libro de texto actual de geología podemos leer: «El objeto fundamental de la geología es proporcionar una historia detallada de la Tierra; *la geología es la historia de la Tierra*»[3].

Aquí vamos a hacer nuestra esta amplia noción antigua de historia. Cualquier dato o información acerca de un sistema contribuye a la historia del sistema y forma parte de ella. La historia total del sistema sería la total descripción del sistema. Cualquier descripción parcial del mismo constituye una historia parcial suya.

En todas las ciencias se registran datos, se buscan datos, se sistematizan datos, se enuncian hipótesis, se contrastan con los hechos, en definitiva, se hace historia. La astronomía observacional, por ejemplo, es pura historia. Se registran las posiciones de los astros en el firmamento y se sistematizan. Se describe el sistema del cielo visible. Tycho Brahe fue el más grande historiador astronómico de

[3] H. H. Read y J. Watson: *Introduction to Geology*, MacMillan Co., Londres, 1965.

su tiempo. Su historia fue ampliada y publicada por Kepler en sus *Tablas rudolfinas* en 1627. A diferencia de Brahe, Kepler no era sólo un historiador, sino también un teórico, pero nunca habría podido construir su teoría sin la ayuda de la historia astronómica de Brahe. Con la introducción del telescopio óptico, las observaciones a ojo desnudo de Brahe y Kepler podían ser mejoradas, y a esa tarea dedicó su vida el primer astrónomo real de Inglaterra, Flamsteed, cuya historia estelar suministró nuevos datos que fueron tenidos en cuenta por otros teóricos, en especial por Newton. La sistemática biológica entera, desde Linné, que estudiaba «el sistema de la naturaleza», hasta nuestros días, es básicamente una historia de la naturaleza. Todas las estadísticas son historia. Y todos los experimentos pertenecen a la metodología de la historia, no de la teoría. En definitiva en todas las ciencias, tanto sociales como naturales, la mayor parte del trabajo se dedica a establecer la historia del sistema en cuestión, a recoger datos históricos, a enunciar hipótesis históricas, a tratar de describir la realidad.

Así como la palabra *historia* siempre ha estado asociada con la descripción de lo particular, la palabra *teoría* siempre ha subrayado la generalidad de lo tratado. Según Aristóteles no hay teoría de lo particular, sino sólo de lo universal. De todos modos el sentido con que vamos a usar aquí la palabra *teoría* es moderno, y no aparece explícitamente formulado hasta Hilbert. Hilbert fue el primero que supo dar cuenta de la revolución producida por el desarrollo de las geometrías no euclídeas. Su concepción de una teoría geométrica, que pronto generalizó a cualquier teoría matemática o física, es el punto de partida de la concepción aquí expuesta. La idea fundamental de Hilbert estriba en que la geometría euclídea no es la descripción del espacio físico, ni de la intuición espacial humana (como había pensado Kant), ni de ninguna realidad concreta. En definitiva, la geometría euclídea no es una historia, sino una teoría, la descripción de una estructura abstracta, estructura que puede realizarse o no realizarse en el espacio físico, en la intuición humana, etc. Por eso puede haber tantas geometrías distintas e incompatibles entre sí, tantas como estructuras abstractas seamos capaces de definir, con independencia de cualquier realidad. Y esta situación no implica contradicción alguna, pues los teoremas de que se compone la teoría no son verdaderos ni falsos, a diferencia de las ideas de que se compone la historia, que sí son verdaderas o falsas.

Sistemas homogéneos y heterogéneos

La realidad está frente a nosotros, tras nosotros, en nosotros, rodeándonos, muda, opaca, mostrenca, sobrecogedora, pero inarticulada. Si queremos describir alguna parcela de la realidad, estudiarla, historiarla, hemos de empezar por definirla o delimitarla de algún modo. Esta delimitación puede efectuarse de diversas maneras. A cada una de esas maneras de deliminar una parcela de la realidad corresponde un sistema distinto.

Para definir un sistema hay que indicar el conjunto (o conjuntos) de cosas de que vamos a hablar y que constituirán el dominio o universo (o universos) del sistema, así como las relaciones entre esas cosas en que vamos a fijarnos. Esto puede realizarse desde muy diversos puntos de vista, incluso habiéndonoslas con una misma parcela de la realidad. Supongamos que nos encontramos con una máquina expendedora de paquetes de cigarrillos. Por un lado, podemos considerar que el universo de ese sistema está formado por una serie de palancas, resortes, piezas metálicas y cajetillas, interrelacionadas entre sí por ciertas relaciones mecánicas. Por otro lado, podemos considerar que el sistema que nos interesa está formado por las entradas (introducir una moneda por la ranura, apretar un botón, etc.) de la máquina, sus salidas (devolver la moneda, expender un paquete de cigarrillos, etc.), sus estados internos (cargada, vacía, etc.) y ciertas relaciones entre sus entradas, estados y salidas. Al comerciante y al consumidor les interesa sobre todo este segundo sistema. Al fabricante de la máquina o al mecánico que la repara les interesa más el primer sistema. De algún modo ambos sistemas son diversos aspectos de una misma realidad subyacente: la máquina expendedora. Pero no podemos estudiar las realidades subyacentes en sí, con independencia de toda delimitación, definición, caracterización o punto de vista. Sólo podemos estudiar la realidad delimitándola de algún modo, articulándola de alguna manera, decidiendo qué aspectos de ella vamos a tomar en consideración.

En el ejemplo anterior, una misma parcela de la realidad era considerada desde dos puntos de vista, dando lugar a dos sistemas con universos distintos. Pero incluso considerando la misma parcela de la realidad como constituida por el mismo universo, sigue siendo posible definir sobre ese universo sistemas distintos. Basta con considerar relaciones diferentes entre los elementos de ese universo. Así, por ejemplo, podemos considerar varios sistemas sociales que tengan como universo común el conjunto de los habitantes de una determinada isla. Si nos fijamos en sus edades y en sus interrelaciones de coetaneidad, obtendremos un sistema (por ejemplo, una pirámide de edades) distinto que si nos fijásemos en sus ingresos, gastos, ahorros, consumo, etc. (en cuyo caso obtendríamos un cierto sistema económico). También podemos interesarnos por sus relaciones de parentesco biológico o de parentesco jurídico, o por sus relaciones afectivas y sentimentales, o por los grupos sanguíneos de la población, o por las relaciones de prioridad protocolaria que se manifiestan en el lugar ocupado por los habitantes en ciertas ceremonias. Todas estas distintas relaciones dan lugar a sistemas distintos. También podemos combinar varias de ellas en un nuevo sistema más complejo. Lo único importante es que especifiquemos claramente en cada caso qué conjunto (o conjuntos) de cosas vamos a considerar como universo (o universos) del sistema y en qué relaciones (y funciones, propiedades o posiciones) vamos a fijarnos explícitamente. Con ello quedará definido el sistema.

Un sistema con un solo universo es un sistema homogéneo. Un sistema con varios universos es un sistema heterogéneo.

Precisemos un poco más. Un sistema homogéneo es un conjunto ordenado, formado por una clase no vacía, A, llamada el universo del sistema, y una secuencia de entidades distinguidas, es decir, de individuos de A, de propiedades de individuos de A, de relaciones entre individuos de A y de funciones entre individuos de A. Desde luego no es necesario que haya entidades distinguidas de todos estos tipos. Sea H el conjunto de los habitantes de una isla determinada, sea P la relación de progenitura (en que están los progenitores —padres o madres— con sus infantes), sea O, A, B y AB las propiedades de tener el correspondiente grupo sanguíneo. Entonces $\langle H; P \rangle$ es un sistema de progenitura entre los habitantes de la isla, $\langle H; O, A, B, AB \rangle$ es un sistema de grupos sanguíneos de esos mismos habitantes y $\langle H; P, O, A, B, AB \rangle$ es un sistema sobre los mismos habitantes (con el mismo universo) que abarca tanto la progenitura como los grupos sanguíneos. En jerga técnica se dice que este sistema es una expansión de cualquiera de los otros dos. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales, sea 0 el número racional cero, sea + la adición entre números racionales y sea < la relación *menor que* entre números racionales. Entonces $\langle \mathbb{Q}; + \rangle$ es un sistema; $\langle \mathbb{Q}; +, 0 \rangle$ es otro sistema (con el mismo universo), que es una expansión del anterior. Y $\langle \mathbb{Q}; +, 0, < \rangle$ es un tercer sistema, distinto de los dos anteriores, de los que es una expansión.

Un sistema heterogéneo es un conjunto ordenado formado por varias clases no vacías $A_1 \ldots A_n$, llamadas los universos de sistema, y una secuencia de entidades distinguidas, es decir, de individuos de alguno de los universos, de relaciones entre individuos del mismo o de distintos universos y de funciones entre individuos del mismo o de distintos universos. No es necesario que se den entidades distinguidas de todos esos tipos. Sea H el conjunto de habitantes de la isla, sea T un intervalo de tiempo, sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, sea e la función de $H \times T$ en $\mathbb{R}$ que a cada habitante y a cada instante asigne la edad de ese habitante en ese instante (medida en segundos) y sea p la función de $H \times T$ en $\mathbb{R}$ que a cada habitante y a cada instante asigna el peso (medido en gramos y a nivel del mar) de ese habitante en ese instante. Entonces $\langle H, T, \mathbb{R}; e \rangle$ es un sistema heterogéneo (con tres universos, H, T y $\mathbb{R}$, pues en él consideramos a la vez habitantes, instantes y números reales), el sistema de la población de la isla considerada en cuanto a sus edades en un intervalo de tiempo dado.

El sistema $\langle H, T, \mathbb{R}; e, p\rangle$ es un sistema heterogéneo distinto que el anterior, del que constituye una expansión.

Desde un punto de vista formal, todo lo que puede describirse como sistema heterogéneo puede describirse también como sistema homogéneo. El universo del nuevo sistema homogéneo será la unión de los diversos universos del sistema heterogéneo, y a las entidades distinguidas del viejo sistema heterogéneo habrá que añadir ahora como propiedades los viejos universos. Así, el sistema heterogéneo $\langle A_1, A_2, ..., A_n; E_1, ..., E_m\rangle$, donde $A_1, A_2, ..., A_n$ son universos cualesquiera y $E_1, ..., E_m$ son entidades distinguidas cualesquiera de (o entre) esos universos, da lugar al sistema homogéneo $\langle A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n; A_1, ..., A_n, E_1, ..., E_m\rangle$. Ambos sistemas no son sino descripciones distintas de la misma realidad subyacente. El hecho de que una parcela de la realidad constituya un sistema homogéneo o heterogéneo no depende de la realidad misma, sino de nuestra convencional manera de describirla. Sin embargo, ello no es óbice para que desde un punto de vista pragmático haya diferencias entre ambos enfoques. Y con frecuencia la consideración del sistema heterogéneo es más natural e intuitiva que la del correspondiente sistema homogéneo.

Esté dado un sistema $\langle A; P, R\rangle$ con un universo A, con una propiedad P y una relación binaria R. Para pensar en ese sistema necesitamos de conceptos correspondientes a A, P y R. Para hablar o escribir sobre ese sistema necesitamos de palabras correspondientes a esos conceptos. Si esas palabras ya existen en nuestro lenguaje ordinario, las tomamos de él y ya está. Si no existen, introducimos palabras nuevas como términos técnicos para expresar esos conceptos. Todas esas ideas o proposiciones sobre A que podemos formar usando los conceptos correspondientes a P y R son ideas históricas sobre A. La totalidad de las ideas históricas sobre A que son verdaderas constituye la verdadera y completa historia del sistema $\langle A; P, R\rangle$. Naturalmente no llegamos a pensar o formular todas esas ideas, sino sólo una parte. Nuestra historia del sistema no suele ser la historia completa del sistema, sino sólo una historia parcial. Y con frecuencia no estamos seguros de que nuestras ideas históricas sobre el sistema sean verdaderas; nos limitamos a aceptarlas como hipótesis más o menos plausibles. Nuestra historia del sistema no suele ser la verdadera historia completa, sino una historia hipotética y parcial. Lo cual no significa que no pueda haber historias seguras. La tabla de multiplicar constituye una historia parcial, pero seguramente verdadera, del sistema formado por los números naturales y la multiplicación.

Un sistema es algo extralingüístico (aunque delimitado por medios lingüísticos), es un trozo de realidad considerado bajo cierto ángulo. La historia de un sistema, por el contrario, es algo lingüístico (en un sentido amplio de lo lingüístico, que no sólo incluye las proferencias sonoras o las inscripciones gráficas, sino también las ideas expresadas en dichas proferencias o inscripciones). En definitiva, qué sistema estemos considerando depende de qué conceptos estemos empleando en nuestra historia. Al añadir nuevos conceptos a nuestra historia, estamos cambiando de sistema, estamos pasando a una expansión del sistema previamente considerado. Pero una vez determinado el sistema y fijados los correspondientes conceptos de nuestra historia, el que nuestras ideas históricas sobre ese sistema sean verdaderas o falsas depende enteramente del sistema mismo y no de nosotros. La historia tiene vocación de verdad objetiva, la historia es ciencia y no literatura. Precisamente al rasgo del sistema que determina la verdad de una cierta idea de su historia lo llamamos un hecho, el hecho correspondiente a esa idea, el *pendant* objetivo de la idea verdadera, el correlato ontológico de la relación semántica de verdad.

La historia de un sistema no tiene por qué ser un mero registro de datos singulares. También podemos expresar ideas complejas acerca del sistema, podemos generalizar, podemos expresar meras hipótesis y refutar o confirmar viejas conjeturas, podemos descubrir regularidades y excepciones, predecir y retrodecir, hacer inferencias estadísticas y extrapolar. Lo único que se requiere es que se trate de ideas construidas con los conceptos de la historia del sistema, correspondientes a los universos y entidades distinguidas del sistema en cuestión.

Conceptores y teoremas

La tarea de caracterizar las nociones de estructura y teoría es más ardua que la de caracterizar las de sistema e historia. Hay un salto cualitativo importante entre ambos pares de nociones, pero ese salto no se capta a primera vista, por lo que la confusión de ambos niveles se da con frecuencia.

El sistema neurosensorial de los animales superiores, y en especial el nuestro, realiza automáticamente una portentosa cantidad de 'cálculos' cromáticos, estereométricos y parafácticos, que nos permiten convertir la confusa y constantemente fluctuante variedad de colores, dimensiones y contornos que captan nuestros sentidos en las formas y colores estabilizados que percibimos en nuestra mente (es decir, en los centros perceptivos de nuestro cerebro). Esta tarea de hacer constantes e identificables las formas perceptuales de los objetos externos es de una enorme complicación y hasta ahora ningún computador —por potente que sea— es capaz de simularla ni siquiera de un modo lejano y groseramente aproximado. Muchos animales superiores somos capaces de reconocer ciertos individuos como 'el mismo', por distinto que sea el ángulo desde el que lo miremos, la distancia que nos separe de él o la luz que lo ilumine. Esta capacidad de captar formas perceptuales se extiende también a ciertas formas genéricas. Ya antes de saber hablar, el infante capta la misma forma genérica de chupete en los diversos chupetes distintos esparcidos por la casa. Esta capacidad innata para captar formas perceptuales, tanto individuales como genéricas, facilita (y posibilita) el aprendizaje de la lengua, una parte del cual consiste en asociar conceptos lingüísticos con preconceptos perceptuales, es decir, con formas previamente reconocibles. Desde luego, la adquisición del lenguaje pronto rompe sus ataduras con la experiencia perceptual prelingüística. Los conceptos se precisan, se multiplican, se combinan de modos cada vez más complejos y que en muchos casos ya no tienen nada que ver con la percepción. Pero todos los conceptos del adulto siguen formando una red, algunos de cuyos nudos siguen correspondiendo a formas perceptuales. Éste es el nivel del lenguaje y éste es el nivel de la historia, el nivel de la verdad y de la falsedad, el nivel de nuestra representación simbólica (pero directa) de la realidad y de los múltiples sistemas que en ella distinguimos.

El salto entre la historia y la teoría lo damos en el momento en que decidimos pensar no ya en conceptos, sino en conceptores, y no ya en ideas, sino en teoremas. Y así como el salto entre la mera captación de formas perceptuales y la conceptualización lingüística fue dado por nuestra especie hace muchísimo tiempo, el salto a la teoría es sumamente reciente. Hemos empleado el feo neologismo de conceptor, a falta de término más adecuado. ¿Qué entendemos por conceptor? ¿Y qué entendemos por teorema?

Si queremos caracterizar una misma estructura realizada en sistemas distintos, necesitamos de un procedimiento que nos permita describir esa estructura de un modo independiente de los sistemas que la realizan. Ese procedimiento consiste en la introducción de una extensión de nuestro lenguaje mediante el uso de nociones matemáticas y, en especial, de conceptores. Un conceptor es un testaferro que de algún modo permite pensar a la vez en innumerables conceptos distintos, correspondientes a las historias de innumerables sistemas distintos, pero que, sin embargo, tienen algo en común: una estructura. Y así como combinando conceptos de un modo lingüísticamente adecuado obtenemos proposiciones o ideas, así también combinando conceptores obtendremos teoremas. Me temo que todo esto resulte abstruso y poco claro. Pongamos algunos ejemplos.

La geometría euclídea es una teoría (la teoría de la estructura de espacio euclídeo) en la formulación de cuyos teoremas aparecen las palabras *punto, recta, ángulo,* etc. Como Hilbert no se cansó de subrayar, estas palabras no expresan conceptos normales, no se refieren a nada concreto de ningún sistema particular. En vez de ellas —nos dice Hilbert— podríamos escribir *amor, mesa* y *jarra de cerveza,* o incluso *tatí, tatá* y *taratatá.* Da igual. Esas palabras no están ahí para significar nada particular, son meros testaferros que permiten definir la estructura de espacio euclídeo. Lo único importante es que si, en los teoremas de la teoría, sustituimos esos testaferros o conceptores por conceptos sobre un sistema, entonces los teoremas se transforman en ideas, y la teoría se transforma en historia de ese sistema. Si esa historia es verdadera, entonces ese sistema tiene estructura de espacio euclídeo o, equivalentemente, es un modelo o realización de la geometría euclídea.

La teoría de grupos es una teoría (la teoría de la estructura de grupo) en cuya formulación aparece una palabra-testaferro que de algún modo representa a cada una de las innumerables operaciones binarias de cada uno de los innumerables sistemas que tienen estructura de grupo, que son grupos. Esa palabra es a veces *por* o · (formulación multiplicativa), a veces *más* o + (formulación aditiva), a veces otros signos ad hoc, como ∘, ⊥, *, etc. Da igual. Todas estas palabras-testaferro y signos-testaferro no expresan un concepto, sino un conceptor. Y ese conceptor sirve únicamente para definir una estructura, la estructura de grupo. Si, en los teoremas de la teoría de grupos, sustituimos esos testaferros o conceptores por conceptos sobre un sistema, entonces esos teoremas se convierten en ideas y la teoría da lugar a una historia de ese sistema. Si esa historia es verdadera, entonces ese sistema tiene estructura de grupo, es un grupo o, si se prefiere, es un modelo o realización de la teoría de grupos.

Teoría de una estructura

La mecánica clásica de partículas es una teoría (la teoría de la estructura mecánica clásica de partículas) en cuya formulación aparecen palabras-testaferro tales como *partícula, masa, fuerza,* etc. En vez de *partícula* podríamos decir *cuerpo, punto-masa* o *patatín,* y en vez de *masa* podríamos decir *misa* o *patatán.* Da igual. Esas palabras no expresan conceptos, sino conceptores. Y esos conceptores sirven para definir la estructura de mecánica clásica de partículas. Si un sistema es modelo de la teoría mecánica clásica de partículas, si realiza la correspondiente estructura, entonces podemos sustituir los conceptores por conceptos en los teoremas, obteniendo así ideas verdaderas sobre el sistema en cuestión. En la historia de un sistema sustituiremos el conceptor *partícula* o *patatín* por el concepto de *átomo*, en la de otro sistema por el concepto de *astro*, en la de otro por el de *bala o la Tierra*, etc. Y lo mismo con los demás conceptores. Así habrá sido posible definir una estructura en abstracto, sin pasar por los innumerables sistemas que la realizan.

La teoría de automátas describe la estructura de autómata, estructura que se realiza de una infinidad de modos diferentes en los diversos sistemas que son autómatas (es decir, que cumplen los axiomas de la teoría, que son modelos de la teoría). Cada tinglado real o conceptual describible como un sistema $\langle I, O, S; f, g \rangle$, donde I, O y S son conjuntos no vacíos cualesquiera (a I podemos llamarlo conjunto de entradas, estímulos o *inputs*, a O conjunto de salidas, reacciones o *outputs* y a S conjunto de estados internos), f es una función de $I \times S$ en O (es decir, una función que a cada entrada y cada estado interno del autómata asigna una salida o reacción determinada) y g es una función de $I \times S$ en S (es decir, una función de transición de fase que a cada entrada y cada estado interno del autómata asigna un nuevo estado interno, al que pasa el autómata después de reaccionar en el sentido indicado por la función f). Si exigimos además que los conjuntos I, O y S sean finitos, habremos definido la estructura de autómata finito, y su descripción constituirá la teoría de autómatas finitos. Si exigimos que I, O y S sean espacios lineales sobre el cuerpo de los números reales y que las funciones f y g sean lineales, habremos definido la estructura de autómata lineal, objeto de la teoría de autómatas lineales.

Toda teoría es un conjunto de teoremas, es decir, un conjunto de combinaciones bien formadas de conceptores. Las teorías de autómatas, de autómatas finitos y de autómatas lineales poseen los mismos conceptores: I, O, S, f y g. Pero las dos últimas son más potentes que la primera, poseen más teoremas, son extensiones suyas. Por ello mismo poseen menos modelos que ella. Así, por ejemplo, el sistema de la máquina expendedora de cigarrillos anteriormente mencionada es un autómata finito, pero no un autómata lineal. Y hay autómatas que no son ni lineales ni finitos. Todos ellos tienen algo en común: la estructura de autómata, descrita por la teoría (general) de autómatas. Pero cada sistema incorpora diversas estructuras, por eso le son aplicables diversas teorías.

La máquina expendedora de cigarrillos que hay en el bar situado junto a mi casa es un autómata finito. Al menos eso es lo que pienso. Pero es posible que me equivoque. Que esa máquina sea un autómata finito es una hipótesis, una hipótesis histórica. Pero esa hipótesis puede resultar falsa. Observando atentamente el comportamiento de la máquina, registrando su historia en una libreta podría quizá comprobar que estando la máquina en el mismo estado (cargada) y produciéndose la misma entrada (recibiendo una moneda), unas veces responde expendiendo un paquete de cigarrillos y otras se atasca y no expende nada, para gran irritación del cliente que ha introducido la moneda. En ese caso la entrada y el estado no determinarían unívocamente la salida. Por tanto la máquina (en la descripción elegida) no sería un autómata, no sería un sistema que cumpliese los axiomas de la teoría de autómatas, no realizaría la estructura de autómata.

La afirmación de que un cierto sistema empírico posee una cierta estructura es siempre una hipótesis histórica, susceptible por tanto de refutación. Por el contrario un teorema de una teoría no es susceptible de refutación. Es un mero instrumento para la descripción de una estructura. Su validez le viene únicamente de su relación lógica con los axiomas de la teoría, que constituyen la definición de la estructura.

Toda teoría es matemática

Definir una estructura es lo mismo que formular su teoría. Hay que especificar cuáles son los conceptores, qué combinaciones de conceptores son los axiomas y qué lógica determina la relación de consecuencia entre axiomas y teoremas. Con esto queda unívocamente determinada la estructura y su teoría. Todo esto es independiente de la realidad empírica del mundo, todo esto es mera matemática. En efecto, la matemática suele definirse como la ciencia de las estructuras. En este sentido, todas las teorías son matemáticas.

Naturalmente la mayoría de las estructuras definibles carecen de todo interés para el científico, pues no parecen realizarse en los sistemas reales con los que se topa. Lo que en último término nos interesa no son las estructuras estudiadas por la matemática, sino los sistemas reales del mundo que nos rodea, estudiados por la historia. Pero la mayoría de las estructuras definibles son irrelevantes para la historia de esos sistemas. Por eso los físicos, economistas, etc., no desarrollan teorías cualesquiera, sino precisamente las teorías de las estructuras que ellos creen ver realizadas en los sistemas físicos, económicos, etc., con los que se enfrentan. Pero una cosa es que ellos crean que esos sistemas son modelos de aquellas teorías y otra es que realmente lo sean. Si descubren que no lo son, pierden todo interés por la correspondiente estructura y cambian de teoría, modificando la anterior en el sentido que más les parezca ofrecer esperanzas de ser realizada en el sistema estudiado. Con ello la teoría no ha quedado refutada, sino sólo arrinconada.

Lo que nos interesa es, en primer lugar, el abigarrado y jugoso mundo perceptual que nos rodea, y en segundo lugar, el mundo que simbólicamente captamos con nuestro lenguaje y con nuestros conceptos, en resumen, la historia. La teoría es un mero instrumento para iluminar la historia. Pero la historia siempre es hipotética e insegura. Sólo los fríos y vacíos teoremas de la teoría son seguros, pues no dicen nada acerca del mundo. Podemos estar seguros de que en un sistema económico que tenga estructura de mercado libre los precios siempre se formarán de acuerdo con las leyes de la teoría microeconómica de la formación de precios. Pero nunca podemos estar seguros de que el sistema económico que tenemos delante tenga tal estructura. La teoría microeconómica de la formación de precios es una teoría matemática, la mera descripción de una estructura, sobre cuya real incardinación en el mundo empírico con frecuencia sabemos poco. Y lo mismo ocurre con cualquier otra teoría.

Toda teoría es matemática. Y, como decía Goethe, «gris es toda teoría, pero verde es el árbol de la vida». Como sabía Platón, sólo de las estructuras cabe hacer teoría y sólo de las estructuras podemos estar seguros. Pero a diferencia de Platón, nosotros sabemos que las estructuras no son la verdadera realidad, sino meros esquemas proyectivos en las cabezas (y en los libros) de ciertos animales: nosotros. Sólo la historia se las ha de haber con el mundo real y por ello es tan insegura.

En definitiva poseemos un saber perfecto y seguro sobre lo irreal, vacío y formal (las estructuras, objeto de las teorías), pero sólo un saber imperfecto e inseguro sobre lo real, lo vivo y lo material (los sistemas objeto de la historia).

El reconocimiento de esta situación de hecho no puede por menos de producir una cierta melancolía. Sin embargo, en la larga cadena de adelantos decisivos de nuestra especie (la posición erecta, las herramientas, el lenguaje...), la teorización, la construcción de esos abstrusos tinglados que son las teorías, no es sin duda el menor de entre ellos.

Gracias a las teorías introducimos orden conceptual en el caos de un mundo confuso e informe, reducimos el cambio a fórmula, suministramos a la historia (que sin teoría correría el riesgo de perderse en la maraña de los datos) instrumentos de extrapolación y explicación y, en definitiva, entendemos y dominamos el mundo, aunque sea con un entendimiento y un dominio siempre inseguros y problemáticos.

Somos como las arañas, y las teorías son como las redes o telas de araña con que tratamos de captar y capturar el mundo. No hay que confundir estas redes o telas de araña con el mundo real, pero, sin ellas, ¡cuánto más alejados estaríamos de poder captarlo y, en último término, gozarlo!

CAPÍTULO 9

TEORÍAS Y MODELOS

La actividad científica culmina en la construcción y contrastación de teorías de gran alcance y poder explicativo y predictivo. ¿Qué son las teorías? Las teorías científicas son algo muy complejo que, al menos en parte, está en los cerebros de los científicos, pero la plasmación concreta de las teorías en su insondable complicación neural sobrepasa nuestra capacidad cognitiva. Si queremos caracterizarlas, tenemos que limitarnos a precisar más o menos formalmente algunos de sus rasgos característicos, dejando otros muchos en la penumbra. Las teorías se pueden caracterizar y de hecho se han caracterizado de diversas maneras, por ejemplo, sintácticamente, semánticamente y pragmáticamente.

El enfoque sintáctico de las teorías nos permite la definición más escueta y precisa de sus propiedades. Es el enfoque más clásico y extendido en la filosofía de la ciencia, el que mejor encaja con la tradición de la metamatemática. Presente ya en los 'padres fundadores' (como Hilbert, Tarski, Carnap o Popper), continúa en la base de la mayoría de los trabajos actuales. Este enfoque concibe una teoría como un conjunto de teoremas clausurado respecto a la relación de consecuencia.

El enfoque semántico de las teorías (al que nos referiremos con más extensión en el capítulo 11) fue iniciado por Beth y Suppes. Arroja luz sobre las aplicaciones de las teorías y permite describir-las de un modo más compacto e interrelacionado, usando para ello el lenguaje de la teoría informal de conjuntos, más flexible e intuitivo que el de la lógica formal de primer orden. Este enfoque concibe una teoría como un conjunto de realizaciones o modelos (los sistemas que cumplen las exigencias de la teoría).

El enfoque pragmático de las teorías fue iniciado por Kolmogorov y Solomonov. Arroja luz sobre la función de las teorías como compresores de la información. Así, por ejemplo, las leyes de Kepler serían un procedimiento para comprimir la información dispersa en los múltiples datos sobre los movimientos planetarios. Este enfoque concibe una teoría como un programa computacional.

Estos tres enfoques son compatibles entre sí y complementarios. La misma teoría puede considerarse alternativamente (y con provecho) desde los tres puntos de vista. De hecho, una teoría en sentido sintáctico determina la clase de sus modelos y puede cumplir una misión computacional de compresión de la información. Una clase de modelos determina el conjunto de las fórmulas (de cierto lenguaje formal) satisfechas en todos ellos, que puede considerarse como una teoría en sentido sintáctico. Y con frecuencia un programa de compresión de la información determina también sus correspondientes versiones teóricas sintáctica y semántica. En definitiva, los sectarios de los diversos enfoques no están hablando de cosas distintas, sino de aspectos distintos de las mismas cosas (las teorías científicas).

Las teorías mejor definidas son las teorías matemáticas y el enfoque más desarrollado para su estudio es el metamatemático, que combina su consideración como teorías en sentido sintáctico con el estudio preciso de las relaciones semánticas con sus modelos (teoría de modelos). Es el enfoque que adoptamos en este capítulo.

Sistemas

El mundo no está dividido, estructurado o articulado de por sí de un modo unívoco. Somos nosotros los que lo dividimos, estructuramos y articulamos, proyectando sobre las diversas zonas de la realidad nuestros esquemas conceptuales y teóricos, y observando hasta qué punto esas zonas de la realidad encajan en los esquemas que sobre ellas proyectamos o hasta qué punto los rechazan. Nuestra atención no suele dirigirse a la totalidad del universo considerado desde todos los puntos de vista, sino a ciertas zonas del universo consideradas desde algunos puntos de vista determinados. Esta noción un tanto vaga de zona de realidad (o del mundo o del universo) a la que dirigimos nuestra atención desde ciertos puntos de vista se precisa mediante la noción de sistema.

Un sistema es una parcela de la realidad (en un sentido muy amplio de 'realidad', que incluye los objetos de nuestro pensamiento) explícitamente delimitada y 'enfocada'. Especificar de qué sistema estamos hablando significa indicar el ámbito de la realidad al que nos referimos (el universo o dominio del sistema) y los objetos, propiedades, relaciones y funciones de ese ámbito en los que nos vamos a fijar, que queremos 'enfocar' o distinguir. Si cambiamos de ámbito, cambiamos de sistema. Si en vez de considerar los números naturales consideramos los reales, cambiamos de sistema. Si en vez de referirnos a los satélites de Júpiter, nos referimos a los de Saturno, cambiamos de sistema. Si en vez de estudiar la población de pingüinos de la Antártida estudiamos la población humana de Australia, cambiamos de sistema. Pero también podemos cambiar de sistema permaneciendo en el mismo ámbito, refiriéndonos a las mismas cosas, simplemente considerándolas desde un punto de vista distinto, enfocándolas de diverso modo, fijándonos más en ciertos individuos que en otros, en ciertas relaciones que en otras. Así, aun hablando siempre de los números reales ($\mathbb{R}$), podemos distinguir o enfocar el 0, el 1 o el número π, podemos fijarnos en la relación 'menor o igual que' ($\leqslant$), podemos considerar la adición, o la multiplicación, o la exponenciación, o muchas otras funciones, o ninguna de ellas. En cada caso, obtendremos un sistema distinto. Así, el sistema $\langle \mathbb{R}; \leqslant \rangle$, el sistema $\langle \mathbb{R}; +, 0 \rangle$ y el sistema $\langle \mathbb{R}; \leqslant, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ son sistemas distintos, aunque tengan en común el poseer el mismo universo o ámbito, el de los números reales. De igual modo podemos distinguir muchos sistemas distintos que tengan como universo el conjunto de los astros de nuestro «sistema solar», según que nos fijemos sólo en sus trayectorias, por ejemplo, o que consideremos también sus masas, sus interacciones gravitatorias, su composición química, sus campos magnéticos, etc.

Un sistema puede ser homogéneo [1] (si cuenta con un solo universo, ámbito o dominio de individuos) o heterogéneo (si cuenta con varios). Puesto que cada sistema heterogéneo es también descriptible (de otra manera, claro) como sistema homogéneo, vamos a entender en lo que sigue por sistema siempre sistema homogéneo, a fin de simplificar la exposición [2].

Un sistema es una entidad compleja, compuesta de un conjunto no vacío, llamado el universo del sistema, y de una serie de individuos, relaciones y funciones (sobre ese universo) distinguidos o considerados. Si A es el universo del sistema, quizá queramos fijarnos especialmente en ciertos individuos concretos $a_1 \ldots a_l$ de A. Éstos serán los individuos distinguidos del sistema. Cualquier subconjunto de A es una propiedad o relación monaria en A. Cualquier subconjunto de $A \times A$, es decir, de A^2, es una relación binaria en A. En general, cualquier subconjunto de $A \times A \times \ldots \times A$, es

[1] Aquí usamos la palabra «homogéneo» en su sentido ordinario, que no tiene nada que ver con los modelos homogéneos de que se suele hablar en el contexto del estudio de los modelos no isomorfos de una teoría completa.

[2] A fin de simplificar aún más el tema, en el resto de este capítulo nos limitaremos a considerar sistemas matemáticos, que son los menos problemáticos y, dentro de los sistemas matemáticos, sólo los sistemas con número finito de individuos distinguidos (que, por otro lado, son los únicos que se estudian en las matemáticas habituales). La aplicación de estas nociones a los sistemas físicos y, en general, a la realidad extramatemática es abordada en los tres capítulos siguientes. Por otro lado, si el lector carece de suficientes conocimientos de teoría de conjuntos como para seguir sin dificultad lo aquí expuesto, puede consultar J. Mosterín: *Teoría axiomática de conjuntos* (Ariel, 2.ª ed., Barcelona, 1979). Si al lector le sabe a poco la escuálida información sobre teorías y modelos aquí ofrecida, puede ampliarla leyendo, por ejemplo: A. Tarski, A. Mostowski y R. Robinson: *Undecidable Theories* (North-Holland, Amsterdam, 1953), y consultando C. Chang y H. J. Keisler: *Model Theory* (North-Holland, 3.ª ed., Amsterdam, 1990). En esta última obra encontrará también tratados los sistemas matemáticos con un número infinito de individuos distinguidos (de utilidad en teoría avanzada de modelos), además de una amplia bibliografía.

decir, de A^n, es decir, cualquier conjunto de n-tuplos de elementos de A, es una relación n-aria en A. Pero no tenemos por qué fijarnos en esa infinidad de relaciones. Sólo aquellas relaciones $R_1 \ldots R_n$ en que nos fijemos especialmente serán relaciones distinguidas del sistema. Y lo mismo ocurre con las funciones. Cualquier aplicación de A en A es una función en A, pero una tal función f sólo será una función distinguida del sistema si la enfocamos explícitamente al definirlo. El sistema es la secuencia formada por el universo A, las relaciones distinguidas $R_1 \ldots R_n$, las funciones distinguidas $f_1 \ldots f_m$ y los individuos distinguidos $a_1 \ldots a_l$. Recuérdese que en especial puede no haber ninguna relación distinguida o ninguna función distiguida o ningún individuo distinguido.

$\mathcal{A}$ es un *sistema* si y solo si hay A, $R_1 \ldots R_n$, $f_1 \ldots f_m$, $a_1 \ldots a_l$ $(0 \leqslant l$, m, n, $\in$, $\mathbb{N})$, tales que

(1) $\mathcal{A} = \langle A; R_1 \ldots R_n; f_1 \ldots f_m; a_1 \ldots a_l \rangle$
(2) $A \neq \varnothing$
(3) $R_i \subseteq A^r$ (para $1 \leqslant i \leqslant n$ y para algún número natural positivo r, que depende de i)
(4) $f_j: A^s \rightarrow A$ (para $1 \leqslant j \leqslant m$ y para algún número natural positivo s, que depende de j)
(5) $a_i \in A$ (para $1 \leqslant i \leqslant l$)

Si la relación distinguida $R_i \subseteq A^r$, entonces decimos que R_i es una relación r-aria y que r es su número ario o aridad. Si la función f_j es una aplicación de A^s en A, entonces decimos que f_j es una función s-aria y s es su número ario o aridad.

En lo sucesivo utilizaremos las letras inglesas mayúsculas para referirnos indistintamente a sistemas cualesquiera.

Tipos de similaridad

Un sistema puede tener dos relaciones distinguidas y otro puede tener tres, o ninguna. En ese caso, decimos que ambos sistemas son disimilares, pertenecen a tipos de similaridad distintos. Un sistema que contenga dos relaciones distinguidas (una monaria y otra binaria) es también disimilar respecto a otro que contenga igualmente dos relaciones distinguidas, pero ambas binarias. Lo mismo ocurre con las funciones. Si un sistema $\mathcal{A}$ posee más (o menos) funciones que otro sistema $\mathcal{B}$, ambos sistemas son disimilares, pertenecen a tipos de similaridad distintos. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ poseen el mismo número de funciones, pero su aridad no coincide, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son disimilares. Y si $\mathcal{A}$ posee más (o menos) individuos distiguidos que $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ pertenecen a tipos de similaridad distintos.

Dos sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son similares, o pertenecen al mismo tipo de similaridad, si ocurre que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ coinciden tanto en el número como en la aridad de sus relaciones y funciones distinguidas, así como en el número de sus individuos distinguidos. Por ejemplo $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$ y $\langle \mathbb{R}, \cdot, 1\rangle$ son dos sistemas similares o pertenecientes al mismo tipo de similaridad, pues ambos constan de ninguna relación, una función (binaria) y un individuo distinguido.

El *tipo de similaridad* del sistema $\mathcal{A} = \langle A; R_1 \ldots R_g; f_1 \ldots f_m; a_1 \ldots a_l\rangle$ es la secuencia $\langle r_1 \ldots r_n; s_1 \ldots s_m; l\rangle$, donde r_i es la aridad[3] de R_i (es decir, $R \subseteq A^{r_i}$), s_i es la aridad de f_i (es decir, $f_i: A^{s_i} \rightarrow A$) y l es el número de individuos distinguidos de $\mathcal{A}$.

Isomorfía

Diversos sistemas pueden parecerse estructuralmente en ciertos aspectos, pero no en otros, pueden compartir unas estructuras, pero no otras. En el caso extremo, pueden ser estructuralmente

[3] Enrique Casanovas me hizo observar que esta definición estándar del tipo de similaridad presenta cierta dificultad en algunos casos límite. Así, si tomamos el conjunto vacío $\varnothing$ como relación de un sistema, la relación $\varnothing$ no tendrá una aridad unívoca, sino cualquier aridad. Por otro lado, si $\{0, <0, 0>\}$ está incluido en el universo A del sistema, y luego tenemos la relación $\{<0, 0>\}$, esta relación será a la vez monaria y binaria, ya que $\{<0, 0>\}$ está incluida tanto en A como en A^2. La dificultad es superable a base de complicar algo más la definición, pero aquí renunciamos a hacerlo. El lector puede intentarlo por su cuenta.

idénticos. En ese caso decimos que se trata de sistemas isomorfos. Son distinguibles por su «materia», por su universo, pero no por su forma: su forma es la misma, son isomorfos.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos sistemas del mismo tipo de similaridad. Sea $\mathcal{A} = \langle A; R_1 ... R_n; f_1 ... f_m; a_1 ... a_l \rangle$ y sea $\mathcal{B} = \langle B; S_1 ... S_n; h_1 ... h_m; b_1 ... b_l \rangle$.

g es un *isomorfismo* entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ si y solo si

(1) g es una aplicación biyectiva de A en B

(2) $g(a_i) = b_i$ para $1 \leqslant i \leqslant l$

(3) para todo $x_1 ... x_r \in A$: $g(f_j(x_1 ... x_r)) = h_j(g(x_1) ... g(x_r))$, para $1 \leqslant j \leqslant m$ y donde r es el número ario de f_j

(4) para todo $x_1 ..., x_r \in A$: $\langle x_1 ... x_r \rangle \in R_i$ si y solo si $\langle g(x_1) ... g(x_r) \rangle \in S_i$, para $1 \leqslant i \leqslant n$, y donde r es el número ario de R_i

Los sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *isomorfos* si y solo si existe un isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Para expresar que dos sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfos escribimos abreviadamente $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

La relación de isomorfía entre sistemas es reflexiva, simétrica y transitiva. Se trata, pues, de una relación de equivalencia.

El hecho de que dos sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sean isomorfos implica en especial que sus universos A y B poseen la misma cardinalidad (o cantidad de elementos), dado que la isomorfía requiere la existencia de una biyección entre A y B, y la biyectabilidad implica la equicardinalidad. Por tanto, si nos encontramos con dos sistemas de distinta cardinalidad, podemos excluir de entrada la posibilidad de que sean isomorfos.

De todos modos, la isomorfía es un caso extremo. Dos sistemas pueden parecerse formalmente sin ser isomorfos, pueden compartir una estructura sin ser estructuralmente idénticos.

Estructuras

Diversas cosas pueden tener o compartir una misma forma, por ejemplo, la forma de esfera. Diversos sistemas pueden tener o compartir una misma estructura, por ejempl la estructura de grupo, o de espacio vectorial, o de átomo de helio, o de mercado libre, o de equipo de fútbol. Una estructura es algo que tienen en común varios sistemas distintos que no sólo son similares (pertenecientes al mismo tipo de similaridad), sino que además se parecen respecto a algún aspecto de su organización interna. Precisamente la matemática es la ciencia de las estructuras. No se interesa tanto por los sistemas concretos en que esas estructuras se realizan como por las estructuras mismas.

Una estructura es algo que tienen en común varios sistemas, una forma que comparten varios sistemas. Por tanto, una estructura puede considerarse como algo intensional. Sin embargo, también es posible considerar la estructura extensionalmente, como la clase de todos los sistemas que la realizan o incorporan. Así, la estructura de grupo puede identificarse (intensionalmente) con aquello que tienen de común todos los grupos o (extensionalmente) con la clase de todos los grupos. Como el enfoque extensional es el más sencillo, lo adoptaremos aquí, como es usual en la lógica. Consideraremos una estructura[4] como una cierta clase de sistemas.

Una *estructura* es una clase de sistemas similares entre sí que comparten algo más que el mero hecho de ser similares. ¿Cómo describir con precisión ese «algo más» que comparten? Es difícil hablar de esas entidades abstractas y complejas que son las estructuras utilizando el lenguaje cotidiano. Para hablar de ellas con pre-

[4] En la bibliografía matemática es frecuente encontrar un uso ambiguo de la palabra *estructura*. Unas veces *estructura* significa lo que aquí llamamos sistema, por ejemplo un grupo concreto. Otras veces *estructura* significa lo que aquí llamamos estructura, por ejemplo, la estructura de grupo. Algunos autores tratan de distinguir ambos significados, hablando de *estructura concreta* en el primer caso y de *estructura abstracta* en el segundo. Otros (como Bourbaki) hablan de *estructura* en el primer caso y de *especie de estructuras* en el segundo. Nosotros usamos en el primer caso la palabra *sistema* y reservamos la palabra *estructura* para el segundo caso (el de estructura abstracta o especie de estructuras). Con esto nos apartamos del uso más extendido en la lógica matemática (que consiste en llamar *estructura* a lo que aquí llamamos *sistema*) en aras de una mayor claridad conceptual. Y no somos los únicos en adoptar esta solución. Véase, por ejemplo, la voz *Structures* en el *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, vol. 2, pp. 1237 y ss., Massachusetts Institute of Technology Press, 1980.

cisión es menester servirse de un lenguaje *ad hoc*, de un lenguaje formal hecho a la medida de un cierto tipo de similaridad (el tipo de similaridad al que pertenecen todos los sistemas que realizan dicha estructura). Los sistemas de ese tipo de similaridad son las entidades de las que tiene sentido preguntarse si tienen o no una estructura. Aplicada a otras entidades, la pregunta carecería de sentido.

Lenguajes formales

Un lenguaje formal es un instrumento, un tinglado convencional que inventamos y construimos para poder describir más fácilmente las estructuras, permitiéndonos hablar simultáneamente de todos los sistemas de un mismo tipo de similaridad. Su utilidad es restringida: sólo nos sirve para hablar de los sistemas de ese tipo de similaridad. Pero, dentro de esa limitación, nos permite describir las estructuras que esos sistemas tienen (o no tienen) con mucha mayor claridad y precisión que el lenguaje ordinario.

Un lenguaje formal consta de una serie de signos, que constituyen su alfabeto, un conjunto de términos y un conjunto de fórmulas, que son ciertas combinaciones o secuencias de signos del alfabeto. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje del tipo de similaridad $\tau = \langle r_1 \ldots r_n; s_1 \ldots s_m; l \rangle$. Entonces el *alfabeto* de $\mathcal{L}$ consta de los siguientes signos:

(1) un conjunto denumerable de variables: $x_1, x_2, x_3 \ldots$
(2) n relatores: $P_1 \ldots P_n$. Cada uno de los relatores tiene una aridad determinada, que depende del tipo τ. Así, P_i tiene la aridad r_i (para $1 \leqslant i \leqslant n$)
(3) m functores: $g_1 \ldots g_m$. Cada uno de los functores tiene también su aridad. Así, g_i tiene la aridad s_i (para $1 \leqslant i \leqslant m$)
(4) l constantes individuales: $c_1 \ldots c_l$
(5) 5 conectores: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
(6) 2 cuantificadores: $\forall$, $\exists$
(7) el signo de identidad: $=$

Los variables, los conectores, los cuantificadores y el signo de identidad son comunes a todos los lenguajes formales de primer orden con identidad, que son aquellos que aquí consideramos, mientras no indiquemos explícitamente lo contrario. Los relatores, los functores y las constantes individuales son los signos peculiares de cada lenguaje formal, del que constituyen su alfabeto propio o peculiar. Los conectores, los cuantificadores y el signo de identidad tienen un significado fijo. Los relatores, los functores y las constantes individuales carecen de significado propio, pero adquieren significados distintos según el sistema sobre el que los interpretamos. No son conceptos, sino conceptores, matrices conceptuales que sólo se convierten en conceptos y adquieren significado al ser proyectados o interpretados sobre la correspondiente entidad distinguida de un sistema determinado.

A partir de los signos del alfabeto de un lenguaje formal $\mathscr{L}$ podemos definir los *términos* de $\mathscr{L}$ como todas y solas las filas de signos que se pueden formar mediante las siguientes reglas:

1) Cualquier variable individual es un término de $\mathscr{L}$.
2) Cualquier constante individual de $\mathscr{L}$ es un término de $\mathscr{L}$.
3) Si f es un functor s-ario y $\tau_1 \dots \tau_s$ son términos de $\mathscr{L}$, entonces $f\tau_1 \dots \tau_s$ es un término de $\mathscr{L}$.

A partir de los signos del alfabeto de $\mathscr{L}$ y de los términos de $\mathscr{L}$ podemos definir las *fórmulas* de $\mathscr{L}$ como todas y solas las filas de signos que se pueden formar mediante las siguientes reglas:

1) Si P es un relator r-ario de $\mathscr{L}$ y $\tau_1 \dots \tau_r$ son términos de $\mathscr{L}$, entonces $P\tau_1 \dots \tau_r$ es una fórmula d $\mathscr{L}$.
2) Si τ_1 y τ_2 son términos de $\mathscr{L}$, entonces $\tau_1 = \tau_2$ es una fórmula de $\mathscr{L}$.
3) Si α es una fórmula de $\mathscr{L}$, entonces $\neg\alpha$ es una fórmula de $\mathscr{L}$.
4) Si α es una fórmula de $\mathscr{L}$ y β es una fórmula de $\mathscr{L}$, entonces $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ y $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ son fórmulas de $\mathscr{L}$.

5) Si α es una fórmula de $\mathscr{L}$ y x es una variable individual, entonces $\forall x\, \alpha$ y $\exists x\, \alpha$ son fórmulas de $\mathscr{L}$.

Las variables individuales que forman parte de una fórmula pueden estar ligadas o libres, según que caigan o no bajo el alcance de un cuantificador. Una fórmula con variables libres se llama una fórmula abierta. Una fórmula sin variables libres se llama una fórmula cerrada o *sentencia*.

Verdad y satisfacción

Un lenguaje formal y un sistema se llaman *homólogos* cuando ambos poseen el mismo tipo de similaridad. Podemos emplear un lenguaje formal para hablar de un sistema homólogo determinado. En ese caso decimos que estamos interpretando ese lenguaje formal como si fuera un lenguaje que se refiriese precisamente a ese sistema o, lo que es lo mismo, que estamos considerando ese sistema como una interpretación de ese lenguaje formal. Eso lo obtenemos haciendo que las varibles individuales se refieran indistintamente a individuos cualesquiera del universo del sistema, que cada relator denote una relación distinguida de ese sistema, que cada functor denote una función distinguida de ese sistema y que cada constante individual denote un individuo distinguido del sistema. De este modo cada término del lenguaje formal se refiere a un individuo del universo del sistema y cada sentencia del lenguaje formal es una afirmación verdadera o falsa acerca de ese sistema.

La noción de verdad de una sentencia de un lenguaje formal en un sistema fue precisada por A. Tarski en 1935, valiéndose para ello de otra noción aún más general, la de satisfacción de una fórmula en un sistema (respecto a una cierta asignación). En efecto, la única manera de definir la verdad de una sentencia compleja es recursivamente, en función de la verdad de sus componentes. Pero algunos de sus componentes pueden ser fórmulas abiertas. Por tanto, es necesario usar una noción —la de satisfacción— que se aplique a todo tipo de fórmulas, tanto abiertas como cerradas.

Sea $\mathcal{A} = \langle A; R_1 \ldots R_n; f_1 \ldots f_m; a_1 \ldots a_l \rangle$ un sistema de tipo de similaridad σ. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal homólogo, es decir, del mismo tipo de similaridad, cuyo alfabeto peculiar está compuesto por $P_1 \ldots P_n$, $g_1 \ldots g_m$, $c_1 \ldots c_l$. Una *interpretación* de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{A}$ es una aplicación del conjunto de las variables individuales de $\mathcal{L}$ en A y de los relatores, functores y constantes individuales de $\mathcal{L}$ en las correspondientes relaciones, funciones e individuos distinguidos de $\mathcal{A}$.

Dado un término de $\mathcal{L}$ y una interpretación de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{A}$, ese término denota en esa interpretación un cierto individuo de $\mathcal{A}$. Llamemos $\mathcal{I}$ a la interpretación. Para cualquier variable x, $\mathcal{I}(x)$ es el elemento de $\mathcal{A}$ que la aplicación $\mathcal{I}$ asigna a la variable x. Para la constante individual c_i, $\mathcal{I}(c_i) = a_i$. Y para cada término compuesto de $\mathcal{L}$, $g_i\tau_1 \ldots \tau_n$, $\mathcal{I}(g_i\tau_1 \ldots \tau_n) = f_i(\mathcal{I}(\tau_1) \ldots \mathcal{I}(\tau_n))$.

Sea $\mathcal{I}^a_x$ la interpretación de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{A}$ que coincide en todo con $\mathcal{I}$ excepto en que asigna a la variable x el individuo $a \in A$. Con esto estamos en posición de definir recursivamente la *satisfacción* de cualquier fórmula por la interpretación $\mathcal{I}$ sobre $\mathcal{A}$. En vez de decir «la interpretación $\mathcal{I}$ sobre $\mathcal{A}$ satisface la fórmula α» escribiremos abreviadamente «$\mathcal{I}$ sat α». Definimos:

$\mathcal{I}$ sat $P_i\, \tau_1 \ldots \tau_n$ si y solo si $\langle \mathcal{I}(\tau_1) \ldots \mathcal{I}(\tau_n) \rangle \in R_i$
$\mathcal{I}$ sat $\tau_1 = \tau_2$ si y solo si $\mathcal{I}(\tau_1) = \mathcal{I}(\tau_2)$
$\mathcal{I}$ sat $\neg\alpha$ si y solo si $\mathcal{I}$ no sat α
$\mathcal{I}$ sat $(\alpha \wedge \beta)$ si y solo si $\mathcal{I}$ sat α y $\mathcal{I}$ sat β
$\mathcal{I}$ sat $(\alpha \vee \beta)$ si y solo si $\mathcal{I}$ sat α o $\mathcal{I}$ sat β
$\mathcal{I}$ sat $(\alpha \Rightarrow \beta)$ si y solo si: si $\mathcal{I}$ sat α, entonces $\mathcal{I}$ sat β
$\mathcal{I}$ sat $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ si y solo si: $\mathcal{I}$ sat α si y sólo si $\mathcal{I}$ sat β
$\mathcal{I}$ sat $\forall x\alpha$ si y solo si para cada $a \in A$: $\mathcal{I}^a_x$ sat α
$\mathcal{I}$ sat $\exists x\alpha$ si y solo si para algún $a \in A$: $\mathcal{I}^a_x$ sat α

Con esto queda unívocamente determinado para cada fórmula φ y cada interpretación $\mathcal{I}$ en $\mathcal{A}$ si $\mathcal{I}$ satisface φ o no. La satisfacción de una fórmula abierta por una interpretación sobre $\mathcal{A}$

depende tanto del sistema $\mathcal{A}$ como de la particular asignación de individuos de A a las variables de $\mathcal{J}$ característica de esa interpretación. Pero la satisfacción de una fórmula cerrada o sentencia por una interpretación $\mathcal{J}$ sobre un sistema $\mathcal{A}$ depende exclusivamente del sistema $\mathcal{A}$ y es invariante respecto a las diversas asignaciones de individuos a las variables. Por tanto, si alguna interpretación sobre $\mathcal{A}$ satisface una sentencia φ, entonces toda interpretación sobre $\mathcal{A}$ satisface también la sentencia φ. Por eso podemos decir simplemente que el sistema $\mathcal{A}$ satisface φ. Con lo cual llegamos a la definición tarskiana de verdad: Una sentencia φ es *verdadera* en un sistema $\mathcal{A}$ si y sólo si $\mathcal{A}$ satisface φ.

Consecuencia e independencia

Sea φ una sentencia de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ de un cierto tipo de similaridad σ. Entonces está determinado, como acabamos de ver, en qué sistemas de ese mismo tipo de similaridad φ resulta verdadera y en qué otros sistemas φ resulta falsa, es decir, qué sistemas satisfacen φ y qué sistemas no la satisfacen. Si todos los sistemas homólogos con $\mathcal{L}$ satisfacen φ, o, lo que es lo mismo, si φ es verdadera en todos los sistemas homólogos con φ, entonces decimos que es una sentencia *lógicamente válida*. Si al menos un sistema homólogo de $\mathcal{L}$ satisface φ, o, lo que es lo mismo, si φ es verdadera en algún sistema, entonces decimos que φ es *satisfacible*. Si ningún sistema homólogo de $\mathcal{L}$ satisface φ, o, lo que es lo mismo, si φ no es verdadera en ningún sistema, entonces decimos que φ es *insatisfacible*.

Dado un conjunto Γ de sentencias de $\mathcal{L}$, decimos que un sistema $\mathcal{A}$ *satisface* Γ si y solo si $\mathcal{A}$ satisface cada una de las sentencias de Γ. Dado un conjunto Γ de sentencias de $\mathcal{L}$ y dada una sentencia φ de $\mathcal{L}$, decimos que Γ *implica* φ, o, lo que es lo mismo, que φ es una *consecuencia* de Γ, si y sólo si todo sistema que satisface Γ satisface también φ, o, si se prefiere, si φ es verdadera en cada sistema en que todas las sentencias de Γ son verdaderas. En especial, una sentencia φ implica otra sentencia ψ o, lo que es lo mismo, ψ es una consecuencia de φ, si y sólo si todo sistema que satisface φ satisface también ψ o, si se prefiere, si ψ es verdadera en todos los sistemas en los que φ es verdadera.

Si la sentencia φ de $\mathscr{L}$ es una consecuencia del conjunto Γ de sentencias de $\mathscr{L}$, escribimos como abreviatura: $\Gamma \models \varphi$. Si la sentencia ψ es una consecuencia de φ (o si φ implica ψ) escribimos como abreviatura: $\varphi \models \psi$.

Una sentencia ψ es *independiente* de otra sentencia φ del mismo lenguaje si y sólo si ψ no es una consecuencia de φ. Del mismo modo, una sentencia φ es independiente de un conjunto Γ de sentencias del mismo lenguaje si y sólo si φ no es una consecuencia de Γ, es decir, si $\Gamma \not\models \varphi$.

Consideremos el conjunto vacío $\varnothing$ de sentencias de $\mathscr{L}$. ¿Qué consecuencias tiene? Tiene como consecuencias (o implica) todas y solas las sentencias lógicamente válidas de $\mathscr{L}$. En efecto, si un sistema cualquiera $\mathscr{A}$ no satisface un conjunto Γ de sentencias, entonces hay alguna sentencia $\psi \in \Gamma$ tal que $\mathscr{A}$ no satisface ψ. En especial, si $\mathscr{A}$ no satisface $\varnothing$, entonces hay alguna sentencia $\psi \in \varnothing$, tal que $\mathscr{A}$ no satisface ψ. Pero no hay ninguna sentencia en $\varnothing$, ya que $\varnothing$ es el conjunto vacío. Por tanto, para cualquier sistema $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}$ satisface $\varnothing$. De ahí se sigue que las consecuencias de $\varnothing$ serán las sentencias satisfechas por todos los sistemas, es decir, las sentencias lógicamente válidas. En vez de $\varnothing \models \psi$ suele escribirse abreviadamente $\models \psi$. Las siguientes expresiones significan lo mismo:

$\models \psi$
$\varnothing \models \psi$
ψ es una consecuencia del conjunto vacío de sentencias
ψ es satisfecha por todos los sistemas
ψ es verdad en todos los sistemas
ψ es lógicamente válida

Por otro lado, fácil es de advertir que para cualesquiera conjuntos de sentencias Γ y Δ del mismo lenguaje $\mathscr{L}$ y para cada sentencia φ de $\mathscr{L}$ ocurre:

Si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \models \varphi$, entonces $\Delta \models \varphi$

Como el conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto, de ahí se sigue que para cada conjunto Γ de sentencias de $\mathscr{L}$ y cada sentencia ψ de $\mathscr{L}$, si $\varnothing \models \psi$, entonces $\Gamma \models \psi$, es decir, cualquier sentencia lógicamente válida es una consecuencia de cualquier conjunto.

Consideremos ahora una contradicción, es decir, la conjunción de dos sentencias una de las cuales es la negación de la otra: $(\varphi \wedge \neg\varphi)$. Un sistema $\mathscr{A}$ satisface $\neg\varphi$ si y sólo si $\mathscr{A}$ no satisface φ. Por tanto, es imposible que $\mathscr{A}$ satisfaga a la vez φ y $\neg\varphi$. $(\varphi \wedge \neg\varphi)$ es insatisfacible. Una sentencia insatisfacible ψ no es satisfecha por ningún sistema. Por consiguiente, no hay ningún sistema que satisfaga ψ y no satisfaga cualquier otra sentencia α. Todo sistema que satisfaga una sentencia insatisfacible ψ satisfará también cualquier otra sentencia α. Para cualquier sentencia α, α es una consecuencia de ψ. Las siguientes expresiones significan lo mismo:

$\models \neg\psi$
ψ es insatisfacible
ψ implica una contradicción
ningún sistema satisface ψ
para cada sentencia α de $\mathscr{L}$: $\psi \models \alpha$

Teorías

Una teoría es un conjunto de fórmulas cerradas o sentencias, pero no todo conjunto de sentencias es una teoría. Para ser una teoría, es preciso que el conjunto de sentencias esté clausurado respecto a la relación de consecuencia, es decir, que las consecuencias de los elementos del conjunto sean también elementos del conjunto. Llamemos *Sent* $\mathscr{L}$ al conjunto de todas las sentencias del lenguaje $\mathscr{L}$. Sea Γ un conjunto de sentencias de $\mathscr{L}$, es decir, sea $\Gamma \subseteq$ *Sent* $\mathscr{L}$. Definimos:

Γ es una *teoría* si y solo si para toda $\varphi \in Sent\,\mathscr{L}$: si $\Gamma \models \varphi$, entonces $\varphi \in \Gamma$.

Por tanto, si Γ es una teoría, entonces $\{\varphi \in Sent\,\mathscr{L} \mid \Gamma \models \varphi\} = \Gamma$.

Si el conjunto Γ de sentencias de $\mathscr{L}$ es una teoría, decimos que $\mathscr{L}$ es el lenguaje de la teoría y llamamos teoremas de la teoría a los elementos de Γ.

La mínima teoría formulable en el lenguaje $\mathscr{L}$ es el conjunto de todas las sentencias lógicamente válidas de $\mathscr{L}$. En efecto, $\{\varphi \in Sent\,\mathscr{L} \mid \models \varphi\}$ es una teoría, pues es un conjunto de sentencias clausurado respecto a la relación de consecuencia, ya que las consecuencias de sentencias lógicamente válidas son a su vez sentencias lógicamente válidas. Y por otro lado, toda teoría contiene $\{\varphi \in Sent\,\mathscr{L} \mid \models \varphi\}$, ya que todas las sentencias lógicamente válidas son consecuencias de cualquier conjunto de sentencias y, en especial, de cualquier teoría.

En resumen,

$\bigcap\{T \mid T$ es una teoría en $\mathscr{L}\} = \{\varphi \in Sent\,\mathscr{L} \mid \models \varphi\} \in \{T \mid T$ es una teoría en $\mathscr{L}\}$.

La máxima teoría formulable en el lenguaje $\mathscr{L}$ es el conjunto de todas las sentencias de $\mathscr{L}$, $Sent\,\mathscr{L}$. En efecto, $Sent\,\mathscr{L}$ es una teoría, pues es un conjunto de sentencias clausurado respecto a la relación de consecuencia, ya que las consecuencias de sentencias de $\mathscr{L}$ son a su vez sentencias de $\mathscr{L}$. Y por otro lado, toda teoría en $\mathscr{L}$ está contenida en $Sent\,\mathscr{L}$, ya que toda teoría de $\mathscr{L}$ es un conjunto de sentencias de $\mathscr{L}$.

En resumen,

$\bigcup\{T \mid T$ es una teoría en $\mathscr{L}\} = Sent\,\mathscr{L} \in \{T \mid T$ es una teoría en $\mathscr{L}\}$.

Por tanto, para cualquier teoría T en $\mathscr{L}$, $\{\varphi \in Sent\,\mathscr{L} \mid \models \varphi\} \subseteq T \subseteq Sent\,\mathscr{L}$.

La teoría máxima en $\mathscr{L}$, es decir, $Sent\,\mathscr{L}$, el conjunto de todas las sentencias de $\mathscr{L}$, se llama también la teoría *inconsistente* en $\mathscr{L}$.

Cualquier otra teoría en $\mathscr{L}$ que no abarque todas las sentencias de $\mathscr{L}$ se llama una teoría *consistente* en $\mathscr{L}$. Otra manera de expresar lo mismo es decir que una teoría es inconsistente si contiene contradicciones, es decir, si entre sus teoremas se encuentra una sentencia del tipo $(\varphi \wedge \neg\varphi)$; y que es consistente si carece de contradicciones.

Una teoría inconsistente es claramente insatisfacible. En efecto, si T es inconsistente, T contiene algún teorema del tipo $(\varphi \wedge \neg\varphi)$, y ya vimos que una sentencia así no puede ser verdadera en ningún sistema. Por tanto, ningún sistema satisfará tal teoría, que será insatisfacible. Por otro lado, y aunque no se vea a primera vista, se puede demostrar que toda teoría consistente es satisfacible, es decir, que todos sus teoremas resultan verdaderos en algún sistema.

Sea T una teoría en un lenguaje $\mathscr{L}$. Las siguientes expresiones significan lo mismo:

$T = Sent\,\mathscr{L}$
para algún $\varphi \in Sent\,\mathscr{L}$: $(\varphi \wedge \neg\varphi) \in T$
T es inconsistente
T es contradictoria
T es insatisfacible

Modelos

Las sentencias que constituyen una teoría T pueden ser interpretadas sobre un sistema homólogo cualquiera $\mathscr{A}$. Con ello se convierten en proposiciones o afirmaciones acerca de $\mathscr{A}$, afirmaciones que pueden ser verdaderas o falsas. Si todas son verdaderas, decimos que $\mathscr{A}$ es un modelo o realización de T. Resumiendo:

$\mathscr{A}$ es un *modelo* de T si y solo si para cada $\varphi \in T$: $\mathscr{A}$ sat φ.

La teoría T es un conjunto de sentencias de un lenguaje formal $\mathscr{L}$. Los sistemas homólogos con $\mathscr{L}$ son las entidades de las que la teoría puede hablar, las entidades a las que la teoría puede ser aplicada (con éxito o sin él, pero con sentido). Solo de esos sistemas tiene sentido preguntarse si son o no modelos de la teoría. Y la respuesta sólo será afirmativa en los casos de aplicación exitosa, en los sistemas que cumplen cuanto la teoría (interpretada sobre ellos) dice.

Sea T una teoría y sea $\mathscr{A}$ un sistema homólogo con su lenguaje. Las siguientes expresiones significan lo mismo:

$\mathscr{A}$ sat T
$\mathscr{A}$ es un modelo de T
$\mathscr{A}$ es una realización de T
para cada $\varphi \in T$: $\mathscr{A}$ sat φ
para cada $\varphi \in T$: φ es verdadera en $\mathscr{A}$
T se cumple en $\mathscr{A}$

Una estructura, extensionalmente considerada, puede considerarse como una clase de sistemas similares que tienen algo más en común que un tipo de similaridad. Eso de más que tienen en común los sistemas que poseen la misma estructura es el ser modelos de una misma teoría. Por ello, la teoría puede considerarse como la definición de la estructura.

Dada una teoría T, una cierta estructura queda unívocamente caracterizada por T, a saber, la estructura común a todos los modelos de T o, si se prefiere, la clase de todos los modelos de T, a la que llamaremos $Mod(T)$. Definimos:

$$Mod\,(T) = \{\mathscr{A} \mid \mathscr{A} \text{ sat } T\}.$$

Toda teoría caracteriza una estructura. ¿Vale también la inversa? ¿Es toda estructura caracterizable por una teoría? Si por teoría entendemos teoría de primer orden, la respuesta es no. No toda estructura es caracterizable por una teoría de primer orden. Lo que tienen de estructuralmente común ciertos sistemas no siempre es expresable en un lenguaje formal de primer orden. Cuando una estructura es caracterizable por una teoría de primer orden, decimos que se trata de una estructura elemental. Sea E una clase de sistemas. Definimos:

E es una *estructura elemental* si y sólo si hay una teoría (de primer orden) T tal que $E = Mod\ (T)$.

Dicho con otras palabras, E es una estructura elemental si y sólo si hay una teoría T tal que para cada sistema $\mathscr{A}$: $\mathscr{A} \in E$ si y sólo si $\mathscr{A}$ sat T.

El sistema estándar de los números naturales es el sistema $\mathscr{N} = \langle \mathbb{N}, 0, s, +, \cdot \rangle$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y las entidades distinguidas son el cero y las funciones del siguiente, la adición y la multiplicación. Este sistema comparte con los sistemas isomorfos con él una estructura: la estructura numérica natural. Pues bien, esta estructura no es elemental, no es caracterizable por ninguna teoría de primer orden. Tampoco la estructura numérica real o la estructura de espacio euclídeo o la estructura de espacio topológico son elementales.

Todo sistema $\mathscr{A}$ determina una teoría (la teoría de $\mathscr{A}$), a saber, el conjunto de todas las sentencias (del lenguaje homólogo con $\mathscr{A}$) que resultan verdaderas en $\mathscr{A}$. A esta teoría la llamamos abreviadamente $Th(\mathscr{A})$. Definimos:

$$Th(\mathscr{A}) = \{\varphi \mid \mathscr{A} \text{ sat } \varphi\}.$$

$Th(\mathscr{A})$ es una teoría. En efecto, es un conjunto de sentencias y, además, está clausurada respecto a consecuencia, ya que cualquier consecuencia de sentencias verdaderas en $\mathscr{A}$ es también verdadera en $\mathscr{A}$.

Hemos visto que cada teoría T caracteriza una cierta estructura $Mod\ (T)$. ¿Qué estructura caracteriza $Th(\mathscr{A})$? La estructura formada por todos los sistemas elementalmente equivalentes a $\mathscr{A}$.

Equivalencia elemental

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos sistemas similares y sea $\mathcal{L}$ el correspondiente lenguaje formal homólogo. Puede ocurrir que $\mathcal{L}$ sirva para diferenciar $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ en el sentido de que $\mathcal{A}$ satisfaga alguna sentencia de $\mathcal{L}$ que $\mathcal{B}$ no satisface. En ese caso decimos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no son elementalmente equivalentes. Pero puede ocurrir también que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, aun siendo dos sistemas distintos, satisfagan exactamente las mismas sentencias de $\mathcal{L}$. En este caso decimos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *elementalmente equivalentes.* La diferencia entre ellas no es expresable en el lenguaje formal $\mathcal{L}$. Todo lo expresable en $\mathcal{L}$ que es verdad en $\mathcal{A}$ es también verdad en $\mathcal{B}$. Y todo lo expresable en $\mathcal{L}$ que es falso en $\mathcal{A}$ es también falso en $\mathcal{B}$.

Hemos visto que la teoría del sistema $\mathcal{A}$, $Th(\mathcal{A})$, es el conjunto de todas las sentencias de $\mathcal{L}$ verdaderas en $\mathcal{A}$. Pero si $\mathcal{B}$ es elementalmente equivalente a $\mathcal{A}$, entonces todas las sentencias verdaderas en $\mathcal{A}$ son también verdaderas en $\mathcal{B}$. Por tanto, la teoría de $\mathcal{B}$ será el mismo conjunto de sentencias que la teoría de $\mathcal{A}$, es decir, $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$.

Para expresar que los sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son elementalmente equivalentes, escribimos abreviadamente $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas del mismo tipo de similaridad y sea $\mathcal{L}$ un lenguaje homólogo. Las siguientes expresiones significan lo mismo:

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$
$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son elementalmente equivalentes
Para cada sentencia φ de $\mathcal{L}$: $\mathcal{A}$ sat φ si y sólo si $\mathcal{B}$ sat φ
$Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$

La relación de equivalencia elemental entre sistemas es reflexiva, simétrica y transitiva. Se trata, pues, de una relación de equivalencia.

También la isomorfía es una relación de equivalencias entre sistemas, e incluso es más fina y exigente que la equivalencia elemental. En efecto, para cualesquiera sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfos, entonces *(a fortiori,* por así decir) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son elementalmente equivalentes. Pero la invesa no vale en general, sino sólo en el caso de sistemas finitos. Recordemos que la isomorfía se expresa por el signo $\cong$. En resumen, para cualesquiera sistemas similares $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$:

Si $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.
Si $\mathcal{A}$ es finito y $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Dos sistemas isomorfos son estructuralmente idénticos. Dos sistemas elementalmente equivalentes coinciden en su contenido estructural expresable en un lenguaje formal de primer orden, pero pueden tener diferencias estructurales (expresables en lenguajes formales de orden superior) que ese lenguaje es incapaz de expresar. Así, los modelos no estándar de la teoría aritmética de primer orden $Th(\mathcal{N})$ son elementalmente equivalentes al sistema numérico estándar $\mathcal{N}$, pero no son isomorfos con él.

Además, ambas relaciones tienen un 'sabor' distinto. La relación de isomorfía es una típica relación de álgebra universal, que interrelaciona sistemas sin pasar por lenguaje alguno. La relación de equivalencia elemental, por el contrario, es una típica relación de teoría de modelos, que interrelaciona sistemas a base de considerar su relación con las sentencias de un lenguaje formal.

Teorías axiomatizables

Las teorías más conocidas son las teorías axiomáticas, definidas como el conjunto de las consecuencias de una serie de axiomas efectivamente dados. Lo que exigimos del conjunto de los axiomas es que sea decidible, es decir, que haya un procedimiento automático para decidir o averiguar de cualquier sentencia que se nos presente si esa sentencia es un axioma o no. Si es posible presentar una teoría como teoría axiomática, es decir, si hay un subconjunto decidible de sus teoremas, tal que todos los teoremas son consecuencias de ese subconjunto, entonces decimos que la teoría es axiomatizable.

Una teoría T es *axiomatizable* si y solo si hay un conjunto Γ de sentencias del lenguaje de T tal que:

(1) $\Gamma \subseteq T$
(2) $\{\varphi \mid \Gamma \models \varphi\} = T$
(3) Γ es decidible

En ese caso decimos que Γ constituye un conjunto de axiomas para T. Los elementos de Γ son los axiomas de T. Presentar axiomáticamente la teoría T significa indicar explícitamente los elementos de Γ y definir T como el conjunto de las consecuencias de Γ.

Una teoría T es *finitamente axiomatizable* si y solo si hay un conjunto Γ de sentencias del lenguaje de T tal que:

(1) $\Gamma \subseteq \mathrm{T}$
(2) $\{\varphi \mid \Gamma \models \varphi\} = T$
(3) Γ es finito

El que Γ sea finito implica que Γ es decidible. Por tanto, una teoría finitamente axiomatizable es en especial una teoría axiomatizable.

Consideremos el lenguaje formal cuyo único signo peculiar es el relator binario «$\leqslant$» (aquí tomado como signo relator y no como relación), así como las siguientes sentencias de ese lenguaje:

α_1: $\forall xyz\,(x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z)$
α_2: $\forall xy\,(x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y)$
α_3: $\forall x\; x \leqslant x$
α_4: $\forall xy\,(x \leqslant y \vee y \leqslant x)$
α_5: $\forall xy\,(x \leqslant y \wedge x \neq y \Rightarrow \exists z\,(x \leqslant z \wedge z \leqslant y \wedge x \neq z \wedge y \neq z))$
α_6: $\exists xy\;\; x \neq y$
α_7: $\forall x\; \exists y\;\; (x \leqslant y \wedge x \neq y)$
α_8: $\forall x\; \exists y\;\; (y \leqslant x \wedge x \neq y)$

Consideremos ahora las siguientes teorías:

$T_1 = \{\varphi \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \models \varphi\}$
$T_2 = \{\varphi \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \models \varphi\}$

$T_3 = \{\varphi \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \models \varphi\}$
$T_4 = \{\varphi \mid \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_6 \models \varphi\}$
$T_5 = \{\varphi \mid \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_8 \models \varphi\}$

La teoría T_1 se llama la teoría del orden parcial. La teoría T_2 (que es la misma que T_3, ya que α_1, α_2, $\alpha_4 \models \alpha_3$) es la teoría del orden lineal. La teoría T_4 es la teoría del orden lineal denso. La teoría T_5 es la teoría del orden lineal denso sin extremos. Todas estas teorías son finitamente axiomatizables, pues acabamos de definirlas en cada caso como el conjunto de las consecuencias de una serie finita de axiomas. Todas estas teorías son satisfacibles, pues poseen modelos. Así, el sistema formado por el conjunto de los números racionales y la relación de menor o igual entre números racionales es un modelo de cada una de estas teorías. Y otro tanto ocurre con el sistema formado por el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y la relación de menor o igual entre ellos. Por tanto, estas teorías son también consistentes.

Las teorías axiomatizables, pero no finitamente axiomatizables, suelen presentarse mediante una lista de axiomas y de uno o varios esquemas axiomáticos. Por ejemplo, la aritmética de primer orden puede axiomatizarse en el lenguaje formal cuyos signos peculiares son la constante individual '0', el functor monario 's' y los functores binarios '+' y '·' del siguiente modo:

β: $\varphi(0) \land \forall x\,(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(s(x))) \Rightarrow \forall x\, \varphi(x)$
γ_1: $\neg\exists x\, s(x) = 0$
γ_2: $\forall xy\,(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
γ_3: $\forall x\, x + 0 = x$
γ_4: $\forall xy\, x + s(y) = s(x + y)$
γ_5: $\forall x\;\; x \cdot 0 = 0$
γ_6: $\forall xy\;\; x \cdot s(y) = x \cdot y + x$
$T = \{\psi \mid \beta, \gamma_1 \ldots \gamma_6 \models \psi\}$

T es la aritmética de Peano de primer orden, presentada aquí axiomáticamente con ayuda del esquema axiomático β, que en realidad no es una sentencia, sino la condensación de un conjunto infinito de sentencias. En efecto, en β la letra griega φ representa cualquier fórmula del lenguaje aritmético con una variación libre, y hay un número infinito de tales fórmulas, cada una de las cuales da lugar a un axioma distinto.

Este esquema axiomático es imprescindible. Ningún conjunto finito de sentencias podría sustituirlo. Por tanto, la aritmética de Peano de primer orden no es una teoría finitamente axiomatizable. Sin embargo, para cada sentencia del correspondiente lenguaje se puede averiguar automáticamente si esa sentencia tiene la forma indicada por β y es, por tanto, un axioma, o no. Por consiguiente, el conjunto de sentencias $\{\beta, \gamma_1 \ldots \gamma_6\}$, aun siendo infinito (pues incluye las infinitas sentencias indicadas por β), es decidible y, por tanto, la teoría de Peano de primer orden es axiomatizable. Esta teoría es también satisfacible, pues el sistema estándar $\mathcal{N}$ de los números naturales con el cero y las funciones de siguiente, adición y multiplicación es un modelo suyo.

Teorías completas

Los teoremas de que consta una teoría son otras tantas respuestas a posibles preguntas que pueden formularse en el lenguaje de esa teoría. La mayoría de las teorías dejan ciertas preguntas sin respuesta. Para algunas sentencias ocurre que ni φ ni la negación de φ, $\neg \varphi$, es un teorema de la teoría. Son teorías incompletas. Una teoría completa, por el contrario, es una teoría que da respuesta a todas las preguntas que puedan formularse en su lenguaje. Sea T una teoría cuyo lenguaje es $\mathcal{L}$.

Definimos:

T es *completa* si y solo si para cada sentencia φ de $\mathcal{L}$: $\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$.

La teoría de un sistema siempre es completa. En efecto, dado el sistema $\mathcal{A}$ y una sentencia φ de un lenguaje homólogo, ocurrirá que $\mathscr{A}$ satisface φ o que $\mathscr{A}$ no satisface φ. Por la definición de la satisfacción, en el primer caso tenemos que $\varphi \in Th(\mathscr{A})$, en el segundo que $\neg\varphi \in Th(\mathscr{A})$. Por tanto, $Th(\mathscr{A})$ es una teoría completa.

Un interesante teorema pone en relación la completud de las teorías con la equivalencia elemental de los sistemas: una teoría cualquiera T es completa si y sólo si todos sus modelos son elementalmente equivalentes entre sí. En otras palabras:

$$T \text{ es completa si y solo si para cada } \mathscr{A}, \mathscr{B} \in Mod(T)\text{: } \mathscr{A} \equiv \mathscr{B}.$$

Uno de los descubrimientos más famosos de nuestro siglo fue realizado por K. Gödel, en 1931, y se conoce con el nombre de teorema de incompletud de Gödel. Gödel descubrió que la aritmética de Peano (de primer orden) es incompleta. Y no sólo eso. Esa incompletud es irremediable en el sentido de que, por más axiomas que le añadamos, la teoría resultante siempre seguirá siendo incompleta. Una versión del *teorema de incompletud de Gödel* dice: Toda teoría aritmética axiomatizable y consistente (de primer orden) es incompleta.

Podemos definir una teoría aritmética consistente y completa de primer orden como la teoría del sistema estándar $\mathscr{N}$ de los números naturales: $Th(\mathscr{N})$. Pero $Th(\mathscr{N})$ no es axiomatizable. Así pues, podemos tener una teoría aritmética de primer orden axiomatizable y completa, pero entonces no será axiomatizable. Y podemos tenerla consistente y axiomatizable (como la teoría de Peano de primer orden), pero entonces no será completa. El teorema de incompletud de Gödel nos dice que ciertos ideales son inalcanzables, por ejemplo el ideal de obtener una teoría aritmética de primer orden que sea a la vez consistente, axiomatizable y completa. Todo lo cual no es óbice para que otras teorías puedan ser completas. Así, por ejemplo, y como veremos en el próximo apartado, la teoría del orden lineal denso sin extremos es completa.

Teorías κ-categóricas

Los números cardinales miden la cantidad de elementos que hay en un conjunto, tanto si éste es finito (en cuyo caso los números cardinales coinciden con los naturales) como si es infinito. El menor número cardinal infinito (que corresponde a la cardinalidad del conjunto de los números naturales) es $\aleph_0$, el siguiente es $\aleph_1$, el siguiente $\aleph_2$, etc. Si un conjunto tiene cardinalidad $\aleph_0$ (es decir, si es biyectable con el conjunto de los números naturales), se dice que es denumerable. Empleamos la letra griega κ para referirnos indistintamente a números cardinales cualesquiera, finitos o infinitos. Y escribimos '$|B| = \kappa$' para indicar que la cardinalidad del conjunto B es el número cardinal κ.

Llamamos a un sistema $\mathcal{A}$ finito o infinito, según que su universo $\mathcal{A}$ sea finito o infinito, y atribuimos al sistema la cardinalidad de su universo: $|\mathcal{A}| = |A|$.

Dada una teoría T, y un número cardinal κ puede ocurrir que la teoría T no tenga ningún modelo de esa cardinalidad κ, en cuyo caso T no es κ-categórica. Puede ocurrir también que la teoría T tenga modelos de cardinalidad κ, pero que esos modelos no sean todos isomorfos entre sí, en cuyo caso T tampoco será κ-categórica. Para que T sea κ-categórica hace falta que T posea modelos de cardinalidad κ y que éstos sean todos isomorfos entre sí.

Una teoría T es *κ-categórica* si y sólo si 1) cualesquiera modelos de T de cardinalidad κ son isomorfos y 2) T posee al menos un modelo de cardinalidad κ.

Por ejemplo, la teoría del orden lineal denso sin extremos (cuyos axiomas vimos anteriormente) es una teoría $\aleph_0$-categórica. Esto significa que cualesquiera dos órdenes lineales densos sin extremos, cuyos universos sean denumerables, son isomorfos entre sí, Por el contrario, la aritmética de Peano de primer orden no es $\aleph_0$-categórica, pues posee modelos denumerables no isomorfos. En efecto, en el modelo estándar de la aritmética, es decir, en el sistema estándar $\mathcal{N}$ de los números naturales, no existe ningún individuo que sea mayor que todos los números naturales estándar (es decir, el 0, el siguiente de 0, el siguiente del siguiente de 0, etc.), mientras que en ciertos modelos no estándar de la aritmética de Peano de primer orden sí que existen individuos mayores que todos los números naturales estándar, por lo que ambos sistemas no pueden ser isomorfos, ya que a un individuo mayor que todos los números naturales estándar del modelo no estándar no puede corresponder isomórficamente ningún número del modelo estándar.

¿Cómo sabemos que hay modelos no estándar de la aritmética de Peano de primer orden? Por aplicación del *teorema de compacidad:* Para cualquier conjunto Γ de sentencias ocurre que si todo subconjunto finito de Γ es satisfacible, entonces Γ entero es satisfacible también.

Definamos en el lenguaje de la aritmética el relator «$\leqslant$» del siguiente modo:

$$\forall xy\,(x \leqslant y \leftrightarrow \exists z\, x + z = y)$$

Consideremos ahora la teoría aritmética ampliada que resulta de añadir a los axiomas de la aritmética de Peano de primer orden el siguiente conjunto infinito de axiomas (que, intuitivamente, dicen que un cierto individuo a es mayor o igual que cada número natural):

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant a \\ s(0) &\leqslant a \\ s(s(0)) &\leqslant a \\ s(s(s(0))) &\leqslant a \\ &\vdots \end{aligned}$$

Cada subconjunto finito de este conjunto, añadido a los axiomas de Peano de primer orden, resulta claramente satisfacible. Por ejemplo, en el caso de los cuatro primeros axiomas aquí escritos, basta con interpretar «a» como refiriéndose al número 4 del sistema estándar de los números naturales. Por tanto, aplicando el teorema de compacidad, obtenemos que la teoría aritmética ampliada formada por ese conjunto infinito de axiomas más los de Peano de primer orden es satisfacible, posee modelos. Esos modelos serán no estándar, pues en ellos había al menos un individuo, *a*, mayor que todos los números naturales estándar.

Una versión del *teorema de Löwenheim-Skolem* dice: Si una teoría T de primer orden posee modelos infinitos, entonces posee también algún modelo denumerable. Por tanto, uno de los modelos de la teoría aritmética ampliada será denumerable. Y será también un modelo de la aritmética de Peano de primer orden, ya que satisface todos sus axiomas. Por consiguiente, hay modelos denumerables no isomorfos de la aritmética de Peano de primer orden, que, por tanto, no es $\aleph_0$-categórica.

El importante *teorema de Łós-Vaught* pone en relación las nociones de κ-categoricidad y completud de teorías:

Si una teoría T es κ-categórica para algún cardinal infinito κ y todos los modelos de T son infinitos, entonces T es completa.

Por ejemplo, la teoría del orden denso sin extremos es $\aleph_0$-categórica y, por tanto, κ-categórica para algún cardinal infinito κ, a saber, $\kappa = \aleph_0$. Por otro lado, todos sus modelos son infinitos. Por tanto, la teoría del orden lineal denso sin extremos es completa.

La inversa del teorema de Łós-Vaught no vale. Hay teorías completas que no son κ-categóricas para ningún κ.

Teorías decidibles

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, tales que $B \subseteq A$. Decimos que B es decidible (respecto a A) si y solo si poseemos un algoritmo o procedimiento automático que para cualquier elemento $x \in A$ nos permite decidir o averiguar en un número finito de pasos si $x \in B$ o si $x \notin B$. Si tomamos una teoría como B y el conjunto de las sentencias del lenguaje de esa teoría como A, obtenemos la definición de teoría decidible.

Una teoría T es *decidible* si y solo si existe un algoritmo que, aplicado a cualquier sentencia φ del lenguaje de T, nos permite determinar en un número finito de pasos si φ es un teorema de T o no, es decir, si $\varphi \in T$ o $\varphi \notin T$.

Una teoría T es *indecidible* si y solo si T no es decidible.

La manera directa de probar que una teoría es decidible consiste en ofrecer un procedimiento de decisión para la misma. También hay maneras indirectas de probarlo, haciendo uso de varios teoremas metateóricos que ponen en relación la decibilidad de una teoría con la de otra, o con otras propiedades distintas de la misma teoría. Sirva de ejemplo el siguiente teorema:

Si T es una teoría completa y axiomatizable, entonces T es decidible.

Puesto que ya vimos que la teoría del orden denso lineal sin extremos es axiomatizable y completa, podemos concluir que es decidible, aunque no hayamos expuesto procedimiento alguno de decisión para la misma. Otro ejemplo de teoría decidible es la teoría de grupos abelianos. La teoría de grupos, sin embargo, es indecidible. Otro ejemplo de teoría indecidible es la aritmética de Peano de primer orden.

Teorías categóricas

Una teoría es *categórica* si y sólo si todos sus modelos son isomorfos.

Una teoría categórica proporciona una descripción exhaustiva de la estructura de sus modelos, que de este modo quedan caracterizados estructuralmente del modo más unívoco y completo posible. Por eso, con frecuencia los matemáticos tratan a los diversos modelos isomorfos de una teoría categórica como si fuesen su único modelo, *el* modelo de la teoría.

Puesto que los modelos de una teoría categórica T son isomorfos, en especial son elementalmente equivalentes, y por tanto la teoría T es también completa. Una teoría categórica siempre es completa. Pero una teoría completa no siempre es categórica. Por ejemplo, la teoría del orden lineal denso sin extremos, que, según vimos, es completa, sin embargo no es categórica, pues entre sus modelos se cuentan tanto el sistema ordenado de los números racionales como el de los números reales, que no pueden ser isomorfos, ya que tienen distinta cardinalidad. Solo si todos los modelos de una teoría son finitos, podemos, a partir de su completud, inferir su categoricidad. Pero no podemos hacerlo, si la teoría tiene modelos infinitos.

Una versión del teorema de Löwenheim-Skolem dice: Si una teoría T tiene al menos un modelo infinito, entonces tiene modelos de cualquier cardinalidad infinita. Este teorema vale para todas las teorías de primer orden. De ahí se sigue que una teoría de primer orden que tenga modelos infinitos no puede ser categórica. En efecto, si tiene algún modelo infinito tiene modelos de distinta cardinalidad infinita. Pero sistemas de distinta cardinalidad no pueden ser isomorfos, pues sus universos no son biyectables.

Si una teoría consistente es categórica, entonces es κ-categórica para uno y sólo un cardinal κ, ya que todos sus modelos tendrán la misma cardinalidad. Si una teoría consistente no es κ-categórica para ningún cardinal κ, o si es κ-categórica para más de un cardinal κ, entonces no es categórica.

Todas las teorías interesantes de primer orden tienen modelos infinitos y, por tanto, no son categóricas. Las únicas teorías categóricas de primer orden son las que exigen que el universo tenga un número finito determinado en elementos. Por ejemplo, la teoría formada por las consecuencias de $\{\forall xy\, x = y, \forall x\, Px\}$ es categórica, pues todos sus modelos (sistemas con un solo elemento en su universo, y una sola propiedad, que tiene ese único individuo) son isomorfos, pero no parece muy interesante.

Para encontrar teorías categóricas interesantes hay que abandonar el marco de los lenguajes formales de primer orden, en que nos hemos movido hasta aquí, y pasar a los de segundo orden. En los lenguajes de segundo orden hay variables X, Y, Z para subconjuntos cualesquiera del universo, y esas variables pueden ser cuantificadas.

La aritmética de Peano de segundo orden tiene, en vez de los infinitos axiomas resumidos en el esquema β de la axiomatización de primer orden presentada bajo el epígrafe «Teorías axiomatizables», un solo axioma de inducción (de segundo orden):

$$\forall Z (Z0 \wedge \forall x (Zx \Longrightarrow Zs(x)) \Rightarrow \forall x \, Zx)$$

El resto de los axiomas sigue igual. Esta aritmética de Peano de segundo orden es categórica, todos sus modelos son isomorfos entre sí, y carece de modelos no estándar. Ello se debe a que un solo axioma de segundo orden es más fuerte que el conjunto infinito de axiomas de inducción de primer orden. En efecto, con estos últimos cuantificamos sobre todos los conjuntos de números naturales definibles mediante una fórmula, y de ellos sólo puede haber una cantidad numerable, pues sólo hay un número denumerable de fórmulas. Sin embargo, hay una cantidad supernumerable de conjuntos de números naturales (es decir, de partes de $\mathbb{N}$), y sobre todos ellos cuantifica el axioma de inducción de segundo orden.

Otras teorías matemáticas importantes, como la de los números reales o la geometría euclídea, son también categóricas, siempre que se formalicen en segundo orden.

CAPÍTULO 10

SOBRE EL CONCEPTO DE MODELO

Pinturas y modelos

Cuando dilucidamos conceptos, partimos del análisis del uso de los correspondientes términos en el lenguaje, para luego proponer una precisión artificial de los mismos. La precisión propuesta será tanto más aceptable cuanto, por un lado, más exacta, unívoca y fecunda sea y, por otro lado, cuanto menos se aleje de los usos lingüísticos comunes. José Ferrater Mora ha tratado de dilucidar algunos conceptos relacionados con la representación, y en especial los de pintura y modelo [1]. Me permitiré hacerle algunas críticas y sugerencias desde los puntos de vista indicados.

Ferrater considera una serie de fenómenos de representación y de usos lingüísticos correspondientes. Se fija sobre todo en la relación binaria entre una pintura (en su sentido más amplio) *x* y el objeto pintado *y*. Ferrater propone como expresión canónica para expresar esa situación la de que '*x* pinta (o pinta a) *y*'. Esta propuesta terminológica parece desafortunada, pues decir que la pintura

[1] En su ponencia titulada «Pinturas y modelos», presentada al Simposio de Lógica y Filosofía de la Ciencia celebrado en Valencia en 1971, impresa en *Filosofía y Ciencia en el pensamiento español contemporáneo,* Tecnos, Madrid, 1973, y José Ferrater Mora: *Las palabras y los hombres,* Península, Barcelona, 1971.

pinta al objeto pintado parece ir frontalmente en contra del uso que normalmente se hace de esas palabras. Lo que suele decirse es que alguien —el pintor— pinta una pintura de (o que representa) un objeto. Además, si lo que nos interesa es la dilucidación del concepto de pintura, convendrá tener en cuenta tanto las relaciones (pragmáticas) de la pintura con el pintor que la pinta como sus relaciones (semánticas) con el objeto pintado. Por ello quizá hubiera sido más fecundo para el análisis del tipo de situaciones que interesaban a Ferrater partir de la relación ternaria entre el pintor, la pintura y el objeto pintado, la cual podría expresarse canónicamente (pero de modo acorde con el espíritu de la lengua) diciendo que «(el pintor) *x* pinta (la pintura) *y* que representa (al objeto) *z*».

En su dilucidación del concepto de modelo Ferrater parte de la expresión '*x* es un modelo de *y*' —canónicamente, en su propuesta, '*x* modela *y*'—, como paralela a '*x* es una pintura de *y*'. Es decir, Ferrater coloca desde el principio los modelos del mismo lado de la relación de representación que las pinturas, y luego se las ve y se las desea para distinguir modelos de pinturas. Quizás en ese caso habría sido más fecundo partir de la expresión '*x* es un modelo de *y*' como simétricamente opuesta a '*x* es una pintura de *y*', en el sentido de que *x* es una pintura de *y* si y solo si *y* es un modelo de *x*. Con esto tanto la distinción como la relación entre los conceptos de pintura y modelo hubieran resultado mucho más diáfanas y precisas. Además, este análisis podría haber sido incluido en el anterior, diciendo que el pintor *x* pinta la pintura *y* que representa al modelo *z*. De hecho, es lo que pasa —y lo que se dice que pasa— en el estudio de un artista: el pintor pinta un cuadro (una pintura) del (o de la) modelo.

Ferrater distingue entre pinturas que representan —en su terminología, que pintan— con similaridad pictórica y pinturas que representan sin similaridad pictórica. Entre las pinturas que representan sin similaridad pictórica se encuentran —él no lo dice explícitamente, pero yo lo entiendo así, y me imagino que él también— las teorías. El científico es el pintor que pinta (construye) esa peculiar pintura —la teoría— que representa (describe) una determinada parcela de la realidad. Como la teoría es un caso especialmente interesante (al menos para Ferrater y para mí) de pintura, en lo que sigue voy a exponer unas consideraciones sobre el concepto de modelo de (ese tipo de pintura que es) una teoría.

Teorías, sistemas y modelos

Lo que despierta el interés científico y es sometido a investigación no suele ser tanto un individuo aislado como un sistema. Un sistema es una entidad compleja formada por diversos individuos y por una serie de funciones y relaciones entre esos individuos. Ejemplos de sistemas son el sistema de los números naturales (formado por el 0, el 1, el 2, el 3, etc., y la relación de ser el siguiente de), nuestro sistema solar (formado por el Sol, los planetas, los cometas, etc., y sus órbitas, velocidades y distancias), el ecosistema del lago de Bañolas (formado por el agua de dicho lago y los organismos que lo habitan, sus fluctuaciones, y sus relaciones tanto entre ellos —cadenas alimenticias, etc.— como con el entorno), el sistema bancario suizo (formado por los bancos de ese país, sus clientes, sus operaciones, etc.), el sistema español de correos (formado por los carteros, las estafetas, las redes de distribución, la subordinación entre oficinas y personas, etc.).

El estudio científico de un modelo aspira a elaborar una teoría del sistema, es decir, un conjunto de enunciados, ecuaciones, fórmulas, esquemas, etc., que permitan describir adecuadamente el funcionamiento presente del sistema, así como para explicar lo ocurrido en el pasado y predecir lo que pasará en dicho sistema en el futuro. Si el empeño tiene éxito, logramos una teoría del sistema. Las variables de esta teoría se referirán a los individuos del sistema, y sus conceptos corresponderán a las relaciones y funciones del mismo. Si el sistema funciona tal y como lo indica la teoría, si en él se cumple lo que dice la teoría, decimos que el sistema es un modelo o realización de la teoría. Así, el sistema de los números naturales es un modelo de la teoría aritmética de Peano, nuestro sistema planetario es un modelo de la teoría de Kepler, el sistema de las placas continentales terrestres es un modelo de la teoría de Weneger, etc.

Uno puede aspirar a teorías de más alcance, que sean aplicables no ya a un sistema, sino a toda una clase de sistemas. Así, la teoría de grupos es aplicable al sistema formado por los números enteros y la adición, o al formado por los números racionales menos el cero y la multiplicación, o al formado por los automorfismos de un conjunto cualquiera y la composición, etc. Así, también, la mecánica clásica de partículas es aplicable al sistema formado por la Tierra y la Luna y sus respectivos movimientos, o a nuestro sistema solar entero con los suyos, o al sistema formado por un péndulo y la Tierra, o al formado por las bolas de billar en una mesa determinada, etc. Así también, la teoría limnológica es aplicable a todos (o a muchos) lagos.

A veces ocurre que la teoría elaborada para un solo sistema resulta tener también otros modelos. Así, lo dicho por la teoría aritmética de Peano no sólo se cumple en el sistema de los números naturales, para el que fue construida, sino en muchos otros sistemas, que son otros tantos modelos (por así decir, involuntarios) de esa teoría. Y la teoría mecánica clásica de partículas no sólo se cumple en los sistemas (Tierra, Luna, mareas; sistema solar; Tierra y péndulo; Tierra y proyectil...) en los que Newton pensaba al elaborarla —es decir, en sus modelos paradigmáticos—, sino que también es aplicable a muchos otros sistemas, tiene muchos otros modelos, como la comunidad científica formada en torno a ella se encargaría de mostrar. En definitiva, lo que Kuhn llama «ciencia normal» (la actividad de una comunidad científica formada en torno a una teoría) consiste fundamentalmente en la búsqueda de nuevas aplicaciones de la teoría, en el descubrimiento de otros sistemas en que se cumple, de nuevos modelos suyos.

También puede ocurrir que la teoría elaborada —aunque coherente e incluso brillante— carezca —al menos hasta hoy— de modelos reales, de aplicaciones. Así, quizá determinadas teorías económicas sólo serían aplicables (sólo tendrían como modelos) a sistemas económicos donde la competencia, transparencia y elasticidad de ciertos factores fueran perfectas. Mientras no exista ninguna economía de esas características, dichas teorías carecerán de modelos reales (aunque, si son consistentes, tendrán modelos numéricos, pero eso no interesa a los economistas).

¿Qué tienen de común todos los modelos de una misma teoría? Una estructura, la estructura caracterizada por esa teoría. Así, todos los modelos de la teoría de grupos —todos los grupos— tienen de común la estructura de grupo. Todos los modelos de la teoría de espacios vectoriales tienen de común la estructura de espacio vectorial. Todos los modelos de la teoría clásica de formación de precios tienen de común la estructura de mercado libre. Todos los modelos de la teoría cibernética de la servorregulación tienen de común la estructura de servomecanismo.

La estructura asociada con una teoría puede considerarse (intensionalmente) como lo que de común tienen todos los modelos de esa teoría, los rasgos o propiedades comunes a todos ellos, o (extensionalmente) como la clase de todos los modelos de la teoría.

Noticia de la teoría de modelos

En la matemática está muy avanzado el estudio de las relaciones de las teorías con sus modelos, habiéndose alcanzado aquí un envidiable nivel de precisión y habiéndose desarrollado una potente teoría —la teoría de modelos—[2] que incluso permite obtener determinados resultados algebraicos por procedimientos más simples que los usuales (por ejemplo vía el teorema de compacidad).

Consideremos, a fin de aclarar las ideas, el caso más sencillo, el de un sistema relacional simple y el de una teoría formal homóloga con él. Un sistema es aquí una entidad $\mathcal{A}$ compuesta por una clase no vacía (el universo del sistema) y una serie de relaciones entre elementos de esa clase.

[2] La teoría de modelos fue inicada por Tarski. Una presentación actual de la misma puede encontrarse, por ejemplo, en *Model Theory*, de C. Chang y H. J. Keisler (North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 3.ª edición, 1990).

$\mathscr{A}$ es un sistema si y solo si para algún A, $R_1 \ldots R_n$:

(1) $\mathscr{A} = \langle A, R_1 \ldots R_n \rangle$
(2) $A \neq \varnothing$
(3) Para cada $i (1 \leqslant i \leqslant n)$: R_i es una relación en A, es decir, para algún número m (que representa la aridad de R_i): $R_i \subseteq A^m$.

Dos sistemas son similares si tienen el mismo número de relaciones y a cada relación n-aria del uno corresponde otra relación n-aria del otro.

Sean $\mathscr{A} = \langle A, R_1 \ldots R_n \rangle$ y $\mathscr{B} = \langle B, S_1 \ldots S_m \rangle$ dos sistemas, $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son similares si y sólo si (1) $n = m$ y (2) para cada $i(1 \leqslant i \leqslant n)$: R_i y S_i son relaciones de la misma aridad (es decir, ambas son unarias, o ambas binarias, o ambas ternarias, o para algún otro número j, ambas son j-arias).

Dos sistemas similares son isomorfos si tienen igual cantidad de individuos en sus universos y si en ambos ocurre lo mismo respecto a sus relaciones respectivas.

Los sistemas similares $\mathscr{A} = \langle A, R_1 \ldots R_n \rangle$ y $\mathscr{B} = \langle B, S_1 \ldots S_m \rangle$ son isomorfos si y solo si existe una función h tal que:

(1) h es una biyección de A en B.
(2) Para cada $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ y cada j individuos $a_1 \ldots a_j \in A$: $R_i a_1 \ldots a_j$ si y sólo si $S_i h(a_1) \ldots h(a_j)$.

En ese caso, decimos que h es un isomorfismo entre A y B.

Una teoría formal formulada en el lenguaje $\mathscr{L}$ es homóloga con el sistema $\mathscr{A} = \langle A, R_1 \ldots R_n \rangle$ si en dicho lenguaje hay precisamente n predicados (o relatores) $P_1, \ldots P_n$ y ocurre que para cada $i(1 \leqslant i \leqslant n)$, el número ario del predicado P_i de $\mathscr{L}$ es igual al de la relación R_i de $\mathscr{A}$.

Sean $\mathscr{A} = \langle A, R_1 \ldots R_n \rangle$ y $\mathscr{B} = \langle B, S_1 \ldots S_m \rangle$ dos sistemas similares y homólogos con la teoría T, formulada en un lenguaje con los predicados $P_1 \ldots P_n$. Dado un teorema α de la teoría T, podemos interpretar α sobre el sistema $\mathscr{A}$ suponiendo que las variables se refieren a elementos cualesquiera de A y que los predicados P_i se refieren a las correspondientes relaciones R_i de $\mathcal{A}$. Igualmente podemos interpretar α sobre el sistema $\mathcal{B}$, suponiendo que las variables se refieren a elementos cualesquiera de B y que cada predicado P_i se refiere a la correspondiente relación S_i de $\mathcal{B}$. Si todos los teoremas de la teoría T, así interpretados o 'traducidos', resultan verdaderos —se cumplen— en $\mathcal{A}$, mientras que algún teorema de la misma teoría resulta falso —no se cumple— en $\mathcal{B}$, decimos que $\mathcal{A}$ es un modelo de T, pero que $\mathcal{B}$ no lo es.

Todos estos conceptos están interrelacionados entre sí. Por ejemplo, si dos sistemas son isomorfos entre sí, entonces ambos son modelos de exactamente las mismas teorías. La isomorfía sirve precisamente para establecer la distinción entre teorías categóricas (cuyos modelos son todos isomorfos entre sí) y teorías polimorfas (que tienen modelos no isomorfos).

Una teoría cualquiera determina la clase de sus modelos. Y un sistema cualquiera determina unívocamente la clase de todas las teorías de las que él es modelo. Así, podemos partir de una teoría y buscarle modelos, o partir de un modelo (de un sistema) y buscarle teorías. Y podemos obtener información sobre las teorías estudiando sus modelos, y sobre los sistemas, estudiando sus teorías. Respecto a todos estos y otros muchos aspectos de las relaciones entre teorías y modelos la teoría de modelos ofrece métodos precisos y resultados abundantes, a los que evidentemente no quisiéramos renunciar.

El uso de «modelo» en el lenguaje ordinario

Si nos atenemos a la relación entre la pintura y lo pintado, la representación y lo representado, la fotografía y lo fotografiado, etcétera, nos encontramos con que el lenguaje ordinario usa la palabra 'modelo' en dos sentidos fundamentales que no sólo son distintos, sino que son contrapuestos. En efecto, a veces se usa 'modelo' para designar lo pintado, lo representado, lo fotografiado. Así, se habla del modelo de un pintor o un escultor, de la modelo de un fotógrafo, del auge de la profesión de modelo, etc. Pero otras veces se usa «modelo» para designar el extremo opuesto de la relación, es decir, la pintura, la escultura, la representación, la maqueta [3]. Así, se habla del modelo de un barco, del modelo (o maqueta) a escala reducida de un edificio, etc. Esta radical equivocidad del vocablo 'modelo' en el lenguaje ordinario se ha trasladado a la ciencia, dando lugar a dos usos opuestos de la palabra. En las ciencias formales se habla de modelo como de aquello a lo que se refiere la teoría, como lo que está frente a la teoría, como (exagerando) lo opuesto a la teoría. Es el sentido que lleva la voz cantante en la teoría de modelos. En las ciencias empíricas, sin embargo, con frecuencia se habla de modelos en otro sentido; a veces, incluso se habla de modelo como sinónimo de teoría. Así, los economistas o los psicólogos dicen que buscan un modelo para explicar un sistema que les interesa, queriendo decir que buscan una teoría que describa adecuadamente ese sistema.

Dado que el primer significado de la palabra 'modelo' —modelo como lo opuesto a teoría, modelo como sistema en que se cumple lo que dice la teoría— ha sido el más precisado, estudiado y desarrollado —ahí está el formidable arsenal conceptual de la teoría de modelos—, quizá sea conveniente darle la preferencia al menos en el campo de la metodología [4]. Donde se emplea la palabra 'modelo' como sinónimo de teoría, lo más práctico quizá sería dejar de usarla en dichos contextos y sustituirla por la palabra 'teoría', de uso mucho menos confundente. Respecto a los otros usos de 'modelo' en la ciencia empírica, convendría precisarlos en función de los conceptos desarrollados a partir de la teoría de modelos,

[3] Ferrater sólo parece ser consciente en su ponencia de este segundo uso de «modelo» en el lenguaje ordinario (*Las palabras y los hombres*, Península, Barcelona, 1971, pp. 139, 143 y 144, o *Filosofía y ciencia en el pensamiento español contemporáneo*, pp. 89 y 92), pero no del primero.

[4] Esta postura ya fue mantenida por Patrick Suppes en «A comparation of the meaning and uses of models in mathematics and the empirical sciencas», impreso en *The concept and the role of the model in mathematics and natural and social sciencias* (D. Reidel, Dordrecht, Holanda, 1961).

máxime ahora que estos conceptos encuentran creciente aplicación en las investigaciones metodológicas sobre las teorías físicas[5].

Servir de modelo

En las ciencias empíricas con frecuencia ocurre que el sistema que se quiere describir teóricamente es enormemente complicado y que el investigador no sabe cómo hincarle el diente, no sabe por dónde empezar. A veces lo que hace es buscar o construir otro sistema «que le sirva de modelo» para el estudio del primero.

Si estudiamos el tránsito rodado en Barcelona y nos perdemos en la complejidad del tema, sin llegar a resumirlo en principios o ecuaciones esclarecedoras, quizá encontremos la inspiración estudiando otro sistema que tenga algunas características en común con el tránsito en Barcelona, pero que sea más simple o mejor conocido y estudiado —como el flujo de líquidos de densidad variable por un sistema de canales de perfil variable. Es decir, el flujo de dichos líquidos nos puede quizá servir de modelo para estudiar el tránsito rodado en Barcelona[6].

Si queremos estudiar la resistencia que ejercerá el aire sobre un determinado avión a diversas velocidades, la investigación directa puede resultar peligrosa y llena de problemas y dificultades. Una manera racional de proceder consistirá en construir una maqueta a escala del avión en cuestión y una cámara de ensayo donde podamos provocar corrientes controladas de aire, en estudiar cómo funciona ese sistema simple (qué resistencia opone el avión-maqueta a las corrientes de aire de la cámara) y en formular una teoría que lo

[5] Piénsese en el importante papel que juegan los modelos en la reconstrucción de las teorías físicas por P. Suppes, J. Sneed, G. Ludwig, van Fraassen y otros filósofos de la ciencia actuales.

[6] Varios ejemplos —entre ellos, uno casi igual que éste— de sistemas que sirven de modelos para el estudio de otros se encuentran en la ponencia de Ferrater. Véase la p. 147 de *Las palabras y los hombres* o las pp. 94-95 de *Filosofía y ciencia en el pensamiento español contemporáneo.*

describa adecuadamente. Con un poco de suerte, esa misma teoría será aplicable también al sistema formado por el avión grande y los vientos de verdad. El avión-maqueta y la cámara de viento nos habrán servido de modelo para estudiar la resistencia del avión grande al viento de verdad —que es lo que nos interesa.

¿Qué ocurre en estos casos? Queremos describir teóricamente —construir una teoría que nos sirva para explicar y predecir— un sistema muy complicado y poco conocido, y no sabemos cómo proceder directamente. Entonces seguimos un camino indirecto. Nos fijamos en otro sistema más simple o mejor conocido que el primero, pero que posea algunos de sus rasgos o características, que se le parezca en algún respecto que intuitivamente nos parezca relevante. Si no encontramos tal sistema, lo construimos (con plástico, madera y acero o, al menos, con la imaginación). En cualquier caso, nos encontramos con dos sistemas: el que nos interesa, pero que nos resulta demasiado complicado o desconocido, y el que se le parece en algo, pero que es más simple o mejor conocido o más fácilmente estudiable. Construimos una teoría que describa adecuadamente el funcionamiento del sistema simple, que tenga al sistema simple por modelo. Y, finalmente, tratamos de aplicar esa misma teoría al sistema complejo o desconocido. Pueden pasar dos cosas. Puede que en el sistema complejo no se cumpla lo que dice la teoría elaborada a partir del sistema simple. En ese caso decimos que ese sistema simple o conocido no sirve como modelo del sistema complejo o desconocido. Y hay que volver a empezar o buscar la inspiración por otro camino. Pero puede que en el sistema complejo sí se cumpla lo que dice la teoría elaborada a partir del sistema simple. Entonces decimos que el sistema simple o conocido sirve como modelo del sistema complejo o desconocido. En ese caso, ambos sistemas son modelos de la misma teoría y, por tanto, tienen ciertas propiedades estructurales en común, tienen cierta estructura en común (a saber, la estructura caracterizada por la teoría en cuestión).

El *servir de modelo* es, pues, algo distinto de (pero reducible a) *ser modelo de.*

Podemos decir que el sistema $\mathscr{A}$ sirve de modelo del sistema $\mathscr{B}$ al científico *h* si y solo si (1) $\mathscr{A}$ es más simple o resulta más conocido para *h* que $\mathscr{B}$, (2) a partir de $\mathscr{A}$ *h* desarrolla la teoría *T*, de la que $\mathscr{A}$ es un modelo y (3) $\mathscr{B}$ es también un modelo de *T*.

Es de esperar que otras expresiones usadas en las ciencias empíricas en las que aparezca la palabra 'modelo' sean igualmente reducibles al concepto de modelo que se usa en teoría de modelos, aunque la mayor parte del trabajo —evidentemente— está todavía por hacer.

De todos modos, y para terminar, hay que reconocer que también sería coherente usar la palabra 'realización' en vez de 'modelo' para lo que se llama modelo en la teoría de modelos y reservar la palabra 'modelo' para la descripción teorizada de un sistema real. Este proceder incluso tendría la ventaja de concordar mejor con el uso lingüístico habitual en la ciencia empírica.

CAPÍTULO 11

SOBRE TEORÍAS FÍSICAS Y TEORÍAS MATEMÁTICAS

La tesis del abismo

Al menos desde Hume, el análisis filosófico de la ciencia ha solido recrearse en subrayar el abismo insalvable que al parecer separa las teorías matemáticas de las teorías físicas. Las primeras serían analíticas, tautológicas, formales y ciertas, aunque limitadas al desmenuzamiento de las relaciones entre nuestras ideas o nuestros signos. Las segundas serían sintéticas, factuales, experimentales y provisionales, pero pretenderían describir la realidad empírica del mundo.

Recordemos las palabras finales del ensayo de Hume sobre el entendimiento humano: «Si cogemos en nuestras manos un libro cualquiera..., preguntémonos: ¿Contiene algún razonamiento abstracto sobre la cantidad o el número? No. ¿Contiene algún razonamiento experimental sobre asuntos de hecho y existencia? No. Arrojémoslo entonces a las llamas, pues no puede contener sino sofismas y engaños» [1]. Lo que aquí nos interesa de este texto no es el deseo en él manifestado de quemar la literatura seudocientífica, sino el hecho de que, para separar lo que es ciencia de lo que no lo

[1] D. Hume: *An Enquiry Concerning Human Understanding*, 1748.

es, a Hume no le baste con formular una sola pregunta, sino que se vea obligado a formular dos preguntas distintas, destinadas fundamentalmente a salvar de la hoguera las teorías matemáticas y las físicas, respectivamente.

En nuestro siglo esta tesis del abismo que separaría la matemática y la física no ha hecho sino extenderse y ampliarse entre los filósofos. Así, por ejemplo, en el primer párrafo del prefacio del libro más popular de Ayer leemos: «Como Hume, yo divido todas las proposiciones genuinas en dos clases: las que, en su terminología, tratan de 'relaciones de ideas' y las que tratan de 'asuntos de hecho'. La primera clase comprende las proposiciones *a priori* de la lógica y la matemática pura, de las que admito que son necesarias y ciertas, puesto que son analíticas. Es decir, mantengo que la razón por la que estas proposiciones no pueden ser refutadas en la experiencia es que no afirman nada acerca del mundo empírico, sino que se limitan a registrar nuestra determinación de usar los símbolos de una cierta manera. Por otro lado están las proposiciones sobre asuntos fácticos, de las que sostengo que son hipótesis que pueden ser probables, pero nunca ciertas...» [2], etc.

Aunque con distintos matices, casi todos los filósofos actuales de inspiración empirista —¿y qué filósofo que se ocupe de la ciencia no lo es?— han aceptado y elaborado la tesis del abismo entre la matemática y la física. Una de las pocas excepciones es Quine. Dos de los rasgos más peculiares de la filosofía de Quine son su rechazo de la dicotomía *analítico-sintético* y su especial tipo de holismo, que mete las teorías matemáticas y las físicas, e incluso todas las teorías científicas, en un mismo saco, saco que, en su integridad, es lo único que directamente podemos contrastar con la experiencia. Evidentemente esto implica el rechazo de la tesis del abismo. Esta peculiaridad de la filosofía de Quine siempre me había resultado especialmente difícil de digerir. Sin embargo, los

[2] A. J. Ayer: *Language, Truth and Logic*, Londres, 1936.

análisis de Sneed[3] acerca de la estructura lógica de las teorías de la física matemática también conducen a poner en duda la tesis del abismo y, por lo tanto, hacen más digeribles las tesis de Quine. De todos modos, los análisis de Sneed se basan en el abandono de la noción casi universalmente admitida de que las teorías son conjuntos de teoremas y en su sustitución por la discutible propuesta de identificar las teorías con complejos sistemas conjuntistas, fundamentalmente integrados por diversas clases de modelos.

Axiomatización informal

Como es bien sabido, a principio de siglo Frege y Hilbert mantuvieron una polémica sobre los fundamentos de la geometría, uno de cuyos puntos nos interesa aquí destacar. Hilbert había dicho que los conceptores (o signos) primitivos de su axiomatización de la geometría euclídea quedaban definidos por la sola exigencia de que los axiomas fuesen válidos para ellos. Es la idea que más tarde se expresaría diciendo que los conceptores (o signos) primitivos quedaban implícitamente definidos por los axiomas. Frege criticaba con razón esta noción de definición implícita, pues los signos así presuntamente definidos son precisamente los indefinidos. Lo que mediante los axiomas puede quedar definido, pero no implícita sino explícitamente definido, es una estructura (abstracta), la de espacio euclídeo, o, si se prefiere, un predicado conjuntista: el predicado de ser un espacio euclídeo, que es aplicable a todos los sistemas que son modelos de los axiomas de la geometría euclídea.

En lo que sigue vamos a referirnos exclusivamente a teorías axiomáticas. Ahora bien, hay al menos dos maneras distintas de axiomatizar una teoría: una manera formal, consistente en formular los axiomas en un lenguaje formal (a ser posible, de primer

[3] J. D. Sneed: *The Logical Structure of Mathematical Physic*, Dordrecht, 1971 (2.ª edición, 1979). Véase también W. Balzer, U. Moulines y J. D. Sneed: *An Architectonic for Science*, Dordrecht, 1987.

orden) y dejar la caracterización de los modelos de la teoría para un correspondiente metalenguaje conjuntista informal; y otra manera informal, consistente en la definición de un predicado conjuntista que caracterice directamente a los modelos de la teoría en un lenguaje conjuntista informal. Consideremos, por ejemplo, la teoría de grupos.

La teoría de grupos puede axiomatizarse formalmente mediante las siguientes tres sentencias de primer orden:

(1) $\forall xyz\, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
(2) $\forall xy \exists z\, x \circ z = y$
(3) $\forall xy \exists z\, z \circ x = y$

Dados estos tres axiomas así formalizados, la teoría de modelos de la lógica de primer orden determina unívocamente cuáles son sus modelos, es decir, los grupos. Pero esa determinación ocurre en el metalenguaje.

La axiomatización informal de la teoría de grupos tiene lugar mediante la definición explícita del predicado conjuntista de ser un grupo del siguiente modo.

X es un grupo si y solo si hay D, $\circ$, tales que

(1) $X = \langle D, \circ \rangle$
(2) $D \neq \varnothing$
(3) $\circ : D \times D \rightarrow D$
(4) para cada $x, y, z \in D$: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
(5) para cada $x, y \in D$ hay un $z \in D$ con: $x \circ z = y$
(6) para cada $x, y \in D$ hay un $z \in D$ con: $z \circ x = y$

Las líneas (1) a (3) de esta definición caracterizan lo que es un modelo posible de la teoría de grupos, una entidad o sistema del que tiene sentido preguntarse si efectivamente es un grupo o no. Las líneas (4) a (6) corresponden a los axiomas formales anteriormente presentados y sirven para determinar, dentro de la clase de los modelos posibles, la subclase de los modelos, es decir, de los grupos.

Dos teorías matemáticas

Para familiarizarnos con el concepto de axiomatización informal de una teoría mediante la introducción de un predicado conjuntista, consideremos dos ejemplos más, el de la teoría de los espacios vectoriales y el de la teoría de las probabilidades.

La teoría de los espacios vectoriales queda axiomatizada mediante la siguiente definición del predicado conjuntista de ser un espacio vectorial.

X es un espacio vectorial si y solo si hay D, $\oplus$, $\odot$, tales que

(1) $X = \langle D, \oplus, \odot \rangle$
(2) $D \neq \varnothing$
(3) $\oplus : D \times D \rightarrow D$
(4) $\odot : \mathbb{R} \times D \rightarrow D$
(5) para cada $x, y, z \in D$: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
(6) para cada $x, y \in D$ hay un $z \in D$ con: $x \oplus z = y$
(7) para cada $x, y \in D$: $x \oplus y = y \oplus x$
(8) para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in D$: $(\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$
(9) para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in D$: $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$
(10) para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in D$: $(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$
(11) para cada $x \in D$: $1 \odot x = x$

Intuitivamente, D representa aquí el conjunto de los vectores; $\oplus$, la adición vectorial; $\odot$, el producto de un escalar con un vector; $+$, la adición de números reales; $\cdot$, el producto de números reales.

Las líneas o axiomas (1) a (4) de esta definición caracterizan los modelos posibles de la teoría de espacios vectoriales, las entidades o sistemas de los que tiene sentido preguntarse si son espacios vectoriales o no. Las líneas o axiomas (5) a (11) determinan la clase de modelos efectivos de la teoría, es decir, la clase de los espacios vectoriales. Dicho de otra manera, (1) a (4) nos dicen cuándo podemos preguntar de un sistema si constituye un espacio vectorial o no; (5) a (11) nos dicen en qué casos nuestra respuesta a esa pregunta ha de ser afirmativa.

La teoría de la probabilidad queda axiomatizada mediante la siguiente definición del predicado conjuntista de ser un espacio de probabilidad.

X es un espacio de probabilidad si y solo si hay D, E, p, tales que

(1) $X = \langle E, D, p \rangle$
(2) $E \neq \varnothing$; $E \in D$
(3) $D \subseteq \mathcal{P} E$
(4) para cada $x \in D : \bar{x} \in D$
(5) para cada sucesión $(x_i)_{i \in \omega}$ de elementos de $D : \bigcup_{i \in \omega} x_i \in D$
(6) $p : D \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
(7) $p(E) = 1$
(8) para cada sucesión $(x)_{i \in \omega}$ de elementos de D disjuntos entre sí: $p\,(\bigcup_{i \in \omega} x_i) = \sum_{i \in \omega} p(x_i)$.

Intuitivamente, E representa aquí el espacio muestral o conjunto de resultados posibles, D corresponde al conjunto de sucesos y p es la función de probabilidad.

Las líneas o axiomas (1) a (6) de esta definición caracterizan los modelos posibles de la teoría de las probabilidades, las entidades o sistemas de los que tiene sentido preguntarse si son espacios de probabilidad o no. La determinación de cuáles de entre estos sistemas sean realmente modelos de la teoría, es decir, espacios de probabilidad, corre a cargo de los axiomas (7) y (8).

La mecánica clásica de partículas

Después de haber puesto dos ejemplos de axiomatización informal de teorías matemáticas, vamos a considerar ahora la parte más básica de la mecánica de Newton como ejemplo de teoría física axiomatizable mediante la introducción de un predicado conjuntista.

Como es bien sabido, Newton pone a la cabeza de sus *Principia* sus famosas tres *leges motus*. La segunda de ellas dice que la fuerza total que actúa sobre una partícula es igual al producto de la masa de esa partícula por la aceleración por ella sufrida. La primera ley dice que una partícula permanece en su estado de reposo o movimiento rectilíneo y uniforme (es decir, su aceleración es 0) mientras no actúen fuerzas sobre ella. Esta primera ley es evidentemente una consecuencia de la segunda, pues si el miembro izquierdo (es decir, la fuerza que actúa sobre la partícula) de la ecuación en que se expresa la segunda ley es 0, entonces el miembro derecho ha de ser también 0; pero ese miembro derecho es el producto de dos factores, uno de los cuales —la masa— no puede ser 0; luego la aceleración ha de ser 0, que es precisamente lo que afirma la primera ley.

Siguiendo a Sneed vamos a llamar una mecánica clásica de partículas a un sistema que cumple la segunda (y, por tanto, también la primera) de las *leges motus* de Newton. Si, además, el sistema cumple también la tercera ley —la que dice que para cada fuerza ejercida por una partícula sobre otra hay otra fuerza igual en magnitud y de sentido contrario que la segunda partícula ejerce sobre la primera—, diremos que el sistema es una mecánica clásica newtoniana de partículas. Si, además, el sistema cumple también la ley de la gravitación —que dice que la fuerza ejercida por una partícula sobre otra es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia—, diremos que incluso se trata de una mecánica clásica newtoniana gravitatoria de partículas. Así como todo grupo conmutativo es un grupo, pero no a la inversa, así también toda mecánica clásica newtoniana de partículas es una mecánica clásica de partículas, pero no a la inversa.

Para no complicarnos la vida, vamos a considerar el caso más sencillo: el de la teoría de las mecánicas clásicas de partículas. Esta teoría puede ser informalmente axiomatizada mediante la definición de un predicado conjuntista de la siguiente manera.

X es una mecánica clásica de partículas si y solo si hay E, T, s, m, f, tales que

(1) $X = \langle E, T, s, m, f \rangle$
(2) $E \neq \varnothing$ y E es finito
(3) T es un intervalo de números reales
(4) $s : E \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$
y para cada $p \in E$ y cada $t \in T$: $D^2s(p, t)$ existe
(5) $m : E \rightarrow \mathbb{R}^+$
(6) $f: E \times T \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$
y para cada $p \in E$ y $t \in T$: $\sum_{i \in \omega} f(p, t, i)$ es absolutamente convergente
(7) para cada $p \in E$ y $t \in T$: $m(p) \cdot D^2s(p, t) = \sum_{i \in \omega} f(p, t, i)$

Intuitivamente, E es un conjunto de cuerpos o partículas, T representa aquí un lapso de tiempo, los functores s, m y f corresponden a los conceptos de posición, masa y fuerza, $D^2s(p, t)$ —la segunda derivada de la posición respecto al tiempo— es la aceleración de la partícula p en el momento t, y ω, el conjunto de los números naturales.

Los axiomas (1) a (6) caracterizan la clase de los modelos posibles de la teoría, las entidades o sistemas de los que tiene sentido preguntarse si son mecánicas clásicas de partículas o no. El axioma (7), que corresponde a la segunda *lex motus* de Newton, determina cuáles de entre estos sistemas son los modelos de la teoría, es decir, son mecánicas clásicas de partículas.

El modelo cósmico

Según la concepción tradicional de las teorías científicas, tanto una teoría matemática como una teoría física serían conjuntos de teoremas. La diferencia entre ambas estribaría en que la primera —la teoría matemática— podría tener diversos modelos, por lo que sus teoremas no serían enunciados verdaderos o falsos, sino meras fórmulas o filas de signos, susceptibles de adquirir diversos significados y —en el caso de las teorías no categóricas, que es el más frecuente entre las de primer orden— distintos valores de verdad según el modelo en el que se los interpretase. La teoría física, por el contrario, estaría atada a un modelo único, el mundo real o material en su totalidad, por lo que sus teoremas serían enunciados verdaderos o falsos.

En los casos concretos aquí considerados ocurre que, mientras que nadie discute que los axiomas de la teoría de grupos, de espacios vectoriales o de la probabilidad son fórmulas susceptibles de múltiples interpretaciones en modelos distintos, los filósofos clásicos de la ciencia consideran que los axiomas de la teoría de la mecánica clásica de partículas son enunciados verdaderos o falsos, cuyas variables varían sobre todas las partículas o cuerpos que hayan existido, existan o existirán en cualquier lugar del universo. Así, por ejemplo, leemos en Hempel que «las leyes de la mecánica de Newton son lo que llamaremos enunciados de forma estrictamente universal o enunciados estrictamente universales. Un enunciado de esta forma es una afirmación —que puede ser verdadera o falsa— de que todos los casos que reúnen ciertas condiciones especificadas tendrán sin excepción alguna tales y tales características. Por ejemplo... la primera ley del movimiento de Newton, que dice que cualquier cuerpo material sobre el que no actúan fuerzas externas permanece en su estado de reposo o movimiento rectilíneo y uniforme» [4]. Y en otro lugar añade Hempel que un enunciado de este tipo —una ley física— «dice que en cualquier momento y en cualquier lugar en que se den unas condiciones de un tipo especificado *F* se darán también, siempre y sin excepción, ciertas condiciones de otro tipo *G*» [5].

[4] C. G. Hempel: *Aspects of Scientific Explanation*, Nueva York, 1965, p. 175.
[5] C. G. Hempel: *Philosophy of Natural Science*, Englewood Cliffs, 1966, p. 54.

Este modelo único, que abarcaría la totalidad del universo y del espaciotiempo y que convertiría las leyes de una teoría física en enunciados universales verdaderos o falsos, es lo que aquí llamaremos el modelo cósmico. Es fácil ver que la concepción según la cual una teoría física es un conjunto de enunciados referentes al modelo cósmico está en la base tanto de la filosofía clásica de la ciencia como del refutacionismo de Popper.

La historia de la ciencia nos muestra que normalmente las teorías físicas son aplicadas a sistemas físicos parciales y bien delimitados, y no al modelo cósmico. En el caso concreto que nos ocupa, la teoría de la mecánica clásica de partículas fue aplicada por primera vez por Newton a diversos sistemas que resultaron ser modelos de la teoría: el sistema planetario del Sol, el sistema formado por la Tierra y la Luna, el sistema formado por Júpiter y sus satélites, el sistema formado por los cuerpos en caída libre en la superficie terrestre, el sistema formado por los péndulos y la Tierra, etc. En cada uno de estos modelos de la teoría se entiende por partícula algo distinto: en el uno las partículas son el Sol y los planetas; en el otro, la Tierra y la Luna; etc. Desde luego hubiera sido posible que algunos de esos sistemas hubieran sido modelos de la teoría y otros no. En cualquier caso, esta sucesión impresionante de aplicaciones exitosas de la teoría, este fastuoso desfile de modelos, impresionó considerablemente a los físicos coetáneos y posteriores a Newton. Esta clase de aplicaciones primeras de la teoría se convirtió en un paradigma —en uno de los sentidos en que Kuhn[6] emplea esta palabra— a imitar. Lo que los físicos siguientes harían sería desarrollar la teoría mecánica de Newton en al menos dos direcciones distintas: por un lado, buscando nuevos sistemas a los que aplicarla, nuevos modelos de la teoría; y por otro, extendiendo la teoría con leyes especiales que diesen lugar a predicados conjuntistas más restringidos, a extensiones de la teoría básica que sólo valdrían para algunos de sus modelos, pero que aumentarían su fuerza predictiva en éstos.

[6] T. Kuhn: *Postscript to The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago, 1970.

No se trata de excluir el modelo cósmico. De hecho, una teoría física puede tener modelos más o menos comprensivos, de los que el modelo cósmico sería un caso límite. Incluso hay teorías cosmológicas, que sólo son aplicables al modelo cósmico. Pero ése es un caso excepcional. En general, una teoría física tiene multitud de modelos más restringidos que el modelo cósmico. Y sólo de los sistemas físicos restringidos podemos constatar con alguna seguridad —dentro, claro está, de las limitaciones impuestas por la relativa imprecisión de los instrumentos de medida— si son modelos de la teoría o no. Una teoría física, como una teoría matemática, puede ser aplicable en unos campos y no serlo en otros, puede tener a unos sistemas físicos por modelos y a otros no. El que no se cumpla lo predicho por la teoría en un nuevo sistema bajo estudio muestra a lo sumo que ese sistema no es un modelo de la teoría, pero no la refuta. De hecho, y como ha señalado Kuhn [7], una teoría física no puede ser refutada en general mediante resultados negativos de observaciones o experimentos, aunque esos resultados sirven para delimitar el alcance de la teoría. Y eso no tiene nada de irracional ni relativista. Es lo que ya estábamos acostumbrados a pensar de las teorías matemáticas.

De todos modos, no conviene exagerar la similitud entre teorías físicas y teorías matemáticas. Una de las diferencias fundamentales estriba en la complejidad mucho mayor de la teoría de modelos de las primeras. Según Sneed, uno de los aspectos más importantes de esa complejidad está constituido por las condiciones de ligadura.

Los axiomas de una teoría matemática expresan ya explícitamente todas las condiciones que ha de cumplir un sistema para que la teoría le sea aplicable. No hace falta comparar unos modelos posibles con otros; basta con comparar cada uno de ellos por separado con los axiomas de la teoría. Pero con una teoría física pasa lo contrario. La teoría no es aplicable sin más a cualquier clase de modelos posibles que satisfagan sus axiomas. Además de eso es

[7] T. Kuhn: «No process yet disclosed by the historical study of scientific development at all resembles the methodological stereotype of falsification by direct comparison with nature», Ibídem, p. 77.

necesario que esos modelos posibles estén relacionados entre sí de ciertas maneras, es decir, es necesario que satisfagan determinados *constraints* o condiciones de ligadura[8].

Volvamos a nuestra teoría de la mecánica clásica de partículas. Evidentemos dos modelos posibles de la teoría pueden tener elementos comunes en sus dominios. Por ejemplo, la Tierra es un elemento —o 'partícula'— común del sistema planetario del Sol y del sistema formado por la Tierra y la Luna. Sean $\langle E_1, T_1, s_1, m_1, f_1\rangle$ y $\langle E_2, T_2, s_2, m_2, f_2\rangle$ dos modelos posibles de nuestra teoría, tales que $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. Una de las condiciones de ligadura de esta teoría exige entonces que para cada $x \in E_1 \cap E_2 : m_1(x) = m_2(x)$, es decir, que el mismo individuo no reciba distintos valores de masa en los distintos modelos en los que puede aparecer. Otras condiciones de ligadura se refieren a la extensividad de la función de masa y a la invariancia respecto a transformaciones de Galileo.

El efecto de las condiciones de ligadura es el siguiente: la teoría de la mecánica clásica de partículas no es aplicable a lo ancho de toda su clase de modelos, sino sólo en algunas de las subclases de su clase de modelos, en las subclases cuyos elementos estén relacionados entre sí tal y como lo exigen las condiciones de ligadura de la teoría. Y cuál de estas subclases se elija como clase de aplicaciones propuestas de la teoría no es algo dejado al azar; se elegirá precisamente aquella subclase que incluya los modelos paradigmáticos anteriormente mencionados a los que Newton aplicó por primera vez la teoría.

Conceptores teóricos y modelos posibles parciales

Otra de las peculiaridades de las teorías físicas en sentido de Sneed es que en ellas es posible distinguir los conceptores teóri-

[8] La propuesta de traducir *constraints* por *condiciones de ligadura* es de Ulises Moulines, a quien se deben también numerosos trabajos de explicación, elaboración y extensión de las ideas de Sneed, reunidos en gran parte en su libro *Exploraciones metacientíficas*, Alianza Editorial, Madrid, 1982.

cos de los no teóricos. Esta distinción es relativa a la teoría de que se trate y no tiene nada que ver con la distinción carnapiana entre términos teóricos y observacionales. Los conceptores de una teoría son los functores que aparecen en su axiomatización. Cada uno de esos functores corresponde, en cada aplicación de la teoría, a una función determinada. Un conceptor f de una teoría θ es θ-no-teórico si y sólo si ocurre que, en todas sus aplicaciones, los valores de las funciones correspondientes a f pueden ser obtenidos sin hacer uso de ninguna aplicación de la teoría θ. Y un conceptor f de una teoría θ es θ-teórico si y sólo si ocurre que al menos para la obtención de un valor de una función correspondiente a f en una aplicación determinada de θ es necesario recurrir a alguna otra aplicación de θ. Esta dicotomía teórico-no-teórico es relativa tanto a la teoría de que se trate como al tiempo, pues es posible que, con el desarrollo de nuevos métodos de medición, lo que era un conceptor teórico de una teoría pase a ser un conceptor no teórico de esa misma teoría.

En el caso de la teoría de la mecánica clásica de partículas, el functor s —la situación o posición en el espacio— es un conceptor no teórico, pues la posición puede ser determinada por procedimientos no mecánicos, por ejemplo por procedimientos ópticos. Los functores m —masa— y f —fuerza—, sin embargo, son conceptores teóricos respecto a la teoría de la mecánica clásica de partículas, pues los procedimientos utilizados para su medición, como, por ejemplo, la balanza, presuponen ya la aplicación de esa misma teoría.

Los modelos posibles parciales de una teoría son los sistemas que resultan de eliminar de los modelos posibles de la teoría las funciones correspondientes a sus conceptos teóricos. Los modelos posibles parciales de la teoría de la mecánica clásica de partículas reciben el nombre de cinemáticas. Una cinemática será, pues, el sistema formado por un dominio de objetos o partículas, un lapso determinado de tiempo y las trayectorias de esos objetos o partículas en ese tiempo.

X es una cinemática si y solo si hay E, T, s, tales que

(1) $X = \langle E, T, s \rangle$
(2) $E \neq \varnothing$ y E es finito
(3) T es un intervalo de $\mathbb{R}$
(4) $s: E \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$
y para cada $p \in E$ y $t \in T$: $D^2 s(p, t)$ existe

Una cinemática es una situación observable y registrable con independencia de la teoría mecánica, un conjunto de objetos junto con sus trayectorias en un tiempo determinado. Por ejemplo, el Sol y Marte, junto con la trayectoria de Marte en torno al Sol observada y registrada por Kepler entre 1600 y 1605, constituyen una cinemática. Y dos bolas de billar sobre una mesa, junto con sus trayectorias durante los últimos diez segundos anteriores y posteriores a la última jugada de una partida de billar determinada, constituyen también una cinemática.

Precisamente las cinemáticas son el tipo de entidades que pueden eventualmente ser explicadas por nuestra teoría. Explicar un sistema cinemático significa completarlo mediante la introducción de funciones teóricas de masa y fuerza de tal modo que (1) las condiciones de ligadura respecto al conjunto de las aplicaciones paradigmáticas de la teoría queden satisfechas y (2) el sistema así completado (que será por tanto un modelo posible) sea un modelo de la teoría, es decir, sea una mecánica clásica de partículas.

¿Qué es una teoría física?

En la concepción de Sneed, una teoría física no es un conjunto de enunciados y ni tan siquiera un conjunto de fórmulas. Pero aunque ya hemos dicho lo que no es, parece más interesante hablar de lo que es. En resumidas cuentas, una teoría física estaría formada por un núcleo estructural y un conjunto de aplicaciones propuestas.

El núcleo estructural de una teoría describe su estructura matemática. El núcleo estructural de una teoría física en sentido de Sneed consta de diversas clases: en primer lugar, la clase de todos los modelos posibles parciales de la teoría, es decir, de todos los sistemas observables y describibles con independencia de la teoría y que eventualmente podrían ser explicados por ella; en segundo lugar, la clase de todos los modelos posibles, especificada por los primeros axiomas; en tercer lugar, la clase de los modelos, especificada por los últimos axiomas; en cuarto lugar, una función que a cada modelo posible le asigna un modelo posible parcial, a saber, el sistema que consta de su mismo dominio y sus mismas funciones no teóricas; y finalmente, la clase de los conjuntos de modelos posibles ligados entre sí por las condiciones de ligadura. Más precisamente podemos definir:

X es un núcleo estructural si y solo si hay M_{pp}, M_p, M, r, C tales que

(1) $X = \langle M_{pp}, M_p, M, r, C\rangle$
(2) M_{pp} es una clase de modelos posibles parciales
(3) M_p es una clase de modelos posibles
(4) M es una clase de modelos, tal que $M \subseteq M_p$
(5) $r: M_p \rightarrow M_{pp}$
(6) $C \subseteq \mathcal{P} M_p$, y para cada $x \in M_p$: $\{x\} \in C$

En el caso de la teoría de la mecánica clásica de partículas, M_{pp} es la clase de las cinemáticas, M_p es la clase de los sistemas que cumplen los axiomas (1) a (6) de la teoría, M es la clase de los sistemas que cumplen los axiomas (1) a (7), r es la función que a cada modelo posible $\langle E, T, s, m, f\rangle$ asigna el correspondiente modelo posible parcial $\langle E, T, s\rangle$ y C es la clase de los conjuntos de modelos posibles que satisfacen las condiciones de ligadura de invariancia del valor de m para cada individuo común a diversos sistemas, extensividad de m e invariancia respecto a transformaciones de Galileo.

Además del núcleo estructural una teoría contiene un conjunto de aplicaciones propuestas, entre las que se encontrarán las aplicaciones paradigmáticas que pusieron en marcha la empresa científica asociada a la teoría, más otros sistemas o situaciones que parecen poder explicarse satisfactoriamente con ella. De todos modos, para que el conjunto A de aplicaciones propuestas sea admisible, ha de cumplir determinadas condiciones. A ha de ser un conjunto de modelos posibles parciales que, mediante la introducción de adecuadas funciones teóricas, dé lugar a un conjunto de modelos posibles que, por un lado, sean modelos de la teoría y, por otro, constituyan entre todos un conjunto ligado por las condiciones de ligadura.

Sea H un núcleo estructural con su función $r: M_p \to M_{pp}$. Designaremos mediante $r[u]$ a $\mathcal{R}\,(r \mid u)$, lo que a veces también se escribe $r``u$. Definamos la función $R : \mathcal{P}M_p \to \mathcal{P}M_{pp}$, tal que para cada $X \subseteq M_p : R(X) = r[X]$. Pues bien, ahora podemos definir precisamente la clase $ad(H)$ de los conjuntos de modelos posibles parciales de H que constituyen conjuntos admisibles (en el sentido arriba indicado) de aplicaciones propuestas de H.

$$ad(H) = R[\mathcal{P}M \cap C]$$

Con esto estamos en posición de decir lo que es una teoría física en sentido de Sneed. Una teoría física es un par ordenado compuesto por un núcleo estructural y un conjunto admisible de aplicaciones propuestas de ese núcleo.

X es una teoría física si y solo si hay H, A, tales que

(1) $X = \langle H, A \rangle$
(2) H es un núcleo estructural
(3) $A \in ad(H)$

A lo largo del desarrollo histórico de la teoría, el conjunto A de aplicaciones propuestas puede ir variando. Normalmente esta variación consistirá en el progresivo añadido de nuevas aplicaciones a A. Pero también puede pasar que nuevas mediciones den al traste con alguna presunta aplicación, que pasará entonces a ser expulsada del conjunto A de aplicaciones propuestas. Al menos mientras no se trate de alguna de las aplicaciones paradigmáticas, la teoría seguirá siendo la misma. La teoría conservará su núcleo estructural e irá variando su conjunto de aplicaciones propuestas en el sentido de un progresivo crecimiento, aunque con eventuales disminuciones de vez en cuando. Además, extensiones del núcleo estructural mediante la formulación de axiomas o leyes especiales permitirán un más completo poder explicativo en determinados grupos especiales de aplicaciones.

La concepción de Sneed —que aquí no hemos hecho sino esbozar de modo muy simplificado— es ciertamente más complicada que la concepción tradicional de las teorías físicas, pero respecto a ella pretende poseer tres ventajas esenciales: por un lado, permite precisar una serie de nociones importantes, como las de identidad o equivalencia entre varias formulaciones distintas de una misma teoría física y la de reducción de una teoría a otra; por otro, ofrece un enfoque nuevo de problemas tradicionales que habían acabado en un callejón sin salida, como el de los términos teóricos; y en tercer lugar, la concepción de Sneed quizá permita dar cuenta de la dinámica de las teorías físicas [9], tal como ésta ha sido descrita por Kuhn, en cuyo caso estaría libre de las objeciones que desde un punto de vista histórico pueden hacerse a la filosofía convencional de la ciencia.

Para terminar, no estará de más una advertencia. Aunque en este artículo estoy subrayando más las semejanzas que las diferencias entre las teorías matemáticas y las teorías físicas en sentido de Sneed, hay que reconocer que también en esta concepción existen grandes diferencias entre ambas. La distinción entre núcleo estruc-

[9] W. Stegmüller: *Theorie und Erfahrung II, Theorienstrukturen und Theofiendynamik*, Berlín-Heidelberg, 1973. (Ed. cast.: *Estructura y dinámica de teorías*, Ariel, Barcelona, 1983.) Véase también el libro de Moulines mencionado en la nota anterior.

tural y campo de aplicaciones propuestas, la presencia de un conjunto paradigmático de aplicaciones, la distinción entre conceptos teóricos y no teóricos (dependiente de factores históricos y pragmáticos, tales como el desarrollo alcanzado por los métodos de medición en un momento determinado), la predicción de valores 'observables' de las funciones no teóricas, etc., son otros tantos rasgos peculiares de las teorías físicas y ausentes de las matemáticas. Además, la determinación de los modelos de las teorías matemáticas se realiza *a priori* y con absoluta seguridad, mientras que la determinación de los modelos de las teorías físicas es empresa ardua, empírica y provisional, que viene complicada por la peculiar problemática de la teoría de la medición, de los errores, de las aproximaciones de valores, etc. Por otro lado, mi elección de ejemplos de teorías es evidentemente parcial y encaminada a llevar el agua a mi molino. Las tres teorías matemáticas que aquí he presentado como ejemplo —la teoría de grupos, la teoría de espacios vectoriales y la teoría de la probabilidad— son teorías polimorfas, es decir, susceptibles de modelos no isomorfos entre sí. Muy distinto sería el caso de las teorías categóricas (al menos en la intención), tales como la aritmética, el análisis y la teoría de conjuntos. Igualmente he puesto como ejemplo de teoría física una teoría 'determinista' —la mecánica clásica de partículas. Mucho más problemática resultaría la comparación con teorías físicas de tipo estadístico. Y, desde luego, ni pretendo que la presente interpretación de las teorías físicas corresponda a las intenciones de Sneed ni yo mismo pondría la mano en el fuego por ella.

Sobre la pesca

Una teoría física que ya ha encontrado aplicaciones —al igual que una teoría matemática consistente— no puede ser refutada por la experiencia. Pero puede sufrir la competencia de otra teoría nueva que explique las mismas situaciones o sistemas de un modo más simple, o que explique todos los sistemas que la primera explicaba más otros nuevos que ella no alcanzaba a explicar. Entonces puede ocurrir que la teoría entre en desuso y se pase de moda, que los textos en que se expone se cubran de polvo y no vuelvan a imprimirse ni estudiarse. Pero la teoría no habrá sido por ello falsificada. Una teoría física —como una teoría matemática— es el tipo de entidad que puede ser arrinconada, pero no refutada.

Incluso puede ocurrir que la vieja teoría física sobreviva a la concurrencia de la nueva, a pesar de que haya fracasado en su intento de aplicarse a algunos sistemas que la segunda logra explicar. Es lo que ha pasado con la aparición de la teoría mecánica relativista y de la mecánica cuántica, que logran explicar situaciones en las que la teoría mecánica clásica ha fracasado. Algunos han doblado demasiado pronto las campanas por la muerte de la mecánica clásica. Suponiendo que ésta tenía un único modelo, el modelo cósmico, y constatando que en ciertas condiciones o parcelas del cosmos no se cumplía lo predicho por ella, han concluido que la mecánica clásica ha quedado refutada. Pero lo único que ha quedado refutado es la afirmación de que esas parcelas constituyen modelos de la teoría mecánica clásica. Esta teoría sigue teniendo multitud de modelos importantes y, puesto que en la mayoría de ellos es más sencilla de aplicar que la relativista, sigue gozando de excelente salud, incluso desde un punto de vista social.

Somos como pescadores y nuestras teorías son como redes. Y no arrojamos de buen grado por la borda las redes con las que alguna vez hemos pescado por el mero hecho de que no sirvan para ciertos peces o en determinados mares. Pero continuamente inventamos y tejemos redes nuevas y distintas y las lanzamos al agua, para ver lo que pescamos con ellas. No despreciamos ninguna red y en ninguna confiamos excesivamente, aunque preferimos cargar el barco con las redes más eficaces y dejar en el puerto las de menos uso. Y así vamos navegando, renovando continuamente nuestro arsenal de redes en función de las incidencias de la pesca.

CAPÍTULO 12

EL MUNDO SE NOS ESCURRE ENTRE LAS MALLAS DE NUESTRAS TEORÍAS

Teorías axiomáticas

Cuando dirigimos nuestra atención a un sistema determinado de la realidad y reunimos datos, observaciones o hipótesis plausibles acerca del mismo, contribuimos a elaborar su historia. La elaboración de la historia de un sistema es un proceso laborioso e inalcanzable. De ahí que nos aparezca tan atractiva la posibilidad de axiomatizar esa historia (o parte de ella), de tomar el atajo de la teoría, reduciendo la infinita e inabarcable masa de los datos posibles a unos cuantos principios que los resuman y subsuman. Axiomatizar de verdad es difícil: se requiere que todos los conceptos que empleamos en la historia del sistema sean definibles a partir de unos pocos conceptos primitivos y que todas las proposiciones sobre el sistema que aceptamos como verdaderas sean implicadas por unos pocos principios, los axiomas, formulados con ayuda de los conceptos primitivos. Muchas presuntas axiomatizaciones no son tales. Es preciso suplementar los axiomas con la intuición, la observación o nuestros saberes previos para poder obtener las proposiciones verdaderas que nos interesan. Pero si la axiomatización es correcta, entonces las proposiciones de la historia del sistema elaborada hasta entonces quedan subsumidas bajo los axiomas, como meras consecuencias suyas. Con esto habremos llegado a una historia axiomática o, si se prefiere, a una teoría concreta. Cuando ello ocurre, las proposiciones de esa historia se derivan de los axiomas simplemente por la forma lógica de unas y otros y sin que importe para nada el contenido concreto de los conceptos empleados en su formulación. De hecho ese contenido podría variar, sin que variase para nada esa relación de consecuencia. Incluso podríamos sustituir las palabras o términos concretos empleados en su formulación por letras o parámetros, podríamos sustituir los conceptos (con contenido determinado) por conceptores (sin contenido determinado). Con esto habríamos alcanzado el estadio de la teoría abstracta y, más allá del sistema cuya historia nos había servido de punto de partida, habríamos caracterizado una determinada estructura, estructura incorporada en el sistema de partida, pero también en innumerables otros sistemas distintos.

Konrad Lorenz ha escrito: «En la evolución de los órganos e incluso en el desarrollo técnico de las máquinas ocurre con frecuencia que un aparato, que fue desarrollado para obtener un cierto resultado, se muestra luego inesperadamente capaz de desempeñar otras funciones completamente distintas a aquella para la que fue desarrollado» [1].

Una teoría no es un órgano ni una máquina, pero sí es un instrumento, y como tal comparte el destino aquí señalado por Lorenz. Las teorías las hacemos para algo. Son instrumentos. Pero esos instrumentos resultan luego útiles para otras cosas no previstas. Una teoría no sólo sirve para describir el sistema en que pensábamos al construirla, sino también para describir otros muchos sistemas en los que nunca habíamos pensado. Así, por el teorema de Löwenheim-Skolem sabemos que siempre que logremos construir una teoría abstracta que describa un sistema del tipo que sea (y que, por tanto, sea consistente), esa misma teoría estará describiendo también ciertos sistemas de números naturales.

[1] Konrad Lorenz: *Die Rückseite des Spiegels. Versuch einer Naturgeschichte menschlichen Erkennens*, R. Piper Verlag, Múnich, 1973, p. 161.

Teoría de la progenitura

Todas las relaciones de parentesco biológico son reducibles a la progenitura, es decir, a la relación en que está un animal x con otro y cuando x es progenitor de y, es decir, cuando x es padre o madre de y. Así, por ejemplo, que x es abuelo (o abuela) de y significa que x es progenitor de un progenitor de y. Que x es hermano (o hermana) de y significa que alguien es progenitor tanto de x como de y y que $x \neq y$. Que x es tío de y significa que x es hermano de un progenitor de y. De igual modo podrían definirse el resto de las relaciones de parentesco biológico. Si nos interesamos por ellas, es natural que nuestro interés se concentre en la relación de progenitura. Supongamos que queremos hacer una teoría abstracta de esa relación, una teoría de la progenitura. Como axiomas podríamos elegir ciertas notas intuitivamente claras de la misma. Por ejemplo, que nadie es progenitor de sí mismo; que si x es progenitor de y, entonces no puede ser que y sea progenitor de x; o que todo animal tiene exactamente dos progenitores (su padre y su madre), no más ni menos. Llamemos sistema de progenitura a cualquier sistema formado por un dominio no vacío de objetos (como humanes, o gaviotas, o insectos) y una relación binaria P que cumple las indicadas condiciones.

Def. $\langle A, P\rangle$ es un *sistema de progenitura* si y solo si

(I) $A \neq \varnothing$
(II) $P \subseteq A \times A$
(1) $\forall x \in A \, \neg xPx$
(2) $\forall xy \in A \, (xPy \Rightarrow \neg yPx)$
(3) $\forall x \in A \exists yz \in A \quad (y \neq z \wedge yPx \wedge zPx \wedge \forall u \in A(uPx \Rightarrow u = y \vee u = z))$

Hemos construido esta trivial teoría pensando en los sistemas de progenitura entre animales. Pero, una vez construida, nos damos cuenta de que tiene también modelos en los que no habíamos pensado en absoluto, como por ejemplo el sistema $\langle \mathbb{Z}, P\rangle$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros y P es la relación en que está un número entero con otro cuando el primero es una o tres unidades mayor que el segundo, es decir,

$$P = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid x = y + 1 \lor x = y + 3\}$$

Como fácilmente se aprecia, $\langle \mathbb{Z}, P \rangle$ cumple todos los axiomas de nuestra teoría de la progenitura, es un modelo de esa teoría, es un sistema de progenitura. En efecto, $\mathbb{Z} \neq \emptyset$, $P \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ por definición, P es una relación evidentemente irreflexiva y asimétrica y, además, para cada número entero x hay otros dos números distintos (a saber, $x + 1$ y $x + 3$) tales que ambos están en la relación P con x y que cualquier otro número que esté en la relación P con x será uno de esos dos.

Si reflexionamos un poco más, enseguida nos percatamos de que así como este sistema (en que no habíamos pensado al construir la teoría) es un modelo indudable de la teoría, el sistema que habíamos tenido *in mente* al construirla, el sistema a cuya medida la habíamos construido, es decir, el sistema formado por los humanes (o cualquier otro tipo de animales) y la relación de progenitura entre ellos, a la postre no es un modelo de la teoría, no es un «sistema de progenitura» en el sentido por ella definido. En efecto, el axioma (3), interpretado sobre un sistema de animales, presupone una serie infinita o circular de antepasados, lo cual no es el caso con los humanes, ni con los animales en general. Desde el surgimiento de la vida sólo ha habido un número finito de generaciones, y nadie es antepasado de sí mismo.

Con esto nos encontramos en la paradójica situación de que el sistema empírico pragmáticamente propuesto desde el principio como modelo para la teoría resulta no ser modelo de la misma, mientras que el inesperado e impensado sistema numérico sí que lo es. Si una teoría abstracta es consistente, de lo único que podemos estar seguros es de que tiene modelos numéricos, y esos modelos son los únicos seguros. El que, además, tenga modelos empíricos es algo de lo que, en general, no podemos estar seguros.

Un caso parecido al de la progenitura es el de ciertas teorías del tiempo, que carecen de modelos empíricos cuando se las proyecta hacia atrás. Yendo hacia atrás, llega un momento en que fallan los teoremas de representación de la metrización. Ya no hay relojes, ya no hay sol ni planetas, ya no hay átomos de cesio vibrando... La teoría abstracta y sus modelos matemáticos quedan, pero el mundo físico, empírico, se nos escurre entre los dedos, entre las mallas de nuestra teoría.

Mecánica clásica de partículas

No se piense que la extraña situación descrita es peculiar de teorías tan artificiosas y *ad hoc* como la mencionada teoría de la progenitura. Lo mismo ocurre con todas las teorías famosas de la física. Consideremos la más sencilla de todas, la mecánica clásica de partículas. Como bien es sabido, hoy disponemos de varias axiomatizaciones de la misma, empezando por la presentada en 1953 por J. Mckinsey, A. Sugar y P. Suppes [2]. Para las consideraciones que aquí estamos haciendo resulta irrelevante cuál de ellas escojamos. Consideremos, por ejemplo, la ofrecida por P. Suppes [3] en 1957. Los siguientes axiomas (1) a (9) definen la estructura mecánica newtoniana de partículas, poseída por todos los sistemas que los satisfacen. La teoría mecánica newtoniana de partículas (la general, previa a sus especializaciones) puede considerarse como el conjunto de las consecuencias de estos axiomas. He aquí la axiomatización:

Un sistema $\langle P, T, s, m, f, g\rangle$ es un sistema mecánico newtoniano de partículas si y solo si:

[2] J. McKinsey, A. Sugar y P. Suppes: «Axiomatic Foundations of Classical Mechanics», *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, vol. 2 (1953). (Ed. cast.: *Fundamentos axiomáticos para la mecánica de partículas clásica*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México, 1978.)

[3] Patrick Suppes: *Introduction to Logic*, Van Nostrand Co., Nueva York, 1957, pp. 291-304.

(1) $|P| < \aleph_0$ y $P \neq \emptyset$
(2) T es un intervalo de $\mathbb{R}$
(3) $s: P \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$

Además, para cada $p \in P$ y $t \in T$, $s(p, t)$ es 2 veces diferenciable en t, es decir $D_t^2 s(p, t)$ existe:

(4) $m: P \rightarrow \mathbb{R}^+$
(5) $f: P \times P \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$
(6) $g: P \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$
(7) $\forall p \in P \forall t \in T: \sum_{q \in P} f(p, q, t) + g(p, t) = m(p) \cdot D_t^2 s(p, t)$
(8) $\forall pq \in P \forall t \in T: f(p, q, t) = -f(q, p, t)$
(9) $\forall pq \in P \forall t \in T: s(p, t) \otimes f(p, q, t) = -s(q, t) \otimes f(q, p, t)$

Los axiomas (1) a (3) son los axiomas cinéticos. El axioma (1) exige que P sea una clase finita y no vacía (intuitivamente, de 'partículas'); (2) dice que T es un intervalo de números reales (de 'tiempo'); (3) exige que s (intuitivamente, la 'posición en el espacio') sea una función que a cada 'partícula' de P y cada 'instante' de T asigne unívocamente un vector 3-dimensional, y que esta función sea dos veces diferenciable (para que la aceleración, definida como la segunda derivada de la posición respecto al tiempo, esté siempre definida). Los axiomas (4) a (9) son axiomas dinámicos; (4) pide que m (intuitivamente, la 'masa') sea una función que a cada partícula asigne un número real positivo (recuérdese que en la mecánica clásica no hay masas nulas). Hablando intuitivamente y pensando en los modelos propuestos, podemos decir (interpretando) que (5) caracteriza a f como las fuerzas internas que unas partículas del sistema ejercen sobre otras, es decir, como la función que a cada par de partículas y a cada instante asigna el vector-fuerza correspondiente a la fuerza que sobre la primera partícula ejerce la segunda en ese instante, y que (6) caracteriza a g como la resultante de las fuerzas externas, es decir, como la función que a cada partícula y a cada instante asigna el vector-fuerza correspondiente a la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre esa partícula en ese instante. El axioma (7) corresponde a la segunda ley del movimiento de Newton, que dice que la fuerza es igual a la masa por la aceleración, es decir, que la suma de las fuerzas internas y externas ejercidas sobre la partícula en un instante es igual al producto de la masa de la partícula por la segunda derivada respecto al tiempo de su posición en ese instante. De esta segunda ley del movimiento de Newton se sigue trivialmente la primera, cuando hacemos que la suma de las fuerzas sea cero. Los axiomas (8) y (9), finalmente, corresponden a la tercera ley del movimiento de Newton, que dice que a toda acción corresponde una reacción igual y de sentido contrario. Más precisamente (8) requiere que la fuerza ejercida por la partícula q sobre la partícula p sea igual en magnitud y opuesta en sentido a la ejercida por p sobre q, y (9) requiere que tales fuerzas se ejerzan en la dirección de la línea que conecta ambas partículas (téngase en cuenta que $\otimes$ es el producto vectorial).

Los comentarios precedentes sobre los axiomas mecánicos se basan en una interpretación intuitiva de los mismos, que corresponde a muchas de las aplicaciones propuestas de la mecánica clásica. Pero la teoría misma es una teoría abstracta, susceptible (queramos o no, nos guste o no) de todo tipo de interpretaciones, propuestas y no propuestas. Desde luego, en algunas interpretaciones, aplicaciones o modelos, el conceptor expresado por la palabra 'partícula', por ejemplo, se convierte en un concepto que no se refiere a cosas pequeñitas (*partículas* en sentido intuitivo literal), sino a cosas tan grandes como el Sol y la Tierra, o incluso como dos galaxias enteras. En un modelo de la teoría, el conceptor de partícula se convierte en el concepto de átomo, en otro modelo distinto el mismo conceptor se convierte en el de astro, en otro en el de 'Tierra o péndulo', en otro en el de 'Tierra o proyectil', en otro en el de molécula, en otro en el de galaxia, en otro en el de 'Tierra o Luna', etc. Y, *mutatis mutandis*, lo mismo ocurre con los demás conceptores de masa, fuerza, etc.

La mecánica newtoniana de partículas es una teoría consistente. Por tanto, tiene modelos. Y siempre que una teoría tiene modelos de algún tipo, tiene también modelos numéricos. De hecho los únicos modelos seguros de la mecánica newtoniana de partículas son sus modelos numéricos, y hay una infinidad de ellos. Claro está que los físicos jamás piensan en los modelos meramente numéricos de sus teorías y que algunos incluso pueden tomar la mención de su existencia como una especie de chiste. Pero una cosa son las relaciones pragmáticas de los físicos con sus teorías (en qué piensan los físicos cuando las construyen, qué aplicaciones de las mismas proponen o les interesan, etc.) y otra distinta son las relaciones semánticas o matemáticas de las teorías con los sistemas que las satisfacen, con sus modelos, que son independientes de los pensamientos, intereses, propuestas y sentido del humor de los físicos. Una cosa es en quién pensaba yo (y con cuánto amor pensaba) cuando compré aquel par de zapatos, y otra cosa distinta (e independiente de mí) es la relación de ajuste que hay entre ese par de zapatos y todos los pies de los humanes (incluidos aquellos en los que yo nunca había pensado ni iba a pensar en el futuro).

Hay una infinidad de modelos numéricos de la mecánica de partículas (en su axiomatización por P. Suppes antes presentada, aunque lo mismo ocurriría con cualquier otra). He aquí uno especialmente simple y trivial.

Sea $\mathcal{M} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$ el sistema numérico definido del siguiente modo:

$P = \{1\}$
$T = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$
s: $1, t \mapsto \langle t, t, t \rangle$ para cada $t \in T$
m: $1 \mapsto 1$
f: $1, 1, t \mapsto \langle 0, 0, 0 \rangle$ para cada $t \in T$
g: $1, t \mapsto \langle 0, 0, 0 \rangle$ para cada $t \in T$

Es decir, P es el singletón o clase unitaria cuyo único elemento es el número 1 (el número 1 es la única 'partícula' en este sistema). T es el intervalo cerrado de los números reales entre 0 y 1. La función s asigna a cada par formado por el 1 (la única 'partícula') y t

(para cualquier número real $t \in T$) el vector $\langle t, t, t \rangle$. La función m (la 'masa') asigna al número 1 (la única 'partícula') el número 1. La función f asigna a cada tríada formada por el 1, el 1 y t (para cualquier número real $t \in T$) el vector-cero $\langle 0, 0, 0 \rangle$. La función g asigna a cada par formado por el 1 y t (para cualquier $t \in T$) el vector-cero $\langle 0, 0, 0 \rangle$.

Este sistema numérico $\mathcal{M}$ no constituye una aplicación propuesta de la mecánica newtoniana de partículas. Sin embargo, es un modelo de esa teoría, es un sistema mecánico newtoniano de vacío. Cumple (2), pues T es un intervalo de $\mathbb{R}$. Cumple (3), pues s: $P \times T \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $s(p, t)$, es decir, $s(1, t)$ es 2 veces diferenciable en t. En efecto $D_t^2 s(1, t) = \langle 0, 0, 0 \rangle$ para cualquier t. Los axiomas (4), (5) y (6) quedan trivialmente satisfechos por la definición de m, f y g, respectivamente. También se cumple el axioma (7). En efecto, para cualquier $p \in P$ (es decir, para 1) y para cualquier $t \in T$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{q \in P} f(p, q, t) + g(p, t) &= \sum_{q \in P} f(1, q, t) + g(1, t) \\
&= f(1, 1, t) + g(1, t) \\
&= \langle 0, 0, 0 \rangle + \langle 0, 0, 0 \rangle \\
&= \langle 0, 0, 0 \rangle \\
&= 1 \cdot \langle 0, 0, 0 \rangle \\
&= m(1) \cdot D_t^2 s(1, t) \\
&= m(p) \cdot D_t^2 s(p, t)
\end{aligned}
$$

Igualmente se cumple el axioma (8), pues $f(p, q, t) = \langle 0, 0, 0 \rangle = -\langle 0, 0, 0 \rangle = -f(q, p, t)$. Y también, finalmente, se cumple el axioma (9), ya que para cualesquiera $p, q \in P$ y $t \in T$:

$$
\begin{aligned}
s(p, t) \otimes f(p, q, t) &= \langle t, t, t \rangle \otimes \langle 0, 0, 0 \rangle \\
&= \langle 0, 0, 0 \rangle \\
&= \langle 0, 0, 0 \rangle \otimes \langle t, t, t \rangle \\
&= -\langle t, t, t \rangle \otimes \langle 0, 0, 0 \rangle \\
&= -s(q, t) \otimes f(q, p, t)
\end{aligned}
$$

Por tanto, el sistema numérico $\mathcal{M}$ es un modelo indudable (aunque no propuesto y físicamente irrelevante) de la teoría mecánica newtoniana de partículas.

Lo que pasa con la mecánica newtoniana de partículas pasa también con cualquier otra teoría física. Si una teoría física tiene un modelo físico $\mathcal{M}$, entonces, y por lo pronto, cualquier sistema isomorfo con $\mathcal{M}$ será también un modelo de la teoría. Y siempre hay sistemas numéricos isomorfos con cualquier sistema empírico dado. Supongamos, para considerar el caso más simple de todos, que $\mathcal{M} = \langle M,\{S_i\}_{i\in I}\rangle$, donde M es una clase no vacía de objetos físicos y $\{S_i\}_{i\in I}$ es un conjunto indexado de relaciones físicas entre esos objetos. Sea la cardinalidad de M (la cantidad de objetos que hay en M), por ejemplo, k, es decir, $|M|=k$. Aquí k es un número cardinal, identificable con el conjunto K de todos los números menores que él, menores que k. En cualquier caso, la cardinalidad de K es k, y $M\sim K$, es decir, hay una biyección f de M en K. Para cada relación física S_i (supongamos que es n-aria) en M definimos una relación numérica R_i en K del siguiente modo:

$$R_i = \{\langle f(m_1),\ldots f(m_n)\rangle \in K^n \mid \langle m_1 \ldots m_n\rangle \in S_i\}$$

Entonces ocurre que para cualquier relación física n-aria S_i existe una relación numérica R_i tal que para cada $\langle x_1 \ldots x_n\rangle \in M^n$:

$$\langle x_1 \ldots x_n\rangle \in S_i \Leftrightarrow \langle f(x_1)\ldots f(x_n)\rangle \in R_i$$

Por tanto, ambos sistemas, el físico $\mathcal{M}$ y el numérico $\mathfrak{R} = \langle K, \{R_i\}_{i\in I}\rangle$, son isomorfos:

$$\langle M,\{S_i\}_{i\in I}\rangle \cong \langle K, \{R_i\}_{i\in I}\rangle$$

Y puesto que todo sistema isomorfo a un modelo de la teoría es también un modelo de esa teoría, el sistema numérico $\mathfrak{R}$ es un modelo de la teoría física de que partimos.

Naturalmente, hay más modelos numéricos de una teoría dada que los isomorfos con un modelo empírico dado. En el caso de las teorías de primer orden, todos los sistemas elementalmente equivalentes (es decir, que satisfacen las mismas fórmulas de primer orden) a un modelo dado son también modelos de la teoría, aunque no sean isomorfos al modelo dado. (Nótese que la noción de equivalencia elemental es menos exigente que la de isomorfía: todos los sistemas isomorfos son elementalmente equivalentes, pero no a la inversa.) Pero no sólo es eso. Como Skolem, Gödel y Henkin han probado, *toda* teoría consistente tiene modelos numéricos. Es imposible hablar teóricamente de algo sin estar hablando al mismo tiempo (y aun sin quererlo) de números naturales y de conjuntos de números naturales.

Ontología bungiana

Mario Bunge tiene la fuerte intuición de que los individuos concretos, materiales, que componen el mundo real son algo muy distinto e incomparablemente más jugoso que las abstrusas y cuasifantasmagóricas entidades matemáticas. Hasta aquí muchos compartimos su intuición. Pero él parece creer que esta diferencia es captable de un modo preciso y formal, teórico. Y esto ya es más problemático.

Bunge dedica el capítulo I de su tratado de ontología[4] a describir formalmente la estructura del mundo real de los individuos concretos. Bunge habla como si creyera que existe un mundo único, unívocamente dividido en individuos concretos sustanciales. Incluso se pregunta por la cardinalidad de ese mundo, sin más[5]. Habla como si ser individuo concreto o no, simple o compuesto, etc., estuviera ya determinado con independencia de nosotros. Pero él sólo lo determina mediante las condiciones sobre los conceptores S, $\circ$ y $\Box$,

[4] Mario Bunge: *Treatise on Basic Philosophy*, vol. 3, *Ontology I*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1977.

[5] Ibídem, p. 43.

que explicita, y que de hecho resultan ser satisfechas por cualquier álgebra de Boole completa y en especial por cualquier álgebra de Boole de partes de un conjunto dado.

Para cualquier conjunto A, si interpretamos S como $\mathcal{P}A$ (es decir, como el conjunto de las partes de A), $\Box$ como $\varnothing$ (el conjunto vacío) y $\circ$ como $\cup$ (la unión), todos los axiomas con que Bunge caracteriza los individuos concretos se cumplen. En especial resulta que un individuo simple es un singletón o $\varnothing$, un individuo compuesto es uno que no es simple; $x \sqsubset y$ deviene $x \subseteq y$; $\Box$, el mundo de Bunge, resulta ser simplemente A; que x es mundano significa que $x \subseteq A$; la composición de x, $\mathcal{C}(x)$, deviene el conjunto de las partes de x, $\mathcal{P}(x)$; etc. Una interpretación de este tipo (donde A es el conjunto que queramos) satisface siempre todas las condiciones formales exigidas por Bunge, como fácilmente puede comprobarse pasando revista a todas las exigencias del capítulo I de su libro citado, que, por otro lado, contiene la exposición más detallada y precisa de toda su obra de su intento de axiomatizar la noción intuitiva de individuo concreto. Podemos tomar como A, como mundo, el conjunto {2, 3} formado por los números naturales 2 y 3, o el conjunto de los números primos, o el de las funciones reales no diferenciables o cualquier otro conjunto matemático (que es lo que Bunge quiere excluir). A pesar de ello, todas las exigencias formales quedarán cumplidas. Ese conjunto matemático será el mundo y ciertos subconjuntos suyos serán los «individuos sustanciales» de Bunge, con lo que su intento de caracterizar formalmente la diferencia entre los individuos, sistemas o mundos físicos, concretos, materiales, sustanciales, por un lado, y los matemáticos, ficcionales o constructos, por otro, se habrá ido al agua.

Si Bunge fracasa en su intento de dar una base axiomática formal a su intuición, ello no se debe tanto a una presunta falta de habilidad técnica por su parte como a una incapacidad intrínseca del método axiomático formal para caracterizar unívocamente sistemas reales. Esto es lo grave del asunto, y grave no sólo para Bunge, sino para todos, que nos quedamos un poco melancólicos al observar cómo ciertas nociones intuitivamente interesantes se nos escapan entre los dedos en cuanto tratamos de formularlas precisamente.

El aprendiz de brujo

Somos nosotros los que acotamos el mundo y lo dividimos en individuos; y lo hacemos de diversas maneras, proyectando en torno nuestro las diversas estructuras que nuestra mente fabrica. Nuestra mente es parte del mundo, desde luego, pero su atención se dirige en muchas direcciones distintas y corre tras de planetas, conejos, sombras, posibilidades, permutaciones, fantasmas y cardinales inalcanzables. Y por mucho que afile sus armas, constantemente caza a la vez más y menos de lo que pretendía.

Toda estructura posible se realiza en sistemas numéricos. Toda teoría consistente tiene modelos matemáticos. Una estructura no incorporada en sistemas numéricos es una estructura imposible; y su teoría es contradictoria. Por más que profundicemos en un sistema y por más completamente que definamos su estructura, siempre habrá (además del sistema en cuestión) sistemas numéricos que la posean.

Lo particular último (que no se encuentra modelado o simulado en el reino de los números) es inasible e inefable, no puede ser objeto de teoría. Si una teoría tiene modelos reales, empíricos, entonces es seguro que también los tiene numéricos, matemáticos. Pero no ocurre a la inversa. K. Gödel [6] encontró un modelo de la teoría general de la relatividad (es decir, una solución a las ecuaciones del campo gravitatorio de Einstein) en que son posibles los bucles en las líneas del tiempo, en que el tiempo es reversible. Pero nada indica que el universo real tenga algo que ver con tal modelo.

[6] Kurt Gödel: «An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation», *Reviews of Modern Physics*, vol. 21 (1949). (Ed. cast. en *Obras completas*, Alianza Editorial, Madrid, 1981.)

Uno puede desarrollar una teoría sin saber si tiene modelos no matemáticos. Uno puede definir y estudiar una estructura sin saber si se instancia en sistemas reales. Así, por ejemplo, y también en el contexto de la teoría general de la relatividad, se ha desarrollado desde hace varios años una precisa teoría de los agujeros negros, singularidades del espaciotiempo en las que el total colapso gravitatorio impide por principio la emisión de señales (fotones) cualesquiera, pues incluso éstas son absorbidas sin resto. Sabemos que la teoría de los agujeros negros es compatible con la teoría general de la relatividad. Sabemos que posee modelos matemáticos, pero no estamos seguros de si hay agujeros negros 'de verdad', sistemas físicos que sean modelos de la teoría. La observación de estrellas que se mueven como componentes de sistemas binarios, pero cuyas compañeras no se vislumbran, así como la detección de chorros de rayos X y gamma procedentes de la materia que se precipita hacia el centro de ciertos discos de acreción, inducen a inferir la existencia de agujeros negros. A pesar de esos indicios, aún no podemos estar seguros de que existan modelos físicos (que son los propuestos) de la teoría de agujeros negros, aunque sí podemos estarlo de que existen modelos matemáticos.

Las diversas teorías económicas clásicas, marxistas, marginalistas, neoclásicas, etc., describen ciertas estructuras de mercado con más o menos precisión. Pero no está nada claro que ninguna de ellas tenga modelos reales, que realmente describa la estructura del mercado en que vivimos. Y recientemente notaba Fishburn (uno de los creadores de la teoría de la decisión) que las escasas investigaciones empíricas realizadas hasta el momento más bien indican que el comportamiento real de la gente, a la hora de tomar decisiones, no coincide con lo descrito por ninguna de las teorías de la decisión propuestas hasta ahora y a las que, por tanto, más bien habría que atribuir valor normativo. Las teorías de la decisión son de una rara precisión y, desde luego, poseen modelos matemáticos. Pero parece sumamente problemático que posean modelos reales.

Un instrumento no se refiere a nada. El cuchillo no se refiere a la carne, aunque sea con intención de cortarla como lo he comprado o fabricado. De hecho el cuchillo puede servir para cortar, modelar, hendir, etc., multitud de cosas distintas e imprevisibles. La bacía servía en principio para colocarla alrededor del cuello, mientras el barbero afeitaba a alguien, pero Don Quijote se la puso en la cabeza, la usó como yelmo (el yelmo de Membrino). Las teorías abstractas son instrumentos que no se refieren a ningún sistema concreto. Las podemos construir pensando en un sistema particular, a la medida de un sistema particular. Pero en cuanto las hemos definido, automáticamente y con independencia de nosotros entablan relaciones matemáticas imprevistas con una infinidad de sistemas (numéricos, empíricos y otros) insospechados.

Nuestras teorías son como los trajes. Hacemos un traje a la medida de alguien, y luego resulta que ese mismo traje sirve también para muchos otros humanes. Es también un traje a la medida de otros, además de a la medida de la persona para la que lo hemos confeccionado. El zapato hecho o comprado para alguien conocido o querido también encaja en el pie de otros humanes. Sólo en los cuentos de hadas hay zapatos que únicamente sirven para una persona determinada, como el zapato perdido por la Cenicienta, que sólo ella podía calzar, que determinaba unívocamente su pie.

En la telaraña, en la red, en la trampa teórica que hemos tendido a nuestra presa buscada, caen siempre presas insospechadas. El constructor de teorías abstractas es como el aprendiz de brujo. Sabe para qué construye su teoría, con qué intención, para qué fin. Pero una vez construida, definida, la teoría se le escapa de las manos.

CAPÍTULO 13

BUNGE SOBRE INDIVIDUOS CONCRETOS

Que algo sea o no un individuo es en gran medida una cuestión convencional. El número 2 puede considerarse como un individuo (es la actitud estándar en teoría de números), o como un conjunto (en teoría de conjuntos), o como una propiedad de propiedades o propiedad de segundo orden (en Frege), etc. Yo no veo que tenga mucho sentido pretender que el número 2, en sí mismo, sea alguna de esas cosas, con exclusión de las demás. Una palabra determinada, por ejemplo 'gato', puede ser considerada como un individuo (en lexicografía) o como una clase, esquema o propiedad de proferencias, etc. Todo individuo puede ser considerado (si se quiere) como una función 0-aria, toda propiedad puede ser identificada con una función sobre $\{0, 1\}$ y toda función n-aria como una relación $n+1$-aria, y a su vez toda relación, función o propiedad puede ser considerada (cuando resulta útil) como un individuo. Lógica y matemáticamente todo ello es posible e indiferente. Pragmáticamente depende del contexto y de nuestras intenciones el que una cierta manera de considerar las cosas sea más o menos conveniente que otra. En definitiva, un *in-dividuo* es aquello que nosotros decidimos no dividir con el escalpelo de nuestro pensamiento. El mundo, por sí mismo, no está dividido de un modo unívoco con independencia de nuestra intervención.

Si la noción de individuo, en general, ya es suficientemente problemática, la cosa se complica aún más si tratamos de caracterizar exactamente, teóricamente, lo que sea un individuo concreto. Mario Bunge tiene la fuerte intuición (que yo comparto) de que el perro de su vecino es algo muy distinto del número pi. Al perro lo llama individuo concreto; al número pi, constructo. Está claro que los perros son muy distintos de los números reales. Pero, ¿a qué se parece más una partícula virtual, o un programa de computador, o un crédito bancario, al perro o al número real? No lo sé. Me temo que nuestras intuiciones al respecto sólo son claras en los casos extremos.

En el tomo tercero de su *Treatise on Basic Philosophy*, Mario Bunge[1] presentó una teoría ontológica que pretendía (entre otras cosas) caracterizar de un modo axiomático la noción de individuo concreto. Si su intento hubiera sido exitoso, dispondríamos de un instrumento eficaz con el que superar la vaguedad de nuestras intuiciones sobre lo que sea un individuo concreto. A mí me habría encantado que Bunge hubiera triunfado en su noble empeño, y que hubiera encontrado una caracterización teórica de la noción de individuo concreto que sólo fuese satisfecha por los (que Bunge considera) individuos concretos. Pero como mostré en mi artículo «El mundo se nos escurre entre las mallas de nuestras teorías» (capítulo 12 de este libro), ése no es el caso. La caracterización que da Bunge del conjunto de los individuos concretos es satisfecha por una infinidad de constructos que (según la intuición de Bunge) claramente *no* son individuos concretos.

Ese fracaso no es casual, sino debido a una limitación intrínseca del método axiomático, relacionada con el teorema de Löwenheim-Skolem. Después de escribir mi artículo citado he comprobado que Hilary Putnam ha llegado independientemente a conclusiones muy parecidas en su artículo «Models and reality»[2]. En

[1] Mario Bunge: *Treatise on Basic Philosophy*, vol. 3, *The Furniture of the World*, Reidel, Dordrecht, 1977.

[2] Reimpreso en Hilary Putnam: *Realism and reason*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

especial Putnam hace hincapié en que las limitaciones del método axiomático (o teórico, o formal, o como se le quiera llamar) para caracterizar unívocamente la realidad no pueden ser superadas mediante el añadido de restricciones operativas, hipótesis semánticas u otros expedientes similares, pues la teoría ampliada con todos esos añadidos está sometida a las mismas limitaciones que la teoría sin ampliar. Si a una caracterización teórica de los individuos concretos añado la coletilla «y además, con todo esto quiero referirme solamente a los individuos concretos», de poca ayuda me resultará, mientras siga sin saber cuáles son los individuos concretos.

En un artículo publicado en *Theoría* y titulado «¿Qué es un individuo concreto?», Mario Bunge [3] me ha hecho el honor de replicar a mis observaciones sobre su teoría de los individuos concretos, pero no creo que haya conseguido solucionar sus dificultades, por lo que me permitiré hacer unas breves puntualizaciones. Me voy a ceñir al núcleo central de la cuestión, evitando toda disgresión o polémica lateral, en aras de la brevedad.

En el capítulo 1 del tomo 3 del tratado de Bunge se trata de caracterizar axiomáticamente lo que es un individuo concreto (o sustancial, o material, que para Bunge es lo mismo), o, mejor dicho, el conjunto de todos los individuos concretos, junto con su composición, etc. Como se indica en mi artículo citado, todas las condiciones especificadas por Bunge son satisfechas por cualquier álgebra de Boole completa, y en especial por cualquier álgebra de Boole de partes de un conjunto cualquiera dado, la cual (según Bunge) siempre es un conjunto de constructos, no de individuos concretos. Por tanto, la caracterización no funciona (al menos no funciona como instrumento para separar individuos concretos de constructos). En el artículo de Bunge en *Theoría*, Bunge parece atribuir el problema a que nos quedamos en el capítulo 1 del tratado y no llegamos a los capítulos 2 y 3, donde está la solución, basada en la definición de las nociones de propiedad sustancial y de cosa concreta. Ojalá fuera así de simple. Por desgracia, esas

[3] Mario Bunge: «¿Qué es un individuo concreto?», *Theoría*, núm. 1, pp. 121 y ss. (1985).

definiciones presuponen la de individuo concreto, y hacen agua con ella.

En efecto, el capítulo 2 define *propiedad sustancial* como propiedad poseída por algún individuo concreto (p. 71). Por tanto, si no sabemos lo que es un individuo concreto, tampoco entenderemos lo que sea una propiedad sustancial. El capítulo 3 define *cosa concreta* como par ordenado formado por un individuo concreto y la totalidad de sus propiedades sustanciales (pp. 110-111). Si no sabemos lo que es un individuo concreto ni una propiedad sustancial (y mucho menos lo que sea la totalidad de las propiedades sustanciales de un individuo concreto), esta definición de cosa concreta no nos resultará muy iluminadora. En cualquier caso, hay modelos matemáticos (constructos) —expansiones triviales de cualquier álgebra de Boole atómica— que satisfacen todas las definiciones y postulados con los que Bunge caracteriza los individuos concretos, las propiedades sustanciales y las cosas concretas.

En el artículo de *Theoría* (p. 123), Bunge hace otros dos intentos de caracterizar a los individuos concretos. El primero de ellos consiste en decir que un individuo concreto es un individuo capaz de cambiar en algún respecto o que puede estar en más de un estado. Pero, como el mismo Bunge reconoce, la noción de cambios presupone la de estado, y ésta, las de propiedad sustancial e individuo concreto, con lo que volvemos al punto de partida, sin avanzar. El segundo intento, y su fracaso, se expresan así por el propio Bunge: «Una manera de caracterizar el concepto de individuo concreto cualquiera es estipulando que es aquello que puede combinarse con otro individuo del mismo tipo para formar un tercer individuo del mismo tipo. Pero, aunque correcta, esta caracterización no es unívoca, porque también la satisfacen constructos». En efecto, cualquier conjunto provisto de una operación binaria —por ejemplo cualquier grupo— la satisface.

Una mulata bailando la samba y sudando al sol del Caribe tiene una presencia física y una realidad concreta incomparable con la exangüe existencia que arrastra la función de números reales continua en todos los puntos y no diferenciable en ninguno de ellos que nos presentan en clase de análisis matemático. De eso no le cabe ninguna duda a Mario Bunge. A mí tampoco. Por tanto, coincidimos en lo fundamental. Nuestra única posible discrepancia estriba en si, con los alfileres de su teoría, él ha logrado atrapar (caracterizar unívocamente) esa diferencia que ambos (que todos) intuitivamente captamos. Me temo que no. *Hélas!*

CAPÍTULO 14

¿ESTÁ USTED A FAVOR O EN CONTRA DEL BIEN Y LA VERDAD?

Preguntas capciosas

Hay preguntas capciosas que, cuando se nos formulan, producen en nosotros un cierto embarazo y frustración, pues, respondamos como respondamos, siempre quedaremos mal, incluso ante nosotros mismos. Preferiríamos que no nos pusieran en el trance de tener que contestarlas.

«¿Está usted a favor o en contra de la normalidad sexual?» Estar a favor de la normalidad sexual suena muy aburrido. Pero si decimos que estamos en contra, parece que somos unos degenerados.

«¿Está usted a favor o en contra del derecho a la vida?» Si decimos que estamos a favor del derecho a la vida, van a utilizar nuestra afirmación para colocarnos en el banco de los carcas, contrarios al derecho al aborto y la eutanasia. Si decimos que estamos en contra, vamos a resultar sospechosos de albergar peligrosos instintos asesinos.

«¿Está usted a favor o en contra del bien y la verdad?» Si respondemos que estamos en contra del bien y la verdad, vamos a parecer monstruos, prodigios de perversidad teórica y práctica. Pero si contestamos que estamos a favor del bien y de la verdad, vamos a presentarnos envueltos en un tufillo de beatería intelectual y moral simplista y bien pensante, que tampoco nos va.

Lo capcioso de las preguntas y lo embarazoso de las respuestas viene de que en su formulación empleamos conceptos a la vez excesivamente vagos y excesivamente cargados de valoración y emotividad. Yo no sé que es la normalidad sexual, el derecho a la vida, la verdad o el bien, sin más. En principio parecen apuntar hacia algo positivo y valioso; por eso no puedo decir que estoy en contra. Pero pueden precisarse de muchas maneras distintas, algunas de las cuales me resultan inaceptables; por eso no puedo decir que estoy a favor.

Claro que tambien hay un método de quitar mordiente al asunto, a base de interpretar las preguntas de tal modo que las respuestas resulten ser tautológicas. Si por normalidad sexual entiendo hacer en la cama lo que a mí me gusta hacer en la cama, desde luego que estoy a favor. Si por derecho a la vida entiendo la preservación de la vida en todas las circunstancias en que la vida merezca la pena de ser conservada, todos estaremos a favor de tal derecho. Si por bien entendemos (con Aristóteles) aquello que deseamos, desde luego que deseamos el bien. Si el bien es lo que hay que hacer y el mal es lo que hay que evitar, poco nos costará estar de acuerdo con los filósofos medievales en que *bonum est faciendum* y *malum est vitandum*. Y si, siguiendo la desencomilladora concepción tarskiana de la verdad, decir que algo es verdad equivale a repetirlo, entonces difícilmente estaremos en contra de decir que lo que decimos es verdad, es decir, de decir lo que (de todos modos) decimos.

Esta estrategia inmunizadora elimina el desasosiego y confusión que nos producían las preguntas iniciales, pero también les priva de todo interés o sentido. Si el gobierno somete a referéndum la pregunta de si queremos que nuestra sociedad sea justa, todos votaremos a favor, pero, aún así, el gobierno no sabrá qué hacer con tan unánime resultado. Todos estamos de acuerdo en que la sociedad debería estar justamente organizada, pero discrepamos precisamente acerca de en qué consista la organización justa de la sociedad. Los que estaban en contra del justicialismo, en Argentina, no es que estuvieran en contra de la justicia; es que tenían una concepción de la justicia distinta de la del general

Perón. Por eso decir, sin más, que estamos a favor de la sociedad justa no es más que decir que estamos a favor de lo que estamos a favor y, a todos los efectos prácticos, equivale a no decir nada.

La naturaleza como libro

Según una cierta concepción, el mundo, la realidad, la naturaleza, estarían estructurados de por sí de un modo unívoco y con independencia de observadores y habitantes. Según la expresión de Nelson Goodman, habría un *ready-made world*, un mundo ya listo, articulado y estructurado de por sí.

Según Aristóteles, no pensamos en las cosas con conceptos o símbolos, sino que pensamos en las cosas con las cosas. Las cosas mismas en las que pensamos, o, más bien, sus formas, están también en nuestra cabeza, o mejor dicho, en nuestro corazón, en cualquier caso en nuestra alma. Las cosas mismas son lo que son en virtud de las formas que tienen. Y nuestra mente en ningún sentido construye o delimita o articula las cosas, sino que se limita a captar sus formas, a ser pasivamente informada por sus formas. Esas formas (que son independientes del humán, aunque puedan informar también su mente) están de por sí interrelacionadas y combinadas de ciertas maneras. Cuando nosotros las combinamos en nuestra mente como ellas están combinadas en la realidad, nuestro pensamiento (o su expresión en palabras, nuestro enunciado) es verdadero. Cuando las combinamos en nuestra mente de un modo distinto de como ellas están combinadas en la realidad, nuestro pensamiento es falso. En definitiva (aunque esto no lo dice Aristóteles) la falsedad es como un error de lectura, y la verdad es como la lectura correcta del mundo.

A partir del siglo XVII la ciencia moderna se pone en marcha, abandonando la jerga de las formas y empleando el lenguaje matemático. Pero la misma concepción de lectura del libro de la naturaleza sigue vigente. Sólo que ese libro está ahora escrito en lenguaje matemático. En *Il Saggitario* (1623) escribe Galileo: «La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que continuamente está abierto ante nuestros ojos (a saber, el universo), pero no puede entenderse si antes no se procura entender su lenguaje y conocer los caracteres en que está escrito. Este libro está escrito en lenguaje matemático, y sus caracteres son triángulos, círculos...».

Para Galileo la naturaleza es un libro escrito en lenguaje matemático. Si los humanes no la habían entendido hasta entonces, ello se debía a que «no conocían los caracteres en que estaba escrita». Pero la naturaleza no es un libro ni está escrita en lenguaje alguno. Lo que —si se quiere— sí es un 'libro' es una teoría física, y ésta es la que puede estar escrita en lenguaje matemático. Sin embargo, la imagen del libro no muere tan fácilmente. El físico Paul Davies nos dice que la matemática es un lenguaje. Y añade: «Quizá el mayor descubrimiento de todos los tiempos es el de que la naturaleza está escrita en código matemático... Una vez que hemos descifrado el código para algún sistema físico particular, podemos leer la naturaleza como un libro» [1]. Pero cuando hacemos física no leemos la naturaleza como un libro, sino que escribimos un libro acerca de la naturaleza. Nuestro proceder es activo, no pasivo; somos escritores, no lectores. Y uno de los descubrimientos más importantes ha sido el de que los libros que sobre la naturaleza escribimos en lenguaje matemático son más exitosos que los demás. El lenguaje matemático se presta mejor a la descripción de la naturaleza que el cualitativo. Supongo que eso es lo que quiere decir Davies, y evidentemente en ello tiene razón. Pero no por eso resulta menos desafortunada la vieja metáfora del mundo como libro abierto que el científico se limita a leer.

El realista metafísico puede aceptar que los libros de física los escriben los físicos, y no la naturaleza. Pero pretende que el mundo es un sistema estructurado de por sí de tal modo que de alguna manera la naturaleza dicta al físico lo que éste tiene que escribir. Hay un isomorfismo entre el sistema conceptual del físico y el sistema de objetos, propiedades y relaciones en que consiste la

[1] Paul Davies: *Superforce*, Simon and Schuster, Nueva York, 1984, p. 51.

naturaleza. Y los teoremas del científico son verdaderos si corresponden (isomórficamente) a los hechos de ese sistema natural.

La teoría total

El perfecto realista metafísico ya sabe en qué consiste la verdad total: en la teoría total verdadera, que es isomorfa al mundo entero y describe el mundo tal y como éste es de por sí. Esta teoría total verdadera es el objetivo y el límite al que tiende la ciencia. Popper siempre habla de la ciencia como aproximación a la verdad, y esa misma expresión —*science as approximation to truth*— fue usada por Putnam como título de la introducción al primer volumen de sus *Philosophical Papers*. De hecho, muchos filósofos —tanto positivistas como realistas— han concebido la ciencia (actual o ideal) como una teoría unificada y tendencialmente total, una teoría que abarque el mundo entero, o al menos que abarque el mundo en toda la medida en que el mundo de algún modo nos afecta.

Yo, personalmente, no entiendo qué pueda ser esa presunta teoría total que se identificaría con toda la ciencia, la ciencia unificada, y que reflejaría perfectamente todo el mundo. Por un lado, si el mundo no tiene una estructura independiente unívoca —como no la tiene—, no entiendo qué podría significar que una teoría reflejase perfectamente (es decir, unívocamente) esa estructura. Por otro lado, la ciencia es un complejísimo entramado de actividades sociales, en el que las teorías juegan un papel importante, pero no exclusivo. Las habilidades (por ejemplo, el ser capaces de diseñar experimentos o de programar computadores), los datos (por ejemplo, las fotos que constantemente se toman desde satélites, bajo telescopios y en cámaras de burbujas) y otras muchas cosas juegan un papel igualmente importante. En historia (sin duda una parte de la ciencia) los datos representados por los documentos y las habilidades de editar, traducir e interpretar dichos documentos juegan un papel más importante que las teorías. En cualquier caso, no se ve por ningún lado un atisbo de teoría única, sino múltiples teorías distintas.

Sin embargo, a veces se piensa que la teoría única, total, definitiva y verdadera está a la vuelta de la esquina. En el siglo XIX se llegó a pensar que una combinación de la teoría mecánica de Newton con la teoría electromagnética de Maxwell podría explicarlo todo. Los descubrimientos de comienzos de nuestro siglo arruinaron esa expectativa. Pero ahora vuelve a retoñar.

Actualmente estamos viviendo unos momentos de gran excitación en la comunidad física. La construcción de teorías unificadas de fenómenos aparentemente dispersos constituye sin duda una meta deseable y deseada de la actividad teórica. Newton unificó la mecánica terrestre y la celeste en su teoría de la gravitación. Maxwell unificó en una sola teoría el tratamiento de la electricidad y el magnetismo, que pasaron a ser considerados como una sola fuerza: el electromagnetismo. Ahora pensamos que todas las fuerzas descritas por la física pueden reducirse a 4: la interacción nuclear fuerte, el electromagnetismo, la interacción nuclear débil y la gravitación. Glashow, Weinberg y Salam han logrado construir una teoría unificada del electromagnetismo y la fuerza nuclear débil (por la que recibieron el premio Nobel de Física de 1979). Esta teoría electrodébil predice la existencia de unas partículas mediadoras (los bosones W^+, W^- y Z^0) que fueron detectadas experimentalmente en el CERN en 1983 (por lo cual Carlo Rubbia y S. van der Meer recibieron el premio Nobel de Física de 1984). La teoría que trata de la interacción nuclear fuerte se llama la cromodinámica cuántica. Actualmente se están elaborando varias teorías unificadas que tratan de combinar la cromodinámica cuántica con la teoría electrodébil. A estas teorías se las conoce como *grand unified theories* (GUT). Finalmente hay varios intentos de construir una teoría que abarque las cuatro fuerzas, incluyendo la gravitación, y que combine la relatividad general con la mecánica cuántica, cuantizando la gravitación misma. Uno de estos intentos (la llamada teoría de las supercuerdas) ofrece ciertas esperanzas de cuajar. Y esas esperanzas son las que provocan la excitación de la comunidad científica.

Adelantando acontecimientos, Paul Davies ha escrito: «Por primera vez en la historia tenemos una teoría científica racional de toda existencia... *todos* los fenómenos naturales pueden ser ahora abarcados en un esquema descriptivo único... Por primera vez en la historia tenemos a nuestro alcance una teoría científica completa del universo entero en la cual ningún objeto o sistema físico se queda fuera de un pequeño conjunto de principios científicos básicos»[2].

Algunas personas consideran a Stephen Hawking como el más grande físico teórico viviente. En 1980 tomó posesión de su cátedra lucasiana en la Universidad de Cambridge con una conferencia titulada precisamente: «¿Está a la vista el final de la física teórica?». En ella manifestaba su esperanza de que en los próximos años se llegase a la teoría unificada final (basada en supergravedad $N = 8$), con lo que la física teórica estaría prácticamente concluida y los físicos teóricos tendrían que cambiar de empleo. De todos modos —nos advierte Hawking—, «incluso si logramos obtener una teoría unificada completa, no seremos capaces de hacer predicciones detalladas excepto en las situaciones más simples. Por ejemplo, ya conocemos las leyes físicas que gobiernan cuanto experimentamos en la vida corriente. Como Dirac señaló, su ecuación es la base de casi toda la física y la química. Sin embargo, sólo hemos sido capaces de resolver la ecuación para el más simple de los sistemas, el átomo de hidrógeno compuesto de un protón y un electrón... [3]». En resumen, incluso si se obtiene la gran teoría superunificada, seguirán haciendo falta todo tipo de otras teorías químicas, biológicas..., e incluso físicas (y no digamos económicas, lingüísticas, etc.).

La evolución de Putnam

El realista metafísico atribuye con frecuencia al mundo propiedades o características de la teoría, lo cual para él no es grave, pues

[2] Paul Davies: *Superforce*, pp. 5, 6 y 10.

[3] Stephen Hawking: «Is the End of Theoretical Physics in Sight?», reimpreso en J. Boslough: *Beyond the Black Hole. Stephen Hawking's Universe*, Collins, Londres, 1985, pp. 109 y ss.

piensa que entre ambos reina un perfecto isomorfismo. Ya vimos que incluso confunde a veces el mundo con un libro.

La evolución de Putnam recuerda a la de Wittgenstein. Así como el segundo Wittgenstein dedicó lo más granado de su esfuerzo intelectual a refutar al primer Wittgenstein, así también el segundo Putnam (posterior a 1976 y anti-realista-metafísico) ha dedicado gran parte de su obra a combatir las posiciones (realistas metafísicas) que él mismo previamente había sostenido. De todos modos, no siempre queda claro qué tesis concretas del primer Putnam siguen siendo sostenidas por el segundo Putnam y cuáles no.

Como es bien sabido, en el siglo XIX se desarrollaron diversas geometrías no euclídeas, tan legítimas desde un punto de vista matemático como la euclídea, y consistentes si ésta es consistente, según probaron Hilbert y otros. Una teoría física puede construirse como una extensión de una teoría geométrica, es decir, puede superponerse a ella y usarla. La teoría einsteiniana de la gravitación (la llamada relatividad general) no puede usar la geometría euclídea, sino que usa una geometría no euclídea, la de Riemann. Es decir, si el conceptor euclídeo de recta es interpretado como geodésica del espacio físico relativista, entonces los axiones de la geometría euclídea no son válidos (en esa interpretación). La geometría euclídea, interpretada como teoría del espacio físico, es incompatible con la relatividad general. Pero sigue siendo compatible con otras muchas teorías físicas, incluyendo la mecánica clásica, la relatividad especial y la mecánica cuántica. Y, en cualquier caso, como teoría matemática que es, no se ve afectada por la validez o invalidez de sus diversas interpretaciones mientras tenga al menos un modelo (como lo tiene, $\mathbb{R}^3$), y por tanto infinitos modelos.

Putnam se ha rasgado las vestiduras en diversas ocasiones ante esta manera estándar de enfocar el tema. Pensaba que la geometría euclídea es una teoría del espacio físico, y que el éxito de la relatividad general implica la falsedad de la geometría euclídea. En definitiva, el mundo tiene una (y una sola) geometría, y ésa es la de

Riemann. «La geometría euclídea es falsa» [4], «la geometría euclídea ha sido derrocada» [5], la geometría euclídea no es la geometría del mundo.

A mí me parece muy extraña esta idea de Putnam de que el mundo tiene una geometría propia. Está claro que, al describir y estudiar científicamente el espacio físico, echamos mano de diversas teorías físicas basadas en diversas geometrías. Pero los que tenemos geometrías somos nosotros, no el mundo. Putnam dice también que el mundo tiene 4 dimensiones, pensando en el espaciotiempo relativista. Pero Kaluza postulaba una cuarta dimensión del espacio físico (y por tanto un espaciotiempo de 5 dimensiones) e interpretaba el electromagnetismo como una especie de curvatura o alabeo de esa quinta dimensión, de igual modo que Einstein había interpretado la gravedad en las otras dimensiones espaciales. Actualmente hay un gran interés entre los físicos teóricos por las nuevas teorías de tipo Kaluza-Klein, que geometrizan las 4 fuerzas fundamentales a base de postular un espacio-tiempo de 11 dimensiones. Y hay quien piensa que a una escala suficientemente pequeña el espacio tiene una estructura rarísima como de espuma. Evidentemente disponemos de muchas geometrías (euclídeas y no euclídeas, de 3, de 4 y de 11 dimensiones, o infinitodimensionales) y quizá inventemos otras (espumosas, por ejemplo). Todas estas geometrías son instrumentos útiles o inútiles para la resolución de múltiples problemas físicos u otros. Y no está claro que una de ellas sea el instrumento óptimo para resolver todos los problemas. Cada geometría (consistente) define y describe una estructura abstracta. Hasta qué punto esa estructura abstracta se incardine en ciertas aplicaciones empíricas es un problema empírico que no afecta a la geometría matemática. En cualquier caso, somos nosotros los que fabricamos y tenemos geometrías de diverso tipo y dimensión.

[4] Hilary Putnam: *Mathematics, Matter and Method,* Cambridge University Press, 1975, p. 78.

[5] Hilary Putnam: *Meaning and the Moral Sciences,* Routledge & Kegan Paul, Londres, 1979, p. 92.

Toda teoría incorpora una lógica, que determina qué consecuencias se siguen de sus axiomas. Naturalmente nosotros hemos fabricado y disponemos de numerosas lógicas distintas, clásicas y no clásicas, bivalentes y polivalentes, etc.

Hace unos años Putnam pretendía reinterpretar o reconstruir la mecánica cuántica, basándola en una lógica reticular ortomodular no estándar, inicialmente propuesta por von Neumann. El intento tuvo escasa aceptación, aunque es interesante en sí mismo. Lo que me parece que no es de recibo es que Putnam pretendiera que tal lógica no era simplemente la lógica de la mecánica cuántica reconstruida por Putnam, sino que era nada menos que la lógica del mundo.

Putnam hablaba de «la actual lógica del mundo» [6], decía que «vivimos en un mundo con una lógica no clásica» [7] y que «la lógica booleana es falsa» [8]. La lógica booleana es la clásica. Por tanto, la lógica clásica sería falsa. Así, como suena. En efecto, sólo hay una lógica verdadera, la lógica del mundo, que es la lógica cuántica. «Para imaginar un mundo con lógica cuántica, imagina las experiencias que tendrías en tal mundo. (*Estás viviendo en uno.*)» [9]

Putnam hablaba incluso de algo tan incomprensible como «la cardinalidad del mundo» [10]. ¿Qué diantres puede ser la cardinalidad de mundo, o incluso la cardinalidad de este cuarto? ¿Cuántas cosas hay en este cuarto? ¿Son sólo los muebles sus cosas, o también los ladrillos de sus paredes o incluso sus átomos? Las cantidades serían distintas, pero finitas. ¿O son también los puntos del espaciotiempo cosas de este cuarto? Entonces hay una cantidad infinita supernumerable de cosas en este cuarto. ¿Cuál es mi cardinalidad? ¿La del conjunto de mis órganos o la del conjunto de mis células actuales? ¿O incluye también mis percepciones, o mis posi-

[6] Hilary Putnam: *Meaning and the Moral Sciences*, pp. 118 y 140.
[7] Hilary Putnam: *Mathematics, Matter and Method*, p. X.
[8] Ibídem, p. 78.
[9] Ibídem, p. 197.
[10] Hilary Putnam: *Meaning and the Moral Sciences*, pp. 126 y 133. Sin embargo, ahora piensa Putnam que tal noción no tiene sentido. Véase «Defense of Intelectual Realism», conferencia pronunciada en Madrid el 27 de marzo de 1985, en prensa.

bilidades de percepción, o los puntos del espaciotiempo (de 4 dimensiones, o de 11) que ocupo?

Sólo en base a un realismo metafísico ingenuo puede pretenderse que el mundo (o este cuarto, o Hilary Putnam) tiene de por sí una cardinalidad determinada. O que el mundo tiene una lógica, o tiene una geometría. Más bien parece que somos nosotros los que tenemos (y aplicamos al mundo, con mayor o menor fortuna) lógicas, geometrías y estructuraciones conceptuales que permitan plantear con sentido la pregunta por la cardinalidad.

Quizá Putnam esté ahora de acuerdo con esto, o quizá no lo esté. En cualquier caso él ha renegado pública y repetidamente de su realismo metafísico anterior e incluso ha dado una famosa conferencia probando «por qué no hay un mundo ya hecho» [11].

La validez de las teorías

Putnam (o al menos el primer Putnam) solía hablar —como Popper y tantos otros filósofos— de que las teorías abstractas de la ciencia —las lógicas, las geometrías, las mecánicas...— eran verdaderas o falsas, confirmadas o refutadas. En un dominio determinado del saber sólo habría una teoría válida o vigente, la teoría (candidata a) verdadera. Las otras serían falsas y habrían sido derrocadas (*overthrown*).

Esta concepción monista («sólo una teoría vale») únicamente parece justificable sobre la base de un realismo metafísico ingenuo. Y además no describe adecuadamente lo que sucede en la comunidad científica.

La comunidad de los lógicos ha desarrollado numerosas lógicas distintas y con frecuencia incompatibles. Pero ninguna lógica ha derrocado a otra, aunque, desde luego, unas lógicas son más usadas que otras. Una lógica puede ser más fácil de manejar que otra, o más intuitiva (en algunas situaciones) que otra. Pero a (casi)

[11] Hilary Putnam: «Why there isn't a ready-made world», en *Realism and Reason*, Cambridge University Press, 1983, pp. 205 y ss.

nadie se le ocurre decir que la lógica clásica, o la intuicionista, o la difusa, o la trivalente, o la que sea, es falsa. Una lógica no es el tipo de entidad de la que tenga sentido decir que es verdadera o falsa.

Tampoco a (casi) nadie se le ocurre decir que una geometría (consistente) sea verdadera o falsa. Frege pensaba que las geometrías no euclídeas eran falsas. Y Putnam pensaba que la geometría euclídea era falsa. Pero la opinión estándar era y sigue siendo la de Hilbert.

Gödel pensaba que una única teoría de conjuntos era verdadera. Pero también hay que echarle mucho entusiasmo al asunto para estar de acuerdo con él. Podemos hacer teoría de conjuntos con clases propias o sin ellas, continuista o no continuista, con axioma de elección o sin él, con cardinales inalcanzables o sin ellos, etc. Gödel pensaba que la contribución de las consecuencias de las diversas teorías a la resolución de los problemas clásicos abiertos de la teoría de números naturales zanjaría la cuestión. El primer Putnam llegó a pensar que la física zanjaría la cuestión. Más bien parece que no hay cuestión alguna que zanjar, y que las diversas teorías de conjuntos habitan con el mismo derecho nuestro universo teórico.

El segundo Putnam ha subrayado [12] cómo el teorema de Löwenheim-Skolem arruina las pretensiones de verdad de una teoría de conjuntos frente a otras, pues no hay modo de concebir ni captar una verdad conjuntista independientemente de las formalizaciones concretas que representan las diversas teorías.

Putnam pensaba que la mecánica clásica era falsa. Eso responde a la idea de que la mecánica clásica es una teoría concreta, unívocamente interpretada sobre la totalidad del universo. Si la mecánica clásica se concibe como una teoría abstracta, susceptible de interpretaciones o aplicaciones diversas a regiones o situaciones o sistemas distintos, entonces parece claro que la mecánica clásica vale o funciona en unos casos y no en otros. Y, en los casos en que funciona, es más cómoda y manejable que la relativista, por lo que sería irracional no emplearla.

[12] En «Models and reality», publicado en el *Journal of Symbolic Logic*, 1980, y reimpreso en Hilary Putnam: *Realism and Reason*.

Los estudiantes de física adquieren en las universidades todo un arsenal o bagaje de teorías mecánicas distintas, clásicas (newtoniana, lagrangiana...), relativistas (especial y general) y cuánticas (no relativista y relativista). Y aprenden a aplicar una teoría mecánica u otra, según la naturaleza del problema que se les presente. El físico competente suele aplicar la relatividad general a los problemas de cosmología, la mecánica clásica a los problemas a escala humana y la mecánica cuántica al mundo atómico y subatómico. De lo que se trata es de que sepa cuáles son los ámbitos de aplicación y los límites de cada teoría. Como decía el físico Fritz Rohrlich: «Las teorías físicas son aproximaciones caracterizadas por límites de validez. Pero los dominios de validez son muy grandes. Los efectos de la relatividad especial pueden ser ignorados sin peligro incluso a la gran velocidad a la que la Tierra gira en torno al Sol, 30 km por segundo; y la finitud de *h* (la constante de Planck) puede ser ignorada incluso para un minúsculo grano de plata en una emulsión fotográfica (10^{10} átomos)... cuando vamos más allá de estos dominios, entramos en los dominios cuánticos o relativistas...» [13].

A favor del pluralismo

Yo simpatizo plenamente con los problemas y preocupaciones del segundo Putnam. Ha renunciado al ingenuo realismo metafísico y monista de su primera etapa, pero se resiste a caer por ello en la frivolidad de un relativismo fácil y subjetivista.

El monismo es inaceptable, tanto en ciencia como en política. Hay muchas maneras posibles de enfocar la realidad física o social, y no sólo una. La noción de verdad total o de justicia total sólo conducen a la paralización de la empresa científica y a la dictadura del partido único. Por eso somos pluralistas.

Pero, por otro lado, no todo da igual. Algunas hipótesis son falsas, algunas teorías son absurdas, algunos programas políticos son

[13] Fritz Rohrlich: «Facing Quantum Mechanical Reality», *Science*, 23 septiembre 1983, p. 1253.

aborrecibles. Como dice Putnam, «conceder que hay más de una versión verdadera de la realidad no es negar que algunas versiones sean falsas»[14].

La evolución de los animales refleja el ambiente en que se han desarrollado y representa una adaptación a dicho ambiente. Los animales no crean ni inventan su ambiente, pero tampoco el ambiente determina unívocamente su modo de adaptación. Hay varias maneras distintas de adaptarse al mismo ambiente. Frente al mismo peligro, cabe la adaptación del camuflaje, o la de las armas, o la de la rapidez en la huida. La mutación de los genes es frívola y subjetiva. Pero la selección natural es realista y objetiva. El resultado final —la diversidad de especies bien adaptadas— es una manifestación de pluralismo objetivo.

La metáfora de la evolución no es del todo buena, porque las mutaciones se producen al azar, pero las teorías científicas y los programas políticos y morales no se proponen al azar, sino intencionadamente. Quizá la metáfora mejor sea la del mercado.

Los fabricantes de un bien o servicio determinado no proceden generalmente de un modo arbitrario y subjetivista, diseñando sus productos al azar, sino que tratan conscientemente de reflejar y satisfacer las necesidades y deseos de sus clientes potenciales, es decir, tratan de adaptarse al mercado. A veces incluso realizan encuestas de márketing, para averiguar lo que el mercado realmente quiere. Pero lo que el mercado quiere no es algo unívoco. Los fabricantes más exitosos no se limitan a pretender leer pasivamente los deseos del mercado, sino que con frecuencia se adelantan a ellos e inventan nuevos productos y servicios en los que los consumidores no habían pensado, pero que luego encuentran general aceptación. Un nuevo producto es como una nueva hipótesis. En el mercado hay sitio para muchos productos, y un nuevo producto no desplaza necesariamente a los anteriores, aunque a la larga algunos dejen de venderse y producirse y desaparezcan del mercado. La actividad empresarial representa una adaptación objetiva pero pluriforme a las necesidades del mercado.

[14] Hilary Putnam: *Realism and Reason*, p. 19.

La presunta dicotomía entre realismo monista y subjetivismo pluralista no da cuenta de la adaptación de las especies a su entorno ni de la adaptación de los bienes económicos al mercado. Tampoco da cuenta de la adaptación de las representaciones a lo representado.

Hay muchas maneras de representar fotográficamente la realidad de un objeto. No sólo podemos fotografiar el objeto desde diferentes perspectivas y con iluminaciones diversas, sino que podemos también emplear sistemas de representación fotográfica distintos. La cámara fotográfica que fotografía una cabeza no crea la cabeza. Pero la cabeza no determina unívocamente un tipo de fotografía. Una fotografía en blanco y negro es tan objetiva como una fotografía en color o una radiografía. La pregunta de cuál de ellas sea la verdadera o se aproxime más a la verdad carece de sentido. Lo que sí tiene sentido e interés es la pregunta por cuál sea el tipo de fotografía que mejor resuelva el problema que tengamos entre manos. Si se trata de detectar una fisura en el cráneo, lo racional será hacer una radiografía, pero la radiografía no refuta la foto normal en blanco y negro, ni ésta es una foto en color falsa. No se trata de condenar ni absolver a ningún sistema de fotografía, sino de evaluar su rendimiento respectivo frente a los diversos problemas o tareas.

Hay también muchas maneras de representar cartográficamente una porción cualquiera de la superficie terrestre. La proyección cilíndrica, introducida por Mercator en 1569, es una proyección conforme, pues respeta los ángulos (por ello se emplea en las cartas de navegación), pero proporciona una escala no constante y exagera las latitudes altas, por lo que no sirve para cálculos de distancias. Otros sistemas de proyección cartográfica (azimutales, elípticos, isométricos, etc.) tienen ventajas e inconvenientes distintos. Así como el de Mercator conserva los ángulos, pero deforma las distancias, otros sistemas conservan las distancias, pero deforman los ángulos. Lo que no hay es una «verdad cartográfica» absoluta. Y los diversos sistemas de proyección no son aproximaciones a «la verdad». Pero cada sistema de proyección cartográfica puede ser comparado con otros, sus ventajas e inconvenientes pueden ser analizados y sopesados. En resumen, los diversos sistemas pueden ser evaluados, y, consecuentemente, podemos determinar objetiva y racionalmente cuál es el mejor sistema de representación cartográfica en circunstancias dadas y para un fin determinado.

Algo parecido pasa con los sistemas de representación simbólica. No hay una única manera de representar simbólicamente el mundo, no hay una única teoría adecuada u objetiva de la realidad.

Los positivistas lógicos pensaban que las teorías científicas podían ser confirmadas o verificadas. Popper pensaba que las teorías científicas podían ser refutadas o falsadas. Pero ambas propuestas son impracticables, al menos en lo que se refiere a las teorías abstractas. Eso no significa que todo dé igual. Lo que podemos —y debemos, si somos racionales— hacer es evaluar nuestras teorías, como el fabricante evalúa la reacción del mercado frente a sus productos. No se trata de confirmar o refutar una teoría abstracta de un modo absoluto, sino de averiguar dónde y hasta qué punto y con qué margen de error vale o no vale, dónde es aplicable y dónde no. Si no es aplicable a ninguna situación interesante, podemos arrinconarla, pero con frecuencia nos encontraremos con que diversas teorías tienen ventajas distintas y diferentes ámbitos de aplicación o validez. Como dice Rohrlich, «la mecánica cuántica no relativista está ahora bien establecida, porque su dominio de validez es conocido» [15].

Si somos racionales, pero no dogmáticos, y pluralistas, pero no frívolos, estaremos fundamentalmente interesados (tanto en el dominio de la teoría como en el de la praxis) no en la consagración ni en la excomunión, no en la confirmación ni en la refutación, sino en la evaluación.

Muchas propuestas teóricas y prácticas son inaceptables. Pero otras muchas (incluso algunas incompatibles entre sí) son aceptables 'hasta cierto punto'. Determinar hasta qué punto son aceptables es evaluarlas. Y evaluar una teoría o una moral no es medirla

[15] Fritz Rohrlich: «Facing Quantum Mechnical Reality», *Science,* 23 septiembre 1983, p. 1255, nota 24.

con el rasero de 'la verdad' o 'el bien', sino analizar críticamente su adecuación a circunstancias diversas y a fines cambiantes.

Hablar en serio de la evaluación implicaría plantear el tema de la racionalidad, cosa que no voy a hacer ahora. Pero si alguien me pregunta «¿Está usted a favor o en contra del bien y la verdad?», me parece que voy a contestarle: «Yo lo que estoy es a favor de la racionalidad».

REFERENCIAS Y LECTURAS COMPLEMENTARIAS

Referencia general

MOSTERÍN, Jesús, y Roberto TORRETTI (2002): *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia*, Madrid, Alianza Editorial.

Introducciones a la lógica

BADESA, Calixto, Ignacio JANÉ y Ramón JANSANA (1998): *Elementos de lógica formal*, Barcelona, Ariel.

GARRIDO, Manuel (1995): *Lógica simbólica* (3.ª ed.), Madrid, Tecnos.

MOSTERÍN, Jesús (1983): *Lógica de primer orden* (3.ª ed.), Barcelona, Ariel.

— (2000): *Los lógicos*, Madrid, Espasa-Calpe.

Capítulos 1 *(La estructura de los conceptos científicos)* y 2 *(Los conceptos métricos)*

HEMPEL, Carl (1952): *Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science*, volumen II, n. 7 of *International Encyclopedia of the Unity of Science*, University of Chicago Press.

KLEIN, Arthur (1974): *The World of Measurements*, Nueva York, Simon and Schuster.

KRANTZ, LUCE, SUPPES y TVERSKY (1971): *Foundations of Measurement*, vol. I (Additive and Polynomial Representations). Volumen II, 1989. Volumen III, 1990. Nueva York, Academic Press.

KYBURG, Henry, Jr. (1984): *Theory and Measurement*, Cambridge University Press.

NARENS, Louis (1985): *Abstract Measurement Theory*, Cambridge (Mass.), The MIT Press.

ORTH, Bernhard (1974): *Einführung in die Theorie des Messens*, Stuttgart, Verlag Kohlhammer.

PETLEY, Brian (1988): *The Fundamental Physical Constants and the Frontier of Measurement*, Bristol, Adam Hilger.

PFANZAGL, Johann (1971): *Theory of Measurement*, Würzburg, Physica-Verlag.

ROBERTS, Fred (1979): *Measurement Theory* (with Applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences). Volumen 7 de la *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Reading (Mass.), Addison- Wesley Publ. Co.

STEGMÜLLER, Wolfgang (1970): *Theorie und Erfahrung*, Erster Halbband, Berlín-Heidelberg, Springer-Verlag. [Ed. cast.: *Teoría y experiencia*, Barcelona, Ariel, 1979.]

Capítulos 3 *(Taxonomía formal)* y 4 *(Mereología, conjuntos y ontología biológica)*

DOMOTOR, Z. (1970): «Qualitative information and entropy structures», en J. Hintikka y P. Suppes (ed.), *Information and Inference*, Dordrecht, Reidel, pp. 148-194.

GHISELIN, Michael (1974): «A radical solution to the species problem», *Systematic Zoology*, 23, pp. 536-544.

HULL, David (1978): «A matter of individuality», *Philosophy of Science*, 45, pp. 335-360.

KITCHER, Philip (1984): *The Nature of Mathematical Knowledge*, Nueva York, Oxford University Press.

— (1987): «Ghostly whispers: Mayr, Ghiselin, and the "Philosophers" on the ontological status of species», *Biology & Philosophy*, 2, pp. 184-192.

LEONARD, H., y N. GOODMAN (1940): «The calculus of individuals and its uses», *Journal of Symbolic Logic*, 5, pp. 45-55.

LOVELOCK, James (1979): *Gaia. A new look at life on Earth*, Londres, Penguin Books.

MAYR, Ernst (1987): «The ontological status of species: Scientific progress and philosophical terminology», *Biology & Philosophy*, 2, pp. 145-166.

MISHLER, B., y R. BRANDON (1987): «Individuality, pluralism and the phylogenetic species concept», *Biology & Philosophy*, 2, pp. 397-414.
MOSTERÍN, Jesús (1994): «Mereology, set theory, and biological ontology», en D. Prawitz y D. Westerstahl (eds.), *Logic and Philosophy of Science in Uppsala*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 511-524.
—— (1998): *¡Vivan los animales!*, Madrid, Debate.
RIDLEY, Mark (1989): «The cladistic solution to the species problem», *Biology & Philosophy*, 4, pp. 1-16.
SIMONS, Peter (1987): *Parts. A Study in Ontology*, Oxford, Clarendon Press.
WILLMANN, Rainer (1985): *Die Art in Raum und Zeit. Das Artkonzept in der Biologie und Paläontologie*, Hamburgo, Paul Parey.

Capítulos 5 *(Materia y atomismo)*, 6 *(Kant como filósofo de la ciencia)* y 7 *(La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático)*

FREGE, Gottlob (1996): *Escritos filosóficos*, Barcelona, Crítica. (Incluye la traducción española de la polémica con Hilbert.)
LORENZ, Konrad (1973): *Die Rückseite des Spiegels: Versuch einer Naturgeschichte menschlichen Erkennens*, Múnich, Piper.
MOSTERÍN, Jesús (2000): *Los Lógicos*, Madrid, Espasa-Calpe.
SUPPES, Patrick (1974): «Aristotle's concept of matter and its relation to modern concepts of matter», *Synthese*, 28, pp. 27-50.

Capítulos 8 *(Historia y teoría abstracta)*, 9 *(Teorías y modelos)*, 10 *(Sobre el concepto de modelo)* y 11 *(Sobre teorías físicas y teorías matemáticas)*

BOYD, R., P. GASPER y J. TROUT (eds.) (1991): *The Philosophy of Science*, Cambridge (Mass.), The MIT Press.
DÍEZ, José, y Ulises MOULINES (1997): *Fundamentos de filosofía de la ciencia*, Barcelona, Ariel.
MOSTERÍN, Jesús (1992): «Theories and the flow of information», en Echeverría, Ibarra y Mormann (eds.), *The Space of Mathematics: Philosophical, Epistemological and Historical Explorations*, Berlín, Walter de Gruyter.

MOULINES, Ulises (ed.) (1993): *La ciencia: estructura y desarrollo*, Madrid, Trotta.

SKLAR, Lawrence (1992): *Philosophy of Physics*, Boulder, Westview. [Ed. cast.: *Filosofía de la física*, Madrid, Alianza Editorial, 1994.]

TORRETTI, Roberto (1990): *Creative Understanding: Philosophical Reflections on Physics*, The University of Chicago Press.

TORRETTI, Roberto (1999): *The Philosophy of Physics*, Cambridge University Press.

Capítulos 12 *(El mundo se nos escurre entre las mallas de nuestras teorías)*, 13 *(Bunge sobre individuos concretos)* y 14 *(¿Está usted a favor o en contra del bien y la verdad?)*

BUNGE, Mario (1977): *Treatise on Basic Philosophy*, vol. 3, *Ontology: The Furniture of the World*, Dordrecht, Reidel.

EARMAN, John, y Jesús MOSTERÍN (1999): «A critical look at inflationary cosmology», *Philosophy of Science*, 66, pp. 1-49.

GREGORY, Bruce (1988): *Inventing Reality: Physics as Language*, Nueva York, John Wiley.

PUTNAM, Hilary (1975): *Philosophical Papers*, vols. 1 y 2. 1983, vol. 3. Cambridge University Press. (Véase sobre todo «Models and reality», incluido en el volumen 3.)

Procedencia de los capítulos de este libro

A continuación se indica la procedencia inicial (aunque sometida a variaciones) de los capítulos: El 1, en *Investigación y Ciencia* (1978). El 2, en Moulines (ed.), *La ciencia: estructura y desarrollo*, Madrid: Trotta (1993). Los 3 y 6, en *Enrahonar* (1983, 1982). El 4, en Prawitz & Westerstahl (ed.), *Logic and Philosophy of Science in Uppsala*, Dordrecht: Kluwer (1994). Los 5 y 8 en *Grandes temas de la filosofía actual*, Barcelona: Salvat (1981). Los 7, 12 y 14 en *Teorema* (1980, 1982, 1987). El 9, en Garrido (ed.), *Lógica y lenguaje*, Madrid: Tecnos (1989). El 10, en *Transparencies: Philosophical Essays in Honor of J. Ferrater Mora*, New Jersey: Humanities Press (1981). El 11, en *Aspectos de la filosofía de W. V. Quine*, Valencia (1976). El 13, en *Theoría* (1985).