Geometría, trigonometría y geometría analítica

PEARSON

CONAMAT
COLEGIO NACIONAL DE MATEMÁTICAS

Geometría, trigonometría y geometría analítica

Arturo Aguilar Márquez
Fabián Valapai Bravo Vázquez
Herman Aurelio Gallegos Ruiz
Miguel Cerón Villegas
Ricardo Reyes Figueroa

REVISIÓN TÉCNICA

Ing. Carlos Lozano Sousa (M.Sc.)
Ing. Agustín Vázquez Sánchez (M. en C.)
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Estado de México

Prentice Hall

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

Colegio Nacional de Matemáticas

Geometría, trigonometría y geometría analítica
Primera edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2010

ISBN: 978-607-442-543-7

Área: Matemáticas

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 632

Editor: Lilia Moreno Olvera
e-mail: lilia.moreno@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Alejandro Gómez Ruiz
Supervisor de producción: Rodrigo Romero Villalobos

PRIMERA EDICIÓN, 2010

ISBN: 978-607-442-543-7

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 12 11 10 09

Prentice Hall
es una marca de

PEARSON

www.pearsoneducacion.net **ISBN: 978-607-442-543-7**

Para los que enseñan y para los que aprenden

Ing. Arturo Santana Pineda

El poder de las matemáticas

El que domina las matemáticas
piensa, razona, analiza y por ende
actúa con lógica en la vida cotidiana,
por lo tanto, domina al mundo.

Ing. Arturo Santana Pineda

Prefacio

El Colegio Nacional de Matemáticas es una institución que, desde su fundación, ha impartido cursos de regularización en las áreas de Matemáticas, Física y Química, con resultados altamente satisfactorios. Es por ello que su fundador y director general, el Ingeniero Arturo Santana Pineda, decidió plasmar y compartir la experiencia adquirida en este libro que recopila lo aprendido en todos estos años y cuyo principio fundamental es que la persona que aprende matemáticas, piensa, razona, analiza y por tanto actúa con lógica.

A través de esta institución y sus docentes, se ha logrado no sólo resolver el problema de reprobación con el que llega el estudiante sino, también, cambiar su apreciación sobre la materia, de tal forma, que se va convencido de que es fácil aprender matemáticas y que puede incluso dedicarse a ellas. De ahí que jóvenes que han llegado con serios problemas en el área, una vez que descubren su potencial han decidido estudiar alguna carrera afín.

De esta forma, se decide unir a los docentes con mayor experiencia y trayectoria dentro de la institución para que conjuntamente escriban un libro que lejos de presunciones formales, muestre la parte práctica que requiere un estudiante al aprender matemáticas y que le sirva de refuerzo para los conocimientos adquiridos en el aula.

Enfoque

El libro tiene un enfoque 100% práctico, por lo que la teoría que se trata es lo más básica posible, sólo se abordan los conceptos básicos para que el estudiante comprenda y se ejercite en la aplicación de la teoría analizada en el aula, en su libro de texto y con su profesor.

De esta manera, se pone mayor énfasis en los ejemplos, en donde el estudiante tendrá la referencia para resolver los ejercicios que vienen al final de cada tema y poder así reafirmar lo aprendido. Estamos convencidos de que es una materia en la cual el razonamiento es fundamental para su aprendizaje, sin embargo, la práctica puede lograr que este razonamiento se dé más rápido y sin tanta dificultad.

Estructura

El libro está formado por 30 capítulos, los cuales llevan un orden específico que siempre toma en cuenta que el estudio de las matemáticas es un proceso en construcción, es decir, cada capítulo se liga con los conocimientos adquiridos en los capítulos anteriores.

Cada capítulo está estructurado con teoría, ejemplos y ejercicios propuestos. Los ejemplos son resueltos paso a paso para que el lector comprenda el procedimiento y posteriormente resuelva los ejercicios correspondientes. Las respuestas a los ejercicios se encuentran al final del libro, de tal forma que el estudiante verifique si los resolvió correctamente y compruebe su aprendizaje. Además, en algunos capítulos aparece una sección de problemas de aplicación, la cual tiene como objeto hacer una vinculación con casos de la vida cotidiana y así mostrar la eficacia de aplicar los conocimientos adquiridos en cada tema.

Como recomendación se propone que se resuelvan los ejercicios preliminares de aritmética y álgebra que se encuentran al final del libro, para que el lector haga un diagnóstico de sus conocimientos en dichas áreas, los cuales son fundamentales para iniciar el aprendizaje de la geometría, la trigonometría y geometría analítica.

En caso de tener algún problema con dichos ejercicios se recomienda consultar los temas correspondientes en el libro de aritmética y álgebra de la serie CONAMAT.

En el capítulo uno se dan las definiciones básicas de geometría y algunas notaciones que se utilizarán en el desarrollo de los siguientes temas como son: recta, segmento de recta, arco, entre otros. En el capítulo dos se estudian los ángulos y sus generalidades.

El tres trata las rectas paralelas y perpendiculares, así como las rectas paralelas cortadas por una secante. En el capítulo cuatro se estudian los triángulos y sus generalidades. Se continúa, en el siguiente capítulo, con cuadriláteros; en el seis se estudian los polígonos en forma general (ángulos interiores y exteriores, diagonales, etc.). El capítulo siete corresponde a transformaciones (escala, rotación simetría axial, simetría central).

La circunferencia, sus elementos, rectas notables y otras de sus generalidades, se estudian en el capítulo ocho. En los capítulos nueve y diez se estudia el perímetro y el área de figuras geométricas en el primero y el volumen en el segundo.

En los capítulos 11 y 12 se comienza con el estudio de la trigonometría. Se dan los conceptos de funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo, valores para distintos ángulos, además, al final se agregan las tablas de funciones trigonométricas. En el capítulo 13 se tienen las gráficas de dichas funciones. Las distintas identidades trigonométricas se contemplan en el capítulo 14.

En los dos siguientes se estudia la resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos, respectivamente. La parte de trigonometría termina en el capítulo 17, el cual corresponde a la forma trigonométrica de los números complejos.

En el capítulo 18 se introduce el concepto de distancia entre dos puntos, punto medio y punto de división, aplicados a los puntos de la recta numérica de los números reales, para posteriormente, en el capítulo 19, aplicarlo en el plano cartesiano, en donde además se estudia el concepto de área de un polígono. El capítulo 20 contiene el concepto de pendiente, condiciones de paralelismo, perpendicularidad y ángulo entre dos rectas. Los dos problemas fundamentales de la geometría analítica se abordan en el capítulo 21, en donde se introduce el concepto de lugar geométrico.

En el siguiente, capítulo 22, se estudia la ecuación de la recta y sus distintas formas, de aquí se llega a las rectas notables, distancia de un punto a una recta y algunos problemas de aplicación.

La circunferencia da inicio al estudio de las cónicas en el capítulo 23, para posteriormente, en el 24, abordar la transformación de coordenadas a través de la traslación de ejes. La parábola, elipse e hipérbola se tratan en los apartados 25, 26 y 27, respectivamente. Mientras que el capítulo 28 se reserva para el estudio de la ecuación de segundo grado, en donde se abordan temas como la rotación de ejes, identificación de cónicas, rectas tangentes, etc. En el capítulo 29 se hace un exhaustivo estudio de las coordenadas polares, y se deja para el capítulo 30 las ecuaciones paramétricas.

Finalmente, el anexo A contiene un capítulo de relaciones y funciones, este tema se incluye tomando en cuenta que en muchos planes de estudio se contempla.

Agradecimientos

Según Benjamín Franklin, invertir en conocimientos produce siempre los mejores intereses, por lo que espero que obtengas, a través de este libro, las más grandes ganancias para tu futuro profesional.

Arturo Santana Pineda
Director General de CONAMAT

A mi madre por darme la vida y enseñarme a vivirla, Andrey por ser y estar conmigo, Chema e Hiram los alumnos que se volvieron mis hermanos, a mi familia (Echeverría, Pineda y Sánchez), a la UNAM, al ingeniero Santana, Rox llegaste a tiempo, a los cuatro fantásticos: Herman, Fabián, Ricardo y Miguel, fue un placer compartir este trabajo. A mis alumnos que fueron y serán.

Arturo Aguilar Márquez

A mis padres María Elena y Álvaro, por brindarme la vida, por sus enseñanzas y consejos; a mi esposa e hijos (Ana, Liam y Daniel), porque son la razón de mi vida y mi inspiración; a mis hermanos Belem, Adalid y Tania por apoyarme incondicionalmente y sobre todo a mis compañeros y amigos: Ricardo, Miguel, Arturo y Herman.

Fabián Valapai Bravo Vázquez

Una vez mi padre me dijo que "un hombre triunfador no es el que acumula riquezas o títulos, sino es aquel que se gana el cariño, admiración y respeto de sus semejantes", agradezco y dedico esta obra a la memoria de mi padre el Sr. Herman Gallegos Bartolo que me dio la vida y que por azares del destino ya no se encuentra con nosotros. A Eli y José Fernando que son el motor de mi vida.

Herman A. Gallegos Ruiz

A toda mi familia muy en especial a Lupita y Agustín, por haberme dado la vida y ser un ejemplo a seguir; a mis hermanos Elizabeth y Hugo por quererme y soportarme. Quiero además, reconocer el esfuerzo de mis amigos y compañeros Arturo, Fabián, Herman y Ricardo con quien tuve la oportunidad de ver cristalizado este sueño.

Miguel Cerón Villegas

A mis padres Rosa y Gerardo, por darme la vida; a mis hermanos Javier, Gerardo y Arturo; un especial agradecimiento a mi esposa Ma. Mercedes; a mis hijos Ricardo y Allan por su sacrificio, comprensión y tolerancia; un reconocimiento a mis amigos Herman, Arturo A., Fabián, Miguel, Roxana y Arturo S. por hacer realidad nuestro sueño.

Ricardo Reyes Figueroa

Un agradecimiento especial a los alumnos que tomaron clase con alguno de nosotros, ya que gracias a ellos logramos adquirir la experiencia para poder escribir este libro.

Los autores

Acerca de los autores

Arturo Aguilar Márquez. Llegó como estudiante al Colegio Nacional de Matemáticas, desarrolló habilidades y aptitudes que le permitieron incorporarse a la plantilla de docentes de la Institución. Realizó estudios de Actuaría en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México y ha impartido clases de Matemáticas por más de 11 años en CONAMAT.

Fabián Valapai Bravo Vázquez. Desde muy temprana edad, con la preparación de profesores de CONAMAT, participó en concursos de matemáticas a nivel nacional. Posteriormente, se incorporó a la plantilla docente de la misma institución donde ha impartido la materia de Matemáticas durante 12 años. Al mismo tiempo, estudió la carrera de Diseño Gráfico en la Escuela Nacional de Artes Plásticas.

Herman Aurelio Gallegos Ruiz. Se inició como profesor en CONAMAT. Realizó estudios en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional y Actuaría en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Ha impartido clases de Matemáticas y Física por más de 15 años en el Colegio Nacional de Matemáticas.

Miguel Cerón Villegas. Es egresado de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas del Instituto Politécnico Nacional, realizó estudios de Ingeniería Industrial y tiene más de 15 años de experiencia en docencia.

Ricardo Reyes Figueroa. Inició su trayectoria en la disciplina de las Matemáticas tomando cursos en CONAMAT. Dejando ver su gran capacidad para transmitir el conocimiento, se incorpora como docente en la misma institución donde ha impartido las materias de Matemáticas y Física durante 19 años. Realizó sus estudios de Matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, y de Matemáticas Puras en la Universidad Autónoma Metropolitana.

Contenido

Capítulo 8 Circunferencia y círculo

Capítulo 9 Perímetros y superficies

Capítulo 10 Cuerpos geométricos, áreas y volúmenes

Capítulo 11 Funciones trigonométricas

Capítulo 12 Funciones trigonométricas para ángulos notables

Capítulo 13 Representación gráfica de las funciones trigonométricas

Capítulo 14 Identidades y ecuaciones trigonométricas

Geometría y trigonometría

Capítulo 1
Conceptos básicos

Geometría (del griego *geo*, "tierra"; *metrein*, "medir")


LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DELA GEOMETRIA
DE EVCLIDES.

Los seis libros primeros de la geometría de Euclides

Rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se ocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la geometría son la geometría analítica, geometría descriptiva, topología, geometría de espacios con 4 o más dimensiones, geometría fractal y geometría no euclídea.

Geometría plana

Rama de la geometría elemental que estudia las propiedades de superficies y figuras planas, como el triángulo o el círculo. Esta parte de la geometría también se conoce como geometría euclídea, en honor al matemático griego Euclides, el primero en estudiarla en el siglo IV a.C. Su extenso tratado *Los seis libros primeros de la geometría* se mantuvo como texto autorizado de geometría hasta la aparición de las llamadas geometrías no Euclídeas en el siglo XIX.

Conceptos básicos

Antes de iniciar el estudio de la geometría y trigonometría, analizaremos algunos conceptos básicos:

Geometría. Rama de las matemáticas que estudia las propiedades, las formas y las dimensiones de figuras y cuerpos geométricos.

Punto. Según Euclides: "Punto es lo que no tiene partes", para evitar confusiones al dar una definición más compleja sólo diremos que la idea de punto, nos la da la marca que deja un lápiz sobre el papel, tan pequeña que carece de dimensión.

Línea recta. Sucesión infinita de puntos que tienen la siguiente forma:

Recta $\overleftrightarrow{AB}$

Semirrecta. Si se fija un punto C en una recta, al conjunto de puntos que le siguen o preceden se le llama semirrecta.

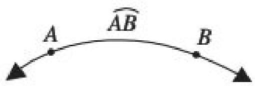
D Semirrecta $\overrightarrow{CD}$

Segmento. Porción de recta limitada por 2 puntos no coincidentes.

Segmento $\overline{CD}$

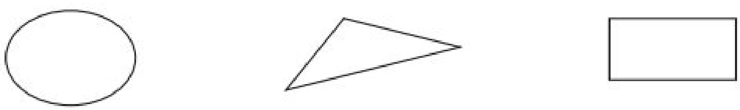
Curva. Es aquella línea que no tiene partes rectas.

Arco. Porción de curva limitada por 2 puntos no coincidentes.



Arco $\widehat{AB}$

Figura geométrica. Extensión limitada por puntos, líneas y superficies.



Cuerpo sólido. Es todo aquello que ocupa un lugar en el espacio y posee longitud, anchura y altura.

Proposición. Enunciado que nos propone algo y que por tanto se puede calificar como falso o verdadero.

Axioma. Proposición evidente que no requiere demostración.

Ejemplos

Dos puntos diferentes determinan una recta y sólo una.
Sobre cualquier recta hay al menos 2 puntos diferentes.

Postulado. Proposición cuya verdad aunque no tenga la evidencia de un axioma se admite sin demostración.

Ejemplos

Dos rectas determinan un punto y sólo uno.
Siempre es posible describir una circunferencia de centro y radio dado.

Teorema. Proposición cuya verdad necesita demostración.

Ejemplos

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.
La suma de los ángulos interiores de todo triángulo son 180°.

Corolario. Proposición que es consecuencia inmediata de otra.

Ejemplo

Del postulado de Euclides: "Por un punto exterior a una recta, pasa una sola paralela a dicha recta". Se obtiene el siguiente corolario: "Dos rectas paralelas a una tercera, son paralelas entre sí".

Lema. Proposición que sirve para facilitar la demostración de un teorema.

Ejemplos

Toda línea poligonal convexa es menor que cualquier otra línea envolvente que tenga los mismos extremos.

Un ángulo no nulo y no llano divide al plano en 2 regiones, de tal suerte que en una y sólo una de las regiones, 2 puntos cualesquiera siempre pueden unirse por un segmento que no interseca ninguna de las 2 semirrectas que forman el ángulo.

Capítulo 2

Ángulos

Sistema SEXAGESIMAL


LOS ELEMENTOS

Definiciones de ángulos del libro *Los elementos* de Euclides

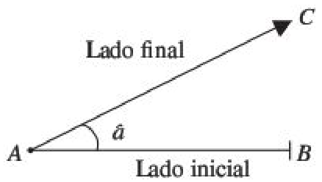
Es un sistema de numeración posicional que emplea la base sesenta. Tuvo su origen en la antigua Babilonia.

A diferencia de la mayoría de los demás sistemas de numeración, el sexagesimal no se usa mucho en la computación general ni en la lógica, pero sí en la medición de ángulos y coordenadas geométricas. La unidad estándar en sexagesimal es el grado. Una circunferencia se divide en 360 grados. Las divisiones sucesivas del grado dan lugar a los minutos de arco (1/60 de grado) y segundos de arco (1/60 de minuto).

Quedan vestigios del sistema sexagesimal en la medición del tiempo. Hay 24 horas en un día, 60 minutos en una hora y 60 segundos en un minuto. Las unidades menores que un segundo se miden con el sistema decimal.

Definición

Un ángulo es la abertura comprendida entre 2 semirrectas que tienen un punto en común, llamado vértice.



El ángulo se representa como $\angle A$, $\angle BAC$, $\hat{a}$, o con letras del alfabeto griego. Si un ángulo se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj, entonces es positivo, si se mide en el mismo sentido entonces será negativo.

Medidas

Los ángulos se miden en grados o radianes de acuerdo al sistema.

Sistema sexagesimal

Este sistema de medir ángulos es el que se emplea normalmente: la circunferencia se divide en 360 partes llamadas grados, el grado en 60 partes llamadas minutos y el minuto en 60 partes que reciben el nombre de segundos.

$$1° = 60'; \quad 1' = 60''$$

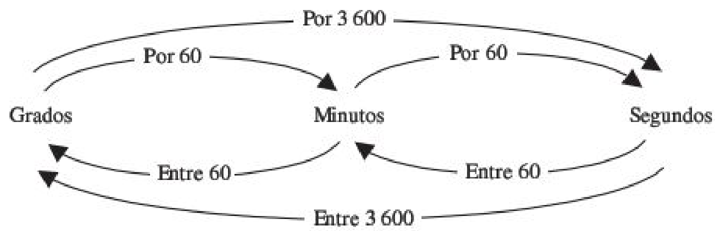
Ejemplos

A continuación se dan 3 números en sistema sexagesimal:

a) 45°
b) 21° 36'
c) 135° 28' 32"

Relación de conversión

Es la relación que existe entre los grados, minutos y segundos de un ángulo expresado en sistema sexagesimal.



De acuerdo con la gráfica, se establecen las siguientes condiciones de conversión:

- Para convertir de una unidad mayor a una menor se multiplica por 60 o 3 600, según sea el caso.
- Para convertir de una unidad menor a una mayor se divide entre 60 o 3 600, según sea el caso.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte 19° 47’ 23” a grados.

Solución

Los minutos se dividen entre 60 y los segundos entre 3 600:

$$19°\,47'\,23'' = 19° + \left(\frac{47}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{23}{3600}\right)^{\circ} = 19° + 0.7833° + 0.0063° = 19.7896°$$

Por tanto, 19° 47’ 23” equivalen a 19.7897°.

2 Convierte 32° 12’ 15” a minutos.

Solución

Los grados se multiplican por 60 y los segundos se dividen entre 60:

$$32°\,12'\,15'' = (32)(60)' + 12' + \left(\frac{15}{60}\right)' = 1\,920' + 12' + 0.25' = 1\,932.25'$$

Por consiguiente 32° 12’ 15” equivalen a 1 932.25’.

3 Convierte 45.5638° a grados, minutos y segundos.

Solución

La parte decimal de 45.5638° se multiplica por 60 para convertir a minutos:

$$45.5638° = 45° + (.5638)(60') = 45°\,33.828'$$

La parte decimal de los minutos se multiplica por 60 para obtener los segundos:

$$45°\,33.828' = 45°\,33' + (.828)(60'') = 45°\,33'\,49.68''$$

EJERCICIO 1

Convierte los siguientes ángulos a grados:

1. 40° 10’15”
2. 61° 42’21”
3. 1° 2’ 3”
4. 73° 40’40”
5. 9° 9’ 9”
6. 98° 22’45”

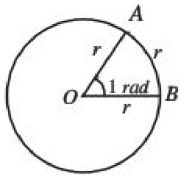
Convierte los siguientes ángulos a su equivalente en grados, minutos y segundos:

7. 40.32°
8. 61.24°
9. 18.255°
10. 29.411°
11. 19.99°
12. 44.01°

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistema cíclico o circular

Este sistema utiliza como unidad fundamental al radián. El radián es el ángulo central subtendido por un arco igual a la longitud del radio del círculo. Se llama valor natural o valor circular de un ángulo.



Un radián (1 *rad*) equivale a 57.29° y π *rad* equivalen a 180°.

Conversión de grados a radianes y de radianes a grados

Sea S un ángulo en sistema sexagesimal (grados) y R en el sistema cíclico (radianes), entonces para convertir:

Grados a radianes	Radianes a grados
Se multiplica el número de grados por el factor $\frac{\pi}{180°}$ y se simplifica, esto es: $S\left(\frac{\pi}{180°}\right)$	Se multiplica el número de radianes por el factor $\frac{180°}{\pi}$ y se simplifica, esto es: $R\left(\frac{180°}{\pi}\right)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Convierte 150° a radianes.

Solución

Se multiplica 150° por el factor $\frac{\pi}{180°}$

$$150° = 150°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{150°\pi}{180°} = \frac{5}{6}\pi$$

Por consiguiente, 150° es equivalente a $\frac{5}{6}\pi$ *rad*.

2 Convierte a grados $\frac{7}{4}\pi$ *rad*.

Solución

Se multiplica por el factor $\frac{180°}{\pi}$ y se simplifica al máximo, obteniendo:

$$\frac{7}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{7(180°)\pi}{4\pi} = \frac{7(180°)}{4} = 315°$$

Finalmente, $\frac{7}{4}\pi$ *rad* equivalen a 315°.

3 Convierte 12° 15’ 36” a radianes.

Solución

Se convierte a grados el ángulo:

$$12°\ 15'\ 36'' = 12° + \left(\frac{15}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{36}{3600}\right)^{\circ} = 12° + 0.25° + 0.01° = 12.26°$$

La conversión a grados se multiplica por el factor $\frac{\pi}{180°}$ y se simplifica a su mínima expresión:

$$12.26°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{12.26°\pi}{180°} = \frac{1\,226\pi}{18\,000} = \frac{613\pi}{9\,000}\ rad$$

Por tanto, 12° 15’ 36” es equivalente a $\frac{613\pi}{9\,000}$ *rad.*

4 Expresa un ángulo θ que mide 3 radianes en grados, minutos y segundos.

Solución

Para convertir de radianes a grados se multiplica por el factor $\left(\frac{180°}{\pi}\right)$

$$3\ rad = 3\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 171.8873°$$

La parte decimal se convierte en minutos,

$$171.8873° = 171° + (0.8873)(60') = 171°\ 53.238'$$

El nuevo decimal se convierte en segundos, entonces:

$$171.8873° = 171°\ 53' + (0.238)(60'') = 171°\ 53'\ 14.28''$$

EJERCICIO 2

Transforma a radianes los siguientes ángulos:

1. 210°
2. 300°
3. 225°
4. 450°
5. 72°
6. 100°
7. 30°
8. 330°
9. 120°
10. 135°
11. 45.23°
12. 128.30°
13. 150° 36’ 40”
14. 420° 0’ 45”

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

EJERCICIO 3

Convierte a grados sexagesimales los siguientes ángulos:

1. $\frac{2}{3}\pi$	4. $\frac{4}{3}\pi$	7. $\frac{13}{5}\pi$	10. 4.7124 *rad*	13. 6.2832 *rad*
2. $\frac{11}{6}\pi$	5. 7π	8. $\frac{1}{12}\pi$	11. 0.1683 *rad*	14. 0.5 *rad*
3. $\frac{3}{4}\pi$	6. $\frac{1}{9}\pi$	9. 1.5708 *rad*	12. 1.1201 *rad*	

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Operaciones

A continuación se presentan las operaciones básicas con ángulos: suma, resta, multiplicación y división.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa la suma de los siguientes ángulos: 29° 38’ 22”; 18° 47’ 52”; 36° 42’ 37”

Solución

Se acomodan en forma vertical de acuerdo a su orden:

$$\begin{array}{rrrr} & 29^\circ & 38' & 22'' \\ + & 18^\circ & 47' & 52'' \\ & 36^\circ & 42' & 37'' \\ \hline & 83^\circ & 127' & 111'' \end{array}$$

Pero 111” = 1’ 51”

$$83^\circ\ 127'\ 111'' = 83^\circ\ 127' + 1'\ 51'' = 83^\circ\ 128'\ 51''$$

y 128’ = 2° 08’

$$83^\circ\ 128'\ 51'' = 83^\circ + 2^\circ\ 08'\ 51'' = 85^\circ\ 08'\ 51''$$

Por tanto, el resultado es: 85° 08’ 51”.

2 Realiza lo que se indica: Resta 24° 42’ 18” de 138° 29’ 17”

Solución

Se acomodan en forma vertical:

$$\begin{array}{rrrr} & 138^\circ & 29' & 17'' \\ - & 24^\circ & 42' & 18'' \\ \hline \end{array}$$

Dado que 42’ > 29’ y 18” > 17”, entonces 138° 29’ 17” se transforman en

$$138^\circ\ 29'\ 17'' = 137^\circ\ 89'\ 17'' = 137^\circ\ 88'\ 77''$$

Y se realiza la resta,

$$\begin{array}{rrrr} & 137^\circ & 88' & 77'' \\ - & 24^\circ & 42' & 18'' \\ \hline & 113^\circ & 46' & 59'' \end{array}$$

Finalmente, se concluye que el resultado es 113° 46’ 59”.

3 Multiplica 73° 16’ 32” por 29.

Solución

$$\begin{array}{r} 73^\circ \quad 16' \quad 32'' \\ \times \qquad\quad 29 \\ \hline 2\,117^\circ \quad 464' \quad 928'' \end{array}$$

El resultado que se obtiene se simplifica, al transformar los segundos a minutos:

$$2\,117^\circ\ 464'\ 928'' = 2\,117^\circ\ 464' + 15'\ 28'' = 2\,117^\circ\ 479'\ 28''$$

Y después minutos a grados:

$$2\,117^\circ\ 479'\ 28'' = 2\,117^\circ + 7^\circ\ 59'\ 28'' = 2\,124^\circ\ 59'\ 28''$$

Por tanto, el resultado es: 2 124° 59’ 28”.

4 Encuentra la novena parte de 165° 48’ 29”.

Solución

Se dividen los grados entre 9:

$$\begin{array}{r|l} & 18^\circ \\ \hline 9 & 165^\circ\ \ 48'\ \ 29'' \\ & \ \ 3^\circ \end{array}$$

El residuo se transforma a minutos y se suma con 48’,

$$\begin{array}{r|l} & 18^\circ \\ \hline 9 & 165^\circ \quad 48' \quad 29'' \\ & \ \ 3^\circ = \underline{180'} \\ & \qquad\quad 228' \end{array}$$

Ahora 228’ se divide entre 9 y el residuo se transforma a segundos,

$$\begin{array}{r|l} & 18^\circ \qquad 25' \\ \hline 9 & 165^\circ \quad 48' \qquad 29'' \\ & \ \ 3^\circ = \underline{180'} \\ & \qquad\quad 228' \qquad 29'' \\ & \qquad\qquad 3' = \underline{180''} \\ & \qquad\qquad\qquad 209'' \end{array}$$

Finalmente, 209” se divide entre 9:

$$\begin{array}{r|l} & 18^\circ \qquad 25' \qquad 23'' \\ \hline 9 & 165^\circ \quad 48' \qquad 29'' \\ & \ \ 3^\circ = \underline{180'} \\ & \qquad\quad 228' \qquad 29'' \\ & \qquad\qquad 3' = \underline{180''} \\ & \qquad\qquad\qquad \underline{209''} \\ & \qquad\qquad\qquad\quad 2'' \end{array}$$

EJERCICIO 4

Efectúa las siguientes operaciones:

1. $$\begin{array}{r} 40^\circ\ 30'\ 18'' \\ +\ 15^\circ\ 16'\ 32'' \\ \hline \end{array}$$

2. $$\begin{array}{r} 25^\circ\qquad 30'' \\ +15^\circ\ 12'\ 45'' \\ \hline \end{array}$$

3. $$\begin{array}{r} 36^\circ\ 42'\ 28'' \\ +\ 10^\circ\ 23'\ 40'' \\ 2^\circ\ 13'\ 25'' \\ \hline \end{array}$$

4. $$\begin{array}{r} 180^\circ\qquad\qquad \\ -\ 120^\circ\ 40'\ 15'' \\ \hline \end{array}$$

5. $$\begin{array}{r} 213^\circ\ 25'\ 13'' \\ -\ 105^\circ\ 17'\ 25'' \\ \hline \end{array}$$

6. $$\begin{array}{r} 90^\circ\qquad\qquad \\ -\ 14^\circ\ 15'\ 38'' \\ \hline \end{array}$$

7. $$\begin{array}{r} 14^\circ\ 30'\ 15'' \\ \times\qquad 17 \\ \hline \end{array}$$

8. $$\begin{array}{l} 35^\circ\ 28'' \\ \times\ \ 25 \\ \hline \end{array}$$

9. $$\begin{array}{l} 25^\circ\ 35'\ 25.4'' \\ \times\ \ 15 \\ \hline \end{array}$$

10. $$\begin{array}{l} 25^\circ\ 13'\ 42'' \\ \times\qquad\quad 9 \\ \hline \end{array}$$

11. $26\,\overline{)\,118^\circ\ 23'}$

12. $8\,\overline{)\,125^\circ\ 30'\ 25''}$

13. $12\,\overline{)\,40^\circ\ 20'\ 16''}$

14. $14\,\overline{)\,185^\circ\ 34'\ 12''}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

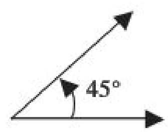
Clasificación de acuerdo con su medida

La magnitud de un ángulo depende de su abertura comprendida entre los lados y no de la longitud de éstos. De acuerdo con su magnitud, se clasifican en:

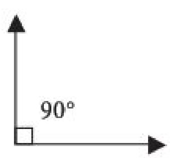
Convexos

Son los que miden más de 0° y menos de 180°, a su vez se clasifican en:

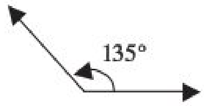
Agudo. Es aquel que mide más de 0° y menos de 90°.



Recto. Es aquel cuya magnitud es de 90°.



Obtuso. Es aquel que mide más de 90° y menos de 180°.

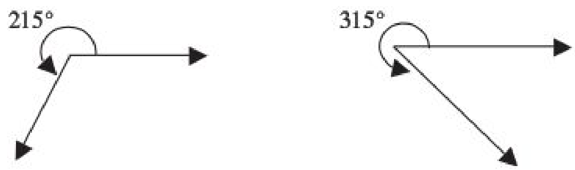


Llano o de lados colineales

Es el que mide 180°.

Cóncavo o entrante

Es aquel que mide más de 180° y menos de 360°.

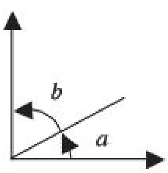


Perigonal o de vuelta entera

Es el que mide 360°.

Complementarios

Son aquellos cuya suma es igual a un ángulo recto (90°).

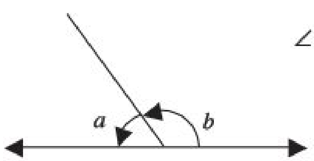


$\angle a + \angle b = 90°$

Suplementarios

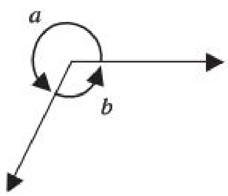
Son aquellos cuya suma es igual a dos ángulos rectos (180°).

$\angle a + \angle b = 180°$



Conjugados

Son los ángulos cuya suma es igual a cuatro ángulos rectos (360°).



$\angle a + \angle b = 360°$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el complemento del ángulo de 38° 40'.

Solución

Por definición, 2 ángulos son complementarios si suman 90°, entonces:

$$38°\,40' + x = 90° \qquad \text{pero} \qquad 90° = 89°\,60'$$
$$x = 89°\,60' - 38°\,40'$$
$$x = 51°\,20'$$

Por consiguiente, el complemento de 38° 40' es 51° 20'.

2 Determina el ángulo que es el triple de su complemento.

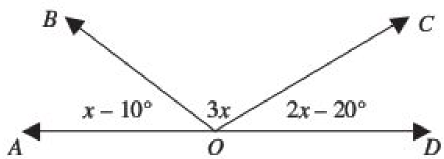
Solución

Sea x el complemento, entonces $3x$ es el ángulo, al aplicar la definición de ángulos complementarios:

$$\text{Ángulo} + \text{Complemento} = 90° \qquad ; \qquad 3x + x = 90°$$
$$4x = 90°$$
$$x = \frac{90°}{4}$$
$$x = 22.5°$$

Por tanto, el ángulo es de 67.5° = 67° 30'.

3 Encuentra el valor de los ángulos que se muestran en la siguiente figura:



Solución

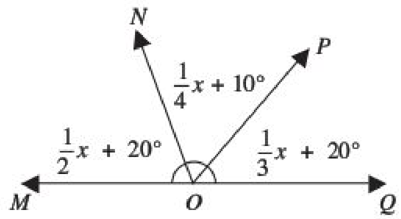
Los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$ son suplementarios, entonces:

$$\angle AOB = x - 10° \qquad (x - 10°) + 3x + (2x - 20°) = 180°$$
$$\angle BOC = 3x \qquad 6x - 30° = 180°$$
$$\angle COD = 2x - 20° \qquad 6x = 210°$$
$$x = 35°$$

Entonces:

$$\angle AOB = x - 10° = 35° - 10° = 25°$$
$$\angle BOC = 3x = 3(35°) = 105°$$
$$\angle COD = 2x - 20° = 2(35°) - 20° = 70° - 20° = 50°$$

4 Determina el valor de los ángulos de la siguiente figura:



Solución

En la figura,

$$\angle MON = \frac{1}{2}x + 20°, \angle NOP = \frac{1}{4}x + 10° \text{ y } \angle POQ = \frac{1}{3}x + 20°$$

Los ángulos $\angle MON$, $\angle NOP$ y $\angle POQ$ forman un ángulo llano, entonces:

$$\frac{1}{2}x + 20° + \frac{1}{4}x + 10° + \frac{1}{3}x + 20° = 180°$$

Donde $x = 120°$, por consiguiente,

$$\angle MON = 80°, \angle NOP = 40° \text{ y } \angle POQ = 60°$$

EJERCICIO 5

Indica si los pares de ángulos siguientes son complementarios, suplementarios o conjugados:

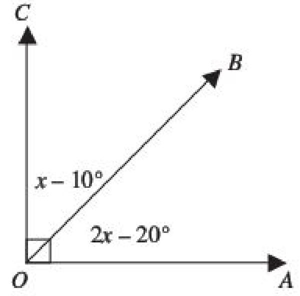
1. 37° y 143°
2. 42° y 48°
3. 135° y 225°
4. 21° y 339°
5. 132° y 228°
6. 34° 48' y 55° 12'
7. 22° y 158°
8. 10° y 80°
9. 270° y 90°
10. 179° y 1°

Efectúa lo siguiente:

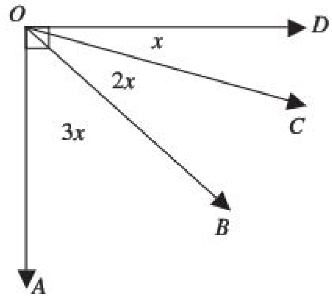
11. Determina el complemento de 80°.
12. Encuentra el suplemento de 123°.
13. Encuentra el conjugado de 280°.
14. Si el complemento de un ángulo m es $2m$, ¿cuál es el valor del ángulo?
15. ¿Cuál es el ángulo cuyo complemento es 4 veces mayor que él?
16. Si el suplemento de un ángulo es 8 veces el ángulo, ¿cuánto vale éste?
17. Un ángulo y su complemento están en la razón 2:3. ¿Cuál es la medida del ángulo?

18. ¿Qué ángulo es igual al doble de su suplemento?
19. Determina el valor de los ángulos que se muestran en las siguientes figuras:

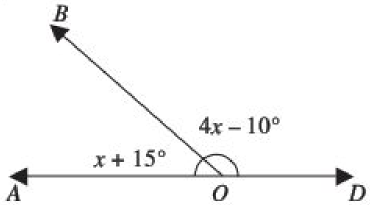
a)



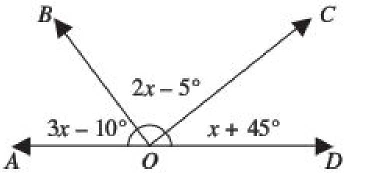
b)



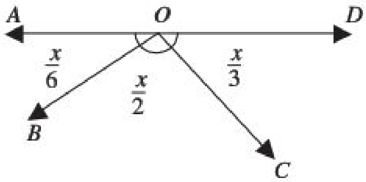
c)



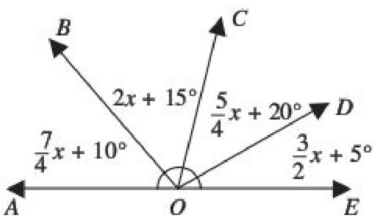
d)



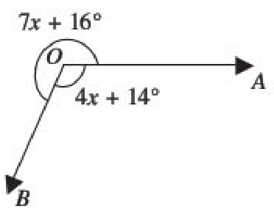
e)



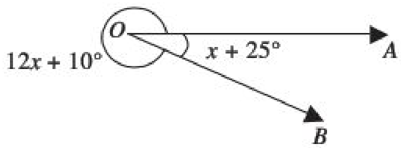
f)



g)



h)



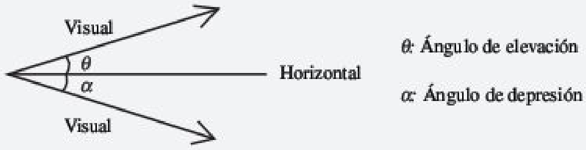
➡ **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Los ángulos se encuentran en todo aquello que tenga intersecciones de líneas, bordes, planos, etcétera. La esquina de una cuadra, el cruce de los cables de luz, al abrir un libro, la esquina de un cuarto, la abertura formada por las manecillas de un reloj, la unión de una viga y una columna, son algunos ejemplos de ángulos, éstos tienen aplicación en la aviación, la navegación, la topografía y la trigonometría, entre otros.

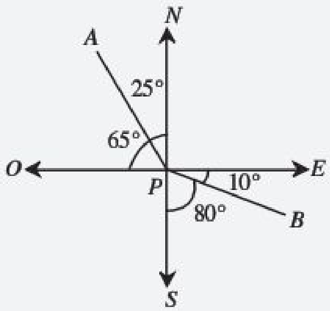
Ángulo vertical

Sirve para definir el grado de inclinación del alineamiento sobre un terreno. Si se toma como referencia la línea horizontal, al ángulo vertical se le conoce como pendiente de una línea, el cual es positivo (de elevación) o negativo (de depresión).



Ángulo horizontal

Lo forman 2 líneas rectas situadas en un plano horizontal. El valor del ángulo horizontal se utiliza para definir la dirección de un alineamiento a partir de una línea que se toma como referencia, y por lo regular son los puntos cardinales: norte (N), sur (S), este (E) y oeste (O).



En la figura se muestran las direcciones de los puntos A y B respecto al punto P.

Dirección de A respecto a P

$N25°O$ o $O65°N$

Dirección de B respecto a P

$E10°S$ o $S80°E$

1 Un barco sale de un puerto con dirección $O40°50'N$, mientras que una segunda embarcación sale del mismo muelle con dirección $E24°30'N$. ¿Qué ángulo forman las direcciones de ambos buques?

Solución

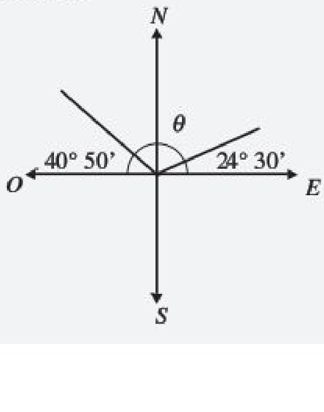
Al establecer las direcciones de los dos barcos, se observa que el ángulo θ que forman es:

$$\theta = 180° - (40°\,50' + 24°\,30')$$

$$\theta = 180° - 65°\,20'$$

$$\theta = 114°\,40'$$

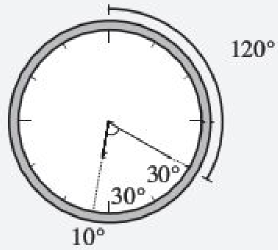
Por tanto el ángulo que forman mide 114° 40'.



2 ¿Cuál es el ángulo agudo formado por el horario y el minutero si el reloj marca las 18:20 hr?

Solución

En un reloj de manecillas cuando el minutero recorre una vuelta (360°), el horario sólo avanza 30°, esto significa que el horario avanza la doceava parte de lo que recorre el minutero por vuelta, a partir de las 12:00 hr, luego, a las 18:20 hr, el minutero avanzó 120° y está ubicado en el número 4 mientras que el horario avanzó $\frac{1}{12}(120°) = 10°$ y está entre las 6 y las 7 horas, por tanto, el ángulo agudo es de 70°.



EJERCICIO 6

Resuelve los siguientes problemas:

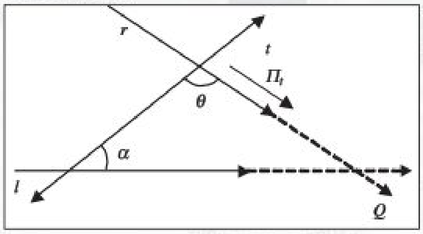
1. Un barco sale de un puerto con dirección norte y una segunda embarcación sale del mismo muelle con dirección sureste. Determina el ángulo que forman las direcciones de los dos buques.
2. Dos aviones parten de una ciudad con direcciones $S32°E$ y $E\,57°N$, ¿cuál es el ángulo que forman sus direcciones?
3. El ángulo que forman las direcciones de 2 personas es 125°. Determina los ángulos θ y α si la primera persona tiene dirección $O\theta N$, la segunda $E\alpha N$ y θ equivale a los cinco sextos de α.
4. Desde un punto P se observan dos edificios, el primero de ellos tiene una dirección $N8°\,39'O$. Si el ángulo que forman las direcciones de estos edificios es de 144° 39', determina la dirección del segundo edificio si se encuentra en el plano oeste-sur.
5. ¿Cuál es el ángulo agudo formado por las manecillas del reloj cuando marcan las 14:15 hr?
6. Determina el número de grados en el ángulo formado por las manecillas del reloj a las 10:10 hr.
7. Encuentra el número de grados en el ángulo mayor formado por las manecillas del reloj a las $5\frac{1}{4}$.
8. ¿A qué hora entre las 12:00 y las 13:00, las manecillas del reloj formarán un ángulo de 165°?
9. ¿Cuántos radianes girará el minutero de un reloj en un día completo?
10. ¿A qué hora entre las 3 y las 4, las manecillas del reloj forman un ángulo de 130°?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 3

Rectas perpendiculares y paralelas

Reseña HISTÓRICA



AXIOMA DE PARALELISMO
V POSTULADO DE EUCLIDES (V.P.E.)

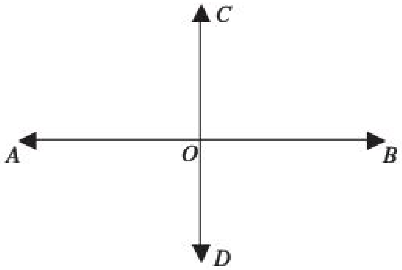
Si 2 rectas distintas l y r, coplanares cortadas por una secante t en puntos distintos, forman con ella en el semiplano Π_t 2 ángulos interiores, de tal manera que la suma de sus medidas sea menor que 180º, entonces las 2 rectas se cortan en algún punto del semiplano Π_t.

El quinto postulado de Euclides (V.P.E.) tiene un enunciado equivalente, llamado el postulado de la paralela única de Playfair, el cual dice: "por un punto exterior a una recta pasa una paralela a la recta y sólo una".

El quinto postulado (axioma de paralelismo de Euclides) causó un trastorno considerable desde la época de los griegos. Muchos geómetras pensaron que tal vez podría deducirse como teorema a partir de los restantes axiomas o postulados. Euclides mismo trató de evitarlo mientras pudo, pues no lo utilizó en sus demostraciones sino hasta que llegó a la proposición 120. Durante más de 2 000 años fueron ofrecidas diferentes "demostraciones" del postulado, pero cada una se basaba en una suposición equivalente al mismo. La independencia del postulado de las paralelas quedó establecida cuando fue demostrada la compatibilidad de los otros geómetras donde el V Postulado se negaba o cambiaba por otro. Cualquier geometría cuyos axiomas contradicen alguno de los de Euclides, es llamada no euclidiana. La primera de ellas que se inventó fue la geometría Lobachevsquiana. Gauss (1777-1855) en Alemania, Bolyai (1802-1860) en Hungría y Lobachevsky (1793-1856) en Rusia, plantearon independientemente la forma de Playfair (1748-1819) del postulado, considerando 3 posibilidades: por un punto exterior a una recta pueden trazarse más de una, únicamente una o ninguna paralela a la recta.

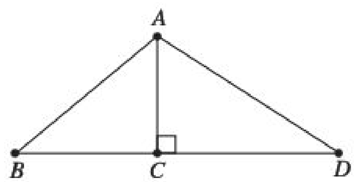
Perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si, al cortarse, forman 4 ángulos rectos. Para denotar que una recta es perpendicular a otra se utiliza el símbolo $\perp$.



Si $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$, entonces
$\angle AOC = \angle COB = \angle BOD = \angle DOA = 90°$

➲ **Teorema 1.** Si por un punto exterior a una recta se traza una perpendicular y varias oblicuas, se verifica:



a) El segmento perpendicular comprendido entre el punto y la recta es menor que cualquier segmento de las oblicuas.

$$\text{Si } \overline{AC} \perp \overline{BD}, \text{ entonces } \overline{AC} < \overline{AB} \text{ y } \overline{AC} < \overline{AD}$$

b) De 2 segmentos de oblicuas cuyos pies no equidistan del pie de la perpendicular, es mayor aquel que dista más.

$$\text{Si } \overline{BC} < \overline{CD}, \text{ entonces } \overline{AB} < \overline{AD}$$

c) Los segmentos de oblicuas cuyos pies equidistan al pie de la perpendicular, son iguales.

$$\text{Si } \overline{BC} = \overline{CD}, \text{ entonces } \overline{AB} = \overline{AD}$$

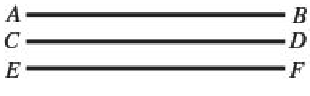
➲ **Teorema 2.** Si una recta es perpendicular a otra, ésta es perpendicular a la primera.

Paralelismo

Dos rectas son paralelas si no tienen un punto en común y guardan siempre una misma distancia.

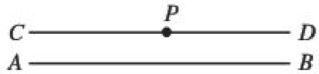
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

➲ **Teorema 1.** Dos rectas en el plano, paralelas a una tercera, son paralelas entre sí.

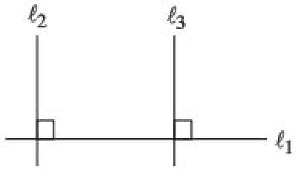


Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ entonces $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$

Teorema 2. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a ella.



Teorema 3. Si una recta ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2, también es perpendicular a toda paralela a la recta ℓ_2.

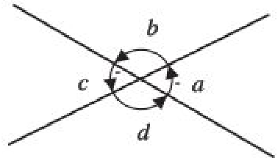


Si $\ell_1 \perp \ell_2$ y $\ell_2 \parallel \ell_3$

Entonces:

$\ell_1 \perp \ell_3$

Ángulos opuestos por el vértice

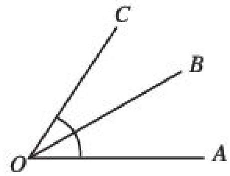


Son aquellos que tienen el vértice común, y los lados de uno de los ángulos son la prolongación de los del otro.

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales:

$$\angle a = \angle c \quad \text{y} \quad \angle b = \angle d$$

Ángulos contiguos

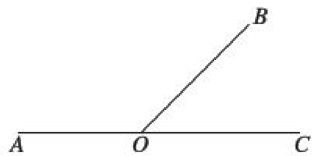


Son aquellos que tienen un lado y un vértice en común.

$\angle AOB$ es contiguo a $\angle BOC$, entonces:

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$$

Ángulos adyacentes



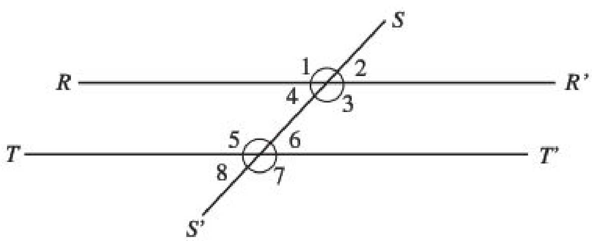
Son ángulos contiguos cuyos ángulos no comunes están alineados, esto es, suman 180º.

$\angle AOB$ es adyacente a $\angle BOC$, entonces:

$$\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$$

Rectas paralelas cortadas por una recta secante

Dadas las rectas, $\overline{RR'} \parallel \overline{TT'}$ y $\overline{SS'}$ una recta secante, se forman los siguientes ángulos:



Estos ángulos reciben los siguientes nombres:

Ángulos alternos internos. Ángulos internos no adyacentes situados en distinto lado de la secante; son iguales.

$$\angle 3 = \angle 5; \quad \angle 4 = \angle 6$$

Ángulos alternos externos. Ángulos externos no adyacentes situados en distinto lado de la secante; son iguales.

$$\angle 1 = \angle 7; \quad \angle 2 = \angle 8$$

Ángulos correspondientes. Dos ángulos no adyacentes situados en un mismo lado de la secante; son iguales.

$$\angle 1 = \angle 5; \quad \angle 4 = \angle 8; \quad \angle 2 = \angle 6; \quad \angle 3 = \angle 7$$

Ángulos colaterales internos (suplementarios). Dos ángulos internos no adyacentes y situados del mismo lado de la secante; suman 180°.

$$\angle 4 + \angle 5 = 180°; \quad \angle 3 + \angle 6 = 180°$$

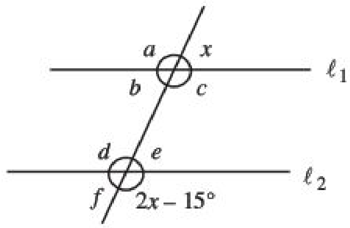
Ángulos colaterales externos (suplementarios). Ángulos externos no adyacentes situados del mismo lado de la secante; suman 180°.

$$\angle 1 + \angle 8 = 180°; \quad \angle 2 + \angle 7 = 180°$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, calcula el valor de los ángulos a, b, c, d, e, f, x, y $2x - 15°$, de la siguiente figura:



Solución

Los ángulos x y $2x - 15°$ son colaterales externos, entonces:

$$x + (2x - 15°) = 180° \quad \rightarrow \quad 3x - 15° = 180°$$
$$3x = 180° + 15°$$
$$3x = 195°$$
$$x = \frac{195°}{3}$$
$$x = 65°$$

Los ángulos a y x son ángulos suplementarios:

$$a + x = 180° \quad \rightarrow \quad a = 180° - x$$
$$a = 180° - 65°$$
$$a = 115°$$

Para obtener los valores de los ángulos restantes, únicamente se toma la posición de cada par de ángulos:

$\angle d = \angle a$ por ser correspondientes, entonces $\angle d = 115°$

$\angle c = \angle a$ por ser opuestos por el vértice, en consecuencia $\angle c = 115°$

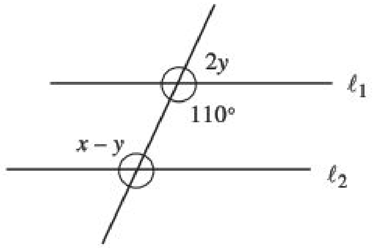
$\angle e = \angle x$ por ser correspondientes, se determina que $\angle e = 65°$

$\angle f = \angle e$ por ser opuestos por el vértice, por tanto $\angle f = 65°$

Luego, los valores de los ángulos son:

$\angle a = 115°$	$\angle x = 65°$
$\angle d = 115°$	$\angle b = 65°$
$\angle c = 115°$	$\angle e = 65°$
$\angle 2x - 15° = 115°$	$\angle f = 65°$

2 Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, obtén los valores de x y de y en la siguiente figura:



Solución

Los ángulos 110° y $2y$ son suplementarios:

$$2y + 110° = 180° \qquad \text{donde} \qquad y = \frac{180° - 110°}{2} = \frac{70°}{2} = 35°$$

Los ángulos $x - y$ y 110° son alternos internos, entonces,

$$x - y = 110° \qquad \text{donde} \qquad x - 35° = 110°$$

$$x = 110° + 35°$$

$$x = 145°$$

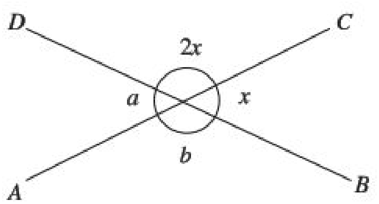
Finalmente, las soluciones son:

$$x = 145°; \quad y = 35°$$

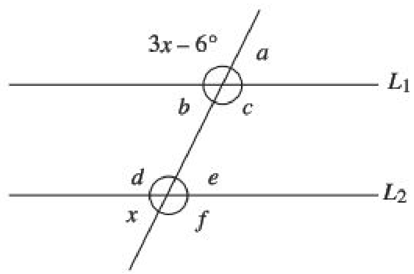
EJERCICIO 7

Calcula el valor de cada uno de los ángulos que se indican en las figuras siguientes:

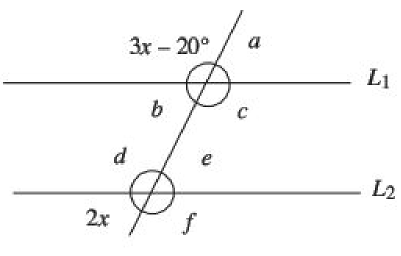
1.



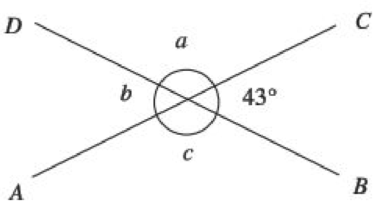
2. Si $L_1 \parallel L_2$



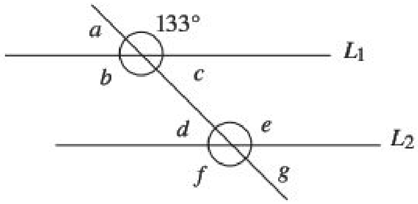
3. Si $L_1 \parallel L_2$



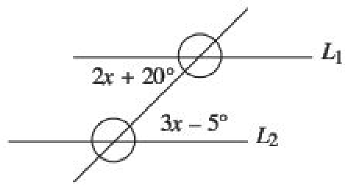
4.



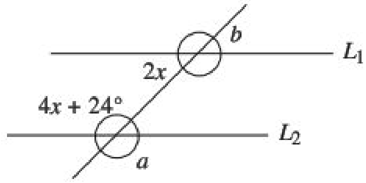
5. Si $L_1 \parallel L_2$, encuentra el valor de los ángulos



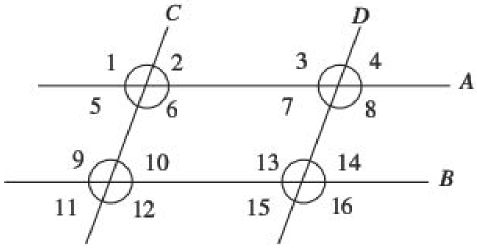
6. Si $L_1 \parallel L_2$, halla el valor de x



7. Si $L_1 \parallel L_2$, determina el valor de x, a y b

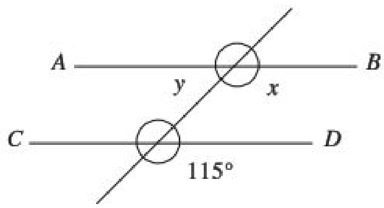


8. En la siguiente figura: $A \parallel B$, $C \parallel D$ y el $\angle 3 = 110°$. Determina la medida de los ángulos $\angle 4$, $\angle 7$, $\angle 1$, $\angle 10$, $\angle 13$ y $\angle 16$

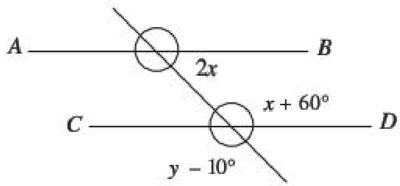


En los ejercicios del 9 al 11 determina el valor de x y y

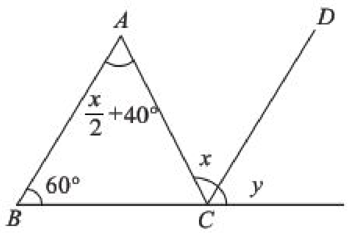
9. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



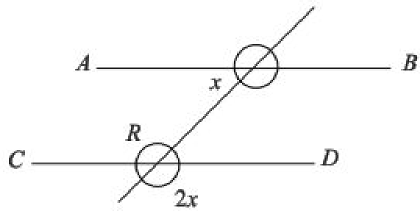
10. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



11. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

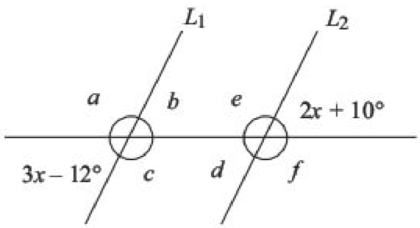


12. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, encuentra la medida del ángulo R

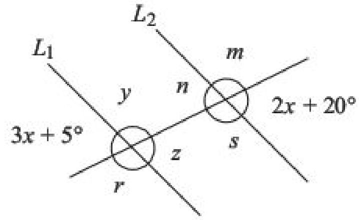


En las siguientes figuras encuentra la medida de los ángulos que se forman:

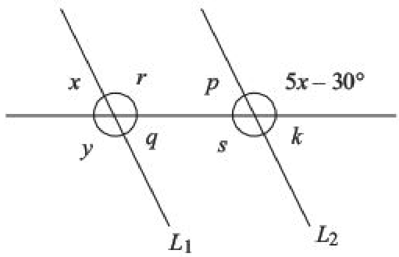
13. Si $L_1 \parallel L_2$



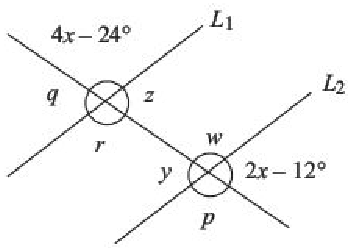
14. Si $L_1 \parallel L_2$



15. Si $L_1 \parallel L_2$

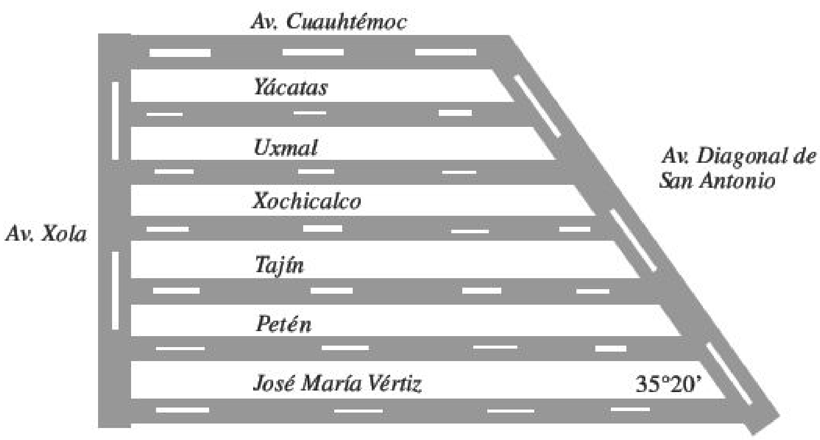


16. Si $L_1 \parallel L_2$



Resuelve los siguientes ejercicios:

17. Con base en el croquis que se muestra, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



a) La calle de Uxmal es paralela a la de Tajín

b) La avenida Xola es perpendicular a la calle de Xochicalco

c) La avenida Diagonal de San Antonio es paralela a la avenida Xola

d) El ángulo que forman la calle Petén y la avenida Diagonal de San Antonio es de 35° 20'

e) Las avenidas Xola y José María Vértiz son paralelas

f) Las avenidas Cuauhtémoc y José María Vértiz son paralelas

g) Las avenidas Diagonal de San Antonio y José María Vértiz son perpendiculares

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 4

TRIÁNGULOS

Reseña HISTÓRICA

Imagen de Pitágoras obtenida del *Diccionario de Autores*, perteneciente a la obra *Illustrium Imagines* de Fulvio Orsini, publicada en 1570.

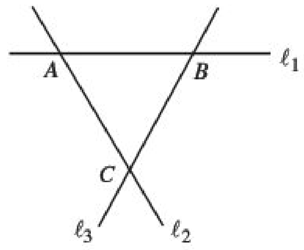
Pitágoras (c. 582-c. 500 a.C.), filósofo y matemático griego, cuyas doctrinas influyeron mucho en Platón. Nacido en la isla de Samos, Pitágoras fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonios: Tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes. Se dice que Pitágoras fue condenado a exiliarse de Samos por su aversión a la tiranía de Polícrates. Hacia el 530 a.C. se instaló en Crotona, una colonia griega al sur de Italia, donde fundó un movimiento con propósitos religiosos, políticos y filosóficos, conocido como pitagorismo.

Teoría de los números

Entre las amplias investigaciones matemáticas realizadas por los pitagóricos se encuentran sus estudios de los números pares e impares, y de los números primos y de los cuadrados, esenciales en la teoría de los números. Desde el punto de vista aritmético cultivaron el concepto de número, que llegó a ser para ellos el principio crucial de toda proporción, orden y armonía en el universo. A partir de estos estudios establecieron una base científica para las matemáticas. En geometría el gran descubrimiento de la escuela fue el teorema de la hipotenusa, conocido como teorema de Pitágoras: el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros 2 lados.

Definición

Porción del plano limitada por 3 rectas que se intersecan una a una en puntos llamados vértices.



A, B y C: vértices

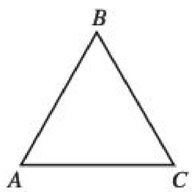
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$: lados

Clasificación de los triángulos

Los triángulos se clasifican por la longitud de sus lados o la magnitud de sus ángulos.

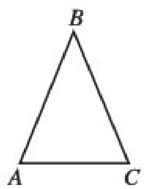
Por sus lados

Triángulo equilátero
Sus lados son iguales



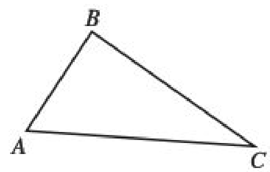
$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

Triángulo isósceles
Tiene 2 lados iguales



$\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{AC}$

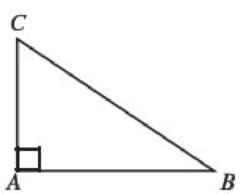
Triángulo escaleno
Sus lados son diferentes



$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$

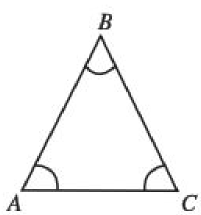
Por sus ángulos

Triángulo rectángulo
Tiene un ángulo recto



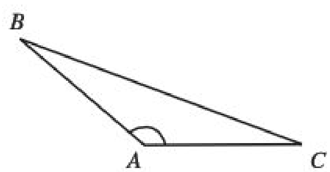
$\angle A = 90°$

Triángulo acutángulo
Sus 3 ángulos son agudos



$\angle A < 90°$, $\angle B < 90°$ y $\angle C < 90°$

Triángulo obtusángulo
Es el que tiene un ángulo obtuso



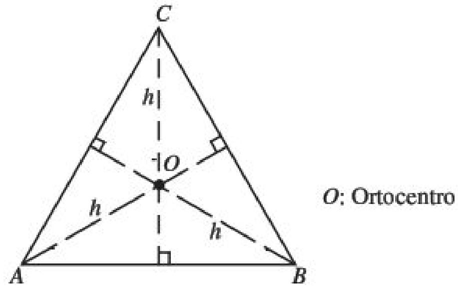
$\angle A > 90°$

Rectas y puntos notables

Son rectas y puntos con características especiales dentro de un triángulo y son:

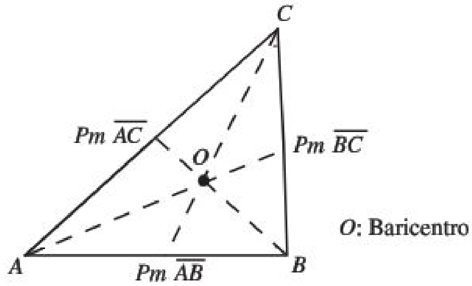
Altura. Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto.

Ortocentro. Se define así al punto donde se intersecan las alturas.



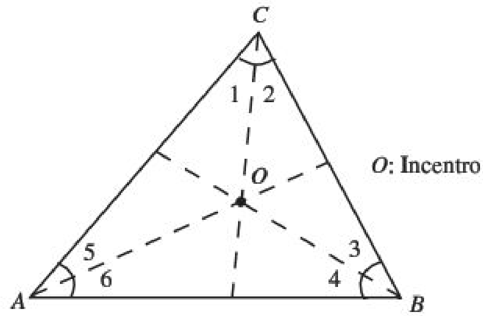
Mediana. Así se denomina al segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Baricentro. Es el punto donde se intersecan las medianas.



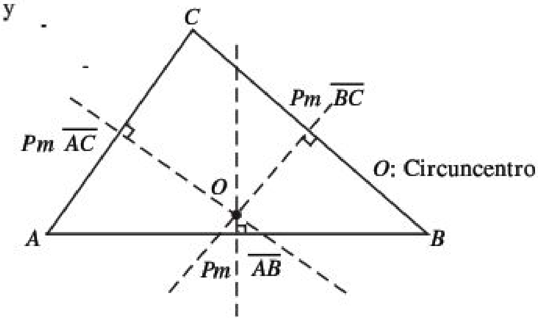
Bisectriz. Recta que divide en 2 ángulos iguales a un ángulo interior de un triángulo.

Incentro. Es el punto donde se intersecan las bisectrices.



Mediatriz. Recta perpendicular al lado de un triángulo y que pasa por el punto medio de este mismo lado.

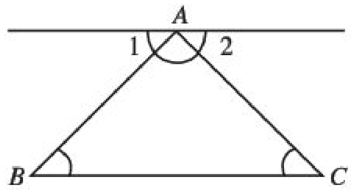
Circuncentro. Es el punto donde se intersecan las mediatrices.



Teoremas

A continuación se mencionan y demuestran algunos teoremas importantes sobre triángulos.

Teorema 1. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

Demostración: Por ángulos suplementarios,

$$\angle 1 + \angle A + \angle 2 = 180°$$

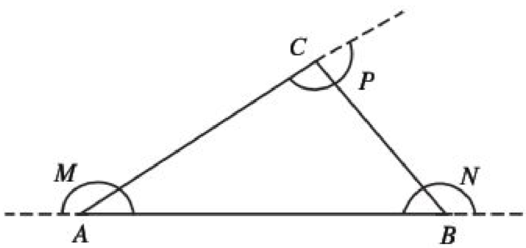
La recta que pasa por el vértice A es paralela a BC y por ángulos alternos internos entre paralelas:

$$\angle 1 = \angle B;\ \angle 2 = \angle C$$

Al sustituir en $\angle 1 + \angle A + \angle 2 = 180°$, se obtiene:

$$\angle B + \angle A + \angle C = 180°$$

Teorema 2. Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los 2 interiores no adyacentes a él.



$$\angle M = \angle B + \angle C$$
$$\angle P = \angle A + \angle B$$
$$\angle N = \angle A + \angle C$$

Demostración: En un triángulo la suma de los ángulos interiores es 180°.

$$\angle B + \angle A + \angle C = 180°$$

Los ángulos A y M son suplementarios:

$$\angle A + \angle M = 180°$$

Al igualar:

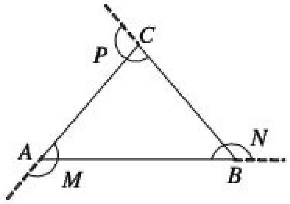
$$\angle B + \angle A + \angle C = \angle A + \angle M$$

$$\angle B + \angle C = \angle A - \angle A + \angle M$$

$$\angle B + \angle C = \angle M$$

Para $\angle N$ y $\angle P$ se realiza el mismo procedimiento.

Teorema 3. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360º.



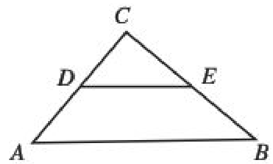
$\angle M + \angle N + \angle P = 360°$

Demostración: Los ángulos *M*, *P* y *N* son ángulos exteriores, entonces al aplicar el teorema 2.

$$\begin{array}{rr} & \angle M = \angle B + \angle C \\ + & \angle P = \angle A + \angle B \\ & \angle N = \angle A + \angle C \\ \hline & \angle M + \angle N + \angle P = 2\angle A + 2\angle B + 2\angle C \\ & \angle M + \angle N + \angle P = 2(\angle A + \angle B + \angle C) \\ & \angle M + \angle N + \angle P = 2(180°) = 360° \end{array}$$

Por tanto, $\angle M + \angle N + \angle P = 360°$

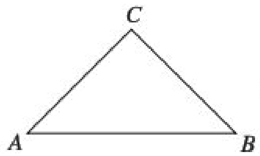
Teorema 4. En todo triángulo la longitud del segmento que une los puntos medios de dos lados es paralela e igual a un medio de la longitud del lado restante.



$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ y

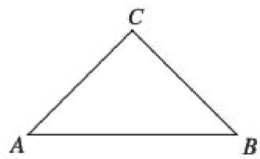
$\overline{DE} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$

Teorema 5. La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el lado restante, mientras que su diferencia es menor.



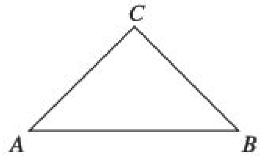
$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$

Teorema 6. Si 2 lados de un triángulo son distintos, al mayor lado se opone mayor ángulo.



Si $\overline{BC} > \overline{AC}$ entonces $\angle A > \angle B$

Teorema 7. Para 2 ángulos distintos de un triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado.

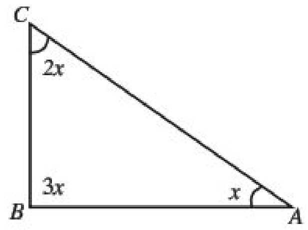


Si $\angle A > \angle B$ entonces $\overline{BC} > \overline{AC}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el valor de los ángulos del siguiente triángulo:



Solución

Por definición, los ángulos interiores de un triángulo suman 180°

$$x + 2x + 3x = 180° \qquad \text{donde} \qquad 6x = 180°$$

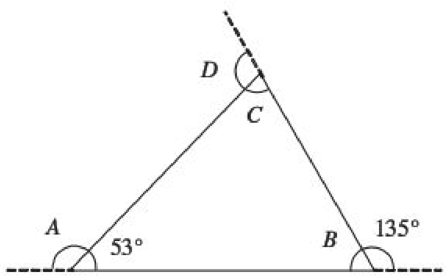
$$x = \frac{180°}{6} = 30°$$

Si $x = 30°$, entonces:

$$\angle A = x = 30°,\ \angle C = 2x = 2(30°) = 60° \text{ y } \angle B = 3x = 3(30°) = 90°$$

Por consiguiente: $\angle A = 30°$, $\angle C = 60°$ y $\angle B = 90°$

2 Calcula el valor de los ángulos del siguiente triángulo:



Solución

Por ángulos exteriores:

$$\angle C + 53° = 135° \qquad \text{donde} \qquad \angle C = 135° - 53° = 82°$$

Por ángulos suplementarios,

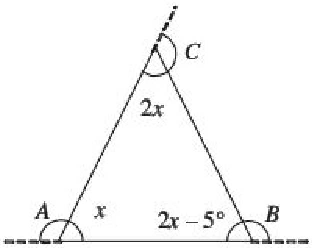
$$\angle B + 135° = 180° \quad \rightarrow \quad \angle B = 180° - 135° = 45°$$

$$\angle A + 53° = 180° \quad \rightarrow \quad \angle A = 180° - 53° = 127°$$

$$\angle C + \angle D = 180° \quad \rightarrow \quad \angle D = 180° - \angle C = 180° - 82° = 98°$$

Por tanto, $\angle A = 127°$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 82°$ y $\angle D = 98°$

3 Determina el valor de los ángulos del siguiente triángulo:



Solución

La suma de los ángulos interiores es 180°

$$2x + x + (2x - 5°) = 180° \qquad 5x - 5° = 180°$$

$$x = \frac{185°}{5} = 37°$$

Por ser ángulos suplementarios:

$$\angle A + x = 180° \quad \rightarrow \quad \angle A = 180° - x = 180° - 37° = 143°$$
$$\angle B + 2x - 5° = 180° \quad \rightarrow \quad \angle B = 180° - 2x + 5° = 180° - 74° + 5° = 111°$$
$$\angle C + 2x = 180° \quad \rightarrow \quad \angle C = 180° - 2x = 180° - 74° = 106°$$

Por consiguiente:

$$\angle A = 143° \qquad \angle B = 111° \qquad \angle C = 106°$$
$$\angle x = 37° \qquad \angle 2x - 5° = 69° \qquad \angle 2x = 74°$$

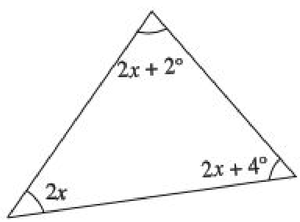
4 La medida de los ángulos interiores de un triángulo es equivalente a 3 números pares consecutivos, ¿cuál es la medida de cada ángulo?

Solución

Sean los ángulos $2x$, $2x + 2°$, $2x + 4°$, si aplicas el teorema 1 de los triángulos:

$$2x + 2x + 2° + 2x + 4° = 180°$$
$$6x + 6° = 180°$$
$$6x = 174°$$
$$x = 29°$$

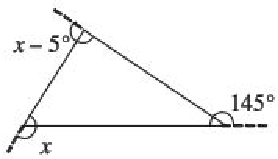
Por tanto, el valor de cada uno de los ángulos es:
58°, 60° y 62°



EJERCICIO 8

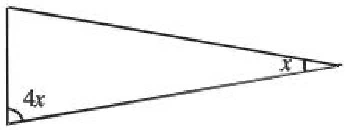
Resuelve los siguientes problemas:

1. Calcula el valor de los ángulos exteriores del siguiente triángulo:

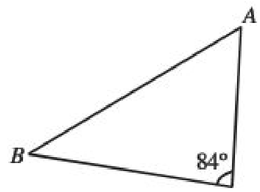


2. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 8 veces el otro. ¿Cuánto vale cada ángulo?

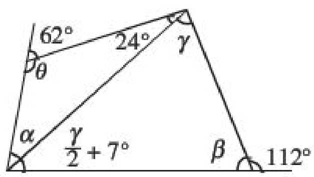
3. En un triángulo isósceles, un ángulo de la base es el cuádruplo del ángulo diferente. ¿Cuánto mide cada ángulo?



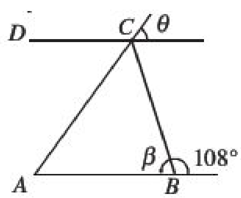
4. Uno de los ángulos interiores de un triángulo mide 84° y la diferencia de los otros 2 es de 14°. ¿Cuánto miden los ángulos restantes?



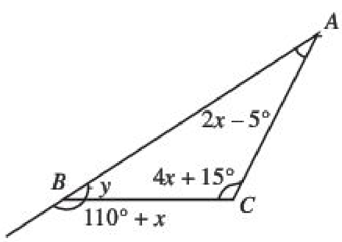
5. Encuentra los ángulos interiores de los siguientes triángulos:



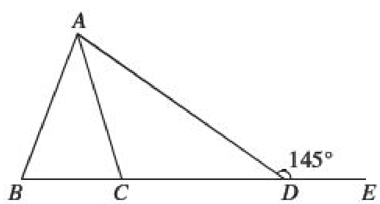
6. Determina los valores de β y θ. Si $\overline{AC}$ biseca al ángulo DCB y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$



7. Determina el valor de los ángulos interiores del triángulo ABC.



8. En la siguiente figura el lado $\overline{AC}$ es bisectriz del ángulo $\angle BAD$. Determina los ángulos interiores de los ΔABC y ACD sabiendo que $\angle BAC = y + 8°$, $\angle CAD = x + 13°$, $\angle ABC = 3x - 6°$ y $\angle ACD = \frac{10}{3}y + 7°$



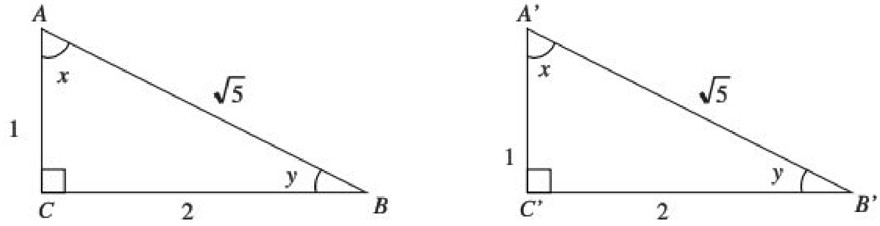
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Triángulos congruentes

Son aquellos que tienen la misma forma y tamaño.

Si 2 triángulos son congruentes entonces:

a) Sus lados homólogos son iguales.
b) Sus ángulos homólogos son iguales.

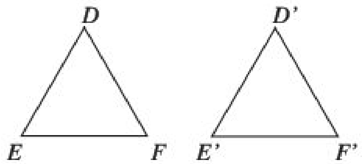


Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes, porque tienen iguales tanto sus lados como sus ángulos, es decir, existe igualdad entre los 3 pares de lados y los 3 pares de ángulos.

Esto se representa $\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'C'$ y se lee: "El triángulo ABC es congruente con el triángulo $A'B'C'$ ".

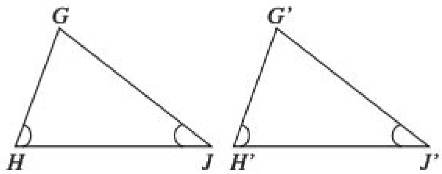
Teoremas de congruencia

- **Teorema I (lado, lado, lado).** Dos triángulos son congruentes si tienen sus lados iguales.



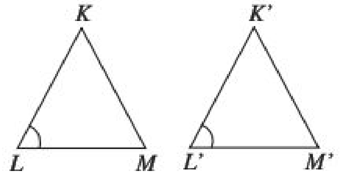
$$\overline{DE} = \overline{D'E'},\ \overline{EF} = \overline{E'F'} \text{ y } \overline{DF} = \overline{D'F'}$$

- **Teorema II (ángulo, lado, ángulo).** Dos triángulos son congruentes si tienen 2 ángulos y el lado adyacente a ellos respectivamenteig uales.



$$\angle H = \angle H',\ \overline{HJ} = \overline{H'J'} \text{ y } \angle J = \angle J'$$

- **Teorema III (lado, ángulo, lado).** Dos triángulos son congruentes si 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente iguales a sus homólogos del otro.

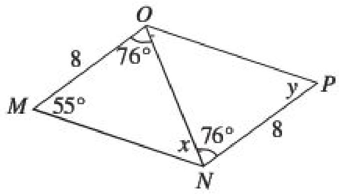


$$\overline{KL} = \overline{K'L'},\ \angle L = \angle L' \text{ y } \overline{LM} = \overline{L'M'}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En la siguiente figura $\overline{MO} \parallel \overline{PN}$. Determina si los siguientes triángulos son congruentes y encuentra los valores de x y y.



Solución

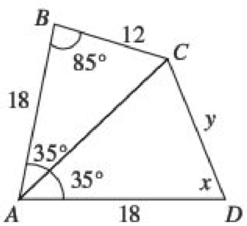
Se construye una tabla en la que se dan las afirmaciones y las razones que nos lleven a la demostración que se pide.

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{MO} = \overline{PN}$	1. Datos
2. $\angle MON = \angle PNO$	2. Datos
3. $\overline{ON} = \overline{NO}$	3. Por ser lado común a los triángulos *MON* y *PNO*
4. $\Delta MON \cong \Delta PNO$	4. Por el teorema: lado, ángulo, lado
5. $y = 55°$	5. Los ángulos homólogos de triángulos congruentes son iguales
6. $x = 49°$	6. En el triángulo *OMN*: $\angle MON + \angle ONM + \angle NMO = 180°$; $76° + x + 55° = 180°$; $x = 180° - 76° - 55° = 49°$

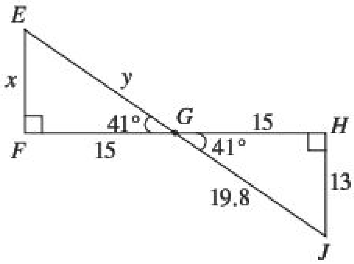
EJERCICIO 9

En cada uno de los siguientes casos indica por qué son congruentes los triángulos y determina los valores de x y y.

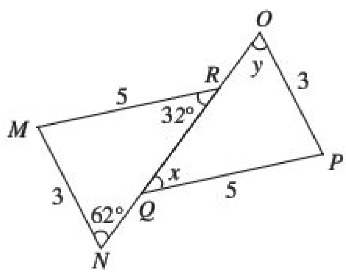
1.



2.



3. *Si* $\overline{NR} = \overline{QO}$



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

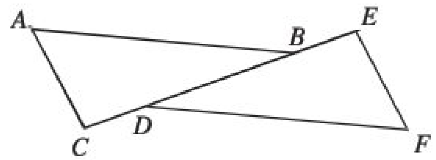
Aplicación de los teoremas de congruencia

Dados dos triángulos, establece los criterios por los que son congruentes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $\overline{AB} \parallel \overline{DF}$, $\overline{AC} \parallel \overline{EF}$ y $\overline{CB} \cong \overline{DE}$, demostrar que $\Delta\, ABC \cong \Delta\, FDE$

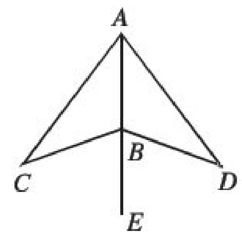


Solución

Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. $\angle C \cong \angle E$	1. Los lados AC y EF son paralelos y CE es la recta secante, por tanto, los ángulos C y E son alternos internos
2. $\overline{CB} \cong \overline{DE}$	2. Datos
3. $\angle B \cong \angle D$	3. Los lados AB y DF son paralelos y CE es la recta secante, en consecuencia, los ángulos B y D son alternos internos
4. $\Delta\, ABC \cong \Delta\, FDE$	4. Por el teorema: ángulo, lado, ángulo

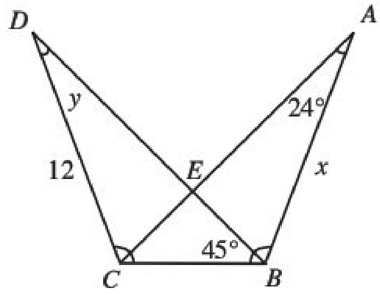
2 Si $\overline{AB}$ es bisectriz de $\angle\, CAD$ y $\overline{AC} \cong \overline{AD}$. Demuestra que $\overrightarrow{BE}$ es bisectriz de $\angle\, CBD$.



Solución

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AC} \cong \overline{AD}$	1. Datos
2. $\angle CAB \cong \angle DAB$	2. Definición de bisectriz
3. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$	3. Por ser lado común a los triángulos CAB y DAB
4. $\Delta\, CAB \cong \Delta\, DAB$	4. Por el teorema: lado, ángulo, lado
5. $\angle CBA \cong \angle DBA$	5. Los ángulos homólogos en triángulos congruentes son iguales
6. $\angle CBE \cong \angle DBE$	6. $\angle EBA = \angle ABE \rightarrow \angle CBA + \angle CBE = \angle DBA + \angle DBE$, pero $\angle CBA = \angle DBA$, entonces $\angle CBE = \angle DBE$
7. $\overrightarrow{BE}$ es bisectriz del ángulo $\angle CBD$	7. Definición de bisectriz: $\angle CBE = \angle DBE$

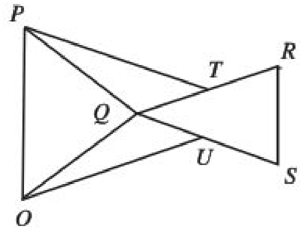
3 Si $\angle DCB = 111°$ y $\overline{DB} \perp \overline{AC}$, demuestra que los triángulos DBC y ACB son congruentes y determina los valores de x y y.



Solución

Afirmaciones	Razones
1. $\angle CEB = 90°$	1. Datos
2. $\angle DBC = 45°$	2. Datos
3. $\angle DCB = 111°$	3. Datos
4. $\angle ECB = 45°$	4. En el triángulo EBC: $\angle CEB + \angle EBC + \angle ECB = 180°$, $90° + 45° + \angle ECB = 180°$ $\angle ECB = 180° - 135°$ $\angle ECB = 45°$
5. $\angle AEC = 180°$	5. Por ser ángulo llano
6. $\angle AEB = 90°$	6. $\angle AEC = \angle CEB + \angle AEB$ $180° = 90° + \angle AEB$ $90° = \angle AEB$
7. $\angle ABE = 66°$	7. En el triángulo ABE: $\angle AEB + \angle EAB + \angle ABE = 180°$ $90° + 24° + \angle ABE = 180°$ $\angle ABE = 180° - 114°$ $\angle ABE = 66°$
8. $\angle CBA = 111°$	8. $\angle CBA = \angle CBE + \angle ABE$ $\angle CBA = 45° + 66°$ $\angle CBA = 111°$
9. $\angle DBC \cong \angle ACB$	9. Por las afirmaciones 2 y 4, si $\angle ACB = \angle ECB$
10. $\overline{CB} \cong \overline{BC}$	10. Por ser lado común a los triángulos DBC y ACB
11. $\angle DCB \cong \angle ABC$	11. Por las afirmaciones 3 y 8, si $\angle ABC = \angle CBA$
12. $\Delta DBC \cong \Delta ACB$	12. Por el teorema: lado, ángulo, lado
13. $x = 12, y = 24°$	13. Los lados y ángulos homólogos de triángulos congruentes son iguales

4 En la figura, $\overline{OQ} \cong \overline{PQ}$, $\overline{QS} \cong \overline{QR}$, U es el punto medio de $\overline{QS}$, T es el punto medio de $\overline{QR}$, $\angle OQR \cong \angle PQS$. Demuestra que $\overline{OU} \cong \overline{PT}$.



Solución

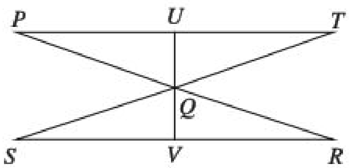
Para comprobar que $\overline{OU} \cong \overline{PT}$, es necesario demostrar que los triángulos TQP y UQO son congruentes, entonces:

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{QS} \cong \overline{QR}$	1. Datos
2. $\overline{QT} \cong \overline{QU}$	2. Los puntos U y T dividen en 2 segmentos iguales a los lados $\overline{QS}$ y $\overline{QR}$
3. $\angle OQR \cong \angle PQS$	3. Datos
4. $\angle OQR \cong \angle OQS + \angle SQR$	4. Ángulos contiguos
5. $\angle PQS \cong \angle PQR + \angle RQS$	5. Ángulos contiguos
6. $\angle OQS \cong \angle PQR$	6. De 3 se tiene que: $\angle OQR \cong \angle PQS$, entonces: $\angle OQS + \angle SQR \cong \angle PQR + \angle RQS$, pero $\angle SQR \cong \angle RQS$, por tanto: $\angle OQS \cong \angle PQR$
7. $\overline{OQ} \cong \overline{PQ}$	7. Datos
8. $\Delta\, TQP \cong \Delta\, UQO$	8. Por el teorema: lado, ángulo, lado
9. $\overline{OU} \cong \overline{PT}$	9. Los lados homólogos en triángulos congruentes son iguales

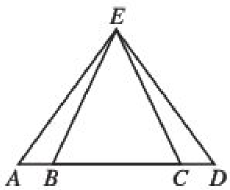
EJERCICIO 10

Demuestra cada uno de los siguientes ejercicios:

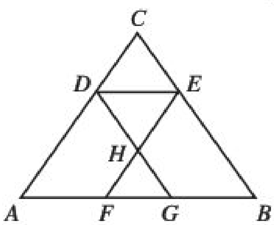
1. En la figura, los puntos P, Q y R son colineales, S, Q y T son colineales y U, Q y V son colineales. Si $\overline{SQ} \cong \overline{QT}$ y $\overline{UQ} \cong \overline{QV}$, demuestra que $\Delta\, PUQ \cong \Delta\, RVQ$



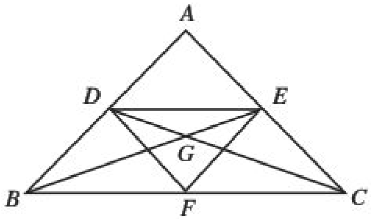
2. En la figura ΔAED, con $\overline{AE} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Demuestra que $\angle CBE \cong \angle BCE$



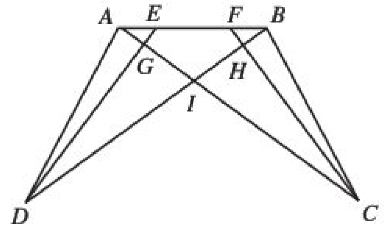
3. En la figura, $\angle CDH \cong \angle CEH$, $\overline{FH} \cong \overline{GH}$, $\overline{DH} \cong \overline{EH}$, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y $\overline{DC} \cong \overline{EC}$. Demuestra que $\Delta\, ADG \cong \Delta\, BEF$



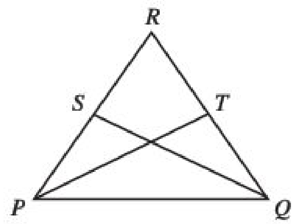
4. En la figura, $\angle ABC \cong \angle ACB$; $\overline{BF} \cong \overline{CF}$ y $\angle BFD \cong \angle CFE$. Demuestra que $\overline{BE} \cong \overline{CD}$



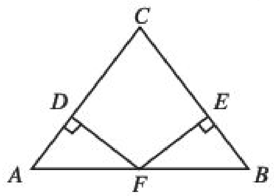
5. En la figura, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, $\overline{AE} \cong \overline{BF}$ y $\overline{AG} \cong \overline{BH}$. Demuestra que $\overline{EG} \cong \overline{FH}$



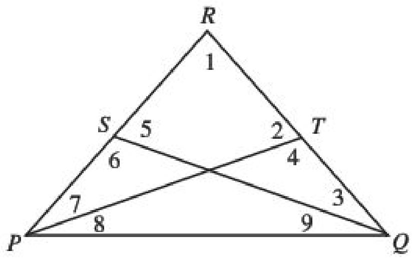
6. En la figura, $\overline{PS} \cong \overline{QT}$, $\overline{RS} \cong \overline{RT}$. Demuestra que $\overline{PT} \cong \overline{QS}$



7. En la figura se tiene el $\Delta\, ABC$ con $\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{EF} \perp \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BE}$ y $\overline{DF} \cong \overline{EF}$. Demuestra que $\Delta\, ABC$ es isósceles.



8. De esta figura realiza lo que se indica.



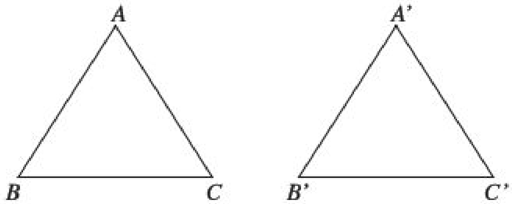
a) En el $\Delta\, PQR$, $\overline{PR} \cong \overline{QR}$ y $\angle 7 \cong \angle 3$, demuestra que $\overline{RS} \cong \overline{RT}$

b) En el $\Delta\, PQR$, $\angle RPQ \cong \angle RQP$ y $\angle 6 \cong \angle 4$, comprueba que $\overline{PS} \cong \overline{QT}$

Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro, por ser demostraciones.

Relación entre ángulos y lados homólogos de dos triángulos congruentes

Sean los triángulos congruentes ABC y $A'B'C'$:



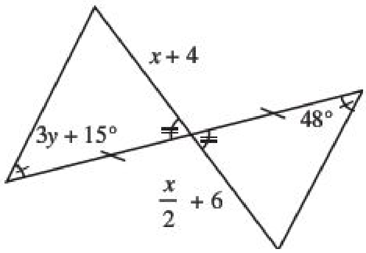
Entonces se verifica que sus lados y ángulos homólogos son iguales:

$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C',\ \overline{AB} = \overline{A'B'},\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ y } \overline{AC} = \overline{A'C'}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los valores de las incógnitas en los siguientes triángulos congruentes:



Solución

Dado que los triángulos son congruentes, sólo basta con igualar los ángulos y lados homólogos para determinar los valores tanto de x como de y, entonces:

$$3y + 15° \text{ es homólogo a } 48° \text{ y } “x + 4” \text{ es homólogo a } “\frac{x}{2} + 6”$$

Para y

$$3y + 15° = 48° \quad \rightarrow \quad 3y = 48° - 15° \quad \rightarrow \quad 3y = 33°$$
$$y = 11°$$

Para x

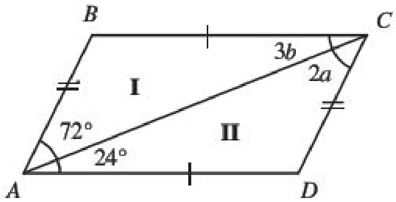
$$\frac{x}{2} + 6 = x + 4 \quad \rightarrow \quad 6 - 4 = x - \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad 2 = \frac{x}{2}$$
$$x = 4$$

En consecuencia, los valores de x y y son: 4 y 11°

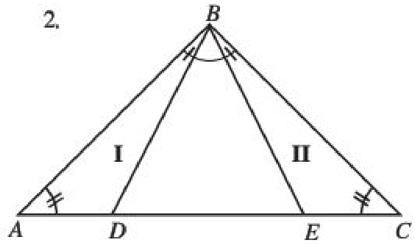
EJERCICIO 11

En las siguientes figuras los triángulos I y II son congruentes. Determina el valor de las incógnitas.

1.

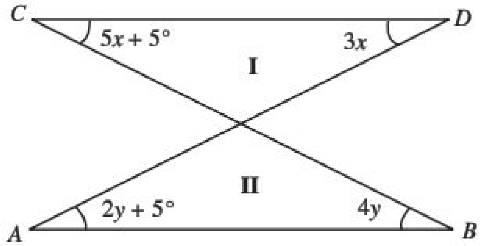


2.

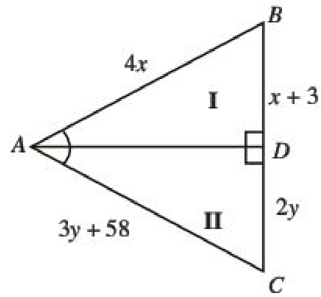


Si $\overline{AB} = 2y - 5$, $\overline{BC} = 5x + 10$
$\overline{AD} = x + 30$, $\overline{EC} = 3x$

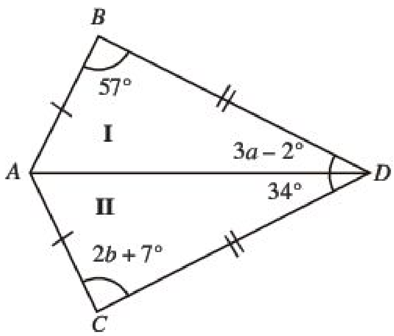
3.



4.



5.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Proporciones

La razón es la comparación de dos cantidades.

$$r = \frac{a}{b}$$

Una proporción es una igualdad de 2 razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{o} \quad a : b = c : d$$

Y se lee: *a* es a *b* como *c* es a *d*.

Teoremas de proporciones

- **Teorema 1.** En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\text{Si } a:b = c:d, \text{ entonces } ad = bc$$

- **Teorema 2.** En una proporción pueden intercambiarse el segundo y tercer términos, y se obtiene una proporción cierta.

$$\text{Si } a:b = c:d, \text{ entonces } a:c = b:d$$

- **Teorema 3.** En una proporción pueden invertirse las razones.

$$\text{Si } a:b = c:d, \text{ entonces } b:a = d:c$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el valor de x en la proporción $\frac{x}{20} = \frac{3}{5}$

Solución

Se despeja la incógnita x,

$$\frac{x}{20} = \frac{3}{5} \qquad \text{donde} \qquad x = \frac{3\,(20)}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

Por consiguiente, $x = 12$

2 Determina el valor de x en la proporción $\frac{3}{x} = \frac{2}{5}$

Solución

Se despeja la incógnita:

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{5} \qquad \text{donde} \qquad x = \frac{3(5)}{2} = \frac{15}{2}$$

Finalmente: $x = \frac{15}{2}$

3 Determina el valor de x en la proporción $x : 2x - 3 = 3 : 5$

Solución

Se establece en forma de cociente la proporción:

$$\frac{x}{2x-3} = \frac{3}{5}$$

Ahora de la igualdad se realiza un producto cruzado y se resuelve para x:

$$5x = 3(2x-3) \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 5x &= 6x - 9 \\ 5x - 6x &= -9 \\ -x &= -9 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior, $x = 9$

4 Determina el valor de x en la siguiente proporción $\frac{32}{x} = \frac{x}{2}$

Solución

Se realiza un producto cruzado y se resuelve para x,

$$\frac{32}{x} = \frac{x}{2} \qquad \text{donde} \qquad \begin{aligned} x(x) &= (2)\,(32) \\ x^2 &= 64 \\ x &= \pm\sqrt{64} \\ x &= \pm 8 \end{aligned}$$

EJERCICIO 12

Precisa el valor de x en las siguientes proporciones:

1. $x : 4 = 6 : 8$
2. $3 : 5 = x : 12$
3. $3 : x = x : 27$
4. $x : 5 = 2x : (x + 3)$
5. $(x - 2) : 4 = 7 : (x + 2)$
6. $(2x + 8) : (x + 2) = (2x + 5) : (x + 1)$
7. $x : 2y = 18y : x$
8. $(x + 4) : 3 = 3 : (x - 4)$
9. $(x - 1) : 3 = 5 : (x + 1)$
10. $2x : (x + 7) = 3 : 5$

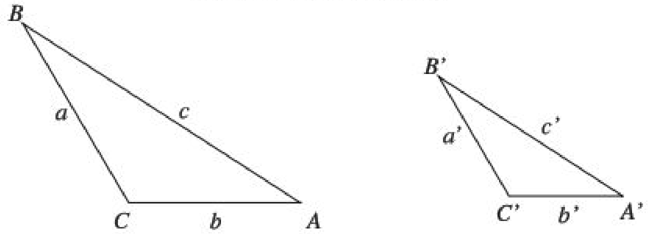
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Semejanza

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño.

Lados homólogos. Son aquellos cuyos ángulos adyacentes son iguales.

a con a', b con b', c con c'



Para indicar que 2 triángulos son semejantes se escribe $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, donde el símbolo ($\sim$) se lee: es semejante.

Propiedades fundamentales

1. Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales.

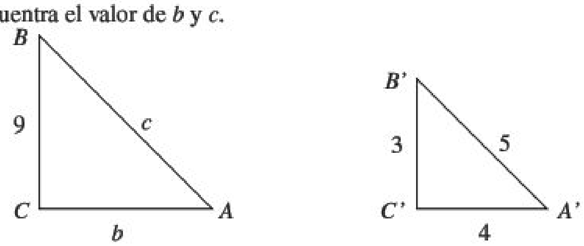
$$\angle A = \angle A', \ \angle B = \angle B' \text{ y } \angle C = \angle C'$$

2. Dos triángulos son semejantes si la razón de cada par de lados homólogos es constante, es decir, si sus lados son respectivamente proporcionales.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

EJEMPLOS

1 Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, encuentra el valor de b y c.



Solución

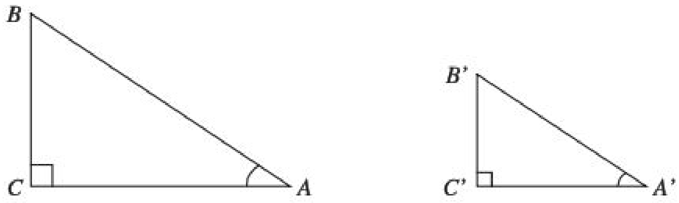
La proporcionalidad entre los lados se establece como $\frac{9}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$, de la cual se obtiene:

$$\frac{c}{5} = \frac{9}{3} \quad \rightarrow \quad c = \frac{9(5)}{3} = 15$$

$$\frac{b}{4} = \frac{9}{3} \quad \rightarrow \quad b = \frac{4(9)}{3} = 12$$

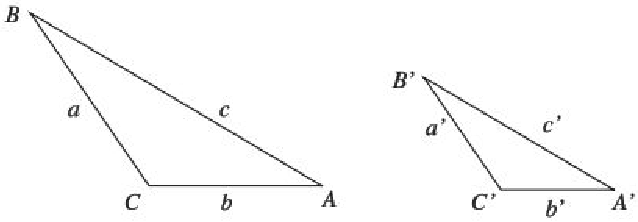
Teoremas de semejanza

Teorema 1. Dos triángulos son semejantes si tienen 2 ángulos homólogos.



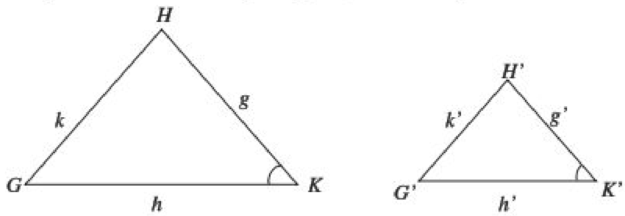
Si $\angle C = \angle C'$ y $\angle A = \angle A'$ entonces, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Teorema 2. Dos triángulos son semejantes si sus 3 lados son proporcionales.



Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ entonces, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Teorema 3. Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que los forman son proporcionales.

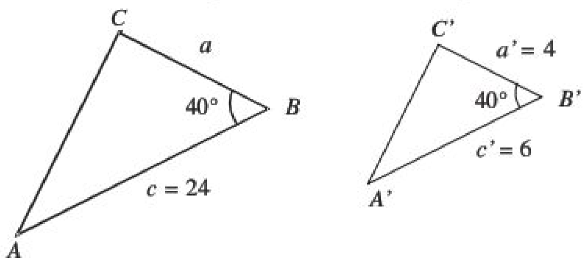


Si $\angle K = \angle K'$ y $\frac{g}{g'} = \frac{h}{h'}$, entonces $\Delta GHK \sim \Delta G'H'K'$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Los siguientes triángulos son semejantes, determina la longitud del lado a en el triángulo ΔABC



Solución

Se establece la proporción entre los lados homólogos:

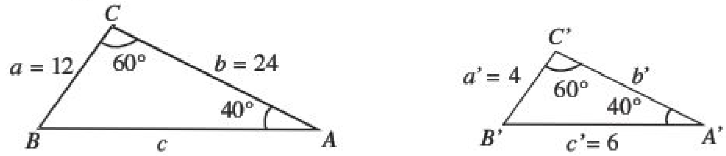
$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

Se sustituyen los valores respectivos y se despeja para a,

$$\frac{a}{4} = \frac{24}{6} \qquad \text{donde} \qquad a = \frac{4(24)}{6} = 16$$

Por tanto, el valor de $a = 16$

2 Encuentra la longitud de los lados b' y c:



Solución

En los triángulos $\angle A = \angle A'$, $\angle C = \angle C'$ entonces, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ por lo que se establece la proporcionalidad entre los lados homólogos.

$$\frac{12}{4}=\frac{24}{b'}=\frac{c}{6}$$

De esta relación se obtiene:

$$\frac{12}{4}=\frac{24}{b'} \quad \rightarrow \quad b' = \frac{(4)(24)}{12} = 8$$

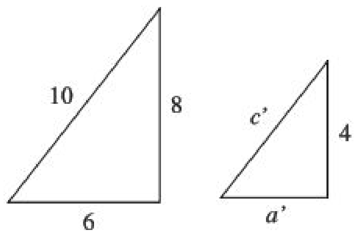
$$\frac{12}{4}=\frac{c}{6} \quad \rightarrow \quad c = \frac{(12)(6)}{4} = 18$$

Entonces se deduce que, $b' = 8$ y $c = 18$

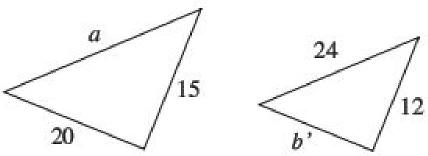
EJERCICIO 13

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan triángulos semejantes y las medidas de alguno de sus lados. Encuentra las medidas de los lados restantes y los valores de las incógnitas.

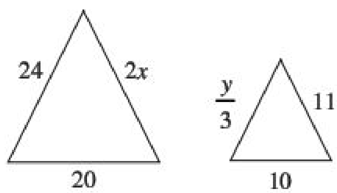
1.



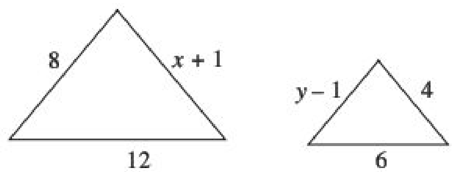
2.



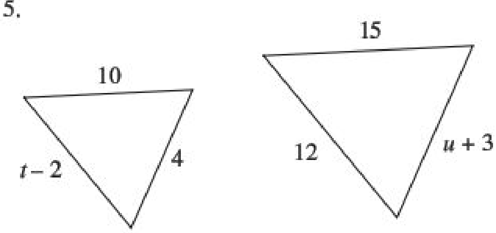
3.



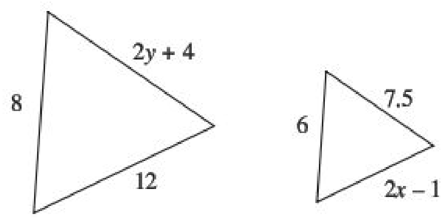
4.



5.



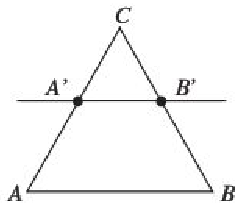
6.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema de Tales

Cuando en un triángulo se traza una recta paralela a uno de los lados, el triángulo que se forma es semejante al primero.



Si $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$, entonces

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el siguiente triángulo determina el valor de x, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Solución

Por semejanza de triángulos, la proporcionalidad se establece como:

$$\frac{12}{x+12}=\frac{14}{42}$$

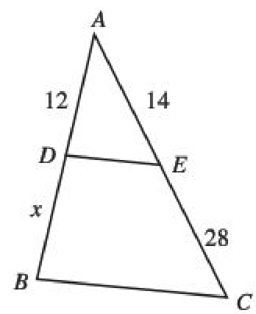
Se realiza un producto cruzado y se resuelve la ecuación para x:

$$(12)(42)=(14)(x+12)$$

$$504 = 14x + 168$$

$$504 - 168 = 14x$$

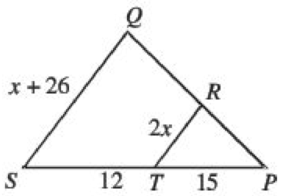
Por tanto $x = 24$



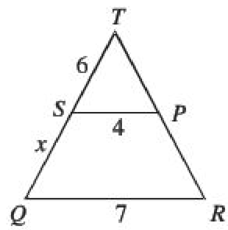
EJERCICIO 14

Calcula el valor de x en las siguientes figuras:

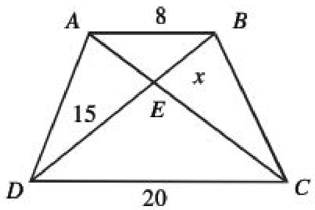
1. Si $\overline{RT} \parallel \overline{QS}$



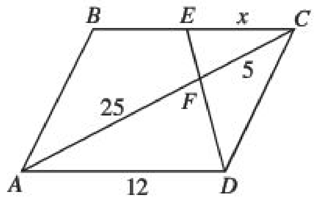
2. Si $\overline{QR} \parallel \overline{SP}$



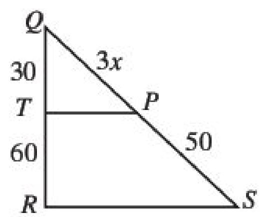
3.



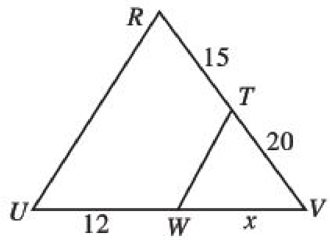
4.



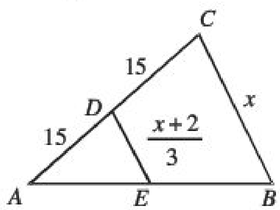
5. Si $\overline{TP} \parallel \overline{RS}$



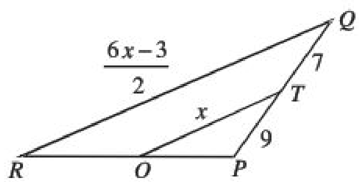
6. Si $\overline{TW} \parallel \overline{UR}$



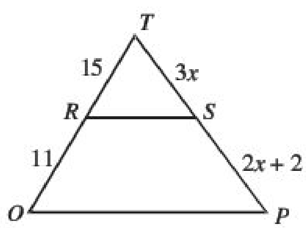
7. Si $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$



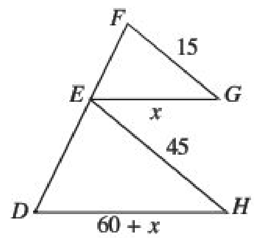
8. Si $\overline{OT} \parallel \overline{RQ}$



9. Si $\overline{RS} \parallel \overline{OP}$



10. Si $\overline{EG} \parallel \overline{DH}$



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

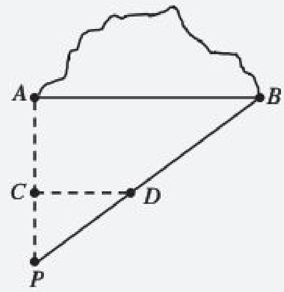
PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Para encontrar la longitud de la base de un cerro, se construyó una pareja de triángulos rectángulos semejantes como se muestra en la figura, en la cual $\overline{PA} = 180\,m$, $\overline{CD} = 150\,m$ y $\overline{PC} = 50\,m$. ¿Cuánto mide la longitud del cerro?

Solución

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}$$



Se sustituyen los valores dados,

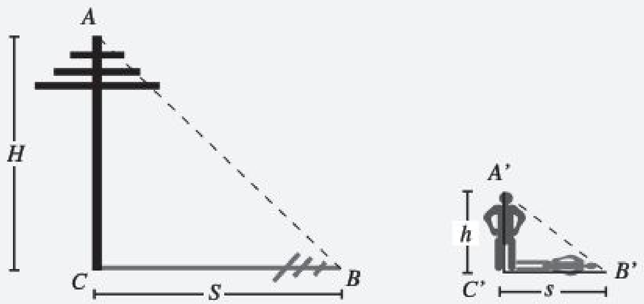
$$\frac{\overline{AB}}{150} = \frac{180}{50}$$

Donde,

$$\overline{AB} = \frac{150(180)}{50} = \frac{27000}{50} = 540$$

Por tanto, $\overline{AB} = 540\ m$

2 ¿Qué altura tiene un poste que proyecta una sombra de 16 m, al mismo tiempo que un observador de 1.80 m de estatura proyecta una sombra de 1.20 m?



Solución

De acuerdo con el problema, la relación entre los ángulos es la siguiente:

$$\angle\ CAB = \angle\ C'A'B' \text{ y } \angle\ ABC = \angle\ A'B'C'$$

Por tanto, $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A'B'C'$ y la proporcionalidad se establece como:

$$\frac{H}{h} = \frac{S}{s}$$

Donde

$$h = 1.80\,m,\ S = 16\ m \text{ y } s = 1.20\ m$$

Los cuales, al sustituirlos en la proporción, determinan que:

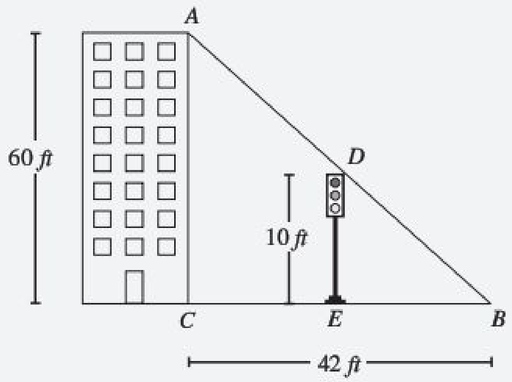
$$\frac{H}{1.80} = \frac{16}{1.20}$$

Entonces, se resuelve para H:

$$H = \frac{(16)(1.80)}{1.20} = \frac{28.8}{1.20} = 24\ m$$

Finalmente, resulta que la altura del poste es de 24 m.

3 A cierta hora del día un edificio de 60 *ft* de altura proyecta una sombra de 42 *ft*. ¿Cuál es la longitud de la sombra que proyecta un semáforo de 10 *ft* de altura a la misma hora?



Solución

De la figura,

$$\angle CAB = \angle EDB, \text{ por ser ángulos correspondientes.}$$

$$\angle ABC = \angle DBE, \text{ por ser ángulo común.}$$

Por tanto, los triángulos son semejantes:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBE$$

Y la proporcionalidad se establece como:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{EB}}$$

Donde,

$$\overline{AC} = 60\,ft,\ \overline{DE} = 10\,ft \text{ y } \overline{CB} = 42\,ft$$

Los cuales, al sustituirlos en la proporción, determinan que:

$$\frac{60}{10} = \frac{42}{\overline{EB}}$$

Y al despejar $\overline{EB}$,

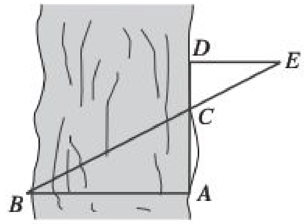
$$\overline{EB} = \frac{42(10)}{60} = 7\,ft$$

Por consiguiente, la sombra que proyecta el semáforo es de 7 *ft*.

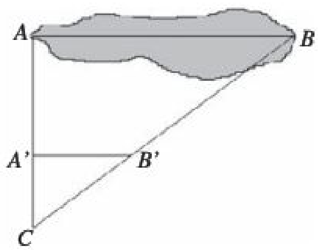
EJERCICIO 15

Resuelve los siguientes problemas:

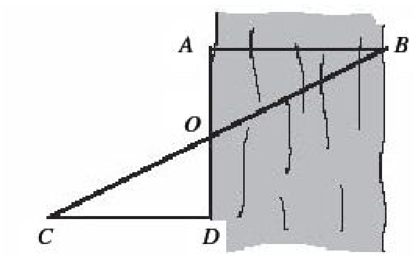
1. Para encontrar la anchura $\overline{AB}$ de un río se construyeron 2 triángulos semejantes, como se muestra en la figura. Y al medir se encontró que: $\overline{AC} = 17\ m$, $\overline{CD} = 5\ m$, $\overline{DE} = 20\ m$. ¿Cuál es la anchura del río?



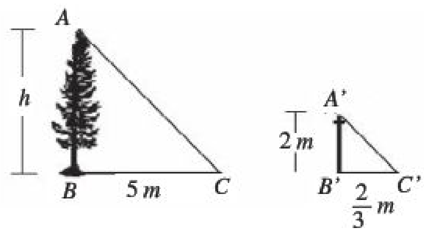
2. Para medir lo largo de un lago se construyeron los siguientes triángulos semejantes, en los cuales se tiene que: $\overline{AC} = 215\ m$, $\overline{A'C} = 50\ m$, $\overline{A'B'} = 112\ m$. ¿Cuál es la longitud del lago?



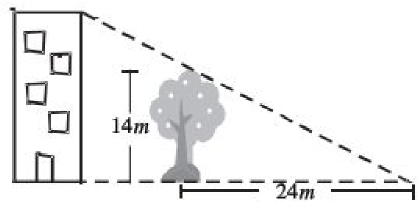
3. Para medir la anchura de un río se forman los siguientes triángulos, en los que: $\overline{AO} = 32\ m$, $\overline{CD} = 30\ m$, $\overline{OD} = 6\ m$. Encuentra $\overline{AB}$.



4. Un árbol proyecta una sombra de 5 m a la misma hora en que un poste de 2 m de altura, muy próximo al árbol, proyecta una sombra de $\frac{2}{3}\ m$. Determina la altura h del árbol, si tanto éste como el poste son perpendiculares al terreno.



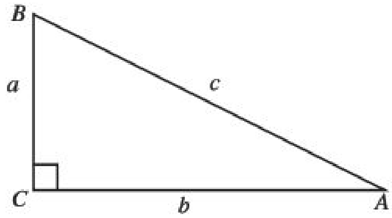
5. Un árbol de 14 m de altura próximo a una torre, proyecta una sombra de 24 m a la misma hora. Determina:
   a) La altura de la torre, si su sombra es de 48 m.
   b) La sombra que refleja la torre, si su altura es de 70 m.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

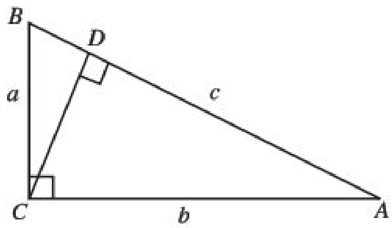


c: hipotenusa

a, b: catetos

$c^2 = a^2 + b^2$

Demostración: Se traza la altura sobre la hipotenusa:



Los triángulos $\Delta\, ABC \sim \Delta\, CBD$ por ser $\angle\, ABC = \angle\, CBD$ y $\angle CAB = \angle\, DCB$ entonces,

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{\overline{BD}} \qquad \text{donde} \qquad c \cdot \overline{BD} = a^2$$

Los triángulos $\Delta\, ABC \sim \Delta\, ACD$ por ser $\angle\, CAB = \angle\, DAC$ y $\angle\, ABC = \angle\, ACD$ entonces,

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{\overline{AD}} \qquad \text{donde} \qquad c \cdot \overline{AD} = b^2$$

Al sumar $c \cdot \overline{BD} = a^2$ y $c \cdot \overline{AD} = b^2$, se obtiene,

$$c \cdot \overline{BD} + c \cdot \overline{AD} = a^2 + b^2$$

$$c\,\left(\overline{BD} + \overline{AD}\right) = a^2 + b^2$$

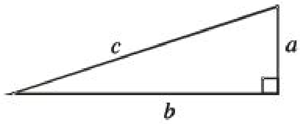
Pero $\overline{BD} + \overline{AD} = c$, por tanto:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ejemplo

Determina el valor de la hipotenusa del triángulo que se muestra, según los datos proporcionados en cada uno de los siguientes incisos:

a) $b = 12, a = 9$ *b*) $a = 3, b = 6$ *c*) $a = 3, b = 7$



Soluciones

a) $a = 12, b = 9$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (9)^2 + (12)^2$

$c^2 = 81 + 144$

$c^2 = 225$

$c = \sqrt{225} = 15$

b) $a = 3, b = 6$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (3)^2 + (6)^2$

$c^2 = 9 + 36$

$c^2 = 45$

$c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

c) $a = 3, b = 7$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (3)^2 + (7)^2$

$c^2 = 9 + 49$

$c^2 = 58$

$c = \sqrt{58}$

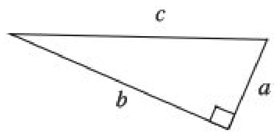
Obtención de los catetos. En todo triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual a la diferencia de los cuadrados de la hipotenusa y del otro cateto.

$$a^2 = c^2 - b^2;\; b^2 = c^2 - a^2$$

Ejemplo

Utiliza la figura para determinar el cateto que se pide en cada inciso:

a) $a = 24, c = 25$ *b*) $b = 6, c = 8$ *c*) $a = 4\sqrt{3}, c = 8$



Soluciones

a) $a = 24, c = 25$

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = (25)^2 - (24)^2$

$b^2 = 625 - 576$

$b^2 = 49$

$b = \sqrt{49} = 7$

b) $b = 6, c = 8$

$a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = (8)^2 - (6)^2$

$a^2 = 64 - 36$

$a^2 = 28$

$a = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

c) $a = 4\sqrt{3}, c = 8$

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = (8)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2$

$b^2 = 64 - 48$

$b^2 = 16$

$b = \sqrt{16} = 4$

Naturaleza del triángulo a partir del teorema de Pitágoras

Sea el triángulo ABC, cuyo lado mayor es el lado c, éste será un triángulo: rectángulo, acutángulo u obtusángulo, si al aplicar el teorema de Pitágoras se cumple que:

1. Si $c^2 = a^2 + b^2$, el triángulo es rectángulo

2. Si $c^2 \neq a^2 + b^2$, entonces $\begin{cases} c^2 < a^2 + b^2, \text{ el triángulo es acutángulo} \\ c^2 > a^2 + b^2, \text{ el triángulo es obtusángulo} \end{cases}$

EJEMPLOS

1 Sea un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades. Comprueba si es un triángulo rectángulo.

Solución

Se toma el valor mayor como la hipotenusa:

$$(5)^2 = (3)^2 + (4)^2$$
$$25 = 9 + 16$$
$$25 = 25$$

Por tanto, el triángulo es rectángulo.

2 Sea el triángulo cuyos lados miden 7, 9 y 12 unidades. Determina qué tipo de triángulo es:

Solución

Se toma el mayor de los lados como c, entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad (12)^2 = (9)^2 + (7)^2 \quad \rightarrow \quad 144 = 81 + 49$$
$$144 \neq 130$$

Dado que $144 > 130$, el triángulo es obtusángulo.

3 Determina la naturaleza de un triángulo cuyos lados miden 6, 4 y 5 unidades.

Solución

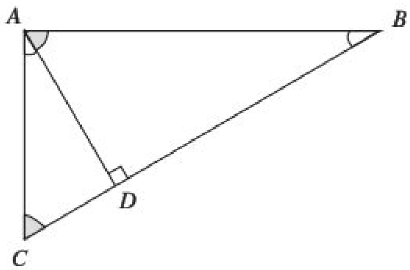
Al aplicar el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$(6)^2 = (4)^2 + (5)^2 \quad \rightarrow \quad 36 = 16 + 25 \quad \rightarrow \quad 36 \neq 41$$

Puesto que $36 < 41$, el triángulo es acutángulo.

Teoremas de semejanza en triángulos rectángulos

- **Teorema 1.** La altura trazada sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, forma dos triángulos rectángulos que son semejantes al triángulo dado, y a su vez semejantes entre ellos.

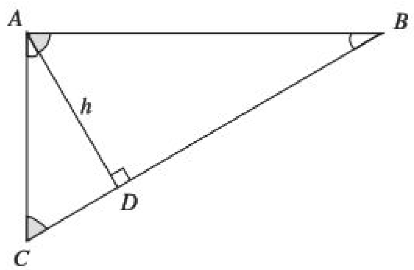


$\Delta\, ACD \sim \Delta\, BAD$

$\Delta\, CAB \sim \Delta\, CDA$

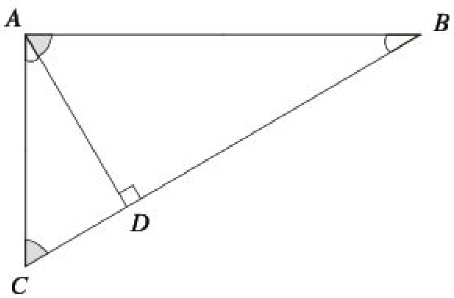
$\Delta\, CAB \sim \Delta\, ADB$

- **Teorema 2.** La altura trazada sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la media proporcional entre la medida de los segmentos de la hipotenusa.



$h^2 = \overline{CD} \cdot \overline{DB}$

- **Teorema 3.** Cualquiera de los catetos de un triángulo rectángulo es la media proporcional de la hipotenusa y la medida del segmento de la hipotenusa interceptado por la altura, y el lado que es adyacente a ese cateto.



$\overline{AC}^{\,2} = \overline{CD} \cdot \overline{CB}$

$\overline{AB}^{2} = \overline{CB} \cdot \overline{DB}$

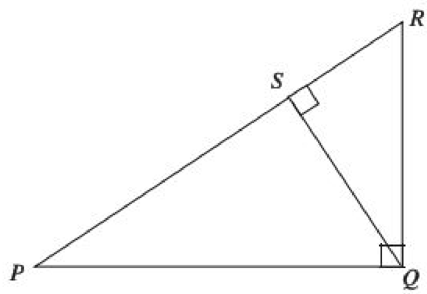
EJERCICIO 16

Si a y b son los catetos de un triángulo y c su hipotenusa, determina el lado que falta:

1. $a = 15, b = 20$
2. $a = 5, b = 4$
3. $a = 8, b = 4$
4. $a = 7, b = 7$
5. $a = 12, c = 20$
6. $b = 6, c = 8$
7. $b = 15, c = 17$
8. $a = 5\sqrt{2}, c = 10$
9. $a = 6\ m$ y $b = 3$
10. $a = 12\ m$ y $c = 13\ m$
11. $a = 14\ cm$ y $b = 15\ cm$
12. $b = 15\ dm$ y $c = 20\ dm$

Determina la naturaleza de los siguientes triángulos, cuyos lados miden:

13. 4, 5 y 7 cm
14. 5, 12 y 13 cm
15. 7, 9 y 11 cm
16. 7, 24 y 25 cm
17. 6, 8 y 10 mm
18. 1, $\sqrt{2}$ y 2 cm
19. $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ y 1 cm
20. 0.5, 0.7 y 0.8 m
21. $x, x-1$ y $\sqrt{2x^2-2x+1}$
22. En el triángulo rectángulo PQR, con Q el ángulo recto y $\overline{QS}$ como altura trazada hacia la hipotenusa:



a) Determina $\overline{QS}$ si $\overline{PS} = 12$ y $\overline{SR} = 5$

b) Encuentra $\overline{QR}$ si $\overline{PR} = 25$ y $\overline{RS} = 13$

c) Halla $\overline{QR}$ si $\overline{PS} = 6$, $\overline{PQ} = 2\sqrt{15}$ y $\overline{RS} = 4$

d) Encuentra $\overline{PQ}$ si $\overline{PS} = 21$ y $\overline{RS} = 15$

e) Determina $\overline{PQ}$ si $\overline{RS} = 6$, $\overline{RQ} = 10$ y $\overline{QS} = 8$

f) Determina $\overline{QS}$ si $\overline{PQ} = 13$ y $\overline{QR} = 7$

g) Encuentra $\overline{RS}$ si $\overline{PQ} = 17$ y $\overline{QS} = 13$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Determina la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado x cm.

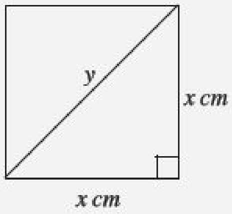
Solución

Al trazar la diagonal en un cuadrado, se forman 2 triángulos rectángulos, entonces:

$(hip)^2 = (cat)^2 + (cat)^2 \qquad y^2 = x^2 + x^2$

$y^2 = 2x^2$

$y = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$



Por tanto, la diagonal es $x\sqrt{2}$

2 Al abrir una escalera de pintor, se forma un triángulo isósceles, la distancia entre las bases es de 1 m y los lados iguales miden 1.40 m. Determina la altura de la escalera.

Solución

La altura de un triángulo isósceles divide a la base en 2 partes iguales, formándose 2 triángulos rectángulos:

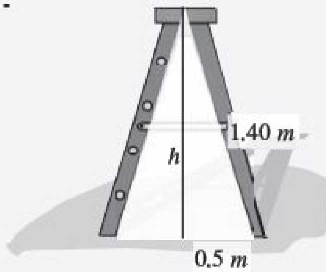
$h^2 = (1.4)^2 - (0.5)^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = 1.96 - 0.25$

$h^2 = 1.71$

$h = \sqrt{1.71}$

$h = 1.3\ m$

Por consiguiente, la altura de la escalera es de 1.3 m.



3 Un automóvil viaja a una velocidad constante de 2.5 m/s y pasa por debajo de un puente peatonal. Determina a los 12 s, la distancia entre el automóvil y el punto ubicado exactamente arriba del paso del mismo, si la altura del puente es de 6 m.

Solución

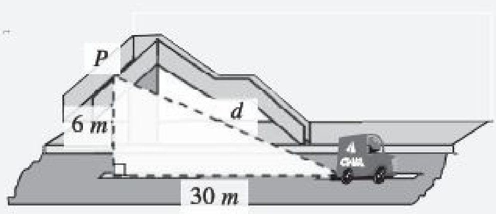
La altura del puente es de 6 m y a los 12 s el automóvil recorre 12(2.5) = 30 m, entonces:

$d^2 = (6)^2 + (30)^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = 36 + 900$

$d^2 = 936$

$d = \sqrt{936}$

$d = 30.5\ m$

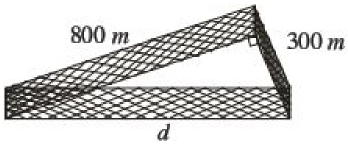


En consecuencia, la distancia es de 30.5 m.

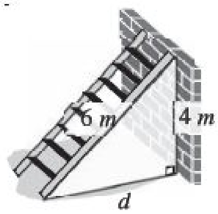
EJERCICIO 17

Resuelve los siguientes problemas:

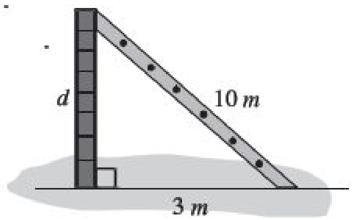
1. Se tiene un terreno en forma de triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 300 y 800 *m*. ¿Qué cantidad de malla se necesita para cercarlo?



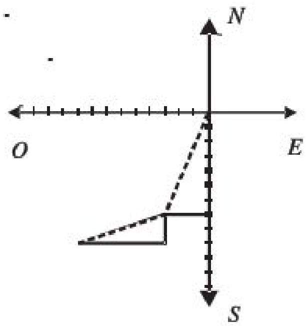
2. Con una escalera de 6 *m* se desea subir al extremo de una barda de 4 *m* de altura. ¿A qué distancia se necesita colocar la base de la escalera para que el otro extremo coincida con la punta de la torre?



3. Calcula la altura de un triángulo isósceles si su base mide 60 *cm* y cada uno de sus lados mide 50 *cm*.
4. Calcula la altura de un triángulo equilátero que de lado mide 10 *cm*.
5. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado, cuya diagonal mide 8 *m*?
6. ¿A qué altura llega una escalera de 10 *m* de largo en un muro vertical, si su pie está a 3 *m* del muro?



7. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado si su diagonal mide $5\sqrt{2}\,cm$?
8. Si el lado de un hexágono regular mide 16 *cm*, ¿cuánto mide su apotema?
9. Una persona camina 7 kilómetros hacia el sur, 3 hacia el oeste, 2 hacia el sur y 6 más hacia el oeste. ¿Cuál es la distancia entre el punto de partida y su destino?



10. La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide 10 *cm*. Encuentra la longitud de los catetos.
11. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa es igual a *m* y la mediana de uno de los ángulos agudos es igual a $\frac{m\sqrt{3}}{3}$. Determina la magnitud de los catetos.
12. En un triángulo rectángulo, *m* y *n* representan la longitud de las medianas trazadas a los catetos. Obtén la longitud de éstos y la hipotenusa en función de *m* y *n*.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 5
CUADRILÁTEROS

Pierre VARIGNON

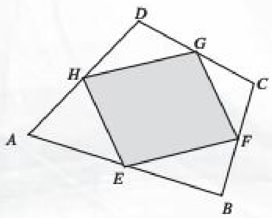
Pierre Varignon
(1654-1722)

Estaba destinado al oficio religioso, pero la impresión que le produjo la lectura de los *Elementos de Euclides* le llevó hacia las matemáticas. Se interesó por la mecánica, por el incipiente cálculo infinitesimal y por la geometría.

Teorema de Varignon

Dado un cuadrilátero cualquiera *ABCD*, el polígono que determinan los puntos medios (*E*, *F*, *G*, *H*) de sus lados es un paralelogramo, y el área de éste es la mitad de la del cuadrilátero inicial.

$$\text{Área}_{EFGH} = \frac{1}{2}\,\text{Área}_{ABCD}$$



Definición

El cuadrilátero es todo polígono de 4 lados.

Clasificación

Los cuadriláteros se dividen en:

Paralelogramo. Es el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

Cuadrado. Es el paralelogramo que tiene todos sus lados iguales y sus ángulos son rectos.

Rectángulo. Es el paralelogramo que tiene sus lados contiguos desiguales y los 4 ángulos rectos.

Rombo. Es el paralelogramo que tiene los lados iguales y ángulos contiguos desiguales.

Romboide. Es el paralelogramo que tiene los lados contiguos desiguales y ángulos oblicuos.

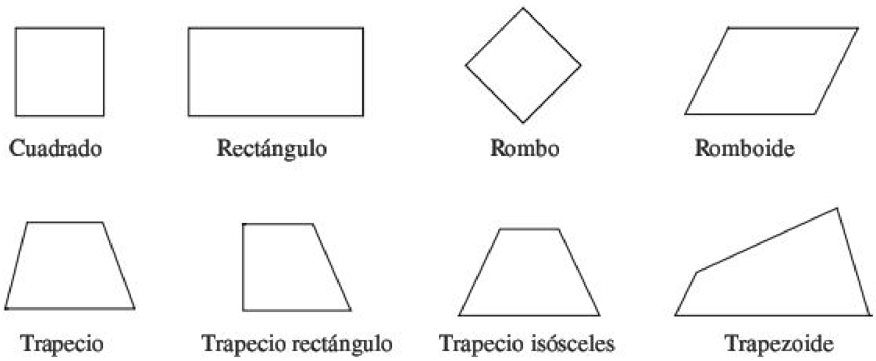
Trapecio. Es el cuadrilátero que sólo tiene 2 de sus lados paralelos.

Trapecio rectángulo. Es el que tiene 2 de sus ángulos rectos.

Trapecio isósceles. Es el que tiene 2 lados no paralelos iguales.

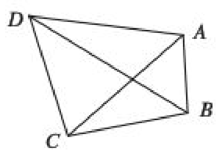
Trapecio escaleno. Es aquel que tiene sus lados no paralelos diferentes.

Trapezoide. Es el cuadrilátero que no tiene ningún lado paralelo a su opuesto.



Diagonal. Es el segmento de recta que une 2 vértices de un cuadrilátero no adyacentes.

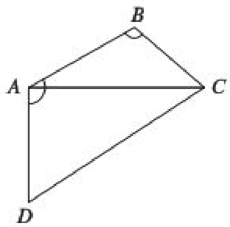
$\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *son diagonales*



Teorema

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360°.

Demostración: Dado el cuadrilátero $ABCD$, se traza una de sus diagonales:



Se observa que se forman dos triángulos $\Delta\, ABC$ y $\Delta\, ACD$.

La suma de los ángulos interiores de los triángulos es igual a 180°.

$$\angle\, BAC + \angle\, ABC + \angle\, ACB = 180°$$

$$\angle\, CAD + \angle\, ADC + \angle\, ACD = 180°$$

Al sumar ambas expresiones, se obtiene:

$$\angle\, BAC + \angle\, DAC + \angle\, ABC + \angle\, ADC + \angle\, ACB + \angle\, ACD = 360°$$

$$\text{pero } \angle\, BAC + \angle\, DAC = \angle\, BAD \text{ y } \angle\, ACB + \angle\, ACD = \angle\, BCD$$

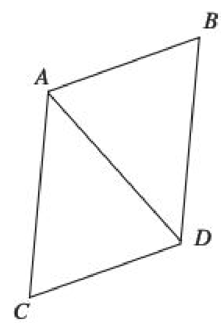
Al sustituir estas igualdades en la expresión anterior:

$$(\angle\, BAC + \angle\, DAC) + \angle\, ABC + \angle\, ADC + (\angle\, ACB + \angle\, ACD) = 360°$$

$$\angle\, BAD + \angle\, ABC + \angle\, ADC + \angle\, BCD = 360°$$

Por consiguiente, queda demostrado el teorema.

Propiedades de los paralelogramos



1. Los lados opuestos son iguales.

   $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AC} = \overline{BD}$

2. Los ángulos opuestos son iguales.

   $\angle\, A = \angle\, D$ y $\angle\, B = \angle\, C$

3. Los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios.

   $\angle\, A + \angle\, B = 180°$, $\angle\, C + \angle\, D = 180°$

   $\angle\, A + \angle\, C = 180°$, $\angle\, B + \angle\, D = 180°$

4. Las diagonales se bisecan mutuamente.

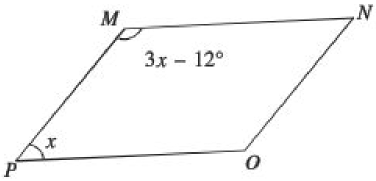
5. La diagonal lo divide en 2 triángulos congruentes.

   $\Delta\, ABD \cong \Delta\, CDA$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los ángulos interiores del siguiente paralelogramo:



Solución

En todo paralelogramo, los ángulos adyacentes son suplementarios, entonces:

$\angle P + \angle M = 180° \quad \rightarrow \quad x + 3x - 12° = 180° \quad \rightarrow \quad 4x = 180° + 12°$

$4x = 192°$

$x = \dfrac{192°}{4} = 48°$

Luego, los ángulos opuestos son iguales, por tanto:

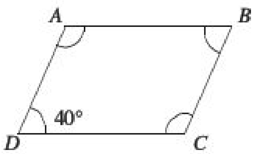
$\angle N = \angle P = 48°$

$\angle O = \angle M = 3(48°) - 12° = 144° - 12° = 132°$

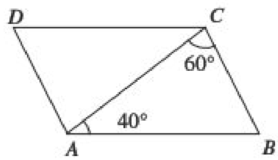
EJERCICIO 18

Encuentra los datos que se piden en cada uno de los siguientes paralelogramos:

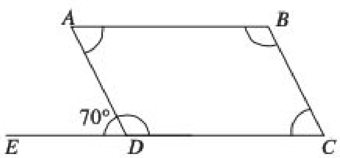
1. Determina $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$



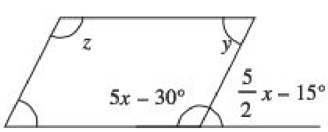
2. Encuentra $\angle DCA$, $\angle CAD$, $\angle DAB$, $\angle DCB$, $\angle D$ y $\angle B$



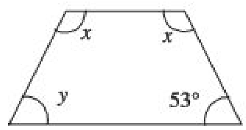
3. Encuentra $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle ADC$



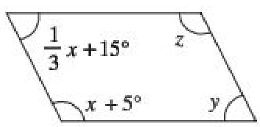
4. Determina el valor x, $\angle y$ y $\angle z$



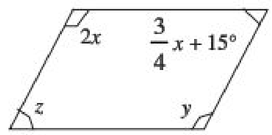
5. Halla el valor de x y y



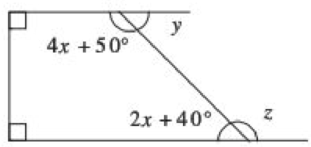
6. Calcula la medida de los ángulos y y z



7. Precisa el valor de x y la medida de los ángulos y y z



8. Halla el valor de x y la medida de los ángulos y y z



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

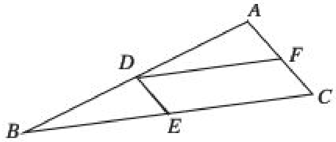
Demostraciones

Para que un cuadrilátero sea un paralelogramo se debe probar que 2 de sus lados son iguales y paralelos.

EJEMPLOS

Ejemplos

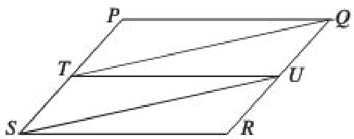
1 Sea el triángulo ABC cuyos puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son D, E y F respectivamente, demostrar que $DFCE$ es un paralelogramo.



Solución

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{DE}=\overline{FC}$, $\overline{DE}\parallel\overline{FC}$	1. En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo e igual a la mitad del tercer lado. $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}(\overline{AF}+\overline{FC})=\frac{1}{2}(2\overline{FC})=\overline{FC}$
2. $\overline{DF}=\overline{EC}$, $\overline{DF}\parallel\overline{EC}$	2. En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo e igual a la mitad del tercer lado. $\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}(\overline{BE}+\overline{EC})=\frac{1}{2}(2\overline{EC})=\overline{EC}$
3. $DFCE$ es paralelogramo	3. Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos, es un paralelogramo.

2 Sea $PQRS$ los vértices de un paralelogramo, T el punto medio de $\overline{PS}$ y U el punto medio de $\overline{RQ}$, demuestra que $TQUS$ es un paralelogramo.



Solución

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{PT}=\overline{TS}$	1. T es el punto medio del segmento $\overline{PS}$
2. $\overline{QU}=\overline{UR}$	2. U es el punto medio del segmento $\overline{QR}$
3. $\overline{PS}=\overline{QR}$ y $\overline{PS}\parallel\overline{QR}$	3. En un paralelogramo los lados opuestos son iguales y paralelos.
4. $\overline{TS}=\overline{QU}$	4. De la afirmación 3, se tiene que $\overline{PS}=\overline{QR}$, entonces: $\overline{PT}+\overline{TS}=\overline{QU}+\overline{UR}\rightarrow 2\overline{TS}=2\overline{QU}\rightarrow\overline{TS}=\overline{QU}$
5. $\overline{TS}\parallel\overline{QU}$	5. Son segmentos de $\overline{PS}$ y $\overline{QR}$, los que a su vez son paralelos.
6. $TQUS$ es paralelogramo	6. Dos lados opuestos $\overline{TS}$ y $\overline{QU}$ son paralelos e iguales.

EJERCICIO 19

Realiza las siguientes demostraciones:

1. Sea $ABCD$ los vértices de un paralelogramo, P y Q dos puntos sobre la diagonal $\overline{AC}$, de modo que $\overline{PA}$ es congruente con $\overline{QC}$, demuestra que $PBQD$ es paralelogramo.
2. Sea $ABCD$ los vértices de un paralelogramo, E y F son puntos sobre la diagonal $\overline{AC}$, de tal manera que $\overline{DF}$ biseca al $\angle ADC$ y $\overline{BE}$ biseca al $\angle ABC$, demuestra que $DEBF$ es paralelogramo.
3. Sea $RSTU$ un paralelogramo, V y W puntos sobre la diagonal $\overline{TR}$ de modo que $\overline{UW}$ y $\overline{SV}$ son perpendiculares a $\overline{TR}$, demuestra que $UWSV$ es un paralelogramo.
4. Sea $ABCD$ los vértices de un paralelogramo, Q, R, S, T, puntos sobre los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ respectivamente, de tal manera que $\overline{AQ} \cong \overline{CS}$ y $\overline{BR} \cong \overline{TD}$, demuestra que $QRST$ es paralelogramo.
5. Sea $PQRS$ los vértices de un trapecio, $\overline{SR}$ es paralelo a $\overline{PQ}$ y $\overline{PS} \cong \overline{SR}$, demuestra que $\overline{RP}$ biseca $\angle P$.
6. Demuestra que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo, es igual al doble producto de la suma del cuadrado de sus lados adyacentes.

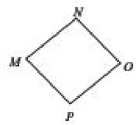
Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones.

Paralelogramos especiales

Se les denomina así al rectángulo, al rombo y al cuadrado, los cuales pertenecen al conjunto de los paralelogramos y se definen de la siguiente manera:

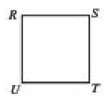
Rectángulo. Es el paralelogramo que tiene sus ángulos iguales, también se le conoce como paralelogramo equiángulo.

Rombo. Paralelogramo que tiene sus lados iguales, también recibe el nombre de paralelogramo equilátero.



$$\overline{MN} = \overline{NO} = \overline{OP} = \overline{PM}$$

Cuadrado. Se define como el paralelogramo equiángulo y equilátero, esto es, un cuadrado es un rectángulo y a la vez un rombo.



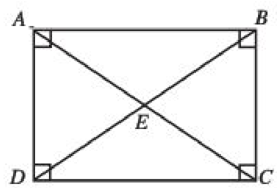
$$\angle R = \angle S = \angle T = \angle U = 90°;\ \overline{RS} = \overline{ST} = \overline{TU} = \overline{UR}$$

Propiedades

1. Los rectángulos tienen sus ángulos rectos.

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$$

2. Las diagonales de un rectángulo son iguales.



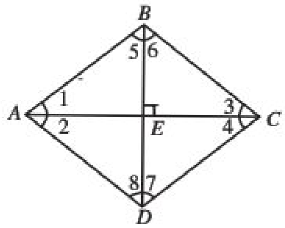
$$\overline{AC} = \overline{BD}$$

3. Las diagonales de un rectángulo forman 2 pares de triángulos congruentes.

$$\Delta AED \cong \Delta BEC;\ \Delta DEC \cong \Delta AEB$$

4. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y se bisecan mutuamente, esto es, una diagonal es mediatriz de la otra.

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$, $\overline{AE} = \overline{EC}$, $\overline{BE} = \overline{ED}$



5. Las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos formados por los vértices que unen.

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$ y $\angle 7 = \angle 8$

6. Las diagonales de un rombo forman 4 triángulos congruentes.

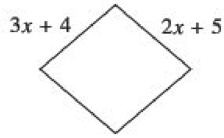
$\Delta AED \cong \Delta BEC \cong \Delta AEB \cong \Delta CED$

Los cuadrados por ser rectángulos y rombos a la vez, cumplen con las propiedades anteriores.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la longitud de los lados del siguiente rombo:



Solución

En un rombo, los lados son iguales, entonces:

$$3x + 4 = 2x + 5 \quad \rightarrow \quad 3x - 2x = 5 - 4 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

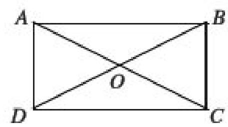
Luego, sustituyendo $x = 1$ en cualquiera de los lados, se obtiene:

$$3x + 4 = 3(1) + 4 = 7$$

Por tanto, los lados del rombo miden $7u$.

2 Encuentra la longitud del lado $\overline{AD}$ en el siguiente rectángulo, si $\overline{AC} = 13$, $\overline{DB} = 3x + 4$ y $\overline{AD} = x + 2$

Solución



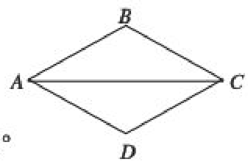
En todo rectángulo, las diagonales son iguales, esto es:

$$\overline{AC} = \overline{DB} \quad \rightarrow \quad 13 = 3x + 4 \quad \rightarrow \quad 9 = 3x \quad \rightarrow \quad x = 3$$

Luego, $\overline{AD} = x + 2$, por tanto, $\overline{AD} = 3 + 2 = 5u$.

3 En el rombo $ABCD$, determina el valor de $\angle ABC$ si $\angle BAC = 6x$ y $\angle DAC = 4x + 10°$

Solución



En el rombo, la diagonal $\overline{AC}$ biseca al ángulo BAD, esto es:

$$\angle BAC = \angle DAC \quad \rightarrow \quad 6x = 4x + 10° \quad \rightarrow \quad 2x = 10° \quad \rightarrow \quad x = 5°$$

Por otro lado, en un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales y como $\overline{AC}$ es diagonal, se deduce que $\angle BAC = \angle BCA = 30°$, luego, en el triángulo BAC:

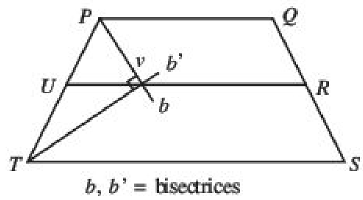
$$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180° \quad \rightarrow \quad \angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle BCA)$$
$$\angle ABC = 180° - 60°$$
$$\angle ABC = 120°$$

Por tanto, el ángulo ABC mide 120°.

Propiedades de los trapecios

1. En un trapecio la longitud de la línea media (paralela media) es igual a la semisuma de las bases del trapecio.

$$\overline{UR}=\frac{\overline{PQ}+\overline{TS}}{2}$$



2. Las bisectrices de los ángulos adyacentes al lado lateral del trapecio son perpendiculares y el punto de intersección se encuentra en su línea media.

$$\overline{PV}\perp\overline{TV}$$

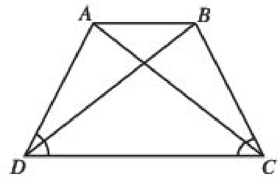
Propiedades de los trapecios isósceles

1. Los ángulos de la base son iguales.

$$\angle D=\angle C$$

2. Sus diagonales son iguales.

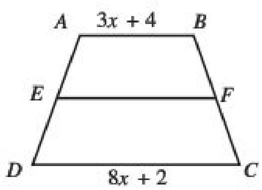
$$\overline{DB}=\overline{AC}$$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la longitud de las bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ del siguiente trapecio si E y F son puntos medios y $\overline{EF}$ mide 14 cm.



Solución

En todo trapecio la longitud de la paralela media es igual a la semisuma de las bases:

$$\overline{EF}=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2}$$

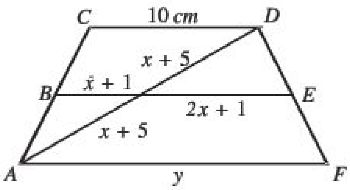
Al sustituir, se tiene:

$$14=\frac{(3x+4)+(8x+2)}{2}\quad\rightarrow\quad 28=11x+6\quad\rightarrow\quad 22=11x\quad\rightarrow\quad x=2$$

Por consiguiente, las longitudes de las bases son:

$$\overline{AB}=3x+4=3(2)+4=10\qquad;\qquad\overline{DC}=8x+2=8(2)+2=18$$

2 Determina la longitud de la diagonal $\overline{AD}$ en el siguiente trapecio, si $\overline{CD} \parallel \overline{AF}$, B y E son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ respectivamente.



Solución

De la figura se tiene que $\overline{BE} = \dfrac{\overline{CD} + \overline{AF}}{2}$, entonces:

$$x + 1 + 2x + 1 = \frac{10 + y}{2} \quad \rightarrow \quad 2(3x + 2) = 10 + y \quad \rightarrow \quad y = 6x - 6$$

En el triángulo ADF, por proporcionalidad, se establece que:

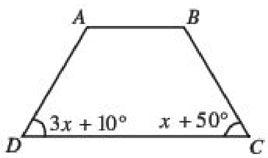
$$\frac{2x+1}{y} = \frac{x+5}{2x+10} \quad \rightarrow \quad \frac{2x+1}{y} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 4x + 2 = y$$

Se sustituye $y = 6x - 6$:

$$4x + 2 = 6x - 6 \quad \rightarrow \quad 2x = 8 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

Por tanto, $\overline{AD} = 2x + 10 = 2(4) + 10 = 8 + 10 = 18\ cm$

3 Determina el valor de los ángulos de la base del siguiente trapecio isósceles:



Solución

Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales:

$$3x + 10° = x + 50° \quad \rightarrow \quad 3x - x = 50° - 10° \quad \rightarrow \quad 2x = 40°$$

$$x = 20°$$

En consecuencia, los ángulos de la base miden:

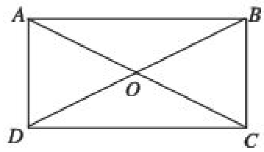
$$3(20°) + 10° = 60° + 10° = 70°$$

EJERCICIO 20

Resuelve los siguientes problemas:

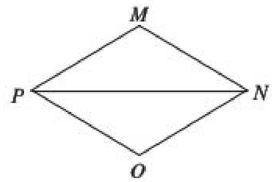
1. Encuentra el valor de x en el rectángulo $ABCD$, si $\overline{AC} = 24\ cm$ y $\overline{BD} = 5x + 4$

2. Determina la longitud de los lados del rectángulo $ABCD$, si $\overline{AO} = 2\sqrt{5}$ y $\overline{AB} = 2\overline{BC}$

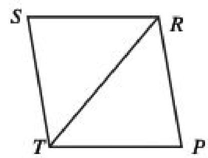


3. En el rombo $MNOP$, determina el valor de los lados si $\overline{MN} = 6x + 5$ y $\overline{MP} = 7x - 1$

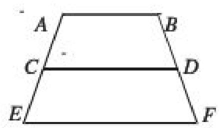
4. Determina el ángulo NPO, si $\angle\ PON = 132°$ y $\overline{NP}$ es bisectriz del ángulo P y N



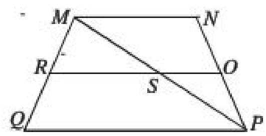
5. Halla el valor de x y y en el rombo $PRST$, si $\angle\ TRP = 2x + 10°$, $\angle\ RTS = x + 30°$ y $\angle\ TSR = y + 12°$



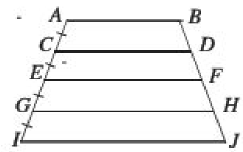
6. En la figura, C y D son puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$. Encuentra el valor de $\overline{AB}$, si $\overline{AB} = x + 1$, $\overline{CD} = x + 2$ y $\overline{EF} = 13\ cm$



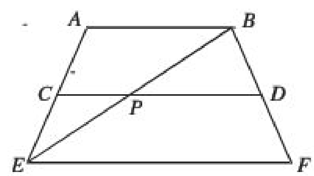
7. En la figura, R y O son puntos medios de $\overline{MQ}$ y $\overline{NP}$. Determina la longitud de $\overline{MN}$, si $\overline{OS} = 3x + 1$, $\overline{RS} = 14$ y $\overline{QP} = 9x + 1$



8. En la figura, los lados $\overline{AI}$ y $\overline{BJ}$ están divididos en 4 partes iguales. Encuentra la longitud de $\overline{AB}$ e $\overline{IJ}$, si $\overline{CD} = \dfrac{3a+b}{4}$ y $\overline{EF} = \dfrac{a+b}{2}$



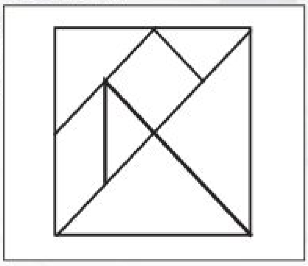
9. En la figura, C y D son puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$. Determina la longitud de $\overline{AE}$, si $\overline{AB} = x + 1$, $\overline{CP} = y$, $\overline{PD} = 2y + 2$, $\overline{EF} = 11$, $\overline{AC} = \overline{CE} = x$



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 6
POLÍGONOS

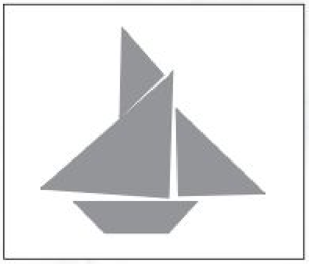
Reseña HISTÓRICA



Una de las aplicaciones de los polígonos es el antiguo juego llamado Tangram chino "tabla de la sabiduría", que se conforma de 7 piezas llamadas Tans y son:

- Cinco triángulos de diversos tamaños
- Un cuadrado
- Un paralelogramo romboide

Con ellas se pueden formar figuras cerradas como:



La palabra polígono procede del griego *poly*, muchos, y *gwnos*, ángulos.

Cada polígono recibe un nombre de acuerdo al número de lados que lo conforman; para saber cómo se llama un polígono de menos de cien lados se realiza la lectura del número de lados de acuerdo con la siguiente tabla.

Decenas		y	Unidades		Terminación
20	*Icosa-*	*-kai-*	1	*-Hena-*	*-gono*
30	*Triaconta-*		2	*-Di-*	
40	*Tetraconta-*		3	*-Tri-*	
50	*Pentaconta-*		4	*-Tetra-*	
60	*Hexaconta-*		5	*-Penta-*	
70	*Heptaconta-*		6	*-Hexa-*	
80	*Octaconta-*		7	*-Hepta-*	
90	*Eneaconta-*		8	*-Octa-*	
100	*Hecta-*		9	*-Enea-*	

Se cuenta el número de lados que tiene el polígono y se pone el prefijo conveniente, como en el siguiente ejemplo, y se agrega la terminación "gono".

El polígono de 78 lados recibe el nombre de:

"Heptacontakaioctágono"

Definición

Se llama polígono a aquella figura plana cerrada, delimitada por segmentos de recta. Se clasifican de acuerdo con la medida de sus lados o sus ángulos.

Clasificación

Los polígonos se clasifican de acuerdo con sus lados o la magnitud de sus ángulos interiores.

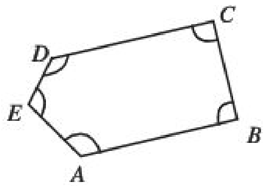
Por sus lados

Regulares. Tienen todos sus lados iguales.

Irregulares. Tienen la medida de sus lados diferentes.

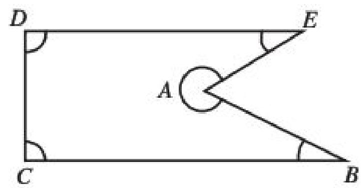
Por sus ángulos

Convexo. Los ángulos interiores son todos menores que 180°.



Todos los ángulos son menores que 180°

Cóncavo. Uno de sus ángulos interiores es mayor que 180°.



$\angle A > 180°$

- **Por su número de lados.** Los polígonos reciben un nombre según su número de lados, como se muestra a continuación:

Número de lados	Nombre	Número de lados	Nombre
3	Triángulo	12	Dodecágono
4	Cuadrilátero	13	Tridecágono
5	Pentágono	14	Tetradecágono
6	Hexágono	15	Pentadecágono
7	Heptágono	16	Hexadecágono
8	Octágono	17	Heptadecágono
9	Nonágono	18	Octadecágono
10	Decágono	19	Nonadecágono
11	Undecágono	20	Icoságono

Elementos

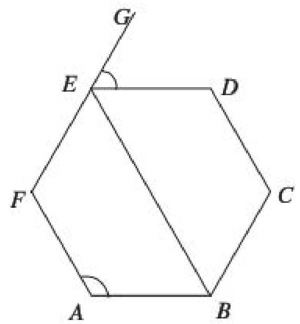
Todo polígono está formado por los siguientes elementos:

Vértice. Es el punto donde concurren 2 lados.

Ángulo interior. Es el que se forma con 2 lados adyacentes de un polígono.

Ángulo exterior. Aquel que se forma entre la prolongación de uno de los lados y su lado adyacente.

Diagonal. Es el segmento de recta que une 2 vértices no adyacentes.



Elementos:

A: vértice

$\angle BAF$: ángulo interior

$\angle DEG$: ángulo exterior

$\overline{EB}$: diagonal

Un polígono tiene el mismo número de lados que de ángulos interiores, así como exteriores.

Número de diagonales

El número de diagonales en un polígono se obtendrá en función del número de lados.

Número de diagonales trazadas desde un mismo vértice

En un polígono de n lados se pueden trazar $(n-3)$ diagonales desde un solo vértice, entonces la fórmula es:

$$d = n - 3$$

Donde:

d = diagonales trazadas desde un solo vértice.

n = número de lados.

Número de diagonales totales

El número total de diagonales que se pueden trazar desde todos los vértices está dado por la fórmula:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Donde:

D = diagonales totales del polígono.

n = número de lados.

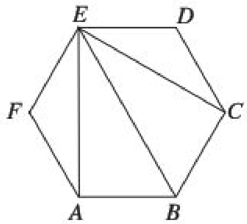
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el número de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice en un hexágono.

Solución

En un hexágono $n = 6$, al sustituir en la fórmula se obtiene:



Fórmula

$$d = n - 3$$

Sustitución

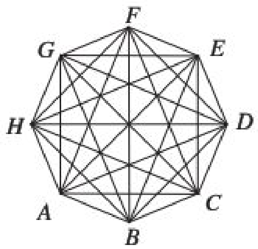
$$d = 6 - 3 = 3$$

Por consiguiente, se pueden trazar 3 diagonales desde un solo vértice.

2 Calcula el número de diagonales totales que se pueden trazar en un octágono.

Solución

En un octágono $n = 8$, por lo que al sustituir en la fórmula se obtiene:



$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

donde

$$D = \frac{8(8-3)}{2} = \frac{8(5)}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Por tanto, en un octágono se pueden trazar 20 diagonales en total.

3 ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar en total 65 diagonales?

Solución

De acuerdo con el problema, $D = 65$; entonces, al sustituir en la fórmula y resolver la ecuación, se determina que:

$$D = \frac{n(n-3)}{2} \quad \rightarrow \quad 65 = \frac{n(n-3)}{2} \quad \rightarrow \quad 130 = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 130 = 0$$

$$(n-13)(n+10) = 0$$

$$n - 13 = 0; \qquad n + 10 = 0$$

$$n = 13; \qquad n = -10$$

En consecuencia, el polígono es de 13 lados, esto es, un tridecágono.

EJERCICIO 21

Resuelve los siguientes problemas:

1. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un solo vértice en un undecágono?
2. Determina el polígono en el que se pueden trazar 17 diagonales desde un solo vértice.
3. Calcula el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice en un decágono.
4. Determina cuál es el polígono en el que se pueden trazar 9 diagonales desde un vértice.
5. ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 6 diagonales desde un vértice?
6. Calcula el número total de diagonales que se pueden trazar en cada uno de los siguientes polígonos:

   a) Icoságono *d*) Hexágono *g*) Hexadecágono
   b) Dodecágono *e*) Pentadecágono *h*) Octadecágono
   c) Nonágono *f*) Heptágono *i*) Undecágono

7. ¿En qué polígono se pueden trazar 14 diagonales en total?
8. ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar en total 104 diagonales?
9. Determina el polígono en el cual se pueden trazar 119 diagonales en total.
10. Precisa en qué polígono se pueden trazar en total 152 diagonales.
11. ¿Cuál es el polígono cuyo número de diagonales en total es el doble que su número de lados?
12. ¿En qué polígono el número de lados es la cuarta parte de su número de diagonales en total?
13. Determina el polígono en el cual el número de lados equivale al número de diagonales en total.
14. Precisa el polígono cuyo número de lados es $\frac{1}{5}$ del número de diagonales en total.
15. Determina el polígono en que el número de diagonales en total son los $\frac{9}{2}$ del número de lados.
16. Encuentra el polígono cuyo número de diagonales en total, equivale al número de lados del polígono en el que se pueden trazar 170 diagonales.
17. ¿En cuál polígono el número de diagonales trazadas desde un vértice es $\frac{1}{10}$ del número de diagonales en total?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ángulos de un polígono

La magnitud de los diferentes ángulos de un polígono se obtiene con las fórmulas siguientes:

Suma de ángulos interiores de cualquier polígono

$$S_i = 180° (n - 2)$$

Ángulo interior de un polígono regular

$$i = \frac{180°(n-2)}{n}$$

Suma de ángulos exteriores de cualquier polígono

$$S_e = 360°$$

Ángulo exterior de un polígono regular

$$e = \frac{360°}{n}$$

Donde n = número de lados.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Cuatro ángulos interiores de un polígono de 5 lados miden respectivamente: 120°, 90°, 75° y 135°. ¿Cuánto mide el quinto ángulo?

Solución

En un pentágono $n = 5$, entonces la suma de sus ángulos interiores es:

$$S_i = 180°\,(n - 2) \quad \rightarrow \quad S_i = 180°\,(5 - 2) = 180°\,(3) = 540°$$

Luego, el quinto ángulo se obtiene así:

$$540° - (120° + 90° + 75° + 135°) = 540° - 420° = 120°$$

Por tanto, el quinto ángulo mide 120°.

2 ¿Cuál es el polígono regular cuyos ángulos interiores suman 1 440°?

Solución

De acuerdo con el problema $S_i = 1\,440°$, entonces:

$S_i = 180°(n - 2)$ donde

$$180°(n - 2) = 1\,440°$$

$$n - 2 = \frac{1440°}{180°}$$

$$n = 8 + 2 = 10$$

Por consiguiente, el polígono es un decágono.

3 ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyo ángulo interior es de 120°?

Solución

En este caso $i = 120°$, al sustituir en la fórmula y resolver la ecuación, se obtiene:

$$i = \frac{180°(n-2)}{n} \quad \rightarrow \quad 120° = \frac{180°(n-2)}{n} \quad \rightarrow \quad 120°\,n = 180°\,n - 360$$

$$360° = 180°\,n - 120°\,n$$

$$360° = 60°\,n$$

$$6 = n$$

Finalmente, resulta que el polígono es un hexágono.

4 ¿En cuál polígono regular el ángulo exterior mide 20°?

Solución

En este caso $e = 20°$, al sustituir en la fórmula y resolver la ecuación, resulta que:

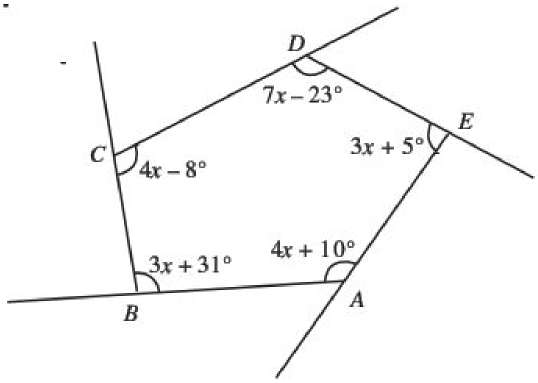
$$e = \frac{360°}{n} \quad \rightarrow \quad 20° = \frac{360°}{n} \quad \rightarrow \quad 20°\, n = 360°$$

$$n = \frac{360°}{20°}$$

$$n = 18$$

Entonces, el polígono del que se trata es un octadecágono.

5 Determina los ángulos interiores del siguiente polígono:



Solución

En un pentágono la suma de los ángulos interiores es igual a 540°, entonces se calcula el valor de x para encontrar los ángulos:

$$(3x + 31°) + (4x - 8°) + (7x - 23°) + (3x + 5°) + (4x + 10°) = 540°$$
$$21x + 15° = 540°$$
$$21x = 525°$$
$$x = \frac{525°}{21} = 25°$$

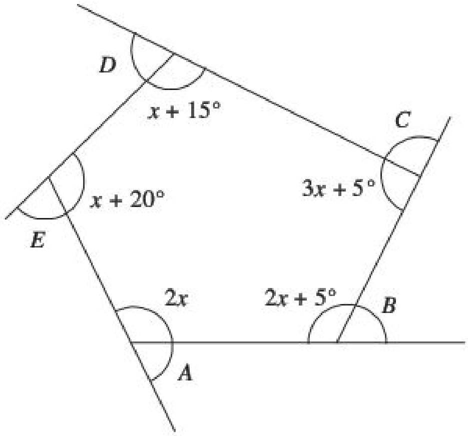
En consecuencia, los valores de los ángulos son:

$$\angle A = 4x + 10° = 4(25) + 10 = 110°$$
$$\angle B = 3x + 31° = 3(25) + 31 = 106°$$
$$\angle C = 4x - 8° = 4(25) - 8 = 92°$$
$$\angle D = 7x - 23° = 7(25) - 23 = 152°$$
$$\angle E = 3x + 5° = 3(25) + 5 = 80°$$

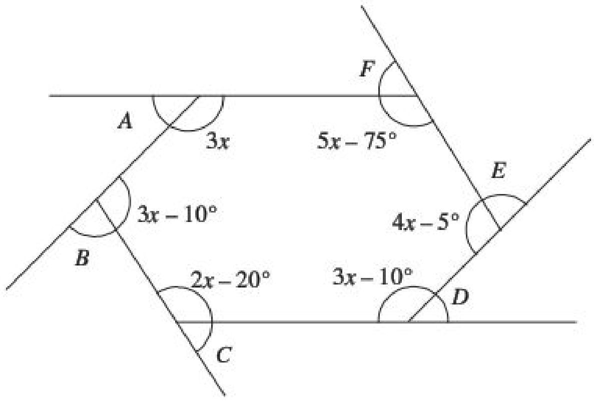
EJERCICIO 22

1. Calcula la medida de un ángulo interior de los siguientes polígonos:
   a) Hexágono
   b) Octágono
   c) Dodecágono
   d) Polígono de 20 lados
   e) Polígono de 18 lados
   f) Polígono de 42 lados
2. Calcula la suma de los ángulos interiores de los siguientes polígonos:
   a) Un pentágono
   b) Un decágono
   c) Un pentadecágono
   d) Un octágono
   e) Un tridecágono
   f) Un polígono de 37 lados
3. ¿Cuál es el polígono cuya suma de sus ángulos interiores es 1 260°?
4. Precisa en cuál polígono el total de sus ángulos interiores suma 900°.
5. Determina en cuál polígono la suma de sus ángulos interiores es 2 520°.
6. ¿En cuál polígono el total de sus ángulos interiores suma 1 620°?
7. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyos ángulos interiores suman 720°?
8. Determina el polígono regular cuyo ángulo interior mide 157.5°.
9. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyo ángulo interior es de 140°?
10. Determina en cuál polígono regular el ángulo exterior mide $\frac{\pi}{6}$ *rad*.
11. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular con un ángulo interior de 135°?
12. Determina en cuál polígono regular el ángulo interior mide 60°.
13. Precisa en cuál polígono regular el ángulo exterior es de 60°.
14. Determina el polígono cuyo ángulo interior equivale a $\frac{13}{2}$ de su ángulo exterior.
15. ¿En cuál polígono el ángulo exterior es $\frac{2}{7}$ de su ángulo interior?
16. Determina el polígono en el cual la suma de ángulos interiores equivale a $\frac{15}{2}$ de su ángulo exterior.
17. Calcula el valor de los ángulos interiores de un pentágono si su magnitud es respectivamente: x, $\frac{12}{5}x$, $2.4x$, $2x$ y $2.2x$.
18. Calcula el valor de cada uno de los ángulos de un pentágono si valen, respectivamente: x, $x - 10°$, $x + 5°$, $x + 25°$ y $x - 30°$.
19. Calcula el valor de los ángulos interiores de un heptágono cuyos valores son: x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $7x$ y $8x$.

20. Encuentra los ángulos exteriores del siguiente polígono:



21. Determina los ángulos exteriores del siguiente polígono:



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 7

TRANSFORMACIONES

Diferentes usos DE LA ESCALA

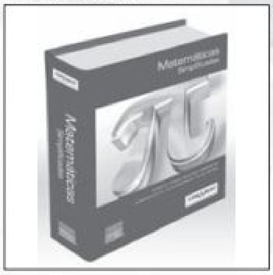


Imagen del libro matemáticas simplificadas en la escala 1:5

Un ejemplo del uso de la escala son las fotografías, en las que podemos reconocer personas, objetos y lugares, ya que guardan semejanza con los reales. Hay fotografías que agrandan miles o millones de veces seres u objetos del mundo real gracias al uso de la tecnología, mientras que en otras, se ven reducidas en varias decenas de veces, la realidad representada.

Los planos de casas, muebles, aparatos u objetos en general también se elaboran a escala, y de su lectura podemos especificar las dimensiones reales que éstos poseen y captar sus formas.

Otro uso importante de las escalas se encuentra en la elaboración de mapas, el cual es la representación convencional de la configuración superficial de la tierra, con una relación de similitud proporcionada, a la que se llama escala.

La tecnología nos auxilia con algunos instrumentos para poder llevar a cabo estas representaciones y que en nuestra vida cotidiana los hemos utilizado seguramente más de una docena de veces; ejemplo de ello son: la cámara digital, la fotocopiadora, la televisión, entre otros.

Escala

Es la razón que existe entre dos cantidades o magnitudes. Las escalas pueden ser numéricas, analíticas y gráficas.

Las escalas numéricas se definen como la razón entre la magnitud dibujada y la longitud real.

$$\frac{LD}{LR} \text{ o } LD{:}LR$$

Las escalas numéricas pueden ser de ampliación o de reducción.

Ejemplos

Escalas de reducción 1:10, 1:100, 1:1000 ...

Escalas de ampliación 10:1, 100:1, 1000:1 ...

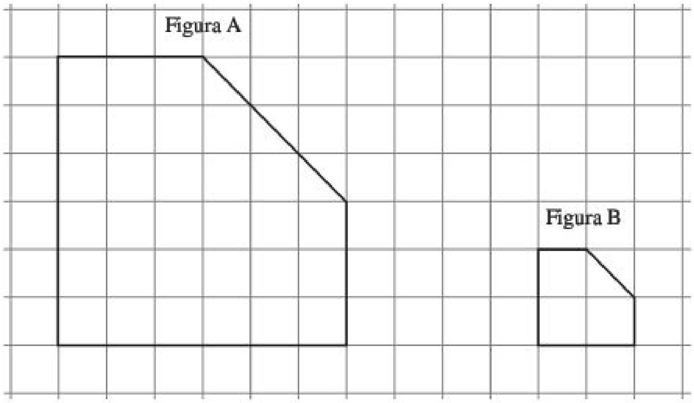
Una escala de 1:10 significa que cada unidad dibujada es $\frac{1}{10}$ parte de la unidad real, y una escala de 100:1 representa que una unidad dibujada es 100 veces mayor que la unidad real.

Figuras a escala

Un cuerpo está a escala de otro si tiene la misma forma y sus dimensiones están en la misma razón.

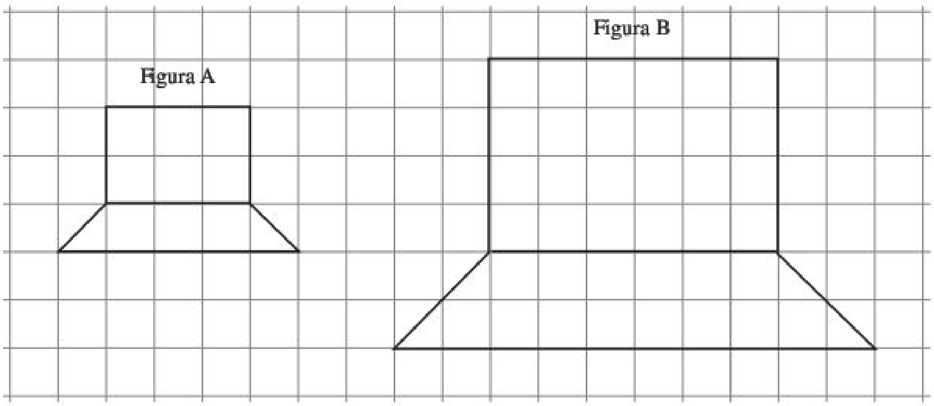
EJEMPLOS

1



La figura B se encuentra a escala 1:3 de la figura A, esto significa que la longitud de los lados de la figura B son una tercera parte de la longitud de los lados de la figura A.

2

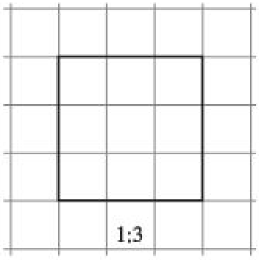


La figura B se encuentra a escala 2:1 con respecto a la figura A, es decir, cada longitud de la figura B es el doble de la figura A.

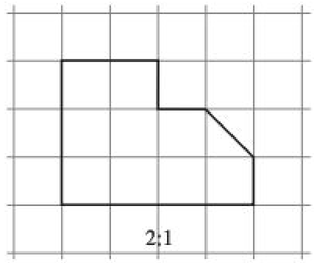
EJERCICIO 23

Reproduce cada una de las figuras en la escala indicada.

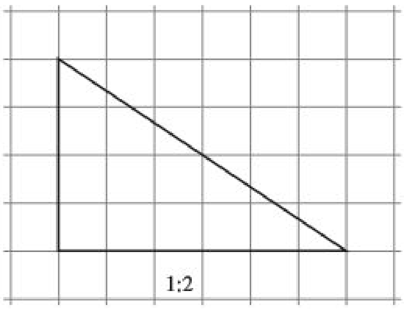
1.



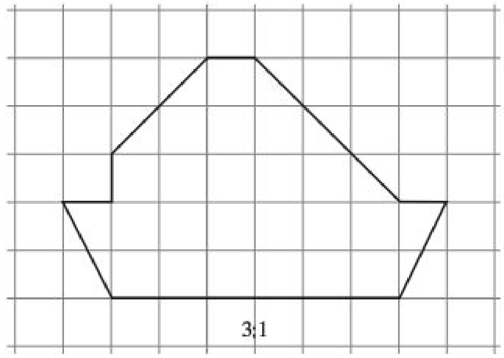
5.



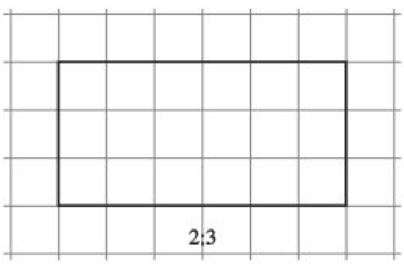
2.



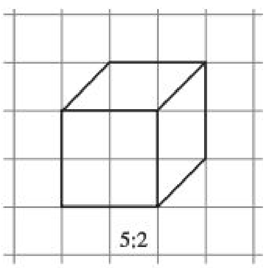
6.



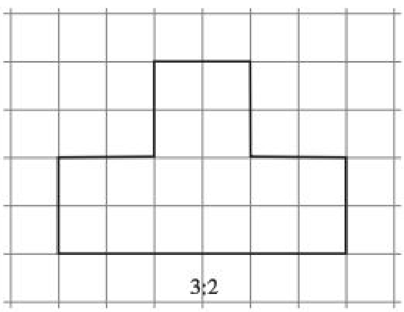
3.



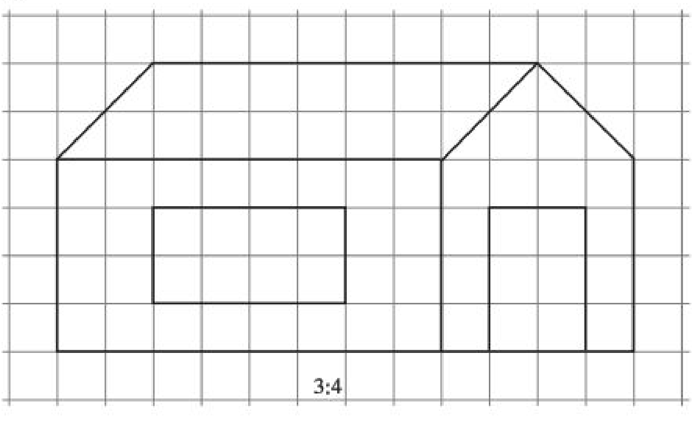
7.



4.



8.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformaciones de figuras en el plano

Cuando a una figura dada se le aplica una transformación, se obtiene otra a la que se llama imagen bajo la transformación.

Traslación

Esta transformación consiste en desplazar cada uno de los puntos de una figura en una misma dirección y la misma distancia.

Para poder realizar la traslación se necesita especificar la dirección y distancia en base a una directriz.

Traslación de un punto. Para trasladar un punto en la dirección de la directriz, se traza un segmento paralelo a la directriz y de la misma longitud, así se obtiene la imagen del punto.

Ejemplos

Traslada los puntos indicados de acuerdo con la directriz:

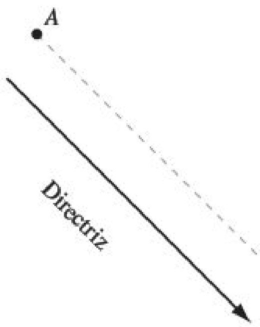


Imagen de $A = A'$

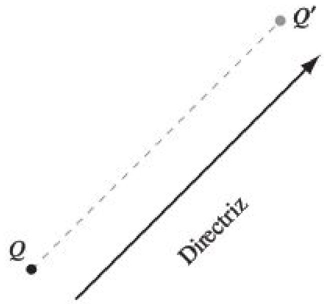


Imagen de $Q = Q'$

Traslación de un segmento. Se determina la imagen de los extremos del segmento en la dirección de la directriz.

Ejemplos

Determina la imagen de los siguientes segmentos:

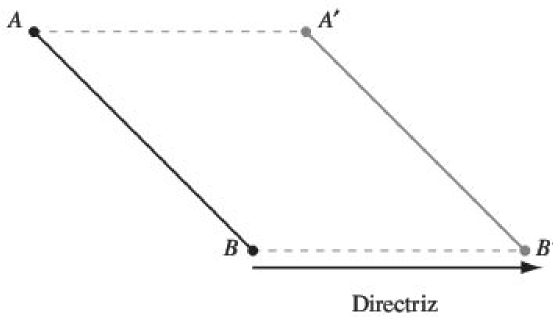


Imagen de $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

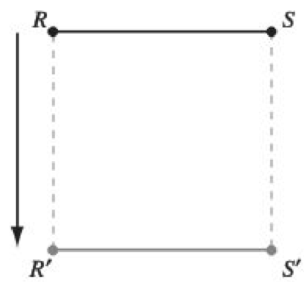


Imagen de $\overline{RS} = \overline{R'S'}$

Para realizar los trazos es necesario auxiliarse de las escuadras.

Traslación de una figura. Se traslada cada uno de los lados de la figura para obtener la imagen.

Ejemplos

Encuentra la imagen de las figuras.

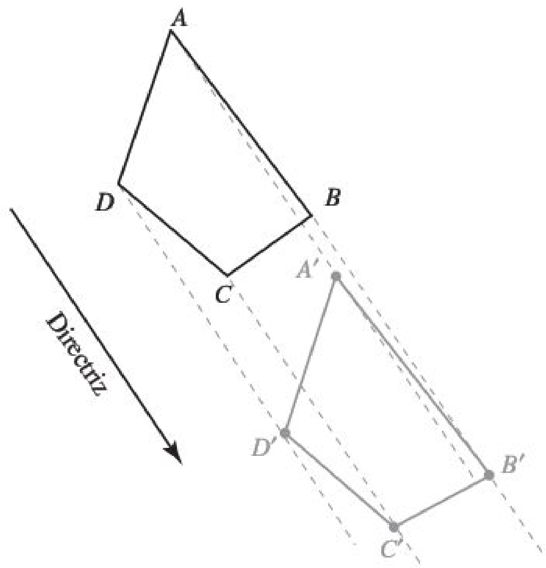


Imagen de $ABCD = A'B'C'D'$

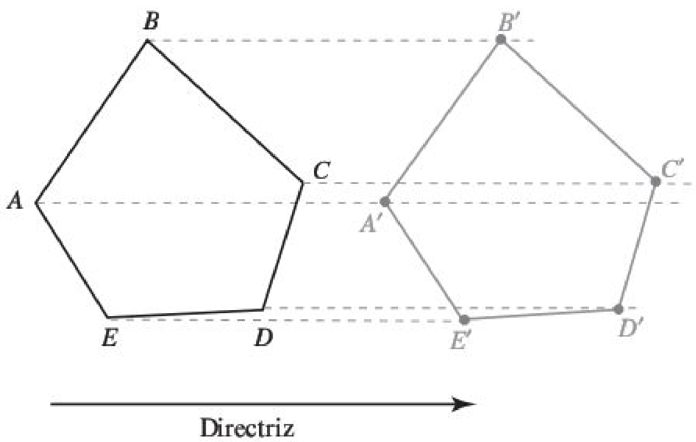
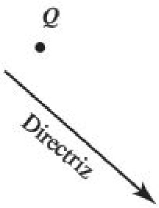


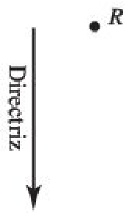
Imagen de $ABCDE = A'B'C'D'E'$

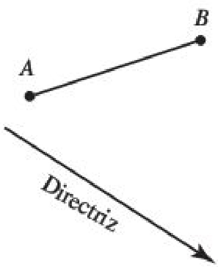
EJERCICIO 24

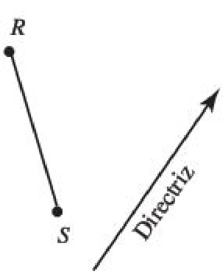
Determina la imagen de los siguientes puntos, segmentos y figuras.

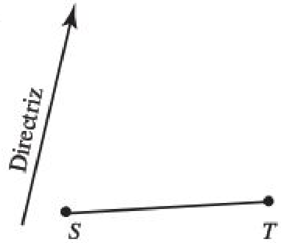
1.


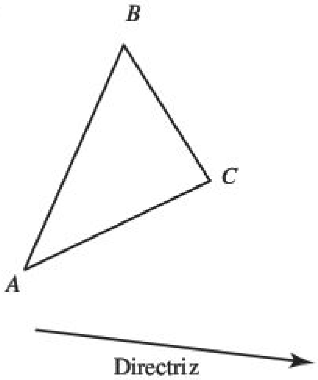
2.

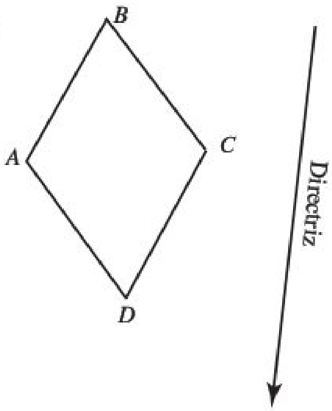

3.


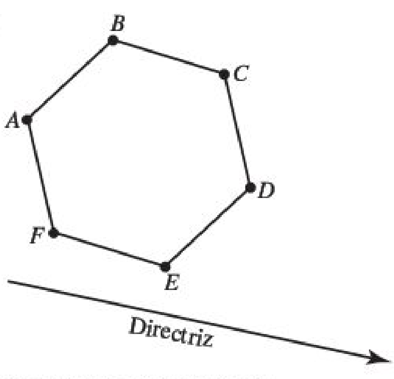
4.


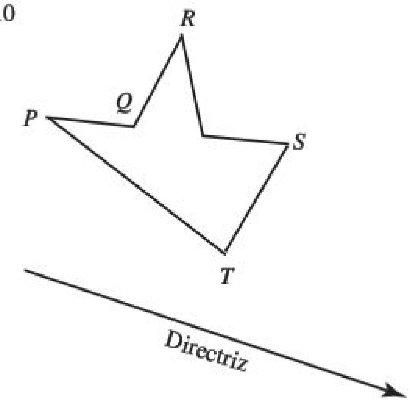
5.


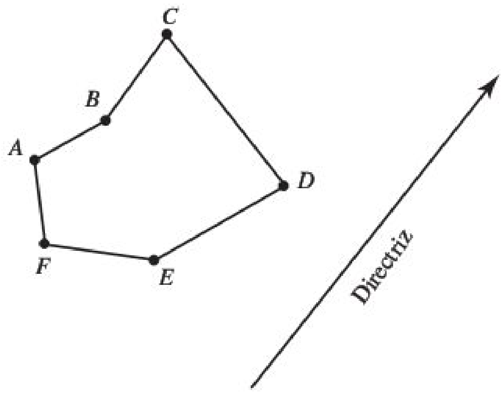
6.


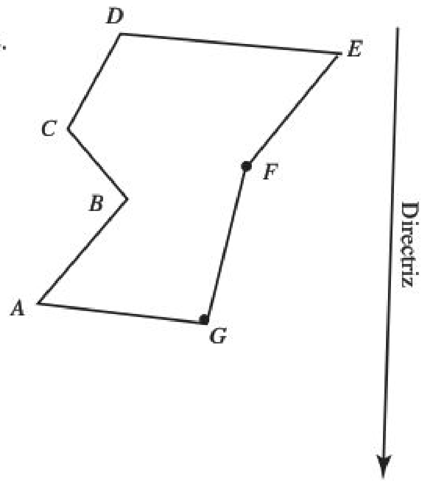
7.


8.


9.


10


11.


12.


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Rotación

Esta transformación se realiza alrededor de un punto fijo y con respecto a un ángulo dado. Para realizar una transformación se debe proporcionar el centro de la rotación, el ángulo que se va a rotar la figura y el sentido del giro.

Si el ángulo es positivo, el sentido del giro es opuesto al de las manecillas del reloj, si el ángulo es negativo, el giro es en el sentido del giro de las manecillas del reloj.

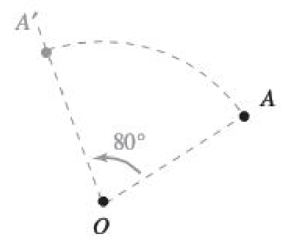
Rotación de un punto. Para obtener la imagen de un punto al rotarlo con respecto a otro punto, se traza un segmento que una ambos puntos, después, con ayuda del compás se hace girar al segmento de acuerdo con la medida del ángulo de rotación.

EJEMPLOS

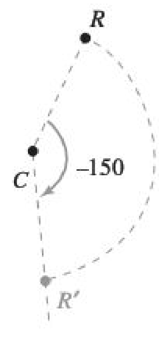
Ejemplos

Rota los siguientes puntos de acuerdo a las indicaciones.

1 Punto A, ángulo de rotación de 80° con respecto al punto O.



2 Punto R, ángulo de –150° con respecto a C.



Rotación de un segmento. Se obtiene rotando los puntos extremos del segmento según lo indique el ángulo de rotación.

EJEMPLOS

Rota los siguientes segmentos.

1 Segmento $\overline{AB}$, ángulo de 120° con respecto al punto O.

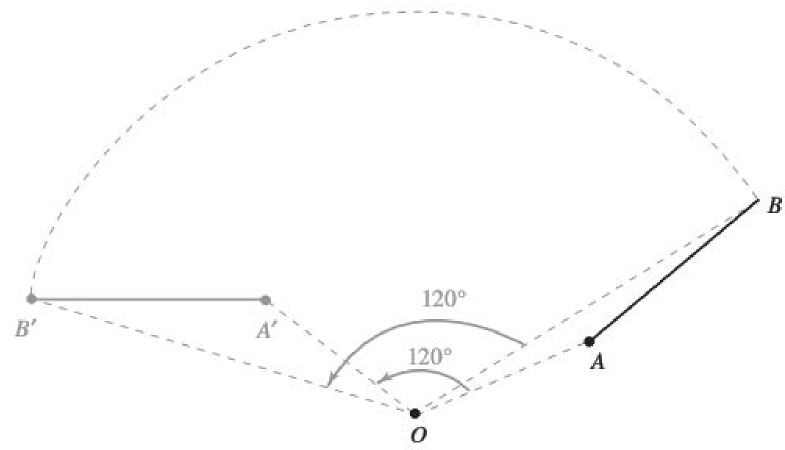


Imagen de $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

2 Segmentos $\overline{RS}$, ángulo de –100° con respecto a C.

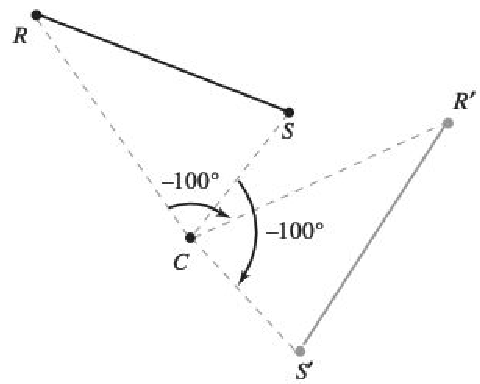


Imagen de $\overline{RS} = \overline{R'S'}$

Rotación de una figura. Se debe realizar la rotación de cada segmento que forma a la figura, para obtener su imagen.

EJEMPLOS

Ejemplos

Obtén la imagen de cada figura.

1 El triángulo ABC, ángulo de 60° con respecto al punto O.

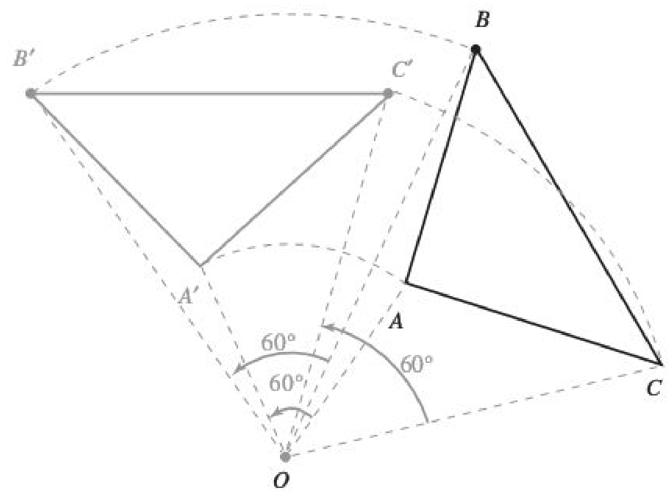


Imagen de $ABC = A'B'C'$

2 El pentágono $ABCDE$, ángulo de –90° con respecto al punto O.

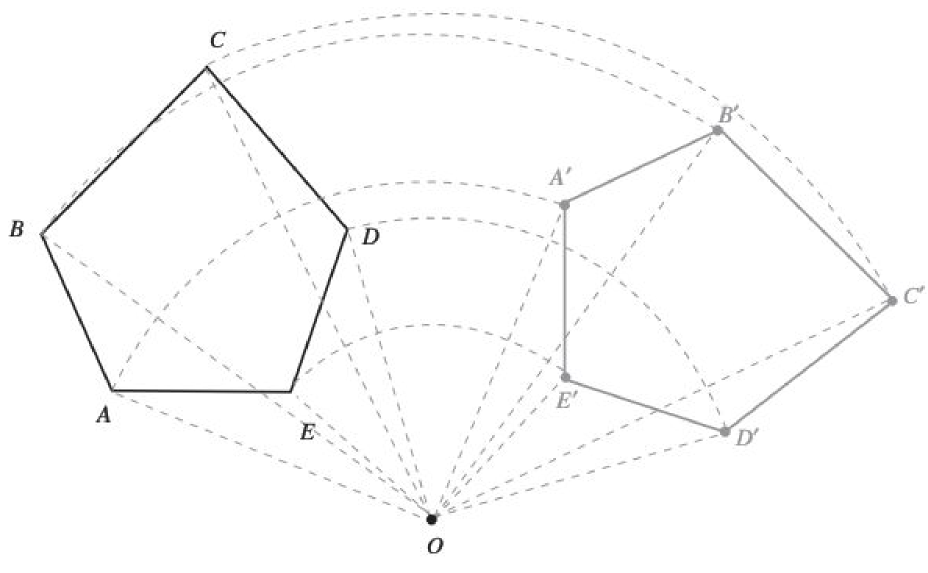
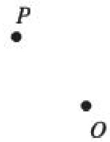


Imagen de $ABCDE = A'B'C'D'E'$

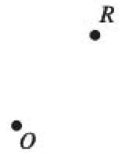
EJERCICIO 25

Determina las imagenes de los puntos, segmentos y figuras al hacerlos rotar.

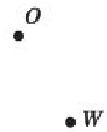
1. Punto P, ángulo de 45° con respecto a O.



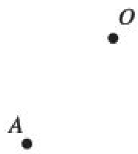
2. Punto R, ángulo de 210° con respecto a O.



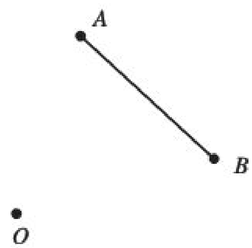
3. Punto W, ángulo de –90° con respecto a O.



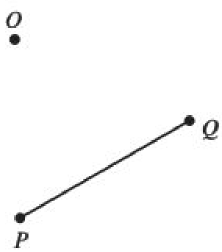
4. Punto A, ángulo de –300° con respecto a O.



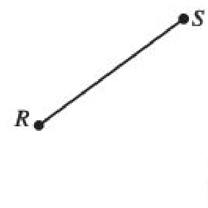
5. Segmento $\overline{AB}$, ángulo de 80° con respecto a O.



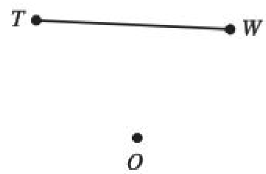
6. Segmento $\overline{PQ}$, ángulo de 225° con respecto a O.



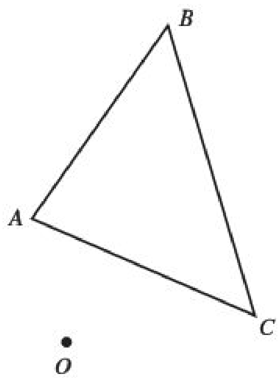
7. Segmento $\overline{RS}$, ángulo de –110° con respecto a O.



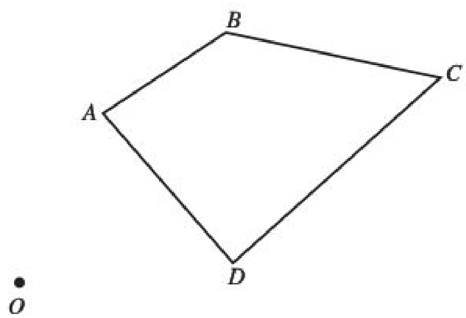
8. Segmento $\overline{TW}$, ángulo de –150° con respecto a O.



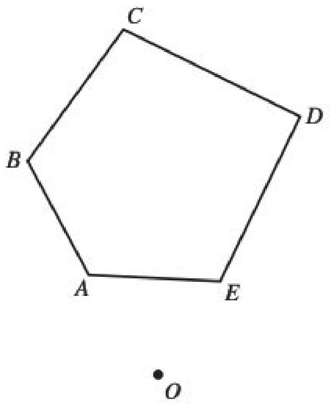
9. Triángulo ABC, ángulo de 45° con respecto a O.



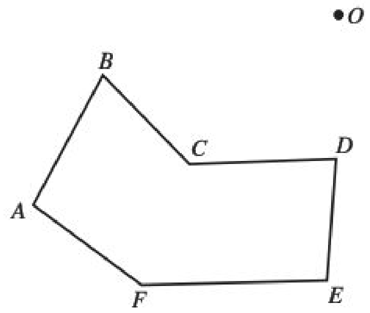
10. Cuadrilátero $ABCD$, ángulo de 120° con respecto a O.



11. Polígono $ABCDE$, ángulo de $-270°$ con respecto a O.



12. Polígono $ABCDEF$, ángulo de $240°$ con respecto a O.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Simetría axial

En esta transformación se refleja a las figuras del plano sobre una recta conocida como eje de simetría, razón por la cual a la imagen se le conoce como su simétrico.

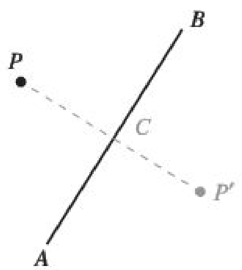
Simétrico de un punto. Conocido un punto y el eje de simetría, la imagen del punto se determina trazando un segmento perpendicular desde el punto hacia el eje de simetría.

La imagen se encuentra del lado opuesto al eje y a la misma distancia que el punto.

EJEMPLOS

Determina los simétricos de los siguientes puntos.

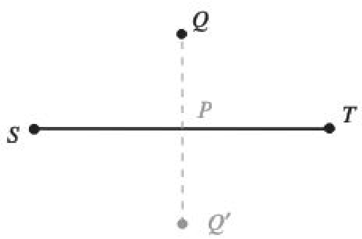
1 Punto P, eje de simetría $\overline{AB}$.



$\overline{PC} = \overline{CP'}$

P' es simétrico de P.

2 Punto Q, eje de simetría ST.



$\overline{PQ} = \overline{PQ'}$

Q' es simétrico de Q.

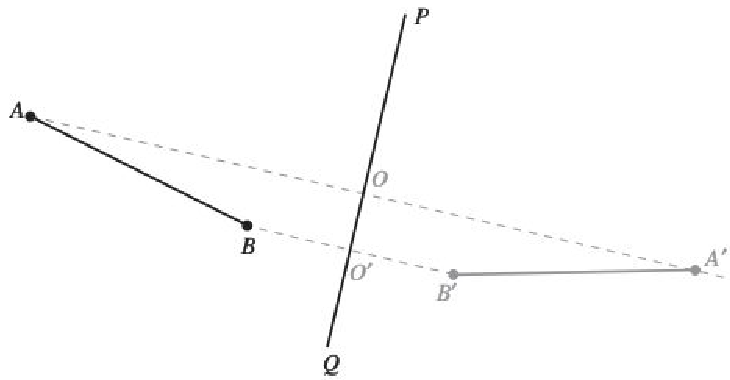
Simétrico de un segmento. Para obtener la imagen o simétrico del segmento, se determinan los simétricos de los puntos extremos.

EJEMPLOS

Ejemplos

Determina los simétricos de cada uno de los segmentos con respecto al eje de simetría indicado.

1 Segmento $\overline{AB}$, eje de simetría $\overline{PQ}$.

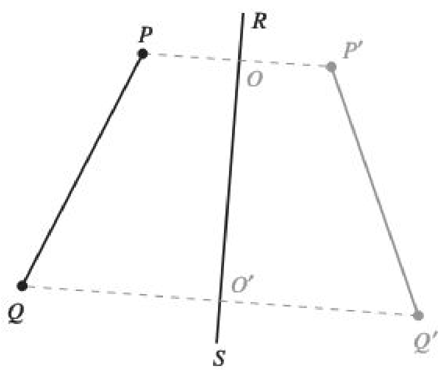


$\overline{AO} = \overline{A'O}$

$\overline{BO'} = \overline{B'O'}$

$\overline{A'B'}$ es simétrico de $\overline{AB}$

2 Segmento $\overline{PQ}$, eje de simetría $\overline{RS}$.



$\overline{OP} = \overline{OP'}$

$\overline{O'Q} = \overline{O'Q'}$

$P'Q'$ es simétrico de $\overline{PQ}$

Simétrico de una figura. Para determinar la imagen, se determinan los simétricos de cada lado.

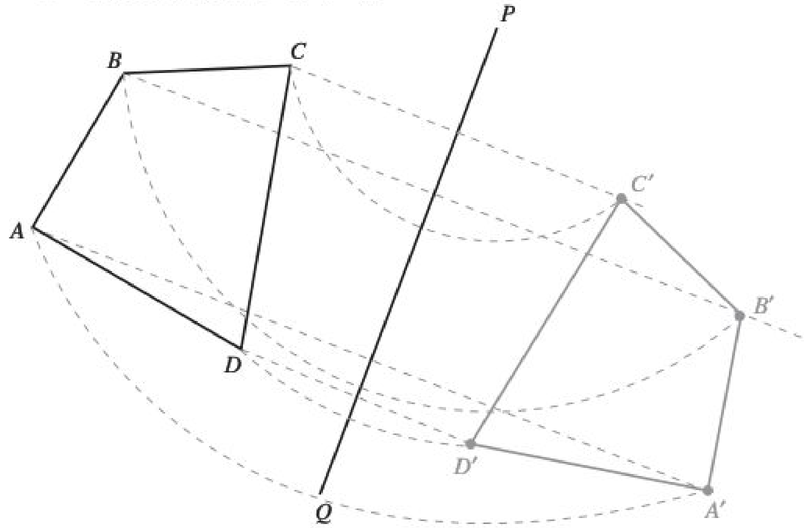
Para determinar el simétrico de los lados de un polígono, se puede emplear el compás como lo ilustran los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS

Ejemplos

Encuentra los simétricos de los siguientes polígonos.

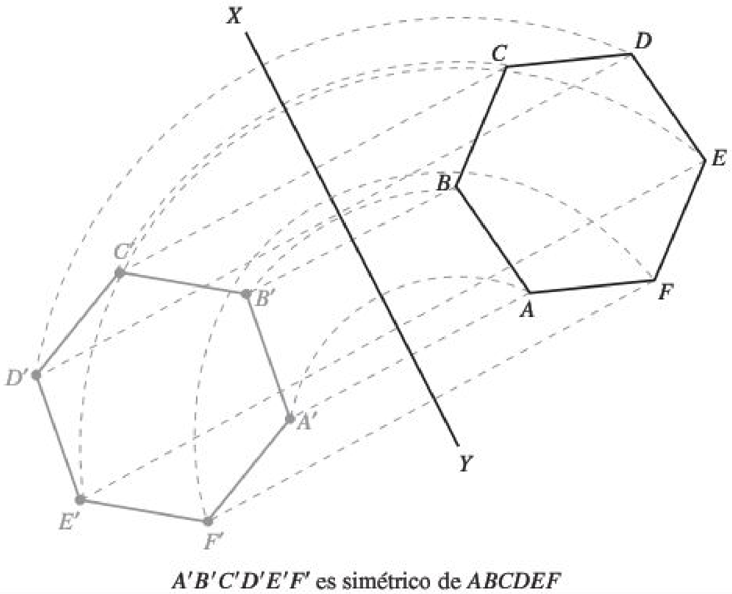
1 El cuadrilátero $ABCD$ con respecto al eje de simetría $\overline{PQ}$.



$A'B'C'D'$ es simétrico de $ABCD$

Se trazan los segmentos perpendiculares al eje $\overline{PQ}$, luego se apoya el compás en el punto P y se abre a cada uno de los vértices del polígono, se trazan los arcos y en los puntos donde se intersecan con sus respectivos segmentos se ubican las imágenes de los puntos, que posteriormente se unen.

2 El polígono $ABCDEF$ con respecto al eje de simetría XY.

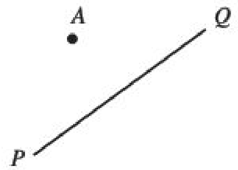


$A'B'C'D'E'F'$ es simétrico de $ABCDEF$

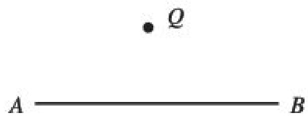
EJERCICIO 26

Obtén el simétrico de los siguientes puntos, segmentos y figuras con respecto al eje de simetría indicado.

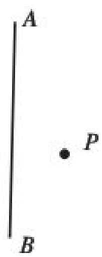
1. Punto A, eje de simetría PQ.



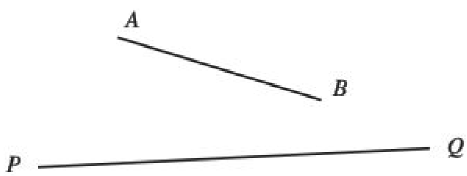
2. Punto Q, eje de simetría AB.



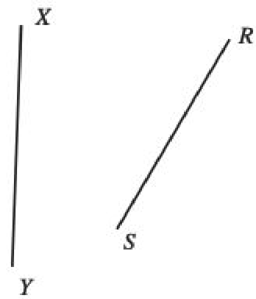
3. Punto P, eje de simetría $\overline{AB}$.



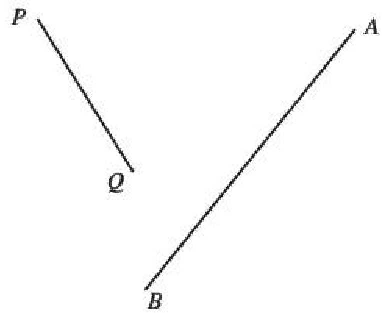
4. Segmento $\overline{AB}$, eje de simetría $\overline{PQ}$.



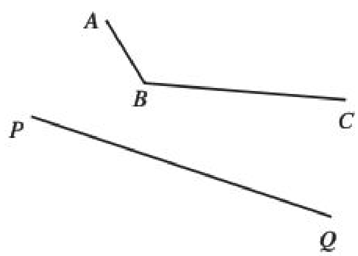
5. Segmento $\overline{RS}$, eje de simetría $\overline{XY}$.



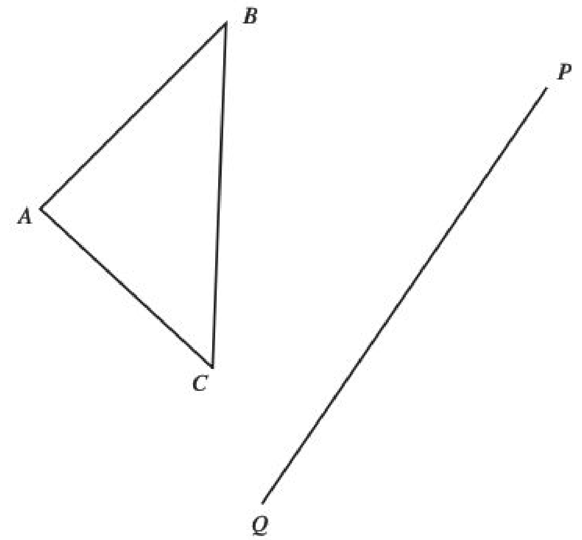
6. Segmento $\overline{PQ}$, eje de simetría $\overline{AB}$.



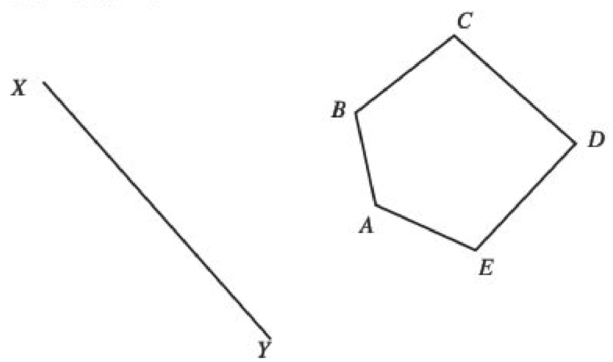
7. Figura ABC, eje de simetría $\overline{PQ}$.



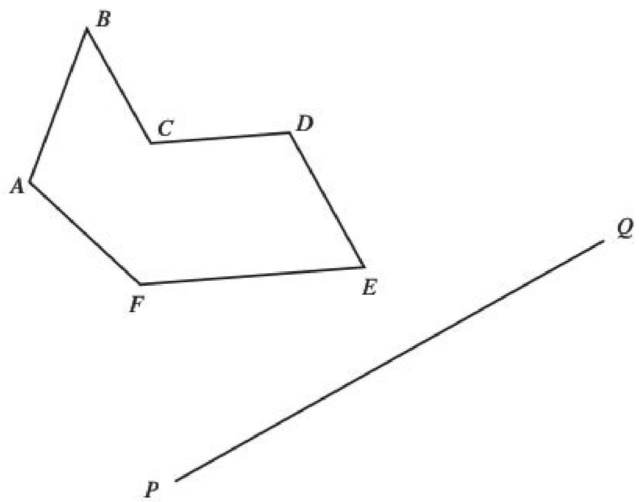
8. Triángulo ABC, eje de simetría $\overline{PQ}$.



9. Pentágono $ABCDE$, eje de simetría $\overline{XY}$.



10. Figura $ABCDEF$, eje de simetría $\overline{PQ}$.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Simetría central

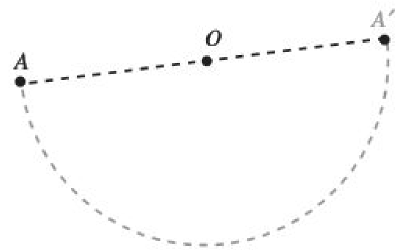
Este tipo de simetría es con respecto a un punto conocido también como centro. A la imagen de una figura bajo esta transformación se le conoce también como simétrico.

Simétrico con respecto de un punto. Para obtener la imagen de un punto se traza un segmento que pase por el punto y centro. La imagen se ubica al otro lado del punto sobre el segmento y a la misma distancia. Para realizar este procedimiento, se puede utilizar el compás para marcar de manera precisa la distancia; el compás se coloca en el centro y con una abertura igual a la distancia del centro al punto, se traza el arco que corta a la recta en el lado opuesto del punto, éste será la imagen.

EJEMPLOS

Encuentra el simétrico de los siguientes puntos.

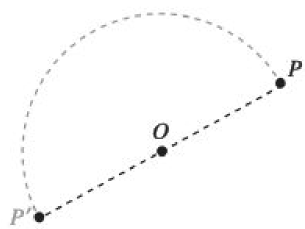
1 Punto A, centro O.



$\overline{AO} = \overline{A'O}$

A' es simétrico de A

2 Punto P, centro O.



$\overline{OP} = \overline{OP'}$

P' es simétrico de P

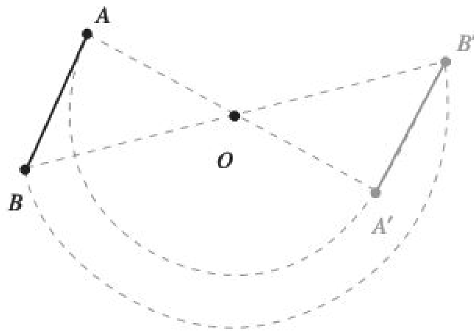
Simétrico de un segmento. Para obtener la imagen o simétrico de un segmento, se trazan los simétricos de sus puntos extremos y se unen.

EJEMPLOS

Ejemplos

Determina el simétrico de los siguientes segmentos:

1 Segmento $\overline{AB}$ con respecto al centro O.

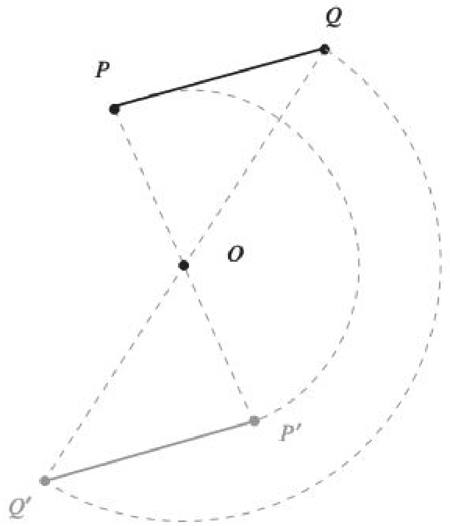


$\overline{AO} = \overline{A'O}$

$\overline{BO} = \overline{B'O}$

$\overline{A'B'}$ es simétrico de $\overline{AB}$

2 Segmento $\overline{PQ}$ con respecto al centro O.



$\overline{OP} = \overline{OP'}$

$\overline{OQ} = \overline{OQ'}$

$\overline{P'Q'} =$ es simétrico de $\overline{PQ}$

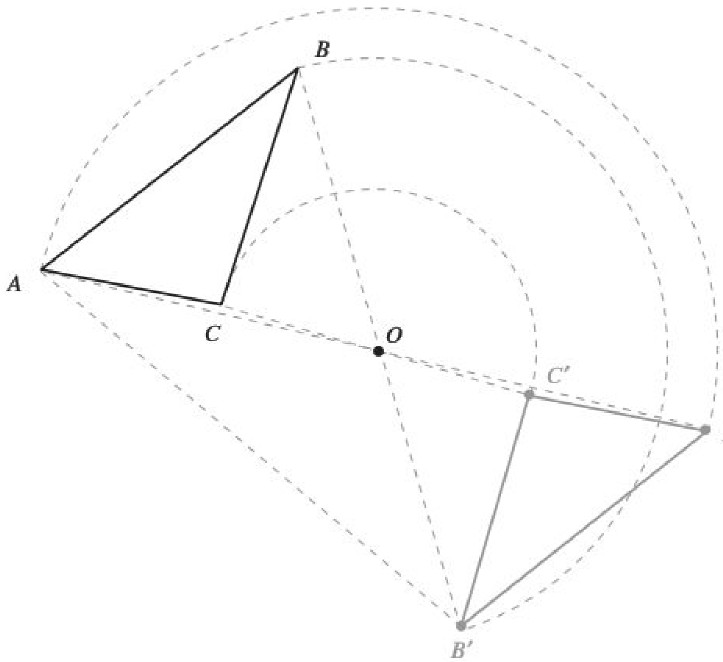
Simétrico de una figura. Se determinan los simétricos de sus vértices.

EJEMPLOS

Ejemplos

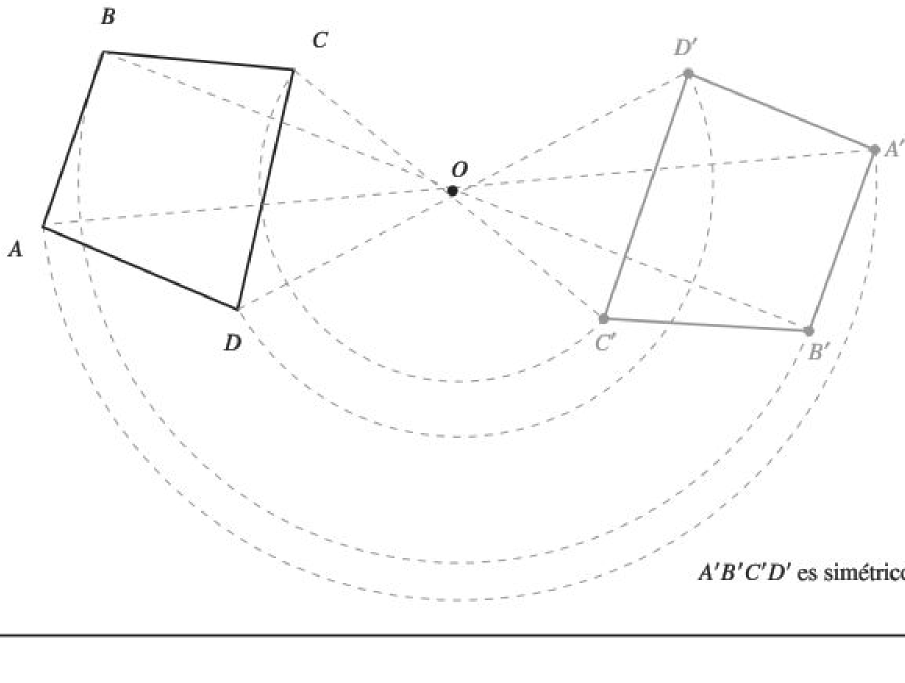
Determina los simétricos de las siguientes figuras.

1 Triángulo ABC con respecto al centro O.



$A'B'C'$ es simétrico de ABC

2 Cuadrilátero $ABCD$ con respecto al centro O.



$A'B'C'D'$ es simétrico de $ABCD$

EJERCICIO 27

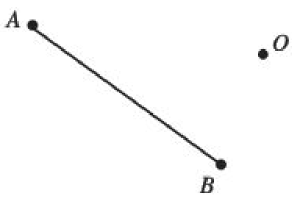
Obtén el simétrico de los siguientes puntos, segmentos y figuras con respecto al centro dado.

1. Punto W con respecto al centro O.

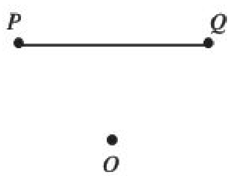
2. Punto P con respecto al centro O.

3. Punto A con respecto al centro O.

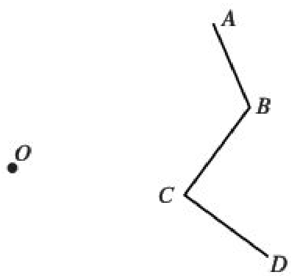
4. Segmento $\overline{AB}$ con respecto al centro O.



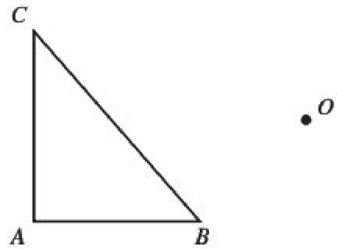
5. Segmento $\overline{PQ}$ con respecto al centro O.



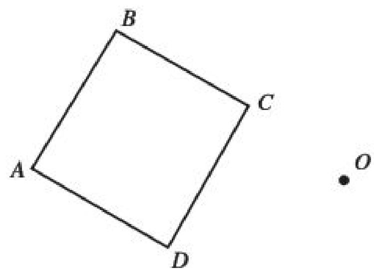
6. Figura $ABCD$ con respecto al centro O.



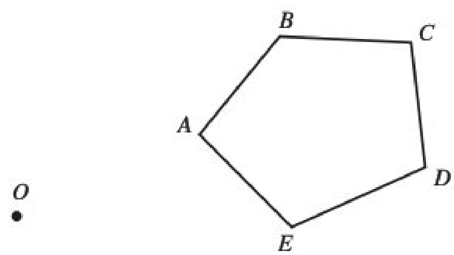
7. Triángulo ABC con respecto al centro O.



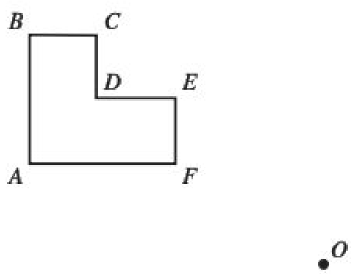
8. Cuadrilátero $ABCD$ con respecto al centro O.



9. Polígono $ABCDE$ con respecto al centro O.



10. Polígono $ABCDEF$ con respecto al centro O.

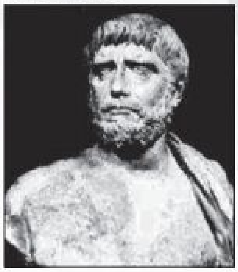


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 8

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Tales DE MILETO



Tales de Mileto
(640 - 560 *a. C.*)

Geómetra griego y uno de los siete sabios de Grecia. Fue el primer matemático griego que inició el desarrollo racional de la geometría. Se le atribuyen 5 teoremas de la geometría elemental:

1. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
2. Un círculo es bisecado por algún diámetro.
3. Los ángulos entre 2 líneas rectas que se cortan son iguales.
4. Dos triángulos son congruentes si ellos tienen 2 ángulos y un lado igual.
5. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Circunferencia

Circunferencia. Es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro y su longitud representa el perímetro del círculo.

Círculo. Se define como la superficie limitada por una circunferencia.

Arco. Nombre que recibe una parte de la circunferencia y se representa con el símbolo $\frown$

Semicircunferencia. Es un arco igual a la mitad de la circunferencia.

Rectas notables

Radio. Así se nombra al segmento de recta unido por el centro y un punto cualquiera de la circunferencia.

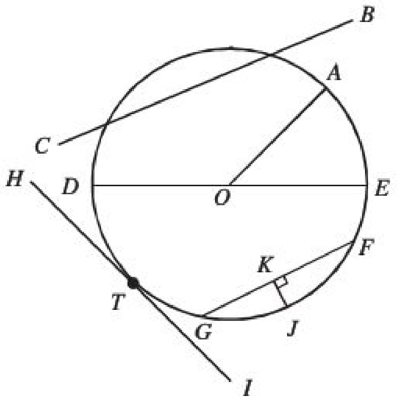
Cuerda. Se denomina así al segmento de recta que une 2 puntos de la circunferencia sin pasar por el centro.

Diámetro. Se nombra así a la cuerda más grande que une 2 puntos opuestos de la circunferencia y pasa por el centro.

Secante. Aquella recta que pasa por 2 puntos de la circunferencia.

Tangente. Así se llama a la línea recta que tiene sólo un punto en común con la circunferencia.

Flecha o sagita. Es la perpendicular trazada de un punto de la circunferencia al punto medio de una cuerda.

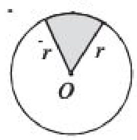


O: Centro
$\overset{\frown}{AE}$: Arco
$\overset{\frown}{ED}$: Semicircunferencia
$\overline{OA}$: Radio
$\overline{DE}$: Diámetro
$\overleftrightarrow{BC}$: Secante
$\overleftrightarrow{HI}$: Tangente
$\overline{FG}$: Cuerda
$\overline{KJ}$: Sagitao flecha
T: Punto de tangencia

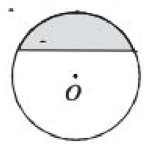
Porciones de un círculo

Son las superficies limitadas por un arco y ciertas rectas notables, las cuales generan:

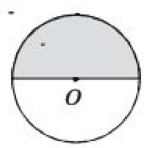
Sector circular. Porción de círculo comprendida entre 2 radios.



Segmento circular. Porción de círculo comprendida entre el arco y su cuerda.

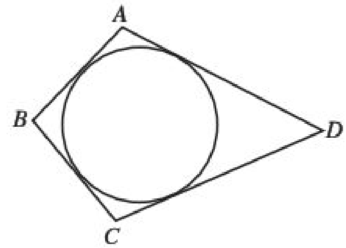


Semicírculo. Porción de círculo entre la semicircunferencia y su diámetro, es decir, es la mitad de un círculo.



Circunferencia y polígonos

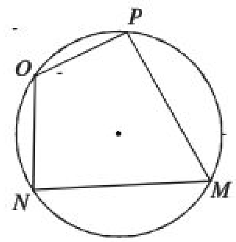
Cuando los lados de un polígono son tangentes a la circunferencia o cuerdas, se genera la circunferencia inscrita o circunscrita.



Circunferencia inscrita. Aquella circunferencia que es tangente a los lados de un polígono.

Polígono circunscrito. Cuando los lados del polígono son tangentes a la circunferencia.

Circunferencia circunscrita. Es la circunferencia que pasa por los vértices de un polígono.



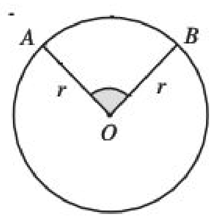
Polígono inscrito. Cuando los lados del polígono son cuerdas de la circunferencia.

Ángulos notables

Son aquellos que forman las rectas notables y se clasifican de la siguiente manera:

Ángulo central. Es aquel ángulo que forman 2 radios, o bien por un diámetro y un radio, y tiene su vértice en el centro.

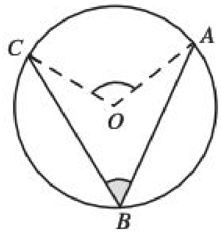
La medida de un ángulo central es igual al arco comprendido entre sus lados.



$$\angle AOB = \widehat{AB}$$

Ángulo inscrito. Tiene su vértice en un punto de la circunferencia y lo forma un par de cuerdas.

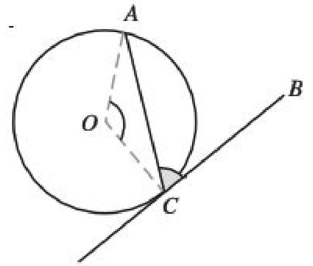
La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.



$$\angle ABC = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

Ángulo semiinscrito. Tiene su vértice en un punto de la circunferencia y lo forman una cuerda y una tangente.

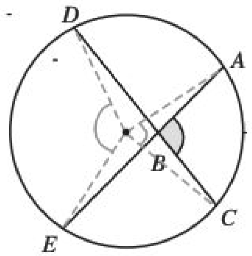
La medida de un ángulo semiinscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.



$$\angle ACB = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

Ángulo interior. Su vértice se encuentra en un punto interior de la circunferencia y lo forman 2 cuerdas que se cortan.

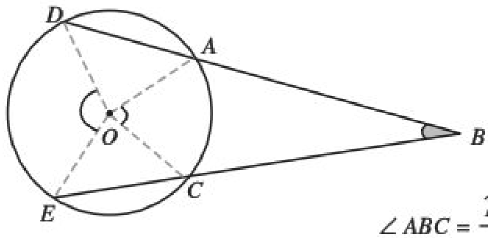
La medida de un ángulo interior es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.



$$\angle ABC = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DE}}{2}$$

Ángulo exterior. Tiene su vértice en un punto exterior a la circunferencia y lo forman 2 secantes.

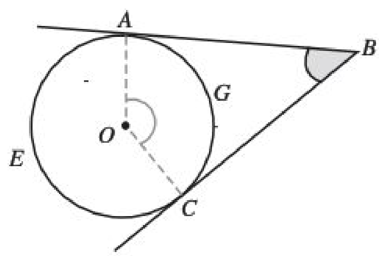
La medida de un ángulo exterior es la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.



$$\angle ABC = \frac{\widehat{DE} - \widehat{AC}}{2}$$

Ángulo circunscrito. Se denomina así al ángulo que forman 2 tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia.

La medida de un ángulo circunscrito es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.



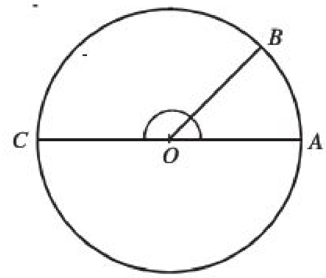
$$\angle ABC = \frac{\widehat{AEC} - \widehat{AGC}}{2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $\overset{\frown}{AB} = 35°$, determina los valores de $\angle AOB$ y $\angle BOC$.

Solución



El ángulo $\angle AOB$ es central, entonces:

$$\angle AOB = \overset{\frown}{AB} = 35°$$

De la figura,

$$\angle AOB + \angle BOC = 180°$$

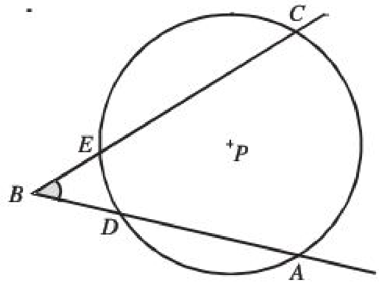
Al despejar $\angle BOC$, se obtiene:

$$\angle BOC = 180° - \angle AOB = 180° - 35° = 145°$$

Por tanto, $\angle AOB = 35°$ y $\angle BOC = 145°$

2 Encuentra el valor del ángulo $\angle ABC$ formado por las secantes, si $\overset{\frown}{AC} = 63°$ y $\overset{\frown}{DE} = 27°$.

Solución



El ángulo $\angle ABC$ es exterior, entonces:

$$\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DE}}{2}$$

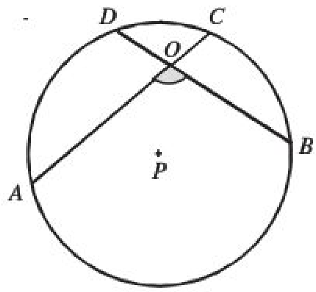
Al sustituir los valores de $\overset{\frown}{AC} = 63°$ y $\overset{\frown}{DE} = 27°$, se obtiene:

$$\angle ABC = \frac{63° - 27°}{2} = \frac{36°}{2} = 18°$$

Por lo que se deduce que, $\angle ABC = 18°$

3 Determina la medida del ángulo $\angle AOB$ si $\overset{\frown}{AB} = 160°$ y $\overset{\frown}{CD} = 50°$.

Solución



El ángulo $\angle ABC$ es interior, entonces:

$$\angle AOB = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

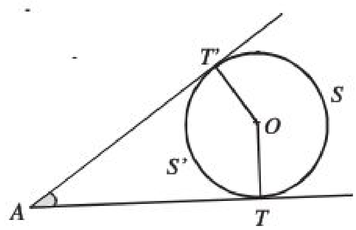
Y al sustituir los valores de $\overset{\frown}{AB} = 160°$ y $\overset{\frown}{CD} = 50°$, se obtiene:

$$\angle AOB = \frac{160° + 50°}{2} = \frac{210°}{2} = 105°$$

Por consiguiente, $\angle AOB = 105°$.

4 Si $\overset{\frown}{TST'} = 240°$, determina el valor del ángulo que forman las rectas tangentes $\overleftrightarrow{AT'}$ y $\overleftrightarrow{AT}$.

Solución



El ángulo $\angle TAT'$ es externo, entonces:

$$\angle TAT' = \frac{\overset{\frown}{TST'} - \overset{\frown}{TS'T'}}{2}$$

De la figura $\overset{\frown}{TST'} + \overset{\frown}{TS'T'} = 360°$, donde $\overset{\frown}{TS'T'} = 120°$

Al sustituir $\overset{\frown}{TST'} = 240°$ y $\overset{\frown}{TS'T'} = 120°$, se obtiene:

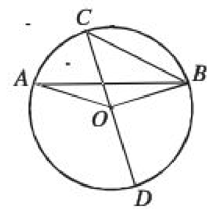
$$\angle TAT' = \frac{240° - 120°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$$

Por consiguiente, $\angle TAT' = 60°$

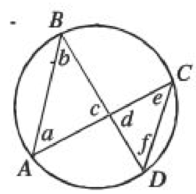
EJERCICIO 28

Resuelve los siguientes ejercicios:

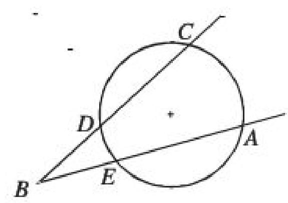
1. En la siguiente figura, $\overset{\frown}{AC} = 60°$, $\overset{\frown}{BC} = 104°$ y $\overset{\frown}{BD} = 80°$. Encuentra los valores de $\angle\, ABC$, $\angle\, AOC$, $\angle\, BOC$ y $\overset{\frown}{AD}$.



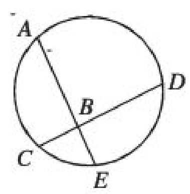
2. En esta figura $\overset{\frown}{AD} = 100°$ y $\overset{\frown}{BC} = 150°$. Determina los valores de $\angle\, a$, $\angle\, b$, $\angle\, c$, $\angle\, d$, $\angle\, e$ y $\angle\, f$.



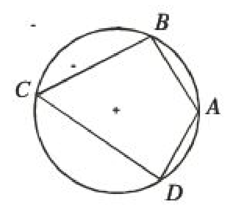
3. En la siguiente figura, $\overset{\frown}{AC} = 70°$ y $\overset{\frown}{DE} = 15°$. Precisa el valor de $\angle\, ABC$.



4. De esta figura, $\overset{\frown}{DE} = 50°$ y $\overset{\frown}{AC} = 120°$. Encuentra los valores de $\angle\, ABC$ y $\angle\, DBA$.



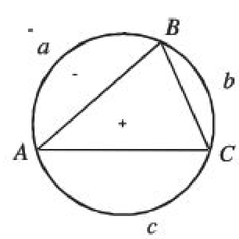
5. Encuentra el valor de los 4 ángulos internos del siguiente cuadrilátero si $\overset{\frown}{AB} = 60°$, $\overset{\frown}{BC} = 110°$, $\overset{\frown}{CD} = 100°$ y $\overset{\frown}{AD} = 90°$.



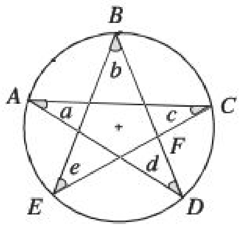
6. Si $\Delta\, ABC$ es un triángulo inscrito, como se ilustra, halla:

   a) $\angle\, A$ si $a = 150°$ y $c = 150°$

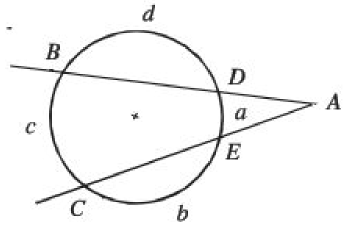
   b) $\angle\, A$ si $AB \perp BC$ y $a = 100°$



7. Si $\angle e = 50°$, $\angle BFC = 65°$, $\overset{\frown}{CD} = 120°$, $\overset{\frown}{AE} = x$ y $\overset{\frown}{AB} = x + 10°$, encuentra el valor de los ángulos restantes.

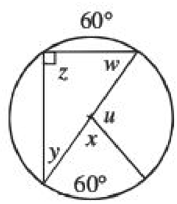


8. En la figura, *AB* y *AC* son secantes que se cortan en *A*, determina:

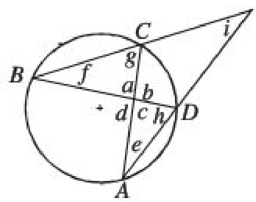


a) $\angle A$ si $c = 90°$, $a = 60°$
b) $\angle A$ si $c - a = 80°$
c) $\angle A$ si $c = a + 60°$
d) a si $c = 135°$, $\angle A = 50°$
e) c si $a = 60°$ y $\angle A = 30°$
f) $c - a$ si $\angle A = 70°$
g) a si $c = 2a$ y $\angle A = 35°$
h) a si $c = 5a$ y $\angle A = 80°$

9. En la siguiente figura halla el valor de $\angle u$, $\angle w$, $\angle x$, $\angle y$ y $\angle z$.



10. Si $\overset{\frown}{AB} = 130°$ y $\overset{\frown}{CD} = 50°$, encuentra $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$, $\angle e$, $\angle f$, $\angle g$, $\angle h$ y $\angle i$.

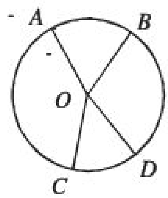


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Teoremas

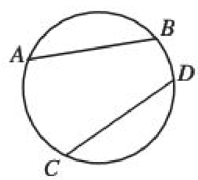
- **Teorema 1.** Si 2 ángulos centrales del mismo círculo o de círculos congruentes son congruentes, entonces sus arcos intersecados son congruentes.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

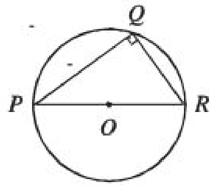


- **Teorema 2.** En una circunferencia de cuerdas iguales se subtienden arcos iguales y viceversa.

$$\text{Si } \overline{AB} = \overline{CD} \text{ si y sólo si } \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

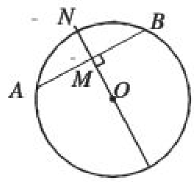


Teorema 3. Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.



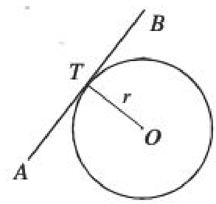
Teorema 4. Una recta que pasa por el centro de un círculo y es perpendicular a una cuerda, biseca a la cuerda y a su arco.

Si $\overleftrightarrow{NO} \perp \overline{AB}$ entonces, $\overline{AM} = \overline{MB}$ y $\overparen{AN} = \overparen{NB}$



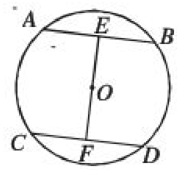
Teorema 5. Una recta tangente a un círculo es perpendicular al radio trazado hacia el punto de tangencia.

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OT}, \overline{OT} = r$$



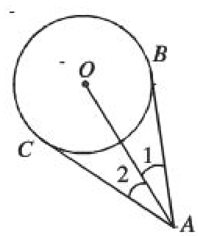
Teorema 6. Dos cuerdas trazadas en un círculo y que equidistan del centro, son congruentes.

Si $\overline{OE} = \overline{OF}$ entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



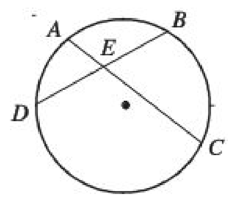
Teorema 7. Las tangentes trazadas desde un punto fuera del círculo son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que pasa por el centro y dicho punto.

$$\overline{AC} \cong \overline{AB} \text{ y } \angle 1 = \angle 2$$



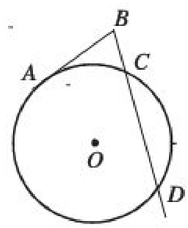
Teorema 8. Si 2 cuerdas se intersecan dentro de un círculo, el producto de las medidas de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las medidas de los segmentos de la otra.

$$\overline{AE} \cdot \overline{EC} = \overline{BE} \cdot \overline{ED}$$

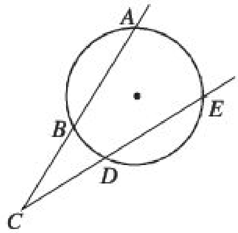


Teorema 9. Si desde un punto exterior a un círculo se traza una tangente y una secante, la medida de la tangente es media proporcional entre la medida de la secante y su segmento externo.

$$(\overline{AB})^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}$$



➲ **Teorema 10.** Si desde un punto exterior a un círculo se trazan 2 secantes, el producto de la medida de una secante por la medida de su segmento exterior es igual al producto de la medida de la otra secante por su segmento exterior.

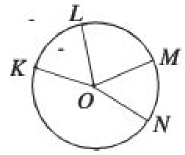


$$\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\overline{EC}\cdot\overline{DC}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

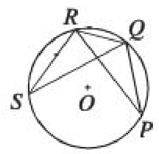
1 Si $\angle KOL \cong \angle MON$, demuestra que arco $KM \cong$ arco LN.



Solución

Afirmaciones	Razones
1. $\angle KOL \cong \angle MON$	1. Dato
2. Arco $KL \cong$ arco MN	2. De la figura: $\angle KOL = \overset{\frown}{KL}$ y $\angle MON = \overset{\frown}{MN}$, pero $\angle KOL \cong \angle MON$, por tanto, arco $KL \cong$ arco MN
3. Arco $KM \cong$ arco LN	3. $\overset{\frown}{KM} = \overset{\frown}{KL} + \overset{\frown}{LM}$, $\overset{\frown}{LN} = \overset{\frown}{LM} + \overset{\frown}{MN}$ pero $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{KL}$, entonces $\overset{\frown}{KM} \cong \overset{\frown}{LN}$

2 En la siguiente figura $\overline{SR} \cong \overline{QP}$, demuestra que: $\overline{SQ} \cong \overline{RP}$.



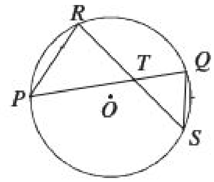
Solución

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{SR} \cong \overline{QP}$	1. Dato
2. $\angle SRP \cong \angle PQS$	2. $\angle SRP = \dfrac{\overset{\frown}{SP}}{2}$, $\angle PQS = \dfrac{\overset{\frown}{SP}}{2}$
3. Arco $SR \cong$ arco QP	3. Cuerdas iguales $(\overline{SR} \cong \overline{QP})$ subtienden arcos iguales $(\overset{\frown}{SR} \cong \overset{\frown}{QP})$
4. $\angle RQS \cong \angle QRP$	4. $\angle RQS = \dfrac{\overset{\frown}{SR}}{2}$, $\angle QRP = \dfrac{\overset{\frown}{QP}}{2}$, pero $\overset{\frown}{SR} = \overset{\frown}{QP}$, por tanto $\angle RQS \cong \angle QRP$
5. $\angle SRQ \cong \angle RQP$	5. $\angle SRQ = \angle SRP + \angle QRP$ y $\angle RQP = \angle RQS + \angle PQS$, pero $\angle SRP = \angle PQS$ y $\angle RQS = \angle QRP$, por tanto $\angle SRQ \cong \angle RQP$
6. $\overline{RQ} \cong \overline{RQ}$	6. Por ser lado común a los triángulos SRQ y PQR
7. $\Delta SRQ \cong \Delta PQR$	7. Por el teorema lado, ángulo, lado
8. $\overline{RP} \cong \overline{SQ}$	8. Por ser lados homólogos en triángulos congruentes

EJERCICIO 29

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. De la siguiente figura:

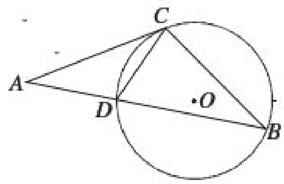


   a) Encuentra $\overline{PT}$ si $\overline{TQ}=5$, $\overline{RT}=9$ y $\overline{TS}=6$

   b) Halla $\overline{TS}$ si $\overline{PT}=11$, $\overline{RT}=7$ y $\overline{TQ}=5$

   c) Determina $\overline{TR}$ si $\overline{PQ}=22$, $\overline{TQ}=5$ y $\overline{TS}=9$

2. De esta figura:



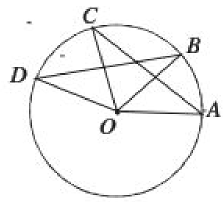
   a) Determina $\overline{AC}$ si $\overline{AD}=6$ y $\overline{BD}=11$

   b) Encuentra $\overline{AB}$ si $\overline{AD}=5$ y $\overline{AC}=9$

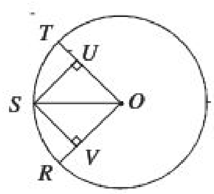
   c) Halla $\overline{AC}$ si $\overline{DB}=10$ y $\overline{AB}=23$

Realiza las siguientes demostraciones.

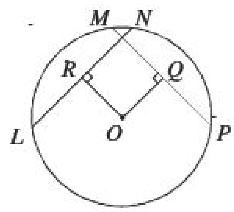
3. Si el $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$, demuestra que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



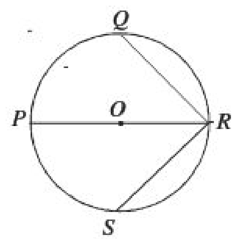
4. Si $\overline{SU} \perp \overline{OT}$, $\overline{SV} \perp \overline{OR}$ y $\overline{SU} \cong \overline{SV}$, comprueba que $\widehat{TS} \cong \widehat{SR}$.



5. Si $\overline{RO} \perp \overline{LN}$, $\overline{OQ} \perp \overline{MP}$ y $\overline{LN} \cong \overline{MP}$, demuestra que:
   $\angle ORQ \cong \angle OQR$.

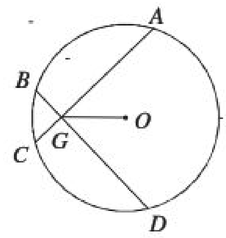


6. Si $\overline{PR}$ es un diámetro y $\angle PRS \cong \angle PRQ$, comprueba que: $\overline{QR} \cong \overline{SR}$.



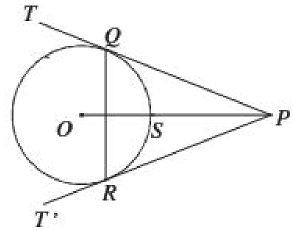
7. Si $\angle OGA \cong \angle OGD$, demuestra que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

8. *Si* $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, comprueba que $\angle OGA \cong \angle OGD$.

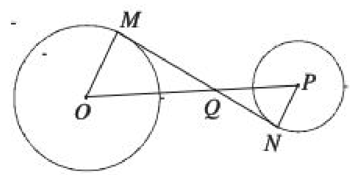


9. PT y PT' son tangentes al círculo en los puntos Q y R, respectivamente. Demuestra que $\overline{OP}$ biseca a la cuerda QR.

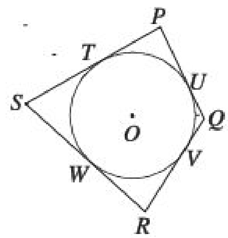
10. PT y PT' son tangentes al círculo en los puntos Q y R, respectivamente, y si se unen Q y R, comprueba que: $\angle PRS \cong \angle PQS$.



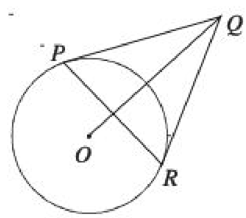
11. Sea $\overline{MN}$ tangente común a las circunferencias con centro en O y P. Si se unen los centros $\overline{OP}$, interseca a la tangente en Q. Demuestra que: $\angle MOQ \cong \angle NPQ$.



12. Comprueba que la suma de las medidas de un par de lados opuestos de un cuadrilátero circunscrito, es igual a la suma de las medidas del otro par.

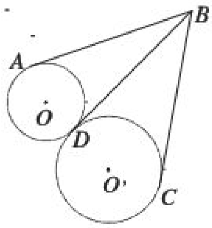


13. $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ son segmentos tangentes a la circunferencia. Demuestra que $\angle QPR \cong \angle QRP$.



14. En la figura $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ y $\overline{BC}$ son tangentes.

Comprueba que: $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{BC}$.

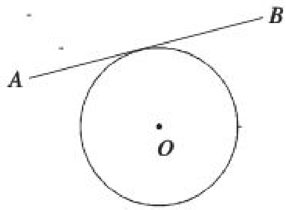


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Tangente a una circunferencia

Se le denomina tangente a toda recta que tiene un punto en común con la circunferencia.

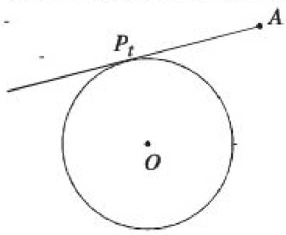
$\overleftrightarrow{AB}$: recta tangente



Longitud de una tangente

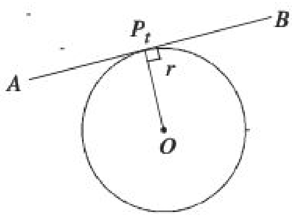
Es el segmento trazado desde un punto exterior al punto de tangencia.

$\overline{AP_t}$: longitud de la tangente

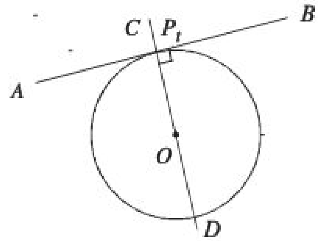


Propiedades de las tangentes

1. Toda tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

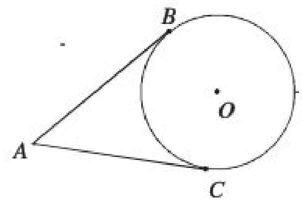


2. Si una recta es perpendicular a una recta tangente en el punto de tangencia, ésta pasa por el centro de la circunferencia.



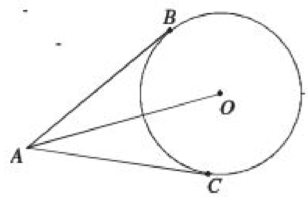
3. Las tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia son iguales.

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$



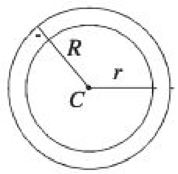
4. La recta que une un punto exterior y el centro de una circunferencia, es bisectriz del ángulo formado por las tangentes trazadas del punto a la circunferencia.

$\overline{AO}$ es bisectriz del ángulo BAC



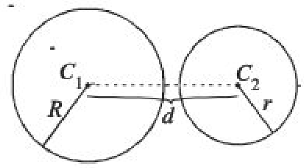
Posiciones relativas

Circunferencias concéntricas. Son aquellas que tienen el mismo centro y distinto radio.



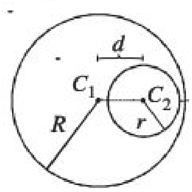
Circunferencias exteriores. Son aquellas que no tienen puntos en común y cada una está en una región exterior a la otra. La distancia entre los centros de estas circunferencias es mayor que la suma de sus radios.

$$d > R + r$$



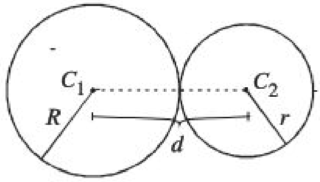
Circunferencia interior. Es aquella en la cual todos sus puntos son interiores a otra circunferencia.

$$d < R - r$$



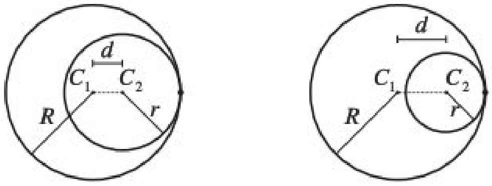
Circunferencias tangentes exteriores. Se les llama así a las que tienen un solo punto en común. La distancia entre sus centros es igual a la suma de sus radios.

$$d = R + r$$



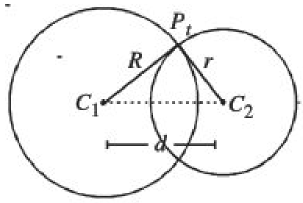
Circunferencias tangentes interiores. Son circunferencias que tienen un solo punto en común. La distancia entre sus centros es igual a la diferencia de sus radios.

$$d = R - r$$



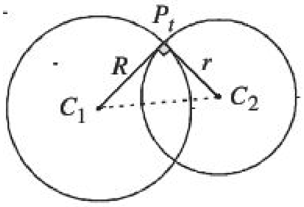
Circunferencias secantes. Son aquellas que se intersecan en 2 puntos. La distancia entre sus centros es menor que la suma de sus radios.

$$d < R + r$$



Circunferencias ortogonales. Cuando se intersecan 2 circunferencias los radios forman un ángulo de 90º, esto significa que son perpendiculares en los puntos de intersección.

$$R \perp r$$



EJEMPLOS

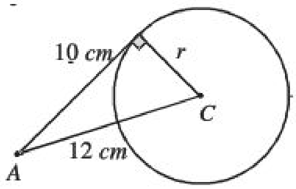
Ejemplos

1 Desde un punto exterior se trazó una recta tangente, cuya longitud es de 10 cm y el segmento que une dicho punto con el centro de la circunferencia es de 12 cm, determina el radio de la circunferencia.

Solución

El radio es perpendicular a una recta tangente en el punto de tangencia, esto significa que se forma un triángulo rectángulo, del cual se tiene:

$$(12)^2 = (10)^2 + r^2$$



al despejar r:

$$r = \sqrt{144 - 100}$$

$$r = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

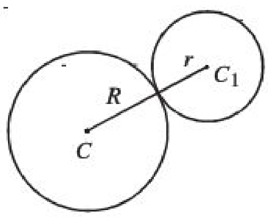
Luego, el radio de la circunferencia es de $2\sqrt{11}$ cm.

2 Los radios de 2 circunferencias son R y r, si las circunferencias son tangentes exteriores, expresa la distancia entre los centros en términos de r, si $r = \frac{2}{3}R$.

Solución

Por ser circunferencias tangentes exteriores, la distancia entre los centros se define como:

$$d_{CC_1} = R + r$$



al despejar R de $r = \frac{2}{3}R$ y sustituir, se obtiene:

$$d = \frac{3}{2}r + r = \frac{5}{2}r$$

En conclusión, la distancia entre los centros es de $\frac{5}{2}r$.

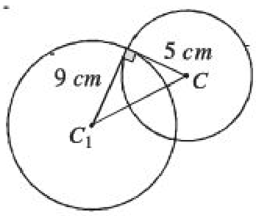
3 Dos circunferencias ortogonales de radio 5 cm y 9 cm, determina la distancia entre sus centros.

Solución

Si 2 circunferencias son ortogonales, sus radios son perpendiculares, entonces, por el teorema de Pitágoras:

$$\left(\overline{CC_1}\right)^2 = (5)^2 + (9)^2 \quad \rightarrow \quad \overline{CC_1} = \sqrt{25 + 81}$$

$$\overline{CC_1} = \sqrt{106}$$



Por consiguiente, la distancia entre los centros es $\sqrt{106}$ cm.

EJERCICIO 30

Determina las posiciones de 2 circunferencias, cuyos centros distan 24 *u* y sus radios miden:

1. $R = 15\ u$, $r = 8\ u$
2. $R = 13\ u$, $r = 11\ u$
3. $R = 42\ u$, $r = 13\ u$
4. $R = 28\ u$, $r = 20\ u$
5. $R = 35\ u$, $r = 11\ u$
6. $R = 20\ u$, $r = 4\ u$

Resuelve los siguientes problemas:

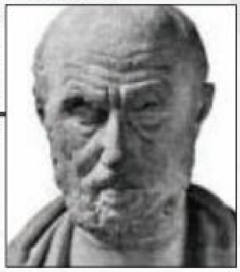
7. Se tienen 3 circunferencias tangentes entre sí de radio r, determina el perímetro del triángulo formado por los puntos de tangencia de las circunferencias.
8. Desde un punto exterior A se traza una recta tangente a la circunferencia de diámetro $4\sqrt{3}\ u$, si la longitud del segmento que une el centro de la circunferencia con el punto A mide $4\ u$, ¿cuál es la longitud de la tangente?
9. La distancia entre los centros de 2 circunferencias secantes es $2\sqrt{5}\ u$, determina el radio de C_1 si el radio de C_2 es $2\sqrt{2}\ u$.
10. De un punto A se traza una recta tangente a la circunferencia con centro en C_1, la longitud de la tangente es $\sqrt{3}\ cm$ y el segmento $\overline{AC_1} = 2\sqrt{7}\ cm$, determina el radio de la circunferencia.
11. La circunferencia C_2 es tangente interior a C_1 en P, la circunferencia C_3 es tangente interior a C_2 en P, determina las distancias de los centros de C_1 a C_2 y de C_1 a C_3 y si los diámetros de C_1, C_2 y C_3 son: R, $\frac{2}{3}R$ y $\frac{2}{9}R$, respectivamente.
12. Se tienen 3 circunferencias con centros en C_1, C_2 y C_3 de manera que $\overline{C_1C_2} \perp \overline{C_2C_3}$, determina el radio de la circunferencia en C_2 si el radio de la circunferencia en C_1 y en C_3 son: $\frac{1}{4}r$ y $\frac{1}{2}r$, respectivamente y $\overline{C_1C_3} = \frac{\sqrt{61}}{4}r$.
13. Se tienen 3 circunferencias que son tangentes entre sí. El radio de la circunferencia C_1 y C_2 es R, mientras que el de la circunferencia C_3 es $\frac{1}{2}R$, determina la distancia entre el centro de C_3 y el punto de tangencia entre C_1 y C_2.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 9

PERÍMETROS Y SUPERFICIES

Hipócrates DE QUIOS



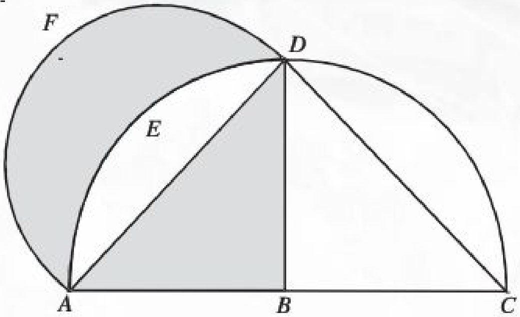
Matemático griego, precursor de Euclides. Entre los mayores logros de Hipócrates está el haber demostrado que las áreas de 2 círculos se hallan entre sí en la misma razón que los cuadrados de sus diámetros. Esto es equivalente a haber descubierto que el área de un círculo es πr^2, sin determinar el valor de π. Es posible que llegara a esta conclusión al considerar al círculo como el límite de un polígono regular.

Uno de los problemas más importantes para los griegos era el de la cuadratura del círculo o de cualquier figura en general, la cual se define así:

La cuadratura de una figura plana es la construcción con regla y compás de un cuadrado con la misma superficie que la figura plana original.

En esa época sólo se habían realizado las cuadraturas de diversas figuras planas de lados rectos, sin embargo Hipócrates fue el primero en cuadrar una figura con lados curvados conocidos como lúnulas.

Logró trazar una lúnula de área igual al triángulo que es mitad de un cuadrado dado.



Área de la lúnula $AEDF$ = Área del triángulo ADB

Definiciones

Perímetro. Es la suma de los lados de un polígono.

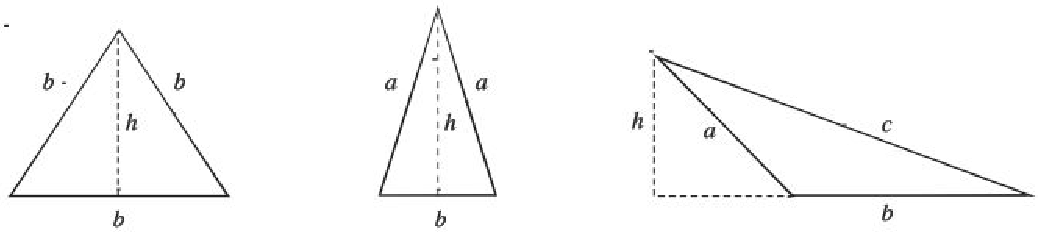
Superficie o área. Es la región del plano limitada por una figura en dos dimensiones.

Perímetro y área de una figura plana

Las siguientes fórmulas se emplean para determinar el perímetro y el área de una figura.

Triángulos

Equilátero | **Isósceles** | **Escaleno**



Equilátero

Perímetro: $P = 3b$

Área: $A = \dfrac{bh}{2}$

Isósceles

Perímetro: $P = 2a + b$

Área: $A = \dfrac{bh}{2}$

Escaleno

Perímetro: $P = a + b + c$

Área: $A = \dfrac{bh}{2}$

Área de un triángulo en función de sus lados (fórmula de Herón de Alejandría).

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Con $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, donde:

s = semiperímetro, a, b, c = lados del triángulo y h = altura

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el área del triángulo cuya base y altura son 6 y 4 cm, respectivamente.

Solución

Se sustituyen los valores en la fórmula y se obtiene:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{(6\ cm)(4\ cm)}{2} = \frac{24\ cm^2}{2} = 12\ cm^2$$

Por tanto, el área del triángulo es de 12 cm^2

2 Determina el perímetro y el área de un triángulo isósceles, si los lados miden 3, 3 y 5 *cm*.

Solución

El perímetro se define como la suma de los lados, entonces:

$$P = 3 + 3 + 5 = 11\ cm$$

Para hallar el área se aplica la fórmula de Herón de Alejandría:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

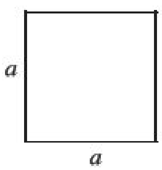
Si $s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3+3+5}{2} = \dfrac{11}{2}$, al sustituir en la fórmula:

$$A = \sqrt{\frac{11}{2}\left(\frac{11}{2}-3\right)\left(\frac{11}{2}-3\right)\left(\frac{11}{2}-5\right)} = \sqrt{\frac{11}{2}\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{11\cdot 25}{16}} = \frac{5}{4}\sqrt{11}\ cm^2$$

Por tanto, el área del triángulo es $\dfrac{5}{4}\sqrt{11}\ cm^2$

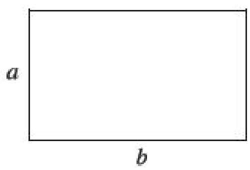
Cuadriláteros

Cuadrado



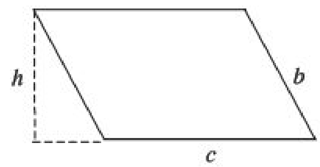
Perímetro: $P = 4a$
Área: $A = a^2$

Rectángulo



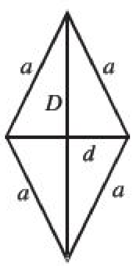
Perímetro: $P = 2\ (a + b)$
Área: $A = ab$

Paralelogramo



Perímetro: $P = 2\ (b + c)$
Área: $A = hc$

Rombo



Perímetro: $P = 4a$

Área: $A = \dfrac{Dd}{2}$

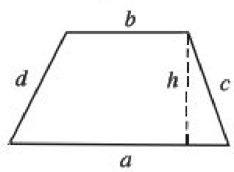
Donde:

d = Diagonal menor

D = Diagonal mayor

a = Lado del rombo

Trapecio



Perímetro:

$$P = a + b + c + d$$

Área:

$$A = \frac{(a+b)\ h}{2}$$

Donde:

a, b, c, d = Lados del trapecio

a = Base mayor

b = Base menor

h = Altura

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el perímetro y el área de un rectángulo de lados 4 y 2 *cm*, respectivamente.

Solución

Al sustituir los valores respectivos en las fórmulas del rectángulo, se obtiene:

Perímetro

$$P = 2a + 2b = 2(2\ cm) + 2(4\ cm) = 4\ cm + 8\ cm = 12\ cm$$

Área

$$A = ab = (2\ cm)\ (4\ cm) = 8\ cm^2$$

2 Encuentra el área de un paralelogramo que mide 6 *cm* de base y 2.5 *cm* de altura.

Solución

Se sustituyen los valores de $c = 6\ cm$ y $h = 2.5\ cm$, entonces:

Área

$$A = ch = (6\ cm)(2.5\ cm) = 15\ cm^2$$

3 Encuentra el área de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 8 *cm*.

Solución

Al sustituir en el área de un rombo en término de sus diagonales se determina que:

$$A = \frac{Dd}{2} = \frac{(12)(8)}{2} = \frac{96}{2} = 48\ cm^2$$

En consecuencia, el área del rombo mide: 48 cm^2

4 El perímetro de un trapecio isósceles es de 32 *cm*, si los lados iguales miden 5 *cm* y la altura 3 *cm*, determina su área.

Solución

Sea a la base mayor y b la menor, P el perímetro y c la longitud de los lados iguales del trapecio, entonces:

$$P = a + b + 2c$$

Al despejar $a + b$, se tiene:

$$a + b = P - 2c \qquad\qquad a + b = 32 - 2(5) = 32 - 10 = 22$$

Luego, el área de un trapecio se define como:

$$A = \frac{(a+b)h}{2}$$

Al sustituir $a + b = 22$ y $h = 3$, resulta que:

$$A = \frac{(22)(3)}{2} = \frac{66}{2} = 33\ cm^2$$

Por consiguiente, el área del trapecio es: 33 cm^2

Polígonos regulares

Perímetro. El perímetro se define como el producto del número de lados por la medida de cada lado del polígono.

Área. Es el semiproducto del perímetro por la apotema.

Apotema. Es la longitud del segmento que une el centro del polígono y el punto medio de uno de los lados.

Perímetro: $P = nb$

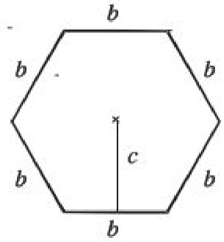
Área: $A = \dfrac{Pc}{2}$

Donde:

n = Número de lados del polígono

b = Lado del polígono

c = Apotema



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el perímetro y el área de un pentágono regular de lado 4 cm y apotema 2.7 cm.

Solución

En un pentágono el número de lados es 5, entonces el perímetro es:

$$P = 5(4) = 20\ cm$$

Para hallar el área se aplica la fórmula:

$$A = \frac{Pc}{2} = \frac{(20)(2.7)}{2} = \frac{54}{2} = 27\ cm^2$$

Por tanto, el perímetro y el área son: 20 cm y 27 cm^2, respectivamente.

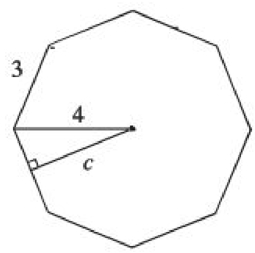
2 Determina el área de un octágono regular, si uno de sus lados mide 3 cm y el segmento que une un vértice con el centro del octágono mide 4 cm.

Solución

La apotema c es el segmento perpendicular a uno de los lados en su punto medio, esto genera un triángulo rectángulo, en consecuencia:

$(4)^2 = (1.5)^2 + c^2 \qquad 16 = 2.25 + c^2 \qquad c = \sqrt{13.75}$

$c = 3.7$



Luego, el área del octágono regular es:

$$A = \frac{8(3)(3.7)}{2} = \frac{88.8}{2} = 44.4\ cm^2$$

Por consiguiente, el área mide 44.4 cm^2

Circunferencia y círculo

Longitud de la circunferencia. Es el perímetro de un círculo y se define como el doble producto de su radio por π o el producto del diámetro por π.

Cálculo del círculo. Es el área o superficie limitada por la circunferencia y se denomina como el producto de π por el radio al cuadrado.

Perímetro

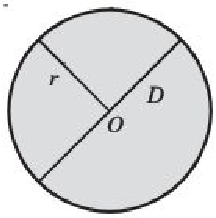
$P = 2\pi\, r = D\pi$

Donde:

r = Radio, D = Diámetro y $\pi = 3.14159...$

Área

$A = \pi r^2 = \dfrac{1}{4}\,\pi D^2$



Sector y segmento circular

Perímetro de un sector circular. Se nombra así a la suma de los radios y el arco que subtienden.

Área de un sector circular. Se define como el producto del área del círculo por la fracción $\dfrac{n}{360°}$, donde n es el ángulo que forman los radios del sector circular.

Perímetro

$P = a + 2r$

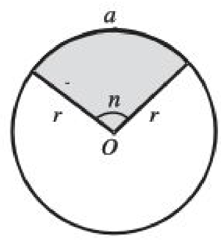
Donde:

r = Radio, n = Grados sexagesimales

a = Longitud de arco $\left(\dfrac{\pi n r}{180°}\right)$

Área

$A = \dfrac{\pi r^2 n}{360°} = \dfrac{ar}{2}$



Perímetro de un segmento circular. Se denomina así a la suma de la cuerda y el arco que subtienden los radios.

Área de un segmento circular. Es igual a la diferencia del sector circular correspondiente, menos el área del triángulo que forman los radios y la cuerda que subtienden.

Perímetro

$P = a + m$

Donde:

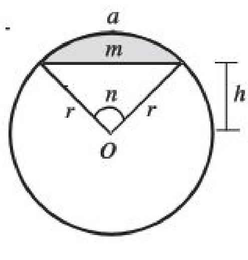
r = Radio, n = Grados sexagesimales

m = Cuerda, h = Altura del triángulo

$a = \text{Arco} = \dfrac{2\pi r n}{360°}$

Área

$A = \dfrac{\pi r^2 n}{360°} - \dfrac{mh}{2}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la longitud de la circunferencia, cuyo diámetro mide 4 *cm*.

Solución

La longitud se define como: $P = 2\pi\, r = \pi\, D$, sustituyendo $D = 4\ cm$, se obtiene:

$$P = \pi\,(4\ cm) = 4\,\pi\ cm.$$

2 Encuentra el área del círculo de radio $r = 12\ cm$.

Solución

El área de un círculo está dada por: $A = \pi\, r^2$, se sustituye $r = 12$ y se obtiene:

$$A = \pi\, r^2 = (\pi)\,(12\ cm)^2 = 144\pi\ cm^2$$

Este resultado está en términos de π; sin embargo, se puede sustituir su valor y el resultado será equivalente:

$$A = 144(3.1415)\ cm^2 = 452.37\ cm^2$$

3 Determina el área del sector circular que forman 2 radios si el ángulo que forman es de 60° y miden 4 *cm*.

Solución

En este caso $n = 60°$ y $r = 4\ cm$, al sustituir en la fórmula del sector circular resulta que:

$$A = \frac{\pi r^2 n}{360°} = \frac{\pi(4)^2(60°)}{360°} = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}cm^2$$

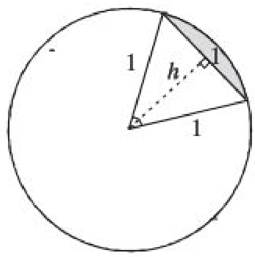
En consecuencia, el área del sector circular es $\frac{8\pi}{3}\ cm^2$

4 Encuentra el área del segmento circular formado por el arco y la cuerda subtendidos por 2 radios con longitud de 1 *cm*, si la cuerda también mide 1 *cm*.

Solución

De acuerdo con la figura, se forma un triángulo equilátero, esto significa que el ángulo formado por los radios mide 60°, luego, la altura del triángulo es:

$$h = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



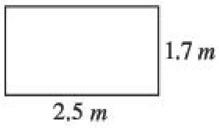
Ahora el área del segmento circular resulta así:

$$A = \frac{\pi(1)^2\, 60°}{360°} - \frac{1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)cm^2$$

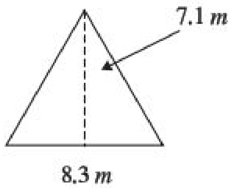
EJERCICIO 31

Calcula el perímetro y la superficie de las siguientes figuras:

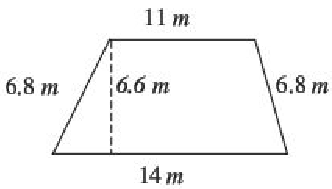
1. Rectángulo



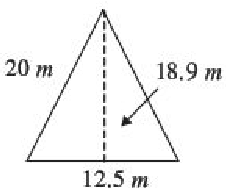
2. Triángulo equilátero



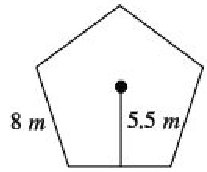
3. Trapecio isósceles



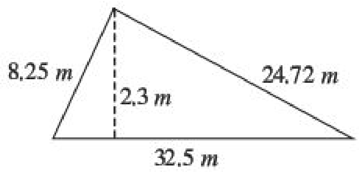
4. Triángulo isósceles



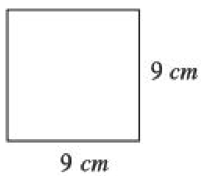
5. Pentágono regular



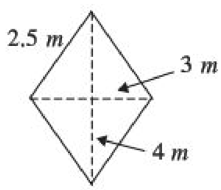
6. Triángulo escaleno



7. Cuadrado



8. Rombo



Determina las superficies de:

9. Rectángulo de 10 y 15 m.
10. Paralelogramo de base $(x - 1)$ m y altura $(x - 2)$ m.
11. Triángulo de base 14 dm y altura 9 dm.
12. Trapecio de bases 6 y 4 dm y altura de 3,5 dm.
13. Círculo de radio 30 cm.
14. Círculo de diámetro 18 cm.

Resuelve los siguientes problemas:

15. Encuentra el área de un cuadrado si el radio del círculo inscrito es de 10 cm.
16. Por impermeabilizar el techo de una casa rectangular de 12.5 por 15 m se pagaron \$500. ¿Cuál es el precio por metro cuadrado?
17. Se quiere pintar una habitación que mide 10 metros de frente por 7 de fondo y 2.5 de alto, dicha habitación tiene 4 ventanas de 1 m de alto por 1.8 m de largo. ¿Cuál será el importe si se pagan \$5 por m^2? Considera la pintura para el techo y una puerta de $1.5\ m \times 1.8\ m$.
18. Precisa la base y la altura del triángulo que tiene 486 m^2 de área, si la base es los $\frac{3}{4}$ de la altura.
19. Un trapecio tiene 400 m^2 de área, los lados paralelos tienen 35 y 45 m. ¿Cuál es el valor de la altura?
20. ¿Cuántos círculos enteros de 4 cm de radio se pueden cortar de una hoja de lata de 80 cm de largo por 65 cm de ancho y cuál es el área total de ellos?
21. Encuentra el área del triángulo que tiene como longitud de sus lados:

    a) $a = 13$, $b = 9$, $c = 10$ *b)* $a = 7$, $b = 16$, $c = 11$ *c)* $a = 8$, $b = 5$, $c = 12$
22. El área de un paralelogramo está dada por la expresión $(x^2 + 17)\ m^2$, la base es igual a $(x + 5)\ m$, y su altura es igual a $(x - 2)\ m$. Determina el valor de x y el área de este cuadrilátero.
23. Encuentra el área del sector circular si:

    a) el radio mide 4 cm y el ángulo central es de 45°

    b) el radio mide 1 cm y el ángulo central es de 60°

    c) el diámetro mide 6 cm y el ángulo central es de 90°

    d) el diámetro mide 8 cm y el ángulo central es de 240°
24. Determina el área del segmento circular si:

    a) el radio del círculo es 2 cm y el ángulo central es de 90°

    b) el radio del círculo y la cuerda correspondiente al segmento circular miden 3 cm

    c) el radio del círculo mide 8 cm y la cuerda correspondiente al segmento mide $8\sqrt{2}\ cm$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Área de figuras combinadas

Se obtienen las áreas por separado de cada una de las figuras, y se realizan las operaciones necesarias para hallar el área que se pide.

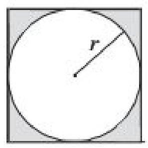
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Se inscribe una circunferencia de radio r en un cuadrado, determina el área que existe entre las 2 figuras.

Solución

El área sombreada se obtiene al restar al área del cuadrado el área del círculo, entonces:



$$A_s = (2r)^2 - (\pi r^2) = 4r^2 - \pi r^2 = r^2\,(4 - \pi)$$

Por tanto, el área sombreada es $A_s = r^2\,(4 - \pi)$

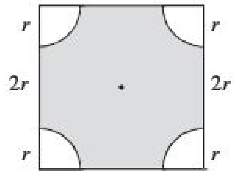
2 En cada una de las esquinas de un cuadrado de lado $4r$, se tienen cuartos de circunferencia de radio r con centro en cada uno de los vértices del cuadrado, determina el área entre el cuadrado y los cuartos de circunferencia.

Solución

El área sombreada (As) se obtiene mediante la resta del área del cuadrado (A_1), menos el área de los cuatro cuartos del círculo (A_2), por tanto:

$$A_s = A_1 - A_2$$

Donde,

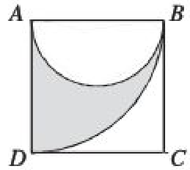


$$A_1 = (4r)^2 = 16r^2 \text{ y } A_2 = 4\left(\frac{\pi r^2}{4}\right) = \pi r^2$$

Por consiguiente, el área sombreada es:

$$A_s = 16r^2 - \pi r^2 = r^2(16 - \pi)$$

3 Determina el perímetro de la figura sombreada si el área del cuadrado $ABCD$ es 1 cm^2



Solución

El perímetro de la figura sombreada se define como:

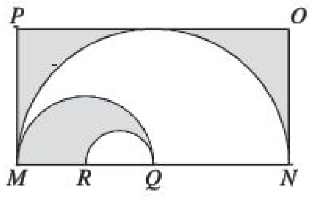
$$P = \overline{AD} + \widehat{AB} + \widehat{BD}$$

Pero $\widehat{AB} = \frac{1}{2}(2\pi)\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right) = \pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi$ y $\widehat{BD} = \frac{1}{4}(2\pi)\left(\overline{AB}\right) = \frac{1}{2}\pi(1) = \frac{1}{2}\pi$

En consecuencia, el perímetro es:

$$P = 1 + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = (1 + \pi)\ cm$$

4 Calcula el área y perímetro de la región sombreada si $\overline{ON} = 6\ cm$, $\overline{MN} = 12\ cm$, Q es el punto medio de $\overline{MN}$ y R es el punto medio de $\overline{MQ}$.



Solución

El área sombreada (A_s) se obtiene de la siguiente manera:

$$A_s = \text{Rectángulo } MNOP - \text{Semicirc. en } MN + \text{Semicirc. en } MQ - \text{Semicirc. en } RQ$$

Siendo:

Semicircunferencia con diámetro en $MN = \frac{1}{2}\pi(6)^2$

Semicircunferencia con diámetro en $MQ = \frac{1}{2}\pi(3)^2$

Semicircunferencia con diámetro en $RQ = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2$

Si se sustituye en A_s, se tiene que:

$$A_s = (12)(6) - \frac{1}{2}\pi(6)^2 + \frac{1}{2}\pi(3)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 72 - 18\pi + \frac{9}{2}\pi - \frac{9}{8}\pi = \left(72 - \frac{117}{8}\pi\right)cm^2$$

Luego, el perímetro de la figura sombreada es:

$$P = \overline{MP} + \overline{PO} + \overline{ON} + \widehat{NM} + \widehat{MQ} + \widehat{QR} + \overline{RM}$$

Si sustituyes los valores de los segmentos y de las semicircunferencias resulta que:

$$P = 6 + 12 + 6 + \pi(6) + \pi(3) + \pi\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = \left(27 + \frac{21}{2}\pi\right)cm.$$

Por tanto, el área y perímetro de la figura sombreada son: $\left(72 - \frac{117}{8}\pi\right)cm^2$ y $\left(27 + \frac{21}{2}\pi\right)cm$, respectivamente.

EJERCICIO 32

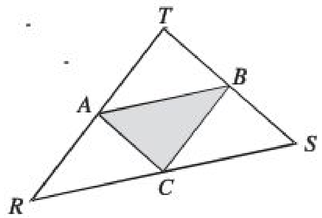
Resuelve los siguientes ejercicios:

1. De la figura, A, B, C son los puntos medios de los lados del ΔRST.

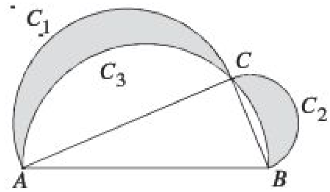
   Determina:

   a) $\overline{TS}$ si $\overline{AC} = 12\ cm$, *b)* $\overline{BC}$ si $\overline{RT} = 26\ cm$

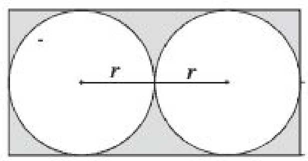
   c) Área y perímetro del ΔABC si $\overline{RT} = 42\ cm$, $\overline{RS} = 30\ cm$ y $\overline{ST} = 16\ cm$



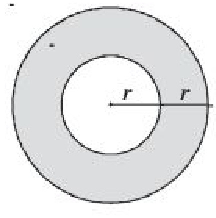
2. Encuentra el área sombreada de la siguiente figura: los centros de C_1 y C_2 son los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, $\overline{AB}$ es diámetro de C_3 y tiene una longitud de $25\ cm$, el lado $\overline{AC} = 24\ cm$.



3. Se inscriben 2 circunferencias de radio r en un rectángulo, determina el área sombreada.

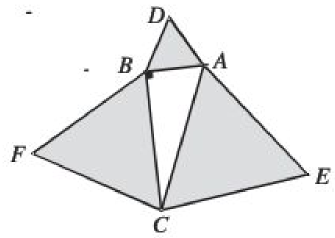


4. Se tienen 2 círculos concéntricos, determina el área del anillo circular si el radio de uno de ellos es el doble del otro.

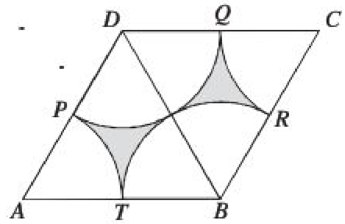


5. Si el $\Delta\, ABC$ es rectángulo y los $\Delta\, AEC$, $\Delta\, BDA$, $\Delta\, CFB$ son equiláteros, demuestra que:

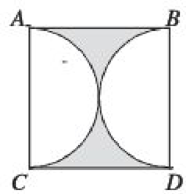
$$A_{\Delta\, BDA} + A_{\Delta\, CFB} = A_{\Delta\, AEC}$$



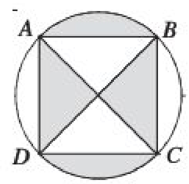
6. Los triángulos ABD y BCD son equiláteros de lado 10 cm; Q, R, S y T son los puntos medios de los lados de los triángulos. Determina el área sombreada.



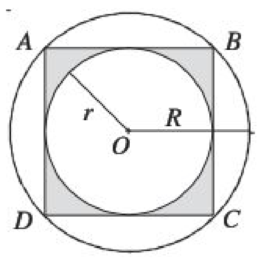
7. En un cuadrado $ABCD$ de lado 10 cm se inscriben 2 semicircunferencias, como se muestra en la figura. Encuentra el área sombreada.



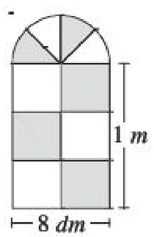
8. Se inscribe un cuadrado de lado 20 dm en una circunferencia. Determina el área sombreada que se muestra en la figura.



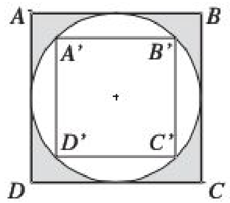
9. La figura $ABCD$ es un cuadrado y $r = \dfrac{2}{3}R$. Determina el área sombreada si $R = 12\ mm$.



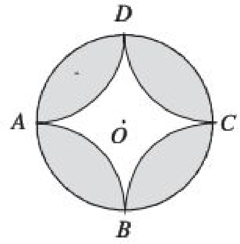
10. Calcula la cantidad de vitral opaco que se necesita en la siguiente ventana de tipo bizantino.



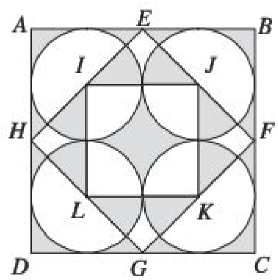
11. Si la figura $ABCD$ es un cuadrado y el área $A'B'C'D'$ tiene 392 cm^2, determina el área sombreada.



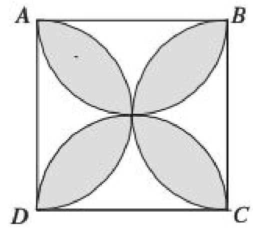
12. Precisa el área y el perímetro de la zona sombreada si $\overline{OC} = 24\ mm$ y los arcos $\widehat{AD}$, $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ y $\widehat{CD}$ son cuartos de circunferencia.



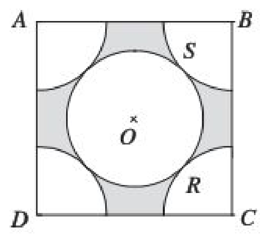
13. Encuentra el área sombreada si la figura $ABCD$ es un cuadrado de lado 16 mm, los puntos E, F, G, H son puntos medios del cuadrado $ABCD$, y los puntos I, J, K, L son puntos medios del cuadrado $HEFG$.



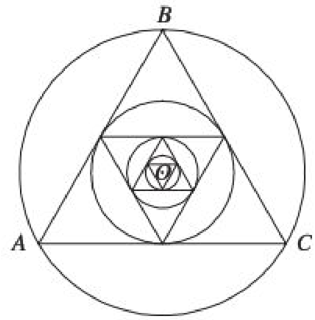
14. Halla el área de la zona sombreada si la figura $ABCD$ es un cuadrado de lado 16 mm, y AB, BC, CD y DA son semicircunferencias.



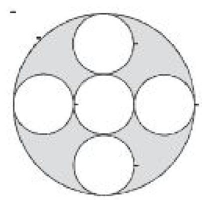
15. La figura $ABCD$ es un cuadrado de lado 32 cm, R y S son puntos medios de $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ respectivamente, y las figuras de las esquinas del cuadrado son cuartos de circunferencia. Determina el área sombreada.



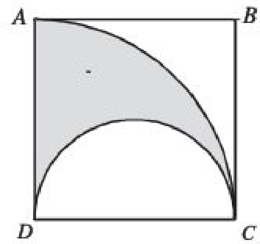
16. Si el triángulo ABC es equilátero y $\overline{OA} = 16\ dm$:
   a) Calcula el área del triángulo más pequeño.
   b) Calcula la suma de todas las superficies de los triángulos si la figura se proyecta infinitamente.



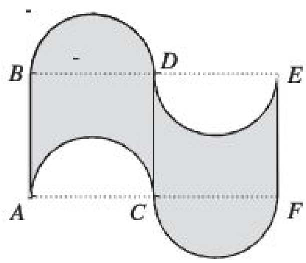
17. Determina el área de la zona sombreada en la siguiente figura si el diámetro del círculo mayor mide 18 cm.



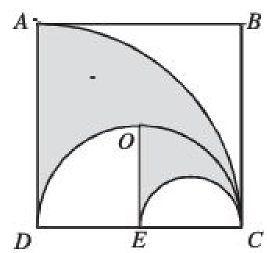
18. Encuentra el área de la zona sombreada si $\overline{AC} = \sqrt{2}cm$ y $ABCD$ es un cuadrado.



19. Determina el área y perímetro de la zona sombreada en la siguiente figura, si $ABDC$ y $DCFE$ son cuadrados de lado 1 cm.



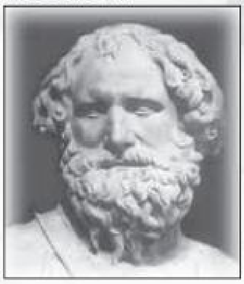
20. Precisa el área y perímetro de la zona sombreada en la siguiente figura, si $ABCD$ es un cuadrado de lado 4 cm y E es el punto medio de $\overline{CD}$.



CAPÍTULO 10

CUERPOS GEOMÉTRICOS, ÁREAS Y VOLÚMENES

Reseña HISTÓRICA



Arquímedes
(287 – 212 *a. C.*)

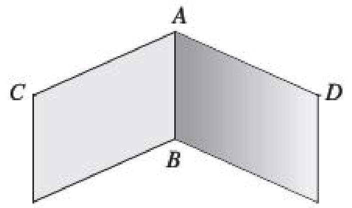
"Dadme un punto de apoyo y moveré al mundo"

Matemático y geómetra griego, a quien se considera el mayor científico y matemático de la Antigüedad, entre sus legados destacan: el principio de Arquímedes, sus aportes a la cuadratura del círculo, el estudio de la palanca, el tornillo de Arquímedes, la espiral de Arquímedes y la relación aproximada que existe entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, lo que dio origen al número π (pi).

Con sus estudios sobre áreas y volúmenes de figuras sólidas curvadas y de áreas de figuras planas se anticipó al descubrimiento del cálculo integral. Demostró que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro que la circunscribe.

Ángulo diedro

Es el espacio que limitan dos semiplanos (caras) que tienen una recta en común (arista).

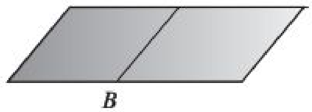


$\overline{AB}$: Arista
CAB, DAB: Caras

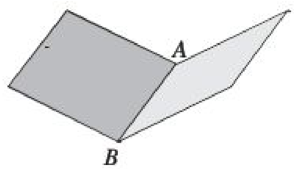
Clasificación

Un diedro es agudo, recto, obtuso o llano, según la medida del ángulo rectilíneo correspondiente.

Diedro llano. Se forma por dos semiplanos opuestos.

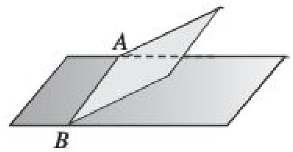


Diedro cóncavo. Es aquel cuya medida es mayor que un diedro llano.



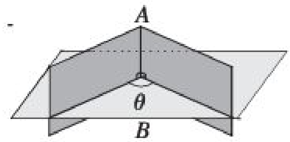
Diedro convexo. Su medida es menor que un diedro llano.

Diedros adyacentes. Son aquellos cuya suma es igual a un diedro llano.



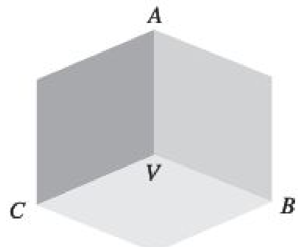
Rectilíneo correspondiente a un diedro. Es el ángulo plano θ formado por lados perpendiculares a la arista sobre las caras y es igual al ángulo diedro.

Se traza un plano perpendicular a la arista del diedro y se obtiene en la intersección el rectilíneo correspondiente.



Ángulo triedro

Es el espacio que comprenden tres planos, los cuales se cortan dos a dos y tienen un punto en común.

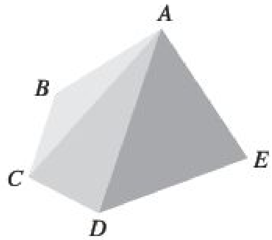


V: Vértice
$\overline{AV}$, $\overline{CV}$ y $\overline{BV}$: Arista
AVC, AVB y BVC: Caras

Clasificación

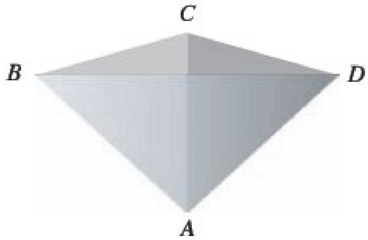
Triedros escalenos. Si las caras son desiguales.

$$BAC \neq CAD \neq ADE$$



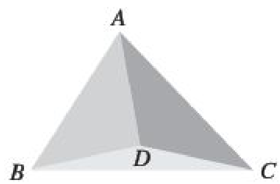
Triedros isósceles. Si dos caras son iguales y una desigual.

$$ABC = ACD \neq ABD$$



Triedros equiláteros. Si las caras son iguales.

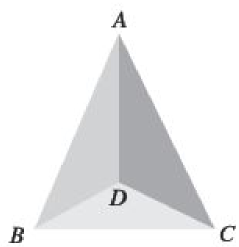
$$ADB = BDC = CDA$$



Triedros trirrectángulos. Si sus diedros y caras son rectos.

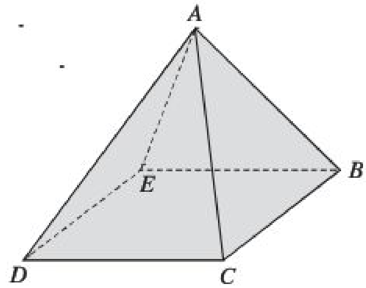
$$ADB \perp ADC,\ BDA \perp BDC,\ BDC \perp CDA$$

$$\angle\ ADB = \angle\ BDC = \angle\ CDA = 90°$$



Ángulo poliedro

Es el ángulo que forman tres o más planos que concurren en un punto llamado vértice del poliedro. De acuerdo con el número de caras, recibe el nombre de triedro, tetraedro, pentaedro, etcétera.



A: Vértice del poliedro

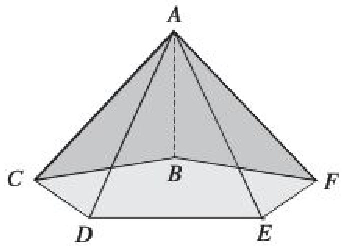
$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AE}$: Aristas

AED, ADC, ACB, ABE: Caras

Clasificación

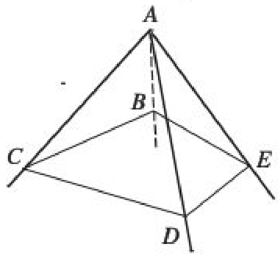
Ángulo poliedro regular. Si todos los diedros y todas las caras son iguales entre sí.

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = \angle EAF = \angle FAB$$



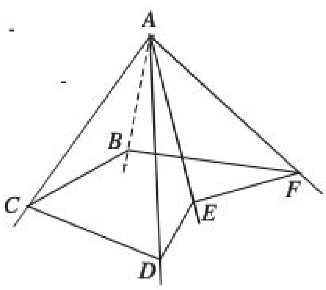
Ángulo poliedro cóncavo. Si al cortar sus caras con un plano determina un polígono cóncavo.

En el cuadrilátero $BEDC$: $\angle B$, $\angle E$, $\angle D$ y $\angle C$ son menores que 180°



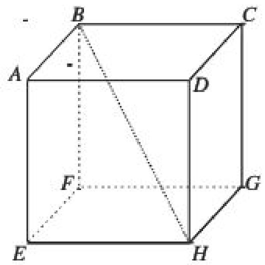
Ángulo poliedro convexo. Si al cortar sus caras mediante un plano determina un polígono convexo.

En el polígono $BCDEF$: $\angle E$ es mayor que 180°



Poliedro

Es un cuerpo geométrico al que limitan polígonos.



Elementos

Cara. Cada uno de los polígonos que lo limitan.

El cuadrado $ABCD$ es una cara del poliedro.

Arista. Las intersecciones de las caras del poliedro.

El segmento $\overline{AE}$ es una arista.

Vértice. Los puntos donde concurren las aristas de un poliedro.

El punto D es un vértice.

Ángulo diedro. Se forman con las caras que tienen un arista en común.

Lo forman las caras $ADHE$ y $CDHG$.

Ángulo poliedro. Se forman por tres o más caras que tienen un vértice en común.

Lo forman las caras $ADHE$, $CDHG$ y $ABCD$.

Diagonal. Recta que une dos vértices que no pertenecen a una misma cara.

La recta $\overleftrightarrow{BH}$ es una diagonal del poliedro.

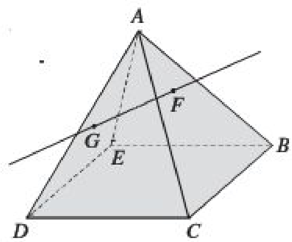
Superficie. Es el conjunto de todas las caras y se le denomina área del poliedro, ésta se obtiene mediante la suma de las áreas de las caras.

Volumen. Es la región de espacio que limita el área del poliedro.

Clasificación

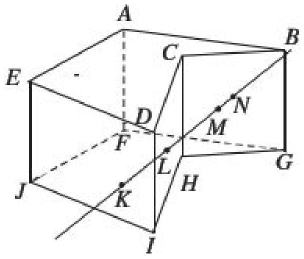
Poliedros cóncavos. Si una recta cualquiera cruza en dos puntos a sus caras.

G y F son los puntos de cruce.



Poliedros convexos. Si existe una recta que cruce en más de dos puntos a sus caras.

K, L, M y N son los puntos de cruce.

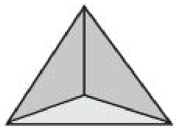


Poliedros regulares

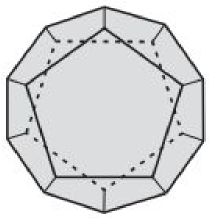
Son aquellos limitados por polígonos regulares iguales, sus ángulos poliedros son iguales y sus ángulos diedros iguales.

Clasificación

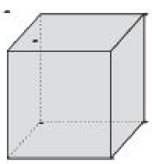
Tetraedro. Sus caras son cuatro triángulos equiláteros.



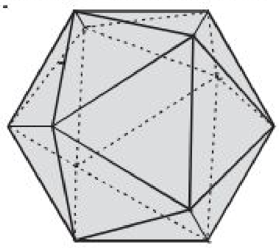
Dodecaedro. Sus caras son doce pentágonos regulares.



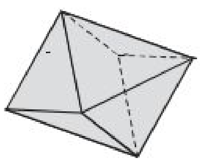
Hexaedro o cubo. Sus caras son seis cuadrados.



Icosaedro. Sus caras son veinte triángulos equiláteros.



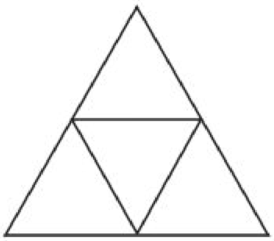
Octaedro. Sus caras son ocho triángulos equiláteros.



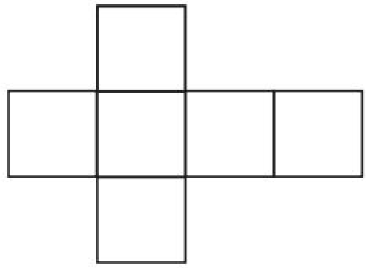
Desarrollo

Es la representación en un plano de los poliedros, en la cual se tienen sus caras unidas por las aristas.

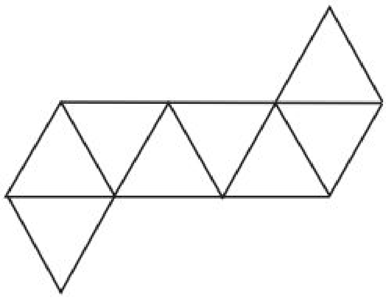
Tetraedro



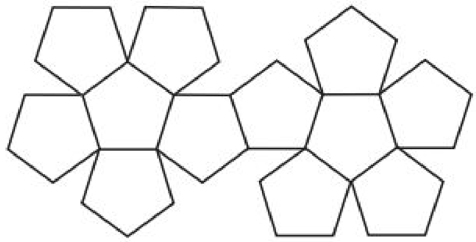
Hexaedro o cubo



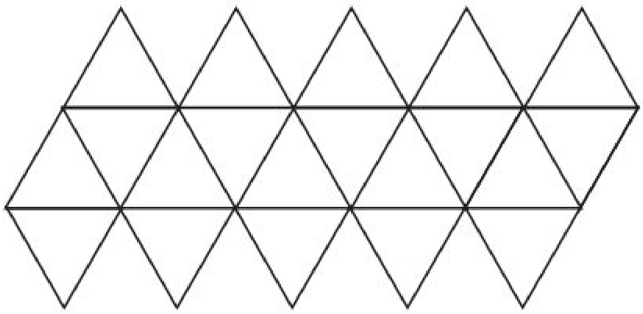
Octaedro



Dodecaedro



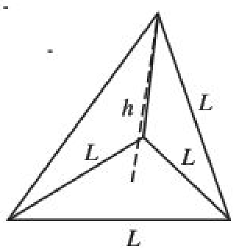
Icosaedro



Área y volumen de un poliedro regular

Tetraedro. Es el poliedro que forman cuatro caras triangulares iguales.

- **Área total:** cuatro veces el área de una de sus caras.
- **Volumen:** un tercio del área de una de las caras por la altura del cuerpo.



Área total en función de L

$$At = \sqrt{3}\,L^2$$

Volumen total en función de L

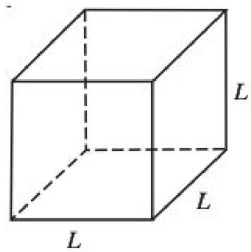
$$Vt = \frac{\sqrt{3}}{12}L^2h = \frac{\sqrt{2}}{12}L^3$$

Donde,

L = Longitud de la cara
h = Altura del cuerpo

Hexaedro o cubo. Es el poliedro que forman seis caras cuadradas iguales.

- **Área total:** seis veces el área de una de sus caras.
- **Volumen:** cubo de su arista (se le denomina arista a la longitud de uno de los lados de una de las caras).



Área total

$$At = 6L^2$$

Volumen total

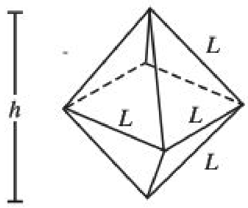
$$Vt = L^3$$

Donde,

L = Longitud de la cara

Octaedro. Es el poliedro que forman ocho caras triangulares iguales.

- **Área total:** ocho veces el área de una de sus caras.
- **Volumen:** un tercio del cuadrado de la arista por la altura total del cuerpo.



Área total en función de L

$$At = 2\sqrt{3}\,L^2$$

Volumen total en función de L

$$Vt = \frac{1}{3}L^2h = \frac{\sqrt{2}}{3}L^3$$

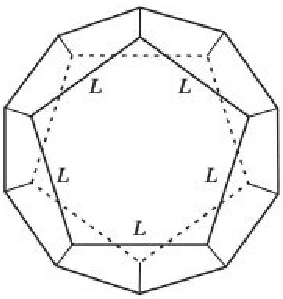
Donde,

L = Longitud de la cara

h = Altura total del cuerpo

Dodecaedro. Es el poliedro que forman 12 caras pentagonales iguales.

- **Área total:** doce veces el área de una de las caras.



Área total en función de L

$$At = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\cdot L^2$$

Volumen total en función de L

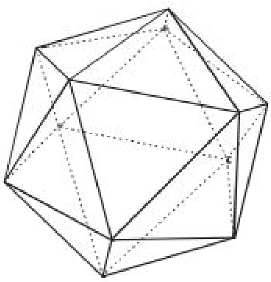
$$Vt = \frac{\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}L^3$$

Donde,

L = Longitud de la cara

Icosaedro. Es el poliedro que forman 20 caras triangulares iguales.

- **Área total:** veinte veces el área de una de las caras.



Área total en función de L

$$At = 5\sqrt{3}\cdot L^2$$

Volumen total en función de L

$$Vt = \frac{\left(15+5\sqrt{5}\right)}{12}L^3$$

Donde,

L = Longitud de la cara

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el área total y el volumen de un tetraedro con arista de 3 *cm*.

Solución

En este caso $L = 3\ cm$ y al sustituir en las fórmulas de área total y volumen se obtiene:

Área total $= \sqrt{3}L^2 = \sqrt{3}(3\ cm)^2 = 9\sqrt{3}\ cm^2$

Volumen $= \dfrac{\sqrt{2}}{12}L^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{12}(3\ cm)^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{12}(27 cm^3) = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}\ cm^3$

2 Si el volumen de un hexaedro es de 128 cm^3, determina la arista y su área total.

Solución

El volumen de un hexaedro se define como: $V = L^3$, al sustituir V y despejar L, se obtiene:

$$(128\ cm^3) = L^3 \qquad \rightarrow \qquad L = \sqrt{128\ cm^3} = 4\sqrt{2}\ cm$$

Entonces, la arista del hexaedro es $4\sqrt{2}\ cm$ y el área total es:

$$A = 6L^2 = 6(4\sqrt{2}\ cm)^2 = 6(32\ cm^2) = 192\ cm^2$$

Por tanto, el área total es 192 cm^2.

3 El área total de un octaedro es $54\sqrt{3}\ cm^2$. Determina su volumen.

Solución

El área total de un octaedro se define como: $A = 2\sqrt{3}\ L^2$, al sustituir en A y despejar L se tiene:

$$54\sqrt{3}\ cm^2 = 2\sqrt{3}\ L^2 \qquad \rightarrow \qquad L = \sqrt{\frac{54\sqrt{3}\ cm^2}{2\sqrt{3}}} = \sqrt{27\ cm^2} = 3\sqrt{3}\ cm$$

luego, el volumen se define como: $V = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\ L^3$, sustituyendo $L = 3\sqrt{3}\ cm$, se obtiene:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(3\sqrt{3}\ cm\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(27\sqrt{27}\ cm^3\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(81\sqrt{3}\ cm^3\right) = 27\sqrt{6}\ cm^3$$

Por tanto, el volumen del octaedro es: $27\sqrt{6}\ cm^3$.

4 Determina la altura de un tetraedro de arista $\sqrt{2}\ cm$ si su volumen es $\dfrac{1}{3}\ cm^3$.

Solución

El volumen de un tetraedro en términos de la arista y la altura es: $V = \dfrac{\sqrt{3}}{12}L^2h$, sustituyendo V y L, se despeja h, entonces:

$$h = \frac{12V}{\sqrt{3}L^2} = \frac{12\left(\frac{1}{3}\ cm^3\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}\ cm\right)^2} = \frac{4\ cm^3}{\sqrt{6}\ cm^2} = \frac{4\sqrt{6}}{6}\ cm = \frac{2\sqrt{6}}{3}\ cm$$

Por consiguiente, la altura del tetraedro es: $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\ cm$.

EJERCICIO 33

Determina el área total y el volumen de los siguientes poliedros regulares:

1. Tetraedro de arista 2 cm
2. Tetraedro de arista $\sqrt{3}\ cm$
3. Hexaedro de arista $2\sqrt{3}\ cm$
4. Cubo de arista $\frac{1}{2}\ dm$
5. Octaedro de arista 6 cm
6. Octaedro de arista $\sqrt{3}\ cm$
7. Dodecaedro de arista $2\sqrt{5}\ cm$
8. Dodecaedro de arista 2 cm
9. Icosaedro de arista $\sqrt{3}\ cm$
10. Icosaedro de arista $5\sqrt{2}\ dm$

Resuelve los siguientes problemas:

11. Determina el área total de un tetraedro, si su altura es $\sqrt{6}\ cm$ y su volumen es $\frac{9}{4}\sqrt{2}\ cm^3$
12. Determina el volumen de un tetraedro si su área total es $27\sqrt{3}\ cm^2$
13. Encuentra la altura de un tetraedro si su volumen es $\frac{8}{3}\ cm^3$
14. Encuentra el volumen de un cubo si su área total es 12 cm^2
15. Si el volumen de un cubo es 2 m^3, determina su arista y área total.
16. Determina la altura y el área total de un octaedro de volumen $72\sqrt{2}\ cm^3$
17. La altura de un octaedro es de 2 cm y su área total es $4\sqrt{3}\ cm^2$, encuentra su volumen.
18. Si la altura de un octaedro es de 6 cm determina su volumen.
19. Si el área total de un icosaedro es $10\sqrt{3}\ cm^2$, encuentra su volumen.
20. Determina el volumen de un icosaedro de lado L en términos del área total.

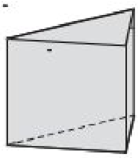
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Prisma

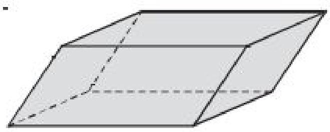
Es un poliedro en que dos de sus caras son polígonos iguales situados en planos paralelos; las caras restantes son paralelogramos.

Clasificación

Rectos. Si las caras laterales son perpendiculares a las bases.

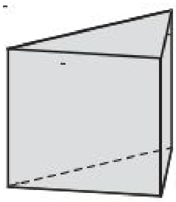


Oblicuos. Si las caras laterales no son perpendiculares a las bases.

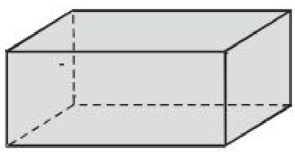


De acuerdo con sus bases, los prismas se clasifican también de acuerdo con el polígono que tienen como base.

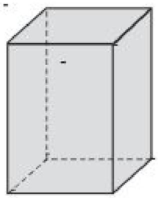
Prisma triangular. Sus bases son triángulos.



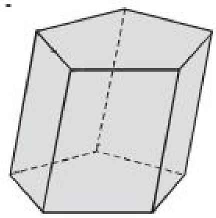
Prisma rectangular. Sus bases son rectángulos.



Prisma cuadrangular. Sus bases son cuadrados.

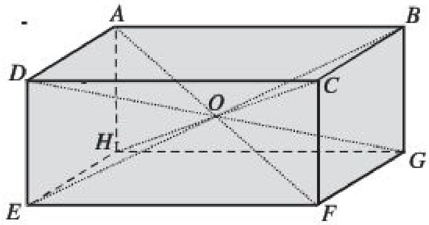


Prisma pentagonal. Sus bases son pentágonos.



Paralelepípedo

Son prismas cuya base es un paralelogramo y sus caras opuestas son paralelas, también se les conoce como ortoedros.



Características principales

1. Las cuatro diagonales de un paralelepípedo son iguales.

$$\overline{AF} = \overline{BE} = \overline{CH} = \overline{DG}$$

2. Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en su punto medio.

$$O \text{ es el punto medio de } \overline{AF}, \overline{BE}, \overline{CH} \text{ y } \overline{DG}$$

3. El punto de intersección de las diagonales de un paralelepípedo es el centro del mismo.

$$O \text{ es el centro del paralelepípedo}$$

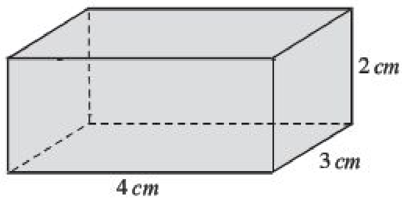
4. La longitud de una diagonal es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las aristas que concurren en un vértice.

$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 + \overline{CF}^2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

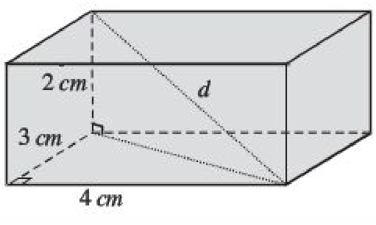
1 Determina la longitud de la diagonal de un paralelepípedo si su ancho mide 3 *cm*, el largo 4 *cm* y el alto 2 *cm*.



Solución

Sea d la diagonal del paralelepípedo, entonces:

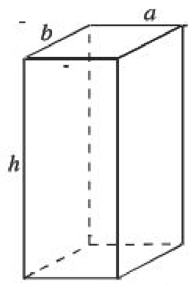
$$d = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}\ cm$$



Área y volumen

- **Área lateral de un prisma:** producto del perímetro de la base y la altura.
- **Área total:** suma del área lateral y el área de las dos bases.
- **Volumen de un prisma:** producto del área de la base y la altura del prisma.

Prisma rectangular



Área lateral

$A_L = 2(a + b)h$

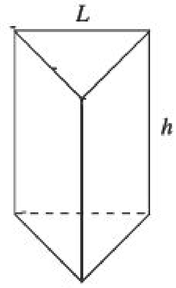
Área total

$A_T = 2(a + b)h + 2ab$

Volumen total

$V_T = abh$

Prisma triangular



Área lateral

$A_L = Ph$

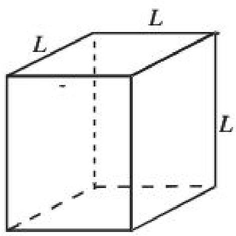
Área total

$A_T = Ph + 2A_B$

Volumen total

$V_T = A_B h$

Prisma cuadrangular (cubo)



Área lateral

$A_L = 4L^2$

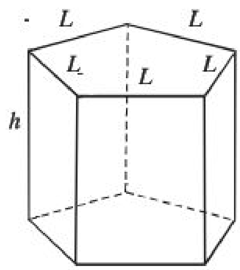
Área total

$A_T = 6L^2$

Volumen total

$V_T = L^3$

Prisma cuya base es un polígono de *n* lados



Área lateral

$A_L = Ph$

Área total

$A_T = Ph + 2A_B$

Volumen total

$V_T = A_B h$

EJEMPLOS

1 Determina el área lateral, área total y volumen de un prisma triangular de 2 *cm* de lado con altura de 4 *cm*.

Solución

El área lateral de un prisma triangular se define: $A_L = Ph$, se determina el perímetro de la base,

$$P = 3(2\ cm) = 6\ cm, \text{entonces } A_L = (3)(2\ cm)(4\ cm) = 24\ cm^2$$

El área total de un prisma triangular se define: $A_T = Ph + 2A_B$, por lo que se obtiene el área de la base triangular mediante la fórmula de Herón de Alejandría:

$$A_B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{3(3-2)(3-2)(3-2)} = \sqrt{3}\ cm^2$$

Luego el área total es:

$$A_T = Ph + A_B = 24\ cm^2 + \sqrt{3}\ cm^2 = \left(24+\sqrt{3}\right) cm^2$$

El volumen del prisma triangular se define $V_T = A_B h$, entonces:

$$V_T = A_B h = \left(\sqrt{3}\ cm^2\right)\left(4\ cm\right) = 4\sqrt{3}\ cm^3$$

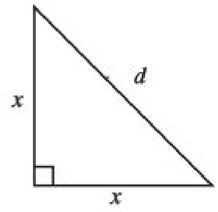
2 Determina el volumen de un prisma cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de área $\frac{25}{2}$ cm^2, si el área lateral del prisma es $\left(80+40\sqrt{2}\right) cm^2$.

Solución

El área de la base es un triángulo rectángulo isósceles, entonces:

$$A = \frac{1}{2}bh \quad \rightarrow \quad \frac{25}{2}cm^2 = \frac{1}{2}(x)(x) \quad \rightarrow \quad x^2 = 25\ cm^2 \quad \rightarrow \quad x = 5\ cm$$

luego, la hipotenusa (d) del triángulo es:



$$d^2 = x^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad d^2 = 2x^2 \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{2}x$$

al sustituir $x = 5\ cm$ se obtiene:

$$d = 5\sqrt{2}\ cm$$

El área lateral de un prisma se define como: $A_L = Ph$, si $P = 10 + 5\sqrt{2}$, entonces:

$$h = \frac{A_L}{P} = \frac{80 + 40\sqrt{2}}{10 + 5\sqrt{2}} = \frac{8\left(10 + 5\sqrt{2}\right)}{10 + 5\sqrt{2}} = 8\ cm$$

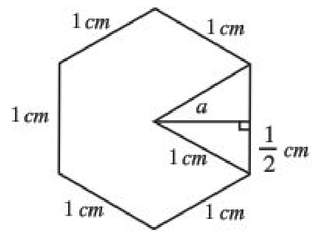
por tanto, el volumen del prisma es:

$$V_T = A_B\, h = \left(\frac{25}{2}\ cm^2\right)(8\ cm) = 100\ cm^3$$

3 Determina el área total y el volumen de un prisma hexagonal de lado 1 cm y altura 2 cm.

Solución

Se obtiene el área de la base que es el hexágono



$$A = \frac{1}{2}\ Pa, \text{ donde } a = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego,

$$A = \frac{1}{2}(6\ cm)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} cm\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm^2$$

Área total

$$A_T = Ph + 2A_B = (6)(1\ cm)(2\ cm) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm^2 = \left(12 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) cm^2$$

Volumen

$$V_T = A_B\, h = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} cm^2\right)(2\ cm) = 3\sqrt{3}\ cm^3$$

EJERCICIO 34

Determina el área lateral, total y volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

1. Prisma rectangular de dimensiones 2, 3 y 5 cm.
2. Prisma cuya base es un triángulo equilátero de 4 cm de lado y 6 cm de altura.
3. Prisma cuadrangular si el lado de la base es 1 cm y su altura 4 cm.
4. Prisma de base un hexágono regular de lado 2,5 cm y altura 6,5 cm.
5. Paralelepípedo de dimensiones $\sqrt{2}$, 4 y $2\sqrt{2}$ cm.
6. Cubo de lado 2 cm.
7. Prisma cuadrangular si el área de la base es 12 cm^2 y la altura es 8 cm.
8. Prisma cuya base es un octágono regular de lado 10 cm y apotema $(5 + 5\sqrt{2})$ cm si su altura es de 5 cm.
9. Prisma hexagonal regular si el perímetro de la base es de 60 cm y la altura es el doble que el lado de la base.

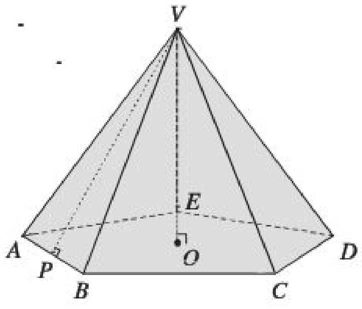
Resuelve los siguientes problemas:

10. Determina el área lateral de un prisma cuadrangular de volumen de 16 cm^3, si la altura mide 4 cm.
11. Determina el volumen de un cubo cuya diagonal es $3\sqrt{3}$.
12. Encuentra el área lateral de un paralelepípedo si las dimensiones de la base son 8 y 4 cm y una de sus diagonales mide $2\sqrt{21}$ cm.
13. Determina el volumen de un prisma cuya base es un triángulo isósceles de lados 2, 2 y 3 cm si la altura del prisma es el doble que la altura de la base.
14. Encuentra el área total de un prisma cuya base es un triángulo equilátero, si la altura excede en 1 cm al lado de la base y el área lateral es de 90 cm^2.
15. Encuentra el volumen de un prisma cuya base es un hexágono regular de lado 3 cm y área lateral de $18\sqrt{3}$ cm^2.
16. Determina el área lateral de un prisma cuyo volumen es de 8 cm^3, si su base es un triángulo rectángulo isósceles con área de 2 cm^2.
17. El área lateral de un paralelepípedo si el largo de la base es el doble que el ancho, su altura es de 2 cm y su diagonal mide 7 cm.
18. Expresa el volumen de un cubo de arista x en términos de su área total y área lateral.
19. De acuerdo con la fórmula anterior encuentra el volumen de un cubo si su área total es de 27 cm^2.
20. Expresa el área lateral de un paralelepípedo en términos de su volumen si sus dimensiones son L, $2L$ y $\frac{3}{2}L$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Pirámides

Es el espacio entre un ángulo poliedro y un plano que corta a las aristas del mismo, que recibe el nombre de base, la superficie que lo limita se denomina superficie piramidal y son caras triangulares (caras laterales) terminadas en un vértice en común.

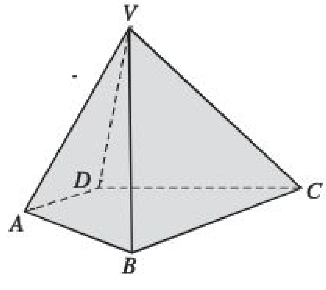


V: Vértice
O: Centro de la base
$\overline{AV}$: Generatriz
$\overline{OV}$: Altura
$\overline{PV}$: Apotema
$ABCDE$: Base de la pirámide
AVB, BVC, CVD, DVE y EVA: Caras laterales

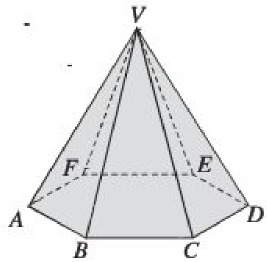
Pirámide recta. Es aquella cuyas caras son triángulos isósceles.

En la figura:

$$\overline{AV} = \overline{BV} = \overline{CV} = \overline{DV}$$



Pirámide regular. Es una pirámide recta cuya base es un polígono regular.



En la figura:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$$

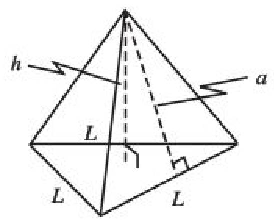
De acuerdo con el número de lados de la base, las pirámides se clasifican en:

1. Pirámide triangular, su base es un triángulo.
2. Pirámide cuadrangular, su base es un cuadrado.
3. Pirámide pentagonal, su base es un pentágono.

Área y volumen

- **Área lateral:** producto del perímetro de la base por la apotema de la pirámide (apotema de una pirámide es la altura de los triángulos que forman sus caras).
- **Área total:** suma del área lateral y el área de la base.
- **Volumen de la pirámide:** tercera parte del área de la base por la altura.

Pirámide regular



Área lateral

$$A_L = \frac{Pa}{2}$$

Área total

$$A_T = A_L + A_B$$

Volumen

$$V_T = \frac{1}{3}A_Bh$$

EJEMPLOS

1 Calcula el área total y el volumen de una pirámide cuadrangular con arista de la base de 3 cm, apotema de 6 cm y altura $\frac{3}{2}\sqrt{15}$.

Solución

El área total se define como $A_T = A_L + A_B$, entonces se determina el área lateral así como el área de la base:

Área lateral de la pirámide:

$$A_L = \left(\frac{Pa}{2}\right) = \left(\frac{4\cdot 3\cdot 6}{2}\right) = \frac{72}{2} = 36\ cm^2$$

Área de la base de la pirámide

$$A_B = L^2 = (3\ cm)^2 = 9\ cm^2$$

Por tanto, el área total es:

$$A_T = A_L + A_B = 36\ cm^2 + 9\ cm^2 = 45\ cm^2$$

El volumen se define como: $V_T = \frac{1}{3}A_Bh$, sustituyendo $A_B = 9\ cm^2$ y $h = \frac{3}{2}\sqrt{15}\ cm$, se obtiene:

$$V_T = \frac{1}{3}A_Bh = \frac{1}{3}(9\ cm^2)\left(\frac{3}{2}\sqrt{15}\ cm\right) = \frac{9}{2}\sqrt{15}\ cm^3$$

2 Determina el área lateral, área total y volumen de una pirámide hexagonal regular, si el lado de la base es de 4 *cm* y la apotema de la pirámide mide 5 *cm*.

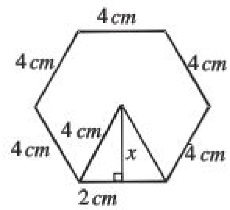
Solución

El área lateral se define como: $A_L = \frac{Pa}{2}$, siendo $P = 6(4\ cm) = 24\ cm$

$$A_L = \frac{Pa}{2} = \frac{(24\ cm)(5\ cm)}{2} = \frac{120\ cm^2}{2} = 60\ cm^2$$

El área total se define como: $A_T = \frac{Pa}{2} + A_B$, y para determinarla se debe hallar el área de la base, entonces:

$$A_B = \frac{Px}{2}, \text{ donde } x\text{: apotema del hexágono.}$$



$$x = \sqrt{(4)^2 - (2)^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\ cm$$

$$A_B = \frac{6(4\ cm)(2\sqrt{3}\ cm)}{2} = 24\sqrt{3}\ cm^2$$

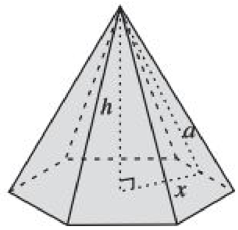
Por tanto, $A_T = 60\ cm^2 + 24\sqrt{3}\ cm^2 = \left(60 + 24\sqrt{3}\right)cm^2$

El volumen se define como: $V_T = \frac{1}{3}A_B h$, de la cual no se conoce la altura, pero la pirámide es regular, esto indica que la altura coincide con el centro del polígono, generando un triángulo rectángulo con las aristas, tanto de la base como de la pirámide, entonces:

$$h = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{(5)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{25-12} = \sqrt{13}\ cm$$

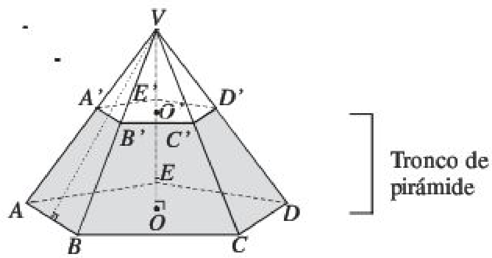
por tanto, el volumen es:

$$V_T = \frac{1}{3}A_B h = \frac{1}{3}\left(24\sqrt{3}\ cm^2\right)\left(\sqrt{13}\ cm\right) = 8\sqrt{39}\ cm^3$$



Tronco de pirámide

Es el poliedro que se obtiene al cortar una pirámide mediante una sección paralela a la base.



Características principales

- Si la pirámide inicial es regular, el tronco de pirámide también será regular y se formarán trapecios iguales.

$$ABB'A' = BCC'B' = \ldots = EAA'E'$$

- Las aristas laterales, alturas, apotemas y otras rectas trazadas desde el vértice quedan divididas en segmentos proporcionales.

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{A'V}} = \frac{\overline{BV}}{\overline{B'V}} = \ldots = \frac{\overline{EV}}{\overline{E'V}}$$

- Las áreas de la base y la sección paralela son proporcionales a los cuadrados de sus distancias al vértice.

$$\frac{Área\, ABCDE}{Área\; A'B'C'D'E'}=\frac{\left(\overline{OV}\right)^2}{\left(\overline{O'V}\right)^2}$$

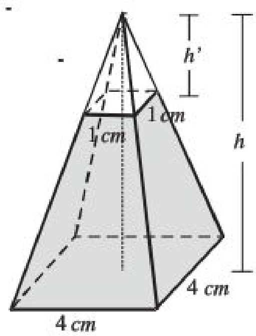
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una pirámide cuadrangular con base de 4 cm por lado y altura 8 cm, se corta mediante una sección paralela de lado de 1 cm, determina el volumen del tronco de pirámide que se genera.

Solución

Se establece la proporcionalidad entre las áreas de los polígonos y su distancia al vértice, sea A' y A el área del cuadrado de lado 1 cm y 4 cm respectivamente, entonces:



$$\frac{A'}{A}=\frac{(h')^2}{(h)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1\, cm^2}{16\, cm^2}=\frac{h'^2}{64\, cm^2}$$

al despejar h', se obtiene:

$$h'=\sqrt{\frac{(1\, cm^2)(64\, cm^2)}{16\, cm^2}}=\sqrt{4\, cm^2}=2\, cm$$

por tanto, el volumen del tronco es la diferencia de volúmenes entre la pirámide mayor (V) y la menor (V'):

$$V_T=V-V'=\frac{1}{3}(4\, cm)^2(8\, cm)-\frac{1}{3}(1\, cm)^2(2\, cm)=\frac{32}{3}cm^3-\frac{2}{3}cm^3$$
$$=10\, cm^3$$

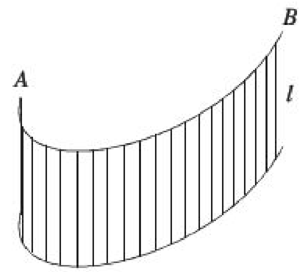
Cuerpos con superficies no planas

Este tipo de cuerpos se clasifican en:

Superficie cilíndrica. La genera una línea recta que se mueve siempre paralela a sí misma sobre una directriz.

$\overline{AB}$: Directriz

l : Generatriz

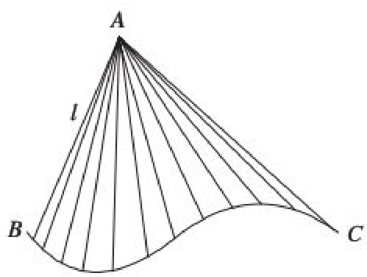


Superficie cónica. La genera una línea recta que se mueve sobre una directriz y pasa por un punto fijo llamado vértice.

A: Vértice

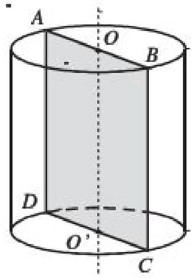
$\overline{BC}$: Directriz

l : Generatriz



Figuras de revolución. Las genera un plano al girar sobre una recta que pertenece al mismo plano.

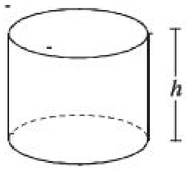
$\overline{OO'}$: Eje de la superficie
$ABCD$: Figura plana



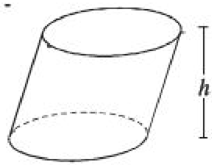
Cilindro circular

Superficie cilíndrica cerrada que limitan dos círculos iguales y paralelos llamados bases.

Cilindro circular recto. Aquel cuyas generatrices son perpendiculares a las bases.



Cilindro circular oblicuo. Aquel cuyas generatrices no son perpendiculares a las bases.

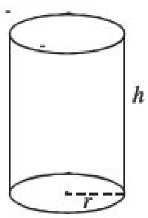


Área y volumen de un cilindro circular recto

Área lateral: producto del perímetro de la base y la altura del cilindro.

Área total: la suma del área lateral y las áreas de la base y tapa.

Volumen: producto del área de la base y la altura.

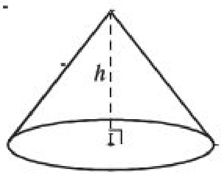


Área lateral
$A_L = 2\pi r h$
Área total
$A_T = 2\pi r (h + r)$
Volumen total
$V_T = \pi r^2 h$

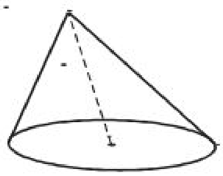
Cono circular

Es la región del espacio que limita una superficie cónica cerrada y cuya base es un círculo.

Cono circular recto. Si el segmento que une al vértice y al centro de la base es perpendicular a la base.



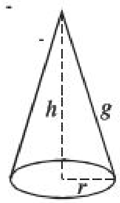
Cono circular oblicuo. Si el segmento que une al vértice y al centro de la base no es perpendicular a la base.



Área y volumen de un cono circular recto

- **Área lateral:** producto de π, radio y la generatriz.
- **Área total:** la suma del área lateral y el área de la base.

- **Volumen:** producto del área de la base y la tercera parte de la altura. La altura del cono es la recta que baja de su vértice al centro de la base.



Área lateral

$A_L = \pi\, r\, g$

Área total

$A_T = \pi\, r\,(g + r)$

Volumen total

$V_T = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el área lateral, área total y el volumen de un cilindro con radio de la base de 3 cm y con altura de 6 cm.

Solución

El área lateral de un cilindro se define como: $A_L = 2\pi\, r\, h$, se sustituye $r = 3\ cm$ y $h = 6\ cm$ y se obtiene:

$$A_L = 2\pi\,(3\ cm)(6\ cm) = 36\pi\ cm^2$$

El área total de un cilindro está dada por la fórmula: $A_t = 2\pi\, r\, h + 2\pi r^2$

$$A_T = 2\pi\,(3\ cm)\,(6\ cm) + 2\pi\,(3\ cm)^2 = 36\pi\ cm^2 + 18\pi\ cm^2 = 54\pi\ cm^2$$

El volumen se define como: $V_T = \pi\, r^2\, h$, entonces:

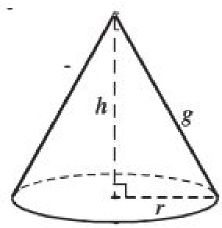
$$V_T = \pi\,(3\ cm)^2\,(6\ cm) = \pi\,(9\ cm^2)\,(6\ cm) = 54\pi\ cm^3$$

2 Determina el área lateral, área total y el volumen de un cono recto cuyo radio mide 1 cm y la altura 2 cm.

Solución

Se calcula la medida de la generatriz, la cual forma un triángulo rectángulo con la altura y el radio de la base, entonces:

$$g^2 = h^2 + r^2 \quad \rightarrow \quad g^2 = (2\ cm)^2 + (1\ cm)^2$$
$$g^2 = 4\ cm^2 + 1\ cm^2$$
$$g = \sqrt{5\ cm^2}$$
$$g = \sqrt{5}\ cm$$



Se sustituyen en las fórmulas $r = 1\ cm$, $h = 2\ cm$ y $g = \sqrt{5}\ cm$.

Área lateral

$$A_L = \pi\, r\, g = \pi(1\ cm)\left(\sqrt{5}\ cm\right) = \sqrt{5}\ \pi\ cm^2$$

Área total

$$A_T = \pi\, r\,(g + r) = \pi(1\ cm)\left(\sqrt{5}\ cm + 1\ cm\right) = \pi\left(\sqrt{5} + 1\right) cm^2$$

Volumen

$$V_T = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h = \frac{1}{3}\,\pi\,(1\ cm)^2(2\ cm) = \frac{2}{3}\,\pi\ cm^3$$

EJERCICIO 35

Determina el área lateral, total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

1. Pirámide regular cuya base cuadrangular de lado tiene 3 *cm* si su altura mide 4 *cm*.
2. Pirámide regular cuya base es un triángulo equilátero de lado 1 *cm* si su altura mide $\frac{\sqrt{6}}{3}$ *cm* y la arista de las caras laterales mide 1 *cm*.
3. Pirámide regular cuya base es un hexágono regular de lado 2 *cm* si su altura es 5 *cm*.
4. Pirámide regular cuya base es un octágono regular de lado 4 *cm*, apotema 4.8 *cm* y altura de 6.4 *cm*.
5. Cilindro circular recto de radio 3 *cm* y altura 5 *cm*.
6. Cilindro circular recto de diámetro 8 *cm* y altura 4 *cm*.
7. Cono circular recto de radio 7 *cm*, altura 9 *cm* y generatriz $\sqrt{150}$ *cm*.
8. Cono circular recto de radio 2 *cm* y altura 8 *cm*.
9. Cono circular recto de diámetro 5 *cm* y altura $\sqrt{3}$ *cm*.
10. Cono circular recto de radio 1 *cm* y generatriz 3 *cm*.

Resuelve los siguientes problemas:

11. Encuentra el volumen de una pirámide cuya base es un trapecio isósceles de base menor 2 *cm*, base mayor 4 *cm* y lados iguales $\sqrt{10}$ *cm* si la altura de la pirámide es de 4 *cm*.
12. Determina el volumen de una pirámide cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa $2\sqrt{2}$ *cm* y altura de la pirámide 6 *cm*.
13. Encuentra el volumen de una pirámide cuadrangular de lado 6 *cm*, si sus caras laterales son triángulos isósceles cuyos lados iguales miden 8 *cm*.
14. Una pirámide cuadrangular de base 8 *cm* por lado y altura 10 *cm*, se corta mediante una sección paralela de lado 4 *cm*, determina el volumen del tronco de pirámide que se genera.
15. El área lateral de una pirámide es 60 cm^2, si su base es un hexágono regular y la apotema de la pirámide mide 5 *cm*, determina el área de la base.
16. Encuentra el volumen de un cilindro circular recto si su área total es $32\pi\ cm^2$ y su altura mide 6 *cm*.
17. El volumen de un cilindro circular recto es $175\pi\ cm^3$, si el radio es dos unidades menos que su altura, determina su área lateral.
18. El área total de un cono circular recto es $24\pi\ cm^2$, si la generatriz excede en dos unidades al radio de su base, determina su volumen.
19. El área lateral de un cono circular recto es $32\pi\ cm^2$, si la medida del radio es la mitad de la generatriz, encuentra el área total.
20. Expresa el área total de un cono circular recto en términos de su volumen si su altura es el doble de su radio.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Esfera

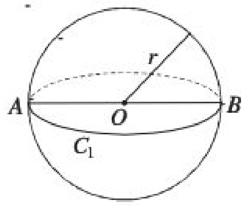
Es un sólido geométrico al que limita una superficie esférica, cuyos puntos equidistan de un punto fijo que se conoce como centro de la esfera.

O: Centro de la esfera

r: Radio de la esfera

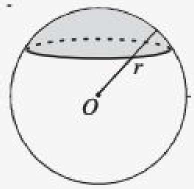
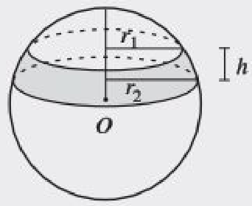
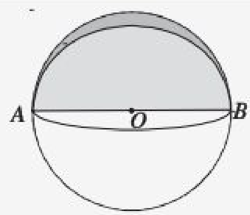
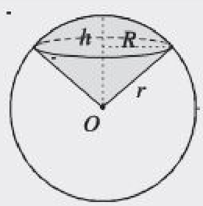
$\overline{AB}$: Diámetro de la esfera

C_1: Circunferencia mayor



Figuras esféricas y zonas esféricas

Resultan de cortar la esfera y la superficie esférica.

Casquete esférico. Se obtiene al dividir la superficie esférica en dos partes, mediante un plano; si éste pasa por el centro de la esfera los casquetes son iguales. **Segmento esférico.** Es el espacio que limitan el casquete esférico y el círculo base.	
Zona esférica. Es aquella superficie esférica limitada por dos planos. **Rebanada esférica.** Es el espacio que limitan dos planos paralelos y la zona esférica correspondiente.	
Huso esférico. Es la porción de superficie esférica que se obtiene con dos planos que concurren en un diámetro. **Cuña esférica.** Es la porción de espacio que limitan dos planos que concurren en un diámetro y el huso esférico correspondiente.	
Sector esférico. Es la porción de espacio limitado por un casquete esférico y la superficie cónica con vértice en el centro de la esfera cuya directriz es la base del casquete.	

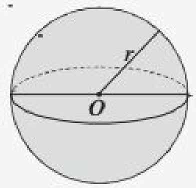
Área de figuras esféricas y volumen de cuerpos esféricos

Área: es igual al área de cuatro círculos máximos de esa esfera.

$$A = 4\pi r^2$$

Volumen: es igual a cuatro tercios de π por el radio al cubo.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



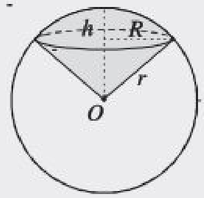
Volumen de un sector esférico

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

Donde

r: Radio de la esfera

h: Altura del casquete esférico

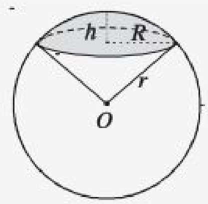


Área de un casquete esférico y zona esférica

$$A = 2\pi rh$$

Volumen de un segmento esférico

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2 (r - h)$$



Volumen de una rebanada esférica: diferencia de volúmenes de los segmentos esféricos con radio r_2 y r_1 respectivamente.

$$V = V_2 - V_1$$

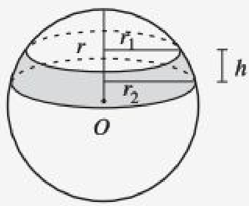
Donde

r: Radio de la esfera

r_1 y r_2: Radios de las circunferencias que limitan la rebanada

h: Altura del casquete esférico o zona esférica

R: Radio de la base del casquete esférico



Área del huso esférico

$$A = \frac{\pi r^2 n}{90°}$$

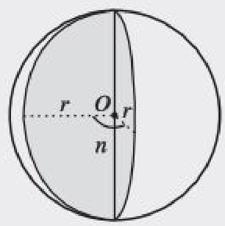
Volumen de la cuña esférica

$$V = \frac{\pi r^3 n}{270°}$$

Donde

r: Radio de la esfera

n: Ángulo que forman los planos de un huso



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el área y el volumen de una esfera de 6 cm de diámetro.

Solución

El área de una esfera está dada por la fórmula: $A = 4\pi\, r^2$, si $r = \dfrac{D}{2}$ entonces:

$$A = 4\pi\left(\frac{6\ cm}{2}\right)^2 = 4\pi\,(9\ cm^2) = 36\pi\ cm^2$$

El volumen de una esfera está dado por la fórmula: $V = \dfrac{4}{3}\pi\, r^3$, se sustituye $r = 3$, obteniendo:

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(3\ cm)^3 = \frac{4}{3}\pi\,(27\ cm^3) = 36\pi\ cm^3$$

Por tanto, $A = 36\pi\ cm^2$ y $V = 36\pi\ cm^3$.

2 Determina el área del huso esférico y el volumen de la cuña esférica que forman dos planos con un ángulo diedro de 45°, si el radio de la esfera es de 9 m.

Solución

El área del huso esférico está dada por la fórmula: $A = \dfrac{\pi\, r^2 n}{90°}$, sustituyendo $r = 9\ m$ y $n = 45°$, se obtiene:

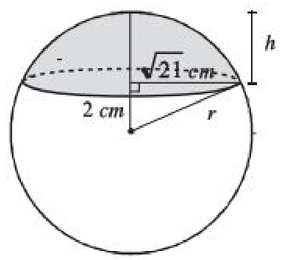
$$A = \frac{\pi(9\ m)^2\cdot 45°}{90°} = \frac{\pi\left(81\ m^2\right)}{2} = \frac{81\pi}{2}\ m^2$$

El volumen de una cuña se obtiene mediante la fórmula: $V = \dfrac{\pi\, r^3 n}{270°}$, entonces:

$$V = \frac{\pi\, r^3 n}{270°} = \frac{\pi(9\ m)^3\cdot 45°}{270°} = \frac{\pi\cdot 729\ m^3}{6} = \frac{243\pi}{2}\ m^3$$

Por tanto, el área del huso esférico y el volumen de la cuña son: $\dfrac{81\pi}{2}\ m^2$ y $\dfrac{243\pi}{2}\ m^3$ respectivamente.

3 Determina el área del casquete esférico cuya base dista 2 cm del centro, si el radio de la base es $\sqrt{21}\ cm$.



Solución

El área de un casquete esférico se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$A = 2\pi\, rh$$

de los cuales se desconoce r y h, de la figura se tiene que:

$$r = \sqrt{(2\ cm)^2 + \left(\sqrt{21}\ cm\right)^2} = \sqrt{4\ cm^2 + 21\ cm^2} = \sqrt{25\ cm^2} = 5\ cm$$

luego, la altura del casquete es:

$$h = r - 2\ cm = 5\ cm - 2\ cm = 3\ cm$$

al sustituir $r = 5\ cm$ y $h = 3\ cm$ en $A = 2\pi\, rh$, se obtiene:

$$A = 2\pi\,(5\ cm)(3\ cm) = 30\pi\ cm^2$$

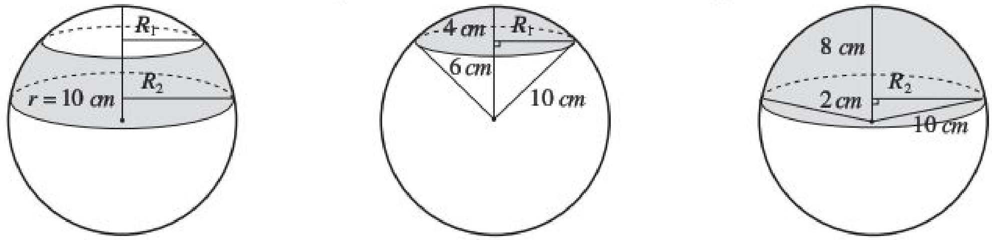
Por consiguiente, el área del casquete esférico es $30\pi\ cm^2$.

4 Una esfera de 10 *cm* de radio se corta mediante dos planos paralelos a una distancia de un mismo lado del centro de 2 *cm* y 6 *cm* respectivamente, determina el volumen del segmento esférico.

Solución

Para determinar el segmento esférico, primero se encuentran los volúmenes de los casquetes esféricos, como lo muestra la figura:

V = Volumen del segmento esférico $\quad$ V_1 = Volumen del primer casquete $\quad$ V_2 = Volumen del segundo casquete



$V = V_2 - V_1$ $\quad$ En la figura, $R_1 = \sqrt{100-36}$, $R_1 = 8\ cm$ $\quad$ En la figura, $R_2 = \sqrt{100-4}$, $R_2 = \sqrt{96}$

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2(r-h) = \frac{2}{3}\pi(10)^2(4) - \frac{1}{3}\pi(8)^2(10-4) = \frac{800}{3}\pi - \frac{384}{3}\pi = \frac{416}{3}\pi$$

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2(r-h) = \frac{2}{3}\pi(10)^2(8) - \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{96}\right)^2(10-8) = \frac{1600}{3}\pi - \frac{192}{3}\pi = \frac{1408}{3}\pi$$

Por tanto, $V = V_2 - V_1 = \frac{1408}{3}\pi\ cm^3 - \frac{416}{3}\pi\ cm^3 = \frac{992}{3}\pi\ cm^3$

EJERCICIO 36

Resuelve los siguientes problemas:

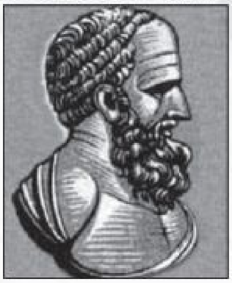
1. Determina el área y volumen de una esfera con radio de 4 *cm*.
2. Encuentra el volumen de una esfera cuyo diámetro mide $6\sqrt{5}$ *cm*.
3. El radio de una esfera es de 3 *cm*, determina el volumen de un sector esférico cuyo casquete esférico tiene una altura de 1 *cm*.
4. Determina el volumen de un sector esférico si la base de su casquete esférico se encuentra a 4 *cm* del centro de la esfera cuyo radio es de 9 *cm*.
5. El radio de una esfera mide 10 *cm*, ¿cuál es el área del casquete esférico cuya base se encuentra a 7 *cm* del centro de la esfera?
6. ¿Cuál es el área de un casquete esférico cuya base dista del centro de una esfera 2 *cm* y su radio mide $2\sqrt{15}$ *cm*?
7. ¿Cuál es el volumen de un segmento esférico cuya base tiene una altura de 2 *cm* y el diámetro de la esfera mide 6 *cm*?
8. Encuentra el volumen de un segmento esférico si su base tiene un radio de 4 *cm* y el radio de la esfera mide 5 *cm*.
9. Una esfera con un radio de 12 *cm* se corta mediante dos planos paralelos a una distancia de un mismo lado del centro de 4 *cm* y 7 *cm* respectivamente, determina el área de la zona esférica y el volumen de la rebanada esférica.
10. Una esfera con un radio de 1 *cm* se corta mediante dos planos paralelos, uno a cada lado del centro a una distancia de $\frac{1}{2}$ *cm* y $\frac{1}{3}$ *cm* respectivamente, determina el área de la zona esférica y el volumen de la rebanada esférica.

11. Encuentra el área del huso esférico si el ángulo que forman sus planos es de 60° y el radio de la esfera mide 10 cm.
12. El área de un huso esférico es $\frac{16}{3}\pi$, si el radio de la esfera mide 2 cm, ¿qué ángulo forma el huso esférico?
13. Calcula el volumen de una cuña esférica si el ángulo que forman sus planos es de 30° si el área de la esfera es $36\pi\, cm^2$.
14. Dos planos que concurren en un diámetro forman una cuña esférica de volumen $\frac{9}{2}\pi\, cm^3$ y un huso esférico de área $3\pi\, cm^2$, encuentra el radio, área y volumen de la esfera.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 11
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

TRIGONOMETRÍA



Hiparco de Nicea
(190-120 *a. C.*)

Rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y lados en cualquier triángulo.

Desde hace más de 3000 años los babilonios y los egipcios fueron los primeros en utilizar los ángulos y las razones trigonométricas para efectuar medidas en la agricultura, así como para la construcción de pirámides.

Hiparco de Nicea

Astrónomo, matemático y geógrafo griego nacido en Nicea. Uno de los principales desarrolladores de la trigonometría (plana y esférica), construyó tablas que relacionaban los ángulos centrales con las cuerdas delimitadas por su ángulo central correspondiente. Gracias a esta tabla, equivalente a una tabla de senos actual, logró relacionar los lados y ángulos en cualquier triángulo plano.

Los triángulos esféricos se forman en la superficie de una esfera y son objeto de estudio de la trigonometría esférica, la cual se aplica en la náutica y navegación.

Funciones trigonométricas

A las razones que existen entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se les llama funciones o razones trigonométricas.

Definiciones

Seno de un ángulo. Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

Coseno de un ángulo. Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

Tangente de un ángulo. Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

Cotangente de un ángulo. Es la razón entre el cateto adyacente y el opuesto.

Secante de un ángulo. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

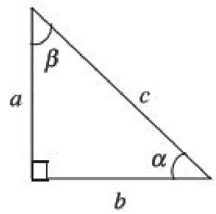
Cosecante de un ángulo. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

Nota: los catetos se nombran según el ángulo agudo que se utilice.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el siguiente triángulo determina los catetos opuesto y adyacente para cada uno de los ángulos agudos.



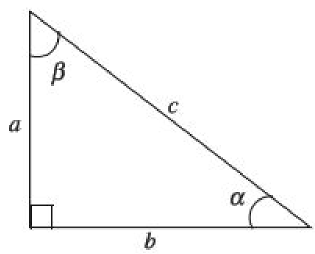
Solución

Para el ángulo α:
cateto opuesto $= a$
cateto adyacente $= b$
hipotenusa $= c$

Para el ángulo β:
cateto opuesto $= b$
cateto adyacente $= a$
hipotenusa $= c$

El cateto que es opuesto para uno de los ángulos será el adyacente para el otro, siendo la hipotenusa el lado que no presenta variante.

2 Obtén las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del siguiente triángulo rectángulo:



Solución

En el triángulo la hipotenusa es c y los catetos son a y b, entonces las funciones para los ángulos agudos α y β son:

Funciones de α:	**Funciones de β:**
$sen\,\alpha = \frac{a}{c}$	$sen\,\beta = \frac{b}{c}$
$cos\,\alpha = \frac{b}{c}$	$cos\,\beta = \frac{a}{c}$
$tan\,\alpha = \frac{a}{b}$	$tan\,\beta = \frac{b}{a}$
$ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$	$ctg\,\beta = \frac{a}{b}$
$sec\,\alpha = \frac{c}{b}$	$sec\,\beta = \frac{c}{a}$
$csc\,\alpha = \frac{c}{a}$	$csc\,\beta = \frac{c}{b}$

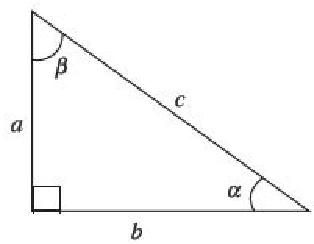
Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo guardan ciertas relaciones entre sí:

Función directa			**Función recíproca**	
seno	(sen)	$\longleftrightarrow$	*cosecante*	(csc)
coseno	(cos)	$\longleftrightarrow$	*secante*	(sec)
tangente	(tan)	$\longleftrightarrow$	*cotangente*	(ctg)

Cofunciones

Cualquier función de un ángulo es igual a la cofunción de su complemento.

En el triángulo rectángulo:



Por geometría:
$90° + \alpha + \beta = 180°$
Donde:
$\alpha + \beta = 90°$; $\beta = 90° - \alpha$
por tanto, α y β son complementarios.

Entonces, mediante las definiciones:

$$sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha) = cos\ \beta$$
$$cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha) = sen\ \beta$$
$$tan\ \alpha = ctg\ (90° - \alpha) = ctg\ \beta$$
$$ctg\ \alpha = tan\ (90° - \alpha) = tan\ \beta$$
$$sec\ \alpha = csc\ (90° - \alpha) = csc\ \beta$$
$$csc\ \alpha = sec\ (90° - \alpha) = sec\ \beta$$

Ejemplos

Dadas las funciones trigonométricas, se determinan sus respectivas cofunciones:

$$sen\, 32° = cos\,(90° - 32°) = cos\, 58°$$

$$tan\, 25° = ctg\,(90° - 25°) = ctg\, 65°$$

$$cos\, \frac{\pi}{3} = sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = sen\, \frac{\pi}{6}$$

$$sec\, \frac{\pi}{4} = csc\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = csc\, \frac{\pi}{4}$$

Rango numérico

Dado que la hipotenusa de un triángulo rectángulo siempre es mayor que cualquiera de los dos catetos, los valores del seno y el coseno de un ángulo agudo no pueden ser mayores que +1, ni menores que –1, mientras que los valores de las funciones cosecante y secante, al ser recíprocas del seno y coseno, no pueden estar entre –1 y +1; los catetos de un triángulo rectángulo pueden guardar entre sí cualquier proporción, por tanto, los valores de la tangente y la cotangente varían sobre todo el conjunto de números reales.

Valor

Dada una función trigonométrica de un ángulo agudo se pueden determinar las demás funciones a partir de la construcción de un triángulo rectángulo y el empleo del teorema de Pitágoras como a continuación se ilustra.

EJEMPLOS

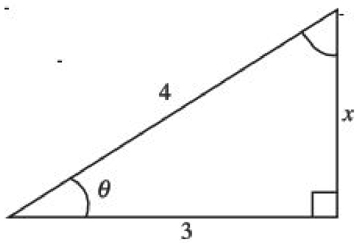
Ejemplos

1 Si θ es agudo, y $cos\,\theta = \frac{3}{4}$, calcula los valores de las funciones trigonométricas para θ.

Solución

Se construye un triángulo rectángulo, donde θ es uno de los ángulos agudos, la hipotenusa es 4 y el cateto adyacente es 3.

Se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar el valor del lado restante:



$$(4)^2 = (x)^2 + (3)^2$$
$$16 = x^2 + 9$$
$$16 - 9 = x^2$$
$$7 = x^2$$
$$\sqrt{7} = x$$

Por tanto, las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ son:

$$sen\,\theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad ctg\,\theta = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \qquad csc\,\theta = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$tan\,\theta = \frac{\sqrt{7}}{3} \qquad sec\,\theta = \frac{4}{3}$$

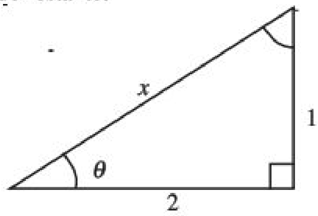
2 Si θ es agudo y $tan\,\theta = \dfrac{1}{2}$, calcula los valores de seno y coseno del ángulo θ.

Solución

Se construye un triángulo rectángulo, donde θ es uno de los ángulos agudos, el cateto opuesto es 1 y el cateto adyacente es 2.

Se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar el valor del lado restante:

$$(x)^2 = (1)^2 + (2)^2$$
$$x^2 = 1 + 4$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \sqrt{5}$$

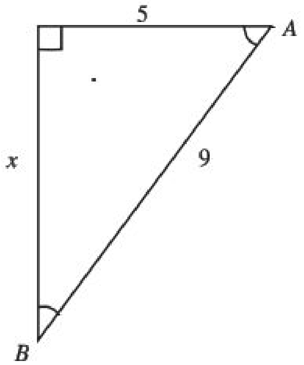


Por consiguiente, $sen\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ y $cos\,\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

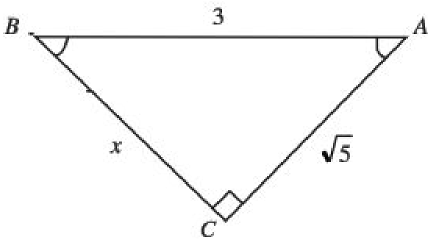
EJERCICIO 37

1. Obtén el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos, en los siguientes triángulos:

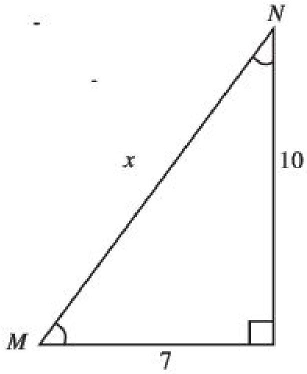
a)



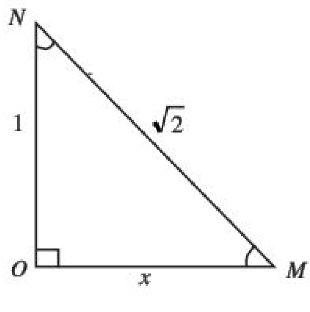
c)



b)



d)



2. Obtén el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos en los siguientes triángulos rectángulos:

a) Si θ y α son los ángulos agudos y $cos\,\theta = \dfrac{1}{5}$

b) Si $\angle A$ y $\angle B$ son complementarios y $tan\,B = \dfrac{2}{3}$

c) Si $\angle M$ y $\angle N$ son complementarios y $csc\,N = 2$

d) Si θ y α son los ángulos agudos y $sec\,\theta = 2\sqrt{3}$

e) Si $\alpha + \beta = 90°$ y $ctg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

f) sen $A = \dfrac{4}{\sqrt{29}}$ y $\angle B$ es complemento de $\angle A$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Signos de las funciones trigonométricas en el plano cartesiano

Si un triángulo rectángulo se ubica en el plano cartesiano, de manera que uno de sus catetos coincida con el eje horizontal, las funciones trigonométricas tendrán un signo dependiendo del cuadrante sobre el cual se encuentre dicho triángulo.

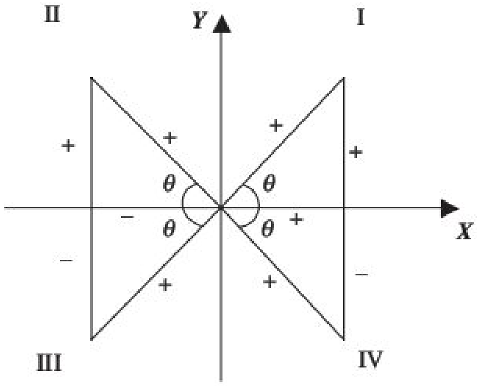


Tabla de signos

	I cuadrante	II cuadrante	III cuadrante	IV cuadrante
Seno	+	+	−	−
Coseno	+	−	−	+
Tangente	+	−	+	−
Cotangente	+	−	+	−
Secante	+	−	−	+
Cosecante	+	+	−	−

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sea el punto $A(-3, 4)$, determina las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha = \angle X\,O\,A$.

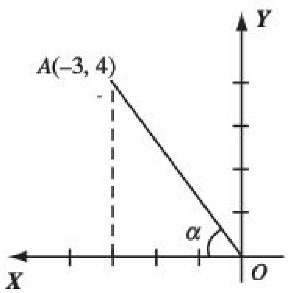
Solución

Por el teorema de Pitágoras:

$$\left(\overline{OA}\right)^2 = (-3)^2 + (4)^2$$

$$\left(\overline{OA}\right)^2 = 9 + 16$$

$$\overline{OA} = \sqrt{25} = 5$$



Por tanto, las funciones trigonométricas del ángulo α, son:

$$sen\ \alpha = \frac{4}{5} \qquad tan\ \alpha = -\frac{4}{3} \qquad sec\ \alpha = -\frac{5}{3}$$

$$cos\ \alpha = -\frac{3}{5} \qquad ctg\ \alpha = -\frac{3}{4} \qquad csc\ \alpha = \frac{5}{4}$$

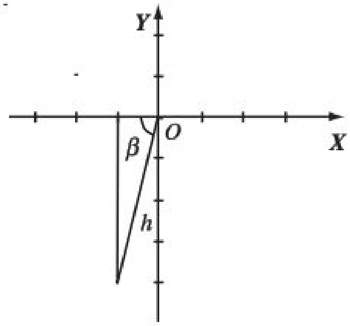
2 Calcula las funciones trigonométricas para el ángulo β, si se sabe que $\tan\beta = 4$ y $180° \leq \beta \leq 270°$.

Solución

El ángulo se define en el tercer cuadrante y la función tangente es positiva, por tanto, $\tan\beta = \frac{4}{1} = \frac{-4}{-1}$, estos valores se ubican en el plano cartesiano.

Por el teorema de Pitágoras:

$$(h)^2 = (-4)^2 + (-1)^2$$
$$h^2 = 16 + 1$$
$$h = \sqrt{17}$$



Entonces, las funciones trigonométricas del ángulo β son:

$$sen\,\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17} \qquad \tan\beta = 4 \qquad \csc\beta = -\frac{\sqrt{17}}{4}$$

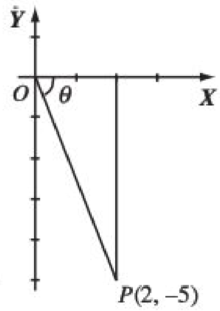
$$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{17} \qquad ctg\,\beta = \frac{1}{4} \qquad \sec\beta = -\sqrt{17}$$

3 Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ que forman el punto $P(2, -5)$ y el eje horizontal.

Solución

Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{OP}^2 = (2)^2 + (-5)^2$$
$$\overline{OP} = \sqrt{4+25}$$
$$\overline{OP} = \sqrt{29}$$



Las funciones trigonométricas son:

$$sen\,\theta = -\frac{5}{\sqrt{29}} = -\frac{5\sqrt{29}}{29} \quad \tan\theta = -\frac{5}{2} \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29} \quad ctg\,\theta = -\frac{2}{5} \quad \csc\theta = -\frac{\sqrt{29}}{5}$$

EJERCICIO 38

1. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha = < XOM$ que forman el punto $M(12, -5)$ y el eje horizontal.
2. Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\alpha =\ YON$ que forman el punto $N(-4, -7)$ y el eje vertical.
3. Determina las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\beta = XOA$ que forman el punto $A(2, 3)$ y el eje horizontal.
4. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo agudo $\omega =\ XOB$ que forman el punto $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y el eje horizontal.
5. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo α, si se encuentra en el tercer cuadrante con $csc\ \alpha = -\frac{3}{2}$
6. Determina las funciones trigonométricas del ángulo α, si se encuentra en el cuarto cuadrante con $ctg\ \alpha = -\frac{2}{\sqrt{7}}$
7. Encuentra las funciones trigonométricas del ángulo β, si se sabe que $cos\ \beta = -\frac{9}{13}$ y $90° \leq \beta \leq 180°$
8. Obtén las funciones trigonométricas del ángulo ω, si se sabe que $ctg\ \omega = -8$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \omega \leq 2\pi$
9. Si $csc\ \delta = \frac{13}{5}$ si $90° \leq \delta \leq 180°$, calcula las funciones trigonométricas del ángulo δ
10. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo β si se sabe que $cos\ \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\pi \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}$
11. Si $sen\ \alpha > 0$, $tan\ \alpha < 0$ y $sec\ \alpha = -2$, calcula las funciones trigonométricas del ángulo α
12. Si $sec\ \alpha > 0$, $ctg\ \alpha < 0$ y $cos\ \alpha = \frac{1}{2}$, calcula las funciones trigonométricas del ángulo α

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones trigonométricas para ángulos mayores que 90°

Todo ángulo mayor que 90°, se puede expresar en la forma $(n \cdot 90° \pm \alpha)$ o bien $\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, donde n es un entero positivo y α es un ángulo cualquiera, la función de dicho ángulo será equivalente a:

i) La misma función de α si n es un número par.
ii) La cofunción correspondiente de α si n es un número impar.

Esto con el fin de expresar la función trigonométrica de dicho ángulo en una expresión equivalente, pero con un ángulo agudo, conservando el signo correspondiente a la función dada, según el cuadrante donde se encuentre el lado terminal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa como función de un ángulo agudo $tan\ 140°$.

Solución

El ángulo se sitúa en el segundo cuadrante, donde la función tangente es negativa, entonces:

$$tan\ 140° = tan\ (2 \cdot 90° - 40°) = -tan\ 40°$$

Ahora bien, $tan\ 140°$ se puede expresar también como $tan\ (1 \cdot 90° + 50°)$, $n = 1$, por tanto se utiliza cotangente, la cual es cofunción de la tangente, entonces:

$$tan\ 140° = tan\ (1 \cdot 90° + 50°) = -ctg\ 50°$$

2 Expresa como función de un ángulo agudo $sen\ \frac{11}{9}\pi$.

Solución

El ángulo está en el tercer cuadrante, donde la función seno es negativa, entonces:

$$sen\ \frac{11}{9}\pi = sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2}{9}\pi\right) = -sen\ \frac{2}{9}\pi$$

$sen\ \frac{11}{9}\pi$ se puede representar también como $sen\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{18}\pi\right)$, $n = 3$ por tanto se utiliza la cofunción del seno, es decir, se expresa en términos del coseno.

$$sen\ \frac{11}{9}\pi = sen\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{18}\pi\right) = -cos\ \frac{5}{18}\pi$$

3 Expresa como función de un ángulo agudo sec 350° 15' 28".

Solución

El ángulo está situado en el cuarto cuadrante donde la función secante es positiva, entonces:

$$sec\ 350°\ 15'\ 28'' = sec\ (4\cdot 90° - 9°\ 44'\ 32'') = sec\ 9°\ 44'\ 32''$$

O en términos de cosecante:

$$sec\ 350°\ 15'\ 28'' = sec\ (3\cdot 90° + 80°\ 15'\ 28'') = csc\ 80°\ 15'\ 28''$$

4 Expresa como función de un ángulo agudo cos 1 000°.

Solución

Cuando el ángulo es mayor que 360°, debe dividirse entre esta cantidad para obtener el número de giros o vueltas que da el lado terminal y el residuo es el ángulo que debe expresarse en función de un ángulo agudo.

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 2 \leftarrow \text{giros o vueltas} \\ \cline{2-2} 360° & 1\,000° \\ & \ \ 280° \leftarrow \text{Ángulo equivalente} \end{array}$$

El ángulo equivalente a 1 000° es 280°, situado en el cuarto cuadrante donde la función coseno es positiva, entonces:

$$cos\ 1\,000° = cos\ 280° = cos\ (4\cdot 90° - 80°) = cos\ 80°$$

O bien, en términos de la función seno,

$$cos\ 1\,000° = cos\ 280° = cos\ (3\cdot 90° + 10°) = sen\ 10°$$

5 Expresa como función de un ángulo agudo sen 6 290°.

Solución

Se obtiene el ángulo equivalente, que sea menor que 360°,

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 17 \\ \cline{2-2} 360° & 6\,290° \\ & \ \ 170° \end{array}$$

El ángulo equivalente es 170°, el cual se sitúa en el segundo cuadrante donde la función seno es positiva, entonces,

$$sen\ 6\,290° = sen\ 170° = sen\ (2\cdot 90° - 10°) = sen\ 10°$$

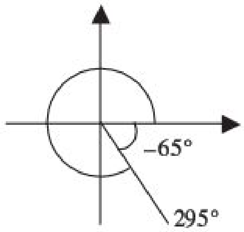
O bien, en términos de coseno,

$$sen\ 6\,290° = sen\ 170° = sen\ (1\cdot 90° + 80°) = cos\ 80°$$

6 Expresa como función de un ángulo agudo $tan(-65°)$.

Solución

Se traza el ángulo negativo, el cual girará en sentido horario y será equivalente a un ángulo de 295°, que se sitúa en el cuarto cuadrante, donde la función tangente es negativa.



Por consiguiente:

$$tan\,(-65°) = tan\,295° = tan\,(4 \cdot 90° - 65°) = -tan\,65°$$

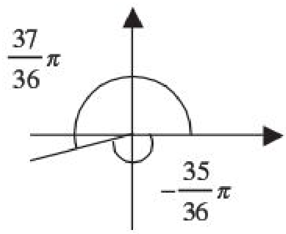
O bien, en términos de cotangente:

$$tan\,(-65°) = tan\,295° = tan\,(3 \cdot 90° + 25°) = -ctg\,25°$$

7 Expresa como función de un ángulo agudo $sen\left(-\frac{35}{36}\pi\right)$

Solución

Se traza el ángulo negativo, el cual se encuentra en el tercer cuadrante donde la función seno es negativa.



Por tanto,

$$sen\left(-\frac{35}{36}\pi\right) = sen\,\frac{37}{36}\pi = sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{36}\right) = -sen\,\frac{\pi}{36}$$

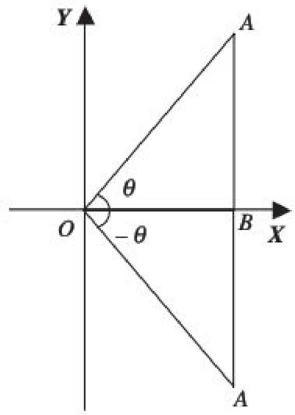
O bien, en términos de coseno:

$$sen\left(-\frac{35}{36}\pi\right) = sen\,\frac{37}{36}\pi = sen\left(3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{17}{36}\pi\right) = -cos\,\frac{17}{36}\pi$$

Funciones trigonométricas de ángulos negativos

Los ángulos negativos giran en sentido horario y las funciones trigonométricas de ángulos negativos, se expresan en términos de funciones trigonométricas de ángulos positivos.

En el triángulo $\Delta\ AOB$, ubicado en el primer cuadrante:



$$sen\ \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} \qquad tan\ \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \qquad sec\ \theta = \frac{\overline{AO}}{\overline{BO}}$$

$$cos\ \theta = \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}} \qquad ctg\ \theta = \frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} \qquad csc\ \theta = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$$

En el triángulo $\Delta\ AOB$, ubicado en el cuarto cuadrante:

$$sen\ (-\theta) = -\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} \qquad tan\ (-\theta) = -\frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \qquad sec\ (-\theta) = \frac{\overline{AO}}{\overline{BO}}$$

$$cos\ (-\theta) = \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}} \qquad ctg\ (-\theta) = -\frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} \qquad csc\ (-\theta) = -\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}$$

Por consiguiente: $sen\ (-\theta) = -sen\ \theta$ $\quad tan\ (-\theta) = -tan\ \theta$ $\quad sec\ (-\theta) = sec\ \theta$

$cos\ (-\theta) = cos\ \theta$ $\quad ctg\ (-\theta) = -ctg\ \theta$ $\quad csc\ (-\theta) = -csc\ \theta$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa $sen\ (-30°)$ en términos de un ángulo positivo.

Solución

Al aplicar $sen\ (-\theta) = -sen\ \theta$, se obtiene:

$$sen\ (-30°) = -sen\ 30°$$

2 Expresa $tan\ (-120°)$ en términos de un ángulo positivo y agudo.

Solución

Se aplica $tan\ (-\theta) = -tan\ \theta$ y se obtiene:

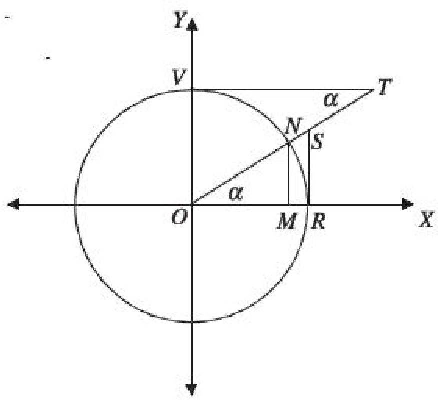
$$tan\ (-120°) = -tan\ 120°$$

y al reducir a un ángulo agudo,

$$tan\ (-120°) = -tan\ 120° = -tan\ (2 \cdot 90° - 60°) = -(-tan\ 60°) = tan\ 60°$$

Valores numéricos de las funciones trigonométricas circulares

Los valores de las funciones trigonométricas guardan una estrecha relación con el círculo unitario y se pueden calcular por medio de la medición de algunos segmentos de éste, el uso de tablas matemáticas o con el empleo de una calculadora.



Si se consideran las distancias $\overline{OR} = \overline{ON} = \overline{OV} = 1$, entonces para calcular el valor de las funciones trigonométricas del ángulo α, se emplean las definiciones de las mismas y representan la longitud de los segmentos:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\overline{MN}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{MN}}{1} = \overline{MN}$$

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OM}}{1} = \overline{OM}$$

$$tan\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\overline{SR}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{SR}}{1} = \overline{SR}$$

$$ctg\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{\overline{VT}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{VT}}{1} = \overline{VT}$$

$$sec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OS}}{1} = \overline{OS}$$

$$csc\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}$$

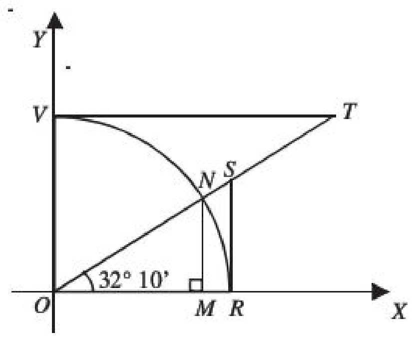
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el valor de las funciones trigonométricas del ángulo 32° 10'.

Solución

Si se emplea el círculo unitario para calcular las funciones, donde $\alpha = 32°\ 10'$, entonces:



Se consideran los segmentos $\overline{OR} = \overline{ON} = \overline{OV} = 1$, entonces:

$sen\ 32°\ 10' = \overline{MN} = 0{,}5324$

$cos\ 32°\ 10' = \overline{OM} = 0{,}8465$

$tan\ 32°\ 10' = \overline{SR} = 0{,}6289$

$csc\ 32°\ 10' = \overline{OT} = 1{,}8783$

$sec\ 32°\ 10' = \overline{OS} = 1{,}1813$

$ctg\ 32°\ 10' = \overline{VT} = 1{,}5900$

Si se emplean las tablas matemáticas (incluidas al final del texto) para calcular el valor de las funciones trigonométricas de 32° 10', entonces, se procede de la siguiente forma:

Grados	Radianes	Sen	Tan	Ctg	Cos		
0° 00'	.0000	.0000	.0000		1.0000	1.5708	90° 00'
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
32° 00'	.5585	.5299	.6249	1.6003	.8480	1.0123	58° 00'
10'	.5614	**.5324**	**.6289**	**1.5900**	**.8465**	1.0094	50'
20'	.5643	.5348	.6330	1.5798	.8450	1.0065	40'
30'	.5672	.5373	.6371	1.5697	.8434	1.0036	30'
40'	.5701	.5398	.6412	1.5597	.8418	1.0007	20'
50'	.5730	.5422	.6453	1.5497	.8403	.9977	10'
33° 00'	.5760	.5446	.6494	1.5399	.9387	.9948	57° 00'
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
45° 00'	.7854	.7071	1.0000	1.0000	.7071	.7854	45° 00'
		Cos	Ctg	Tan	Sen	Radianes	Grados

El renglón superior corresponde a la columna izquierda cuyos valores van desde 0° 00' a 45° 00' y el renglón inferior va desde 45° 00' a 90° 00'.

El valor de *sen* 32° 10' se busca en la columna izquierda de arriba hacia abajo y además se observa que es el mismo valor que el de *cos* 57° 50', buscado en la columna derecha de abajo hacia arriba, esto es porque son cofunciones.

Si se busca el valor de las funciones trigonométricas empleando una calculadora, el procedimiento es el siguiente:

a) Verificar si la calculadora es de renglón simple o es más sofisticada y cuenta con doble renglón. Esto es porque se teclea de forma diferente; en la explicación que a continuación se presenta se considera que el estudiante empleará una máquina de doble renglón.

b) Es necesario definir en qué medidas angulares se desea trabajar (grados o radianes).

c) Considerar que el idioma que regularmente emplean los fabricantes en los menús y teclados es el inglés, es por ello que el ejemplo así lo considera.

d) Para encontrar las funciones cosecante, secante y cotangente, es necesario encontrar primero sus respectivas funciones recíprocas, ya que las calculadoras no cuentan con estas funciones de manera directa, y después dividir la unidad entre dicho resultado.

Si se emplea la medida en grados debes digitar la tecla de $\boxed{\text{Mode}}$ y elegir la opción $\boxed{\text{Deg}}$, la cual indica que la medida angular está en grados sexagesimales.

Si se busca el *sen* 32° 10', entonces:

Se digita $\boxed{\text{sin}}$ después, el valor de los grados 32 a continuación la tecla $\boxed{\circ\ ,\ ,,}$ enseguida 10 y por último la tecla $\boxed{\circ\ ,\ ,,}$. Para que el resultado aparezca en la pantalla es necesario digitar la tecla $\boxed{=}$ y el resultado desplegado en la pantalla de la calculadora es 0.53238389.

Si la función buscada es *sec* 32° 10', ésta no puede ser calculada de forma directa, por lo que es necesario encontrar su función recíproca. Además, ahora vamos a usar la medida angular en radianes, por tanto:

Se digita $\boxed{\text{Mode}}$ y se elige la opción $\boxed{\text{Rad}}$, la cual indica que la medida angular empleada está en radianes, 32° 10'= 0.5614 *rad.*

Se comienza digitando un paréntesis $\boxed{(}$, en seguida la función recíproca de la secante, la cual es el coseno $\boxed{\cos}$ de 0.5614, después se cierra el paréntesis $\boxed{)}$ y por último la tecla $\boxed{x^{-1}}$, la cual es la función recíproca. Para que aparezca el resultado se teclea $\boxed{=}$ y se desplegará en la pantalla 1. 1813.

EJERCICIO 39

1. Expresa en función de un ángulo agudo las siguientes funciones:

a) *sen* 210°
b) *tan* 165°
c) *cos* 280°
d) *csc* 120°
e) *sec* 358°
f) *sen* 240° 37' 25"
g) *ctg* 315°
h) *tan* 254° 46' 24"
i) *cos* 95° 25'
j) *sec* 320° 48' 12"
k) *csc* 127°
l) *ctg* (–48°)
m) *cos* (–38° 54')
n) *sen* (–28° 35' 24")

2. Expresa en términos de un ángulo positivo las siguientes funciones:

a) *sen* (–160°)
b) *ctg* (–140°)
c) *sec* (–240°)
d) *cos* (–280°)
e) *tan* (–345°)
f) *csc* (–90°)
g) *cos* (–225° 15' 46")
h) *ctg* (–176° 45' 23")
i) *sec* (–108° 32')
j) *sen* (–228° 15')

3. Expresa en función de un ángulo agudo las siguientes funciones:

a) *sen* (–160°)
b) *ctg* 1 240°
c) *cos* (–2 800°)
d) *tan* 5 445°
e) *csc* (–98° 32' 12")
f) *sec* (–230°)
g) *sen* (1 315°)
h) *tan* 823° 25' 18"
i) *cos* (–428° 45' 24")
j) *ctg* 920°
k) *sec* (–220°)
l) *csc* 328° 33' 41"

4. Encuentra el valor de las siguientes funciones trigonométricas (empleando tablas o calculadora):

a) *sen* 18°
b) *ctg* 46°
c) *sec* 25°
d) *cos* 83°
e) *tan* 37°
f) *csc* 79°
g) *cos* 22° 10'
h) *ctg* 14° 40'
i) *sec* 10° 30'
j) *sen* 29° 50'

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 12

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS NOTABLES

Reseña HISTÓRICA

Ptolomeo
(100 *d. C.* – 170 *d. C.*)

Astrónomo, matemático y geógrafo egipcio del siglo II de la era cristiana, nace en Tolemaida Hermia (en el Alto Egipto), alrededor del año 100, y vive y trabaja en Alejandría.

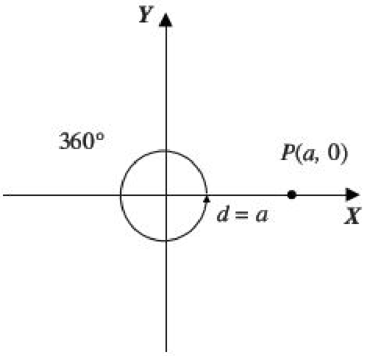
Ptolomeo calculó cuerdas inscribiendo polígonos regulares de lados 3, 4, 5 y 6 en un círculo, lo cual le permitió calcular cuerdas subtendidas por ángulos de 36°, 72°, 60°, 90° y 120°. En su obra *Almagesto*, Ptolomeo proporcionó una tabla de cuerdas de 0° a 180° con variaciones de 1°, con una exactitud de 1/3 600 de una unidad.

Los astrónomos de la India habían desarrollado también un sistema trigonométrico basado en la función seno, en vez de cuerdas como los griegos. Esta función seno era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para ésta en sus tablas.

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes trabajaron con la función seno y a finales del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones. También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría, tanto para triángulos planos como esféricos. Los matemáticos sugirieron el uso del valor $r = 1$ (radio de la circunferencia) y esto dio lugar a los valores modernos de las funciones trigonométricas.

Valor de las funciones trigonométricas de los ángulos de 0°, 90°, 180°, 270° y 360°

Las coordenadas del punto P sobre el eje X son $(a, 0)$ y la distancia al origen es igual a a, entonces las funciones de los ángulos de 0° y 360° son:



$$sen\ 0° = sen\ 360° = \frac{0}{a} = 0$$

$$cos\ 0° = cos\ 360° = \frac{a}{a} = 1$$

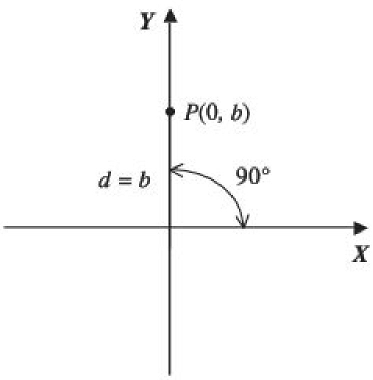
$$tan\ 0° = tan\ 360° = \frac{0}{a} = 0$$

$$ctg\ 0° = ctg\ 360° = \frac{a}{0}\ \text{No existe}$$

$$sec\ 0° = sec\ 360° = \frac{a}{a} = 1$$

$$csc\ 0° = csc\ 360° = \frac{a}{0}\ \text{No existe}$$

Para el ángulo de 90°, las coordenadas de cualquier punto P sobre el eje Y es $P(0, b)$, la distancia al origen es b, entonces:



$$sen\,90° = \frac{b}{b} = 1$$

$$cos\,90° = \frac{0}{b} = 0$$

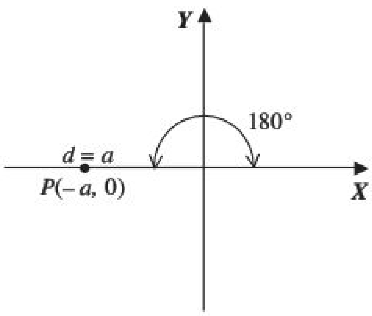
$$tan\,90° = \frac{b}{0}\ \text{No existe}$$

$$ctg\,90° = \frac{0}{b} = 0$$

$$sec\,90° = \frac{b}{0}\ \text{No existe}$$

$$csc\,90° = \frac{b}{b} = 1$$

Para el ángulo de 180° las coordenadas de cualquier punto P sobre el eje $-X$ son $(-a, 0)$, la distancia al origen es a.



$$sen\ 180° = \frac{0}{a} = 0$$

$$cos\ 180° = \frac{-a}{a} = -1$$

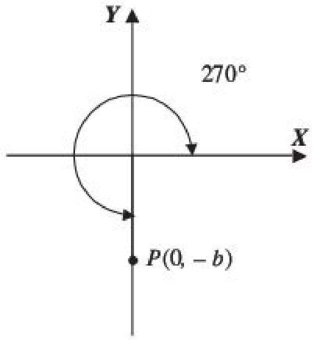
$$tan\ 180° = \frac{0}{-a} = 0$$

$$ctg\ 180° = \frac{-a}{0}\ \text{No existe}$$

$$sec\ 180° = \frac{a}{-a} = -1$$

$$csc\ 180° = \frac{a}{0}\ \text{No existe}$$

Para el ángulo de 270° las coordenadas de cualquier punto P sobre el eje $-Y$ son $P(0, -b)$, la distancia al origen es b.



$$sen\ 270° = -\frac{b}{b} = -1$$

$$cos\ 270° = \frac{0}{b} = 0$$

$$tan\ 270° = \frac{-b}{0} \text{ No existe}$$

$$ctg\ 270° = \frac{0}{-b} = 0$$

$$sec\ 270° = \frac{b}{0} \text{ No existe}$$

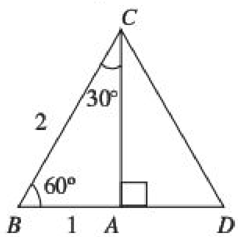
$$csc\ 270° = \frac{b}{-b} = -1$$

Cuadro de valores de las funciones trigonométricas

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Funciones	0°	90°	180°	270°	360°
seno	0	1	0	–1	0
coseno	1	0	–1	0	1
tangente	0	No existe	0	No existe	0
cotangente	No existe	0	No existe	0	No existe
secante	1	No existe	–1	No existe	1
cosecante	No existe	1	No existe	–1	No existe

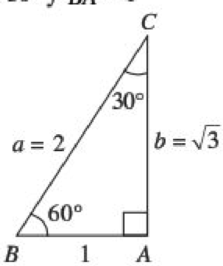
Valor de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°

Para las funciones trigonométricas de los ángulos de 60° y 30° se construye un triángulo equilátero de lado igual a 2:



Se traza $\overline{CA} \perp \overline{BD}$, $\overline{CA}$ es bisectriz del $\angle\ C$ y mediatriz del lado BD.

En el triángulo BAC, $\angle\ B = 60°$, $\angle\ ACB = 30°$ y $\overline{BA} = 1$



Para obtener el lado $b = \overline{CA}$ se usa el teorema de Pitágoras:

$$\overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 \quad \rightarrow \quad \overline{CA}^2 = (2)^2 - (1)^2$$

$$\overline{CA}^2 = 3$$

$$\overline{CA} = \sqrt{3}$$

Las funciones trigonométricas del ángulo de 60° son:

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad sec\ 60° = \frac{2}{1} = 2$$

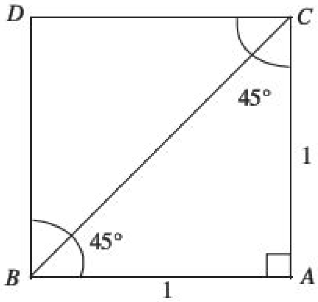
$$cos\ 60° = \frac{1}{2} \qquad ctg\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad csc\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Las funciones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad sec\ 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad ctg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad csc\ 30° = \frac{2}{1} = 2$$

Para calcular las funciones trigonométricas del ángulo de 45° se construye un cuadrado de longitud por lado igual a la unidad y se traza su diagonal.



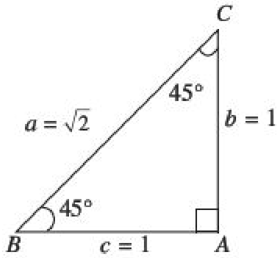
Para obtener el valor de la hipotenusa, se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \text{donde:} \qquad a^2 = (1)^2 + (1)^2$$

$$a^2 = 1 + 1$$

$$a^2 = 2$$

De acuerdo con el resultado anterior, $a = \sqrt{2}$



Las funciones trigonométricas del ángulo de 45° son:

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tan\ 45° = \frac{1}{1} = 1 \qquad sec\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad ctg\ 45° = \frac{1}{1} = 1 \qquad csc\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Aplicación de los valores trigonométricos de los ángulos notables

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el valor numérico de 2 *sen* 30° *cos* 60°.

Solución

Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas y se efectúa la operación:

$$2\,sen\,30° \cdot cos\,60° = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2 Determina el valor numérico de la expresión: $tan^2 60° + ctg^2 45°$.

Solución

Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas y se determina que:

$$tan^2 60° + ctg^2 45° = (tan\,60°)^2 + (ctg\,45°)^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4$$

Por tanto, $tan^2 60° + ctg^2 45° = 4$

3 Calcula el valor numérico de $sen\,\frac{7}{6}\pi + 3\,sen\,\frac{11}{6}\pi$.

Solución

Los ángulos se expresan en función de ángulos agudos para obtener los valores de las funciones trigonométricas:

$$sen\,\frac{7}{6}\pi = sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\,sen\,\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$sen\,\frac{11}{6}\pi = sen\left(4\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\,sen\,\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Entonces,

$$sen\,\frac{7}{6}\pi + 3\,sen\,\frac{11}{6}\pi = -\frac{1}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Por tanto, sen $\frac{7}{6}\pi + 3\,sen\,\frac{11}{6}\pi = -2$

4 Mediante ángulos notables demuestra la siguiente igualdad:

$$sen\,30° - (cos\,30° \cdot ctg\,60°)^2 = cos^2 60°$$

Solución

Primero se encuentran los valores de las funciones trigonométricas:

$$sen\,30° = \frac{1}{2}; \qquad cos\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad ctg\,60° = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad cos\,60° = \frac{1}{2}$$

Después se sustituyen los valores de las funciones y se demuestra que se cumple con la igualdad:

$$sen\,30° - (cos\,30° \cdot ctg\,60°)^2 = cos^2 60°$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Con lo cual queda demostrada la igualdad propuesta.

5 Demuestra la siguiente igualdad, mediante el valor de los ángulos notables:

$$\sqrt{sen^2\frac{3}{2}\pi+3\sec 2\pi}=\csc\frac{\pi}{6}$$

Solución

Primero se encuentran los valores de las funciones trigonométricas:

$$sen\ \frac{3}{2}\pi=-1;\quad \sec\ 2\pi=1;\quad \csc\ \frac{\pi}{6}=2$$

Entonces:

$$\sqrt{(-1)^2+3(1)}=2$$
$$\sqrt{1+3}=2$$
$$\sqrt{4}=2$$
$$2=2$$

Por tanto, la igualdad es verdadera.

EJERCICIO 40

Completa la siguiente tabla:

Grados	Radianes	sen	cos	tan	csc	sec	ctg
0°	0						
30°	$\frac{\pi}{6}$						
45°	$\frac{\pi}{4}$						
60°	$\frac{\pi}{3}$						
90°	$\frac{\pi}{2}$						
120°	$\frac{\pi}{3}$						
135°	$\frac{\pi}{4}$						
150°	$\frac{\pi}{6}$						
180°	π						
210°	$\frac{7\pi}{6}$						
225°	$\frac{5\pi}{4}$						
240°	$\frac{4\pi}{3}$						
270°	$\frac{3\pi}{2}$						
300°	$\frac{5\pi}{3}$						
315°	$\frac{7\pi}{4}$						
330°	$\frac{11\pi}{6}$						
360°	2π						

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones:

1. $2\,sen\,30°\,cos\,30°$
2. $2\,sen\,30°\,sen\,60°$
3. $3\,tan\dfrac{\pi}{6}\;sen\dfrac{\pi}{3}$
4. $sec^2\,45° - 2\,tan^2\,45°$
5. $sen^2\,30°\,cos^2\,30°$
6. $\left[sen^2 45° cos^2 45°\right]^{\frac{3}{2}}$
7. $3\,tan\,60°\,ctg\,30°\,sen\,45°\,csc\,45°$
8. $2\,sen\,60°\,sec\,30°\,cos\,45°\,tan\,45°$
9. $2\,sen\dfrac{\pi}{4}\;cos\dfrac{\pi}{4}\left(sen^2\dfrac{\pi}{6}+cos^2\dfrac{\pi}{6}\right)$
10. $2\,sen\,30°\,cos\,30°\,(1 - 2\,sen^2\,30°)$
11. $tan^2\dfrac{5}{3}\pi + 4\,sen\dfrac{5}{6}\pi - 3\,ctg^2\dfrac{5}{4}\pi$
12. $\dfrac{cos\,120° + sec\,180°}{csc\,270° + sen\,330°}$
13. $\left[\dfrac{(sen\,120°)(tan\,240°)}{tan\,315° - cos\,300°}\right]^3$
14. $\sqrt{(tan\,225°)(sen\,180°)(cos\,240°)}$
15. $sen\,90° + (cos\,210° + sen\,300°)^2 + sec\,240°$

Utiliza ángulos notables para demostrar las siguientes igualdades:

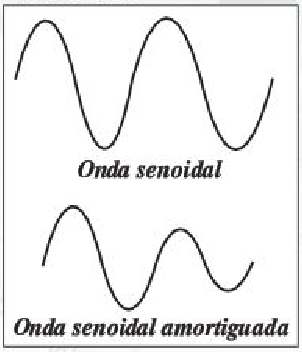
16. $\dfrac{sen\,240° + sen\,120° \cdot cos\,60°}{sen\,120° \cdot sen(-60°)} = tan\,210°$
17. $tan\dfrac{\pi}{3} \cdot sen\dfrac{2}{3}\pi = 1 + sen\dfrac{\pi}{6}$
18. $sen\,180° = 2\,sen\,60° + sen\,240°(sec\,45°)^2$
19. $cos\,225° + 3\,sen\,225° = -2\,sec\,45°$
20. $csc\,60° = -\dfrac{sen\,30°}{sen\,150° \cdot sen\,300°}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 13

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ondas SENOIDALES



Se les considera como fundamentales por diversas razones: poseen propiedades matemáticas muy interesantes (un ejemplo, con combinaciones de señales senoidales de diferente amplitud y frecuencia se puede reconstruir cualquier forma de onda), la señal que se obtiene de las tomas de corriente de cualquier casa tiene esta forma, las señales de test producidas por los circuitos osciladores de un generador de señal también son senoidales, la mayoría de las fuentes de potencia en AC (corriente alterna) producen señales senoidales.

La señal senoidal amortiguada es un caso especial de este tipo de ondas y se produce en fenómenos de oscilación, pero que no se mantienen en el tiempo.

Gráficas de las funciones trigonométricas

Al establecer una regla de correspondencia entre dos conjuntos, por medio de las funciones trigonométricas, se establecen relaciones como:

$$y = sen\ x,\ f(x) = cos\ (-x),\ y = tan\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$$

Para construir la gráfica de una función o razón trigonométrica se dan valores al ángulo (Argumento), éstos van sobre el eje x, los valores obtenidos se grafican sobre el eje y.

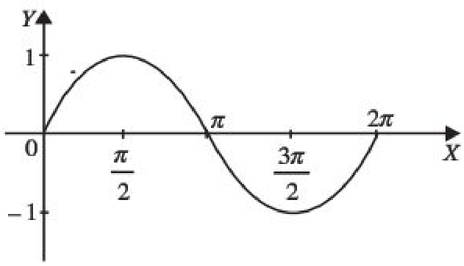
Los valores asignados para el argumento se expresan en grados sexagecimales o radianes.

Gráfica de $y = sen\ x$

Tabulación

	1o. cuadrante		2o. cuadrante		3o. cuadrante		4o. cuadrante		
X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Y	0	0.7	1	0.7	0	−0.7	−1	−0.7	0

Gráfica



Características

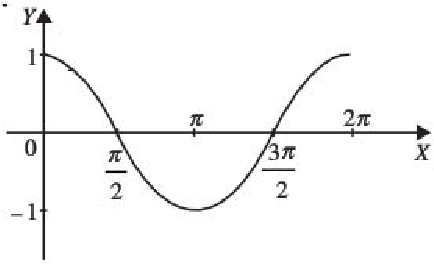
1. La función tiene periodo igual a $2\pi\, rad$.
2. La función es creciente en el primero y cuarto cuadrantes.
3. La función decrece en el segundo y tercer cuadrantes.
4. La función es positiva en el primero y segundo cuadrantes y negativa en el tercero y cuarto cuadrantes.
5. La función interseca al eje horizontal en múltiplos enteros de π.
6. $-\infty < x < \infty$.
7. $-1 \leq y \leq 1$.

Gráfica de $y = \cos x$

Tabulación

	1o. cuadrante		2o. cuadrante		3o. cuadrante		4o. cuadrante		
X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Y	1	0.7	0	−0.7	−1	−0.7	0	0.7	1

Gráfica



Características

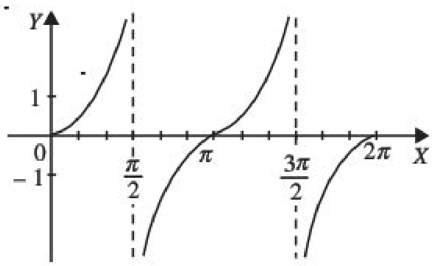
1. La función tiene periodo igual a $2\pi\, rad$.
2. La función decrece en el primero y segundo cuadrantes.
3. La función crece en el tercero y cuarto cuadrantes.
4. La función es positiva en el primero y cuarto cuadrantes, y negativa en el segundo y tercer cuadrantes.
5. La función interseca al eje horizontal en múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
6. $-\infty < x < \infty$.
7. $-1 \leq y \leq 1$.

Gráfica de $y = \tan x$

Tabulación

	1o. cuadrante			2o. cuadrante			3o. cuadrante			4o. cuadrante			
X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Y	0	0.57	1.7	No existe	−1.7	−0.57	0	0.57	1.7	No existe	−1.7	−0.57	0

Gráfica



Características

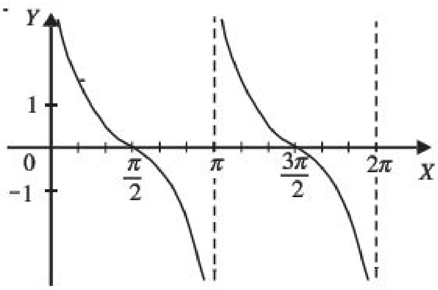
1. La función interseca al eje X en múltiplos de π.
2. La función es positiva en el primero y tercer cuadrantes.
3. La función es negativa en el segundo y cuarto cuadrantes.
4. La función tiene periodo igual a $\pi\, rad$.
5. x es un número real tal que $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n \in Z$ (asíntotas verticales).
6. $-\infty < y < \infty$.

Gráfica de $y = ctg\ x$

Tabulación

	1o. cuadrante			2o. cuadrante			3o. cuadrante			4o. cuadrante			
X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
Y	No existe	1.7	0.57	0	–0.57	–1.7	No existe	1.7	0.57	0	–0.57	–1.7	No existe

Gráfica



Características

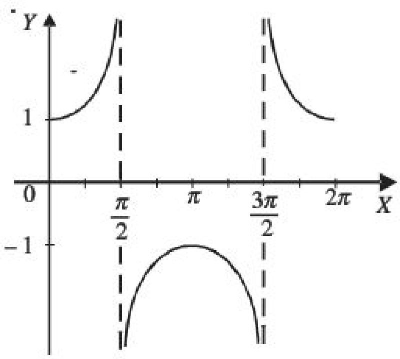
1. La función interseca al eje X en múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
2. La función es positiva en el primero y tercer cuadrante.
3. La función es negativa en el segundo y cuarto cuadrante.
4. La función tiene periodo igual a π *rad*.
5. x es un número real tal que $x \neq n\pi$ con $n \in Z$ (asíntotas verticales).
6. $-\infty < y < \infty$.

Gráfica de $y = sec\ x$

Tabulación

	1o. cuadrante		2o. cuadrante		3o. cuadrante		4o. cuadrante		
X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Y	1	14	No existe	– 1.4	–1	–1.4	No existe	1.4	1

Gráfica



Características

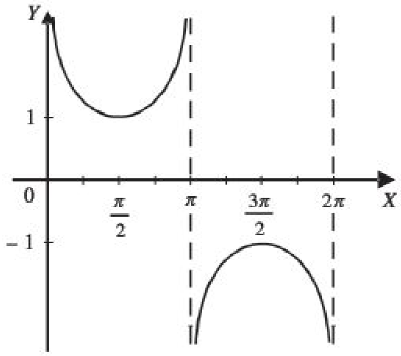
1. La función no interseca al eje X.
2. La función es positiva en el primero y cuarto cuadrantes.
3. La función es negativa en el segundo y tercer cuadrantes.
4. La función tiene periodo igual a 2π *rad*.
5. x es un número real tal que $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n \in Z$ (asíntotas verticales).
6. $y \geq 1$ o $y \leq -1$.

Gráfica de $y = csc\ x$

Tabulación

		1o. cuadrante		2o. cuadrante		3o. cuadrante		4o. cuadrante	
X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Y	1	1.4	No existe	– 1.4	– 1	–1.4	No existe	1.4	1

Gráfica



Características de la función cosecante

1. La función no interseca al eje *X*.
2. La función es positiva en el primero y segundo cuadrantes.
3. La función es negativa en el tercero y cuarto cuadrantes.
4. La función tiene periodo igual a 2π *rad*.
5. El valor de x es un número real tal que $x \neq n\pi$ con $n \in Z$ (asíntotas verticales).
6. $y \geq 1$ o $y \leq -1$.

Resumen

La siguiente tabla muestra el periodo, la amplitud, las asíntotas verticales, el dominio y el rango de cada una de las funciones trigonométricas.

	Periodo	Amplitud	Asíntotas verticales	Valores de x	Valores de y
$y = sen\ x$	2π	1	No tiene	$\{x \in R\}$	$\{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$
$y = cos\ x$	2π	1	No tiene	$\{x \in R\}$	$\{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$
$y = tan\ x$	π		$\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$	$\left\{x \in R / x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)\right\}$	$\{y \in R\}$
$y = ctg\ x$	π		$n\pi,\ n \in Z$	$\{x \in R / x \neq n\pi\}$	$\{y \in R\}$
$y = sec\ x$	2π		$\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in Z$	$\left\{x \in R / x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)\right\}$	$\{y \in R / y \leq -1 \text{ o } y \geq 1\}$
$y = csc\ x$	2π		$n\pi,\ n \in Z$	$\{x \in R / x \neq n\pi\}$	$\{y \in R / y \leq -1 \text{ o } y \geq 1\}$

Amplitud, periodo y desplazamiento de fase

Si $y = a\ sen\ bx$, o bien $y = a\ cos\ bx$, para $a, b \in R$, distintos de cero, entonces la gráfica tiene amplitud $|a|$, y periodo $\frac{2\pi}{|b|}$

EJEMPLOS

1 Calcula la amplitud, el periodo y traza la gráfica de $y = 4\ sen\ 2x$.

Solución

De $y = 4\ sen\ 2x$ se obtiene $a = 4$ y $b = 2$, los cuales al sustituir en las fórmulas se determinan la amplitud y el periodo:

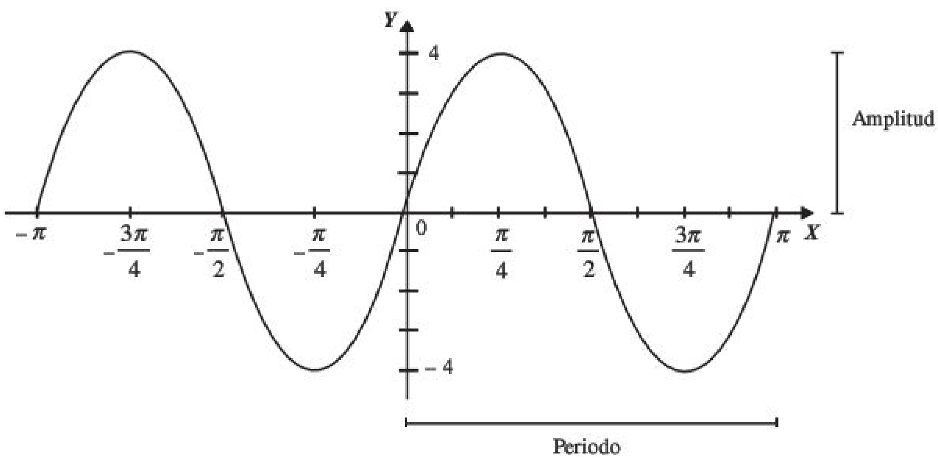
Amplitud: $|a| = |4| = 4$ Periodo: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Luego, la gráfica tiene amplitud 4 y periodo π.

Tabulación

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
Y	0	4	0	– 4	0	4	0	– 4	0

Gráfica



2 Calcula la amplitud, el periodo y traza la gráfica de $y = 2\ sen\ \frac{1}{2}x$.

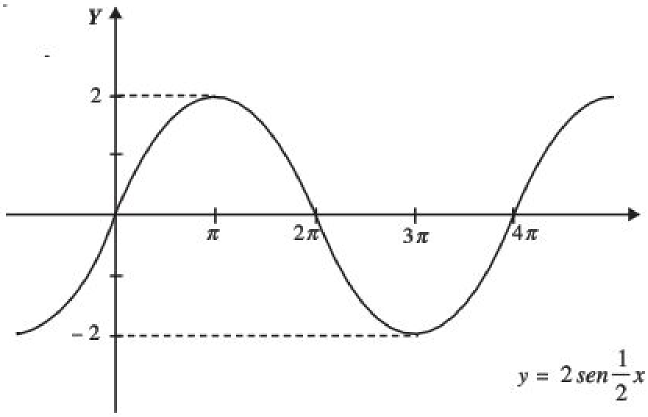
Solución

De $y = 2\ sen\ \frac{1}{2}x$ se obtiene $a = 2$ y $b = \frac{1}{2}$, los cuales al sustituirlos en las fórmulas se determinan la amplitud y el periodo:

$$\text{Amplitud: } |a| = |2| = 2 \qquad \text{Periodo: } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Entonces, la gráfica tiene amplitud 2 y periodo 4π.

X	Y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1.41
π	2
$\frac{3\pi}{2}$	1.41
2π	0
$\frac{5\pi}{2}$	–1.41
3π	–2
$\frac{7\pi}{2}$	–1.41
4π	0



3 Determina la amplitud y el periodo de $y = \frac{2}{3}\cos\frac{1}{3}x$.

Solución

En este caso $a = \frac{2}{3}$ y $b = \frac{1}{3}$, por tanto,

$$\text{Amplitud} = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

Entonces, la gráfica tiene amplitud $\frac{2}{3}$ y periodo 6π.

Desplazamiento de fase (desfasamiento)

Caso 1. Si $y = a\ sen\ (bx + c)$, o bien $y = a\ cos\ (bx + c)$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

El desplazamiento de fase se calcula resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$bx + c = 0 \qquad \text{y} \qquad bx + c = 2\pi$$

Ejemplo

Calcula la amplitud, periodo y desplazamiento de fase y traza la gráfica de:

$$y = 3\ sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Solución

$y = 3\ sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, tiene la forma de $y = a\ sen\ (bx + c)$ donde $a = 3$, $b = 2$ y $c = \frac{\pi}{2}$, por consiguiente:

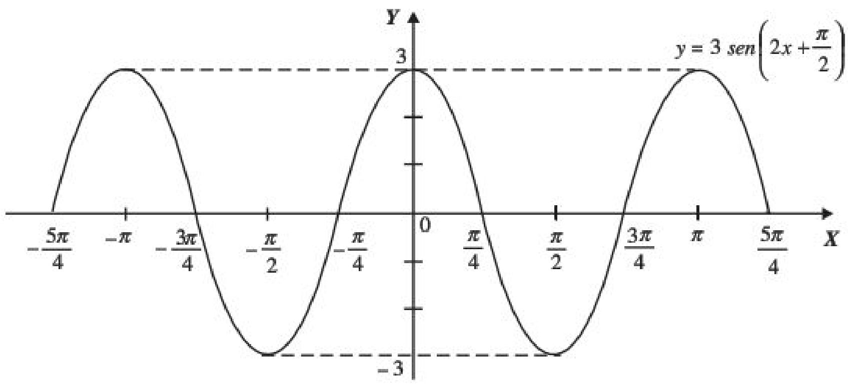
$$\text{Amplitud} = |a| = |3| = 3 \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Para determinar el desplazamiento de fase y el intervalo, se resuelven las siguientes ecuaciones:

$$2x + \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{y} \quad 2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Donde $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{3}{4}\pi$, respectivamente.

X	$-\frac{5}{4}\pi$	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
Y	0	3	0	– 3	0	3	0	– 3	0	3	0	– 3	0



➲ **Caso 2.** Si $y = a\ tan\ (bx + c)$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces:

a) El periodo es $\frac{\pi}{|b|}$

Se pueden determinar las asíntotas verticales sucesivas en la gráfica resolviendo las ecuaciones:

$$b\,x + c = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad b\,x + c = \frac{\pi}{2}$$

b) El desplazamiento de fase es $-\frac{c}{b}$

Ejemplo

Calcula el periodo y traza la gráfica de $y = \frac{1}{2}\ tan\ (x + \frac{\pi}{4})$

Solución

$a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ y $c = \frac{\pi}{4}$, entonces,

a) El periodo es $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

b) Para determinar las asíntotas verticales sucesivas se resuelven las ecuaciones:

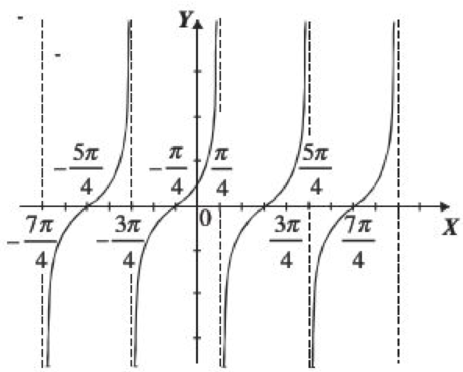
$$x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Donde $x = -\frac{3}{4}\pi$ y $x = \frac{\pi}{4}$, respectivamente, esto significa que cada π *rad* se traza una asíntota.

c) En la función $a = \frac{1}{2}$, la gráfica de la ecuación en el intervalo $\left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right]$ tiene la forma de $y = \frac{1}{2}\ tan\ x$, debido a que $c = \frac{\pi}{4}$ y $b = 1$, el desplazamiento de fase se define como $-\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{4}$, por consiguiente, la gráfica se obtiene desplazando $y = \frac{1}{2}\ tan\ x$ hacia la izquierda una distancia de $\frac{\pi}{4}$

Gráfica

Finalmente se traza la gráfica de la función $y = \frac{1}{2}\ tan\ (x + \frac{\pi}{4})$ con los datos ya obtenidos.



Gráficas de $y = sen^{-1}\ x$, $y = cos^{-1}\ x$, $y = tan^{-1}\ x$

Seno inverso ($y = sen^{-1}\ x$)

Se representa como sen^{-1} y se define como sigue:

$$y = sen^{-1} x \qquad \text{si yólos is} \qquad x = sen\ y$$

donde $-1 \leq x \leq 1$, $-\infty < y < \infty$

La expresión se puede escribir de las siguientes formas:

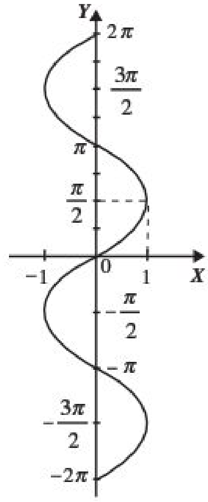
$$y = sen^{-1} x = arc\ sen\ x \quad \text{o} \quad y = ang\ sen\ x$$

Las cuales se leen, respectivamente, *arco seno de x* o *ángulo seno de x.*

Tabulación

X	Y
0	$-\pi$
-1	$-\frac{1}{2}\pi$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{4}\pi$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}\pi$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}\pi$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{4}\pi$
1	$\frac{1}{2}\pi$
0	π

Gráfica



Coseno inverso $(y = cos^{-1}x)$

La expresión coseno inverso se define como:

$y = cos^{-1}x$ si yólos is $x = cos\, y$

donde $-1 \leq x < 1$, $-\infty < y < \infty$.

La expresión se puede escribir de la siguiente forma:

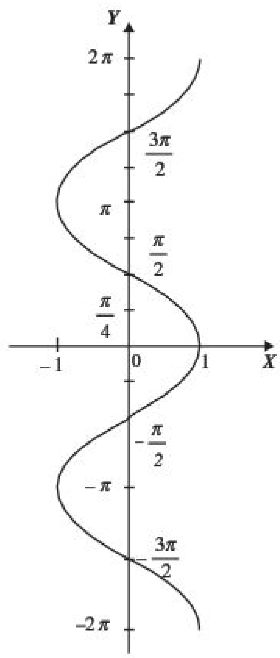
$$y = cos^{-1}x = arc\ cos\ x = ang\ cos\ x$$

Las cuales se leen, respectivamente, *arco coseno de x* o *ángulo coseno de x*.

Tabulación

X	Y
-1	π
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$
0	$\frac{1}{2}\pi$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\pi$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{4}\pi$
1	0

Gráfica



Tangente inversa ($y = tan^{-1}x$)

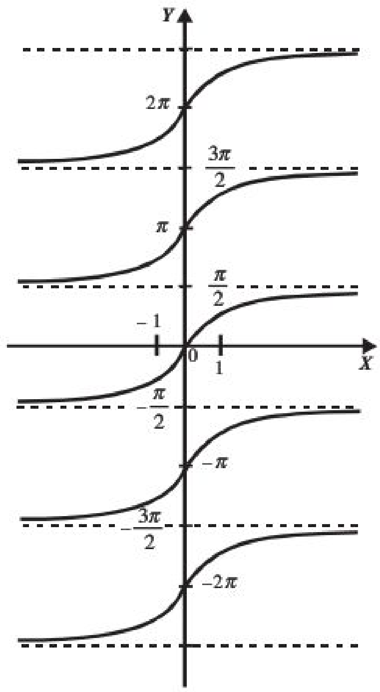
La expresión tangente inversa se define como:

$$y = tan^{-1}x \qquad \text{si yólos is} \qquad x = tan\ y$$

donde $-\infty < x < \infty$, "y" es un real tal que $y \neq (2n + 1)\ \frac{\pi}{2}$ con $n \in Z$.

La tangente inversa se puede escribir de la siguiente forma:

$$y = tan^{-1}x = arc\ tan\ x = ang\ tan\ x$$



EJERCICIO 41

Obtén la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase de las siguientes funciones:

1. $y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$
2. $y = 2\ sen\ 4x$
3. $y = \frac{4}{3} sen\left(-\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\pi\right)$
4. $y = 5 sen\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{2}\right)$
5. $y = 4\cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$
6. $y = -3\cos 2x$
7. $y = \frac{3}{2} sen\left(\frac{1}{2}\pi - 5x\right)$
8. $y = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{3}\right)$
9. $y = sen\left(\frac{x}{3}\right)$

Calcula el periodo, las asíntotas verticales y el desplazamiento de fase de las siguientes funciones:

10. $y = 3\tan(2x)$
11. $y = 2\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
12. $y = \frac{1}{2}\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$
13. $y = -4\tan\left(\frac{1}{2}x - \pi\right)$
14. $y = -\frac{3}{2}\tan\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$
15. $y = \tan(x - \pi)$

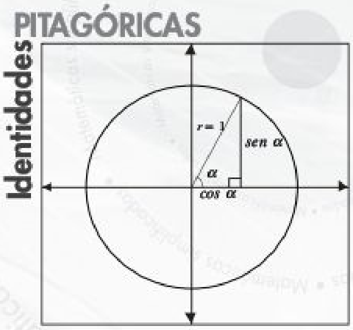
Traza la gráfica de:

16. $y = \frac{1}{2} sen\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$
17. $y = sen\ 2x$
18. $y = -3\cos\left(2x + \frac{4}{3}\pi\right)$
19. $y = sen\left(\frac{x}{3}\right)$
20. $y = \tan 2x$
21. $y = \tan\left(\frac{x}{4}\right)$
22. $y = arc\ ctg\ x$
23. $y = sec^{-1}x$
24. $y = ang\ csc\ x$
25. $y = 2 + sen\ 3x$
26. $y = \cos(2x) - 3$
27. $y = 1 + 2\ sen\ 4x$
28. $y = sen(3x - \pi)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 14

Identidades y ecuaciones trigonométricas



Definiciones de
ángulos del libro
Los elementos de Euclides

Así se denomina a las identidades que resultan del teorema de Pitágoras y se obtienen del círculo unitario mediante un triángulo rectángulo de hipotenusa 1 y catetos con longitudes *sen* α y *cos* α.

Por definición del teorema de Pitágoras:

$$(1)^2 = (sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2$$

$$1 = sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha$$

A la cual se le denomina identidad fundamental.

Identidades trigonométricas

Son igualdades en las que intervienen funciones trigonométricas y es válida para cualquier valor angular.

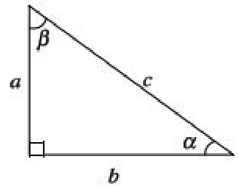
Obtención de las identidades trigonométricas básicas

Para determinar las identidades se hace uso de las definiciones de las funciones trigonométricas.

En el triángulo las funciones del ángulo α se definen:

$$sen\ \alpha = \frac{a}{c} \qquad tan\ \alpha = \frac{a}{b} \qquad csc\ \alpha = \frac{c}{a}$$

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} \qquad ctg\ \alpha = \frac{b}{a} \qquad sec\ \alpha = \frac{c}{b}$$



Al multiplicar una función directa por cada una de sus recíprocas se obtiene:

$$(sen\ \alpha)(csc\ \alpha) = \left(\frac{a}{c}\right)\cdot\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{a\cdot c}{c\cdot a} = 1$$

$$(cos\ \alpha)(sec\ \alpha) = \left(\frac{b}{c}\right)\cdot\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{b\cdot c}{c\cdot b} = 1$$

$$(tan\ \alpha)(ctg\ \alpha) = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a\cdot b}{b\cdot a} = 1$$

Por tanto, se deduce las identidades recíprocas.

Identidades recíprocas

$$(sen\ \alpha)(csc\ \alpha) = 1 \qquad (cos\ \alpha)(sec\ \alpha) = 1 \qquad (tan\ \alpha)\ (ctg\ \alpha) = 1$$

Al realizar los respectivos despejes en las identidades anteriores, se obtienen las siguientes relaciones:

$$sen\ \alpha = \frac{1}{csc\ \alpha} \qquad tan\ \alpha = \frac{1}{ctg\ \alpha} \qquad csc\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

$$cos\ \alpha = \frac{1}{sec\ \alpha} \qquad ctg\ \alpha = \frac{1}{tan\ \alpha} \qquad sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$$

Identidades de cociente

Si se realiza el cociente de la función seno ($sen\ \alpha$) por la función coseno ($cos\ \alpha$), se obtiene la función $tan\ \alpha$:

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a\cdot c}{b\cdot c} = \frac{a}{b} = tan\ \alpha$$

De manera análoga se obtiene la función cotangente ($ctg\ \alpha$),

$$\frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b\cdot c}{a\cdot c} = \frac{b}{a} = ctg\ \alpha$$

Por tanto:

$$tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \quad ; \quad ctg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$$

Identidades pitagóricas

En el triángulo se aplica el teorema de Pitágoras:

$a^2+b^2=c^2$ Se divide entre c^2 a ambos miembros.

$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$ Se aplica la ley de los exponentes.

$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$ Los cocientes son equivalentes a las funciones $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$

$(sen\,\alpha)^2+(cos\,\alpha)^2=1,$ por consiguiente $sen^2\alpha+cos^2\alpha=1$

En forma semejante se obtienen las demás identidades pitagóricas, entonces:

$$sen^2\alpha+cos^2\alpha=1\;;\quad tan^2\alpha+1=sec^2\alpha\quad y\quad 1+ctg^2\alpha=csc^2\alpha$$

De las identidades anteriores se realizan despejes, con el fin de obtener otras identidades:

$$sen^2\alpha+cos^2\alpha=1 \qquad tan^2\alpha+1=sec^2\alpha \qquad 1+ctg^2\alpha=csc^2\alpha$$

$$sen\,\alpha=\pm\sqrt{(1-cos^2\alpha)} \qquad tan\,\alpha=\pm\sqrt{(sec^2\alpha-1)} \qquad ctg\,\alpha=\pm\sqrt{(csc^2\alpha-1)}$$

$$cos\,\alpha=\pm\sqrt{(1-sen^2\alpha)} \qquad sec\,\alpha=\pm\sqrt{(tan^2\alpha+1)} \qquad csc\,\alpha=\pm\sqrt{(ctg^2\alpha+1)}$$

Demostración de identidades trigonométricas

Para realizar la demostración de una identidad trigonométrica se aplican procesos algebraicos como la factorización, las operaciones entre fracciones así como su simplificación, además de las identidades trigonométricas básicas.

La aplicación de estos procesos depende de la identidad en sí; esto significa que no existe un orden o procedimiento específico, debido a esta situación sugerimos iniciar con el lado más complejo o elaborado de la igualdad, con el fin de llegar a demostrar el lado más sencillo, como a continuación se ejemplifica.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra la siguiente identidad: $sen\,x=\frac{cos\,x}{ctg\,x}$

Demostración

Se trabaja del segundo hacia el primer miembro, se sustituye $ctg\,x=\frac{cos\,x}{sen\,x}$ y realiza el cociente correspondiente:

$$sen\,x=\frac{cos\,x}{ctg\,x} \quad\rightarrow\quad sen\,x=\frac{cos\,x}{\frac{cos\,x}{sen\,x}} \quad\rightarrow\quad sen\,x=\frac{sen\,x\cdot cos\,x}{cos\,x}$$

$$sen\,x\equiv sen\,x$$

Por tanto queda demostrada la identidad.

2 Demuestra la siguiente identidad: $sen\,\beta + cos\,\beta\,ctg\,\beta = csc\,\beta$

Demostración

Para esta identidad se trabaja con el primer miembro para obtener el segundo.

$sen\,\beta + cos\,\beta\,ctg\,\beta = csc\,\beta$ se utiliza la identidad del cociente $ctg\,\beta = \dfrac{cos\,\beta}{sen\,\beta}$

$sen\,\beta + cos\,\beta \cdot \dfrac{cos\,\beta}{sen\,\beta} = csc\,\beta$ se efectúa el producto.

$sen\,\beta + \dfrac{cos^2\beta}{sen\,\beta} = csc\,\beta$ se realiza la suma fraccionaria.

$\dfrac{sen^2\beta + cos^2\beta}{sen\,\beta} = csc\,\beta$ se sustituye la identidad pitagórica $sen^2\beta + cos^2\beta = 1$

$\dfrac{1}{sen\,\beta} = csc\,\beta$ se aplica $\dfrac{1}{sen\,\beta} = csc\,\beta$

$csc\,\beta \equiv csc\,\beta$

Finalmente, queda demostrada la identidad.

3 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{csc\,\alpha}{tan\,\alpha + ctg\,\alpha} = cos\,\alpha$$

Demostración

Se utiliza el primer miembro de la igualdad y se realizan los siguientes cambios:

$$\frac{csc\,\alpha}{tan\,\alpha + ctg\,\alpha} = cos\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{sen\,\alpha}}{\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}} = cos\,\alpha$$

Se realiza la suma del denominador, $\dfrac{\frac{1}{sen\,\alpha}}{\frac{sen^2\alpha + cos^2\alpha}{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha \cdot}} = cos\,\alpha$

Yposteriormente la división, $\dfrac{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{sen\,\alpha \cdot (sen^2\alpha + cos^2\alpha)} = cos\,\alpha$

Se sustituye $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ $\dfrac{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{sen\,\alpha\,(1)} = cos\,\alpha$

Yfinalmente se simplifica la fracción: $cos\,\alpha \equiv cos\,\alpha$

4 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Demostración

Se utiliza el segundo miembro como base para la demostración:

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$$ Se multiplica por el conjugado del numerador.

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)(1-\operatorname{sen} x)}$$ se reemplaza $1-\operatorname{sen}^2 x=\cos^2 x$.

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\frac{\cos^2 x}{(\cos x)(1-\operatorname{sen} x)}$$ se simplifica la fracción.

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\equiv\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$$ se demuestra la identidad.

5 Demuestra la siguiente identidad:

$$2\cos^2 x-1=1-2\operatorname{sen}^2 x$$

Demostración

En este caso se utiliza el primer miembro para obtener el segundo.

$$2\cos^2 x-1=1-2\operatorname{sen}^2 x$$ Se utiliza la identidad $1=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$.

$$2\cos^2 x-(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)=1-2\operatorname{sen}^2 x$$

$$2\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x=1-2\operatorname{sen}^2 x$$ se simplifican términos semejantes.

$$\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1-2\operatorname{sen}^2 x$$ se emplea $\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$.

$$1-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1-2\operatorname{sen}^2 x$$

$$1-2\operatorname{sen}^2 x\equiv 1-2\operatorname{sen}^2 x$$

Por lo que la identidad queda demostrada.

6 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{1+2\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

Solución

Se utiliza el lado izquierdo para demostrar la identidad:

$$\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{1+2\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$ Se emplea la identidad $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$ se factoriza denominador y numerador

$$\frac{(\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)(\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)}{(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)^2} = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$ se simplifica la fracción

$$\frac{\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha} = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$ se divide entre $\cos\alpha$ numerador y denominador.

$$\frac{\dfrac{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} \quad\rightarrow\quad \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} \equiv \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

EJERCICIO 42

Demuestra las siguientes identidades:

1. $\text{sen}\,x\,(1+\cot x) = \text{sen}\,x + \cos x$
2. $(1+\tan^2 x)\cos x = \sec x$
3. $\left(\dfrac{\text{sen}\,x}{\tan x}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\csc x}\right)^2 = 1$
4. $(\sec x + \text{sen}^2 x + \cos^2 x)(\sec x - 1) = \tan^2 x$
5. $\csc\theta\,(1-\cos^2\theta) = \text{sen}\,\theta$
6. $\dfrac{\text{ctg}\,\alpha}{\cos\alpha} = \csc\alpha$
7. $\dfrac{1-\text{sen}^2\phi}{\sec^2\phi} = \cos^4\phi$
8. $\text{ctg}^2 y - \cos^2 y = \text{ctg}^2 y\cos^2 y$
9. $\sec y = \dfrac{\text{ctg}\,y + \tan y}{\csc y}$
10. $\dfrac{1+\cos\omega}{\text{sen}\,\omega} = \dfrac{\text{sen}\,\omega}{1-\cos\omega}$
11. $\sec\beta\cdot\text{sen}\,\beta\cdot\text{ctg}\,\beta = 1$

12. $ctg\ x - tan\ x = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{sen\ x \cdot \cos x}$

13. $2csc^2 y = \dfrac{1}{1-\cos y} + \dfrac{1}{1+\cos y}$

14. $\dfrac{1}{csc\ \alpha + ctg\ \alpha} = csc\ \alpha - ctg\ \alpha$

15. $3sen^2 x - 9sen\ x \cdot ctg\ x + 7\cos^2 x - 4\cos x = (4\cos x - 1)(\cos x - 3)$

16. $\cos^2 x + \dfrac{tan^2 x}{1+sec\ x} + sen^2 x = sec\ x$

17. $\cos^4 x + sen^2 x + sen^2 x \cos^2 x = 1$

18. $\sqrt{\dfrac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} + \sqrt{\dfrac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}} = 2csc\ \beta$

19. $\cos x\,(2sec\ x + tan\ x)(sec\ x - 2tan\ x) = 2\cos x - 3tan\ x$

20. $1 + \dfrac{sen\ x \cdot ctg^2 x}{1+sen\ x} = csc\ x$

21. $2(sen^6 x + \cos^6 x) - 3(sen^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$

22. $sen\ x\,(1 + ctg\ x) = \cos^3 x\,(1 + tan\ x) + sen^3 x\,(1 + ctg\ x)$

23. $(csc\ x - sen\ x)^2 + (sec\ x - \cos x)^2 = tan^2 x + ctg^2 x - 1$

24. $\dfrac{2 - csc^2 x}{tan\ x - 1} - csc^2 x + 1 = ctg\ x$

25. $\dfrac{tan\ x + ctg\ x}{csc\ x - sen\ x} = sec^3 x$

26. $\dfrac{\cos x - sec\ x}{sen\ x - csc\ x} = sec\ x\,(sec^2 x - 1)\ sen\ x$

27. $sec^3 x = \dfrac{sec^3 x - sec\ x\ tan^2 x}{(1-sen\ x)(1+sen\ x)}$

28. $sen^2 x + tan^2 x + \cos^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

29. $sec^2 x + csc^2 x = (csc\ x\ sec\ x)^2$

30. $sec^2 x = sen\ x\ csc\ x + sen\ x\,(sen\ x\ sec^2 x)$

31. $\dfrac{1}{csc\ x + ctg\ x} - \dfrac{1}{ctg\ x - csc\ x} = \dfrac{2}{sen\ x}$

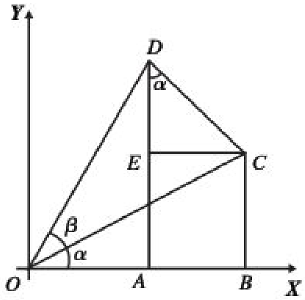
32. $1 - ctg\ x = \sqrt{(csc^2 x - 2ctg\ x)}$

Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones

Obtención de las identidades trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos

Considerando que $\overline{OB} \perp \overline{BC}$, $\overline{OC} \perp \overline{DC}$, se realiza una proyección de $\overline{OD}$ con el eje X y $\overline{OA} \perp \overline{AD}$, $\overline{DE} \perp \overline{CE}$, donde $\overline{AE} = \overline{BC}$, así como $\overline{AB} = \overline{CE}$

Para obtener *sen* $(\alpha + \beta)$



$sen\ (\alpha + \beta) = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{OD}}$ pero $\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED}$;

entonces,

$$sen\ (\alpha + \beta) = \frac{\overline{AE} + \overline{ED}}{\overline{OD}} \qquad sen\ (\alpha + \beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}}$$

Para obtener las funciones trigonométricas de los ángulos α y β

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \ldots(1) \qquad sen\ \beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \ldots(3)$$

$$cos\ \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} \ldots(2) \qquad cos\ \beta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} \ldots(4)$$

Si se realiza el producto de (1) y (4); (2) y (3) se tiene:

$$(sen\ \alpha)(cos\ \beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} \ldots(5)$$

$$(sen\ \beta)(cos\ \alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}} \ldots(6)$$

Al sumar (5) y (6):

$$(sen\ \alpha)(\ cos\ \beta) + (sen\ \beta)(\ cos\ \alpha) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}};$$

Se obtiene *sen* $(\alpha + \beta)$, entonces:

$$\mathbf{sen\ (\alpha + \beta) = (sen\ \alpha)(cos\ \beta) + (sen\ \beta)(cos\ \alpha)}$$

Para obtener *cos* $(\alpha + \beta)$

$$cos\ (\alpha + \beta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}}; \qquad \text{pero} \qquad \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB};$$

entonces,

$$cos\ (\alpha + \beta) = \frac{\overline{OB} - \overline{AB}}{\overline{OD}} \qquad cos\ (\alpha + \beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}}$$

Si se realiza el producto de (2) y (4); (1) y (3) se tiene:

$$(\cos \alpha)(\cos \beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \ \ldots (7)$$

$$(\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \beta) = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}} \ \ldots (8)$$

Al restar (8) de (7):

$$(\cos \alpha)(\cos \beta) - (\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}};$$

Se obtiene $\cos(\alpha + \beta)$

$$\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) = (\cos \alpha)(\cos \beta) - (\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \beta)}$$

Para obtener $\tan(\alpha + \beta)$, se emplean identidades básicas:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}; \qquad \tan(\alpha + \beta) = \frac{(\operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta)+(\operatorname{sen} \beta)(\cos \alpha)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)-(\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \beta)}$$

Si se divide entre $(\cos \alpha)(\cos \beta) \neq 0$, entonces,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{(\operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta)+(\operatorname{sen} \beta)(\cos \alpha)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)}}{\dfrac{(\cos \alpha)(\cos \beta)-(\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \beta)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)}} = \frac{\dfrac{(\operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)}+\dfrac{(\operatorname{sen} \beta)(\cos \alpha)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)}}{\dfrac{(\cos \alpha)(\cos \beta)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)}-\dfrac{(\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \beta)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)}};$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{(\operatorname{sen} \alpha)}{(\cos \alpha)}+\dfrac{(\operatorname{sen} \beta)}{(\cos \beta)}}{1-\dfrac{(\operatorname{sen} \alpha)}{(\cos \alpha)}\cdot\dfrac{(\operatorname{sen} \beta)}{(\cos \beta)}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Finalmente se deduce que:

$$\boldsymbol{\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}}$$

Para obtener las identidades trigonométricas de la diferencia se emplean las identidades de los ángulos negativos en función de ángulos positivos, es decir:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x) \qquad \tan(-x) = -\tan(x)}$$

Por tanto:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = (\operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta) + (\operatorname{sen} \beta)(\cos \alpha)$$

Se cambia β por $-\beta$ y se obtiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = (\operatorname{sen} \alpha)(\cos(-\beta)) + (\operatorname{sen}(-\beta))(\cos \alpha)$$
$$\boldsymbol{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = (\operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta) - (\operatorname{sen} \beta)(\cos \alpha)}$$

De una manera semejante se realiza la diferencia para las demás funciones trigonométricas y se obtiene:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha)(\cos \beta) + (\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \beta)}$$

$$\boldsymbol{\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}}$$

Resumen de fórmulas

Identidades trigonométricas de la suma de ángulos:

$$sen\,(\alpha+\beta)=(sen\,\alpha)(cos\,\beta)+(sen\,\beta)(cos\,\alpha)$$

$$cos\,(\alpha+\beta)=(cos\,\alpha)(cos\,\beta)-(sen\,\alpha)(sen\,\beta)$$

$$tan\,(\alpha+\beta)=\frac{tan\,\alpha+tan\,\beta}{1-tan\,\alpha\cdot tan\,\beta}$$

Identidades trigonométricas de la diferencia de ángulos:

$$sen\,(\alpha-\beta)=(sen\,\alpha)(cos\,\beta)-(sen\,\beta)(cos\,\alpha)$$

$$cos\,(\alpha-\beta)=(cos\,\alpha)(cos\,\beta)+(sen\,\alpha)(sen\,\beta)$$

$$tan\,(\alpha-\beta)=\frac{tan\,\alpha-tan\,\beta}{1+tan\,\alpha\cdot tan\,\beta}$$

Valor de una función trigonométrica para la suma y la diferencia de ángulos

Los valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables se emplean para obtener el valor de una función cuyo ángulo se pueda descomponer en una suma o diferencia.

EJEMPLOS

1 Obtén el valor de $sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$.

Solución

Al aplicar la identidad para el seno de la suma de ángulos, se determina que:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=sen\,\frac{\pi}{4}\,cos\,\frac{\pi}{6}+cos\,\frac{\pi}{4}\,sen\,\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2 Calcula el valor exacto de $tan\,(90°-60°)$.

Solución

Se aplica la identidad de la tangente de la diferencia de ángulos y se obtiene:

$$tan\,(90°-60°)=\frac{tan\,90°-tan\,60°}{1+tan\,90°tan\,60°}$$

La $tan\,90°$ no está definida, por consiguiente, se multiplica la identidad $tan(\alpha-\beta)=\frac{tan\alpha-tan\beta}{1+tan\alpha\,tan\beta}$ por la unidad expresada como $1=\frac{ctg\alpha}{ctg\alpha}$

$$tan(\alpha-\beta)=\left(\frac{tan\alpha-tan\,\beta}{1+tan\alpha\,tan\,\beta}\right)\left(\frac{ctg\alpha}{ctg\alpha}\right)=\frac{tan\,\alpha\,ctg\,\alpha-tan\,\beta\,ctg\alpha}{ctg\,\alpha+tan\,\alpha tan\,\beta ctg\alpha}$$

Por identidades $tan\,\alpha\,ctg\,\alpha=1$, entonces:

$$tan(\alpha-\beta)=\frac{1-tan\beta\,ctg\alpha}{ctg\,\alpha+1(tan\beta)}=\frac{1-tan\beta\,ctg\,\alpha}{ctg\alpha+tan\,\beta}$$

Sustituyendo $\alpha=90°$, $\beta=60°$ y posteriormente los valores de $ctg\,90°=0$ y $tan\,60°=\sqrt{3}$, se obtiene como resultado:

$$tan(90°-60°)=\frac{1-tan\,60°\,ctg\,90°}{ctg\,90°+tan\,60°}=\frac{1-(\sqrt{3})(0)}{0+\sqrt{3}}=\frac{1-0}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3 Expresa en función de x la identidad $cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$

Solución

Se aplica la identidad del coseno de la diferencia de ángulos:

$$cos(\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = cos\frac{3}{2}\pi\ cos\ x + sen\frac{3}{2}\pi\ sen\ x &= (0)\ cos\ x + (-1) sen\ x \\ &= 0 - sen\ x \\ &= -\ sen\ x \end{aligned}$$

Resulta que, $cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\ sen\ x$

EJERCICIO 43

Aplica las identidades de suma o diferencias de ángulos y determina el valor de las siguientes funciones trigonométricas:

1. $sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$
2. $cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{3}\right)$
3. $sen(45° + 60°)$
4. $tan(45° + 90°)$
5. $sec\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$
6. $cos(270° - 45°)$
7. $ctg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$
8. $csc\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)$
9. $tan\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right)$
10. $ctg\left(2\pi - \frac{7}{4}\pi\right)$

Expresa en función del ángulo indicado las siguientes expresiones:

11. $sen\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$
12. $cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right)$
13. $sen(2\pi + \beta)$
14. $tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
15. $csc\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$
16. $ctg\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$
17. $cos\left(x - \frac{8}{3}\pi\right)$
18. $sec(\pi + 2\omega)$
19. $tan(3\pi - \alpha)$
20. $sen\left(\frac{3}{4}\pi - \theta\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicación de las funciones trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos

Para determinar el valor de una función trigonométrica de determinados ángulos, éstos se descomponen como la suma o la diferencia de dos ángulos notables.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el $cos\ 75°$ y expresa 75° como una suma de ángulos notables.

Solución

El ángulo de 75°, como la suma de ángulos notables, es $75° = 30° + 45°$

Entonces,

$$cos\ 75° = cos(30° + 45°)$$

Se emplea la identidad $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta$

$$cos\ (75°) = cos(30° + 45°) = (cos\ 30°)(cos\ 45°) - (sen\ 30°)(sen\ 45°)$$

Al sustituir el valor de cada función trigonométrica, se determina que:

$$cos\ 75° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Por tanto, $cos\ 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 Determina $tan\ 15°$ y expresa 15° como una diferencia de ángulos notables.

Solución

El ángulo de 15° se expresa como $60° - 45°$, entonces:

$$tan\ (15°) = tan(60° - 45°)$$

Se emplea la identidad $tan\ (\alpha - \beta) = \dfrac{tan\ \alpha - tan\ \beta}{1 + tan\ \alpha \cdot tan\ \beta}$ en la que se sustituyen los valores de los ángulos $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$,

$$tan\ (15°) = tan(60° - 45°) = \frac{tan\ 60° - tan\ 45°}{1 + tan\ 60° \cdot tan\ 45°}$$

Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables:

$$tan\ (15°) = tan(60° - 45°) = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\left(\sqrt{3}\right)(1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

Al racionalizar el denominador, se obtiene:

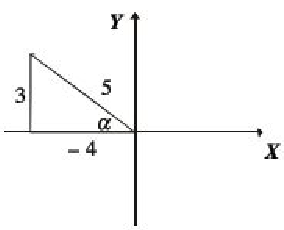
$$tan\ 15° = 2 - \sqrt{3}$$

3 Calcula las funciones trigonométricas básicas de $(\alpha + \beta)$ si sabes que $sen\ \alpha = \dfrac{3}{5}$ para $\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ y $tan\ \beta = \dfrac{5}{12}$ para $\pi \leq \beta \leq \dfrac{3\pi}{2}$.

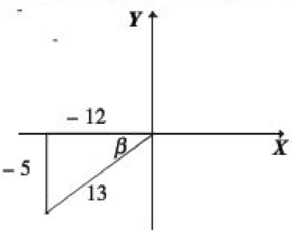
Solución

Se obtienen las funciones de los ángulos α y β, con el teorema de Pitágoras y se respetan los signos de las funciones en los cuadrantes indicados.

Para $sen\ \alpha$, el segundo cuadrante



Para $tan\ \beta$, el tercer cuadrante



Funciones del ángulo α: $sen\ \alpha = \dfrac{3}{5}$, $cos\ \alpha = -\dfrac{4}{5}$ y $tan\ \alpha = -\dfrac{3}{4}$

Funciones del ángulo β: $sen\ \beta = -\dfrac{5}{13}$, $cos\ \beta = -\dfrac{12}{13}$ y $tan\ \beta = \dfrac{5}{12}$

Por consiguiente, estos valores se sustituyen en las identidades de sumas de ángulos.

$$sen\ (\alpha+\beta)=(sen\ \alpha)(cos\ \beta)+(sen\ \beta)(cos\ \alpha)=\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{5}{13}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$=-\frac{36}{65}+\frac{20}{65}=-\frac{16}{65}$$

$$cos\ (\alpha+\beta)=(cos\ \alpha)(cos\ \beta)-(sen\ \alpha)(sen\ \beta)=\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$=\frac{48}{65}+\frac{15}{65}=\frac{63}{65}$$

$$tan\ (\alpha+\beta)=\frac{tan\ \alpha+tan\ \beta}{1-tan\ \alpha\cdot tan\ \beta}=\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{12}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{12}\right)}=\frac{-\frac{4}{12}}{\frac{63}{48}}=-\frac{16}{63}$$

Por tanto, los resultados son:

$$sen\ (\alpha+\beta)=-\frac{16}{65},\ cos\ (\alpha+\beta)=\frac{63}{65}\ \text{y}\ tan\ (\alpha+\beta)=-\frac{16}{63}$$

4 Demuestra la siguiente identidad:

$$arc\ tan\ \frac{2\sqrt{t}}{t-1}-arc\ ctg\ \sqrt{t}=arc\ sen\ \frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

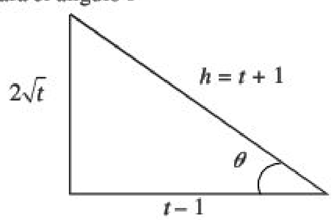
Solución

Sean $\theta=arc\ tan\ \dfrac{2\sqrt{t}}{t-1}$ y $\alpha=arc\ ctg\ \sqrt{t}$, entonces $\theta-\alpha=arc\ sen\ \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$ que es la identidad a demostrar donde

$$tan\ \theta=\frac{2\sqrt{t}}{t-1}\quad \text{y}\quad ctg\ \alpha=\sqrt{t}$$

Se construyen los triángulos respectivamente,

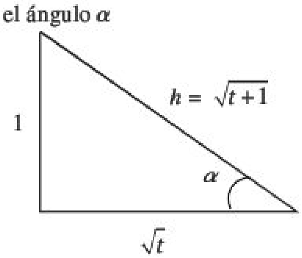
Para el ángulo θ



Por el teorema de Pitágoras

$$h^2=(2\sqrt{t})^2+(t-1)^2$$
$$h=\sqrt{4t+t^2-2t+1}$$
$$h=\sqrt{t^2+2t+1}$$
$$h=\sqrt{(t+1)^2}=t+1$$

Para el ángulo α



Por el teorema de Pitágoras

$$h^2=(\sqrt{t})^2+(1)^2$$
$$h=\sqrt{t+1}$$

Se realiza la demostración aplicando seno a $(\theta-\alpha)$

$$sen\ (\theta-\alpha)=sen\ \theta\ cos\ \alpha-sen\ \alpha\ cos\ \theta$$

Pero $sen\ \theta=\dfrac{2\sqrt{t}}{t+1}$, $cos\ \theta=\dfrac{t-1}{t+1}$, $cos\ \alpha=\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}}$ y $sen\ \alpha=\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$, entonces

$$sen\ (\theta-\alpha)=\frac{2\sqrt{t}}{t+1}\cdot\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}}-\frac{1}{\sqrt{t+1}}\cdot\frac{t-1}{t+1}=\frac{2t-t+1}{(t+1)\sqrt{t+1}}=\frac{(t+1)}{(t+1)\sqrt{t+1}}=\frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

Donde,

$$sen\ (\theta-\alpha)=\frac{1}{\sqrt{t+1}}\qquad\rightarrow\qquad \theta-\alpha=arc\ sen\ \frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

Así queda demostrada la identidad.

EJERCICIO 44

Determina los valores de las siguientes funciones trigonométricas y expresa los ángulos como suma o diferencia:

1. $tan\ 105°$
2. $cot\ 75°$
3. $csc\ 15°$
4. $sec\ 105°$
5. $tan\ 255°$
6. $cos\ 285°$
7. $tan\ 345°$
8. $sec\ 165°$
9. $csc\ 255°$
10. $sen\ 165°$

11. Si $cos\ \alpha = -\frac{4}{5}$ con $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ y $tan\ \beta = \frac{2}{3}$ con $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, halla $sen(\alpha + \beta)$, $cos(\alpha + \beta)$ y $tan(\alpha + \beta)$.

12. Si $tan\ \alpha = 1$ con $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$ y $sec\ \beta = 2$ con $\frac{3}{2}\pi \leq \beta \leq 2\pi$, halla $sen(\alpha - \beta)$, $cos(\alpha - \beta)$ y $tan(\alpha - \beta)$.

13. *Si* $sec\ \alpha = -\frac{3}{2}$ con $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$ y $ctg\ \beta = \sqrt{2}$ con $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, halla las seis funciones trigonométricas de $(\alpha + \beta)$ y $(\alpha - \beta)$.

Demuestra las siguientes identidades:

14. $\left[sen\ (\pi - x) + sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right][sen\ x - cos\ x] \equiv 1 - 2cos^2 x$

15. $\left[cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - cos\ (\pi - x)\right] - \left[sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] \equiv 2\ sen\ x$

16. $\left[cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - sen\ (\pi + x)\right] - \left[cos(\pi + x) + cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] \equiv 3\ sen\ x + cos\ x$

17. $\dfrac{sen\left(\beta - \frac{3\pi}{2}\right)}{sec\ \beta} + \dfrac{cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{csc\ \beta} \equiv 1$

18. $tan(\pi - \alpha) \cdot sen\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot sen(\pi - \alpha) \equiv 1 - cos^2\ \alpha$

19. $[sen\ \alpha - sen\ \beta]^2 - 2\ cos(\alpha + \beta) + [cos\ \alpha + cos\ \beta]^2 \equiv 2$

20. $\dfrac{sec(\pi - \omega)}{csc\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)} + \dfrac{sen(\pi + \omega)}{cos(\pi + \omega)} \equiv tan\ \omega - 1$

21. $csc(\pi - y) + \dfrac{cos(\pi + y)}{tan(\pi + y)} \equiv sen\ y$

22. $\dfrac{csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} - \dfrac{tan(\pi - x)}{sen\ x} \equiv sec\ x \cdot (csc\ x + 1)$

23. $\left[sen(x + 2\pi) + cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2 + \dfrac{4\ cos(x - 2\pi)}{csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \equiv 4$

24. $\dfrac{sen\ (\alpha + \beta + \gamma) + sen\ (\alpha - \beta - \gamma)}{cos\ (\alpha + \beta + \gamma) + cos(\alpha - \beta - \gamma)} \equiv tan\ \alpha$

25. $sen(\theta+\omega)\cdot sen(\theta-\omega) \equiv (sen\,\theta + sen\,\omega)(sen\,\theta - sen\,\omega)$

26. $tan\left(\frac{\pi}{4}+\delta\right) + tan\left(\frac{\pi}{4}-\delta\right) \equiv -\frac{2}{sen^2\,\delta - cos^2\,\delta}$

27. $4\,arc\,tan\left(-\frac{3}{2}\right) + \pi \equiv 4\,arc\,tan\left(-\frac{1}{5}\right)$

28. $sen^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2} \equiv -sen^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

29. $cos^{-1}\frac{12}{13} - cos^{-1}\frac{33}{65} \equiv -sen^{-1}\frac{3}{5}$

30. $sec^{-1}\frac{\sqrt{t^2+1}}{t} - ctg^{-1}t \equiv 0,\ t > 0$

31. $arc\,sen\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - arc\,cos\frac{t^2-1}{t^2+1} \equiv -arc\,tan\frac{1}{t},\ t > 0$

32. $sen^{-1}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + sen^{-1}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \equiv sen^{-1}(1),\ t > 0$

33. $sen^{-1}\sqrt{\frac{t}{t+1}} - sen^{-1}\frac{1}{\sqrt{t+1}} \equiv sen^{-1}\frac{t-1}{t+1},\ t \geq 1$

34. $arc\,tan\,s - arc\,sen\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \equiv arc\,ta\ \frac{s-t}{1+st},\ s > 0$ y $t > 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones trigonométricas del ángulo doble

Estas funciones se obtienen a partir de las identidades de la suma de ángulos, como se muestra a continuación:

Seno del ángulo doble *sen* (2α)

Para obtener el $sen\,(2\alpha)$ se emplea la identidad $sen\,(\alpha+\beta)$ donde $\beta = \alpha$

Entonces:

$$sen\,(\alpha+\beta) = (sen\,\alpha)(cos\,\beta) + (sen\,\beta)(cos\,\alpha)$$
$$sen\,(2\alpha) = (sen\,\alpha)(cos\,\alpha) + (sen\,\alpha)(cos\,\alpha)$$
$$\mathbf{sen\,(2\alpha) = 2\,(sen\,\alpha)(cos\,\alpha)}$$

Coseno del ángulo doble *cos* (2α)

Para obtener $cos\,(2\alpha)$ se emplea la identidad $cos\,(\alpha+\beta)$ donde $\beta = \alpha$

Entonces:

$$cos\,(\alpha+\beta) = (cos\,\alpha)(cos\,\beta) - (sen\,\alpha)(sen\,\beta)$$
$$cos\,(2\alpha) = (cos\,\alpha)(cos\,\alpha) - (sen\,\alpha)(sen\,\alpha)$$

$\mathbf{cos\,(2\alpha) = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha}$ (con el empleo de identidades trigonométricas básicas)

$$\mathbf{cos\,(2\alpha) = 1 - 2\,sen^2\,\alpha}$$
$$\mathbf{cos\,(2\alpha) = 2\,cos^2\,\alpha - 1}$$

Tangente del ángulo doble *tan* (2α)

Para obtener *tan* (2α) se emplea la identidad *tan* $(\alpha+\beta)$ donde $\beta=\alpha$

Entonces:

$$tan\ (\alpha+\beta)=\frac{tan\ \alpha+tan\ \beta}{1-tan\ \alpha\cdot tan\ \beta}$$

$$tan\ (2\alpha)=\frac{tan\ \alpha+tan\ \alpha}{1-tan\ \alpha\cdot tan\ \alpha}$$

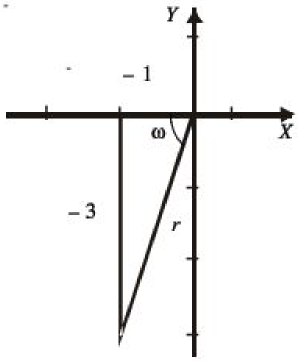
$$\mathbf{tan\ (2\alpha)=\frac{2tan\ \alpha}{1-tan^2\ \alpha}}$$

EJEMPLOS

1 Obtén las funciones trigonométricas de (2ω), si se sabe que *tan* $\omega=3$, para $\pi\leq\omega\leq\frac{3\pi}{2}$

Solución

En este caso el ángulo ω se encuentra en el tercer cuadrante, entonces: $tan\ \omega=\frac{-3}{-1}$



Por el teorema de Pitágoras

$$r^2=(-1)^2+(-3)^2$$

$$r^2=1+9$$

$$r=\sqrt{10}$$

Se obtienen las funciones trigonométricas de ω:

$$sen\ \omega=-\frac{3}{\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}\ ,\ cos\ \omega=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}\quad \text{y}\quad tan\ \omega=\frac{-3}{-1}=3$$

Por tanto,

$$sen\ 2\omega=2\ (sen\ \omega)(cos\ \omega)=2\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{(6)(10)}{100}=\frac{3}{5}$$

$$cos\ 2\omega=cos^2\ \omega-sen^2\ \omega=\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2=\frac{10-90}{100}=-\frac{4}{5}$$

$$tan\ 2\omega=\frac{2tan\ \omega}{1-tan^2\ \omega}=\frac{2\cdot(3)}{1-(3)^2}=\frac{6}{-8}=-\frac{3}{4}$$

2 Demuestra la siguiente identidad:

$$sen^6\ x+cos^6\ x=1-\frac{3}{4}sen^2\ 2x$$

Demostración

$(sen^2\ x+cos^2\ x)(sen^4\ x-sen^2\ x\cdot cos^2\ x+cos^4\ x)=1-\frac{3}{4}sen^2\ 2x$

$(1)(sen^4\ x-sen^2\ x\cdot cos^2\ x+cos^4\ x)=1-\frac{3}{4}sen^2\ 2x$

$sen^4\ x-sen^2\ x\cdot cos^2\ x+cos^4\ x+3sen^2\ x\cdot cos^2\ x-3sen^2\ x\cdot cos^2\ x=1-\frac{3}{4}sen^2\ 2x$

$(sen^4\ x+2sen^2\ x\cdot cos^2\ x+cos^4\ x)-3sen^2\ x\cdot cos^2\ x=1-\frac{3}{4}sen^2\ 2x$

$(sen^2\ x+cos^2\ x)^2-3sen^2\ x\cdot cos^2\ x=1-\frac{3}{4}sen^2\ 2x$

$1-3sen^2\ x\cdot cos^2\ x=1-\frac{3}{4}sen^2\ 2x$ (pero $sen\ 2x=2\ sen\ x\cdot cos\ x$)

$1-\frac{3}{4}sen^2\ 2x\equiv 1-\frac{3}{4}sen^2\ 2x$

3 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1+\cos 2x}{ctg\ x}=sen\ 2x$$

Demostración

Se inicia con la sustitución de las siguientes identidades:

$$1=sen^2 x+\cos^2 x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-sen^2 x \quad \text{y} \quad ctg\ x=\frac{\cos x}{sen\ x}$$

Se realizan las operaciones correspondientes y se simplifica:

$$\frac{1+\cos 2x}{ctg\ x}=\frac{(sen^2 x+\cos^2 x)+(\cos^2 x-sen^2 x)}{ctg\ x}=\frac{2\cos^2 x}{\frac{\cos x}{sen\ x}}=\frac{2\cos^2 x\ sen\ x}{\cos x}=2sen\ x\cos x$$

Pero $2\ sen\ x\cos x=sen\ 2x$, por consiguiente se comprueba la igualdad:

$$\frac{1+\cos 2x}{ctg\ x}\equiv sen\ 2x$$

Funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo

Seno de la mitad de un ángulo: $sen\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Para obtener el $sen\left(\frac{\omega}{2}\right)$, se emplea la identidad $\cos(2\alpha)=1-2\,sen^2\alpha$, entonces se realiza el cambio $\alpha=\frac{\omega}{2}$

$$\cos\left(2\cdot\frac{\omega}{2}\right)=1-2sen^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \rightarrow \qquad \cos\omega=1-2sen^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Se despeja $sen\left(\frac{\omega}{2}\right)$, resultando $\boldsymbol{sen\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}}}$

Coseno de la mitad de un ángulo: $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Para obtener $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$, se emplea la identidad $\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$

Entonces se realiza el cambio $\alpha=\frac{\omega}{2}$

$$\cos\left(2\cdot\frac{\omega}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)-1 \qquad \rightarrow \qquad \cos\omega=2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)-1$$

Se despeja $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$, resultando $\boldsymbol{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\omega}{2}}}$

Tangente de la mitad de un ángulo: $\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Para obtener $\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$, se emplean identidades trigonométricas básicas:

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{sen\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\omega}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1-\cos\omega}{2}}{\frac{1+\cos\omega}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}}$$

Al racionalizar el denominador:

$$tan\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{(1-cos\,\omega)\cdot(1-cos\,\omega)}{(1+cos\,\omega)\cdot(1-cos\,\omega)}}=\sqrt{\frac{(1-cos\,\omega)^2}{1-cos^2\,\omega}}=\sqrt{\frac{(1-cos\,\omega)^2}{sen^2\,\omega}}=\frac{1-cos\,\omega}{sen\,\omega}$$

Por tanto:

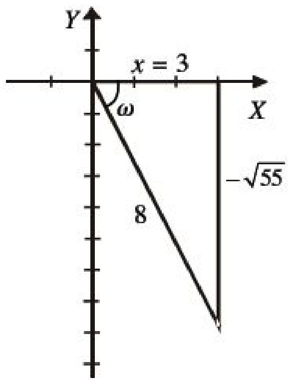
$$\boldsymbol{tan\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-cos\,\omega}{1+cos\,\omega}}=\frac{1-cos\,\omega}{sen\,\omega}}$$

EJEMPLOS

1 Obtén las funciones trigonométricas básicas de $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ si se sabe que: $sen\,\omega=-\frac{\sqrt{55}}{8}$ para $270° \leq \omega \leq 360°$.

Solución

Se ubica el ángulo ω en el cuarto cuadrante:



Por el teorema de Pitágoras

$$(8)^2=(x)^2+(-\sqrt{55}\,)^2$$
$$64=x^2+55$$
$$64-55=x^2$$
$$x=\sqrt{9}$$
$$x=3$$

Se obtienen las funciones trigonométricas del ángulo ω:

$$sen\,\omega=-\frac{\sqrt{55}}{8}\qquad cos\,\omega=\frac{3}{8}\qquad tan\,\omega=-\frac{\sqrt{55}}{3}$$

De acuerdo con el resultado anterior, las funciones trigonométricas del ángulo $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ son:

$$sen\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-cos\,\omega}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(\frac{3}{8}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{5}{8}}{2}}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+cos\,\omega}{2}}=\sqrt{\frac{1+\left(\frac{3}{8}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{11}{8}}{2}}=\sqrt{\frac{11}{16}}=\frac{\sqrt{11}}{4}$$

$$tan\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1-cos\,\omega}{sen\,\omega}=\frac{1-\left(\frac{3}{8}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{55}}{8}\right)}=\frac{\frac{5}{8}}{-\frac{\sqrt{55}}{8}}=-\frac{5}{\sqrt{55}}=-\frac{\sqrt{55}}{11}$$

2 Obtén el valor de las funciones trigonométricas básicas del ángulo de 15°, haciendo $15° = \frac{30°}{2}$

Solución

a) Para hallar el valor de *sen* 15° se utiliza la siguiente fórmula:

$$sen\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}}$$

Entonces,

$$sen\,15° = sen\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto:

$$sen\,15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

b) Para hallar el valor de *cos* 15° se utiliza la siguiente fórmula:

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\omega}{2}}$$

Entonces,

$$\cos 15° = \cos\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto,

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

c) Para hallar el valor de *tan* 15° se utiliza la siguiente fórmula:

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1-\cos\omega}{sen\,\omega}$$

Entonces,

$$\tan 15° = \tan\left(\frac{30°}{2}\right) = \frac{1-\cos 30°}{sen\,30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{1}$$

Por consiguiente,

$$\tan 15° = 2-\sqrt{3}$$

3 Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Demostración

Se aplican las identidades del doble del ángulo

$$\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \rightarrow \frac{\cos\alpha - (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{1 + \cos\alpha - 2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Se realiza una factorización tanto en el numerador como en el denominador,

$$\frac{1 + \cos\alpha - 2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)(1+2\cos\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha(1+2\cos\alpha)} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Se aplican identidades básicas con el nuevo resultado,

$$\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}} = \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

Pero $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ y $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, entonces se demuestra la igualdad

$$\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

EJERCICIO 45

1. Utiliza las identidades del ángulo mitad para obtener las funciones trigonométricas de los ángulos $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$ y $\frac{7}{8}\pi$.
2. Obtén las funciones trigonométricas de (2α) y $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, si se sabe que $csc\ \alpha = 4$ para $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.
3. Si se sabe que $tan\ \beta = \frac{12}{5}$, para $\pi \leq \beta \leq \frac{3}{2}\pi$, halla las funciones trigonométricas de (2β) y $\left(\frac{\beta}{2}\right)$.
4. Dada la función trigonométrica $cos\ \omega = \frac{5}{8}$ donde $\frac{3}{2}\pi \leq \omega \leq 2\pi$, encuentra las funciones trigonométricas de (2ω) y $\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
5. Obtén las funciones trigonométricas de (2α) y $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ si se sabe que: $sec\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ para $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.
6. Si $sen\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$ y $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, determina $sen\ \alpha$, $cos\ \alpha$ y $tan\ \alpha$.
7. Si $cos\ 2\beta = \frac{15}{17}$ y $\pi \leq \beta \leq \frac{3}{2}\pi$, encuentra las funciones trigonométricas de β y $\frac{\beta}{2}$.
8. Si $sen\ \frac{1}{4}\alpha = \sqrt{\frac{10-\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{20}}$, determina las funciones trigonométricas de α si $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.
9. Si $csc\frac{1}{4}\beta = \sqrt{\frac{6}{3-\sqrt{6}}}$ y $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, halla las funciones trigonométricas de β y $\frac{\beta}{2}$.
10. Si $ctg\ \frac{\omega}{2} = -3$ y $\frac{3}{2}\pi \leq \omega \leq 2\pi$, halla las funciones trigonométricas de ω, 2ω y 4ω.

Demuestra las siguientes identidades:

11. $\frac{2}{1 + cos\ \alpha} = sec^2\frac{\alpha}{2}$
12. $[cos\ 2x - sen\ 2x]^2 - 1 = sen(-4x)$
13. $cos\ 8x + cos\ 4x = 2cos\ 2x - 4sen^2\ 3x \cdot cos\ 2x$
14. $sen\ 4x + sen\ 6x = 2\ (sen\ 5x \cdot cos\ x)$
15. $ctg\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) = \frac{1 + sen\ 2\omega}{cos\ 2\omega}$
16. $cos^8\beta - sen^8\beta = \frac{1}{4}cos\ 2\beta \cdot (3 + cos\ 4\beta)$
17. $\sqrt{2}\ sec\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\ (sen\ \alpha + cos\ \alpha)}{1 + sen 2\ \alpha}$
18. $cos\ 12°\ cos\ 24°\ cos\ 48°\ cos\ 96° = -\frac{1}{16}$
19. $\frac{cos^3\ x - sen^3\ x}{cos\ 2x} = cos\ x - \frac{sen\ 2x}{2\ (\ sen\ x + cos\ x\ )} + sen\ x$

20. $\dfrac{1}{1 + sen\,\varphi} = \dfrac{1 + tan^2\dfrac{\varphi}{2}}{\left(tan^2\,\dfrac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(1 + ctg\,\dfrac{\varphi}{2}\right)^2}$

21. $2\left[cos\dfrac{y}{2} - sen\dfrac{y}{2}\right]\cdot\left[sen\dfrac{y}{2} + cos\dfrac{y}{2}\right]cos\,x = cos(x+y) + cos(x-y)$

22. $sen(x+2y) - sen\,x = 2sen\,y\cdot cos(x+y)$

23. $4\,csc^2\beta\cdot cos\,\beta = ctg^2\dfrac{\beta}{2} - tan^2\dfrac{\beta}{2}$

24. $\left[3\,cos\,\dfrac{\theta}{2} - sen\,\dfrac{\theta}{2}\right]\cdot\left[cos\,\dfrac{\theta}{2} + sen\,\dfrac{\theta}{2}\right] = 2\,cos\,\theta + sen\,\theta + 1$

25. $sen^6\,x + cos^6\,x = 1 - \dfrac{3}{4}\,sen^2\,2x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Identidades trigonométricas para transformar un producto en suma o resta

De las identidades:

$$\begin{array}{r} sen\,(x+y) = (sen\,x)\,(cos\,y) + (sen\,y)\,(cos\,x) \\ +\quad sen\,(x-y) = (sen\,x)\,(cos\,y) - (sen\,y)\,(cos\,x) \\ \hline sen\,(x+y) + sen\,(x-y) = 2\,(sen\,x)(cos\,y) \end{array}$$

se realiza la suma con

Al despejar,

$$(sen\,x)\,(cos\,y) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y) + sen(x-y)\right]$$

De forma semejante se obtiene:

$$(cos\,x)\,(sen\,y) = \frac{1}{2}\left[sen\,(x+y) - sen\,(x-y)\right]$$

De las identidades:

$$\begin{array}{r} cos\,(x+y) = (cos\,x)\,(cos\,y) - (sen\,x)\,(sen\,y) \\ +\quad cos\,(x-y) = (cos\,x)\,(cos\,y) + (sen\,x)\,(sen\,y) \\ \hline cos\,(x+y) + cos\,(x-y) = 2\,(cos\,x)(cos\,y) \end{array}$$

se realiza la suma con

Al despejar,

$$(cos\,x)\,(cos\,y) = \frac{1}{2}\left[cos\,(x+y) + cos(x-y)\right]$$

De la misma manera se obtiene:

$$(sen\,x)\,(sen\,y) = -\frac{1}{2}\left[cos\,(x+y) - cos\,(x-y)\right]$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa el siguiente producto en forma de suma o resta:

$$cos\,(8x)\,cos\,(2x)$$

Solución

Se emplea la identidad $(cos\,x)\,(cos\,y) = \frac{1}{2}\left[cos(x+y)+cos(x-y)\right]$ y se obtiene:

$$cos\,(8x)\,cos\,(2x) = \frac{1}{2}\left[cos(8x+2x)+cos(8x-2x)\right]$$

$$cos\,(8x)\,cos\,(2x) = \frac{1}{2}\left[cos\,(10x)+cos\,(6x)\right]$$

2 Encuentra el valor del siguiente producto:

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Solución

Se emplea la identidad $(sen\,x)\,(cos\,y) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y)+sen(x-y)\right]$

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{9\pi+\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{9\pi-\pi}{12}\right)\right]$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)+sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Al sustituir el valor de las funciones trigonométricas de ángulos notables:

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

EJERCICIO 46

Convierte los siguientes productos en sumas o diferencias de funciones trigonométricas:

1. $sen(\alpha+\beta)\,cos(\alpha-\beta)$
2. $cos(45°)\,sen(60°)$
3. $sen(y+\beta)\,sen(y-\beta)$
4. $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
5. $sen(82°\,30')\,cos(37°\,30')$
6. $sen(37°\,30')\,sen(7°\,30')$
7. $cos(x+\alpha)\,sen(x-\alpha)$
8. $cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
9. $sen(187°\,30')\,cos(217°\,30')$
10. $cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
11. $4\,sen(3\alpha)\,sen(\alpha)$
12. $5cos(2\alpha)\,sen(6\alpha)$
13. $cos(47°)\,sen(43°)$
14. $cos\left(\frac{2}{3}\alpha\right)cos\left(\frac{5}{3}\beta\right)$
15. $3sen(9\alpha)\,cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$
16. $sec\left(\frac{\pi}{3}\right)sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$
17. $tan\,2\alpha\,ctg\,\alpha$
18. $sec\left(\frac{3}{4}\pi\right)csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$
19. $tan(x+a)\,tan(x-a)$
20. $\frac{sen(2\alpha+\beta)}{sec(2\alpha-\beta)}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Demostración de identidades

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra la siguiente igualdad: $sen\,\frac{\pi}{12}\,cos\,\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}$

Demostración

Se aplica la identidad $(sen\ x)\ (cos\ y) = \frac{1}{2}\left[sen\,(x+y) + sen\,(x-y)\right]$

$$sen\,\frac{\pi}{12}\,cos\,\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right) + sen\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[sen\,\frac{\pi}{6} + sen0\right]$$

Pero $sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $sen0 = 0$, entonces:

$$sen\,\frac{\pi}{12}\,cos\,\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + 0\right] = \frac{1}{4}$$

Por tanto queda demostrada la igualdad.

2 Demuestra la siguiente expresión:

$$sen\ x\ cos\ y + sen\ y\ cos\ x = sen(x+y)$$

Demostración

Se aplica la transformación de productos a sumas y se obtiene:

$$sen\ x\ cos\ y = \frac{1}{2}\left[sen\,(x+y) + sen\,(x-y)\right]$$

$$sen\ y\ cos\ x = cos\ x\ sen\ y = \frac{1}{2}\left[sen\,(x+y) - sen\,(x-y)\right]$$

Al sumar ambas expresiones:

$$sen\ x\ cos\ y + sen\ y\ cos\ x = \frac{1}{2}\left[sen\,(x+y) + sen\,(x-y)\right] + \frac{1}{2}\left[sen\,(x+y) - sen\,(x-y)\right]$$

$$sen\ x\ cos\ y + sen\ y\ cos\ x = \frac{1}{2}sen\,(x+y) + \frac{1}{2}sen\,(x-y) + \frac{1}{2}sen\,(x+y) - \frac{1}{2}sen\,(x-y)$$

Se simplifican términos semejantes, entonces:

$$sen\ x\ cos\ y + sen\ y\ cos\ x = sen(x+y)$$

Por tanto, queda demostrada la igualdad.

EJERCICIO 47

Demuestra las siguientes igualdades:

1. $\dfrac{1}{sec\ 30°\ csc\ 120°} = \dfrac{3}{4}$

2. $\dfrac{sen\ 75°\ cos\ 45°}{sen\ 225°\ cos\ 75°} = -2-\sqrt{3}$

3. $\dfrac{cos\ 35°\ sen\ 10° + cos\ 10°\ sen\ 35°}{cos\ 20°\ cos\ 10° - sen\ 20°\ sen\ 10°} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

4. $\dfrac{tan\dfrac{\pi}{6}\,tan\dfrac{5\pi}{12} + tan\dfrac{\pi}{12}\,tan\dfrac{5\pi}{12}}{1-tan\dfrac{\pi}{6}\,tan\dfrac{\pi}{12}} = 2+\sqrt{3}$

5. $sen\ x\ cos\ x + cos\ 3x\ sen\ x = \dfrac{1}{2}\ sen\ 4x$

6. $cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)sen\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}\left[sen\ 2x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

7. $\dfrac{sen^2\left(\dfrac{3}{2}\pi - x\right)cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{cos(2\pi - x)cos^2\left(\dfrac{3}{2}\pi - x\right)sen^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)} = sec\ x$

8. $cos\ x[cos\ 2x - 2sen^2 x] = cos\ 3x$

9. $tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\ tan\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) = \dfrac{2\,cos\ 2x+1}{2\,cos\ 2x-1}$

10. $sen(10° + x)\ cos\ (20° - x) + cos(80° - x)sen(70° + x) = sen(2x - 10°)$

11. $sen\left(\dfrac{2}{9}\pi + x\right)cos\left(\dfrac{1}{18}\pi + x\right) - sen\left(\dfrac{5}{18}\pi - x\right)cos\left(\dfrac{4}{9}\pi - x\right) = \dfrac{1}{2}$

12. $\dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{csc\ 2x} - \dfrac{sen\ x}{csc\left(\dfrac{3\pi}{2}+2x\right)} = sen\ 3x$

13. $cos\ 2x + 2[sen\ x\ cos\ y + cos\ x\ sen\ y]\ sen(x-y) = cos\ 2y$

14. $sen\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot sen\left(\dfrac{3}{2}\pi - x\right)\cdot cos(\pi - x) = cos^3 x$

Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones

Identidades para transformar sumas o restas de funciones trigonométricas en un producto

Dados los ángulos x y y, tales que

$$x + y = \alpha \qquad ; \qquad x - y = \beta$$

Al resolver el sistema de ecuaciones para x y y se obtienen los siguientes resultados:

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad ; \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

Estos valores angulares se sustituyen en la identidad:

$$(sen\ x)\ (cos\ y) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y) + sen(x-y)\right]$$

Y el resultado es:

$$sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}[sen\ \alpha + sen\ \beta]$$

Ahora, al despejar la suma de los senos, se determina que:

$$\boldsymbol{sen\ \alpha + sen\ \beta = 2\, sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

De la misma manera se obtiene:

$$\boldsymbol{sen\ \alpha - sen\ \beta = 2\, cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{cos\ \alpha + cos\ \beta = 2\, cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{cos\ \alpha - cos\ \beta = -2\, sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Efectúa lo siguiente: $sen\frac{\pi}{2} - sen\frac{\pi}{6}$

Solución

Al aplicar la transformación de diferencia de senos a productos, se obtiene:

$$sen\frac{\pi}{2} - sen\frac{\pi}{6} = 2\ cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{2}\right);\ \text{simplificando}$$

$$sen\frac{\pi}{2} - sen\frac{\pi}{6} = 2\ cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$sen\frac{\pi}{2} - sen\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2 Calcula, sin hacer uso de las tablas trigonométricas:

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

Solución

Se emplea la identidad, $sen\,\alpha + sen\,\beta = 2\,sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\left[sen\left(\frac{\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\right)cos\left(\frac{\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2}\right)\right]$$

Se simplifica,

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Dado que $\frac{\pi}{12}$ no es un ángulo notable, se puede emplear la identidad:

$$cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+cos\,x}{2}}$$

Donde $\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{\pi}{6}}{2}$, entonces,

$$cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto,

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\left[(1)\cdot\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)\right]$$

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)+sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

3 Simplifica la siguiente expresión: $cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)$

Solución

Se emplea la identidad, $cos\,\alpha - cos\,\beta = -2\left[sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$

$$cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=-2\,sen\left(\frac{\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\right)$$

$$cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=-2\,sen(\omega)\cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=-2\,sen(\omega)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)-cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\cdot sen\,\omega$$

4 Simplifica la siguiente expresión: $sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$

Solución

Al utilizar la identidad, $sen\,\alpha - sen\,\beta = 2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, se obtiene:

$$sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2\,cos\left(\frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)sen\left(\frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)$$

$$sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2cos\frac{x}{2}\;\;sen\;\frac{\pi}{2}$$

$$sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2cos\frac{x}{2}\;(1)$$

$$sen\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2cos\frac{x}{2}$$

EJERCICIO 48

Convierte en producto las siguientes sumas y restas de funciones trigonométricas:

1. $sen\,165° + sen\,75°$
2. $cos(7\beta)+cos(-2\beta)$
3. $sen(240°) + sen(120°)$
4. $cos(5\theta) - cos(3\theta)$
5. $cos(37°\,29')+cos(52°\,31')$
6. $sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)-sen\left(\frac{\pi}{12}\right)$
7. $cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)+cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$
8. $sen\,35° - sen\,25°$
9. $cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
10. $cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)+cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)$
11. $sen\left(\frac{\pi}{4}\right)+sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$
12. $sen\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+sen\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$
13. $cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$
14. $sen\left(\beta+\frac{\pi}{8}\right)+sen\left(\beta-\frac{\pi}{8}\right)$
15. $sen\left(\frac{5}{8}\pi+\alpha\right)+sen\left(\frac{7}{8}\pi-\alpha\right)$
16. $cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Demostración de identidades

EJEMPLOS

1 Demuestra la siguiente igualdad: $\dfrac{sen\ 50° + sen\ 10°}{cos\ 50° + cos\ 10°} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Solución

Se aplica la suma de senos y cosenos

$$\frac{sen\ 50° + sen\ 10°}{cos\ 50° + cos\ 10°} = \frac{2\left[sen\frac{1}{2}(50°+10°)cos\frac{1}{2}(50°-10°)\right]}{2\left[cos\frac{1}{2}(50°+10°)cos\frac{1}{2}(50°-10°)\right]} = \frac{sen\ 30° cos\ 20°}{cos\ 30° cos\ 20°} = tan\ 30°$$

Pero $tan\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, por lo que la igualdad queda demostrada.

2 Demuestra la siguiente igualdad:

$$sen\ x + sen\ 3x + sen\ 5x + sen\ 7x = 4\ sen\ 4x\ cos\ 2x\ cos\ x$$

Solución

Se agrupan dos a dos los sumandos

$$sen\ x + sen\ 3x + sen\ 5x + sen\ 7x = (sen\ x + sen\ 3x) + (sen\ 5x + sen\ 7x)$$

Se aplica la transformación de suma de senos a productos

$$sen\ x + sen\ 3x = 2\left[sen\frac{1}{2}(x+3x)cos\frac{1}{2}(x-3x)\right] = 2[sen\ 2x\ cos(-x)] = 2\ sen\ 2x\ cos\ x$$

$$sen\ 5x + sen\ 7x = 2\left[sen\frac{1}{2}(5x+7x)cos\frac{1}{2}(5x-7x)\right] = 2[sen\ 6x\ cos(-x)] = 2\ sen\ 6x\ cos\ x$$

Entonces,

$$sen\ x + sen\ 3x + sen\ 5x + sen\ 7x = 2sen\ 2x\ cos\ x + 2sen\ 6x\ cos\ x = 2cos\ x\ (sen\ 2x + sen\ 6x)$$

En esta nueva expresión se aplica la transformación de sumas a productos,

$$2\ cos\ x\ (sen\ 2x + sen\ 6x) = 2\ cos\ x \cdot 2\left[sen\frac{1}{2}(2x+6x)cos\frac{1}{2}(2x-6x)\right]$$

$$= 4\ cos\ x\ [sen\ 4x\ cos(-2x)]$$

$$= 4\ cos\ x\ sen\ 4x\ cos\ 2x$$

Por tanto, queda demostrada la igualdad.

EJERCICIO 49

Demuestra las siguientes igualdades:

1. $\cos\frac{5}{12}\pi+\cos\frac{11}{12}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\frac{sen\ 40°+sen\ 20°}{sen\ 40°-sen\ 20°}=\frac{\sqrt{3}}{3}ctg\ 10°$

3. $\frac{sen\frac{\pi}{6}+sen\frac{5\pi}{18}}{sen\frac{5\pi}{18}-sen\frac{\pi}{6}}=\frac{\tan\frac{2\pi}{9}}{\tan\frac{\pi}{18}}$

4. $\cos(x-\pi)+\cos(x+\pi)=-2\cos x$

5. $sen\ 2x+sen\ 4x-sen\ 6x=4sen\ x\ sen\ 2x\ sen\ 3x$

6. $sen\ x-sen\ 2x+sen\ 3x-sen\ 4x=-4sen\ \frac{x}{2}\ \cos\frac{5x}{2}\ \cos x$

7. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=4\cos\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}$

8. $\tan x=\frac{sen\ 5x-sen\ 3x}{\cos 5x+\cos 3x}$

9. $\frac{1-2sen^2 x}{sen\ 3x-sen\ x}=\frac{1}{2}\csc x$

10. $\frac{\cos(x+y)-\cos(x-y)}{sen(x+y)-sen(x-y)}=-\tan x$

11. $\frac{1}{sen\ x+sen\ 2x+sen\ 3x}=\frac{1}{4}\csc\frac{3x}{2}\sec x\sec\frac{x}{2}$

12. $\frac{1}{4}[\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a-b+c)+\cos(a-b-c)]=\cos a\cos b\cos c$

Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones

Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una expresión que tiene como incógnita valores angulares bajo los signos de funciones trigonométricas.

Al resolver una ecuación trigonométrica se debe encontrar el o los valores que satisfacen dicha ecuación, esto es, que en una ecuación trigonométrica no siempre existe una solución única, en ocasiones existen varias, las cuales se expresan como conjunto solución.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la siguiente ecuación para $0 \le x \le 2\pi$.

$$sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

Solución

Se despeja la incógnita x y la función seno se representa como *arc sen* en el segundo miembro, luego el intervalo indica que se tomarán como solución aquellas entre 0° y 360°

$$sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad \left(x+\frac{\pi}{4}\right) = arc\ sen\,(1)$$

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}=45°$$

El resultado puede expresarse en grados o en radianes.

2 Resuelve la siguiente ecuación para θ si $0° \le \theta \le 360°$.

$$3\ tan\ \theta - 4 = tan\ \theta - 2$$

Solución

Se agrupan los términos que tienen a las incógnitas y se reducen:

$$3\ tan\ \theta - 4 = tan\ \theta\ \ -2 \quad \rightarrow \quad 3\ tan\ \theta - tan\ \theta = -2+4$$

$$2\ tan\ \theta = 2$$

$$tan\ \theta = 1$$

De esta expresión se despeja el ángulo θ

$$tan\ \theta = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = arc\ tan\,(1)$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}=45°$$

Luego, la tangente es positiva en el primero y tercer cuadrantes, por consiguiente, el conjunto solución es $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$.

3 Resuelve la siguiente ecuación para x si $0 \le x \le 2\pi$.

$$2\ sen^2 x - 1 = -\ sen\ x$$

Solución

Se agrupan los términos en el primer miembro:

$$2\ sen^2 x - 1 = -sen\ x \quad \rightarrow \quad 2sen^2 x + sen\ x - 1 = 0$$

La expresión resultante se factoriza,

$$(2sen\ x - 1)(sen\ x + 1) = 0$$

Por tanto, $2sen\ x - 1 = 0$ y $sen\ x + 1 = 0$, de las cuales se despeja la incógnita x, entonces,

$$2sen\ x - 1 = 0 \qquad\qquad sen\ x + 1 = 0$$

$$sen\ x = \frac{1}{2} \qquad\qquad sen\ x = -1$$

$$x = arc\ sen\left(\frac{1}{2}\right) \qquad\qquad x = arc\ sen\,(-1)$$

$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6} \qquad\qquad x=\frac{3\pi}{2}$$

Luego, el conjunto solución es $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

4 Resuelve la siguiente ecuación para θ, si $0° \leq \theta \leq 360°$.

$$4\cos^2\theta - 3 = 0$$

Solución

Se despeja $\cos\theta$ de la ecuación:

$$4\cos^2\theta - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 4\cos^2\theta = 3 \quad \rightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{3}{4}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se obtienen dos ecuaciones

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se despeja el ángulo θ

$$\theta = arc\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°, \quad 330° \quad ; \quad \theta = arc\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150°, 210°$$

Al final, el conjunto solución es 30°, 150°, 210° y 330°.

5 Resuelve la siguiente ecuación para θ si $0° \leq \theta \leq 360°$.

$$2\,sen^2\theta = -\,sen\,\theta$$

Solución

Se resuelve la ecuación:

$$2sen^2\theta + sen\,\theta = 0 \quad \rightarrow \quad sen\,\theta\,(2\,sen\,\theta + 1) = 0$$

Se obtienen dos ecuaciones:

$$sen\,\theta = 0 \qquad 2\,sen\,\theta + 1 = 0$$

Se despeja el ángulo θ,

$$sen\,\theta = 0 \qquad 2\,sen\,\theta + 1 = 0$$

$$\theta = \text{arc}\,sen\,(0) \qquad \theta = arc\,sen\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = 0°, 180°, 360° \qquad \theta = 210°, 330°$$

Por tanto, el conjunto solución es 0°, 180°, 210°, 330° y 360°.

6 Resuelve la siguiente ecuación para x si $0° \leq x \leq 360°$.

$$2\cos^2 x = sen\,x - 1$$

Solución

$$2\cos^2 x = sen\,x - 1 \quad \rightarrow \quad 2(1 - sen^2 x) = sen\,x - 1$$

$$2 - 2sen^2 x = sen\,x - 1$$

$$2 - 2sen^2 x - sen\,x + 1 = 0$$

$$-2sen^2 x - sen\,x + 3 = 0 \qquad (\div -1)$$

$$2sen^2 x + sen\,x - 3 = 0$$

$$(2sen\,x + 3)(sen\,x - 1) = 0$$

Se despeja el ángulo x de ambas ecuaciones:

$$sen\,x - 1 = 0 \qquad 2\,sen\,x + 3 = 0$$

$$x = arc\,sen\,(1) \qquad sen\,x = -\frac{3}{2} \text{ (no existe solución)}$$

$$x = 90°$$

Cabe mencionar que $2\,sen\,x + 3 = 0$ no tiene solución porque $-1 \leq sen\,x \leq 1$, entonces el conjunto solución es 90°.

EJERCICIO 50

Resuelve las siguientes ecuaciones, tales que $0° \leq x \leq 360°$.

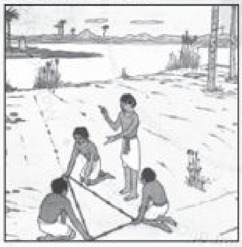
1. $sen\ x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
2. $cos\ x + 2\ sen\ x = 2$
3. $2\ cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$
4. $csc\ x = sec\ x$
5. $2\ cos\ x \cdot tan\ x - 1 = 0$
6. $4\ cos^2 x = 3 - 4\ cos\ x$
7. $3\ cos^2 x + sen^2 x = 3$
8. $2\ sen^2 x + sen\ x = 0$
9. $cos\ x + 9\ sen^2 x = 1$
10. $csc^2 x = 2\ cot^2 x$
11. $sen\ x \cdot tan\ x + 1 = sen\ x + tan\ x$
12. $2cos^2 x + 3sen\ x = 0$
13. $sen\ x - cos\ x = 0$
14. $3cos^2 x - sen^2 x = 0$
15. $cos\ x - \sqrt{3}\ sen\ x = 0$
16. $2sen\ x + csc\ x = 3$
17. $sen\ x \cdot ctg\ x - sen\ x = 0$
18. $2cos^3 x + cos^2 x - 2cos\ x - 1 = 0$
19. $4cos\ x - 2 = 2\ tan\ x \cdot ctg\ x - sec\ x$
20. $tan^5 x - 9\ tan\ x = 0$
21. $\frac{1}{ctg^2\ x} + \sqrt{3}\,tan\,x = 0$
22. $sen\ x \cdot sec\ x + \sqrt{2}\ sen\ x - \sqrt{2} = sec\ x$
23. $\left(2 - \sqrt{3}\right) sen\ x + \left(2 - \sqrt{3}\right) = 2cos^2\ x$
24. $\left(2 + \sqrt{5}\right) - \left(1 + 2\sqrt{5}\right) cos\ x = 2\ sen^2\ x$
25. $sec\ x(2sen\ x + 1) - 2(2sen\ x + 1) = 0$
26. $\frac{\sqrt{3}\,tan\,x}{sec\,x} - cos\,x = 0$
27. $\sqrt{2}\,cos\,x - \sqrt{2}\,sen\,x = -\sqrt{3}$
28. $5sen^2 x + cos^2 x = 2$
29. $\frac{5}{csc\ x} - 5\sqrt{3}\ cos\ x = 0$
30. $cos^2 x + cos\ x = sen^2 x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 15

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

El triángulo RECTÁNGULO



Medición de tierras en el antiguo Egipto mediante los anudadores

Su origen se encuentra en la cultura egipcia, específicamente en la geometría egipcia.

Los egipcios dominaban a la perfección los triángulos, ya que fueron la base para la construcción de sus pirámides así como la medición de tierras. Se auxiliaban de los anudadores, hacían nudos igualmente espaciados para medir y se dieron cuenta que al ubicar cuerdas de diversas longitudes en forma de triángulo obtenían ángulos rectos y, por tanto, triángulos rectángulos, lo cual significa que tenían conocimiento de la relación que existe entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo.

Sin embargo, Pitágoras fue el primero en demostrar el teorema que lleva su nombre, el cual establece la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, aunque los egipcios y babilónicos lo utilizaban en sus cálculos y construcciones pero sin haberlo demostrado.

Solución de triángulos rectángulos

Dados tres datos de un triángulo, si uno de ellos es un lado, encontrar el valor de los datos restantes.

Para los triángulos rectángulos basta conocer el valor de uno de los lados y algún otro dato, el cual puede ser un ángulo u otro lado, debido a que el tercer dato siempre está dado ya que, al ser triángulo rectángulo, uno de los ángulos siempre será de 90°.

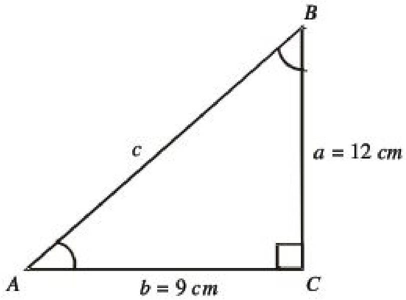
Cabe destacar que el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas son de suma importancia para la resolución de triángulos rectángulos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el triángulo ABC, $a = 12\ cm$, $b = 9\ cm$. Resuelve el triángulo.

Solución



Se proporcionan catetos; entonces, para encontrar la hipotenusa se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{(12)^2 + (9)^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$$

Por lo tanto $c = 15\ cm$.

Para encontrar los ángulos se utilizan funciones trigonométricas; en este caso, al tener los tres lados se puede aplicar cualquier función. Por ejemplo, en el caso del ángulo A se aplica la función tangente, entonces:

$$\tan A = \frac{12}{9}$$

Se despeja el ángulo A:

$$\angle A = \arctan\left(\frac{12}{9}\right) = 53°\ 7'\ 48''$$

Para encontrar el tercer ángulo, se tiene que $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, en particular $\angle A + \angle B = 90°$ ya que $\angle C = 90°$, por tanto:

$$53°\ 7'\ 48'' + \angle B = 90°$$

$$\angle B = 90° - 53°\ 7'\ 48''$$

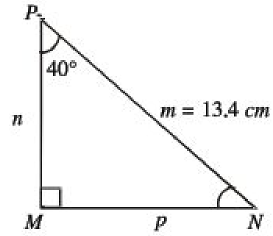
$$\angle B = 36°\ 52'\ 12''$$

2 En el triángulo MNP, $m = 13.4\ cm$, $\angle P = 40°$. Resuelve el triángulo.

Solución

Para hallar el $\angle N$, se aplica:

$$\angle N + \angle P + \angle M = 180°$$



Ya que $\angle M = 90°$, entonces,

$\angle N + \angle P = 90°$ donde $\angle N = 90° - \angle P$

$$\angle N = 90° - 40°$$

$$\angle N = 50°$$

Lado n

Se elige uno de los ángulos agudos, en este caso $\angle P$ y se establece la función trigonométrica de acuerdo al lado que se va a encontrar (n) y el lado conocido ($m = 13.4$), por lo que la función que se busca es el coseno de P, entonces:

$$\cos P = \frac{n}{m} \qquad \text{donde} \qquad \cos 40° = \frac{n}{31\ .4}$$

Al despejar n:

$$n = (13.4)(\cos 40°) = (13.4)(0.76604) = 10.265\ cm$$

Para hallar el lado restante (p) se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$p = \sqrt{m^2 - n^2} = \sqrt{(13.4)^2 - (10.26)^2} = \sqrt{179.56 - 105.27} = \sqrt{74.29} = 8.62\ cm$$

3 En el triángulo ABC, $a = 54\ cm$, $A = 36°\ 20'$. Resuelve el triángulo.

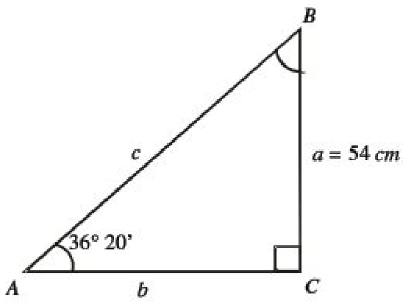
Solución

En el triángulo ABC:

$\angle B = 90° - \angle A$

$\angle B = 90° - 36°\ 20'$

$\angle B = 53°\ 40'$



Para hallar el lado b, se utiliza la función tangente de $\angle A$:

$$\tan A = \frac{a}{b} \qquad \text{donde} \qquad \tan 36°\ 20' = \frac{54}{b}$$

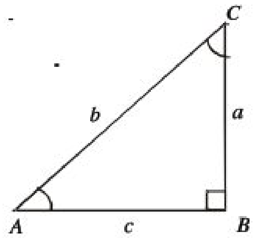
Al despejar b: $b = \dfrac{54}{\tan 36°20'} = \dfrac{54}{0.7354} = 73.42\ cm$

El valor de la hipotenusa se encuentra mediante el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(54)^2 + (73.42)^2} = 91.14\ cm$$

EJERCICIO 51

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo según los datos proporcionados:



1. $a = 12$, $b = 17$
2. $\angle A = 32°$, $b = 4$
3. $\angle C = 46°\ 20'$, $a = 5$
4. $a = 32.5$, $c = 41.3$
5. $\angle A = 45°$, $a = 13$
6. $\angle C = 54°$, $b = 22.6$
7. $b = 22.5$, $c = 18.7$
8. $\angle A = 48°\ 12'$, $b = 34.5$
9. $\angle C = 34°\ 32'$, $c = 56.9$
10. $a = 18.23$, $b = 19.86$
11. $\angle A = 32°\ 27'$, $a = 12$
12. $b = \sqrt{17}$, $a = 2$
13. $\angle C = 48°\ 23'$, $b = 23$
14. $a = 7.5$, $c = 2.5$
15. $c = 13$, $\angle A = 25°\ 49'$
16. Calcula el valor de los ángulos agudos si $a = \frac{c}{2}$.
17. Determina el valor de los ángulos agudos y el valor de los lados si $a = x$, $b = x + 8$ y $c = x + 7$.
18. Calcula el valor de los ángulos agudos y el valor de los lados si $a = x + 1$, $b = x + 2$ y $c = x$.
19. Determina el valor de los ángulos agudos si $a = c$.
20. Calcula el valor de los ángulos agudos si $b = 3a$.

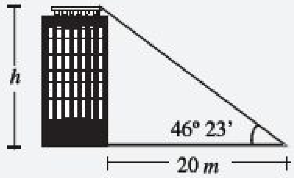
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Se sitúa un punto a 20 metros de un edificio. Si el ángulo de elevación al punto más alto del edificio es de 46° 23', encuentra la altura del edificio.

Solución

Se representa el problema con un dibujo:



Para hallar la altura del edificio se utiliza la función tangente, ya que se tienen como datos un ángulo y el cateto adyacente a éste, y la altura representa el cateto opuesto al ángulo dado:

$$\tan 46° 23' = \frac{h}{20}$$

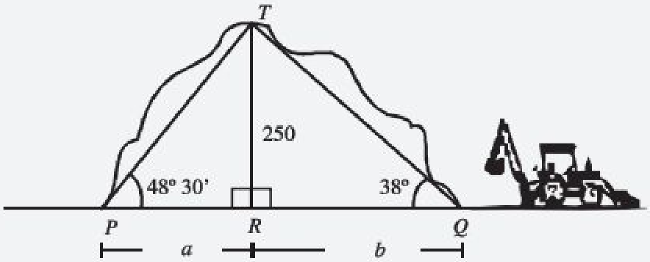
Al despejar h:

$$h = (20)\,(\tan 46° 23') = (20)\,(1.04949) \approx 21\ m$$

De acuerdo con el dato anterior, la altura del edificio es de 21 m.

2 En la construcción de una carretera se encuentra una montaña de 250 metros de altura, a través de ella se construirá un túnel. La punta de la montaña se observa bajo un ángulo de 48° 30' desde un punto P en un extremo de la montaña, y bajo un ángulo de 38° desde el otro extremo. ¿Cuál será la longitud del túnel?

Solución



La longitud del túnel está determinada por $a + b$.

Para obtener a, se utiliza el triángulo PRT y se aplica la función tangente de $\angle P$:

$$\tan 48° 30' = \frac{250}{a}$$

Al despejar a

$$a = \frac{250}{\tan 48°30'} = \frac{250}{1.1302} = 221.19\ m$$

Para obtener b, se utiliza el triángulo QRT y se aplica la función tangente de $\angle Q$:

$$\tan 38° = \frac{250}{b}$$

Al despejar b

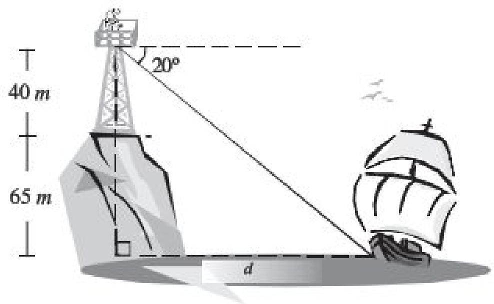
$$b = \frac{250}{\tan 380°} = \frac{250}{0.7812} = 320.02\ m$$

Por tanto, la longitud del túnel es: $221.19 + 320.02 = 541.21\ m$.

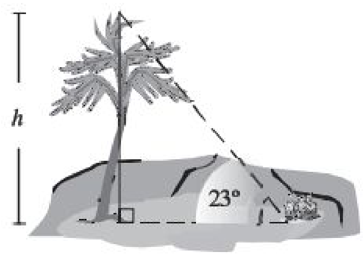
EJERCICIO 52

Resuelve los siguientes problemas:

1. En una torre de 40 m que está sobre un peñasco de 65 m de alto junto a una laguna, se encuentra un observador que mide el ángulo de depresión de 20° de un barco situado en la laguna. ¿A qué distancia de la orilla del peñasco se encuentra el barco?



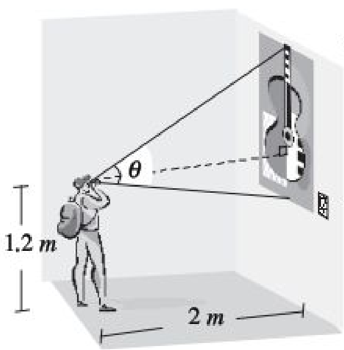
2. A una distancia de 10 m de la base de un árbol, la punta de éste se observa bajo un ángulo de 23°. Calcula la altura del árbol.

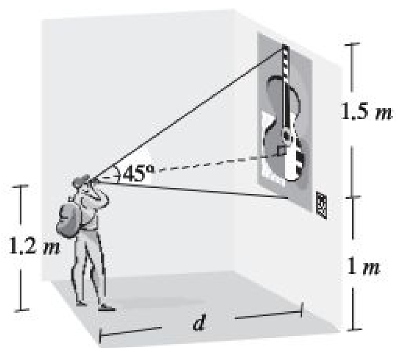


3. Una persona cuyos ojos están a 1.20 metros del suelo, observa una pintura que se encuentra a un metro del suelo y mide 1.50 metros. Dicha persona se encuentra a dos metros de distancia de la pintura.

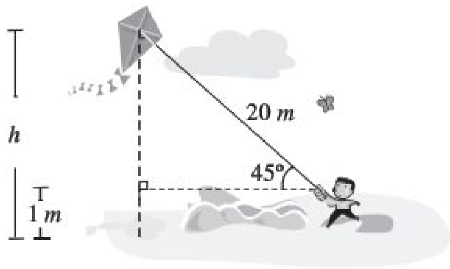
   a) ¿Cuál es el ángulo de visión?

   b) ¿A qué distancia se debe parar la persona para que el ángulo de visión sea de 45°?

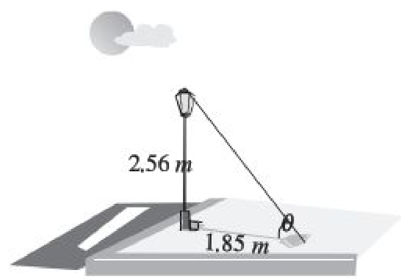




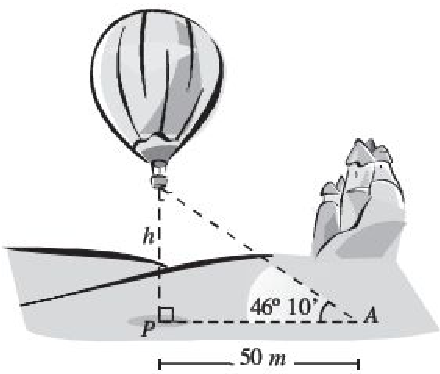
4. Un niño tiene un papalote, el cual hace volar sosteniendo una cuerda a un metro del suelo. La cuerda se tensa formando un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. Obtén la altura del papalote con respecto al suelo si el niño suelta 20 metros de cuerda.



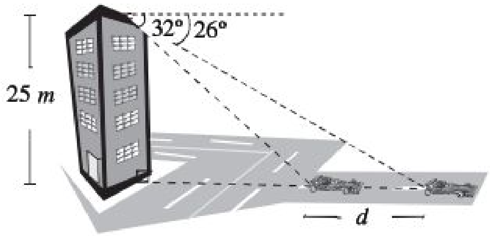
5. Determina el ángulo de elevación del Sol si un poste de 2.56 metros proyecta una sombra de 1.85 metros.



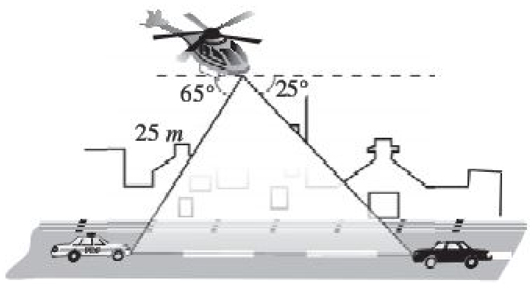
6. Un globo de aire caliente sube con un ángulo de elevación con respecto a un punto *A* de 46° 10'. Calcula la altura a la que se encuentra el globo, con respecto a un punto *P* del suelo, si la distancia de éste al punto *A* es de 50 metros.



7. Desde lo alto de una torre cuya altura es de 25 m, se observa un automóvil alejándose de la torre, con un ángulo de depresión de 32°; si un instante después el ángulo es de 26°, ¿qué distancia se ha desplazado el automóvil?



8. Un maleante es perseguido por un patrullero, quien es apoyado desde el aire por un helicóptero, como se muestra en la figura. Si el ángulo de depresión desde el helicóptero hasta donde se encuentra el delincuente es de 25° y el ángulo de depresión hasta donde se encuentra el patrullero es de 65°, y su distancia a éste es de 25 metros,



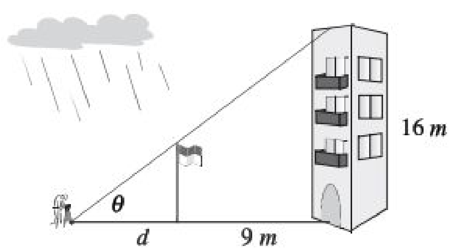
calcula:

La distancia entre el helicóptero y el delincuente.

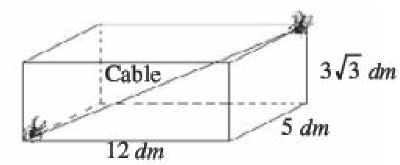
La distancia entre el patrullero y el delincuente.

La altura del helicóptero.

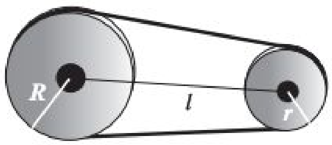
9. Un ingeniero civil desea conocer el ángulo de elevación del topógrafo, así como la distancia a la que se encuentra del asta bandera, si se sabe que el asta bandera mide la cuarta parte de la altura del edificio que es de 16 metros, y la distancia entre ambas es de 9 metros.



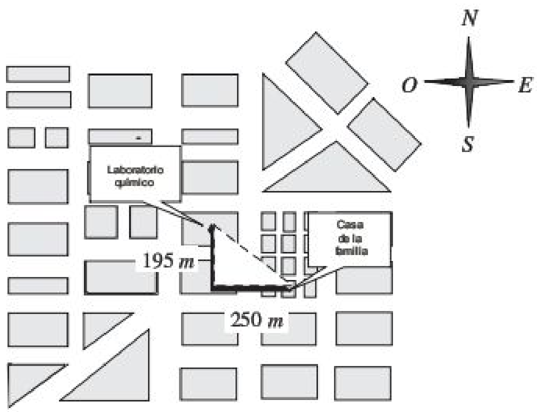
10. Una araña que se encuentra en la base de una caja desea alcanzar una mosca ubicada en la esquina opuesta de la caja, como se muestra en la figura. Las esquinas están conectadas por un cable tenso, determina cuál es el ángulo de elevación del cable y la distancia que recorrería la araña hasta llegar a la mosca por el cable.



11. Se tienen dos poleas de radios R, r y la distancia entre sus ejes es l, ¿cuál es la longitud de la cadena de transmisión?



12. Debido a un accidente en unos laboratorios químicos, se tuvieron que desalojar las casas que estuvieran en un radio de 500 m de los laboratorios. Una familia vivía a 250 m al este y 195 m al sur de los laboratorios. Determina si la familia desalojó su casa.



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 16
TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Johann MÜLLER

Johann Müller Von
Königsberg
(*regiomontanus*)
1436 - 1476

Astrónomo y matemático alemán que realizó tratados sobre la trigonometría y la astronomía, inventor de diversas herramientas para la observación y la medida del tiempo.

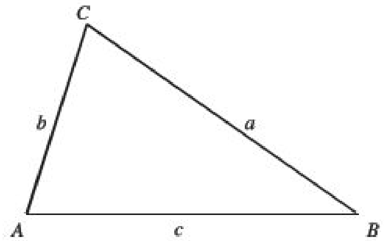
Su obra se compone de cinco libros llamados: *De triangulis omnimodis*, ¡publicada en Nuremberg 70 años después de haber sido escrita! Es interesante desde el punto de vista matemático, ya que en el primer libro se establecen las definiciones básicas de radio, arcos, igualdad, círculos, cuerdas y la función seno. En el segundo, la ley de senos para la resolución de problemas con triángulos, y del tercero al quinto libros se expone la trigonometría esférica.

Solución de triángulos oblicuángulos

Un triángulo es oblicuángulo cuando sus tres ángulos son oblicuos, es decir, no tiene un ángulo recto. Este tipo de triángulos se resuelven mediante la ley de senos, de cosenos o de tangentes.

Ley de senos

La razón que existe entre un lado de un triángulo oblicuángulo y el seno del ángulo opuesto a dicho lado es proporcional a la misma razón entre los lados y ángulos restantes.



Ley de senos:

$$\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}=\frac{c}{sen\,C}$$

La ley de senos se utiliza cuando:

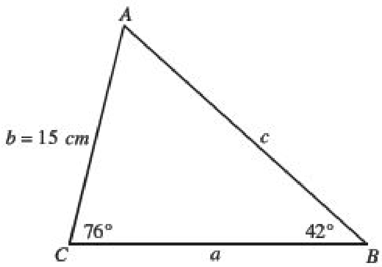
- Los datos conocidos son 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Los datos conocidos son 2 ángulos y cualquier lado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el triángulo ABC, $b = 15\ cm$, $\angle B = 42°$ y $\angle C = 76°$. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes.

Solución



Para obtener $\angle A$, se aplica $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, despejando,

$$\angle A = 180° - \angle C - \angle B = 180° - 42° - 76° = 62°$$

Se conoce el valor del lado b y el ángulo B, opuesto a dicho lado, también se proporciona el ángulo C, por tanto, se puede determinar la medida del lado c,

$$\frac{c}{sen\,C}=\frac{b}{sen\,B}$$

Al sustituir $\angle C = 76°$, $\angle B = 42°$ y $b = 15\ cm$, se determina que,

$$\frac{c}{sen\,76°}=\frac{15}{sen\,42°}$$

De la expresión anterior se despeja c,

$$c=\frac{(15)(sen\,76°)}{sen\,42°}=\frac{(15)(0.9703)}{0.6691}=21.75\ cm$$

Por último, se determina el valor del lado a con la siguiente relación:

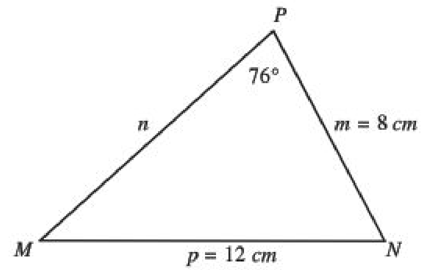
$$\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B} \qquad \text{donde} \qquad \frac{a}{sen\,62°}=\frac{15}{sen\,42°}$$

Al despejar a:

$$a=\frac{(15)(sen\,62°)}{sen\,42°}=\frac{(15)(0.8829)}{0.6691}=19.8\ cm$$

2 En el triángulo MNP, $\angle P = 76°$, $p = 12\ cm$ y $m = 8\ cm$. Resuelve el triángulo.

Solución



Con los datos del problema, se calcula el valor de $\angle M$ con la siguiente relación:

$$\frac{m}{sen\ M} = \frac{p}{sen\ P}$$

Al despejar *sen M y* sustituir los valores, se obtiene:

$$sen\ M = \frac{m\ sen\ P}{p} = \frac{(8)(sen\ 76°)}{12} = \frac{(8)(0.97029)}{12} = 0.6469$$

Entonces:

$$\angle M = arc\ sen\ (0.6469)$$

$$\angle M = 40°\ 18'$$

Por otro lado,

$$\angle N = 180° - \angle P - \angle M = 180° - 76° - 40°\ 18' = 63°\ 42'$$

Se aplica la ley de senos para encontrar el valor del lado n:

$$\frac{n}{sen\ N} = \frac{p}{sen\ P}$$

Al despejar n,

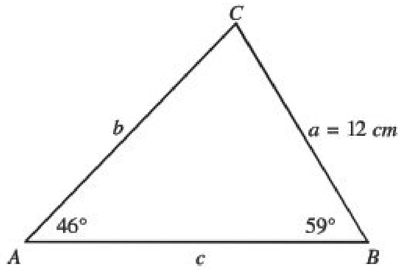
$$n = \frac{p\ sen\ N}{sen\ P} = \frac{(12)(sen\ 63°42')}{sen\ 76°} = \frac{(12)(0.8965)}{0.9703} = 11.09\ cm$$

Por consiguiente,

$$\angle M = 40°\ 18',\ \angle N = 63°\ 42' \text{ y } n = 11.09\ cm$$

3 En el triángulo ABC, $\angle A = 46°$, $\angle B = 59°$ y $a = 12\ cm$. Determina los elementos restantes del triángulo.

Solución



En el triángulo:

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 46° - 59° = 75°$$

Para hallar el valor del lado c se utiliza la relación:

$$\frac{c}{sen\ C} = \frac{a}{sen\ A} \quad \text{donde} \quad c = \frac{a\ sen\ C}{sen\ A} = \frac{(12)(sen\ 75°)}{sen\ 46°} = \frac{(12)(0.9659)}{0.7193} = 16.11\ cm$$

Asimismo, para obtener el valor del lado b se utiliza la relación:

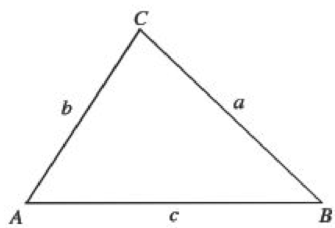
$$\frac{b}{sen\ B} = \frac{a}{sen\ A} \quad \text{donde} \quad b = \frac{a\ sen\ B}{sen\ A} = \frac{(12)(sen\ 59°)}{sen\ 46°} = \frac{(12)(0.8571)}{0.7193} = 14.3\ cm$$

Finalmente, los elementos restantes son:

$$\angle C = 75°,\ c = 16.11\ cm \text{ y } b = 14.3\ cm$$

Ley de cosenos

El cuadrado de un lado de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado buscado.



Ley de cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ C$$

Al despejar

La ley de cosenos se utiliza cuando:

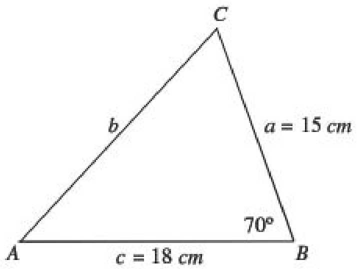
- Se tiene el valor de 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Se tiene el valor de los 3 lados.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el triángulo ABC, $a = 15\ cm$, $c = 18\ cm$, $\angle B = 70°$. Resuelve el triángulo.

Solución



Para calcular el valor del lado b se utiliza la fórmula:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ B$$

Donde,

$$b = \sqrt{(15)^2 + (18)^2 - 2(15)(18)\ cos\ 70°} = \sqrt{225 + 324 - 2(15)(18)(0.34202)} = \sqrt{364.3}$$

$$b = 19.09\ cm$$

Conocidos los 3 lados del triángulo se calcula el valor de $\angle A$:

$$cos\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(19.09)^2 + (18)^2 - (15)^2}{2(19.09)(18)} = \frac{364.43 + 324 - 225}{687.24} = 0.6743$$

Donde: $\angle A = arc\ cos\ 0.6743 = 47°\ 36'$

Por último, se determina la medida de $\angle C$:

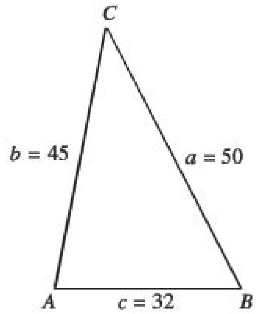
$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 47°\ 36' - 70° = 62°\ 24'$$

Por tanto, los elementos restantes del triángulo ABC son:

$$b = 19.09\ cm,\ \angle A = 47°\ 36' \text{ y } \angle C = 62°\ 24'$$

2 En el triángulo ABC, $a = 50$, $b = 45$, $c = 32$. Resuelve el triángulo.

Solución



Para obtener $\angle A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(45)^2 + (32)^2 - (50)^2}{2(45)(32)} = \frac{2\,025 + 1024 - 2\,500}{2880} = 0.1906$$

Donde,

$$\angle A = \arccos 0.1906 = 79°$$

Para obtener $\angle B$:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(50)^2 + (32)^2 - (45)^2}{2(50)(32)} = \frac{2500 + 1\,024 - 2\,025}{3200} = 0.4684$$

Donde,

$$\angle B = \arccos 0.4684 = 62°\ 4'$$

Para calcular $\angle C$:

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 79° - 62°\ 4' = 38°\ 56'$$

Por consiguiente, los ángulos del triángulo ABC son:

$$\angle A = 79°,\ \angle B = 62°\ 4' \text{ y } \angle C = 38°\ 56'$$

Ley de tangentes

En todo triángulo oblicuángulo la razón entre la diferencia de 2 lados y la suma de los mismos, es igual a la razón entre la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos a cada uno de los lados, y la tangente de la semisuma de dichos ángulos.

Fórmulas:

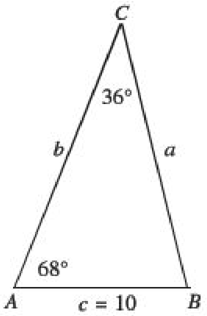
$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)},\quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)} \text{ y } \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el triángulo ABC, $c = 10$, $A = 68°$, $C = 36°$. Resuelve el triángulo.

Solución



Se determina el $\angle B$:

$$\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 68° - 36° = 76°$$

Se aplica la ley de tangentes para encontrar el valor del lado a:

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

Al sustituir los valores de $c = 10$, $\angle A = 68°$ y $\angle C = 36°$, se obtiene:

$$\frac{a-10}{a+10} = \frac{tan\left(\frac{68°-36°}{2}\right)}{tan\left(\frac{68°+36°}{2}\right)} = \frac{tan\ 16°}{tan\ 52°} = \frac{0.2867}{1.2799} = 0.2240$$

Entonces, de la expresión resultante:

$$\frac{a-10}{a+10} = 0.2240$$

Se despeja a:

$$a - 10 = 0.2240a + 2.240 \quad \rightarrow \quad a - 0.2240a = 2.240 + 10$$
$$0.776a = 12.240$$
$$a = \frac{12.240}{0.776}$$
$$a = 15.77\ cm$$

Se aplica la ley de tangentes para encontrar el valor del lado b:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

Al sustituir los valores de $c = 10$, $\angle B = 76°$ y $\angle C = 36°$, se determina que:

$$\frac{b-10}{b+10} = \frac{tan\left(\frac{76°-36°}{2}\right)}{tan\left(\frac{76°+36°}{2}\right)} = \frac{tan\ 20°}{tan\ 56°} = \frac{0.3639}{1.4826} = 0.2454$$

De la expresión resultante,

$$\frac{b-10}{b+10} = 0.2454$$

Se despeja b:

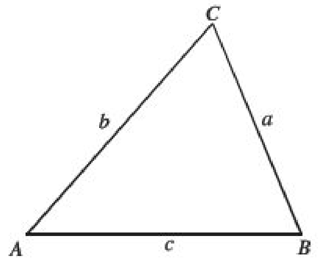
$$b - 10 = 0.2454b + 2.454 \quad \rightarrow \quad b - 0.2454b = 10 + 2.454$$
$$0.7546b = 12.454$$
$$b = 16.5\ cm$$

Por tanto, los elementos restantes del triángulo son:

$$\angle B = 76°, a = 15.77\ cm \text{ y } b = 16.5\ cm$$

EJERCICIO 53

Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo de acuerdo con los datos proporcionados.



1. $\angle B = 57° 20'$, $\angle C = 43° 39'$, $b = 18$
2. $\angle A = 63° 24'$, $\angle C = 37° 20'$, $c = 32.4$
3. $\angle A = 85° 45'$, $\angle B = 26° 31'$, $c = 43.6$
4. $\angle C = 49°$, $\angle A = 54° 21'$, $a = 72$
5. $\angle B = 29°$, $\angle C = 84°$, $b = 12.3$
6. $\angle A = 32°$, $\angle B = 49°$, $a = 12$
7. $a = 5$, $\angle A = 32°$, $b = 8$
8. $c = 13$, $b = 10$, $\angle C = 35° 15'$
9. $\angle B = 56° 35'$, $b = 12.7$, $a = 9.8$
10. $a = 9$, $c = 11.5$, $\angle C = 67° 21'$
11. $a = 15$, $b = 16$, $c = 26$
12. $a = 32.4$, $b = 48.9$, $c = 66.7$
13. $a = 100$, $b = 88.7$, $c = 125.5$
14. $a = 15$, $b = 12$, $c = 20$
15. $a = 12$, $b = 15$, $\angle C = 68°$
16. $a = 28$, $c = 32$, $\angle B = 76°$
17. $b = 45$, $c = 75$, $\angle A = 35°$
18. $a = 12.6$, $b = 18.7$, $\angle C = 56°$

Demuestra que para el triángulo se cumple:

- $\dfrac{a}{sen\,A} = \dfrac{b}{sen\,B} = \dfrac{c}{sen\,C}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

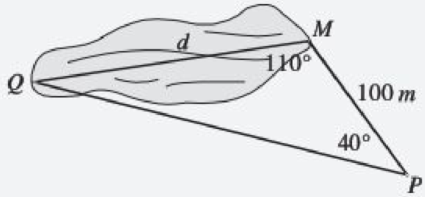
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Para calcular la distancia entre 2 puntos a las orillas de un lago, se establece un punto P a 100 metros del punto M; al medir los ángulos resulta que $\angle M = 110°$ y $\angle P = 40°$. ¿Cuál es la distancia entre los puntos M y Q?

Solución

Se realiza una figura que represente el problema:



De acuerdo con los datos se determina el valor de $\angle Q$:

$$\angle Q = 180° - 110° - 40° = 30°$$

Sea $\overline{MQ} = d$, entonces, al aplicar la ley de senos se obtiene:

$$\frac{d}{sen\ 40°} = \frac{100}{sen\ 30°}$$

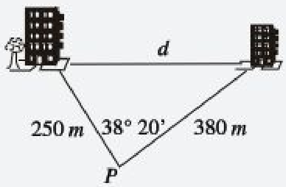
De la cual se despeja d:

$$d = \frac{(100)(sen\ 40°)}{sen\ 30°} = \frac{(100)(0.6427)}{0.5} = 128.54$$

En consecuencia, la distancia entre los puntos es de 128.54 metros.

2 Un observador se encuentra en un punto P que dista de 2 edificios, 250 m y 380 m, respectivamente. Si el ángulo formado por los 2 edificios y el observador es 38º 20', precisa la distancia entre ambos edificios.

Solución



Sea d la distancia entre ambos edificios; entonces, por la ley de cosenos:

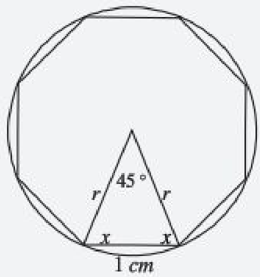
$$d = \sqrt{(250)^2 + (380)^2 - 2(250)(380)\cos 38°20'} = \sqrt{62\,500 + 144\,400 - 149\,038.98} = 240.55$$

Finalmente, la distancia entre los edificios es de 240.55 m.

3 Se inscribe un octágono regular de lado 1 cm en una circunferencia; determina el área del círculo.

Solución

Si se inscribe un polígono regular en una circunferencia, la distancia del centro al vértice es el radio, si se trazan 2 radios a 2 vértices se forma un triángulo isósceles y la medida del ángulo central es $\frac{360°}{8} = 45°$, como lo muestra la figura:



Sea x la medida de cada ángulo de la base en un triángulo isósceles, entonces:

$$2x + 45° = 180° \quad \rightarrow \quad 2x = 135° \quad \rightarrow \quad x = \frac{135°}{2} = 67.5°$$

Por la ley de senos se tiene la igualdad:

$$\frac{1}{sen\ 45°} = \frac{r}{sen\ 67.5°}$$

Al despejar r de la expresión anterior:

$$r = \frac{sen\ 67.5}{sen\ 45°} = 1.3\ cm$$

Luego, el área del círculo está dada por la expresión:

$$A = \pi r^2$$

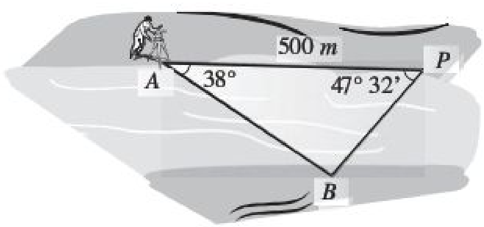
Se sustituye $r = 1.3\ cm$ y se obtiene:

$$A = \pi(1.3\ cm)^2 = 1.69\pi\ cm^2$$

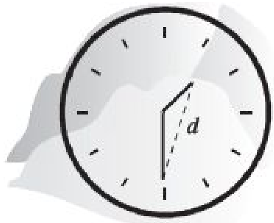
EJERCICIO 54

Resuelve los siguientes problemas:

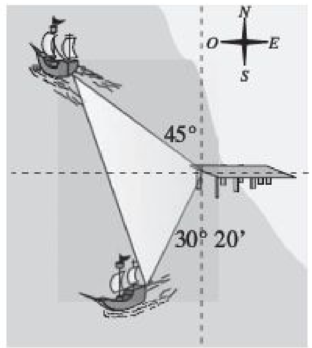
1. Para establecer la distancia desde un punto A en la orilla de un río a un punto B de éste, un agrimensor selecciona un punto P a 500 metros del punto A, las medidas de $\angle BAP$ y $\angle BPA$ son 38° y 47° 32'. Obtén la distancia entre A y B.



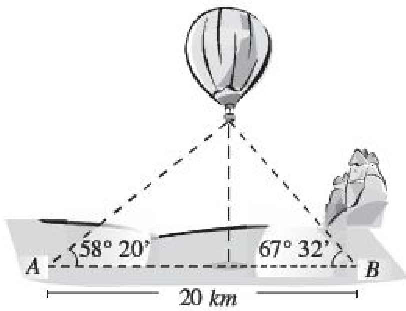
2. El horario y el minutero de un reloj miden respectivamente 0.7 y 1.2 *cm*. Determina la distancia entre los extremos de dichas manecillas a las 13:30 horas.



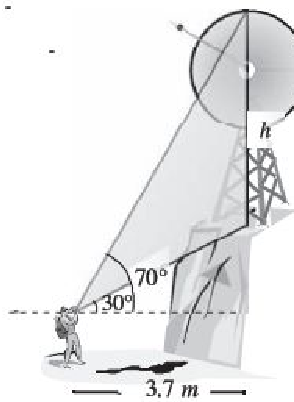
3. Un barco sale de un puerto a las 10:00 a.m. a 10 *km/h* con dirección sur 30°20'O. Una segunda embarcación sale del mismo puerto a las 11:30 *h* a 12 *km/h* con dirección norte 45°O. ¿Qué distancia separa a ambos barcos a las 12:30 horas?



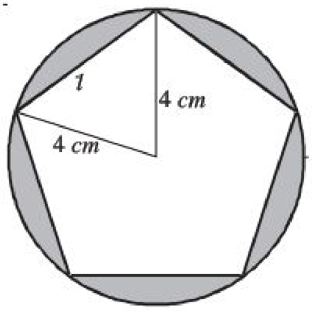
4. La distancia entre 2 puntos *A* y *B* es de 20 *km*. Los ángulos de elevación de un globo con respecto a dichos puntos son de 58° 20' y 67° 32'. ¿A qué altura del suelo se encuentra?



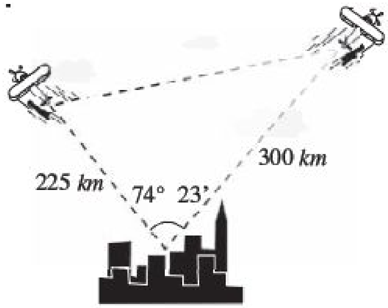
5. Una persona se encuentra a 3.7 *m* de un risco, sobre el cual se localiza una antena. La persona observa el pie de la antena con un ángulo de elevación de 30° y la parte superior de ésta con un ángulo de 70°. Determina la altura de la antena.



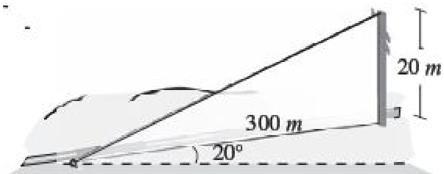
6. ¿Cuál es la longitud de los lados de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 4 centímetros de radio?



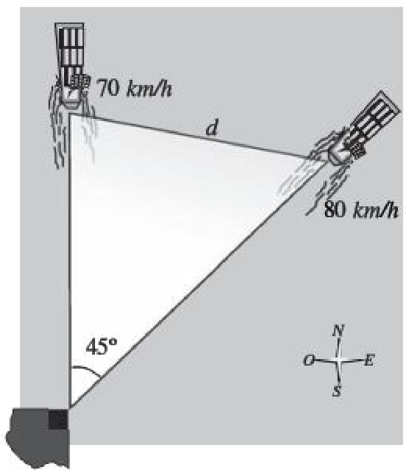
7. Dos aviones parten de una ciudad y sus direcciones forman un ángulo de 74° 23’. Después de una hora, uno de ellos se encuentra a 225 *km* de la ciudad, mientras que el otro está a 300 *km*. ¿Cuál es la distancia entre ambos aviones?



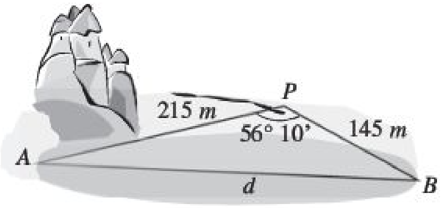
8. En un plano inclinado se encuentra un poste vertical de 20 metros de altura. Si el ángulo del plano con respecto a la horizontal es de 20°, calcula la longitud de un cable que llegaría de un punto a 300 metros cuesta abajo a la parte superior del poste.



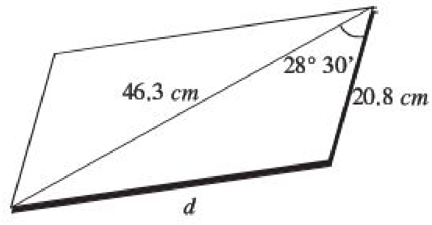
9. Un barco parte de un puerto y navega hacia el norte con una velocidad de 70 *km* por hora. Al mismo tiempo, pero en dirección noreste, otro buque viaja a razón de 80 *km* por hora. ¿A qué distancia se encontrarán uno del otro después de media hora?



10. La distancia que hay de un punto hacia los extremos de un lago son 145 y 215 metros, mientras que el ángulo entre las 2 visuales es de 56° 10'. Calcula la distancia entre los extremos del lago.

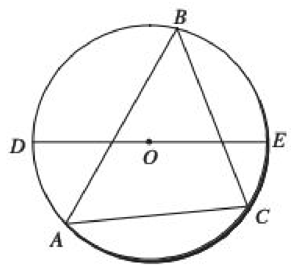


11. En un paralelogramo que tiene un lado que mide 20.8 *cm*, su diagonal mide 46.3 *cm*. Determina la longitud del otro lado si se sabe que el ángulo entre la diagonal y el primer lado es de 28° 30'.

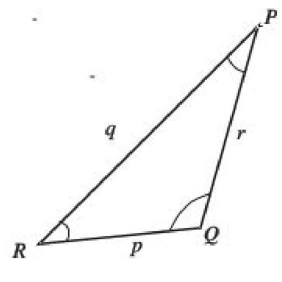


12. Si ΔABC triángulo cualquiera y $\overline{DE}$ es el diámetro de la circunferencia, demuestra que:

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AB}}{sen\ C} = \frac{\overline{BC}}{sen\ A} = \frac{\overline{CA}}{sen\ B}$$



13. Observa la siguiente figura:



a) Demuestra que dado un lado y 2 ángulos adyacentes, el área del triángulo será:

$$A = \frac{r^2\ sen\ Q\ sen\ P}{2\ sen\ (Q+P)} = \frac{q^2\ sen\ P\ sen\ R}{2\ sen\ (P+R)} = \frac{p^2\ sen\ R\ sen\ Q}{2\ sen\ (R+Q)}$$

b) Demuestra que el área del triángulo está dada por cualquiera de las siguientes fórmulas:

- $A = \frac{1}{2} r^2\ sen\ P\ sen\ Q\ csc\ R$
- $A = \frac{2pqr}{p+q+r}\left[cos\left(\frac{1}{2}P\right) cos\left(\frac{1}{2}Q\right) cos\left(\frac{1}{2}R\right)\right]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 17

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Reseña HISTÓRICA

Abraham de Moivre
(1667-1754)

Abraham de Moivre es conocido por la fórmula de Moivre y por su trabajo en la distribución normal y probabilidad. Fue amigo de Isaac Newton y Edmund Halley. En 1697 fue elegido miembro de Royal Society de Londres.

La fórmula de Moivre afirma que:

$\forall x \in R \wedge \forall n \in Z (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

Esta fórmula es importante porque conecta los números imaginarios con la trigonometría.

Forma trigonométrica o polar

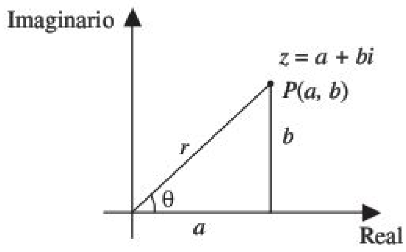
Sea el número complejo $z = a + bi$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ su valor absoluto y $\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right)$ el argumento o módulo de z, entonces su forma trigonométrica o polar se define como:

$$z = r\,(cos\ \theta + i\ sen\ \theta) = r\ cis\ \theta = r\underline{|\theta} \text{ con } cos\ \theta + i\ sen\ \theta = cis\ \theta$$

Demostración

En el triángulo

$$cos\ \theta = \frac{a}{r},\ sen\ \theta = \frac{b}{r}$$



Al despejar a y b respectivamente

$$a = r\ cos\ \theta,\ b = r\ sen\ \theta$$

Si sustituyes en $z = a + bi$, obtienes:

$$z = r\ cos\ \theta + i\ r\ sen\ \theta = r(cos\ \theta + i\ sen\ \theta) = r\ cis\ \theta = r\underline{|\theta}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

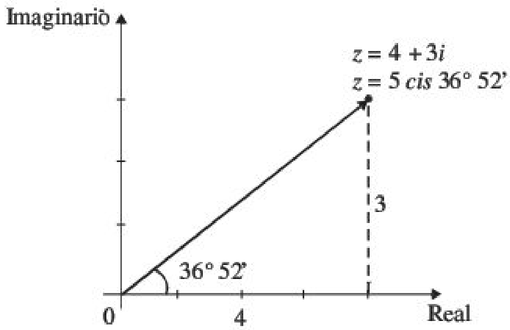
1 Transforma el complejo $z = 4 + 3i$ a su forma trigonométrica con $0° \leq \theta \leq 360°$.

Solución

Se obtiene θ y r, entonces:

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{b}{a}\right) = arc\ tan\left(\frac{3}{4}\right) = 36°\ 52'$$

$$r = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$



Por tanto, la forma trigonométrica es:

$$z = 5(cos\ 36°\ 52' + i\ sen\ 36°\ 52')$$
$$z = 5\ cis\ 36°\ 52' = 5\underline{|36°52'}$$

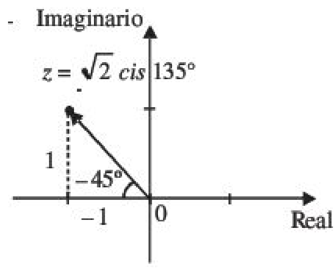
2 Transforma el complejo $z = -1 + i$ a su forma trigonométrica con $0° \leq \theta \leq 360°$.

Solución

Se obtiene θ y r, entonces:

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{1}{-1}\right) = 135°$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$



Por tanto, la forma trigonométrica es:

$$z = \sqrt{2}\ (cos\ 135° + i\ sen\ 135°)$$
$$z = \sqrt{2}\ cis\ 135° = \sqrt{2}\underline{|135°}$$

Operaciones fundamentales

Multiplicación

Sean los complejos $z_1 = r_1 (cos\, \theta_1 + i\, sen\, \theta_1)$ y $z_2 = r_2 (cos\, \theta_2 + i\, sen\, \theta_2)$, entonces:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [cos\, (\theta_1 + \theta_2) + i\, sen\, (\theta_1 + \theta_2)] = r_1\ r_2\ cis\ (\theta_1 + \theta_2)$$

EJEMPLOS

1 Si $z_1 = 2(cos\, 60° + i\, sen\, 60°)$ y $z_2 = \sqrt{2}\, (cos\, 45° + i\, sen\, 45°)$, determina $z_1 \cdot z_2$.

Solución

Se aplica la definición del producto de dos números complejos

$$z_1 \cdot z_2 = (2)(\sqrt{2})\ [cos\, (60° + 45°) + i\, sen\, (60° + 45°)] = 2\sqrt{2}\ [cos\, 105° + i\, sen\, 105°]$$

2 Determina $z_1 \cdot z_2$ si $z_1 = 4\ cis \frac{\pi}{6}$ y $z_2 = 3\ cis \frac{\pi}{12}$.

Solución

Aplicando la definición del producto

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\ r_2\ cis\ (\theta_1 + \theta_2) = (4)(3)\ cis \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right) = 12\ cis \frac{\pi}{4} = 12\underline{\left| \frac{\pi}{4} \right.}$$

División

Sean los complejos $z_1 = r_1 (cos\, \theta_1 + i\, sen\, \theta_1)$ y $z_2 = r_2 (cos\, \theta_2 + i\, sen\, \theta_2)$, entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (cos\ \theta_1 + i\ sen\ \theta_1)}{r_2 (cos\ \theta_2 + i\ sen\ \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \left[cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ sen(\theta_1 - \theta_2) \right] = \frac{r_1}{r_2} cis(\theta_1 - \theta_2) = \frac{r_1}{r_2} \underline{\left| \theta_1 - \theta_2 \right.}$$

EJEMPLOS

1 Sean $z_1 = 8(cos\, 50° + i\, sen\, 50°)$ y $z_2 = 4(cos\, 15° + i\, sen\, 15°)$, determina $\frac{z_1}{z_2}$.

Solución

Se aplica la definición del cociente de dos números complejos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{4} \left[cos(50° - 15°) + i\, sen(50° - 15°) \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2[cos\, 35° + i\, sen\, 35°]$$

2 Encuentra $\frac{z_2}{z_1}$, si $z_1 = 12\left(cos \frac{\pi}{15} + i\, sen \frac{\pi}{15}\right)$ y $z_2 = 3\left(cos \frac{\pi}{3} + i\, sen \frac{\pi}{3}\right)$.

Solución

Aplicando la definición del cociente:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{12} \left[cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{15}\right) + i\, sen\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{15}\right) \right]$$

Simplificando, se obtiene:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{4} \left[cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) + i\, sen\left(\frac{4\pi}{15}\right) \right]$$

3 Si $z = \sqrt{2}\ cis\frac{\pi}{4}$, $z_1 = \sqrt{8}\ cis\frac{2\pi}{3}$, $z_2 = 2\ cis\frac{\pi}{12}$ y $z_3 = \frac{1}{2}\ cis\frac{5\pi}{6}$, determina $\frac{z \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3}$.

Solución

Se realizan las operaciones del numerador y del denominador por separado:

$$z \cdot z_2 = \left(\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}\right)\left(2cis\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_1 \cdot z_3 = \left(\sqrt{8}cis\frac{2\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}cis\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{8}}{2}\left[cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)+i\ sen\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\ sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

Por consiguiente la división se define como:

$$\frac{z \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3} = \frac{2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\ sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\left[cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+i\ sen\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$

Pero $-\frac{7\pi}{6}$ es igual al ángulo positivo $\frac{5\pi}{6}$, entonces:

$$\frac{z \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3} = 2\left[cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\ sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

Potencia (fórmula de Moivre)

Dado el complejo $z = r\,(cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$, entonces,

$$z^n = r^n\,(cos\ n\theta + i\ sen\ n\theta)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean $z = 2(cos\ 15° + i\ sen\ 15°)$, encuentra z^2.

Solución

Aplicando la definición de la potencia para hallar z^2:

$$z^2 = 2^2(cos\ 2(15°) + i\ sen\ 2(15°)\ ) = 4(cos\ 30° + i\ sen\ 30°)$$

Es importante mencionar que algunos de los resultados están expresados en términos de un ángulo notable y se pueden sustituir por sus valores respectivos.

$$z^2 = 4(cos\ 30° + i\ sen\ 30°) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\ + 2i$$

2 Sea $z = \frac{1}{2}(cos\, 36° + i\, sen\, 36°)$, encuentra z^5.

Solución

Se aplica la definición de potencia de un número complejo

$$z^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(cos\, 5(36°) + i\, sen\, 5(36°)\right) = \frac{1}{32}(cos\, 180° + i\, sen\, 180°) = \frac{1}{32}\left(-1 + i(0)\right) = -\frac{1}{32}$$

Por tanto, $z^5 = -\frac{1}{32}$

3 Si $z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\, sen\frac{\pi}{12}\right)$ y $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\, sen\frac{3\pi}{4}\right)$, determina $\frac{z^2}{z_1}$.

Solución

Se obtiene la potencia de z:

$$z^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\, sen\frac{\pi}{12}\right)\right)^2 = \frac{1}{3}\left(cos\frac{2\pi}{12} + i\, sen\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{1}{3}\left(cos\frac{\pi}{6} + i\, sen\frac{\pi}{6}\right)$$

Se procede a realizar la división, entonces:

$$\frac{z^2}{z_1} = \frac{\frac{1}{3}\left(cos\frac{\pi}{6} + i\, sen\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\, sen\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right) + i\, sen\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\, sen\frac{\pi}{12}\right)$$

Raíz

Sea el complejo $z = r\,(cos\,\theta + i\, sen\,\theta)$, entonces su raíz enésima se define como:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\, sen\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

Donde k toma los valores 0, 1, 2, 3,…, $n - 1$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la raíz cúbica de $z = 8\, cis\, 240°$.

Solución

Las raíces se obtienen aplicando la definición y k adopta los valores de 0, 1 y 2, entonces:

Para $k = 0$

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left(cos\frac{240° + 360°(0)}{3} + i\, sen\frac{240° + 360°(0)}{3}\right) = 2(cos\, 80° + i\, sen\, 80°)$$

Para $k = 1$

$$z_1 = \sqrt[3]{8}\left(cos\frac{240° + 360°(1)}{3} + i\, sen\frac{240° + 360°(1)}{3}\right) = 2(cos\, 200° + i\, sen\, 200°)$$

Para $k = 2$

$$z_2 = \sqrt[3]{8}\left(cos\frac{240° + 360°(2)}{3} + i\, sen\frac{240° + 360°(2)}{3}\right) = 2(cos\, 320° + i\, sen\, 320°)$$

2 Dado el número $z = 1$, determina $\sqrt[4]{z}$.

Solución

El número complejo $z = 1$ en su forma trigonométrica es $z = 1\ (\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$, luego k adopta los valores de 0, 1, 2 y 3, entonces las raíces son:

$$z_0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0°+360°(0)}{4} + i\operatorname{sen}\frac{0°+360°(0)}{4}\right) = 1\ (\cos 0° + i\operatorname{sen} 0°) = 1$$

$$z_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0°+360°(1)}{4} + i\operatorname{sen}\frac{0°+360°(1)}{4}\right) = 1\ (\cos 90° + i\operatorname{sen} 90°) = i$$

$$z_2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0°+360°(2)}{4} + i\operatorname{sen}\frac{0°+360°(2)}{4}\right) = 1\ (\cos 180° + i\operatorname{sen} 180°) = -1$$

$$z_3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0°+360°(3)}{4} + i\operatorname{sen}\frac{0°+360°(3)}{4}\right) = 1\ (\cos 270° + i\operatorname{sen} 270°) = -i$$

En consecuencia, los valores de la raíz cuarta de $z = 1$ son los complejos $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ y $z_3 = -i$.

EJERCICIO 55

Transforma a su forma trigonométrica los siguientes números complejos:

1. $z = 4 - i$
2. $z = \sqrt{3} + i$
3. $z = -2 + 2i$
4. $z = 5$
5. $z = -3i$
6. $z = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$
7. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
8. $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Sean los complejos $z_1 = \sqrt{2}\ cis\ 45°$, $z_2 = \sqrt{13}\ cis\frac{\pi}{6}$, $z_3 = 2\ cis\ 60°$ y $z_4 = \sqrt{2}\ cis\frac{3\pi}{4}$, determina:

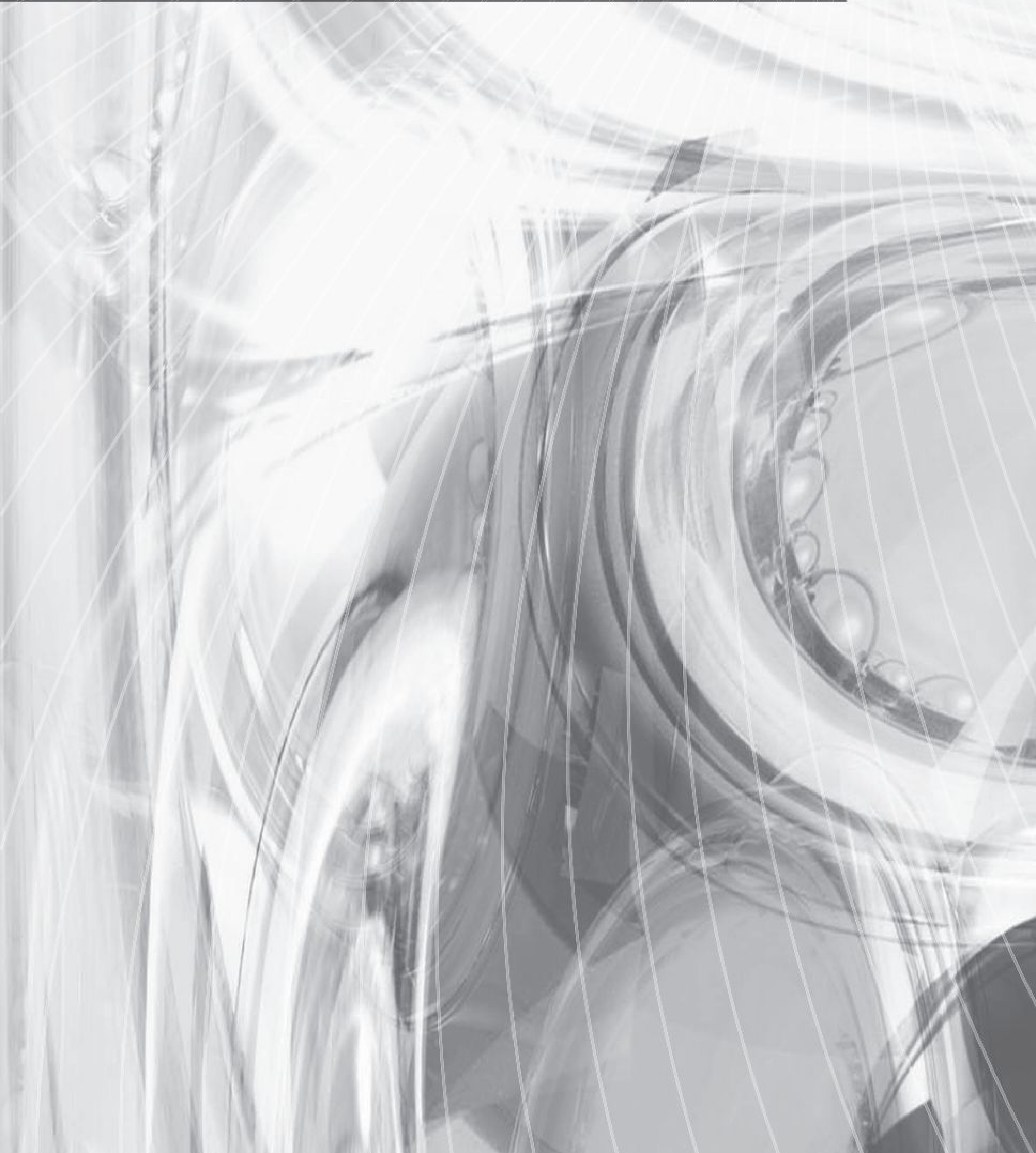
9. $z_1 \cdot z_2$
10. $z_2 \cdot z_4$
11. $z_1 \cdot z_3$
12. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
13. $z_1 \cdot z_3 \cdot z_4$
14. $\frac{z_1}{z_4}$
15. $\frac{z_2}{z_4}$
16. $\frac{z_1}{z_3}$
17. $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$
18. $\frac{z_2}{z_1 \cdot z_4}$
19. $\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_4}$
20. $\frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{z_4}$

Resuelve lo que se te pide.

21. Si $z = 3\ cis\ 120°$, determina z^2
22. Encuentra z^4 si $z = 3(cos\ 25° + i\ sen\ 25°)$
23. Determina z^3 si $z = 5\ cis\ 15°$
24. Encuentra $\sqrt{z}$ si $z = 16\left(cos\dfrac{\pi}{3} + i\ sen\dfrac{\pi}{3}\right)$
25. Si $z = 64\ cis\ 120°$, determina $\sqrt[6]{z}$
26. Encuentra $\sqrt[3]{z}$ si $z = -1$
27. Si $z = 4\ cis\dfrac{\pi}{9}$ y $z_1 = \dfrac{3}{2}cis\dfrac{2\pi}{9}$, determina $(z \cdot z_1)^2$
28. Si $z = 2(cos\ 30° + i\ sen\ 30°)$ y $z_1 = 4(cos\ 60° + i\ sen\ 60°)$, determina $\sqrt[3]{z \cdot z_1}$
29. Encuentra el resultado de: $\left[2(cos\ 32° + i\ sen\ 32°)\right]^2 \cdot 7(cos\ 36° + i\ sen\ 36°)$
30. Determina el resultado de: $\left[8\left(cos\dfrac{\pi}{12} + i\ sen\dfrac{\pi}{12}\right)\right]^{\frac{2}{3}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Geometría analítica



Capítulo 18

Geometría analítica unidimensional

Reseña HISTÓRICA

René Descartes

(1596-1650)

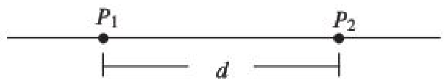
Filósofo y matemático francés, nació en 1596. Entre sus principales aportes a la filosofía está su famoso *Discurso del método*. Descartes afirmó que los orígenes de esta obra filosófica estaban en la lógica, la geometría y el álgebra. Por otra parte, este pensador ilustre hizo una importante contribución a las matemáticas. Al *Discurso del método* le añadió un "anexo" titulado Geometría, en el cual propuso un sistema nuevo para estudiar esta disciplina. Gracias al "sistema de coordenadas cartesianas", creado por Descartes y denominado así en su honor, diversas áreas de las matemáticas tuvieron un rápido desarrollo en los años posteriores. Este sistema permite asignar a cada punto del plano una pareja de números reales que lo identifica, inequívocamente. Así, cualquier figura geométrica puede ser identificada con un conjunto de parejas de números reales.

Segmento de recta

Se define como la porción de recta limitada por dos puntos no coincidentes.

Distancia entre dos puntos

Es la longitud de un segmento de recta. Dados los puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ en la recta numérica:



La distancia que existe entre ellos se obtiene mediante la expresión:

$$d = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la distancia que existe entre los puntos $P_1(-6)$ y $P_2(8)$?

Solución

Se sustituye $x_1 = -6$ y $x_2 = 8$ en la fórmula, y la distancia entre los puntos es:

$$d = |8-(-6)| = |8+6| = |14| = 14u$$

Donde u representa la unidad de longitud que se utiliza.

2 Determina la distancia entre los puntos $P\left(\frac{2}{3}x\right)$ y $Q\left(-\frac{1}{6}x\right)$, con $x > 0$.

Solución

Se sustituye $x_1 = \frac{2}{3}x$ y $x_2 = -\frac{1}{6}x$ en la fórmula y se obtiene:

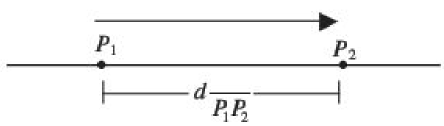
$$d = \left| -\frac{1}{6}x - \frac{2}{3}x \right| = \left| -\frac{5}{6}x \right| = \frac{5}{6}x$$

Por consiguiente, la distancia entre los puntos es de $\frac{5}{6}x$ unidades.

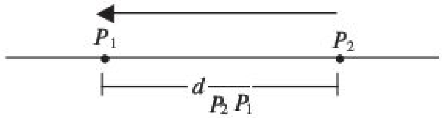
Distancia dirigida

Es aquella que al medirla se establece un sentido entre sus puntos.

La distancia dirigida de P_1 a P_2 es: $d_{\overline{P_1P_2}} = x_2 - x_1$.



Ahora bien, la distancia dirigida de P_2 a P_1 es, $d_{\overline{P_2P_1}} = x_1 - x_2$.



Por consiguiente, se observa que: $d_{\overline{P_1P_2}} = x_2 - x_1 = -x_1 + x_2 = -(x_1 - x_2) = -d_{\overline{P_2P_1}}$. Es decir, el orden de los puntos indica el sentido del segmento de recta.

$$\overline{P_1P_2} = -\overline{P_2P_1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la distancia dirigida $\overline{BA}$, si $A\left(\frac{2}{3}\right)$ y $B\left(\frac{1}{6}\right)$.

Solución

Se toma $x_1 = \frac{1}{6}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$, se sustituye en la fórmula $d_{\overline{BA}} = x_2 - x_1$ y se obtiene como resultado:

$$d_{\overline{BA}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,u$$

2 ¿Cuál es la distancia dirigida $\overline{PQ}$ y $\overline{QP}$, si $P\left(1\frac{1}{3}\right)$ y $Q\left(-\frac{2}{5}\right)$?

Solución

Para obtener la distancia de $\overline{PQ}$, se toma $x_1 = 1\frac{1}{3}$ y $x_2 = -\frac{2}{5}$, se sustituyen en la expresión:

$$d_{\overline{PQ}} = x_2 - x_1$$

$$d_{\overline{PQ}} = -\frac{2}{5} - 1\frac{1}{3} = -\frac{2}{5} - \frac{4}{3} = \frac{-6-20}{15} = -\frac{26}{15} = -1\frac{11}{15}\,u$$

Finalmente, el resultado es: $-\frac{26}{15}u = -1\frac{11}{15}u$.

Para obtener la distancia de $\overline{QP}$ se sustituyen los valores de x_1 y x_2 en la fórmula:

$$d_{\overline{QP}} = x_1 - x_2$$

$$d_{\overline{QP}} = 1\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{20+6}{15} = \frac{26}{15} = 1\frac{11}{15}\,u$$

Estos resultados demuestran que:

$$\overline{QP} = -\overline{PQ}$$

EJERCICIO 1

Determina la distancia entre los siguientes pares de puntos.

1. $A(-2)$ y $B(1)$
2. $P_1(-5)$ y $P_2(-1)$
3. $M\left(-\sqrt{3}\right)$ y $N\left(4\sqrt{3}\right)$
4. $P(-6)$ y $Q\left(-\frac{7}{2}\right)$
5. $A\left(\frac{3}{4}\right)$ y $B\left(-\frac{1}{2}\right)$
6. $S(-0.5)$ y $T\left(\frac{1}{2}\right)$
7. $S\left(\frac{3}{8}\right)$ y $T\left(-\frac{1}{6}\right)$
8. $A\left(\frac{6}{5}\right)$ y $B\left(-\frac{11}{5}\right)$
9. $P(3a)$ y $Q(-2a)$
10. $P_1\left(\frac{2}{3}a\right)$ y $P_2\left(-\frac{5}{12}a\right)$

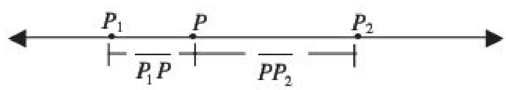
Para los puntos: $A(-3)$, $B(4)$, $C\left(\frac{3}{4}\right)$ y $D\left(-\frac{1}{2}\right)$, obtén las siguientes distancias dirigidas:

11. $\overline{AB}$
12. $\overline{DC}$
13. $\overline{AD}$
14. $\overline{BA}$
15. $\overline{CB}$
16. $\overline{DA}$
17. $\overline{DB}$
18. $\overline{CA}$
19. $\overline{BC}$
20. $\overline{CD}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División de un segmento en una razón dada

Sea el segmento definido por los puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$, si $P(x)$ es un punto sobre el segmento $\overline{P_1P_2}$, entonces P lo divide en los segmentos $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$ en la razón r.



Donde la razón se define como:

$$r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} \text{ o } r=\overline{P_1P} : \overline{PP_2}$$

Siendo $\overline{P_1P}=x-x_1$ y $\overline{PP_2}=x_2-x$, por tanto:

$$r=\frac{x-x_1}{x_2-x}, \text{con } x_2\neq x$$

Finalmente, la coordenada del punto de división P es:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \text{con } r\neq -1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 El punto $P(-3)$ se encuentra entre los puntos $P_1(-5)$ y $P_2(0)$. Encuentra la razón en que el punto P divide al segmento $\overline{P_1P_2}$.

Solución

Se sustituyen en la fórmula los siguientes valores: $x = -3$, $x_1 = -5$ y $x_2 = 0$.

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{-3-(-5)}{0-(-3)} = \frac{-3+5}{0+3} = \frac{2}{3}$$

Por consiguiente, la razón es igual a: $\frac{2}{3}$.

2 ¿Cuál es la razón $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ en que el punto $P(-2)$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$, cuyas coordenadas son $P_1(3)$ y $P_2(-1)$?

Solución

Dados $x = -2$, $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$, se sustituyen en la fórmula de la razón para obtener como resultado:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{-2-3}{-1-(-2)} = \frac{-5}{-1+2} = \frac{-5}{1} = -5$$

El signo negativo de la razón indica que el punto $P(-2)$ se encuentra sobre la misma recta, pero fuera del segmento $\overline{P_1P_2}$.

3 Determina la coordenada del punto de división del segmento definido por los puntos: $A(-1)$ y $B\left(\frac{4}{3}\right)$ si están en la relación $r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -\frac{1}{2}$.

Solución

Se identifican y sustituyen en la fórmula correspondiente los valores, para obtener:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \Rightarrow x = \frac{-1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1 - \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{10}{3}$$

Por tanto, la coordenada del punto P es $-\frac{10}{3}$.

EJERCICIO 2

Encuentra la razón en que el punto P divide al segmento, cuyos extremos son P_1 y P_2.

1. $P_1(-3)$, $P_2(9)$ y $P(0)$
2. $P_1(4)$, $P_2(-6)$ y $P(2)$
3. $P_1(-10)$, $P_2(2)$ y $P(-4)$
4. $P_1(-5)$, $P_2(0)$ y $P(2)$
5. $P_1\left(-\frac{3}{7}\right)$, $P_2(4)$ y $P(-1)$
6. $P_1\left(-\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}\right)$ y $P\left(\frac{1}{4}\right)$
7. $P_1\left(-\frac{5}{8}\right)$, $P_2\left(\frac{5}{8}\right)$ y $P\left(\frac{1}{4}\right)$
8. $P_1\left(-\frac{3}{4}\right)$, $P_2\left(-\frac{5}{4}\right)$ y $P(1)$

Determina el valor de la coordenada del punto $P(x)$ que divide a los siguientes segmentos, en las razones que se indican a continuación:

9. $P_1(-2)$, $P_2(6)$ y $r=-\frac{1}{4}$
10. $P_1\left(-\frac{3}{2}\right)$, $P_2(4)$ y $r=-3$
11. $P_1(-4)$, $P_2(2)$ y $r=\frac{1}{3}$
12. $P_1\left(\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{9}{2}\right)$ y $r=1$
13. $P_1\left(-\frac{2}{5}\right)$, $P_2\left(-\frac{7}{4}\right)$ y $r=\frac{1}{2}$
14. $P_1\left(-\frac{3}{10}\right)$, $P_2\left(\frac{4}{5}\right)$ y $r=-\frac{1}{5}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Punto medio

Es aquel que divide a un segmento en dos partes iguales. La coordenada del punto medio, P_m, del segmento definido por los puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$, se determina tomando la razón $r=1$.

Se sustituye en $x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$ y se obtiene la coordenada del punto medio que es:

$$x_m=\frac{x_1+x_2}{2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el punto medio del segmento, cuyos extremos son $P_1(-6)$ y $P_2(4)$.

Solución

Se sustituyen en la fórmula los valores de $x_1=-6$ y $x_2=4$, para obtener como resultado:

$$x_m=\frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow x_m=\frac{-6+4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Por tanto, resulta que $P_m(-1)$.

2 Uno de los extremos de un segmento es el punto $P_1(-5)$ y la coordenada de su punto medio es $P_m\left(-\frac{7}{2}\right)$. ¿Cuál es la coordenada del otro extremo?

Solución

La coordenada que se desea encontrar es x_2, se sustituye $x_1=-5$ y $x_m=-\frac{7}{2}$ en la fórmula, para después despejar x_2:

$$x_m=\frac{x_1+x_2}{2} \rightarrow -\frac{7}{2}=\frac{-5+x_2}{2} \rightarrow x_2=-7+5=-2, \text{ se obtiene } P_2(-2).$$

EJERCICIO 3

Determina la coordenada del punto medio de los siguientes segmentos:

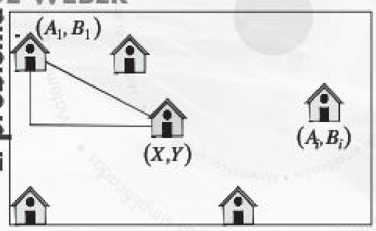
1. $P(3)$ y $Q(-1)$
2. $S(4)$ y $T(7)$
3. $M(-6)$ y $N(-4)$
4. $R\left(-\frac{2}{3}\right)$ y $P\left(-\frac{1}{2}\right)$
5. $P\left(\frac{1}{6}\right)$ y $T\left(\frac{2}{3}\right)$
6. $A\left(-\frac{3}{4}\right)$ y $B\left(\frac{1}{6}\right)$
7. $C\left(-2\sqrt{3}\right)$ y $D\left(5\sqrt{3}\right)$
8. $E\left(\frac{3}{4}a\right)$ y $F\left(-\frac{7}{6}a\right)$
9. $H\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $J(-3)$
10. Un extremo de un segmento es el punto $P(-1)$ y su punto medio es el punto $P_m\left(-\frac{5}{4}\right)$. ¿Cuál es la coordenada del otro extremo?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 19

Geometría analítica bidimensional

El problema de Weber



Gráfica del problema de Weber

"Los problemas de localización investigan la mejor decisión de dónde localizar una o unas centrales que a su vez satisfaga unos puntos de demanda o clientes, sistemas de distribución o sistemas logísticos." Uno de los problemas más sencillos de localización es determinar el lugar hacia el cual se transportará material, acarreando un costo por unidad de distancia. Esto es lo que se conoce en administración de operaciones como "el problema de Weber".

El problema toma como base las coordenadas de los puntos desde o hacia los cuales hay que transportar el material. El sistema de coordenadas se puede tomar arbitrariamente desde un mapa, dando parejas ordenadas (Ai, Bi) para denotar la posición óptima del desplazamiento por las variables X, Y.

El problema se resuelve al encontrar las coordenadas del punto (X,Y) del nuevo desplazamiento, tal que el costo de transporte total sea mínimo.

$Min\ Z = \sum Wi \cdot di$, donde di es la distancia que hay entre (X,Y) y (Ai, Bi), dada en unidades de longitud. Wi es el costo por unidad de longitud.

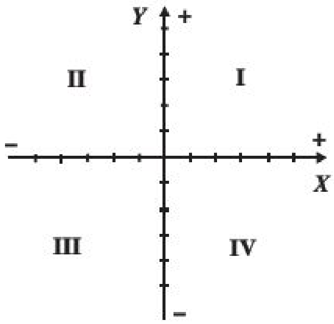
$$X = \frac{\sum \frac{Wi}{di}}{\sum \frac{Wi \cdot Ai}{di}}, \quad Y = \frac{\sum \frac{Wi \cdot Bi}{di}}{\sum \frac{Wi}{di}}$$

Con $di = \sqrt{(X - Ai)^2 + (Y - Bi)^2}$

Plano cartesiano

El plano cartesiano son dos rectas perpendiculares, cuyo punto de intersección se denomina origen. La recta horizontal recibe el nombre de eje X o eje de las abscisas y la recta vertical recibe el nombre de eje Y o eje de las ordenadas.

El plano cartesiano presenta cuatro regiones llamadas "cuadrantes" y a cada punto P se le asigna un par coordenado $P(x, y)$.

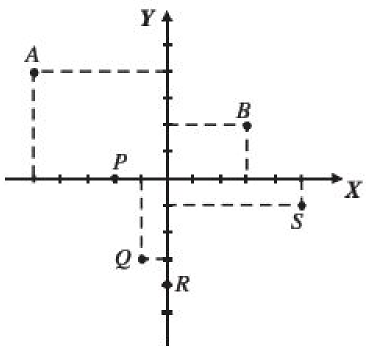


Localización de puntos

Para localizar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano se toma como referencia el origen a partir de él, se avanza tanto como lo indique el primer número (abscisa) hacia la derecha o izquierda, según sea su signo, y a partir de la nueva posición se avanza hacia arriba o abajo, según lo indique el signo del segundo número (ordenada).

Ejemplo

Grafica los siguientes puntos $A(-5, 4)$, $B(3, 2)$, $P(-2, 0)$, $Q(-1, -3)$, $R(0, -4)$ y $S(5, -1)$ en el plano cartesiano.



EJERCICIO 4

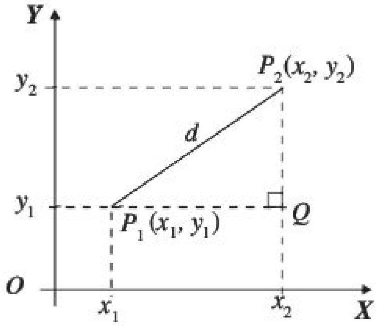
Localiza en el plano cartesiano los siguientes puntos y únelos:

1. $A(3, -1)$, $B(4, 3)$
2. $A(0, 2)$, $B(3, 0)$
3. $A(-1, 2)$, $B(4, 5)$, $C(2, -3)$
4. $A(0, 5)$, $B(2, 1)$, $C(-3, 4)$
5. $A(-3, 2)$, $B(0, -2)$, $C(1, 1)$
6. $A(1, 4)$, $B(-2, 1)$, $C(2, -3)$, $D(4, 2)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Distancia entre dos puntos

Dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos del plano, la distancia que existe entre ellos se determina de la siguiente forma:



En el triángulo P_1QP_2, por el teorema de Pitágoras

$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = \left(\overline{P_1Q}\right)^2 + \left(\overline{QP_2}\right)^2$$

Pero, $\overline{P_1P_2} = d$, $\overline{P_1Q} = x_2 - x_1$ y $\overline{QP_2} = y_2 - y_1$ entonces:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\text{, con}$$

$$d = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la distancia entre los puntos $A(6, 3)$ y $B(3, -1)$?

Solución

Se sustituye en la fórmula, $x_1 = 6$, $y_1 = 3$, $x_2 = 3$ y $y_2 = -1$ y se obtiene:

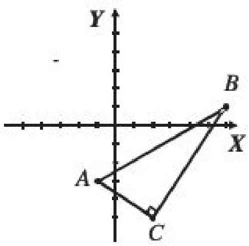
$$d = \sqrt{(3-6)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5u$$

2 Demuestra que el triángulo ABC formado por los puntos $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$ es rectángulo.

Demostración

El triángulo es rectángulo si la suma de los cuadrados de sus lados menores (catetos) es igual al cuadrado del lado mayor (hipotenusa).

Se aplica la fórmula de distancia para obtener la longitud de cada lado del triángulo:



$$d_{AB} = \sqrt{(6-(-1))^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{(7)^2 + (4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(2-6)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-5-(-3))^2} = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$d_{AB}{}^2 = d_{BC}{}^2 + d_{AC}{}^2$$

$$\left(\sqrt{65}\right)^2 = \left(\sqrt{52}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2$$

$$65 = 52 + 13$$

$$65 = 65$$

Se demuestra entonces que el triángulo ABC es rectángulo.

3 La distancia entre dos puntos es $\sqrt{34}$. Si uno de los extremos tiene coordenadas $A(1, 3)$ y la abscisa del punto B es la mitad de la ordenada, determina las coordenadas del extremo B.

Solución

Las coordenadas del punto B están en la relación $x = \frac{1}{2}y$, por consiguiente, el punto se expresa como $B\left(\frac{1}{2}y,\ y\right)$.

Al sustituir en la fórmula, se despeja a y:

Se elevan ambos miembros al cuadrado $\sqrt{\left(\frac{1}{2}y-1\right)^2+(y-3)^2}=\sqrt{34} \rightarrow \left(\frac{1}{2}y-1\right)^2+(y-3)^2 = 34$ Se desarrollan binomios

$$\frac{1}{4}y^2-y+1+y^2-6y+9 = 34$$

$$\frac{5}{4}y^2-7y-24 = 0$$

Al multiplicar por 4 ambos miembros de la igualdad: $5y^2-28y-96=0$

Se resuelve la ecuación: $(y-8)(5y+12)=0$

$$y = 8;\ y = -\frac{12}{5}$$

Se sustituyen estos valores en la relación $x = \frac{1}{2}y$, y se determina que:

Para $y = 8$, $x = 4$ para $y = -\frac{12}{5}$, $x = -\frac{6}{5}$

Por consiguiente, existen 2 puntos que se encuentran a la misma distancia del punto A.

Las coordenadas del punto B son: $B(4, 8)$ y $B\left(-\frac{6}{5},-\frac{12}{5}\right)$.

4 Demuestra por medio de distancias, que los puntos $A(-6,-8)$, $B(0,-4)$ y $C(3,-2)$, están en una misma recta (son colineales).

Solución

Se obtienen las distancias entre los puntos:

$$d_{AB}=\sqrt{(0-(-6))^2+(-4-(-8))^2}=\sqrt{(6)^2+(4)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$$

$$d_{BC}=\sqrt{(3-0)^2+(-2-(-4))^2}=\sqrt{(3)^2+(2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

$$d_{AC}=\sqrt{(3-(-6))^2+(-2-(-8))^2}=\sqrt{(9)^2+(6)^2}=\sqrt{81+36}=\sqrt{117}$$

Los puntos son *colineales* si se satisface que la mayor de las distancias obtenidas es igual a la suma de las otras, es decir:

$$d_{AC}=d_{AB}+d_{BC} \qquad \sqrt{117}=\sqrt{52}+\sqrt{13}$$

$$\sqrt{(9)(13)}=\sqrt{(4)(13)}+\sqrt{13}$$

$$3\sqrt{13}=2\sqrt{13}+\sqrt{13}$$

$$3\sqrt{13}=3\sqrt{13}$$

Al cumplirse la condición, se demuestra que los puntos dados son colineales.

EJERCICIO 5

Encuentra la distancia entre los siguientes pares de puntos:

1. $A(-2,-7)$, $B(6,-1)$
2. $A(4, 2)$, $B(5, 0)$
3. $A(0, 2)$, $B(7, 3)$
4. $A(7, 3)$, $B(3,-1)$
5. $A\left(3\sqrt{6},-2\sqrt{10}\right)$, $B\left(5\sqrt{6},-4\sqrt{10}\right)$
6. $A\left(3,\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{4}{3},-1\right)$
7. $A\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right)$, $B\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{6}\right)$
8. $A(-1,0)$ y $B\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$
9. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$ y $B\left(-\frac{1}{6},\frac{3}{2}\right)$
10. $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$ y $B\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}\right)$

Calcula el perímetro de los triángulos, cuyos vértices son los siguientes puntos:

11. $A(-2, 2)$, $B(7,-1)$ y $C(3,-8)$
12. $J(3, 1)$, $K(2, 7)$ y $L(-1, 6)$
13. $M(1, 2)$, $N(5, 3)$ y $P(-3,-6)$
14. $P(0, 0)$, $Q(0, 4)$ y $R(3, 0)$
15. Verifica que los puntos $A(-2,-3)$, $B(-4,-5)$ y $C(-1,-6)$, son los vértices de un triángulo isósceles.
16. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $A(-2, 3)$ y $B(5,-8)$, ¿cuál es su perímetro y área?
17. La longitud de un segmento es de 13 u y las coordenadas de uno de sus extremos son $A(8, 6)$, obtén la ordenada del otro extremo si su abscisa es -4.
18. El extremo de un segmento de recta es el punto $A(2,-4)$. Si la ordenada del otro extremo es $\frac{3}{2}$ de su abscisa, determina las coordenadas del punto, si la longitud del segmento es de $2\sqrt{26}$ u.

Mediante la fórmula de la distancia, averigua qué puntos son colineales.

19. $A(-4,-5)$, $B(0,-3)$ y $C(8,1)$
20. $A(-3,-11)$, $B(1,3)$ y $C(5,-4)$
21. $A(-3,3)$, $B\left(1,\frac{1}{3}\right)$ y $C(3,-1)$
22. $A(2,2)$, $B(-1,2)$ y $C(3,3)$

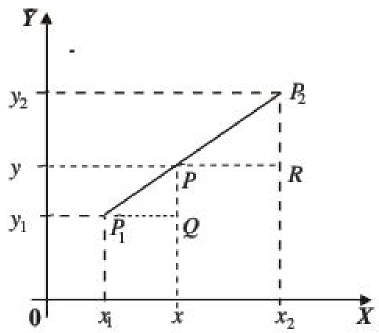
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División de un segmento en una razón dada

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento de recta, entonces la razón en que el punto $P(x, y)$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en dos partes proporcionales se define como: $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$.

Por geometría, los triángulos P_1PQ y PP_2R son semejantes, la proporcionalidad que existe entre sus lados es:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{P_1Q}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{RP_2}}$$



Por otro lado, $\overline{P_1Q} = x - x_1$, $\overline{PR} = x_2 - x$,

$$\overline{QP} = y - y_1,\ \overline{RP_2} = y_2 - y$$

Entonces:

$$r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

1. Para determinar la razón dados los extremos y el punto de división se emplea:

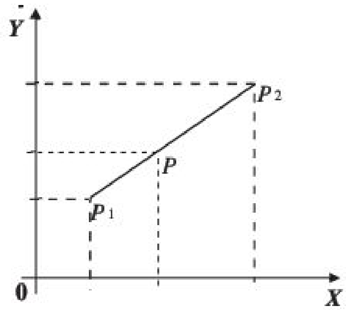
$$r=\frac{x-x_1}{x_2-x}\ \text{o}\ r=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

2. Para encontrar el punto de división dados los extremos y la razón se utiliza:

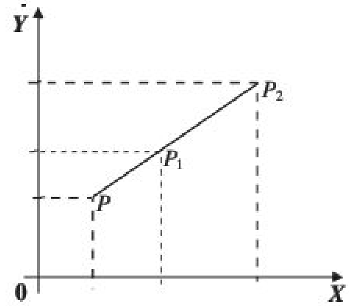
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}\ ;\ y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

El signo de la razón indica si el punto de división se ubica entre los extremos del segmento o fuera de ellos sobre la misma recta.

1. Cuando $P(x, y)$ está en el segmento $\overline{P_1P_2}$, la razón es positiva ($r > 0$).



2. Cuando $P(x, y)$ está en la prolongación del segmento, la razón es negativa ($r < 0$).



EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la razón en la que el punto $P(2, 7)$ divide al segmento de recta determinado por los puntos $P_1(-1, 1)$ y $P_2(6, 15)$?

Solución

Se sustituyen los valores de $x = 2, x_1 = -1$ y $x_2 = 6$, en la fórmula:

$$r=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{2-(-1)}{6-2}=\frac{3}{4}$$

Por consiguiente, el valor de la razón es: $\frac{3}{4}$.

Se obtiene el mismo valor de r si se toman los valores de las ordenadas y se sustituyen en la fórmula:

$$r=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

$$r=\frac{7-1}{15-7}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

2 ¿Cuál es la razón en la que el punto $P(10, 7)$ divide al segmento de la recta, cuyos extremos son los puntos $P_1(-5, 2)$ y $P_2(1, 4)$?

Solución

Se sustituye $y = 7$, $y_1 = 2$ y $y_2 = 4$ en la siguiente fórmula:

$$r=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

Obteniendo:

$$r=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{7-2}{4-7}=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}$$

Esta misma razón se obtiene al sustituir los valores de x.

En consecuencia, la razón es $r=-\frac{5}{3}$, el signo menos indica que el punto P se encuentra sobre la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2, pero no entre ellos.

3 Determina las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en una razón $r = -\frac{2}{7}$, y cuyos extremos son los puntos $P_1(0, 3)$ y $P_2(7, 4)$.

Solución

Se sustituyen los valores en las respectivas fórmulas y se obtiene la coordenada de P:

$$x = \frac{0 + \left(-\frac{2}{7}\right)(7)}{1 + \left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{-\frac{2}{1}}{\frac{5}{7}} = -\frac{14}{5} \qquad y = \frac{3 + \left(-\frac{2}{7}\right)(4)}{1 + \left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{3 - \frac{8}{7}}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{\frac{21-8}{7}}{\frac{7-2}{7}} = \frac{\frac{13}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{13}{5}$$

Por tanto, el punto de división tiene como coordenadas $P\left(-\frac{14}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

4 Para los puntos $P_1(5, 3)$ y $P_2(-3, -3)$, encuentra la coordenada del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, de tal manera que la distancia de P a P_1 sea el triple de la que existe a P_2 y se encuentra entre P_1 y P_2.

Solución

En este caso $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{3}{1} = 3$, al sustituir en la fórmula:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{5 + 3(-3)}{1 + 3} = \frac{-4}{4} = -1\,; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{3 + 3(-3)}{1 + 3} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Entonces, las coordenadas del punto de división son $P\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$.

5 Dados los puntos $P_1(4, -3)$ y $P_2(1, 4)$, determina la coordenada del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, de tal manera que la distancia de P a P_1 es el doble de la que existe a P_2 y se encuentra entre P_1 y P_2.

Solución

Según las condiciones del problema se establece que $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{2}{1} = 2$, luego al sustituir en la fórmula se determina que:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{4 + 2(1)}{1 + 2} = \frac{4 + 2}{3} = \frac{6}{3} = 2; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{-3 + 2(4)}{1 + 2} = \frac{-3 + 8}{3} = \frac{5}{3}$$

Por consiguiente, las coordenadas del punto de división son $P\left(2, \frac{5}{3}\right)$.

EJERCICIO 6

Determina la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ en que el punto P divide al segmento de recta de extremos P_1 y P_2.

1. $P_1(0, 2)$, $P_2(-2, 4)$ y $P(2, 0)$
2. $P_1(-1, 4)$, $P_2(0, 3)$ y $P(3, 0)$
3. $P_1(3, -4)$, $P_2(0, 2)$ y $P(2, -2)$
4. $P_1(3, 5)$, $P_2(-1, 4)$ y $P(-5, 3)$
5. $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $P_2(2, 1)$ y $P\left(\frac{1}{3}, \frac{13}{18}\right)$
6. $P_1(-5, 1)$, $P_2(4, 3)$ y $P\left(-3, \frac{13}{9}\right)$

Dados los extremos P_1, P_2 y la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, encuentra las coordenadas del punto de división P del segmento $\overline{P_1P_2}$.

7. $P_1(4, 1)$, $P_2(5, -2)$ y $r = -2$
8. $P_1(0, 5)$, $P_2(6, -1)$ y $r = 5$
9. $P_1(-2, 3)$, $P_2(4, 5)$ y $r = \frac{2}{3}$
10. $P_1\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$, $P_2(0, 4)$ y $r = \frac{1}{2}$
11. $P_1(5, -6)$, $P_2(1, 0)$ y $r = \frac{1}{3}$
12. $P_1(a, 2b)$, $P_2(-3a, 4b)$ y $r = 1$
13. Los puntos extremos de un segmento de recta son $P_1(-2, 4)$ y $P_2(1, -2)$, determina la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ en la que el punto $P(3, -6)$ divide al segmento.
14. Si el punto $P(x, y)$ está a una distancia cuatro veces mayor a $P_1(-5, -3)$ que a $P_2(6, 10)$ y queda entre P_1 y P_2, encuentra las coordenadas de P.
15. Sean $P_1(6, -8)$ y $P_2(4, 2)$, los extremos de un segmento $\overline{P_1P_2}$, el cual se prolonga hasta P, de tal manera que la longitud de $\overline{P_1P}$ sea tres veces la longitud de $\overline{PP_2}$, encuentra las coordenadas de P.
16. Un punto $P(-14, -4)$ está entre $P_1(-6, 4)$ y $P_2(-18, -8)$. ¿En qué razón divide P al segmento $\overline{P_1P_2}$?
17. Dados los puntos $P_1(-2, -3)$ y $P_2(4, 3)$, ¿cuáles son las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, de tal manera que la distancia de P a P_1 sea el doble de distancia que a P_2 y se encuentra entre P_1 y P_2?
18. Dados los puntos $P_1(-1, 2)$ y $P_2(3, -3)$, obtén las coordenadas del punto $P(x, y)$ que está colocado fuera del segmento $\overline{P_1P_2}$ y que se encuentran a una distancia tres veces mayor a P_1 que a P_2.
19. Puesto que el punto $(3, 2)$ divide al segmento de recta que determinan los puntos $P_1(2, 4)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = \frac{3}{2}$, determina las coordenadas de P_2.
20. Si $P_1(-2, -1)$ y $P_2(4, 5)$ son extremos del segmento $\overline{P_1P_2}$, encuentra las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta, de tal manera que la longitud de $\overline{P_1P}$ sea $\frac{2}{3}$ de la longitud de $\overline{PP_2}$.
21. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ extremos de un segmento de recta, determina el valor de la razón r para que el punto $P(x, y)$ divida al segmento en partes iguales, y deduce las coordenadas del punto medio.
22. Deduce las coordenadas de los puntos de trisección (que dividen en tres partes iguales) del segmento $\overline{P_1P_2}$ determinado por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

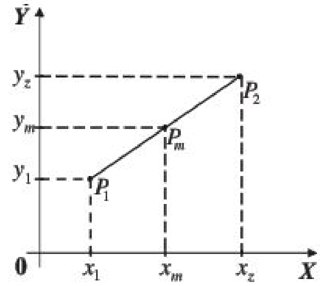
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Punto medio de un segmento de recta

El punto medio del segmento de recta con extremos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, es aquel punto $P_m(x_m, y_m)$ que lo divide en dos segmentos iguales.

Si el punto $P_m = P$ divide a $\overline{P_1P_2}$ en dos segmentos de recta iguales, entonces: $\overline{P_1P} = \overline{PP_2}$

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{PP_2}} = 1$$



Por tanto, las coordenadas del punto medio son:

$$P_m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina las coordenadas del punto medio del segmento, cuyos extremos son los puntos $P_1(5, 7)$ y $P_2(1, -3)$

Solución

Se sustituye $x_1 = 5$, $y_1 = 7$ y $x_2 = 1$, $y_2 = -3$, en las fórmulas:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3;\; y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7+(-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

En consecuencia, el punto medio tiene coordenadas: $P_m(3, 2)$.

2 Uno de los extremos de un segmento de recta es el punto (3, 2) y su punto medio es el punto (– 3, 5). Encuentra las coordenadas del otro extremo.

Solución

Conocidos los puntos $P_1(3, 2)$ y $P_m(-3, 5)$, se sustituyen los valores de las abscisas y las ordenadas en sus respectivas fórmulas y se realizan los despejes:

$$-3 = \frac{3 + x_2}{2} \qquad\qquad 5 = \frac{2 + y_2}{2}$$

$$(-3)(2) = 3 + x_2 \qquad\qquad (5)(2) = 2 + y_2$$

$$-6 = 3 + x_2 \qquad\qquad 10 = 2 + y_2$$

$$-6 - 3 = x_2 \qquad\qquad 10 - 2 = y_2$$

$$-9 = x_2 \qquad\qquad 8 = y_2$$

Entonces, se determina que las coordenadas del extremo P_2 son: (– 9, 8).

Puntos de trisección de un segmento de recta

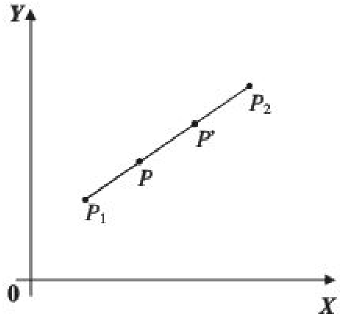
Los puntos de trisección P y P' del segmento de recta, cuyos extremos son los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son aquellos que lo dividen en tres partes iguales.

Para el punto P la razón es $\frac{1}{2}$ y sus coordenadas son:

$$P\left(\frac{2x_1+x_2}{3}, \frac{2y_1+y_2}{3}\right)$$

Para el punto P' la razón es 2 y sus coordenadas son:

$$P'\left(\frac{x_1+2x_2}{3}, \frac{y_1+2y_2}{3}\right)$$



EJEMPLOS

1 ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de trisección del segmento de recta determinado por los puntos $P_1(-6, 2)$ y $P_2(3, 5)$?

Solución

Al sustituir los valores de las abscisas y ordenadas en las fórmulas se obtienen los puntos:

$$P\left(\frac{2(-6)+3}{3}, \frac{2(2)+5}{3}\right);\ P'\left(\frac{-6+2(3)}{3}, \frac{2+2(5)}{3}\right)$$

$$P(-3, 3);\ P'(0, 4)$$

Por tanto, los puntos de trisección del segmento de recta son $P(-3, 3)$ y $P'(0, 4)$.

EJERCICIO 7

Determina las coordenadas del punto medio y de los puntos de trisección de los segmentos de recta definidos por los puntos:

1. $P_1(3, 5)$, $P_2(2, -1)$
2. $P_1(0, 4)$, $P_2(3, 7)$
3. $P_1(-1, 3)$, $P_2(9, 11)$
4. $P_1(5, -7)$, $P_2(11, -4)$
5. $P_1\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $P_2\left(\frac{1}{3}, 2\right)$
6. $P_1\left(\frac{2}{3}, -2\right)$, $P_2\left(\frac{1}{4}, 1\right)$
7. Si el punto medio de un segmento de recta es $P_m(1, -3)$ y un extremo del segmento es $P_1(7, -1)$, ¿cuál es la coordenada del otro extremo?
8. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $(-2, 3)$, $(2, 7)$, $(3, 5)$. Encuentra las coordenadas de los vértices.
9. Los vértices de un triángulo son $A(-4, 1)$, $B(2, 7)$ y $C(-2, -3)$. Si D es el punto medio del $\overline{AB}$ y E es el punto medio del lado $\overline{BC}$, demuestra que la longitud del $\overline{DE}$ es la mitad de la longitud del $\overline{AC}$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

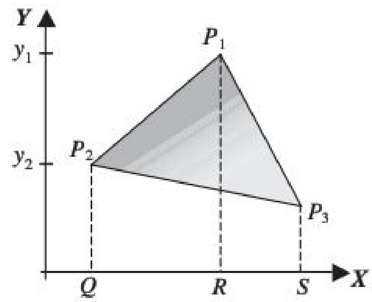
Área de un triángulo

Para el triángulo con vértices en los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, su área o superficie A se determina con la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left| x_1\left(y_2 - y_3\right) + x_2\left(y_3 - y_1\right) + x_3\left(y_1 - y_2\right)\right|$$

Demostración

En la figura el área A del triángulo $P_1P_2P_3$ es igual al valor absoluto de la suma de las áreas de los trapecios P_1P_2QR y P_1RSP_3 menos el área del trapecio P_2QSP_3 siendo el área de un trapecio:



$$A_t = \frac{(b+B)h}{2}$$

Entonces:

$$A = \left|\frac{(y_1+y_2)(x_1-x_2)}{2} + \frac{(y_1+y_3)(x_3-x_1)}{2} - \frac{(y_2+y_3)(x_3-x_2)}{2}\right|$$

$$A = \left|\frac{(y_1+y_2)(x_1-x_2)}{2} + \frac{(y_1+y_3)(x_3-x_1)}{2} + \frac{(y_2+y_3)(x_2-x_3)}{2}\right|$$

$$A = \left|\frac{x_1\left(y_1+y_2-y_1-y_3\right)+x_2\left(y_2+y_3-y_1-y_2\right)+x_3\left(y_1+y_3-y_2-y_3\right)}{2}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\left|x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)\right|$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el área del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ y $C(2, -2)$?

Solución

Al aplicar la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|-3(5+2)+4(-2-2)+2(2-5)\right| = \frac{1}{2}\left|-21-16-6\right| = \frac{1}{2}(43) = 21.5u^2$$

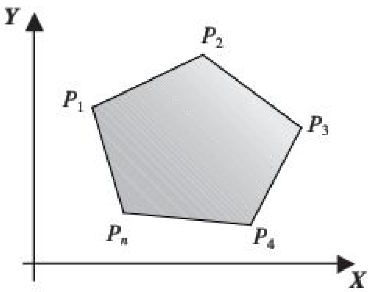
Donde u^2 son unidades cuadradas de superficie.

Por consiguiente, el área del ΔABC es $21.5\ u^2$.

Área de un polígono

El área A de un polígono con vértices en: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, es igual a la suma de las áreas de todos los triángulos que se puedan trazar en él desde un solo vértice. Este procedimiento para determinar su área, se reduce al determinante definido como:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$



EJEMPLOS

1 Determina el área del cuadrilátero, cuyos vértices son los puntos $A(-2, 5)$, $B(0, -1)$ $C(2, -6)$ y $D(-4, -3)$.

Solución

Se sustituyen los puntos en la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \\ 2 & -6 \\ -4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left| 2+0-6-20-6-24+2-0 \right| = \frac{1}{2}(52) = 26$$

En consecuencia, el área del cuadrilátero es de 26 u^2.

2 Determina el área del pentágono, cuyos vértices son los puntos $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(4, 6)$, $D(2, -1)$ y $E(0, -3)$.

Solución

Se sustituyen los puntos en la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \\ 2 & -1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left| -4+18-4-6+0-3-0-12-16-6 \right| = \frac{1}{2}(33) = 16.5$$

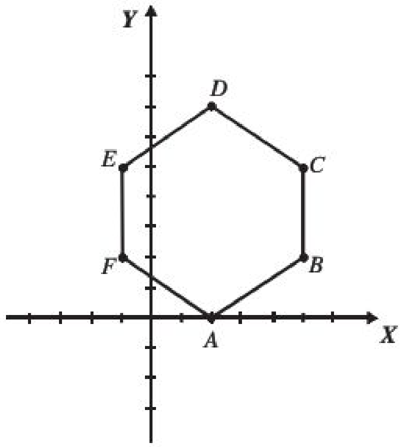
Finalmente, el área del pentágono es de 16.5 u^2.

3 Calcula el área del hexágono, cuyos vértices son los puntos $A(2, 0)$, $B(5, 2)$, $C(5, 5)$, $D(2, 7)$, $E(-1, 5)$ y $F(-1, 2)$.

Solución

Para desarrollar el determinante del área se colocan las coordenadas de los vértices y se repite la primera de ellas:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \\ 5 & 5 \\ 2 & 7 \\ -1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$



$$A = \frac{1}{2}\left|4 + 25 + 35 + 10 - 2 - 10 - 10 + 7 + 5 - 4\right|$$

$$A = \frac{1}{2}(60)$$

$$A = 30u^2$$

Por consiguiente, el hexágono tiene una superficie de $30\ u^2$.

EJERCICIO 8

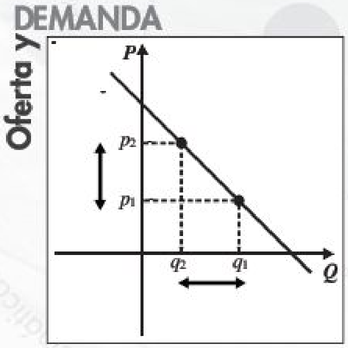
Determina el área de los siguientes polígonos definidos por los puntos:

1. $A(1, 3)$, $B(0, 0)$ y $C(2, 0)$
2. $A(-4, -5)$, $B(2, 1)$ y $C(-1, 3)$
3. $A(6, 2)$, $B(-1, 7)$ y $C(-4, 1)$
4. $A(3, 1)$, $B(7, 3)$ y $C(1, 5)$
5. $A(-4, 0)$, $B(0, 0)$ y $C(0, -3)$
6. $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$ y $C(0, a)$
7. $A(-6, -2)$, $B(4, 3)$, $C(5, 5)$ y $D(5, -2)$
8. $A(-3, 1)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 4)$ y $D(1, 0)$
9. $A(-4, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(5, 5)$ y $D(3, 2)$
10. $A(-7, 1)$, $B(-5, 4)$, $C(2, 3)$, $D(0, -5)$ y $E(-4, -3)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 20

Pendiente de una recta



Curva de demanda lineal

En la práctica algunas ecuaciones de oferta y demanda son aproximadamente lineales en un intervalo.

En el análisis económico sólo se toma la porción de las rectas lineales que se encuentran en el primer cuadrante, ya que la oferta, el precio y la demanda son cero o positivas.

Curva de demanda lineal

Caso I

Cuando la pendiente de la recta es negativa aumenta el precio y la cantidad de demanda disminuye y viceversa.

Caso II

Cuando la pendiente de la recta es cero el precio permanece constante, sin considerar que la demanda aumenta.

Caso III

Cuando la pendiente de la recta no existe el precio aumenta y la cantidad de demanda permanece constante.

P: Precio

Q: Cantidad de demanda

Definiciones

Inclinación de una recta. Es el ángulo que una recta forma con el eje X positivo, el cual se representa con el símbolo θ, este ángulo se mide a partir del eje X y girando en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

Pendiente de una recta. Se define como la tangente del ángulo de inclinación que tiene una recta y se representa con la letra m.

$$m = \tan\theta$$

Donde:

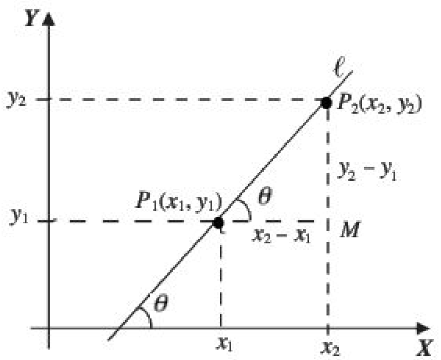
$$\theta = \arctan(m) \text{ si } m > 0 \qquad \theta = \arctan(m) + 180° \text{ si } m < 0$$

Pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Sea la recta ℓ que pasa por los puntos P_1 y P_2, entonces su pendiente se define como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Demostración



La pendiente de la recta ℓ es,

$$m = \tan\theta$$

En el triángulo P_1MP_2,

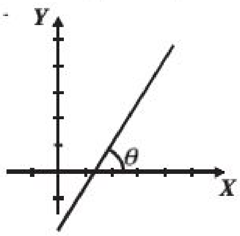
$$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por consiguiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

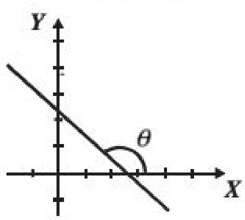
Los casos que se presentan para el valor de la pendiente y su ángulo de inclinación, son los siguientes:

1. Si $m > 0$ (positiva) entonces, el ángulo es agudo.



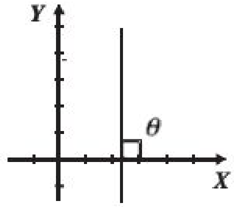
Si $m > 0$, entonces, $0° < \theta < 90°$

2. Si $m < 0$ (negativa) entonces, el ángulo es obtuso.

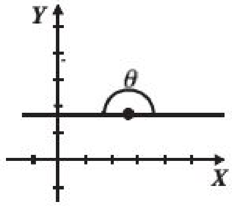


Si $m < 0$, entonces, $90° < \theta < 180°$

3. Si $m = \frac{c}{0}$ entonces, el ángulo es recto.



4. Si $m = 0$, el ángulo es llano.



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una recta pasa por los puntos $A(-2, -1)$ y $B(3, 4)$. Determina su pendiente y el ángulo de inclinación.

Solución

Se sustituyen los valores de las abscisas y ordenadas en la fórmula: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{4-(-1)}{3-(-2)} = \frac{4+1}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$$

Luego, si $m = 1$ entonces, $\tan \theta = 1$, en consecuencia:

$$\theta = \arctan(1) = 45°$$

Por consiguiente, $m = 1$ y $\theta = 45°$.

2 Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P(1, 4)$ y $Q(7, -3)$.

Solución

Al sustituir los valores en $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se obtiene:

$$m = \frac{-3-4}{7-1} = -\frac{7}{6}$$

Como $m = -\frac{7}{6}$, entonces, el ángulo de inclinación es:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{7}{6}\right) + 180° = -49°\,23' + 180° = 130°\,37'$$

Por tanto, el valor de la pendiente es $-\frac{7}{6}$ y el del ángulo de inclinación 130° 37'.

3 Verifica si los puntos $A(-2, 4)$, $B(0, 1)$ y $C(4, -5)$ son colineales, aplica la fórmula de la pendiente.

Solución

Para verificar que tres puntos son colineales se debe de cumplir que:

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

Por consiguiente, se obtiene la pendiente de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$

$$\text{Pendiente del segmento } \overline{AB} \Rightarrow m_{AB} = \frac{1-4}{0-(-2)} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Pendiente del segmento } \overline{BC} \Rightarrow m_{BC} = \frac{-5-1}{4-0} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Pendiente del segmento } \overline{AC} \Rightarrow m_{AC} = \frac{-5-4}{4-(-2)} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$$

Se observa que las pendientes de los segmentos son iguales, en consecuencia los puntos son colineales.

4 La pendiente de una recta es -4 y pasa por el punto $A(1, 5)$. Si la abscisa del punto B es -2, ¿cuál es su ordenada?

Solución

Se sabe que x = abscisa, y = ordenada, por tanto, los datos son:

$$m = -4,\ A(1, 5) \text{ y } B(-2, y)$$

Se sustituyen los valores anteriores en la fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y se despeja y.

$$-4 = \frac{y-5}{-2-1} \quad \rightarrow \quad -4 = \frac{y-5}{-3} \quad \rightarrow \quad (-4)(-3) + 5 = y \quad \rightarrow \quad y = 17$$

Finalmente, el punto B tiene como coordenadas $(-2, 17)$.

5 El ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1, 5)$ y $P_2(x, 1)$ con el eje X es de 135°. ¿Cuál es el valor de la abscisa de P_2?

Solución

Se obtiene la pendiente de la recta:

$$m = \tan 135°$$
$$m = -1$$

Se sustituyen los valores de la pendiente, las abscisas y ordenadas en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad -1 = \frac{1-5}{x-(-1)}$$

$$-1 = \frac{-4}{x+1}$$

Se despeja x:

$$-1(x+1) = -4$$

$$x + 1 = \frac{-4}{-1}$$

$$x = 4 - 1$$

$$x = 3$$

Por consiguiente, el valor de la abscisa de P_2 es 3.

EJERCICIO 9

Determina la pendiente de los siguientes pares de puntos:

1. $A(-3, 5)$ y $B(2, 7)$
2. $A(-1, 2)$ y $B(4, -5)$
3. $A(8, -2)$ y $B(0, -1)$
4. $A(0, 4)$ y $B(-3, 0)$
5. $A(-5, 1)$ y $B(1, -3)$
6. $A(4, -2)$ y $B(7, -2)$
7. $A\left(5, \sqrt{3}\right)$ y $B(5, 1)$
8. $A\left(\frac{1}{2}, 7\right)$ y $B\left(3, -\frac{3}{2}\right)$
9. $A\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right)$ y $B\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$
10. $A\left(\frac{a}{b}, 1\right)$ y $B(a, b)$

Encuentra la medida de los ángulos de inclinación de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

11. $P(5, 7)$ y $Q(2, 4)$
12. $A(-1, 2)$ y $B(-2, 3)$
13. $A\left(\sqrt{3}, 3\right)$ y $B(0, 2)$
14. $R\left(3, \sqrt{2}\right)$ y $S(1, 0)$
15. $S(7, -1)$ y $T(7, 4)$
16. $Q(4, -5)$ y $R(-2, -5)$

Aplica el concepto de pendiente para saber cuáles de los siguientes puntos son colineales.

17. $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(-1, -2)$
18. $A(-2, 2)$, $B(1, 3)$ y $C(-5, 1)$
19. $A(-1, 4)$, $B(3, 0)$ y $C(0, 3)$
20. $A(5, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(2, 7)$
21. $A(0, 2)$, $B(-2, 4)$ y $C(2, 0)$
22. $A(3, -4)$, $B(2, -2)$ y $C(0, -1)$
23. $A(x, 2)$, $B(2x, 2 - y)$ y $C(0, 2 + y)$
24. $A(a, b)$, $B(2a + b, a)$ y $C(-b, 2b - a)$
25. La pendiente de una recta es 3. Si la recta pasa por los puntos $A(2, -1)$ y el punto B, cuya ordenada es -5, ¿cuál es el valor de su abscisa?
26. Una recta tiene un ángulo de inclinación de 45° y pasa por los puntos A y B. Si el punto A tiene coordenadas $(3, -2)$ y la ordenada de B es -1, encuentra su abscisa.
27. El ángulo de inclinación de una recta es de 60° y pasa por los puntos $A\left(2, 3\sqrt{3}\right)$ y B, cuya abscisa es $-\sqrt{3}$, ¿cuál es la ordenada de B?
28. Una recta forma un ángulo de 30° con el eje X y pasa por los puntos $A\left(3\sqrt{3}, -1\right)$ y $B\left(-2\sqrt{3}, y\right)$. Calcula el valor de la ordenada de B.

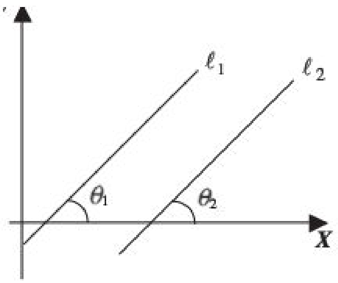
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Condición de paralelismo

Dos rectas son paralelas si sus ángulos de inclinación son iguales y, por tanto, sus pendientes también.

$$m_1 = m_2$$

Se denota como $\ell_1 \parallel \ell_2$ para indicar que ℓ_1 es paralela a ℓ_2



Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, entonces

$$\theta_1 = \theta_2$$

Por ser correspondientes.

Aplicando la función tangente

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$

Finalmente, se determina que:

$$m_1 = m_2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que la recta ℓ_1, que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(5, 3)$ es paralela a la recta ℓ_2 que pasa por los puntos $C(8, 0)$ y $D(4, -2)$.

Solución

Se obtienen las pendientes de ambas rectas:

$$m_{AB} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\ ;\ m_{CD} = \frac{-2-0}{4-8} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Como $m_{AB} = m_{CD}$, entonces se demuestra que $\ell_1 \parallel \ell_2$.

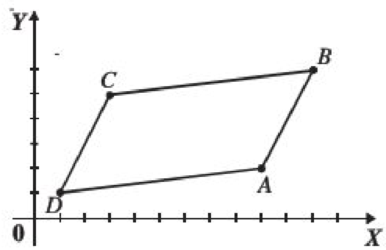
2 Demuestra que los puntos $A(9, 2)$, $B(11, 6)$, $C(3, 5)$ y $D(1, 1)$, son vértices de un paralelogramo.

Solución

Se determinan las pendientes de los lados:

$$m_{AB} = \frac{6-2}{11-9} = \frac{4}{2} = 2\ ;\ m_{BC} = \frac{5-6}{3-11} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

$$m_{CD} = \frac{1-5}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2\ ;\ m_{AD} = \frac{1-2}{1-9} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$



Se observa que $m_{AB} = m_{CD}$ y $m_{BC} = m_{AD}$, por tanto, se deduce que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

Como los lados opuestos son paralelos, entonces la figura es un paralelogramo.

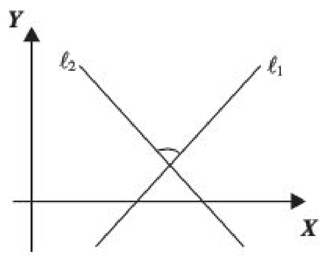
Condición de perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1.

Si $\ell_1 \perp \ell_2$ (ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2), es decir, las rectas forman un ángulo de 90°, entonces:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Por tanto, $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ o $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que la recta ℓ_1, que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(7, 3)$, es perpendicular a la recta ℓ_2, que pasa por los puntos $C(-1,-2)$ y $D(1, 3)$.

Solución

Se obtienen las pendientes de las rectas.

Pendiente de la recta ℓ_1:

$$m_{AB}=\frac{3-5}{7-2}=-\frac{2}{5}$$

Pendiente de la recta ℓ_2:

$$m_{CD}=\frac{3-(-2)}{1-(-1)}=\frac{3+2}{1+1}=\frac{5}{2}$$

Ahora se aplica la condición:

$$\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right)=-1$$

Se demuestra que la recta ℓ_1 es perpendicular a la recta ℓ_2.

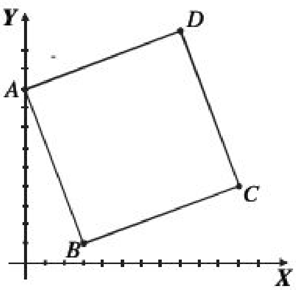
2 Demuestra que los lados adyacentes del cuadrilátero, cuyos vértices son los puntos $A(0, 9)$, $B(3, 1)$, $C(11, 4)$ y $D(8, 12)$, son perpendiculares entre sí.

Solución

Se determinan las pendientes de los lados:

$$m_{AB}=\frac{1-9}{3-0}=\frac{-8}{3}=-\frac{8}{3}\qquad m_{BC}=\frac{4-1}{11-3}=\frac{3}{8}\qquad m_{CD}=\frac{12-4}{8-11}=-\frac{8}{3}\qquad m_{AD}=\frac{12-9}{8-0}=\frac{3}{8}$$

En la figura:



Se observa que los lados adyacentes son:

$$\overline{AB}\text{ y }\overline{BC};\ \overline{BC}\text{ y }\overline{CD};\ \overline{CD}\text{ y }\overline{AD};\ \overline{AD}\text{ y }\overline{AB}$$

Ahora se multiplican las pendientes de los lados adyacentes para demostrar que son perpendiculares:

$$m_{AB}\cdot m_{BC}=\left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right)=-1\qquad m_{CD}\cdot m_{AD}=\left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right)=-1$$

$$m_{BC}\cdot m_{CD}=\left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)=-1\qquad m_{AD}\cdot m_{AB}=\left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)=-1$$

De aquí se determina que:

$$\overline{AB}\perp\overline{BC},\ \overline{BC}\perp\overline{CD},\ \overline{CD}\perp\overline{AD}\text{ y }\overline{AD}\perp\overline{AB}$$

Entonces, se demuestra que los lados adyacentes son perpendiculares entre sí.

EJERCICIO 10

1. Averigua si la recta ℓ_1 que pasa por los puntos $A(3, -1)$ y $B(-6, 5)$ es paralela o perpendicular a la recta ℓ_2 que pasa por los puntos $C(0, 2)$ y $D(-2, -1)$.
2. Comprueba por medio de pendientes que los puntos $A(1, 3)$, $B(2, 6)$, $C(7, 8)$ y $D(6, 5)$, son vértices de un paralelogramo.
3. Demuestra que la recta que pasa por los puntos $A(-2, 1)$ y $B(1, -4)$, es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(8, -7)$ y $D(5, -2)$.
4. Comprueba por medio de pendientes que los puntos $A(3, 1)$, $B(7, 3)$ y $C(1, 5)$, son los vértices de un triángulo rectángulo.
5. Demuestra que los cuatro puntos $A(-3, 1)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 4)$ y $D(1, 0)$, son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares.
6. Una recta ℓ_1 pasa por los puntos $(-2, -1)$ y $(2, 3)$, y otra recta ℓ_2 pasa por el punto $(-1, 2)$ y el punto A, cuya ordenada es -4. Determina la abscisa del punto A cuando ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2.
7. Demuestra por medio de pendientes que los puntos $A(-2, -1)$, $B(-4, 3)$, $C(3, 5)$ y $D(5, 1)$, son vértices de un paralelogramo.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ángulo entre dos rectas

Para encontrar el ángulo θ formado por las rectas ℓ_1 y ℓ_2 se utiliza la fórmula:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Por geometría: $\beta = \alpha + \theta$ y $\theta = \beta - \alpha$

Aplicando tangente: $\tan\theta = \tan(\beta - \alpha)$

$$\tan\theta = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta \cdot \tan\alpha}$$

Pero $\tan\beta = m_2$ y $\tan\alpha = m_1$

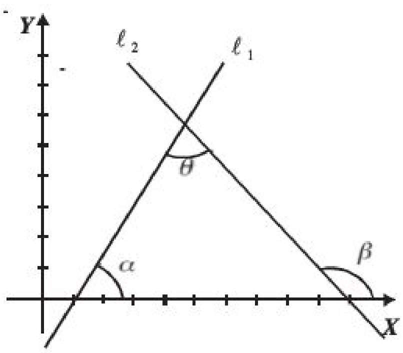
Entonces, $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Donde:

θ: Ángulo entre las rectas

m_1: pendiente inicial de la recta ℓ_1

m_2: pendiente final de la recta ℓ_2



Se debe de tomar en cuenta que los ángulos se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj; en la recta que inicie el ángulo, será la pendiente inicial, y en la recta que termine, la pendiente final.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la medida del ángulo obtuso que forman las rectas, cuyas pendientes son 2 y – 3.

Solución

En este caso no importa cuál sea la pendiente inicial o final, se escoge $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$, se sustituyen en la fórmula y se obtiene:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3-2}{1+(-3)(2)} = \frac{-5}{1-6} = \frac{-5}{-5} = 1$$

De aquí, $\tan\theta = 1$ entonces: $\theta = \arctan(1) = 45°$.

El ángulo obtuso ϕ se determina al calcular el suplemento de θ

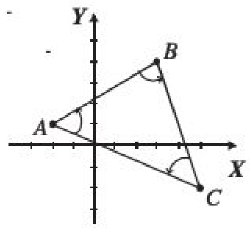
$$45° + \phi = 180°$$
$$\phi = 180° - 45°$$
$$\phi = 135°$$

En consecuencia, el ángulo que se busca es igual a 135°.

2 ¿Cuál es la medida de los ángulos interiores del triángulo determinado por los puntos $A(-2, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(5, -2)$?

Solución

Se grafica el triángulo en el plano cartesiano y se ubican para cada ángulo las pendientes inicial y la final.



Para el ángulo A: $m_1 = m_{AC}$; $m_2 = m_{AB}$

Para el ángulo B: $m_1 = m_{AB}$; $m_2 = m_{BC}$

Para el ángulo C: $m_1 = m_{BC}$; $m_2 = m_{AC}$

Se obtienen las pendientes de los lados del triángulo:

$$m_{AB} = \frac{4-1}{3-(-2)} = \frac{3}{5} \qquad m_{BC} = \frac{-2-4}{5-3} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad m_{AC} = \frac{-2-1}{5-(-2)} = -\frac{3}{7}$$

Se aplica la fórmula para cada uno de los ángulos, tomando como referencia las pendientes inicial y final.

$$\tan A = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{7}\right)}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{7}}{1 - \frac{9}{35}} = \frac{\frac{21+15}{35}}{\frac{35-9}{35}} = \frac{\frac{36}{35}}{\frac{26}{35}} = \frac{(35)(36)}{(35)(26)} = \frac{36}{26} = \frac{18}{13}$$

$$\tan B = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 - \frac{3}{5}}{1 + (-3)\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{-3 - \frac{3}{5}}{1 - \frac{9}{5}} = \frac{\frac{-15-3}{5}}{\frac{5-9}{5}} = \frac{-\frac{18}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{(5)(-18)}{(5)(-4)} = \frac{-18}{-4} = \frac{9}{2}$$

$$\tan C = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{3}{7} - (-3)}{1 + \left(-\frac{3}{7}\right)(-3)} = \frac{-\frac{3}{7} + 3}{1 + \frac{9}{7}} = \frac{\frac{-3+21}{7}}{\frac{7+9}{7}} = \frac{\frac{18}{7}}{\frac{16}{7}} = \frac{(7)(18)}{(7)(16)} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

Finalmente, los ángulos son:

$$A = \arctan\left(\frac{18}{13}\right) = 54°\ 9'\ 44'' \qquad B = \arctan\left(\frac{9}{2}\right) = 77°\ 28'16''$$

$$C = \arctan\left(\frac{9}{8}\right) = 48°\ 21'\ 59''$$

Para comprobar los resultados se suman los ángulos interiores y el resultado debe ser 180°

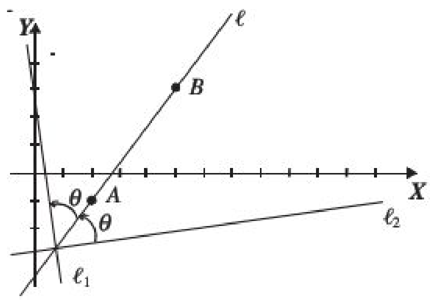
$$A + B + C = 180° \qquad 54°\ 9'\ 44'' + 77°\ 28'\ 16'' + 48°\ 21'\ 59'' = 180°$$
$$180° = 180°$$

3 ¿Cuál es la pendiente de la recta que forma un ángulo de 45°, con la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(2, -1)$ y $B(5, 3)$?

Solución

Existen dos rectas que forman un ángulo de 45° con la recta ℓ, por consiguiente, se tienen 2 casos:

1. La pendiente ℓ es inicial
2. La pendiente ℓ es final



Se obtiene la pendiente ℓ que pasa por los puntos A y B:

$$m_{AB} = \frac{3-(-1)}{5-2} = \frac{4}{3}$$

Cuando la pendiente ℓ es inicial, se debe de encontrar m_2, entonces:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \rightarrow \quad \tan 45° = \frac{m_2 - \frac{4}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)m_2} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\frac{3m_2 - 4}{3}}{\frac{3 + 4m_2}{3}}$$

$$1 = \frac{3m_2 - 4}{3 + 4m_2}$$

$$3 + 4m_2 = 3m_2 - 4$$

$$4m_2 - 3m_2 = -4 - 3$$

$$m_2 = -7$$

Cuando la pendiente ℓ es final, se debe de encontrar m_1, por consiguiente:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \rightarrow \quad \tan 45° = \frac{\frac{4}{3} - m_1}{1 + m_1\left(\frac{4}{3}\right)} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\frac{4 - 3m_1}{3}}{\frac{3 + 4m_1}{3}}$$

$$1 = \frac{4 - 3m_1}{3 + 4m_1}$$

$$3 + 4m_1 = 4 - 3m_1$$

$$4m_1 + 3m_1 = 4 - 3$$

$$m_1 = \frac{1}{7}$$

Finalmente, las pendientes son: -7 y $\frac{1}{7}$.

EJERCICIO 11

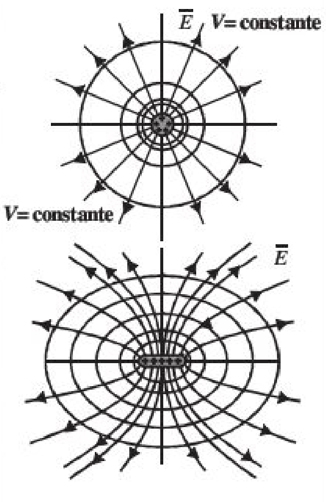
1. Determina la medida del ángulo agudo que forman las rectas con pendientes $\frac{1}{3}$ y $-\frac{4}{5}$.
2. ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-2, 2)$, $B(1, -1)$ y $C(0, -4)$?
3. Determina los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-4, 1)$ $B(2, 3)$ y $C(1, -4)$.
4. Demuestra que los puntos $A(-2, 1)$, $B(3, 5)$ y $C(7, 0)$, son los vértices de un triángulo isósceles y encuentra la medida de sus ángulos interiores.
5. Comprueba que los puntos $A(3, 1)$, $B(7, 3)$ y $C(5, 2)$, son vértices de un triángulo rectángulo y encuentra la medida de sus ángulos agudos.
6. Encuentra la medida del ángulo obtuso del paralelogramo cuyos vértices son los puntos $A(-4, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(5, 5)$ y $D(3, 2)$.
7. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos interiores del paralelogramo, cuyos vértices son los puntos $A(1, 3)$, $B(2, 6)$, $C(7, 8)$ y $D(6, 5)$?
8. Comprueba que los puntos $A(-2, -1)$, $B(-4, 3)$, $C(3, 5)$ y $D(5, 1)$ son los vértices de un paralelogramo y determina la medida del ángulo obtuso que forman sus diagonales.
9. Al cortarse dos rectas forman un ángulo de 150°, si la recta final tiene pendiente $\frac{3}{5\sqrt{3}}$, calcula la pendiente de la recta inicial.
10. Al cortarse dos rectas forman un ángulo de 45°, la recta inicial pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(-4, 5)$ y la recta final pasa por el punto $C(3, 2)$ y por el punto D, cuya ordenada es 3. Determina el valor de la abscisa de D.
11. ¿Cuál es la pendiente de la recta que forma un ángulo de 135°, con la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(-3, 5)$ y $B(0, 1)$?
12. Las pendientes de dos rectas son 1 y $-2-\sqrt{3}$, respectivamente. Encuentra las pendientes de las bisectrices de los ángulos que forman (existen dos soluciones).

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 21

Lugar geométrico

Superficies EQUIPOTENCIALES



Superficies equipotenciales

Las superficies equipotenciales es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran al mismo potencial. Cumplen la condición de encontrarse en un plano perpendicular al campo eléctrico.

El trabajo desarrollado para mover una partícula de un punto *A* a otro punto *B* a lo largo de una superficie equipotencial es nulo, ya que:

$$V_A - V_B = \frac{W_{AB}}{q_o}$$

A lo largo de una superficie equipotencial $V_A = V_B$ entonces $W_{AB} = 0$

Problemas fundamentales de la geometría analítica

I. Dada una ecuación, representar el lugar geométrico que describe (discusión de un lugar geométrico).
II. Dadas las condiciones que deben cumplir los puntos que forman un lugar geométrico, encontrar su ecuación.

Primer problema (discusión de un lugar geométrico)

Dada la ecuación de un lugar geométrico se determinan las intersecciones y su simetría con los ejes, la extensión, sus asíntotas y, por último, la gráfica.

Intersecciones con los ejes

a) Con el eje X se sustituye $y = 0$ y se resuelve la ecuación para x.
b) Con el eje Y se sustituye $x = 0$ y se resuelve la ecuación para y.

Simetría con los ejes y el origen

a) Simetría respecto al eje X.
Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable y es reemplazada por $-y$, entonces la curva es simétrica respecto al eje X.
b) Simetría respecto al eje Y.
Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable x es reemplazada por $-x$, entonces la curva es simétrica respecto al eje Y.
c) Simetría respecto al origen.
Si la ecuación de la curva no se altera al sustituir x por $-x$ y y por $-y$, entonces la curva es simétrica respecto al origen.

Extensión de la curva

Determina los intervalos de variación para los cuales x y y están definidas.

Asíntotas

Son las rectas tales que si un punto se aleja del origen, la distancia de este punto a dicha recta va decreciendo, de tal forma que tiende a cero.

Gráfica

Conjunto de puntos del plano que satisfacen las condiciones establecidas por una ecuación.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Grafica la curva, cuya ecuación es $xy - 2x - 2y + 2 = 0$.

Solución

Intersección con los ejes coordenados

a) Se sustituye $y = 0$ y se despeja x:

$$\begin{aligned} xy - 2x - 2y + 2 &= 0 \\ x(0) - 2x - 2(0) + 2 &= 0 \\ -2x + 2 &= 0 \\ -2x &= -2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

El punto de intersección con el eje X es $(1, 0)$.

b) Se sustituye $x = 0$ y se despeja y:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (0)y - 2(0) - 2y + 2 = 0$$
$$-2y + 2 = 0$$
$$-2y = -2$$
$$y = 1$$

El punto de intersección con el eje Y es $(0, 1)$.

Simetría

a) Simetría respecto al eje X.

Se sustituye y por $-y$ en la ecuación:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x(-y) - 2x - 2(-y) + 2 = 0$$
$$-xy - 2x + 2y + 2 = 0$$

La ecuación se altera, por tanto, no hay simetría respecto al eje X.

b) Simetría respecto al eje Y.

Se sustituye x por $-x$ en la ecuación:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (-x)(y) - 2(-x) - 2y + 2 = 0$$
$$-xy + 2x - 2y + 2 = 0$$

La ecuación se altera, por consiguiente, no hay simetría respecto al eje Y.

c) Simetría respecto al origen.

Se sustituye x por $-x$, y por $-y$.

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (-x)(-y) - 2(-x) - 2(-y) + 2 = 0$$
$$xy + 2x + 2y + 2 = 0$$

La ecuación se altera, por consiguiente, no hay simetría respecto al origen.

Extensión de la curva

a) Extensión respecto al eje X.

Se despeja la variable y:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad xy - 2y = 2x - 2$$
$$y(x - 2) = 2x - 2$$
$$y = \frac{2x - 2}{x - 2}$$

Para $x = 2$, la variable y no está definida, por consiguiente, la extensión en X es:

$$\{x \in R \mid x \neq 2\} \text{ también se puede escribir } \{x \in R \mid -\infty < x < 2\} \cup \{x \in R \mid 2 < x < \infty\}$$

b) Extensión respecto al eje Y.

Se despeja la variable x:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad xy - 2x = 2y - 2$$
$$x(y - 2) = 2y - 2$$
$$x = \frac{2y - 2}{y - 2}$$

Para $y = 2$, la variable x no está definida, en consecuencia, la extensión en y es:

$$\{y \in R \mid y \neq 2\} \text{ o } \{y \in R \mid -\infty < y < 2\} \cup \{y \in R \mid 2 < y < \infty\}$$

Asíntotas

a) Asíntotas horizontales.

Se obtienen al despejar la variable x y resolver la ecuación que resulta al igualar con cero el denominador:

$$xy-2x-2y+2=0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} xy-2x &= 2y-2 \\ x(y-2) &= 2y-2 \\ x &= \frac{2y-2}{y-2} \end{aligned}$$

$y-2=0$, por tanto, la asíntota horizontal es $y=2$.

b) Asíntotas verticales.

Se obtienen al despejar la variable y y resolver la ecuación que resulta al igualar con cero el denominador, entonces:

$$xy-2x-2y+2=0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} xy-2y &= 2x-2 \\ y(x-2) &= 2x-2 \\ y &= \frac{2x-2}{x-2} \end{aligned}$$

$x-2=0$, por consiguiente, la asíntota vertical es $x=2$.

Gráfica

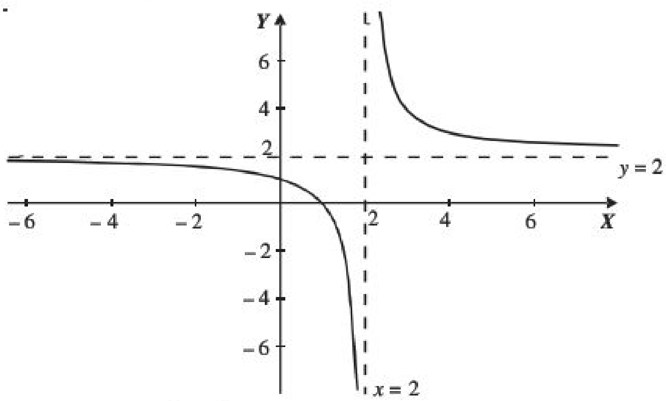
Se tabula la variable y en función de la variable x, donde x toma valores en el intervalo $\{x \in R \mid -\infty < x < 2\} \cup \{x \in R \mid 2 < x < \infty\}$

$$y=\frac{2x-2}{x-2}$$

Tabulación:

x	–	3	2	10	1	3	4	5	6	7
y	1.6	1.5	1.3	1	0	4	3	2.6	2.5	2.4

Se grafican las asíntotas $y=2$ y $x=2$, posteriormente los puntos:



2 Construye la curva, cuya ecuación es $4x^2+9y^2-36=0$.

Solución

Intersección con los ejes coordenados

a) Se sustituye $y=0$ y se despeja x:

$$4x^2+9y^2-36=0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 4x^2+9(0)^2-36 &= 0 \\ 4x^2 &= 36 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm\sqrt{9} \\ x &= \pm 3 \\ x=-3,\ x &= 3 \end{aligned}$$

Los puntos de intersección con el eje X son: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

b) Se sustituye $x = 0$ y se despeja y:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4(0)^2 + 9y^2 - 36 = 0$$
$$9y^2 = 36$$
$$y^2 = 4$$
$$y = \pm\sqrt{4}$$
$$y = \pm 2$$
$$y = -2,\ y = 2$$

Los puntos de intersección con el eje Y son: $(0, -2)$ y $(0, 2)$.

Simetría

a) Simetría respecto al eje X.

Se sustituye y por $-y$ en la ecuación:

$$4x^2 + 9(-y)^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

La ecuación no se altera, por tanto, sí es simétrica respecto al eje X.

b) Simetría respecto al eje Y.

Se sustituye x por $-x$ en la ecuación:

$$4(-x)^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

La ecuación no se altera, por consiguiente, es simétrica respecto al eje Y.

c) Simetría respecto al origen.

Se sustituye x por $-x$, y por $-y$.

$$4(-x)^2 + 9(-y)^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

La ecuación no se altera, por tanto, es simétrica respecto al origen.

Extensión de la curva

a) Extensión respecto al eje X.

Se despeja la variable y:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 9y^2 = 36 - 4x^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{36 - 4x^2}{9} \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{4(9 - x^2)}{9}}$$
$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

y está definida cuando $9 - x^2 \geq 0$, resolviendo la desigualdad, se obtiene:

$$\{x \in R \mid -3 \leq x \leq 3\} \text{ o } x \in [-3, 3]$$

Es decir, la curva se extiende en el eje x desde -3 a 3.

b) Extensión respecto al eje Y.

Se despeja la variable x:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 = 36 - 9y^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{36 - 9y^2}{4} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{9(4 - y^2)}{4}}$$
$$x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}$$

x está definida cuando $4 - y^2 \geq 0$, resolviendo la desigualdad, se obtiene:

$$\{y \in R \mid -2 \leq y \leq 2\} \text{ o } y \in [-2, 2]$$

Es decir, la curva se extiende en el eje y desde -2 a 2.

Asíntotas

a) Asíntotas horizontales.

Al despejar y se obtiene $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$, la variable x no queda en el denominador por tanto no hay asíntotas horizontales.

b) Asíntotas verticales.

Al despejar x se obtiene $x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{9-y^2}$, la variable y no queda en el denominador por tanto no hay asíntotas verticales.

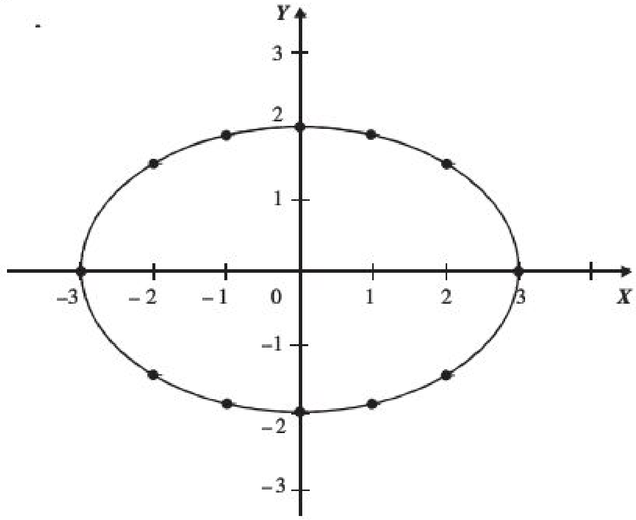
Gráfica

Se hace una tabulación en la ecuación obtenida al despejar a y, para valores de x que estén en el intervalo $\{x \in R \mid -3 \leq x \leq 3\}$

$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

Tabulación:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	± 1.49	± 1.88	± 2	± 1.88	± 1.49	0



EJERCICIO 12

Analiza las siguientes ecuaciones y encuentra las intersecciones con los ejes, simetría, extensión, asíntotas y traza la gráfica:

1. $xy - 3x - 6 = 0$
2. $xy + 2y + 4 = 0$
3. $xy - 5x + 2y = 0$
4. $xy + 3y - 4x = 0$
5. $2xy - 3y + 6 = 0$
6. $x^2 - 8y = 0$
7. $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$
8. $x^2 + 4x + 4y + 20 = 0$
9. $x^2 + xy - y^2 = 0$
10. $9x^2 - 16y^2 = 144$
11. $y^2 - 8x - 2y + 17 = 0$
12. $x^2 + y^2 - 6x = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Segundo problema (dadas las condiciones del lugar geométrico, encontrar su ecuación)

Para determinar la ecuación de un lugar geométrico se necesitan las condiciones que deben cumplir los puntos que lo forman o la figura misma. Analicemos a través de los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos en el plano, cuya distancia al punto (3, 2) es siempre igual a 5.

Solución

La distancia de los puntos (x, y) del plano al punto (3, 2) es 5, al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad \rightarrow \quad 5=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$$

Se obtiene el cuadrado de ambos miembros, se desarrollan los binomios y se simplifica:

$$(5)^2=\left(\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 25=(x-3)^2+(y-2)^2$$

$$25=x^2-6x+9+y^2-4y+4$$

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4-25=0$$

$$x^2+y^2-6x-4y-12=0$$

Por consiguiente la ecuación del lugar geométrico es: $x^2+y^2-6x-4y-12=0$.

2 Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los puntos $A(1,-2)$ y $B(5, 4)$.

Solución

La condición es que la distancia del punto $P(x, y)$ a los puntos A y B sea la misma, es decir:

$$\overline{AP}=\overline{BP}$$

Al usar la fórmula de la distancia entre dos puntos $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, se obtiene:

$$\overline{AP}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} \qquad \overline{BP}=\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}$$

Se sustituye en la condición:

$$\overline{AP}=\overline{BP}$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros y simplificar la expresión, se obtiene:

$$\left(\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}\right)^2$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=(x-5)^2+(y-4)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2-10x+25+y^2-8y+16$$

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4-x^2+10x-25-y^2+8y-16=0$$

$$(8x+12y-36=0)\div 4$$

$$2x+3y-9=0$$

3 Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de las distancias a los puntos $A(2, 3)$ y $B(6, 7)$, es igual a 100.

Solución

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, la condición que se da es:

$$\left(\overline{PA}\right)^2+\left(\overline{PB}\right)^2=100$$

Al utilizar la fórmula de distancia entre dos puntos $d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$ se obtiene:

$$\overline{PA}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} \qquad \overline{PB}=\sqrt{(x-6)^2+(y-7)^2}$$

Ahora bien, al sustituir en la condición:

$$\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-6)^2+(y-7)^2}\right)^2=100$$
$$(x-2)^2+(y-3)^2+(x-6)^2+(y-7)^2=100$$

En tanto que, al desarrollar los binomios y simplificar, se obtiene:

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9+x^2-12x+36+y^2-14y+49-100=0$$
$$2x^2+2y^2-16x-20y-2=0$$
$$(2x^2+2y^2-16x-20y-2=0)\div(2)$$
$$x^2+y^2-8x-10y-1=0$$

Por tanto la ecuación del lugar geométrico es: $x^2+y^2-8x-10y-1=0$.

4 Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$, es igual a 10.

Solución

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, que satisface la condición:

$$\overline{AP}+\overline{PB}=10$$

Al utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos $d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$, para determinar la distancia a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$, se obtiene que:

$$\overline{AP}=\sqrt{x^2+(y-3)^2} \qquad \overline{PB}=\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

Se sustituye en la condición:

$$\overline{AP}+\overline{PB}=10$$
$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(y+3)^2}=10$$

Se desarrolla y simplifica:

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=10-\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$
$$\left(\sqrt{x^2+(y-3)^2}\right)^2=\left(10-\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right)^2$$
$$x^2+(y-3)^2=100-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}+\left(\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right)^2$$
$$x^2+(y-3)^2=100-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}+x^2+(y+3)^2$$
$$x^2+y^2-6y+9=100-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}+x^2+y^2+6y+9$$

$$x^2+y^2-6y+9-x^2-y^2-6y-9-100=-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

$$-12y-100=-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

$$\left[-12y-100=-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right]\div(-4)$$

$$3y+25=5\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

$$(3y+25)^2=\left[5\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right]^2$$

$$9y^2+150y+625=25[(x^2+(y+3)^2]$$

$$9y^2+150y+625=25x^2+25y^2+150y+225$$

$$25x^2+25y^2+150y+225-9y^2-150y-625=0$$

$$25x^2+16y^2-400=0$$

Por tanto, la ecuación del lugar geométrico es: $25x^2+16y^2-400=0$

EJERCICIO 13

Resuelve:

1. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que la diferencia de la ordenada con la abscisa es siempre igual a 2.
2. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que el producto de la abscisa y la ordenada sea igual a la unidad.
3. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que su ordenada es igual a la mitad de su abscisa.
4. Determina la ecuación del lugar geométrico del punto que equidista del origen, cinco unidades.
5. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos $A(-3, 4)$ y $B(4, 1)$.
6. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a cinco unidades del punto $(4, -3)$.
7. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que equidista del eje de las abscisas y del punto $(0, -5)$.
8. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos $(-2, 4)$ y $(-6, 2)$.
9. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, tales que su distancia al punto $(-3, -2)$ es igual a 8.
10. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de las distancias a los puntos $A(-1, 3)$ y $B(7, 3)$, es igual a 50.
11. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se mueve de tal forma que la suma de las distancias a los puntos fijos $A(-4, 3)$ y $B(2, -6)$ es siempre igual a 15.
12. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los puntos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$, sea igual a 10.
13. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos $(0, 2)$ y $(0, -2)$, es siempre igual a 3 (dos soluciones).
14. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$, es igual a 8.
15. Encuentra la ecuación de los puntos del plano, tales que la diferencia de sus distancias a los puntos $(-2, 5)$ y $(6, 5)$, sea siempre igual a 6.

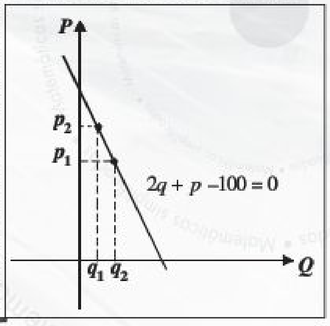
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 22

LÍNEA RECTA

Aplicaciones de las rectas

EN MICROECONOMÍA



Gráfica de la curva de demanda

Curvas de demanda lineal

Las ecuaciones lineales proporcionan representaciones razonablemente precisas de la demanda en un intervalo limitado.

En general, las ecuaciones de demanda lineales se utilizan para mayor simplicidad y claridad al ilustrar cierto tipo de análisis.

La ecuación de la recta indica situaciones que se presentan al realizar un análisis:

Por ejemplo:

Cuando el precio es de 80 unidades monetarias (*u.m.*) se venden 10 relojes y se venden 20 cuando el precio es de 60 *u.m.* ¿Cuál es la ecuación de la demanda?

Datos	*Fórmula*
$q_1 = 10,\ p_1 = 80$	$p - p_1 = \dfrac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1)$
$q_2 = 20,\ p_2 = 60$	

Al sustituir los datos se obtiene la ecuación:

$$2q + p - 100 = 0$$

Este ejemplo indica que mientras la cantidad de demanda aumenta el precio disminuye.

Definición

La línea recta es el lugar geométrico de los puntos del plano, de los cuales al tomar dos cualesquiera, el valor de la pendiente m siempre es constante.

Ecuaciones de la recta

Para determinar la ecuación de una recta en función de las condiciones dadas, se emplean las siguientes ecuaciones, según corresponda.

Ecuación general

Es aquella que se expresa de la siguiente manera:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde: A, B y C son constantes.

Ecuación punto – pendiente

Dado el punto $P_1(x_1, y_1)$ de la recta de pendiente m, su ecuación es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de la recta, su ecuación es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

EJEMPLOS

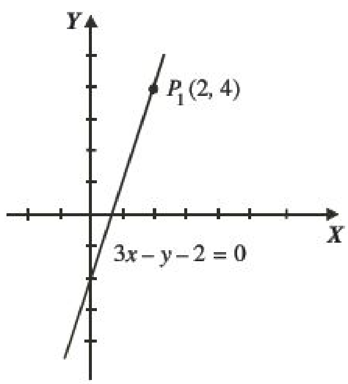
Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(2, 4)$ y tiene pendiente 3?

Solución

Se sustituyen los valores de $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ y $m = 3$ en la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = 3(x - 2)$$
$$y - 4 = 3x - 6$$
$$-3x + y - 4 + 6 = 0$$
$$-3x + y + 2 = 0$$
$$3x - y - 2 = 0$$



Por consiguiente, la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 4) y tiene pendiente 3, es: $3x - y - 2 = 0$.

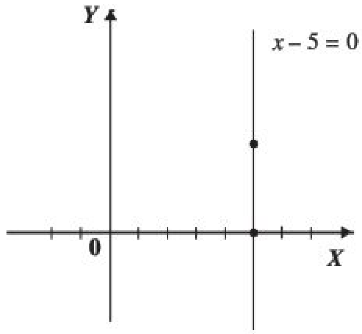
2 ¿Cuál es la ecuación de la recta que es perpendicular al eje X y que se encuentra a 5 unidades a la derecha del eje vertical?

Solución

Las rectas perpendiculares al eje X tienen ecuación de la forma $x = x_1$, donde x_1 es la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje horizontal.

La recta se encuentra a 5 unidades a la derecha del eje vertical, entonces sus puntos tienen coordenadas $(5, y_1)$, y al sustituir el valor de la abscisa en la ecuación se obtiene:

$$x = 5$$
$$x - 5 = 0$$



3 Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1, 2)$ y $P_2(2, -5)$

Solución

Los valores de las abscisas y ordenadas se sustituyen en la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{-5 - 2}{2 - (-1)}(x - (-1))$$

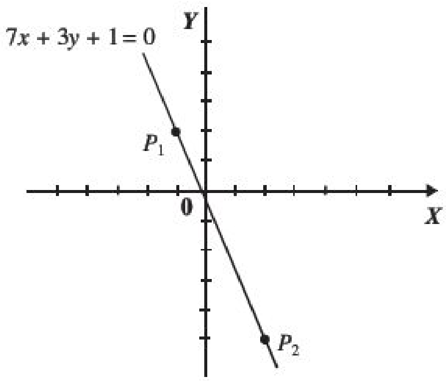
$$y - 2 = -\frac{7}{3}(x + 1)$$

$$3(y - 2) = -7(x + 1)$$

$$3y - 6 = -7x - 7$$

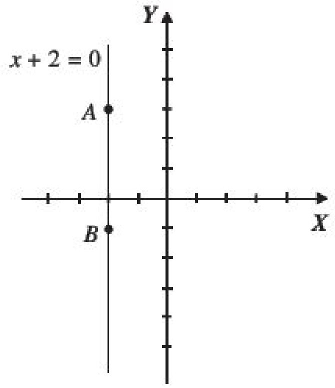
$$7x + 3y - 6 + 7 = 0$$

$$7x + 3y + 1 = 0$$



En consecuencia, la ecuación de la recta es: $7x + 3y + 1 = 0$.

4 Una recta pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(-2, -1)$. Encuentra su ecuación.



Solución

Al sustituir en la fórmula $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, se determina que:

$$y-3=\frac{-1-3}{-2+2}(x-(-2))$$

$$y-3=-\frac{4}{0}\ (x+2)$$

La pendiente de la recta es de la forma $\frac{c}{0}$ (no está definido), por consiguiente, es perpendicular al eje X y su ecuación es de la forma:

$$x=x_1$$

Por tanto, su ecuación es:

$$x=-2$$

$$x+2=0$$

Es decir, la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es: $x+2=0$.

5 Determina los vértices del triángulo, cuyos lados están dados por las ecuaciones de las rectas:

$$3x+7y-13=0;\ x-y-1=0;\ 7x+3y+23=0$$

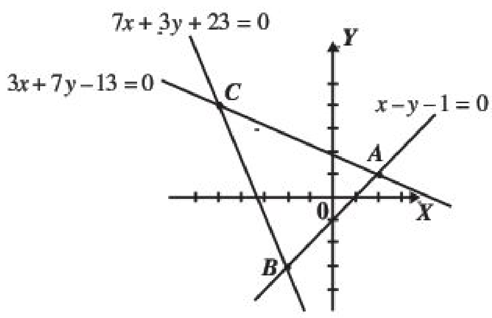
Solución

Se combinan las rectas para formar tres sistemas de ecuaciones, los cuales se resuelven por cualquiera de los métodos conocidos:

Sistema de ecuaciones para el vértice A:

$$3x+7y-13=0$$
$$x-y-1=0$$

Punto de intersección: $A(2, 1)$



Sistema de ecuaciones para el vértice B:

$$x-y-1=0$$
$$7x+3y+23=0$$

Punto de intersección: $B(-2, -3)$

Sistema de ecuaciones para el vértice C:

$$3x+7y-13=0$$
$$7x+3y+23=0$$

Punto de intersección: $C(-5, 4)$

6 Si se compran 20 pantalones el precio unitario de la prenda es de \$300, pero si se compran 50, entonces el costo de cada pantalón es de \$280, encuentra la ecuación de la demanda.

Solución

Considerando:

x = número de pantalones $\qquad$ y = precio por pantalón

Se forman los siguientes pares coordenados:

$$(20, 300) \text{ y } (50, 280)$$

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y se obtiene:

$$y-300=\frac{280-300}{50-20}(x-20) \quad \rightarrow \quad y-300=-\frac{20}{30}(x-20)$$

$$y-300=-\frac{2}{3}(x-20)$$

Al transformar esta última ecuación a su forma general, obtiene la ecuación de la demanda:

$$2x+3y-940=0$$

7 Un resorte se deforma 2 centímetros bajo la acción de una fuerza de 15 newtons, si la fuerza se incrementa a 25 newtons, entonces se deforma $3\frac{1}{3}$ de centímetro, ¿cuál es la ecuación que representa la deformación que sufre el resorte en función de la fuerza?

Solución

Considere:

x = fuerza que actúa sobre el resorte $\qquad$ y = deformación

Se forma entonces la siguiente pareja de puntos:

$$5(1\ ,\ 2) \text{ y } \left(25,\ 3\frac{1}{3}\right)$$

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y al convertir a su forma general se obtiene:

$$y-2=\frac{3\frac{1}{3}-2}{25-15}(x-15) \quad \rightarrow \quad y-2=\frac{\frac{10}{3}-2}{10}(x-15) \quad \rightarrow \quad y-2=\frac{\frac{4}{3}}{10}(x-15)$$

$$y-2=\frac{2}{15}(x-15)$$

$$15(y-2)=2(x-15)$$

$$15y-30=2x-30$$

$$0=2x-15y$$

Por consiguiente, la ecuación general de la deformación del resorte es: $2x-15y=0$.

EJERCICIO 14

Encuentra las ecuaciones generales de las rectas que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Pasa por $(-3, 4)$ y $m = -\frac{2}{5}$
2. Pasa por $(0, 3)$ y $m = 2$
3. Pasa por $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $m = 0$
4. Pasa por $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y $m = -1$
5. Pasa por $(-2, 1)$ y $(3, 4)$
6. Pasa por $(0, 2)$ y $(-3, -2)$
7. Pasa por $(3, -1)$ y $(3, 4)$
8. Pasa por $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$
9. Pasa por $(0, 1)$ y $\left(\frac{4}{3}, -1\right)$
10. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por $A(-1, 3)$ y tiene pendiente $-\frac{3}{5}$.
11. Una recta pasa por $(-1, 4)$ y desciende tres unidades por cada dos unidades que incrementa x. ¿Cuál es su ecuación general?
12. Obtén la ecuación general de la recta, cuya intersección con el eje X es 3 y su inclinación es de 120°.
13. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(6, -2)$ y tiene un ángulo de inclinación de 135°.
14. Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular al eje X y está a tres unidades a la derecha del eje vertical.
15. Encuentra la ecuación de la recta que es paralela al eje Y y está cuatro unidades a la izquierda del eje horizontal.
16. Los segmentos que una recta determina sobre los ejes X y Y, son 4 y -6, respectivamente. Determina su ecuación general.
17. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2, -1)$ y determina sobre el eje X el segmento -2.
18. Los vértices de un cuadrilátero son $A(0, 0)$, $B(-1, 2)$, $C(3, 5)$ y $D(5, 0)$. Obtén las ecuaciones generales de sus lados.
19. ¿Cuál es la ecuación general de la recta, cuya pendiente es -2 y su intersección con el eje Y es 4?
20. Una recta pasa por el punto $A(7, 8)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(-2, 2)$ y $D(3, -4)$. Determina su ecuación general.
21. Demuestra que los puntos $A(-1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(5, 6)$ son colineales, mediante la ecuación de la recta que pasa por dos de estos puntos.

Con base al triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 2)$, $B(3, -1)$ y $C(-4, -5)$, realiza los ejercicios 22 al 27:

22. Obtén las ecuaciones generales de las rectas que pasan por los vértices y son paralelas a los lados opuestos.
23. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto medio de A con B y es perpendicular al mismo lado.
24. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto medio del $\overline{BC}$ y por el vértice A.
25. Obtén la ecuación general de la recta que pasa por el vértice C y es perpendicular al lado $\overline{AB}$.
26. ¿Cuáles son las ecuaciones generales de las rectas que pasan por el vértice B y trisecan al $\overline{AC}$?
27. Mediante las ecuaciones de línea recta, encuentra las coordenadas de los vértices del triángulo, cuyos puntos medios son los puntos A, B y C.
28. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son:
$$x - 3y + 3 = 0;\ 2x + 7y + 6 = 0;\ 4x + y - 14 = 0$$
Determina las coordenadas de los vértices.
29. Las ecuaciones de los lados de un paralelogramo son:
$$x - 4y + 11 = 0;\ 2x + y + 4 = 0;\ x - 4y - 7 = 0;\ 2x + y - 14 = 0$$
Determina las coordenadas de sus vértices.
30. Un automóvil se mueve con velocidad constante y recorre 60 km en media hora, si ese mismo automóvil recorre 150 km en una hora con 15 minutos, encuentra la ecuación que relaciona la distancia y en kilómetros recorrida por el automóvil, en términos del tiempo x en horas.

31. La velocidad de una partícula en un tiempo de 2 segundos es de 5 metros por segundo y para un tiempo de 8 segundos se mueve a razón de 14 metros por segundo. Determina la ecuación que relaciona la velocidad de la partícula en función del tiempo.
32. Si el dueño de una papelería le compra a un proveedor 100 libretas, éste le da un precio de \$12.50 cada una, pero si le compra 120, entonces el precio de cada libreta disminuye en ¢50, escribe la ecuación de la demanda.
33. Una empresa desea realizar una campaña publicitaria de un nuevo producto, para esto visita un taller de impresión y les informan que el costo de producir 15 millares de folletos publicitarios tienen un costo de \$3 000, pero si desean 20 millares, el costo es de \$3 600, obtén la ecuación de la recta que representa esta situación. (Considera x = número de millares; y = costo).
34. Una temperatura de 20°C equivale a 68°F, y 50°C equivalen a 122°F, determina la ecuación que relaciona la temperatura T_C en grados Celsius con la temperatura T_F en grados Fahrenheit.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Formas de la ecuación de una recta

Conocidas las condiciones que determinan una recta o su ecuación, éstas se expresan de las siguientes formas:

Ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen (forma ordinaria o reducida)

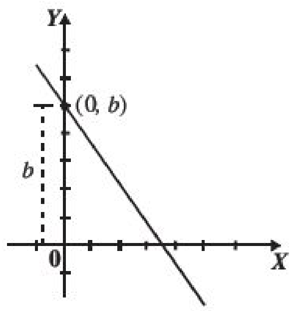
Una vez que se conoce la pendiente de una recta y su ordenada al origen (intersección con el eje Y), se determina la siguiente ecuación:

$$y = mx + b$$

Donde, m: pendiente

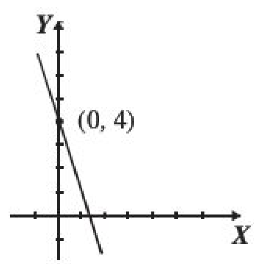
b: ordenada al origen

Esta forma de la ecuación de la recta, también se conoce como forma simplificada o reducida.



EJEMPLOS

1 Encuentra la ecuación de la recta, cuya intersección con el eje Y es 4 y su pendiente -3.



Solución

Los datos son: $m = -3$ y $b = 4$, al sustituir se obtiene:

$$y = mx + b$$
$$y = -3x + 4$$
$$3x + y - 4 = 0$$

Finalmente, la ecuación es: $3x + y - 4 = 0$.

2 Determina la ecuación general de la recta que tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y su intersección con el eje Y es el punto $(0, -5)$.

Solución

Los datos son: $m = \frac{1}{2}$ y $b = -5$, al sustituir en la ecuación ordinaria, se obtiene:

$y = \frac{1}{2}x - 5$ Al multiplicar por 2 para eliminar el denominador.

$2y = x - 10$ Al igualar a cero la ecuación, resulta: $x - 2y - 10 = 0$.

Transformación de la ecuación general a la forma ordinaria

Para transformar $Ax + By + C = 0$, a la forma $y = mx + b$, se procede de la siguiente manera:

Se despeja la variable y de:

$$Ax + By + C = 0$$
$$By = -Ax - C$$
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Esta ecuación es de la forma pendiente–ordenada al origen.

Si se compara con la ecuación $y = mx + b$ se obtienen los valores de m y b, en términos de los coeficientes de la ecuación general:

$$m = -\frac{A}{B} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la pendiente y la intersección con el eje Y de la recta $4x - 5y + 12 = 0$?

Solución

Despejando la variable y:

$$4x - 5y + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad -5y = -4x - 12$$
$$y = \frac{-4}{-5}x - \frac{12}{-5}$$
$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

Por consiguiente, la ecuación en su forma pendiente–ordenada al origen es:

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

De esta ecuación se determina la pendiente y el punto de intersección con el eje Y:

$$m = \frac{4}{5} \text{ y } \left(0, \frac{12}{5}\right)$$

2 Transforma a la forma simplificada la siguiente ecuación: $3x + 5y - 7 = 0$.

Solución

Se determinan los valores de A, B y C como sigue:

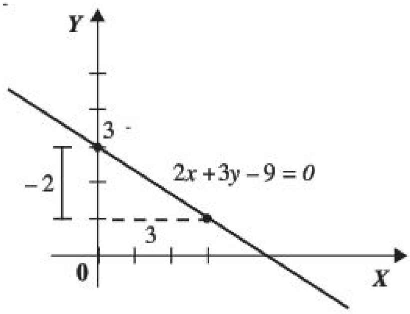
$$A = 3,\ B = 5 \text{ y } C = -7$$

Se sustituyen en $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, para obtener la forma simplificada:

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{-7}{5} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$$

3 Emplea la forma ordinaria de la ecuación de la recta y grafica la siguiente recta:

$$2x + 3y - 9 = 0$$



Solución

Se transforma la ecuación propuesta a su forma ordinaria:

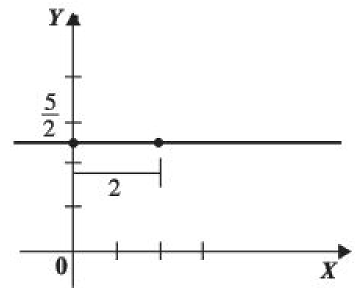
$$2x + 3y - 9 = 0$$
$$3y = -2x + 9$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 3$$

Se obtiene:

La ordenada al origen es $b = 3$, significa que la recta corta al eje y 3 unidades por encima del origen.

La pendiente $m = -\frac{2}{3}$, significa que y disminuye 2 unidades y x aumenta tres.

4 Grafica la recta de la ecuación $2y - 5 = 0$.



Solución

Se expresa la ecuación como:

$$0x + 2y - 5 = 0$$

Se despeja y de la ecuación y se obtiene:

$$y = \frac{0}{2}x + \frac{5}{2}$$

El valor de $b = \frac{5}{2}$

La pendiente es cero pero se expresa de manera equivalente como $m = \frac{0}{2}$ para poder graficar.

5 Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(-5, 3)$ y es perpendicular a la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

Solución

La ecuación $3x + 2y - 6 = 0$ se expresa en su forma pendiente–ordenada al origen:

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

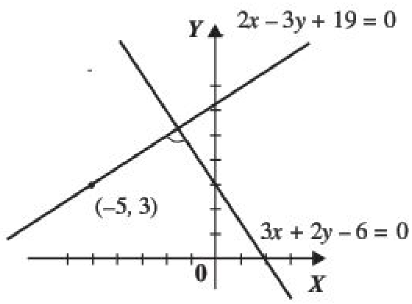
La pendiente de esta recta es: $m = -\frac{3}{2}$.

La recta perpendicular a ella que pasa por el punto $(-5, 3)$ cumple la condición: $m \cdot m' = -1$

$$-\frac{3}{2}m' = -1 \quad ; \quad m' = \frac{2(-1)}{-3} = \frac{2}{3}$$

Se sustituyen las coordenadas del punto y la pendiente m' en la ecuación:

$$y - y_1 = m'(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{2}{3}(x - (-5))$$
$$3(y - 3) = 2(x + 5)$$
$$3y - 9 = 2x + 10$$
$$-2x + 3y - 9 - 10 = 0$$
$$-2x + 3y - 19 = 0$$



Finalmente, la ecuación de la recta es:

$$2x - 3y + 19 = 0$$

6 Una recta pasa por el punto (2, 3) y es paralela a la recta $x - 2y = 0$, ¿cuál es su ecuación general?

Solución

Se expresa la ecuación $x - 2y = 0$ en su forma pendiente ordenada al origen:

$$y = \frac{1}{2}x$$

La pendiente de esta recta es $m = \frac{1}{2}$, como la recta que se busca es paralela, entonces tiene la misma pendiente: $m' = m = \frac{1}{2}$.

Se sustituye el punto y la pendiente en la ecuación y se expresa en su forma general, obteniendo como resultado:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \rightarrow \quad x - 2y + 4 = 0$$

7 Para las rectas $x + 4y - 4 = 0$ y $2x - 3y + 6 = 0$, determina la medida del ángulo agudo que forman.

Solución

Se expresan las rectas en su forma ordinaria para obtener sus respectivas pendientes:

$$y = -\frac{1}{4}x + 1 \quad \rightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{4} \qquad y = \frac{2}{3}x + 2 \quad \rightarrow \quad m_2 = \frac{2}{3}$$

Se sustituyen los valores de las pendientes en la fórmula de ángulo entre dos rectas:

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right) = arc\ tan\left(\frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)}\right) = arc\ tan\left(\frac{11}{10}\right) = 47°43'34''$$

Por tanto, el ángulo agudo que forman dichas rectas es de 47° 43′34″.

8 Un cuerpo tiene una velocidad de 4 metros por segundo, después de 6 segundos, su velocidad es de 12 metros por segundo. Expresa la velocidad de dicho cuerpo en función del tiempo, obtén su velocidad para un tiempo de 9 segundos y traza la gráfica.

Solución

Este problema relaciona a la velocidad v con el tiempo t, por tanto, los pares ordenados son de la forma: (t, v).

Por consiguiente, los pares ordenados son: (0, 4) y (6, 12).

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y se despeja v:

$$v - v_1 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) \quad \rightarrow \quad v - 4 = \frac{12 - 4}{6 - 0}(t - 0) \quad \rightarrow \quad v = \frac{4}{3}t + 4$$

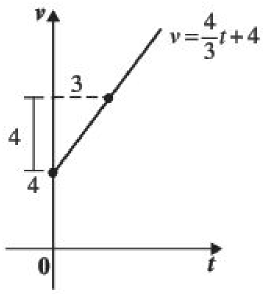
Se obtiene que $m = \frac{4}{3}$ y $b = 4$, la pendiente de la recta representa la aceleración del cuerpo y la ordenada al origen su velocidad inicial.

La velocidad del cuerpo en $t = 9\ s$, se obtiene al sustituir este valor en la ecuación:

$$v = \frac{4}{3}t + 4 \quad \rightarrow \quad v = \frac{4}{3}(9) + 4$$

$$v = 16\frac{m}{s}$$

La representación gráfica del problema es:



Por tanto, para 9 segundos, la velocidad del cuerpo es de $16\frac{m}{s}$.

9 Cierta empresa se dedica a fabricar bolsas de plástico, el costo de fabricación de x número de ellas es de $C = 4x + 3\,200$. Los ingresos por la venta de las bolsas fabricadas están dados por la ecuación $I = 12x$.

a) ¿Cuál es el costo de producción de 1 500 bolsas?
b) Si se fabrican 1 000 bolsas, ¿de cuánto es la utilidad?
c) ¿Cuántas bolsas se deben fabricar para que la utilidad sea nula?
d) Construye la gráfica que muestre la ecuación de costos e ingresos.

Solución

a) Se sustituye el valor de $x = 1\,500$ en la ecuación de costos:

$$C = 4x + 3\,200 \qquad C = 4(1\,500) + 3\,200 = 6\,000 + 3\,200 = 9\,200$$

por consiguiente, producir 1 500 bolsas tiene un costo de $9 200.

b) La ecuación de utilidad resulta de la diferencia de la ecuación de ingresos y costos.

$$U = I - C \qquad U = 12x - (4x + 3\,200) \qquad U = 8x - 3\,200$$

Para $x = 1\,000$ se obtiene:

$$U = 8(1\,000) - 3\,200 = 8\,000 - 3\,200 = 4\,800$$

Finalmente, la utilidad que genera la venta de 1 000 bolsas es de $4 800.

c) El número de bolsas que deben fabricarse y venderse para que la utilidad sea nula es:

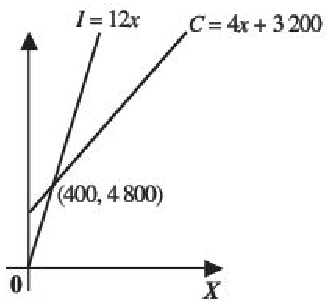
$$U = 8x - 3\,200 \qquad 0 = 8x - 3\,200 \qquad -8x = -3\,200$$

$$x = \frac{-3200}{-8}$$

$$x = 400$$

Para que la utilidad sea nula se deben fabricar y vender 400 bolsas.

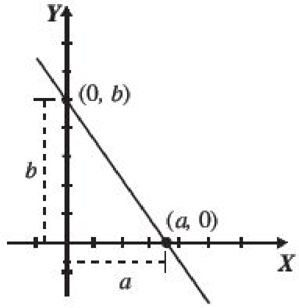
d) La representación gráfica es:



Ecuación de la recta en su forma simétrica

Una recta cuyas intersecciones con los ejes X y Y son a y b con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ se representa por:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$



Donde:

a: abscisa al origen
(Representa la intersección con el eje X)

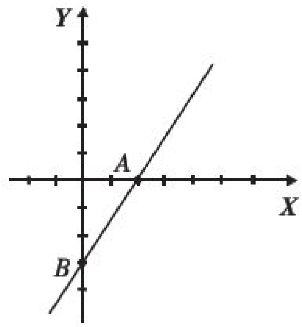
b: ordenada al origen
(Representa la intersección con el eje Y)

EJEMPLOS

1 Encuentra la ecuación general de la recta, cuyas intersecciones con los ejes son los puntos $A(2, 0)$ y $B(0, -3)$.

Solución

En este caso $a = 2$ y $b = -3$, entonces al sustituir en la forma simétrica, se obtiene:



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$$

$$6\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1\right)$$ Se multiplica por 6 la ecuación para eliminar los denominadores

$$3x-2y=6$$

$$3x-2y-6=0$$

Por tanto, la ecuación general de la recta es: $3x - 2y - 6 = 0$.

2 Determina la ecuación general de la recta, cuyas intersecciones con los ejes son los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 5)$.

Solución

En este caso, $a = -1$ y $b = 5$, entonces:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \rightarrow \frac{x}{-1}+\frac{y}{5}=1$$ Se multiplica por 5 ambos miembros

$$-5x+y=5$$ Se acomodan los términos

$$5x-y+5=0$$

Por consiguiente, la ecuación general de la recta es: $5x - y + 5 = 0$.

Transformación de la ecuación general a la forma simétrica

Para transformar la ecuación $Ax + By + C = 0$ a la forma $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, se realizan los siguientes pasos:

$$Ax+By+C=0$$

$$Ax+By=-C$$ El término independiente se pasa al segundo miembro.

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=\frac{-C}{-C}$$ Se divide la expresión por el término independiente.

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$ Se obtiene que $a=-\frac{C}{A}$ y $b=-\frac{C}{B}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma a la forma simétrica y determina las intersecciones con los ejes de la recta:

$$2x + 3y - 6 = 0$$

Solución

La ecuación está en la forma general, al comparar con $Ax + By + C = 0$, se obtienen los valores de A, B y C, éstos son:

$$A = 2, B = 3 \text{ y } C = -6$$

Para encontrar las intersecciones se sustituye en:

$$a = -\frac{C}{A} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$

Entonces,

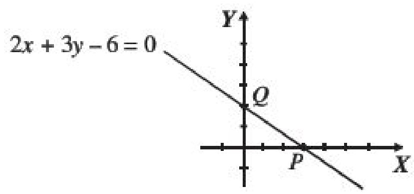
$$a = -\frac{(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ y } b = -\frac{(-6)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

En consecuencia, la ecuación en su forma simétrica es: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

Las intersecciones con los ejes son:

con el eje X el punto: $P(3, 0)$ con el eje Y el punto: $Q(0, 2)$

Al graficar y unir estos puntos en el plano cartesiano, se obtiene la gráfica de la ecuación $2x + 3y - 6 = 0$.



2 Una recta pasa por los puntos $(2, 5)$ y $(-1, 4)$. Expresa su forma simétrica.

Solución

Primero se sustituyen los puntos en la ecuación para encontrar la ecuación general:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 5 = \frac{4-5}{-1-2}(x-2)$$

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x-2)$$

$$3(y-5) = 1(x-2)$$

$$3y - 15 = x - 2$$

$$-x + 2 + 3y - 15 = 0$$

$$-x + 3y - 13 = 0$$

$$x - 3y + 13 = 0$$

Esta ecuación se encuentra en su forma general y los valores de A, B y C, son:

$$A = 1, B = -3 \text{ y } C = 13$$

Al sustituir en $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$, se determina que:

$$a = \frac{-13}{1} = -13 \text{ y } b = \frac{-13}{-3} = \frac{13}{3}$$

Finalmente, la ecuación de la recta en la forma simétrica es:

$$\frac{x}{-13} + \frac{y}{\frac{13}{3}} = 1$$

3 Transforma la ecuación general de la recta $2x+5y-12=0$ a su forma simétrica.

Solución

$$2x+5y-12=0 \quad \rightarrow \quad 2x+5y=12$$

$$\frac{2x}{12}+\frac{5y}{12}=\frac{12}{12}$$

$$\frac{\frac{2x}{2}}{\frac{12}{2}}+\frac{\frac{5y}{5}}{\frac{12}{5}}=1$$

$$\text{Forma simétrica: } \frac{x}{6}+\frac{y}{\frac{12}{5}}=1$$

EJERCICIO 15

Transforma a la forma ordinaria y simétrica las siguientes ecuaciones:

1. $x+y-4=0$
2. $2x-5y+5=0$
3. $x-3y+8=0$
4. $2x-y=0$
5. $x+8y=4$
6. $-3x+4y=-12$
7. $3x+5y-10=0$
8. $\frac{1}{2}x+3y+5=0$
9. $-\frac{2}{5}x+\frac{1}{3}y=4$
10. $x\cos\omega+y\,sen\,\omega-p=0$

Grafica las siguientes ecuaciones:

11. $y=-3x+1$
12. $y=2x-3$
13. $y=-\frac{3}{4}x+1$
14. $y=\frac{2}{3}x$
15. $4x-y-2=0$
16. $x+3y-5=0$
17. $x-y=0$
18. $\frac{3}{2}x+3y-6=0$

19. Determina la ecuación de la recta, cuya ordenada al origen es -5 y su inclinación es de $135°$.
20. Una recta de pendiente 2 pasa por el punto $A(-1,2)$. Expresa su ecuación en la forma ordinaria.
21. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(6,-7)$ y tiene pendiente -3 en su forma ordinaria?
22. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(-5,3)$ en su forma ordinaria.
23. Una recta tiene intersecciones con los ejes en los puntos $A(-1,0)$ y $B(0,5)$. Obtén su ecuación en su forma ordinaria.
24. Una recta pasa por el punto $(-1,5)$ y es paralela a la recta con ecuación $5x-3y+7=0$. ¿Cuál es su ecuación?
25. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto $(2,7)$ y es perpendicular a la recta con ecuación $x-4y+7=0$.
26. Obtén la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2,3)$ y es paralela a la recta $x-y+2=0$.
27. ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto medio de las intersecciones con los ejes de la recta $2x-3y+6=0$?
28. Determina la ecuación general de la recta perpendicular a la recta $2x+3y-7=0$ y pasa por la intersección de las rectas $x+y-7=0$ y $2x-3y+1=0$.

29. Encuentra la medida del ángulo obtuso formado por las rectas:

$$x + 3y - 6 = 0 \text{ y } 2y - 3 = 0$$

30. Los lados de un triángulo están formados por las rectas:

$$x - 6y + 15 = 0;\ 5x + 2y - 21 = 0;\ x + 2y - 1 = 0$$

¿Cuál es la medida de sus ángulos interiores?

31. La posición de una partícula está dada por la expresión:

$$y = \frac{3}{4}x - 2$$

Donde x e y están dados en metros, ¿cuál es su posición cuando $x = 20\ m$?

32. Un fabricante de pantalones tiene gastos fijos de $30 000 mensuales y por cada pantalón elaborado invierte $50 más.
   a) ¿Cuál es la ecuación de gastos del fabricante?
   b) ¿Cuánto invierte en la producción de 800 pantalones?
   (Considera x = número de pantalones fabricados, y = gasto total)

33. Para un tiempo de 5 segundos, un cuerpo posee una velocidad de $3\frac{m}{s}$, y para 8 segundos su velocidad es de $15\frac{m}{s}$.
   a) ¿Cuál es su aceleración?
   b) ¿Qué velocidad tendrá para un tiempo de 12 segundos?

34. Un restaurante debe invertir diariamente $6 000 en gastos fijos, más $30 por cada comida servida, si todos los platillos servidos tienen un precio al público de $80, obtén:
   a) La función de costo total del restaurante por día.
   b) ¿Cuál es la utilidad obtenida, si vende en un día 140 platillos?
   c) Si sólo vende 90 platillos, ¿obtiene ganancias?
   d) ¿Cuántos platillos debe vender para que no exista utilidad?

35. Representa la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, -2)$ y tiene un ángulo de inclinación de 45° en su forma simétrica.

36. Una recta tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y su intersección con el eje Y es -4. Representa su ecuación en la forma simétrica.

37. Una recta pasa por los puntos $A(-3, 1)$ y $B(2, -2)$. Encuentra su ecuación en la forma simétrica.

38. Obtén la ecuación de la recta en su forma simétrica si pasa por la intersección con el eje Y de la recta $x + 2y - 7 = 0$ y es perpendicular a la misma.

39. Determina la ecuación de la recta en su forma simétrica si pasa por la intersección de las rectas, $2x + y - 5 = 0$ y $3x - 4y - 2 = 0$, y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 6)$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Familia de rectas

Se denomina familia de rectas al conjunto de rectas que satisfacen una condición geométrica; se clasifican en:

Rectas paralelas

Satisfacen la condición $y = mx + b$, donde b es el parámetro. Este tipo de rectas tienen la misma pendiente.

Ejemplo

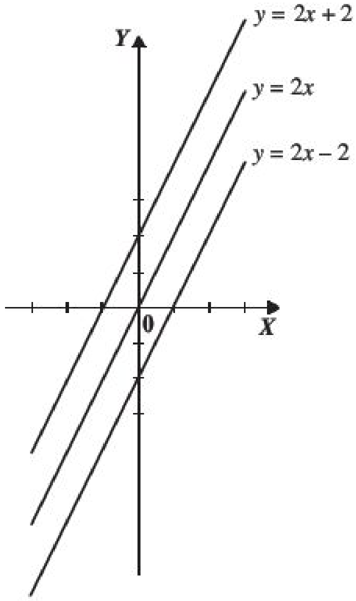
Representa gráficamente la familia de rectas, $y = 2x + b$, con $b = -2, 0, 2$.

Solución

Se sustituyen los valores del parámetro b en la ecuación y se obtienen las siguientes rectas:

$$y = 2x - 2,\ y = 2x,\ y = 2x + 2$$

Cuya representación gráfica es:



Rectas concurrentes

Satisfacen la condición $y = mx + b$, donde m es el parámetro; esto es, las rectas coinciden en la intersección con el eje Y.

Ejemplo

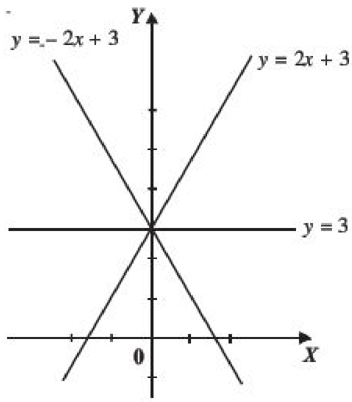
Representa gráficamente la familia de rectas, $y = mx + 3$, con $m = -2, 0, 2$.

Solución

Se sustituyen los valores de m y se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$y = -2x + 3,\ y = 3,\ y = 2x + 3$$

Cuya representación gráfica es:



EJERCICIO 16

Representa gráficamente las siguientes familias de rectas:

1. $y=\frac{1}{2}x+b$
2. $y = mx + 1$
3. $y=-\frac{2}{3}x+b$
4. $y=mx-\frac{1}{2}$
5. $y = x + b$
6. $y = mx$
7. $y = -2x + b$
8. $y=mx+\frac{4}{3}$
9. $y = mx - 1$
10. $y=-\frac{4}{5}x+b$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la recta en su forma normal

Sea $\overline{OP_1}$ un segmento perpendicular a la recta $Ax + By + C = 0$ de longitud p, y ω el ángulo determinado por el segmento y el eje X.

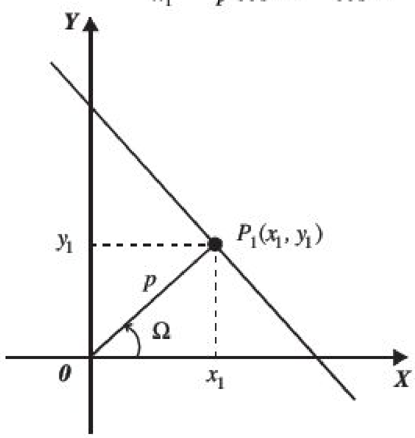
De la figura se obtiene:

$$sen\ \omega = \frac{y_1}{p} \rightarrow y_1 = p\ sen\ \omega$$

$$cos\ \omega = \frac{x_1}{p} \rightarrow x_1 = p\ cos\ \omega$$

Luego, la pendiente del segmento $\overline{OP_1}$ es:

$$m = tan\ \omega = \frac{y_1}{x_1} = \frac{p\ sen\ \Omega}{p\ cos\ \Omega} = \frac{sen\ \Omega}{cos\ \Omega}$$



Entonces, las coordenadas de P_1 son $(p\ cos\ \omega, p\ sen\ \omega)$ y la pendiente, de la recta:

$Ax + By + C = 0$ es:

$$m=-\frac{cos\ \Omega}{sen\ \Omega}$$

Al sustituir P_1 y m en la ecuación de la recta punto pendiente se obtiene la ecuación de la recta en su forma normal:

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \rightarrow \qquad y-p\ sen\ \Omega=-\frac{cos\ \Omega}{sen\ \Omega}(x-p\ cos\ \Omega)$$

$$y\ sen\ \Omega-p\ sen^2\ \Omega=-x\ cos\ \Omega+p\ cos^2\ \Omega$$

$$x\ cos\ \Omega+y\ sen\ \Omega-p\ sen^2\ \Omega-p\ cos^2\ \Omega=0$$

$$x\ cos\ \Omega+y\ sen\ \Omega-p\left(sen^2\ \Omega+cos^2\ \Omega\right)=0$$

Pero $sen^2\omega + cos^2\omega = 1$, entonces:

$$x\ cos\ \Omega + y\ sen\ \Omega - p = 0$$

Se concluye que una recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, se puede expresar en su forma normal como:

$$x\ cos\ \Omega + y\ sen\ \Omega - p = 0$$

Donde:

p: longitud del segmento $\overline{OP_1}$ y ω: ángulo de inclinación del segmento de recta que parte del origen, perpendicular a la recta normal.

Transformación de la ecuación general a la forma normal

Sean $Ax + By + C = 0$ y $x\ cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p = 0$, las ecuaciones de una misma recta en su forma general y normal, respectivamente, entonces los coeficientes de ambas ecuaciones son iguales o proporcionales, por tanto:

$$\frac{cos\ \Omega}{A} = \frac{sen\ \Omega}{B} = -\frac{p}{C}, \text{ con } K = -\frac{p}{C}$$

Entonces, K es la constante de proporcionalidad y en estas condiciones:

$$cos\ \omega = K\,A \qquad sen\ \omega = K\,B \qquad -p = K\,C$$

Al elevar al cuadrado y sumar las dos primeras igualdades se determina que:

$$cos^2\ \omega + sen^2\ \omega = K^2 A^2 + K^2 B^2 = K^2(A^2 + B^2)$$

$$1 = K^2(A^2 + B^2)$$

$$\frac{1}{A^2 + B^2} = K^2$$

$$K = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Con $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$ (radical).

Los valores de $cos\ \omega$, $sen\ \omega$ y p están dados por:

$$cos\ \Omega = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\ ;\ sen\ \Omega = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\ \text{ y } p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Por consiguiente, la forma normal de $Ax + By + C = 0$ es:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Los signos de r (radical) se consideran de la siguiente manera:

Si $C \neq 0$, entonces el radical tendrá signo opuesto al de C.

Si $C = 0$, el signo del radical se considerará igual al de B.

Si $C = B = 0$, el signo del radical tendrá igual signo que A.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Reduce a la forma normal la siguiente ecuación de la recta $\sqrt{3}x + y - 9 = 0$ y determina el valor de p y del ángulo ω.

Solución

La forma normal de $Ax + By + C = 0$ es:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Se obtienen los coeficientes de la recta:

$$A = \sqrt{3}\,,\; B = 1 \text{ y } C = -9$$

Luego, con los valores de A y B se obtiene el radical $\sqrt{A^2+B^2}$

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Como C es negativa, entonces $\sqrt{A^2+B^2}$ se toma con signo positivo, por consiguiente, la ecuación en su forma normal es:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{9}{2} = 0$$

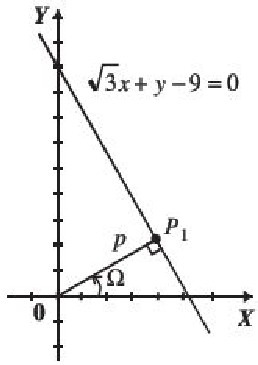
De aquí se obtiene:

$$cos\ \omega = \frac{\sqrt{3}}{2},\ sen\ \omega = \frac{1}{2} \text{ y } p = \frac{9}{2}$$

Como $sen\ \omega$ y $cos\ \omega$ son ambos positivos; ω está en el primer cuadrante, entonces los valores de p y ω están determinados por:

$$p = \frac{9}{2} \text{ y } \omega = 30°$$

Gráficamente se representa como:



Donde: $p = \frac{9}{2}$ y $\omega = 30°$ y la ecuación en su forma normal es:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{9}{2} = 0$$

2 Reduce a la forma normal la siguiente ecuación de la recta $3x - 4y - 6 = 0$ y encuentra el valor de p y ω.

Solución

Con el valor de los coeficientes $A = 3$, $B = -4$ y $C = -6$, se obtiene el radical:

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Debido a que C es negativo, entonces $\sqrt{A^2+B^2}$ es positivo, por tanto, la ecuación normal se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$

De esta ecuación se determina que:

$$\cos\,\omega = \frac{3}{5},\ sen\ \omega = -\frac{4}{5}\ \text{y}\ p = \frac{6}{5}$$

Luego, para obtener el ángulo se despeja w de cualquiera de las dos funciones trigonométricas:

$$sen\ \omega = -\frac{4}{5} \rightarrow \omega = arc\ sen\left(-\frac{4}{5}\right)$$

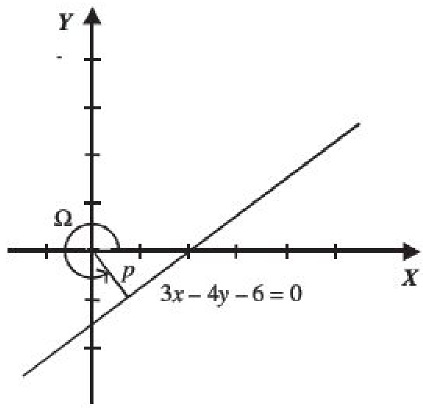
$$\omega = arc\ sen\,(-0.8) = -53°\,7'$$

Como $\cos\,\omega$ es positivo y $sen\ \omega$ es negativo, ω está en el cuarto cuadrante, por tanto:

$$\omega = 360° - 53°\,07'$$

$$\omega = 306°\,53'$$

Gráfica:



Donde: $p = \frac{6}{5}$ y $\omega = 306°\,53'$ y la ecuación en su forma normal es:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$

EJERCICIO 17

Expresa en su forma normal las siguientes rectas:

1. $2x + 3y - 5 = 0$
2. $x - y + 5 = 0$
3. $5x + 3y = 0$
4. $x - 3y + 7 = 0$
5. $12x + 5y = -13$
6. $\sqrt{5}x + 2y - 1 = 0$

Determina la ecuación de la recta en su forma normal si se conoce *w* y *p*.

7. $\omega = 30°$ y $p = 4$
8. $\omega = 45°$ y $p = \sqrt{2}$
9. $\omega = 60°$ y $p = 3$
10. $\omega = 120°$ y $p = 1$
11. $\omega = 180°$ y $p = \sqrt{3}$
12. $\omega = 150°$ y $p = 5$
13. $\omega = 225°$ y $p = 3\sqrt{2}$
14. $\omega = 300°$ y $p = 4\sqrt{3}$
15. Una recta es tangente a un círculo con centro en el origen y radio 2. Si el punto de tangencia es $(1, -\sqrt{3})$, ¿cuál es la ecuación de la recta en su forma normal?
16. ¿Cuál es la ecuación de la recta en forma normal, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es paralela a la recta $2x + 5y - 10 = 0$?
17. Expresa la ecuación de la recta $3x + ky + 7 = 0$ en su forma normal, cuando pasa por el punto $(-3, 2)$.
18. Encuentra la medida de los ángulos formados por las rectas con ecuaciones:

$$x \cos 330° + y \operatorname{sen} 330° - 1 = 0$$

$$x \cos 210° + y \operatorname{sen} 210° - 2 = 0$$

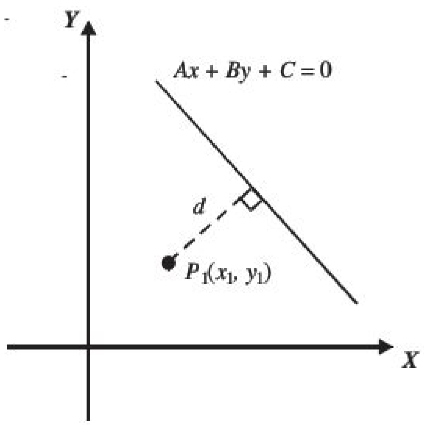
19. Determina la ecuación de la recta, cuya distancia al origen es $\frac{12}{5}$ u y pasa por el punto $A(0, -3)$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Distancia de un punto a una recta

Es la longitud del segmento perpendicular a la recta trazado a partir del punto.

La distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$, está determinada por la fórmula:



$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

EJEMPLOS

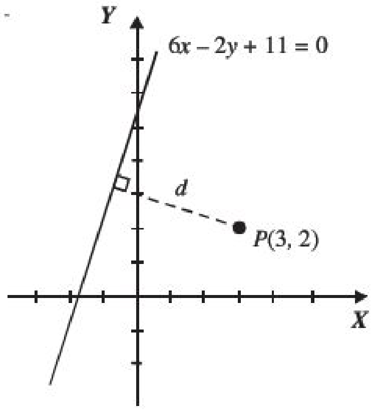
Ejemplos

1 Encuentra la distancia del punto $A(3, 2)$ a la recta $6x - 2y + 11 = 0$.

Solución

Se sustituyen las coordenadas del punto A y los coeficientes de la ecuación en la fórmula:

$$d = \frac{|6(3)-2(2)+11|}{\sqrt{(6)^2+(-2)^2}} = \frac{|18-4+11|}{\sqrt{36+4}} = \frac{|25|}{\sqrt{40}} = \frac{|25|}{\sqrt{4(10)}} = \frac{25}{2\sqrt{10}}$$



Finalmente, la distancia es: $\frac{25}{2\sqrt{10}} = \frac{5}{4}\sqrt{10}u$.

2 ¿Cuál es la longitud de la altura de un triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(1, -2)$, $B(7, 0)$ y $C(3, 3)$, del vértice A sobre el lado $\overline{BC}$?

Solución

Se determina la ecuación de la recta que pasa por los vértices B y C:

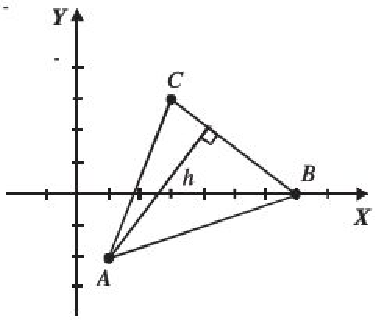
$$y - 0 = \frac{3-0}{3-7}(x-7)$$

$$y = -\frac{3}{4}(x-7)$$

$$4y = -3(x-7)$$

$$4y = -3x + 21$$

$$3x + 4y - 21 = 0$$



La longitud de la altura es la distancia que existe del vértice $A(1, -2)$ a la recta $3x + 4y - 21 = 0$, entonces, al sustituir en la fórmula se obtiene:

$$h = \frac{|3(1)+4(-2)-21|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}} = \frac{|3-8-21|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-26|}{5} = \frac{26}{5} = 5.2u$$

Por consiguiente, la altura es de $5.2u$.

3 Encuentra el área del triángulo formado por los puntos $A(-2, 3)$, $B(1, -1)$ y $C(3, 4)$.

Solución

Se determina la ecuación de uno de los lados, en este caso $\overline{AB}$.

$$y-3=\frac{-1-3}{1-(-2)}(x-(-2)) \rightarrow y-3=\frac{-4}{3}(x+2) \rightarrow 3y-9=-4x-8 \rightarrow 4x+3y-1=0$$

La longitud de la altura es la distancia del punto $C(3, 4)$ a la recta $4x+3y-1=0$

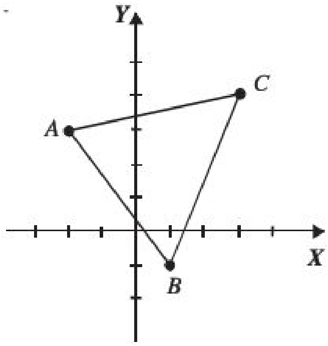
$$h=\frac{|4(3)+3(4)-1|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}}=\frac{|12+12-1|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|23|}{5}=\frac{23}{5}$$

La base del triángulo es la longitud del lado $\overline{AB}$.

$$\overline{AB}=\sqrt{(1-(-2))^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

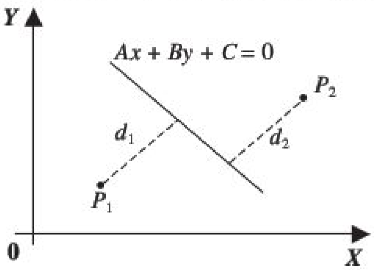
Entonces, el área del triángulo es:

$$A=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(5)\left(\frac{23}{5}\right)=\frac{23}{2}u^2$$



Distancia dirigida.

La distancia dirigida permite conocer la localización de un punto con respecto a una recta y al origen.



$$d=\pm\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Casos:

Si la recta no pasa por el origen:

- La distancia que existe del punto a la recta es positiva si el punto y el origen se encuentran en regiones opuestas respecto a la recta.
- Si el punto y el origen se encuentran en la misma región respecto a la recta, entonces se toma el signo negativo para indicar el sentido en el que se está tomando la distancia.

Si la recta pasa por el origen:

- La distancia del punto a la recta es positiva si el punto se encuentra por encima o en la región de arriba respecto a la recta.
- Si el punto se encuentra por debajo o en la región de abajo respecto a la recta, entonces se toma el signo negativo para indicar el sentido en el que se está tomando la distancia.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la distancia dirigida que existe del punto $P(3, -1)$ a la recta $3x - 2y - 6 = 0$?

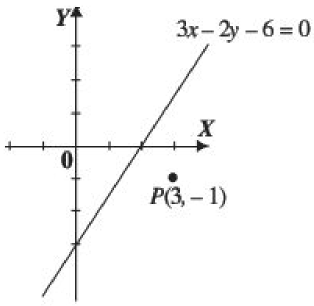
Solución

Se grafican la recta y el punto:

Se observa que el punto P y el origen se encuentran en regiones opuestas respecto a la recta, por consiguiente, la distancia es positiva e igual a:

$$d = \frac{|3(3) - 2(-1) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}$$

$$d = \frac{|5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}u$$



2 Determina la distancia dirigida del punto $Q(-4, -2)$ a la recta $x + 4y = 0$.

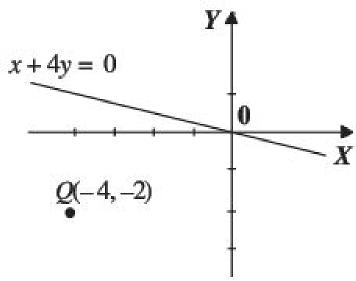
Solución

Se determina la posición del punto respecto a la recta:

El punto Q se encuentra por debajo de la recta, por tanto, la distancia dirigida es negativa e igual a:

$$d = -\frac{|-4 + 4(-2)|}{\sqrt{1^2 + 4^2}}$$

$$d = -\frac{|-12|}{\sqrt{17}} = -\frac{12}{\sqrt{17}} = -\frac{12\sqrt{17}}{17}u$$



3 Determina la ecuación de la recta que dista 2 unidades de la recta $4x + 3y - 6 = 0$.

Solución

Existen dos rectas paralelas a $4x + 3y - 6 = 0$, una se encuentra arriba y la otra abajo, se sustituyen los datos en la fórmula:

$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \rightarrow \quad 2 = \frac{4x + 3y - 6}{\pm\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

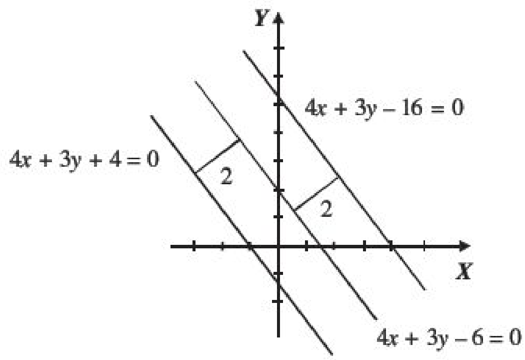
De la última ecuación se obtienen las ecuaciones de las rectas paralelas:

$$2 = \frac{4x + 3y - 6}{5} \qquad\qquad 2 = \frac{4x + 3y - 6}{-5}$$

$$10 = 4x + 3y - 6 \qquad\qquad -10 = 4x + 3y - 6$$

$$4x + 3y - 16 = 0 \qquad\qquad 4x + 3y + 4 = 0$$

Gráficamente se representan de la siguiente manera:



Distancia entre rectas paralelas

Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas, se determina un punto en cualquiera de las rectas, después se calcula la distancia de ese punto a la otra recta.

Ejemplo

Encuentra la distancia entre las rectas paralelas $2x + 3y + 1 = 0$ y $2x + 3y - 6 = 0$.

Solución

La pendiente de ambas rectas es igual a $-\frac{2}{3}$, por tanto son paralelas.

Se determina un punto cualquiera sobre la recta $2x + 3y - 6 = 0$

$$\text{Si } x = 0,\ 2(0) + 3y - 6 = 0$$
$$3y - 6 = 0$$
$$3y = 6$$
$$y = \frac{6}{3}$$
$$y = 2, \text{ se obtiene el punto } (0, 2)$$

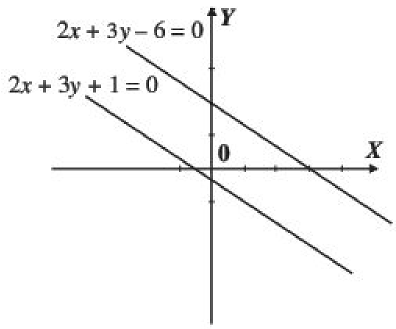
Se aplica la fórmula para obtener la distancia del punto (0, 2) a la recta $2x + 3y + 1 = 0$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(2)(0) + (3)(2) + 1|}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2}} = \frac{|0 + 6 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

Al racionalizar el denominador:

$$\frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{\left(\sqrt{13}\right)^2} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

De acuerdo con lo anterior la distancia entre las rectas es: $\frac{7\sqrt{13}}{13}$ unidades.



EJERCICIO 18

Determina la distancia del punto dado a la recta indicada:

1. $P(1, 4)$; $2x - 7y + 3 = 0$
2. $P(-2, 5)$; $3x + 4y - 5 = 0$
3. $P(0, -4)$; $x + y - 6 = 0$
4. $P(-1, 7)$; $12x + 5y + 26 = 0$
5. $P(3, 0)$; $x - y + 4 = 0$
6. $P(-4, 0)$; $x + 3 = 0$
7. $P(-2, -5)$; $x + 4y - 10 = 0$
8. $P(-3, -7)$; $y - 3 = 0$
9. Encuentra la altura correspondiente al lado $\overline{BC}$ del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-3, 2)$, $B(5, 8)$ y $C(1, -4)$.
10. ¿Cuál es el área del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(0, 0)$, $B(2, 4)$ y $C(6, 7)$?
11. Una circunferencia tiene su centro en (2, 3) y es tangente a la recta $3x + 4y - 25 = 0$. Determina el radio de la circunferencia.
12. Obtén el valor de k para que la distancia de la recta $x + ky - 5 = 0$ al punto (3, 2) sea igual a $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Encuentra la distancia dirigida del punto dado a la recta indicada:

13. $P(2, -1)$; $2x - 3y - 5 = 0$
14. $P(-3, 2)$; $3x + 4y + 7 = 0$
15. $P(-2, 5)$; $3x + 4y = 0$
16. $P\left(3, -\frac{1}{2}\right)$; $5x + 2y - 3 = 0$
17. $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}\right)$; $6x + 8y - 3 = 0$
18. $P\left(-5, -\frac{3}{4}\right)$; $x + y - 1 = 0$
19. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas paralelas a $3x - 4y + 5 = 0$ y que se encuentran a tres unidades de distancia?

20. La distancia dirigida de $P(-2, y)$ a la recta con ecuación $x+4y-5=0$, es 4 unidades. Encuentra la ordenada de P.
21. ¿Qué distancia existe entre las rectas paralelas $2x+y-6=0$ y $2x+y+1=0$?
22. Obtén la distancia que existe entre las rectas paralelas $x-2y+5=0$ y $3x-6y+4=0$.
23. ¿Cuál es la ecuación de la recta paralela a $x-y-3=0$, y que dista 3 unidades de ella?
24. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por $(2, 3)$ y que la distancia de esta recta al punto $(-2, 3)$ sea igual a $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Rectas notables en el triángulo

En todo triángulo se trazan las siguientes rectas:

Mediatriz

Recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio. En un triángulo el punto de intersección de las mediatrices se conoce como *circuncentro*.

Ejemplo

¿Cuál es la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos $A(-3, 0)$ y $B(1, 1)$?

Solución

Se obtiene el punto medio y la pendiente del segmento $\overline{AB}$.

$$P_m\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right)=P_m\left(-1, \frac{1}{2}\right) \qquad m=\frac{1-0}{1-(-3)}=\frac{1}{4}$$

Para obtener la pendiente de la mediatriz se aplica la condición de perpendicularidad y se obtiene:

$$m\cdot m'=-1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{4}\cdot m'=-1 \qquad \rightarrow \qquad m'=-4$$

Se sustituyen las coordenadas del punto medio y m' en la ecuación punto pendiente de la recta y se obtiene la ecuación de la mediatriz:

$$y-\frac{1}{2}=-4\left(x-(-1)\right) \qquad \rightarrow \qquad y-\frac{1}{2}=-4x-4 \qquad \rightarrow \qquad 4x+y+\frac{7}{2}=0$$
$$8x+2y+7=0$$

Por consiguiente, la ecuación de la mediatriz es: $8x+2y+7=0$.

Mediana

Segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las medianas es el *baricentro* (*centro de gravedad*).

Ejemplo

Para el triángulo determinado por los vértices $A(-3, 1)$, $B(1, 4)$ y $C(5, -3)$, determina la ecuación de la mediana trazada desde el vértice B al lado $\overline{AC}$.

Solución

Se obtiene el punto medio del segmento $\overline{AC}$:

$$P_m\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right)=P_m(1, -1)$$

Con el punto medio y las coordenadas del vértice B, se aplica la ecuación de la recta por dos puntos para obtener la ecuación de la mediana:

$$y-4=\frac{-1-4}{1-1}(x-1) \quad \rightarrow \quad y-4=\frac{-5}{0}(x-1) \quad \rightarrow \quad 0=x-1$$

Por tanto, la ecuación de la mediana trazada desde el vértice B al lado $\overline{AC}$ es: $x-1=0$.

Altura

Recta trazada en forma perpendicular de un vértice al lado opuesto de un triángulo. El punto de intersección de las alturas es el *ortocentro*.

EJEMPLOS

1 Los vértices de un triángulo son los puntos $A(2, 3)$, $B(-4, 0)$ y $C(0, -2)$, determina la ecuación de la altura trazada desde el vértice A.

Solución

Se obtiene la pendiente del lado $\overline{BC}$, y posteriormente la pendiente de la altura.

$$m=\frac{-2-0}{0-(-4)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}m'=-1 \quad \rightarrow \quad m'=2$$

Se sustituyen las coordenadas del vértice A y la pendiente m' en la ecuación punto pendiente de la recta y se obtiene la ecuación de la altura buscada:

$$y-3=2(x-2) \qquad y-3=2x-4 \qquad 2x-y-1=0$$

2 Los vértices de un triángulo son $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$, determina:

a) Las ecuaciones de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección.
b) Las ecuaciones y las coordenadas del punto de intersección de las mediatrices.
c) Las ecuaciones y el punto de intersección de las alturas.

Solución

a) Para las medianas se determinan los puntos medios de los lados del triángulo.

Punto medio $\overline{AB}$

$$x=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$$
$$y=\frac{1+7}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$Pm\ \overline{AB}\ (1, 4)$

Punto medio $\overline{BC}$

$$x=\frac{4+6}{2}=\frac{10}{2}=5$$
$$y=\frac{7+(-3)}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$Pm\ \overline{BC}\ (5, 2)$

Punto medio $\overline{AC}$

$$x=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$y=\frac{1+(-3)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$Pm\ \overline{AC}\ (2, -1)$

Para obtener las medianas se toma un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Mediana del vértice A

Se toman los datos $A(-2, 1)$ y $Pm\ \overline{BC}\ (5, 2)$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \rightarrow \quad y-1=\frac{2-1}{5-(-2)}(x-(-2))$$

$$y-1=\frac{1}{7}(x+2)$$

$$7(y-1)=1(x+2)$$

$$7y-7=x+2$$

$$x+2-7y+7=0$$

$$x-7y+9=0$$

Mediana del vértice B

Se toman los datos $B(4, 7)$ y $Pm\ \overline{AC}\,(2, -1)$

$$y-7=\frac{-1-7}{2-4}(x-4) \rightarrow y-7=\frac{-8}{-2}(x-4)$$
$$y-7=4(x-4)$$
$$y-7=4x-16$$
$$4x-16-y+7=0$$
$$4x-y-9=0$$

Mediana del vértice C

Se toman los datos $C(6, -3)$ y $Pm\ \overline{AB}\ (1, 4)$

$$y-(-3)=\frac{4-(-3)}{1-6}(x-6) \rightarrow y+3=\frac{4+3}{-5}(x-6)$$
$$y+3=-\frac{7}{5}(x-6)$$
$$5(y+3)=-7(x-6)$$
$$5y+15=-7x+42$$
$$7x-42+5y+15=0$$
$$7x+5y-27=0$$

Para encontrar el baricentro, se realiza un sistema de ecuaciones entre dos medianas cualesquiera; en este caso se resuelve el sistema con las medianas del vértice A y C.

$$x-7y+9=0$$
$$7x+5y-27=0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen las coordenadas del punto de intersección.

$$\text{Baricentro}\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

b) Para las mediatrices se determinan las pendientes de los lados del triángulo.

Pendiente del lado $\overline{AB}$

$$m_{\overline{AB}}=\frac{7-1}{4-(-2)}=\frac{6}{6}=1$$

Pendiente del lado $\overline{BC}$

$$m_{\overline{BC}}=\frac{-3-7}{6-4}=\frac{-10}{2}=-5$$

Pendiente del lado $\overline{AC}$

$$m_{\overline{AC}}=\frac{-3-1}{6-(-2)}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$

Se aplica la condición de perpendicularidad para encontrar las pendientes de las mediatrices.

Pendiente de la mediatriz sobre $\overline{AB}$ $\quad m_1=-\dfrac{1}{m_{\overline{AB}}}=-1$

Pendiente de la mediatriz sobre $\overline{BC}$ $\quad m_2=-\dfrac{1}{m_{\overline{BC}}}=\dfrac{1}{5}$

Pendiente de la mediatriz sobre $\overline{AC}$ $\quad m_3=-\dfrac{1}{m_{\overline{AC}}}=2$

Mediatriz sobre el lado AB

Se toma el punto medio $(1, 4)$ de $\overline{AB}$ y $m_1=-1$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-4=-1(x-1)$$
$$y-4=-x+1$$
$$x-1+y-4=0$$
$$x+y-5=0$$

Mediatriz sobre el lado BC

Se toma el punto medio (5, 2) de $\overline{BC}$, $m_2 = \frac{1}{5}$ y se sustituye en: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y-2=\frac{1}{5}(x-5)$$

$$5(y-2)=1(x-5)$$

$$5y-10=x-5$$

$$x-5-5y+10=0$$

$$x-5y+5=0$$

Mediatriz sobre el lado AC

Se toma el punto medio (2, –1) de $\overline{AC}$, $m_3 = 2$ y se sustituye en: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y+1=2(x-2)$$

$$y+1=2x-4$$

$$2x-4-y-1=0$$

$$2x-y-5=0$$

Para encontrar las coordenadas del circuncentro se resuelve un sistema de ecuaciones con dos mediatrices cualesquiera:

$$x+y-5=0$$

$$2x-y-5=0$$

Al resolver, se obtiene el punto $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$

c) Con las pendientes perpendiculares de los lados y los vértices opuestos se obtienen las ecuaciones de las alturas.

Altura sobre el lado BC.

Se toma el vértice $A(-2, 1)$ y la pendiente perpendicular al lado BC, $m_2 = \frac{1}{5}$

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \rightarrow \quad y-1=\frac{1}{5}(x+2)$$

$$5(y-1)=1(x+2)$$

$$5y-5=x+2$$

$$x+2-5y+5=0$$

$$x-5y+7=0$$

Altura sobre el lado AC.

Se toma el vértice $B(4, 7)$ y la pendiente perpendicular al lado AC, $m_3 = 2$

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \rightarrow \quad y-7=2(x-4)$$

$$y-7=2x-8$$

$$2x-8-y+7=0$$

$$2x-y-1=0$$

Altura sobre el lado AB

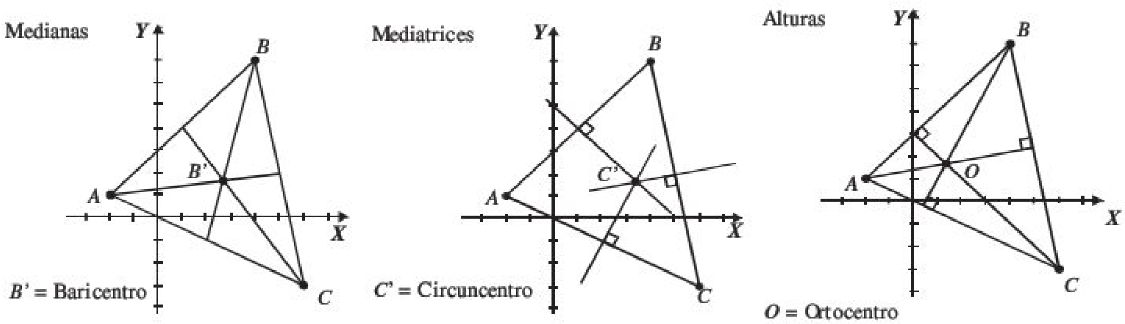
Se toma el vértice $C(6, -3)$ y la pendiente perpendicular al lado AB, $m_1 = -1$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y + 3 = -1(x - 6)$$
$$y + 3 = -x + 6$$
$$x - 6 + y + 3 = 0$$
$$x + y - 3 = 0$$

Para encontrar las coordenadas del ortocentro se resuelve un sistema de ecuaciones con dos alturas cualesquiera:

$$2x - y - 1 = 0$$
$$x + y - 3 = 0$$

Al resolver, se obtiene el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ que representa el ortocentro.



Bisectriz

Semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales. En un triángulo, el punto de intersección de las bisectrices se conoce como *incentro*.

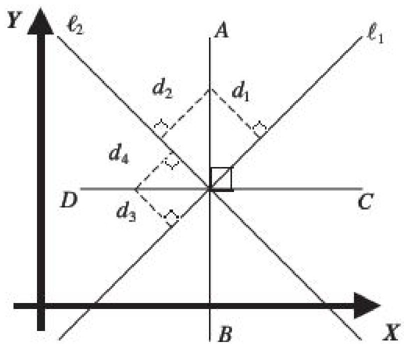
Ecuación de la bisectriz

Sean las rectas ℓ_1 y ℓ_2, donde: ℓ_1: $Ax + By + C = 0$; ℓ_2: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, sus bisectrices son las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, cuyas ecuaciones están dadas por la condición:

$$|d_1| = |d_2|$$

De la cual se obtiene:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\left[\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}}}\right]$$



Los signos de las distancias se eligen de la siguiente manera:

- Las distancias son positivas si para un punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en regiones opuestas.
- Si para un punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en la misma región, se usa el signo negativo para indicar el sentido.

Los signos del radical se consideran de la siguiente manera:

- Si $C \neq 0$, entonces el radical tendrá signo opuesto al de C.
- Si $C = 0$, el signo del radical se considerará igual al de B.
- Si $C = B = 0$, el signo del radical tendrá igual signo que A.

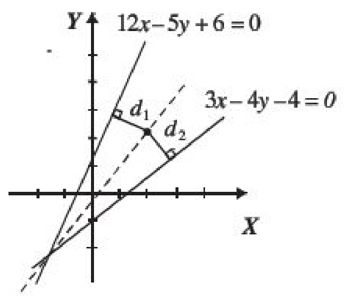
EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas, $3x - 4y - 4 = 0$ y $12x - 5y + 6 = 0$?

Solución

Se traza la gráfica:



De la figura se obtiene que $-d_1 = -d_2$ ya que el punto $P(x, y)$ se encuentra en la misma región que el origen para ambas rectas, por tanto,

$$-d_1 = -d_2 \quad \text{o bien} \quad d_1 = d_2$$

Al sustituir en la fórmula

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}}} \quad \rightarrow \quad \frac{12x - 5y + 6}{-\sqrt{(12)^2 + (-5)^2}} = \frac{3x - 4y - 4}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$

$$\frac{12x - 5y + 6}{-\sqrt{169}} = \frac{3x - 4y - 4}{\sqrt{25}}$$

$$5(12x - 5y + 6) = -13(3x - 4y - 4)$$

$$60x - 25y + 30 = -39x + 52y + 52$$

$$99x - 77y - 22 = 0$$

$$9x - 7y - 2 = 0$$

En consecuencia, la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo es la recta $9x - 7x - 2 = 0$.

2 Determina las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por la intersección de las rectas $x + 2y - 3 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$.

Solución

Al aplicar la definición se determina que las distancias se relacionan de la siguiente manera:

$$d_1 = d_2 \text{ y } d_1 = -d_2$$

Si $d_1 = d_2$, entonces:

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}} = \frac{x-2y-2}{\sqrt{(1)^2(-2)^2}}$$

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}} = \frac{x-2y-2}{\sqrt{5}}$$

$$x + 2y - 3 = x - 2y - 2$$

$$x + 2y - 3 - x + 2y + 2 = 0$$

$$4y - 1 = 0$$

Si $d_1 = -d_2$, entonces:

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}} = -\frac{x-2y-2}{\sqrt{(1)^2(-2)^2}}$$

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}} = -\frac{x-2y-2}{\sqrt{5}}$$

$$x + 2y - 3 = -x + 2y + 2$$

$$x + 2y - 3 + x - 2y - 2 = 0$$

$$2x - 5 = 0$$

Finalmente, las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos son:

$$4y - 1 = 0;\ 2x - 5 = 0$$

EJERCICIO 19

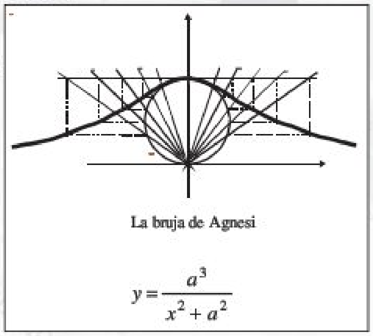
Resuelve los siguientes problemas:

1. Para el segmento definido por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-6, 1)$, determina la ecuación de la mediatriz.
2. Determina la ecuación general de la mediatriz del segmento formado por los puntos $A(3, 2)$ y $B(1, 5)$.
3. Encuentra la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas:
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \text{ y } y = 3$$
4. Obtén la ecuación de la bisectriz del ángulo obtuso formado por las rectas:
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-6} = 1 \text{ y } -\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{6}{\sqrt{5}} = 0$$
5. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas:
$$2x - y - 3 = 0 \text{ y } 2x + 4y + 5 = 0$$
6. Determina las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas:
$$3x - 4y + 5 = 0 \text{ y } 12x + 5y - 3 = 0$$
7. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son las rectas:
$$3x - 4y + 20 = 0;\ 4x + 3y - 25 = 0;\ 3x + 4y + 4 = 0$$
Obtén las ecuaciones de las bisectrices y su punto de intersección.

   Para el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-1, 3)$, $B(3, 5)$ y $C(5, -7)$:
8. Encuentra las ecuaciones de las mediatrices y su punto de intersección.
9. Determina las ecuaciones de las alturas y su punto de intersección.
10. ¿Cuáles son las ecuaciones de las medianas y su punto de intersección?
11. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices y su punto de intersección.
12. Obtén la ecuación de la recta de Euler (recta que pasa por el circuncentro, baricentro y ortocentro).

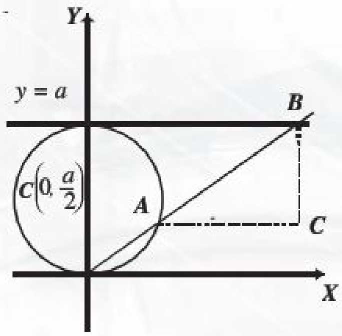
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

La bruja de AGNESI



Construcción de la gráfica de la bruja de Agnesi

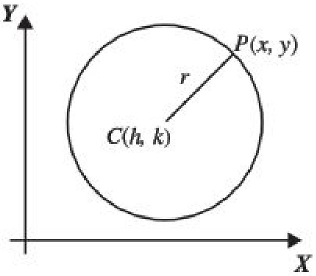
Se obtiene una circunferencia tangente al eje X con centro en el eje Y de coordenadas $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, se traza una recta tangente a la circunferencia paralela al eje X con ecuación $y = a$, se traza una recta secante que corte a la circunferencia en A y a la recta $y = a$ en B, se construye el punto C con la abscisa del punto B y la ordenada del punto A, formando un triángulo rectángulo.



Cuando el punto A recorre toda la circunferencia y el punto B la recta tangente, se forma una curva a la cual se conoce como la bruja de Agnesi.

Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia a un punto fijo llamado centro, siempre es constante.



Definición:

$$d_{CP} = r \rightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elementos:

C: centro

r: radio

$P(x, y)$: punto cualquiera de la circunferencia

Ecuaciones de la circunferencia

Las formas de expresar la ecuación de una circunferencia son las siguientes:

Ecuación en su forma ordinaria

Ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(h, k)$ y radio r.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ecuación en su forma general

Esta ecuación se obtiene al desarrollar los binomios e igualar a cero la ecuación ordinaria.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ con } A = C$$

Ecuación en su forma canónica

Si el centro de la circunferencia se encuentra en el origen, entonces su ecuación es de la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Análisis de la ecuación de una circunferencia

- Si r es positivo la circunferencia es real.
- Si r es negativo la circunferencia es imaginaria.
- Si r es igual a cero entonces representa un punto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una circunferencia tiene su centro en el origen y su radio es de 6 unidades. ¿Cuál es su ecuación en forma general?

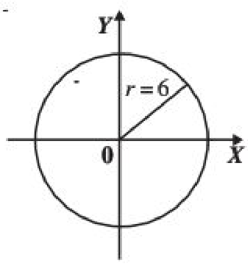
Solución

Se sustituye $r = 6$ en la forma canónica de la ecuación de la circunferencia y se transforma a la forma general:

$$x^2 + y^2 = 6^2$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

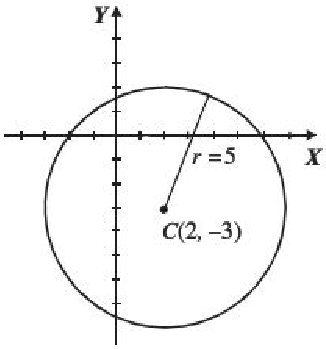
$$x^2 + y^2 - 36 = 0$$



2 Encuentra la ecuación general de la circunferencia con centro en (2, – 3) y radio 5.

Solución

Se sustituyen el centro y el radio en la ecuación ordinaria y se transforma a su forma general:



$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-2)^2+(y-(-3))^2=(5)^2$$
$$(x-2)^2+(y+3)^2=25$$
$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=25$$
$$x^2+y^2-4x+6y-12=0$$

Se concluye que la ecuación general de la circunferencia es $x^2+y^2-4y+6y-12=0$

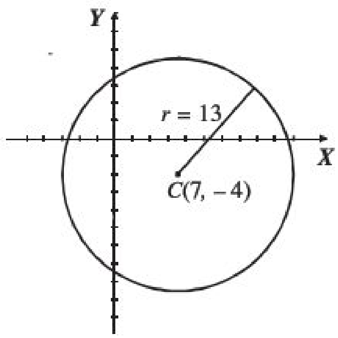
3 Determina la ecuación general de la circunferencia de centro en el punto (7, – 4) y que pasa por el punto (– 5, 1).

Solución

Por definición, la distancia del centro (7, – 4) al punto (– 5, 1) es el radio:

$$r=\sqrt{(7-(-5))^2+(-4-1)^2}=\sqrt{144+25}=13$$

El centro $C(7,-4)$ y el radio $r=13$ se sustituyen en la ecuación ordinaria:



$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-7)^2+(y-(-4))^2=(13)^2$$
$$(x-7)^2+(y+4)^2=169$$
$$x^2-14x+49+y^2+8y+16-169=0$$
$$x^2+y^2-14x+8y-104=0$$

La ecuación en su forma ordinaria es $(x-7)^2+(y+4)^2=169$ y en su forma general, $x^2+y^2-14x+8y-104=0$

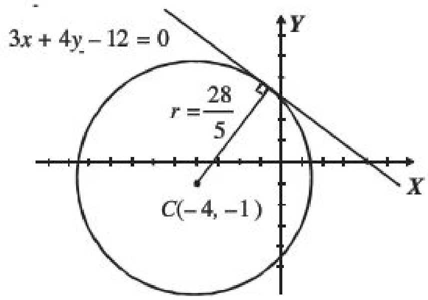
4 Obtén la ecuación general de la circunferencia con centro en $(-4, -1)$ y que es tangente a la recta $3x + 4y - 12 = 0$.

Solución

El radio de la circunferencia es la distancia del centro a la recta tangente.

$$r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(-4) + 4(-1) - 12|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-12 - 4 - 12|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-28|}{\sqrt{9+16}} = \frac{28}{\sqrt{25}} = \frac{28}{5}$$

Se sustituyen $r = \frac{28}{5}$ y el centro $C(-4, -1)$ en la forma ordinaria:



$$(x - (-4))^2 + (y - (-1))^2 = \left(\frac{28}{5}\right)^2$$

$$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = \frac{784}{25}$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = \frac{784}{25}$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y - \frac{359}{25} = 0$$

$$25x^2 + 25y^2 + 200x + 50y - 359 = 0$$

Por tanto, la ecuación general de la circunferencia es: $25x^2 + 25y^2 + 200x + 50y - 359 = 0$.

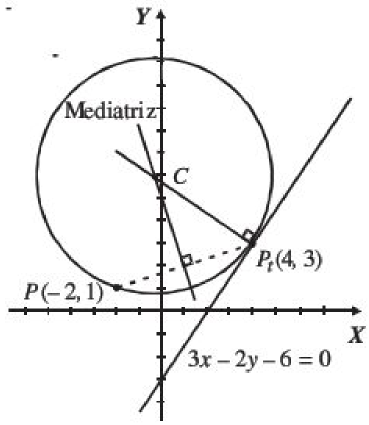
5 Determina la ecuación general de la circunferencia que pase por el punto $(-2, 1)$ y sea tangente a la recta $3x - 2y - 6 = 0$, en el punto $(4, 3)$.

Solución

Se traza la gráfica:

El centro es el punto de intersección entre la mediatriz del segmento $\overline{PP_t}$ y la ecuación perpendicular a la recta $3x - 2y - 6 = 0$.

El radio es la distancia del centro a cualquiera de los puntos que están sobre la circunferencia.



- Ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{PP_t}$

  Con el punto medio $(1, 2)$ y la pendiente perpendicular -3, se obtiene:

  $$3x + y - 5 = 0$$

- Ecuación de la recta perpendicular a $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto $(4, 3)$

  Con la pendiente perpendicular $-\frac{2}{3}$ y el punto $(4, 3)$, se obtiene:

  $$2x + 3y - 17 = 0$$

Se resuelve el sistema formado por las rectas $2x + 3y - 17 = 0$ y $3x + y - 5 = 0$ y se obtienen las coordenadas del centro (h, k):

$$C\left(-\frac{2}{7}, \frac{41}{7}\right)$$

El radio es la distancia que existe entre el centro y cualquiera de los puntos por los que pasa la circunferencia, por consiguiente se escoge el punto $(4, 3)$:

$$r = \sqrt{\left(4 - \left(-\frac{2}{7}\right)\right)^2 + \left(3 - \frac{41}{7}\right)^2} = \frac{10\sqrt{13}}{7}$$

Con el centro y el radio se encuentra la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \rightarrow \left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 = \left(\frac{10\sqrt{13}}{7}\right)^2$$

Al desarrollar y simplificar se obtiene la ecuación en su forma general:

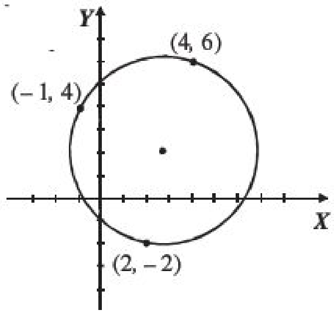
$$7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$$

6 Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2, -2)$, $B(-1, 4)$ y $C(4, 6)$.

Solución

Existen dos formas de resolver el problema:

1. Sustituir todos los puntos en la ecuación general y resolver el sistema de ecuaciones.
2. Obtener el centro con la intersección de las mediatrices de los segmentos formados por los puntos y posteriormente el radio con la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos.



Aplicación de la primera opción:

La ecuación general es $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, entonces si $A = C = 1$, se convierte en $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Sustitución del punto $A(2, -2)$

$$(2)^2 + (-2)^2 + D(2) + E(-2) + F = 0$$
$$4 + 4 + 2D - 2E + F = 0$$
$$\text{Primera ecuación:}\quad 2D - 2E + F = -8$$

Sustitución del punto $B(-1, 4)$

$$(-1)^2 + (4)^2 + D(-1) + E(4) + F = 0$$
$$1 + 16 - D + 4E + F = 0$$
$$\text{Segunda ecuación:}\quad -D + 4E + F = -17$$

Sustitución del punto $C(4, 6)$

$$(4)^2 + (6)^2 + D(4) + E(6) + F = 0$$
$$16 + 36 + 4D + 6E + F = 0$$
$$\text{Tercera ecuación:}\quad 4D + 6E + F = -52$$

Resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, resolviendo:

$$2D - 2E + F = -8$$
$$-D + 4E + F = -17$$
$$4D + 6E + F = -52$$

Se obtienen los valores de D, E y F,

$$D = -\frac{16}{3},\ E = -\frac{25}{6} \text{ y } F = -\frac{17}{3}$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

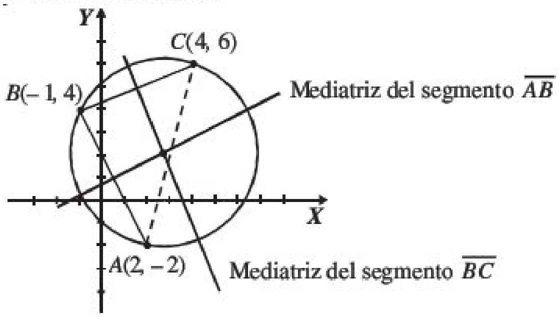
Por tanto, se concluye que la ecuación es:

$$x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{17}{3} = 0$$

Ahora bien, al multiplicar por seis para eliminar los denominadores, se obtiene:

$$6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$$

Para la segunda opción, se utilizan las mediatrices:



Se obtienen las ecuaciones de las mediatrices de los segmentos:

Mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Coordenadas del punto medio:

$$P_m\left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)=P_m\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Pendiente del segmento:

$$m=\frac{4-(-2)}{-1-2}=-2$$

Pendiente de la mediatriz:

$$m'=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$$

Ecuación de la mediatriz:

$$y-1=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) \rightarrow 2x-4y+3=0$$

Mediatriz del segmento $\overline{BC}$.

Coordenadas del punto medio:

$$P_m\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{4+6}{2}\right)=P_m\left(\frac{3}{2}, 5\right)$$

Pendiente del segmento:

$$m=\frac{6-4}{4-(-1)}=\frac{2}{5}$$

Pendiente de la mediatriz:

$$m'=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{\frac{2}{5}}=-\frac{5}{2}$$

Ecuación de la mediatriz:

$$y-5=-\frac{5}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right) \rightarrow 10x+4y-35=0$$

Para buscar el centro de la circunferencia se resuelve el sistema de ecuaciones formado con las mediatrices:

$$\begin{cases}2x-4y+3=0\\10x+4y-35=0\end{cases}$$

El punto de intersección de las rectas es $\left(\frac{8}{3},\frac{25}{12}\right)$, representa el centro de la circunferencia. Para obtener el radio, se calcula la distancia del centro al punto $B(-1, 4)$ o a cualquiera de los otros puntos.

$$r=\sqrt{\left(\frac{8}{3}-(-1)\right)^2+\left(\frac{25}{12}-4\right)^2} \rightarrow r=\sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2+\left(-\frac{23}{12}\right)^2} \rightarrow r=\sqrt{\frac{2465}{144}}$$

Se sustituyen el centro $\left(\frac{8}{3},\frac{25}{12}\right)$ y el radio $r=\sqrt{\frac{2465}{144}}$ en la ecuación ordinaria de la circunferencia y se transforma a su forma general.

$$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{25}{12}\right)^2=\sqrt{\frac{2465}{144}} \rightarrow x^2-\frac{16x}{3}+\frac{64}{9}+y^2-\frac{25y}{6}+\frac{625}{144}-\frac{2465}{144}=0$$

$$x^2+y^2-\frac{16x}{3}-\frac{25y}{6}-\frac{17}{3}=0$$

$$6x^2+6y^2-32x-25y-34=0$$

Se observa que por cualquiera de los dos métodos, la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados o circunscrita en el triángulo es:

$$6x^2+6y^2-32x-25y-34=0$$

EJERCICIO 20

De los siguientes ejercicios, encuentra la ecuación en su forma general:

1. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio de 4 unidades?
2. Determina la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y radio de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ unidades.
3. Encuentra la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $C(1, -3)$ y radio de 2 unidades.
4. Obtén la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $\left(-\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$ y radio de $\frac{5}{6}$.
5. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y que pasa por el punto $(2, -3)$?
6. Encuentra la ecuación de la circunferencia de diámetro el segmento formado por los puntos $A(-4, 7)$ y $B(6, -1)$.
7. Determina la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $C(1, -3)$ y que pasa por el punto $(4, 3)$.
8. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en $(-1, -5)$ y es tangente al eje Y?
9. El centro de una circunferencia es el punto $(5, -2)$ y pasa por el origen. ¿Cuál es su ecuación?
10. Obtén la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $(-4, 2)$ y diámetro 8.
11. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes coordenados, su radio es de 5 unidades y su centro está en el cuarto cuadrante?
12. Una circunferencia tiene su centro en el eje X y pasa por los puntos $(-1, 5)$ y $(2, 3)$. Determina su ecuación.
13. El centro de una circunferencia está en el eje Y y pasa por $(0, -2)$ y $(3, -6)$. Encuentra su ecuación.
14. Una circunferencia tiene su centro en $(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. ¿Cuál es su ecuación?
15. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en $(4, -3)$ y que es tangente a la recta $3x + 4y - 10 = 0$?
16. El radio de una circunferencia es 4 y su centro está en las intersecciones de las rectas $x + 3y - 7 = 0$ y $2x + 5y - 12 = 0$. Obtén su ecuación.
17. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $2x - 3y - 6 = 0$, $3x + y + 13 = 0$, además, es tangente a la recta $5x + 12y - 106 = 0$.
18. Una circunferencia pasa por el punto $(1, -6)$ y su centro está en la intersección de las rectas $4x - 7y + 10 = 0$ y $7x + 3y - 13 = 0$. Encuentra su ecuación.

Encuentra las ecuaciones de las circunferencias que pasan por los siguientes puntos.

19. $(3, 4)$, $(2, -1)$ y $(0, -3)$
20. $(9, -1)$, $(7, 3)$ y $(4, -8)$
21. $(-2, -2)$, $(-2, 1)$ y $(7, 0)$
22. $(-1, -1)$, $(1, 1)$ y $(5, -3)$
23. Encuentra la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo, cuyos vértices son los puntos $(-4, 2)$, $\left(\frac{8}{5},\frac{31}{5}\right)$ y $(16, -13)$.

Para los ejercicios 24 a 27 utiliza el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(3, -2)$, $B(1, 2)$ y $C(-5, -4)$.

24. Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita en él.
25. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo?
26. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice A y es tangente al lado BC.
27. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $2x + 3y + 1 = 0$ y que pasa por los vértices A y C?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación de la ecuación general a la forma ordinaria

Sea la ecuación de la circunferencia $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, en su forma general y $A = C$, entonces para hallar el centro y el radio se siguen los siguientes pasos:

$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$ Se divide la ecuación entre A.

$$x^2 + \frac{D}{A}x + y^2 + \frac{E}{A}y = -\frac{F}{A}$$ Se agrupan los términos de x y y, el término independiente se pasa al segundo miembro.

$$x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2} + y^2 + \frac{E}{A}y + \frac{E^2}{4A^2} = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}$$ Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$ Se factoriza.

Ahora, al comparar la ecuación con su forma ordinaria se obtiene:

$$Centro = \left(-\frac{D}{2A},\ -\frac{E}{2A}\right) \text{ y } radio = \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}$$

Lo anterior indica que para transformar la ecuación general a la forma ordinaria se utilizan los siguientes métodos:

- Fórmula
- Completando trinomio cuadrado perfecto

Con los cuales se encuentran las coordenadas del centro y la longitud del radio de una circunferencia.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Emplea las fórmulas para obtener el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$$

Solución

Se determinan los valores de A, D, E y F:

$$A = 1, D = 4, E = -6 \text{ y } F = 6$$

Éstos se sustituyen en las fórmulas:

$$Centro = \left(-\frac{4}{2(1)}, -\frac{(-6)}{2(1)}\right) = (-2,\ 3) \text{ y } radio = \frac{1}{2(1)}\sqrt{(4)^2 + (-6)^2 - 4(1)(6)} = \frac{1}{2}\sqrt{28} = \sqrt{7}$$

Se concluye que el centro es el punto $(-2, 3)$ y el radio $\sqrt{7}$.

2 Para la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

Determina completando los trinomios cuadrados perfectos el centro y el radio.

Solución

$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) = 11$ Se agrupan los términos en x y en y, el término independiente se pasa al segundo miembro.

$(x^2 - 6x + (3)^2) + (y^2 + 8y + (4)^2) = 11 + (3)^2 + (4)^2$ Se completan los trinomios cuadrados perfectos.

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 36$

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 6^2$ Se factoriza para obtener la forma ordinaria.

Resulta que las coordenadas del centro son $C(3, -4)$ y el radio $r = 6$.

3 Encuentra las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia, cuya ecuación es:

$$9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y + 10 = 0$$

Solución

$9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y + 10 = 0$

$\frac{9x^2}{9}+\frac{9y^2}{9}+\frac{18x}{9}-\frac{12}{9}y+\frac{10}{9}=0$ Se divide entre nueve la ecuación.

$x^2+y^2+2x-\frac{4}{3}y+\frac{10}{9}=0$ Se agrupan los términos de x y y y se pasa al segundo miembro el término independiente.

$x^2+2x+1+y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}=-\frac{10}{9}+1+\frac{4}{9}$ Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$(x+1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$ Se factoriza y simplifica para obtener la ecuación ordinaria.

Finalmente, las coordenadas del centro son $C\left(-1,\ \frac{2}{3}\right)$ y el radio $r=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

4 ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(-4, -1)$ y es concéntrica con la circunferencia C_1: $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$?

Nota: Concéntricas: tienen el mismo centro.

Solución

Se obtiene el centro de la circunferencia C_1:

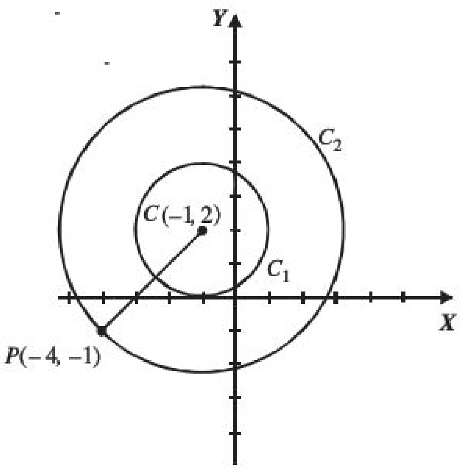
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 4y = -1$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -1 + 1 + 4$$
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Entonces, el centro es $C(-1, 2)$.

El radio de C_2 se obtiene de la distancia del centro $C(-1,2)$ al $(-4, -1)$.

$$r=\sqrt{(-4-(-1))^2+(-1-2)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

Gráfica:



Por consiguiente, la ecuación de la circunferencia C_2 es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \rightarrow (x-(-1))^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{18}\right)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 18$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0$$

La ecuación de la circunferencia C_2 está determinada por:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0$$

5 Obtén la ecuación general de la circunferencia que es tangente a la recta $x + y - 2 = 0$ y concéntrica con la circunferencia $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 0$.

Solución

Se obtiene el centro de $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 0$

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 0 \rightarrow \frac{3x^2}{3} + \frac{3y^2}{3} - \frac{6}{3}x - \frac{4}{3}y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - \frac{4}{3}y = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - \frac{4}{3}y = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = 1 + \frac{4}{9}$$

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9}$$

El centro de la circunferencia es $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$.

El radio es la distancia del punto $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$ a la recta $x + y - 2 = 0$, entonces,

$$r = \frac{\left|1 + \frac{2}{3} - 2\right|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{\left|-\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Por consiguiente, la ecuación general de la circunferencia con centro en $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$ y radio $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Al multiplicar por 18,

$$18x^2 - 36x + 18 + 18y^2 - 24y + 8 = 1$$

$$18x^2 + 18y^2 - 36x - 24y + 25 = 0$$

6 Determina los puntos de intersección de las circunferencias:

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x + 16y = 0\ ;\ C_2: x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$$

Solución

Se restan las ecuaciones de las circunferencias, para eliminar los términos cuadráticos:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 2x + 16y = 0 \\ -\ \underline{\left(x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0\right)} \\ 4x + 20y = 0 \end{array}$$

Se despeja x de la última igualdad:

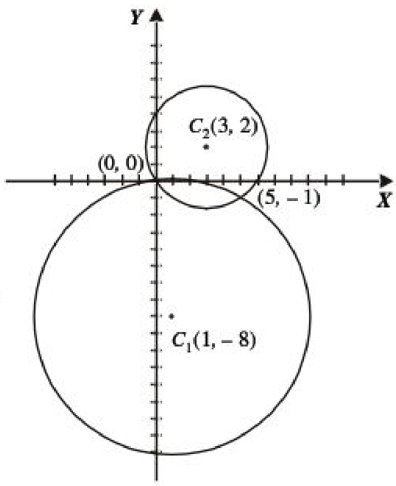
$$x = -\frac{20y}{4} \rightarrow x = -5y$$

Se sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones de las circunferencias:

$$(-5y)^2 + y^2 - 2(-5y) + 16y = 0$$

$$25y^2 + y^2 + 10y + 16y = 0$$

$$26y^2 + 26y = 0$$



Esta última ecuación se resuelve y se obtiene:

$$26y^2+26y=0 \rightarrow 26y(y+1)=0$$

$$y=0;\ y=-1$$

Los valores obtenidos de y se sustituyen en la igualdad $x = -5y$ para obtener los valores de x:

Para $y = 0$	Para $y = -1$
$x = -5(0)$	$x = -5(-1)$
$x = 0$	$x = 5$

Entonces, los puntos de intersección de las circunferencias son: $(0, 0)$ y $(5, -1)$.

EJERCICIO 21

Determina el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

1. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 20 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 14 = 0$
5. $x^2 + y^2 + 14x - 8y + 40 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$
7. $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$
8. $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 3 = 0$
9. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + 9 = 0$
10. $5x^2 + 5y^2 - 2x - 30y + 42 = 0$
11. $12x^2 + 12y^2 - 18x + 4y + 5 = 0$
12. $36x^2 + 36y^2 + 48x - 36y - 299 = 0$
13. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto $(7, 5)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 16y - 22 = 0$.
14. Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por el punto $(3, 5)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 7x + y - 10 = 0$, en el punto $(1, 1)$.
15. ¿Cuál es la ecuación general de la circunferencia de radio $\sqrt{13}$ y es tangente a la recta $2x + 3y - 7 = 0$, en el punto $(2, 1)$?
16. Obtén la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 16 = 0$ y $x^2 + y^2 + 17x + 3y + 2 = 0$, y cuyo centro está sobre la recta $x + 2y + 5 = 0$.
17. Determina el valor de k para que la recta $kx + y - 15 = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 = 0$.
18. ¿Cuáles son los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 26 = 0$ con la recta $x - y + 8 = 0$?
19. Encuentra los puntos de intersección de la recta $2x + 3y - 10 = 0$ con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 28 = 0$.
20. ¿Cuáles son los puntos de intersección de la recta $5x - 7y - 35 = 0$ con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 36 = 0$?
21. Encuentra los puntos de intersección de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 12x - 14y + 72 = 0\ ;\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

22. Determina los puntos de intersección de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0\ ;\ x^2 + y^2 - 16x - 2y + 45 = 0$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Familia o haz de circunferencias

Son aquellas circunferencias que satisfacen la condición:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=p^2$$

Donde p es el parámetro y es un número positivo.

EJEMPLOS

1 Representa gráficamente la familia de circunferencias con centro en el punto $(2,-3)$ y $p=1$, 2 y 3.

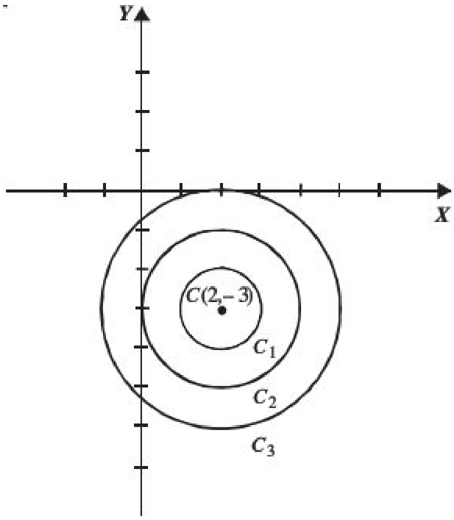
Solución

Se trata de una familia de circunferencias concéntricas.

Las ecuaciones de las circunferencias son:

$$C_1: (x-2)^2+(y+3)^2=1 \quad \text{o} \quad x^2+y^2-4x+6y+12=0$$
$$C_2: (x-2)^2+(y+3)^2=4 \quad \text{o} \quad x^2+y^2-4x+6y+9=0$$
$$C_3: (x-2)^2+(y+3)^2=9 \quad \text{o} \quad x^2+y^2-4x+6y+4=0$$

Sus representaciones gráficas son:



EJERCICIO 22

Representa gráficamente las siguientes familias de circunferencias:

1. Centro en el punto $(1, 2)$ y $p=1$, 2 y 3
2. Centro en el punto $(-2,-3)$ y $p=1$, 3 y 5
3. Centro en el origen y $p=2$, 4 y 6
4. $(x-1)^2+(y-3)^2=p^2$
5. $x^2+(y-2)^2=p^2$
6. $x^2+y^2=p^2$
7. Centro en el punto $(-3, 4)$ y $p=2, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
8. $(x+2)^2+(y-3)^2=p^2$
9. $(x-3)^2+y^2=p^2$
10. Centro en el punto $(0,-2)$ y $p=2$, 4 y 6

Determina la familia de circunferencias que cumplen las siguientes condiciones:

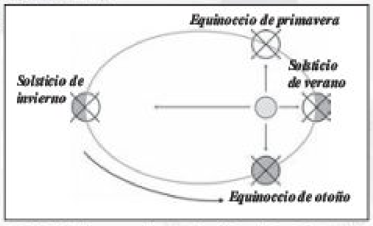
11. Centro en la intersección de las rectas $2x+3y-5=0$, $x-4y+3=0$
12. Centro en el punto medio del segmento, cuyos extremos son $(3,-2)$ y $(-5,-4)$
13. Concéntricas con $x^2+y^2+4x-6y-12=0$
14. Concéntricas con la circunferencia que pasa por los puntos $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1,-1)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 24

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

El eje TERRESTRE



Movimiento de traslación de la Tierra

El eje terrestre es una línea imaginaria que atraviesa la Tierra y pasa por su centro.

La traslación, sumada a la inclinación del eje terrestre, hace que la Tierra ocupe distintas posiciones respecto al Sol durante el año que demora en completar su órbita. Esto origina la sucesión de las distintas estaciones (verano, otoño, invierno y primavera).

Debido a la inclinación de la Tierra, siempre hay una mitad que está más cerca del Sol. Esto provoca diferencias en las temperaturas y en la duración del día y la noche durante el año. Cada variación brusca de estos factores marca el inicio de una de las cuatro estaciones.

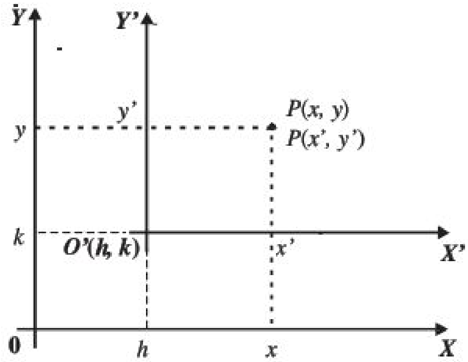
Cuando es el polo norte el que se inclina hacia el Sol (de marzo a septiembre), los rayos solares llegan con intensidad al hemisferio norte, lo que determina la sucesión de la primavera y el verano, mientras que en el hemisferio sur se suceden el otoño y el invierno, el polo sur está en oscuridad. La situación se invierte cuando es el hemisferio sur el que se inclina hacia el Sol, de septiembre a marzo. En el verano los días (horas de sol) son prolongados, por el contrario, en el invierno, son mucho más cortos, ya que el Sol sale tarde y se pone temprano.

Traslación de ejes

Desplazamiento de los ejes de un sistema de coordenadas rectangulares, de tal manera que el nuevo origen sea el punto $O'(h, k)$. La traslación se utiliza para eliminar los términos lineales de la ecuación de segundo grado de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Fórmulas que relacionan el sistema de coordenadas $X'Y'$ con el sistema XY.



Ecuaciones de traslación:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

Traslación de un punto a un nuevo sistema de coordenadas

Ejemplo

Si el origen se traslada al punto (1, 1), ¿cuáles son las coordenadas del punto (– 3, 6)?

Solución

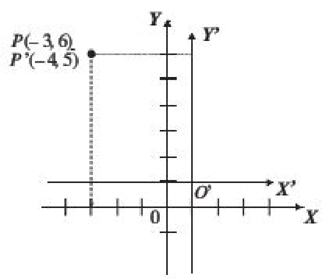
Se calculan los valores de x, y, h y k:

$$x = -3,\ y = 6,\ h = 1 \text{ y } k = 1$$

Los valores se sustituyen en las ecuaciones de traslación, para encontrar el valor de x' y y':

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

$$-3 = x' + 1 \qquad 6 = y' + 1$$
$$-3 - 1 = x' \qquad 6 - 1 = y'$$
$$x' = -4 \qquad y' = 5$$



Por tanto, las coordenadas del punto en el nuevo sistema son:

$$(-4, 5)$$

Transformación de una curva trasladando el origen

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$, trasladando el origen al punto $C(2, -2)$.

Solución

El nuevo origen es el punto $C(h, k) = C(2, -2)$, entonces $h = 2$ y $k = -2$.

Se sustituyen los valores en las ecuaciones de traslación:

$$x = x' + h = x' + 2 \qquad y = y' + k = y' - 2$$

Éstas se sustituyen en la ecuación de la circunferencia:

$$(x' + 2)^2 + (y' - 2)^2 - 4(x' + 2) + 4(y' - 2) = 0$$

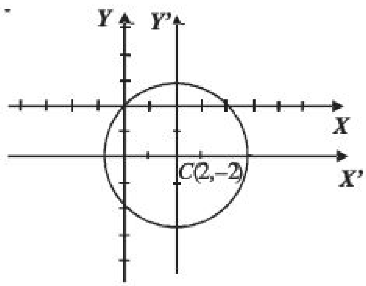
Se desarrollan las operaciones indicadas y se simplifica para obtener:

$$x'^2 + 4x' + 4 + y'^2 - 4y' + 4 - 4x' - 8 + 4y' - 8 = 0$$
$$x'^2 + y'^2 + 4x' - 4x' - 4y' + 4y' + 4 + 4 - 8 - 8 = 0$$
$$x'^2 + y'^2 - 8 = 0$$

Finalmente, la ecuación que resulta es:

$$x'^2 + y'^2 - 8 = 0$$

Gráfica



2 Encuentra la nueva ecuación de la curva $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$, si se traslada el origen al punto $(2, -1)$.

Solución

Al sustituir $h = 2$ y $k = -1$ en las ecuaciones de traslación $x = x' + h$; $y = y' + k$, se determina que:

$$x = x' + 2,\ y = y' - 1$$

Los valores de x y y se sustituyen en la ecuación $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y = 7$, se desarrollan los binomios y se reducen términos semejantes para obtener la nueva ecuación.

$$2(x' + 2)^2 + 3(y' - 1)^2 - 8(x' + 2) + 6(y' - 1) = 7$$
$$2(x'^2 + 4x' + 4) + 3(y'^2 - 2y' + 1) - 8x' - 16 + 6y' - 6 = 7$$
$$2x'^2 + 8x' + 8 + 3y'^2 - 6y' + 3 - 8x' - 16 + 6y' - 6 = 7$$
$$2x'^2 + 3y'^2 - 18 = 0$$

3 Determina la nueva ecuación de la curva $y^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 4y - 3$, si el origen se mueve al punto $(-1, 2)$.

Solución

Se sustituyen los valores de h y k en las ecuaciones de traslación.

$$x = x' - 1$$

$$y = y' + 2$$

Las ecuaciones se sustituyen en la ecuación de la curva y se desarrollan las operaciones indicadas.

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 4y - 3$$

$$(y' + 2)^2 = (x' - 1)^3 + 3(x' - 1)^2 + 3(x' - 1) + 4(y' + 2) - 3$$

$$y'^2 + 4y' + 4 = x'^3 - 3x'^2 + 3x' - 1 + 3(x'^2 - 2x' + 1) + 3(x' - 1) + 4(y' + 2) - 3$$

$$y'^2 = x'^3 - 3x'^2 + 3x' - 1 + 3x'^2 - 6x' + 3 + 3x' - 3 + 4y' + 8 - 3 - 4y' - 4$$

Se simplifican términos semejantes para obtener la nueva ecuación.

$$y'^2 = x'^3$$

EJERCICIO 23

Determina las nuevas coordenadas de los siguientes puntos, de tal manera que se trasladen los ejes coordenados al nuevo origen indicado.

1. $A(4, -1)$; $O'(2, -3)$
2. $B(5, 2)$; $O'(-4, 1)$
3. $C(0, 5)$; $O'(1, 1)$
4. $D(-6, -4)$; $O'(4, 0)$
5. $E(0, 0)$; $O'(8, -7)$

Transforma las siguientes ecuaciones, trasladando los ejes coordenados al nuevo origen indicado.

6. $y^2 - 8x - 6y - 7 = 0$; $(-2, 3)$
7. $x^2 + 2x - 4y + 5 = 0$; $(-1, 1)$
8. $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$; $(2, 0)$
9. $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$; $(-3, 5)$
10. $4y^2 - 48x - 4y + 49 = 0$; $\left(1, \frac{1}{2}\right)$
11. $9x^2 + 16y^2 - 32y - 128 = 0$; $(0, 1)$
12. $4x^2 + 5y^2 - 32x + 10y + 49 = 0$; $(4, -1)$
13. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y = 0$; $(2, 3)$
14. $x^2 - 2y^2 - 2x + 12y - 19 = 0$; $(1, 3)$
15. $4x^2 - 9y^2 - 24x + 108y - 324 = 0$; $(3, 6)$
16. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 11$; $(2, -3)$
17. $y^2 = x^3 + 3x^2 + 3x - 2y - 1$; $(-1, -1)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación de una ecuación

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el nuevo origen para que la ecuación de la curva $y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$, al realizar una transformación, no tenga términos lineales.

Solución

Se sustituyen las ecuaciones de traslación $x = x' + h$, $y = y' + k$, en la ecuación dada.

$$y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$$
$$(y' + k)^2 + 4(x' + h) - 10(y' + k) + 25 = 0$$

Se desarrollan las operaciones indicadas.

$$y'^2 + 2ky' + k^2 + 4x' + 4h - 10y' - 10k + 25 = 0$$

Se agrupan los términos x' y y' y se factorizan por término común.

$$y'^2 + 2ky' - 10y' + 4x' + k^2 + 4h - 10k + 25 = 0$$
$$y'^2 + (2k - 10)y' + 4x' + (k^2 + 4h - 10k + 25) = 0$$

Para que la ecuación no tenga términos lineales se igualan con cero los coeficientes de éstos, para determinar el valor de las incógnitas.

$$2k - 10 = 0$$
$$2k = 10$$
$$k = 5$$

El coeficiente del término lineal x' es distinto de cero, entonces se igualan con cero los términos independientes, se sustituye el valor encontrado y se resuelve la ecuación.

$$k^2 + 4h - 10k + 25 = 0$$
$$(5)^2 + 4h - 10(5) + 25 = 0$$
$$25 + 4h - 50 + 25 = 0$$
$$4h = 0$$
$$h = 0$$

Finalmente, el nuevo origen es el punto $O'(0, 5)$ y la ecuación transformada es:

$$y'^2 + 4x' = 0$$

2 Elimina los términos lineales mediante una traslación de ejes y determina el nuevo origen de la ecuación:

$$x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 23 = 0$$

Solución

Al sustituir las ecuaciones de traslación $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación dada.

$$(x' + h)^2 + 9(y' + k)^2 + 4(x' + h) - 18(y' + k) - 23 = 0$$

Se desarrollan las operaciones indicadas.

$$x'^2 + 2x'h + h^2 + 9(y'^2 + 2y'k + k^2) + 4x' + 4h - 18y' - 18k - 23 = 0$$
$$x'^2 + 2x'h + h^2 + 9y'^2 + 18y'k + 9k^2 + 4x' + 4h - 18y' - 18k - 23 = 0$$

Se agrupan los términos lineales y se factoriza a x' y y' como término común.

$$x'^2 + 9y'^2 + (2h + 4)x' + (18k - 18)y' + h^2 + 9k^2 + 4h - 18k - 23 = 0$$

Para eliminar los términos lineales x' y y', los coeficientes se igualan con cero y se resuelven las ecuaciones que resultan.

$$\begin{aligned} 2h + 4 &= 0 \qquad & 18k - 18 &= 0 \\ 2h &= -4 & 18k &= 18 \\ h &= -2 & k &= 1 \end{aligned}$$

Entonces, el nuevo origen tiene coordenadas $(-2, 1)$.

Los valores de h y k se sustituyen en la ecuación:

$$x'^2 + 9y'^2 + (2h + 4)x' + (18k - 18)y' + h^2 + 9k^2 + 4h - 18k - 23 = 0$$

Se obtiene la ecuación referida al nuevo origen.

$$x'^2 + 9y'^2 + (2h + 4)x' + (18k - 18)y' + h^2 + 9k^2 + 4h - 18k - 23 = 0$$
$$x'^2 + 9y'^2 + \left[2(-2)+4\right]x' + \left[18(1)-18\right]y' + \left[(-2)^2+9(1)^2+4(-2)-18(1)-23\right] = 0$$
$$x'^2 + 9y'^2 + (-4 + 4)x' + (18 - 18)y' + (4 + 9 - 8 - 18 - 23) = 0$$
$$x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

Por tanto, el nuevo origen y la ecuación sin términos lineales son:

$$O'(-2, 1);\ x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

3 Transforma la ecuación $3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 135 = 0$ en otra que no tenga términos de primer grado.

Solución

Al sustituir $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación:

$$3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 135 = 0$$
$$3(x' + h)^2 - 4(y' + k)^2 + 6(x' + h) + 24(y' + k) - 135 = 0$$
$$3(x'^2 + 2x'h + h^2) - 4(y'^2 + 2y'k + k^2) + 6x' + 6h + 24y' + 24k - 135 = 0$$
$$3x'^2 + 6x'h + 3h^2 - 4y'^2 - 8y'k - 4k^2 + 6x' + 6h + 24y' + 24k - 135 = 0$$
$$3x'^2 - 4y'^2 + (6h + 6)x' + (-8k + 24)y' + 3h^2 - 4k^2 + 6h + 24k - 135 = 0$$

Donde:

$$6h + 6 = 0 \qquad -8k + 24 = 0$$
$$6h = -6 \qquad -8k = -24$$
$$h = -1 \qquad k = 3$$

Por consiguiente, las coordenadas del nuevo origen son $(-1, 3)$.

Se sustituyen estos valores en la ecuación:

$$3x'^2 - 4y'^2 + (6h + 6)x' + (-8k + 24)y' + 3h^2 - 4k^2 + 6h + 24k - 135 = 0$$

se obtiene:

$$3x'^2 - 4y'^2 + (6(-1) + 6)x' + (-8(3) + 24)y' + 3(-1)^2 - 4(3)^2 + 6(-1) + 24(3) - 135 = 0$$
$$3x'^2 - 4y'^2 + (-6 + 6)x' + (-24 + 24)y' + 3(1) - 4(9) - 6 + 72 - 135 = 0$$
$$3x'^2 - 4y'^2 + 3 - 36 - 6 + 72 - 135 = 0$$
$$3x'^2 - 4y'^2 - 102 = 0$$

4 Transforma la ecuación $x^3 + 3x^2 + 3x + y = 0$, mediante una traslación de ejes de coordenadas o una que no tenga términos lineales.

Solución

Sustituir $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + y = 0$$
$$(x' + h)^3 + 3(x' + h)^2 + 3(x' + h) + (y' + k) = 0$$

Se desarrollan las operaciones, se agrupan los términos lineales y se factorizan como término común.

$$x'^3 + 3hx'^2 + 3h^2x' + h^3 + 3x'^2 + 6hx' + 3h^2 + 3x' + 3h + y' + k = 0$$
$$x'^3 + 3hx'^2 + 3x'^2 + 3h^2x' + 6hx' + 3x' + y' + h^3 + 3h^2 + 3h + k = 0$$
$$x'^3 + (3h + 3)x'^2 + (3h^2 + 6h + 3)x' + y' + (h^3 + 3h^2 + 3h + k) = 0$$

Se iguala con cero el término de primer grado y se resuelve la ecuación.

$$3h^2 + 6h + 3 = 0$$
$$h^2 + 2h + 1 = 0$$
$$(h + 1)^2 = 0$$
$$h = -1$$

El coeficiente de y' es distinto de cero, se igualan con cero los términos independientes y se sustituye el valor encontrado de h y se resuelve la ecuación.

$$h^3 + 3h^2 + 3h + k = 0$$
$$(-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + k = 0$$
$$k = 1$$

Por tanto, las coordenadas del nuevo origen son: $(-1, 1)$.

Los valores de h y k se sustituyen en la ecuación.

$$x'^3 + (3h + 3)x'^2 + (3h^2 + 6h + 3)x' + y' + (h^3 + 3h^2 + 3h + k) = 0$$

Finalmente, la ecuación transformada es:

$$x'^3 + y' = 0$$

EJERCICIO 24

Mediante una traslación de ejes reduce las siguientes ecuaciones a otras que carezcan de los términos lineales.

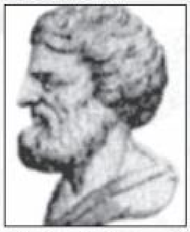
1. $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$
2. $y^2 - 16x + 80 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$
4. $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 13 = 0$
5. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$
6. $16x^2 + 16y^2 + 64x - 160y + 455 = 0$
7. $25x^2 - 16y^2 + 96y + 256 = 0$
8. $y^3 + 3y^2 - x + 3y - 3 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 25

PARÁBOLA

Reseña HISTÓRICA

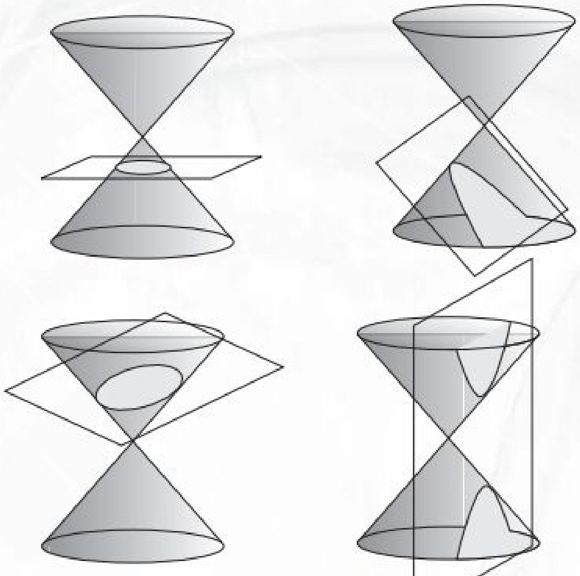


Apolonio de Perga
(262 *a. C.*–190 *a. C.*)

Conocido como "el gran geómetra". Se sabe poco de su vida, pero sus trabajos tuvieron una gran influencia en el desarrollo de las matemáticas, en particular su famoso libro *Las cónicas*, introdujo términos tan familiares hoy en día como parábola, elipse e hipérbola.

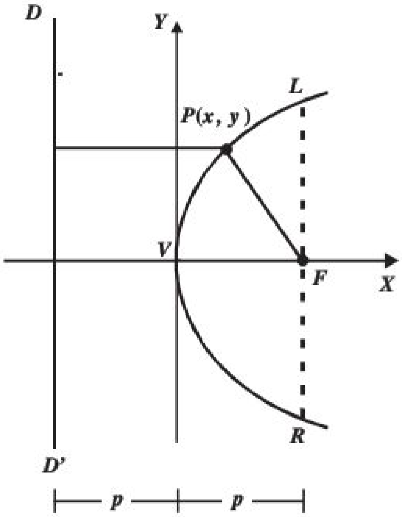
Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes. Algunas de esas propiedades son las que se utilizan actualmente para definirlas. Quizá las propiedades más interesantes y útiles que descubrió de las cónicas son las propiedades de reflexión. Si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira.

La circunferencia, parábola, elipse e hipérbola son llamadas cónicas porque se pueden obtener haciendo cortes en un cono circular recto doble con un plano.



Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y una recta fija, llamada directriz.



$\overline{PF} = \overline{PD}$

Elementos:

V: Vértice

F: Foco

$\overline{DD'}$: Directriz

LR: Lado recto, $LR = |4p|$

p: parámetro
(distancia del vértice al foco o a la directriz)

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan del punto $F(0, 3)$ y de la recta $y + 3 = 0$.

Solución

Con las fórmulas de distancia entre dos puntos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y distancia de un punto a una recta $d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto $P(x, y)$ a F y a la recta:

$$\overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2},\ \overline{PD} = \frac{y+3}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

Al igualar:

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = y + 3$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = (y+3)^2$$

Se desarrolla y se simplifica para obtener la ecuación del lugar geométrico, denominada parábola.

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9$$

$$x^2 - 12y = 0$$

2 Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto del plano que se mueve de tal forma que su distancia al punto (2, 1) siempre es igual a su distancia a la recta $x + 2y - 3 = 0$.

Solución

Se obtienen las distancias,

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\ ,\ \overline{PD} = \frac{x+2y-3}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

Al igualar,

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros y reducir términos semejantes, resulta la ecuación que se busca,

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = \frac{x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y}{5}$$

$$5x^2 + 5y^2 - 20x - 10y + 25 = x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 14x + 2y + 16 = 0$$

EJERCICIO 25

1. Un punto del plano se mueve de tal forma que su distancia al punto $(-2, 0)$ es igual a su distancia a la recta $x - 2 = 0$. Determina la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto.
2. Un punto se mueve en el plano de tal manera que equidista del punto $(0, -1)$ y de la recta $y - 1 = 0$. Encuentra la ecuación del lugar geométrico que describe.
3. Un punto $P(x, y)$ se mueve de manera que su distancia al punto $(3, -1)$ es siempre igual a su distancia a la recta $x + 3 = 0$. Determina la ecuación del lugar geométrico.
4. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta $y + 4 = 0$ y del punto $(0, 4)$.
5. Obtén la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia del punto $(2, 4)$ y de la recta $y - 6 = 0$.
6. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, de los cuales su distancia a la recta $x + 1 = 0$ es igual a su distancia al punto $(-7, 2)$.
7. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $(0, 3)$ y de la recta $x + y - 4 = 0$.
8. Un punto del plano se mueve de tal forma que su distancia al punto $(2, -1)$ es igual a su distancia a la recta $2x + 3y - 1 = 0$. Obtén la ecuación del lugar geométrico que describe el punto.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la parábola con vértice en el origen

Sea una parábola con vértice en el origen, foco $F(p, 0)$ donde p es el parámetro y su directriz $x = -p$. Se toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, y la de distancia de un punto a una recta $d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto P al foco y a la directriz.

La distancia de P al foco es:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

La distancia de P a la recta $x + p = 0$ es:

$$\overline{PF} = \frac{1(x) + 0(y) + p}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}} = x + p$$

Ahora se igualan las distancias:

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = x + p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se determina que:

$$\left(\sqrt{(x - p)^2 + y^2}\right)^2 = (x + p)^2$$

$$(x - p)^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - x^2 - 2px - p^2 = 0$$

$$y^2 - 4px = 0$$

Si el foco está sobre el eje Y, $F(0, p)$ donde p es el parámetro y su directriz la recta $y = -p$ y vértice en el origen, al aplicar la definición el resultado es el siguiente:

$$\sqrt{(y - p)^2 + x^2} = y + p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se obtiene:

$$\left(\sqrt{(y - p)^2 + x^2}\right)^2 = (y + p)^2$$

$$(y - p)^2 + x^2 = y^2 + 2py + p^2$$

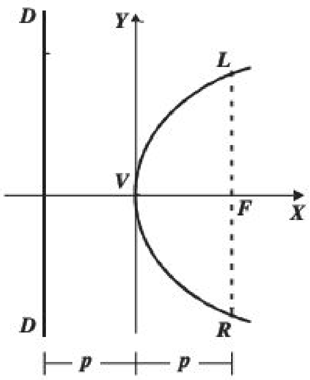
$$y^2 - 2py + p^2 + x^2 - y^2 - 2py - p^2 = 0$$

$$x^2 - 4py = 0$$

Elementos y ecuación de una parábola con vértice en el origen

Parábola horizontal

Su foco está sobre el eje X y son cóncavas hacia la derecha o a la izquierda.



Ecuación canónica:

$$y^2 = 4px$$

Foco: $F(p, 0)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $x = -p$

Ecuación del eje: $y = 0$

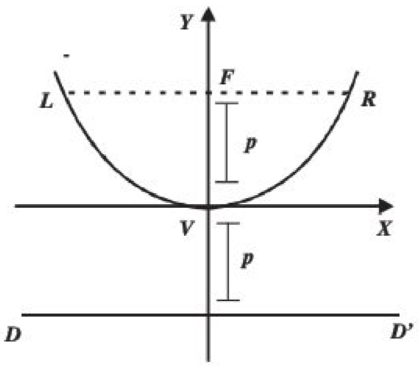
Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$

Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola abre hacia la derecha.
- Si $p < 0$ entonces la parábola abre hacia la izquierda.

Parábola vertical

Su foco está sobre el eje Y, son cóncavas hacia arriba o hacia abajo.



Ecuación canónica:

$x^2 = 4py$

Foco: $F(0, p)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $y = -p$

Ecuación del eje: $x = 0$

Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$

Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es $y^2 - 8x = 0$.

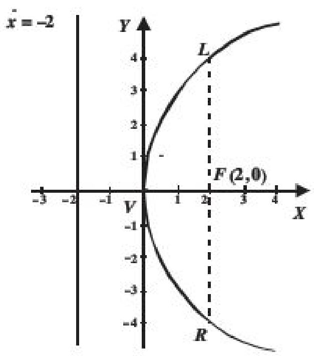
Solución

Se escribe la ecuación en su forma canónica: $y^2 = 4px$

$$y^2 - 8x = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 = 8x$$

Donde $4p = 8 \quad \rightarrow \quad p = 2$

Es una parábola horizontal y abre hacia la derecha, al sustituir en las fórmulas se obtienen sus elementos y posteriormente su gráfica.



Foco: $F(p, 0) = F(2, 0)$

Directriz: $x = -p \rightarrow x = -2$

Lado recto: $LR = |4(2)| = 8$

Eje: $y = 0$

2 Encuentra los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es: $3x^2 - 12y = 0$.

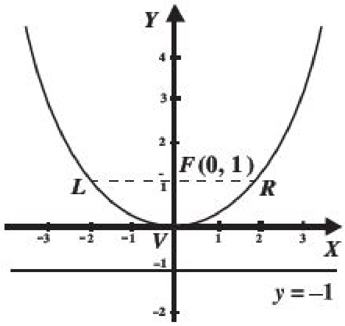
Solución

Se escribe la ecuación en su forma canónica: $x^2 = 4py$

$$3x^2 - 12y = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 12y \quad \rightarrow \quad x^2 = 4y$$

Donde $4p = 4$, entonces $p = 1$.

Es una parábola vertical y abre hacia arriba, al sustituir en las fórmulas se determinan los elementos y posteriormente la gráfica:



Foco: $F(0, p) = F(0, 1)$

Directriz: $y = -p \rightarrow y = -1$

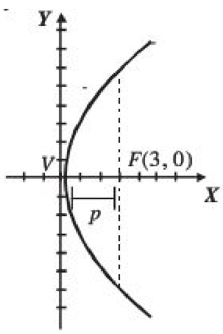
Lado recto: $LR = |4(1)| = 4$

Eje: $x = 0$

3 Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto (3, 0).

Solución

Se grafican los elementos dados, se deduce que la parábola es cóncava hacia la derecha y el valor del parámetro es $p = 3$, al sustituir en la ecuación $y^2 = 4px$, se obtiene:



$$y^2 = 4px$$
$$y^2 = 4(3)x$$
$$y^2 = 12x$$
$$y^2 - 12x = 0$$

Otra forma de resolver este problema es igualar el foco de la parábola horizontal con la coordenada del foco dado:

$$F(p, 0) = F(3, 0), \text{ por tanto, } p = 3$$

Al sustituir el valor de $p = 3$ en la ecuación $y^2 = 4px$, se determina que:

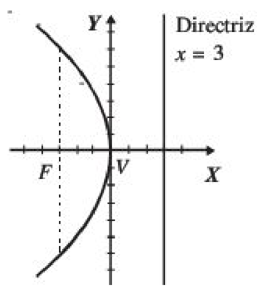
$$y^2 = 12x$$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $y^2 - 12x = 0$.

4 Obtén la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz en la recta $x - 3 = 0$.

Solución

Al graficar la directriz $x = 3$ y localizar el vértice se deduce que la parábola es horizontal y abre hacia la izquierda, por tanto, $p = -3$, al sustituir en la fórmula $y^2 = 4px$, la ecuación resultante es:



$$y^2 = 4px$$
$$y^2 = 4(-3)x$$
$$y^2 = -12x$$
$$y^2 + 12x = 0$$

Finalmente, la ecuación de la parábola es: $y^2 + 12x = 0$.

5 Una parábola de vértice en el origen pasa por el punto (2, 3) y su eje coincide con el eje Y. Determina su ecuación.

Solución

El eje coincide con el eje Y, entonces la parábola es vertical. Si pasa por el punto (2, 3), dicho punto cumple con la ecuación $x^2 = 4py$; por tanto, se sustituye para despejar p.

$$x^2 = 4py \quad \rightarrow \quad (2)^2 = 4p(3)$$
$$4 = 12p$$
$$p = \frac{1}{3}$$

Al conocer el parámetro se determina la ecuación:

$$x^2 = 4py \quad \rightarrow \quad x^2 = 4\left(\frac{1}{3}\right)y$$
$$x^2 = \frac{4}{3}y$$
$$3x^2 - 4y = 0$$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $3x^2 - 4y = 0$.

6 Calcula la longitud de la cuerda determinada por la parábola $x^2 + 8y = 0$ y la recta de ecuación $x - 2y - 8 = 0$.

Solución

La cuerda es un segmento de la recta dada, se encuentran los puntos de intersección con la parábola al despejar x o y de la ecuación de la recta y sustituir en la cuadrática.

Se despeja y de $x - 2y - 8 = 0 \rightarrow y = \dfrac{8-x}{-2}$

Se sustituye en $x^2 + 8y = 0$, se simplifica y se resuelve la ecuación:

$$x^2 + 8\left(\frac{8-x}{-2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4(8-x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4x - 32 = 0$$

Al factorizar:

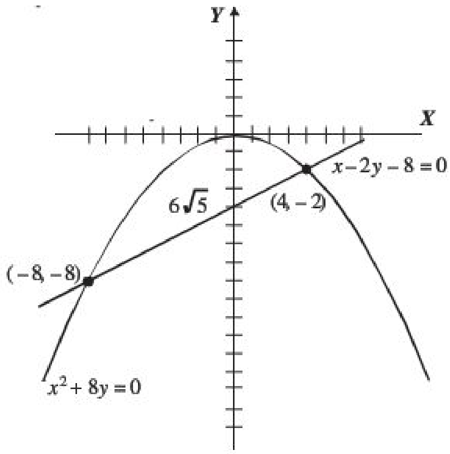
$$(x+8)(x-4) = 0$$
$$x + 8 = 0; \qquad x - 4 = 0$$
$$x = -8 \qquad\quad x = 4$$

Al sustituir estos valores en $y = \dfrac{8-x}{-2}$, se obtiene:

$$\text{Si } x = -8,\ y = \frac{8-(-8)}{-2} = \frac{16}{-2} = -8 \qquad\qquad \text{Si } x = 4,\ y = \frac{8-(4)}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

Los puntos de intersección son: $(-8, -8)$ y $(4, -2)$.

Gráfica:



Se determina la distancia entre los puntos obtenidos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(4-(-8))^2 + (-2-(-8))^2}$$

$$d = \sqrt{144 + 36}$$

$$d = \sqrt{180}$$

$$d = 6\sqrt{5}$$

Por tanto, la longitud de la cuerda es $6\sqrt{5}$ unidades.

EJERCICIO 26

Grafica y determina las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y la ecuación del eje de cada una de las siguientes parábolas:

1. $y^2 = -4x$
2. $x^2 = 12y$
3. $y^2 - 20x = 0$
4. $x^2 = 16y$
5. $3y^2 + 48x = 0$
6. $2x^2 + 16y = 0$
7. $x^2 + 6y = 0$
8. $2y^2 - 16x = 0$
9. $24y = 8x^2$
10. $3x^2 + 8y = 0$
11. $y^2 = 5x$
12. $x = -y^2$
13. $y = x^2$

Encuentra las ecuaciones de las parábolas con los datos dados:

14. Vértice en el origen y foco en el punto $(-5, 0)$
15. Vértice en el origen y foco en el punto $(0, 6)$
16. Vértice en el origen y foco en el punto $(2, 0)$
17. Vértice en el origen y foco en el punto $(0, -1)$
18. Vértice en el origen y foco en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
19. Vértice en el origen y foco en el punto $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$
20. Vértice en el origen y directriz en la recta $y + 2 = 0$
21. Vértice en el origen y directriz en la recta $x - 6 = 0$
22. Vértice en el origen y directriz en la recta $2y - 5 = 0$
23. Vértice en el origen y directriz en la recta $2x - 3 = 0$
24. Foco en el punto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ y directriz en la recta $3x + 4 = 0$
25. Foco en el punto $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y directriz en la recta $4y + 1 = 0$
26. Vértice en el origen, su eje coincide con el eje X y pasa por el punto $(-2, 6)$
27. Vértice en el origen, pasa por el punto $(-2, -1)$ y su eje coincide con el eje Y
28. Vértice en el origen, foco sobre el eje X y pasa por el punto $(3, 4)$
29. Vértice en el origen, foco sobre el eje Y y pasa por el punto $\left(-2, -\frac{3}{4}\right)$

Resuelve los siguientes problemas:

30. Calcula la longitud de la cuerda de la parábola $x^2 - 12y = 0$, la cual es un segmento de la recta $3x - 2y - 12 = 0$
31. Obtén la longitud de la cuerda de la parábola $x - y^2 = 0$, la cual es un segmento de la recta $x - y - 6 = 0$
32. Una parábola tiene su vértice en el origen e interseca a la recta $x + 4y - 9 = 0$, en el punto donde su abscisa es la mitad de su ordenada. Encuentra la ecuación de la parábola (dos soluciones).
33. Determina la ecuación de la parábola con eje horizontal y vértice en el origen, que pase por los puntos de intersección de la curva $x^2 + y^2 - 18 = 0$, y la recta $x - y = 0$ (dos soluciones).
34. Obtén la ecuación de la parábola de vértice en el origen y cuyo lado recto es el diámetro vertical de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0$
35. Determina la ecuación de la parábola de vértice en el origen y que tiene como lado recto el diámetro horizontal de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la parábola con vértice en el punto (h, k)

Sea una parábola con vértice fuera del origen en (h, k), coordenadas del foco $F(h + p, k)$ donde p es el parámetro y su directriz $x = h - p$. Toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, y la de distancia de un punto a una recta $d = \dfrac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto P al foco y a la directriz.

La distancia de P al foco es:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2}$$

La distancia de P a la recta $x - h + p = 0$ es:

$$\overline{PF} = \frac{1(x) + 0(y) - h + p}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}} = x - h + p$$

Se igualan las distancias:

$$\sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2} = x - h + p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se obtiene:

$$\left(\sqrt{(x - h - p)^2 + (y - k)^2}\right)^2 = (x - h + p)^2$$

$$(x - h - p)^2 + (y - k)^2 = x^2 + h^2 + p^2 - 2hx + 2px - 2hp$$

$$x^2 + h^2 + p^2 - 2hx - 2px + 2hp + y^2 - 2ky + k^2 - x^2 - h^2 - p^2 + 2hx - 2px + 2hp = 0$$

$$y^2 - 4px - 2ky + 4hp + k^2 = 0$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4hp$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

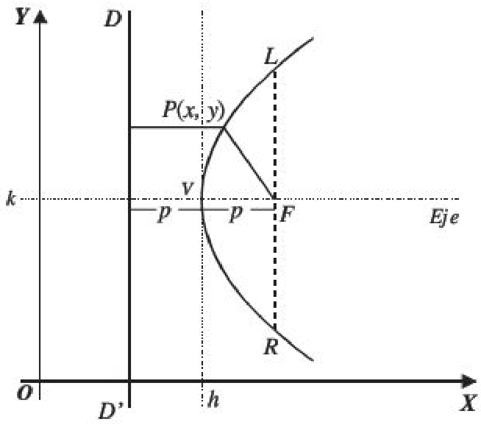
En forma análoga para una parábola con vértice fuera del origen en (h, k), coordenadas del foco en $F(h, k + p)$ y directriz en la recta $y = k - p$, se obtiene:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Elementos y ecuación de una parábola con vértice en (h, k)

Parábola horizontal

Su eje es paralelo al eje X y es cóncava hacia la derecha o izquierda.



Ecuación ordinaria:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Ecuación general: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Vértice: $V(h, k)$

Foco: $F(h+p, k)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $x = h - p$

Eje: $y = k$

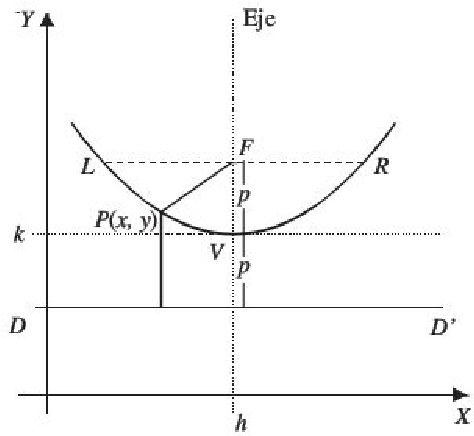
Lado recto: $LR = |4p|$

Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia la derecha.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia la izquierda.

Parábola vertical

Su eje es paralelo al eje Y, y es cóncava hacia arriba o abajo.



Ecuación ordinaria:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Ecuación general: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Vértice: $V(h, k)$

Foco: $F(h, k+p)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $y = k - p$

Eje: $x = h$

Lado recto: $LR = |4p|$

Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los elementos y grafica la parábola $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$.

Solución

El término cuadrático es y, por tanto, la parábola es horizontal, entonces se agrupan los términos con y en el primer miembro de la igualdad.

$$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$$
$$y^2 - 6y = 8x - 17$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro y se factoriza.

$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 17 + 9$$
$$(y-3)^2 = 8x - 8$$

Se factoriza el segundo miembro de la igualdad, tomando como factor común el coeficiente de la literal:

$$(y-3)^2 = 8(x-1)$$

La ecuación que se obtiene es de la forma: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, por consiguiente, el vértice es el punto:

$V(1, 3)$, $4p = 8$, de donde $p = 2$.

Se sustituye en los elementos de la parábola horizontal.

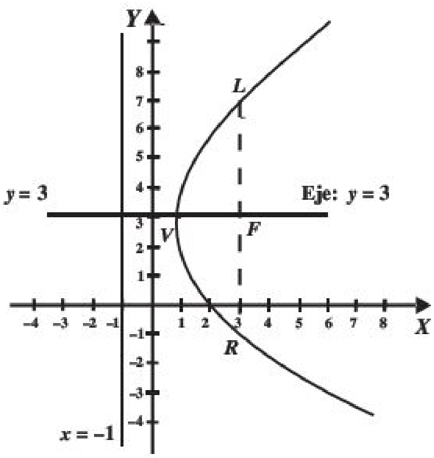
Foco: $F(h+p, k) = F(1+2, 3) = F(3, 3)$

Directriz: $x = h - p = 1 - 2 = -1 \rightarrow x + 1 = 0$

Lado recto: $LR = |4p| = |4(2)| = |8| = 8$

Ecuación del eje: $y = k$; $y = 3$

Gráfica:



2 Encuentra las coordenadas del vértice, del foco, la longitud del lado recto, la ecuación de la directriz y del eje de la parábola $4x^2 + 48x + 12y + 156 = 0$.

Solución

La parábola es vertical, ya que el término cuadrático es x; para transformarla a su forma ordinaria se realiza lo siguiente:

$4x^2 + 48x + 12y + 156 = 0$	Se divide la ecuación entre 4.
$x^2 + 12x + 3y + 39 = 0$	
$x^2 + 12x = -3y - 39$	Se agrupan los términos en x.
$x^2 + 12x + 36 = -3y - 39 + 36$	Se completa el trinomio cuadrado perfecto.
$x^2 + 12x + 36 = -3y - 3$	
$(x + 6)^2 = -3(y + 1)$	Se factoriza cada miembro.

La ecuación obtenida es de la forma: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, por tanto, el vértice tiene como coordenadas $V(-6, -1)$, $4p = -3$ donde $p = -\frac{3}{4}$.

Se sustituye en las fórmulas de los elementos para la parábola vertical:

Foco: $F(h, k + p) = F\left(-6, -1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\right) = F\left(-6, -\frac{7}{4}\right)$

Directriz: $y = k - p$

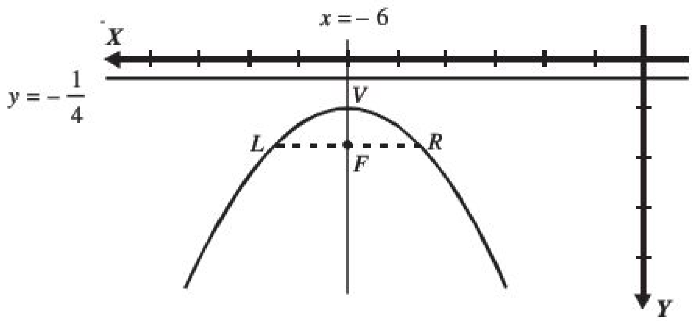
$$y = -1 - \left(-\frac{3}{4}\right) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad y + \frac{1}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad 4y + 1 = 0$$

Lado recto: $|4p| = \left|4\left(-\frac{3}{4}\right)\right| = |-3| = 3$

Eje: $x = h$

$$x = -6 \rightarrow x + 6 = 0$$

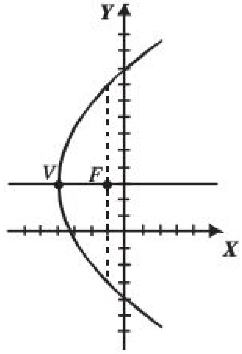
Gráfica:



3 Determina la ecuación general de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$, respectivamente.

Solución

Se grafican los datos y se observa que la parábola tiene su eje paralelo al eje x y es cóncava hacia la derecha, por consiguiente su ecuación es de la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ con $h = -4$, $k = 3$ y $p = 3$.



Al sustituir los valores en la ecuación se obtiene:

$$(y-3)^2 = 4(3)(x-(-4))$$

Forma ordinaria: $(y-3)^2 = 12(x+4)$

Se desarrolla y simplifica: $y^2 - 6y + 9 = 12x + 48$

$$y^2 - 6y + 9 - 12x - 48 = 0$$

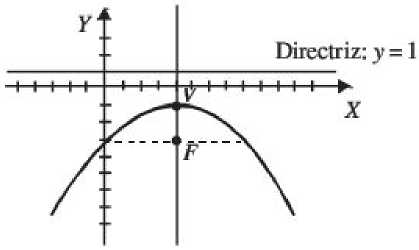
Forma general: $y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$.

4 La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$, y su foco es el punto $(4, -3)$, encuentra su ecuación.

Solución

Se grafican los datos:



Al relacionar las fórmulas de los elementos de la parábola vertical con los datos, se obtienen las coordenadas del vértice y el valor del parámetro.

Foco: $F(h, k+p) = F(4, -3) \rightarrow h = 4$ y $k + p = -3$

Directriz: $y = k - p = 1 \rightarrow k - p = 1$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$k + p = -3$$
$$k - p = 1$$

Los valores que se obtienen son:

$$h = 4,\ k = -1 \text{ y } p = -2$$

Las coordenadas del vértice son $V(4, -1)$ y el parámetro $p = -2$

Se sustituye el vértice y el parámetro en:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$
$$(x-4)^2 = 4(-2)(y+1)$$
$$(x-4)^2 = -8(y+1)$$
$$x^2 - 8x + 16 = -8y - 8$$
$$x^2 - 8x + 8y + 16 + 8 = 0$$
$$x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es: $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$.

EJERCICIO 27

Dadas las ecuaciones de las parábolas, determina sus elementos: vértice, foco, directriz, eje y lado recto.

1. $y^2 - 10y - 12x + 37 = 0$
2. $x^2 - 12x + 16y + 68 = 0$
3. $y^2 + 8y + 20x + 56 = 0$
4. $x^2 + 2x + 4y - 19 = 0$
5. $y^2 - 8x - 16 = 0$
6. $x^2 - 24y + 48 = 0$
7. $x^2 + 8x - 6y + 28 = 0$
8. $y^2 - 5x + 6y + 13 = 0$
9. $4x^2 - 12x - 16y + 41 = 0$
10. $16y^2 + 8y - 24x + 49 = 0$
11. $4x^2 - 4x - 16y - 23 = 0$
12. $3y^2 + 6y - 4x + 15 = 0$
13. $2x^2 - 4y + 1 = 0$
14. $4y^2 - 5x + 5 = 0$

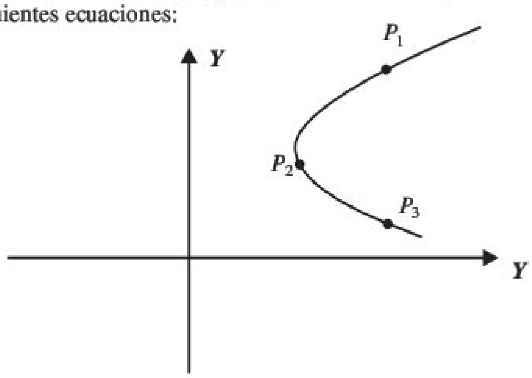
Resuelve los siguientes problemas:

15. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(2, 4)$ y su foco $F(-3, 4)$
16. Obtén la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(3, -1)$ y su foco $F(3, -5)$
17. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $(3, 2)$ y $(5, 2)$, respectivamente.
18. Obtén la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $(-5, 2)$ y $(-5, 5)$
19. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $(2, -4)$ y $\left(\frac{5}{2}, -4\right)$
20. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $(-3, -2)$ y $\left(-3, \frac{1}{3}\right)$
21. El foco de una parábola es el punto $(-2, 6)$ y su directriz $x = 10$. Encuentra su ecuación.
22. Obtén la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $(4, 5)$ y su directriz la recta $y + 3 = 0$
23. Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $(6, -4)$ y su directriz la recta $x + 4 = 0$
24. El foco de una parábola es el punto $(0, -6)$ y su directriz la recta $y - 8 = 0$. Obtén su ecuación.
25. Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $(-5, 2)$ y su directriz $x = 2$
26. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $(7, 3)$ y su directriz la recta $y + 2 = 0$
27. Determina la ecuación de la parábola con vértice en el punto $(1, -3)$ y directriz la recta $y + 5 = 0$
28. Obtén la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $(-3, 5)$, su lado recto mide 24 unidades y su eje es paralelo al eje Y (dos soluciones).
29. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $(5, 2)$ y su foco es el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
30. Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $(3, -2)$ y su vértice es el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$
31. Encuentra los puntos de intersección de la parábola $y^2 - 8y - 16x + 64 = 0$ con la recta $4x + y - 24 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la parábola que pasa por tres puntos

Dados tres puntos P_1, P_2 y P_3, que pertenecen a una parábola horizontal o vertical, su ecuación se obtiene mediante las siguientes ecuaciones:



Ecuaciones generales de la parábola

Parábola horizontal:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Parábola vertical:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

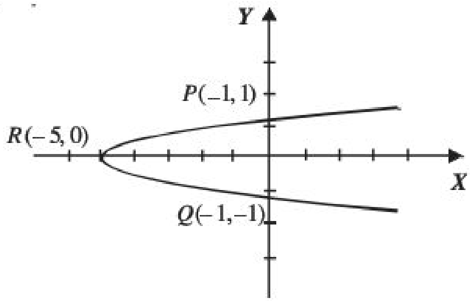
EJEMPLOS

Ejemplos

1. Determina la ecuación general de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los puntos: $P(-1, 1)$, $Q(-1, -1)$ y $R(-5, 0)$

Solución

Al graficar los puntos se obtiene:



El eje de la parábola es paralelo al eje X, entonces la parábola es horizontal y la ecuación que se utiliza es:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Al sustituir los puntos $P(-1, 1)$, $Q(-1, -1)$ y $R(-5, 0)$, se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas:

Para el punto $P(-1, 1)$		$(1)^2 + D(-1) + E(1) + F = 0$
	Ecuación 1:	$-D + E + F = -1$
Para el punto $Q(-1, -1)$		$(-1)^2 + D(-1) + E(-1) + F = 0$
	Ecuación 2:	$-D - E + F = -1$
Para el punto $R(-5, 0)$		$(0)^2 + D(-5) + E(0) + F = 0$
	Ecuación 3:	$-5D + 0E + F = 0$

Se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -D + E + F &= -1 \\ -D - E + F &= -1 \\ -5D + 0E + F &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene: $D = -\frac{1}{4}$, $E = 0$, $F = -\frac{5}{4}$.

Se sustituyen estos valores en $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ y se simplifica:

$$y^2 - \frac{1}{4}x + 0y - \frac{5}{4} = 0 \qquad \rightarrow \qquad 4y^2 - x - 5 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es: $4y^2 - x - 5 = 0$.

EJERCICIO 28

Determina la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y pasa por los puntos:

1. $(1, 0)$, $(9, 2)$ y $(0, -1)$
2. $(0, 0)$, $(1, -2)$ y $(4, -4)$
3. $(19, 2)$, $(10, -1)$ y $(7, 0)$
4. $(12, -4)$, $(21, 5)$ y $(5, 3)$

Obtén la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje Y y pasa por los puntos:

5. $(1, 0)$, $(5, 8)$ y $(-2, 15)$
6. $(3, 10)$, $(0, 1)$ y $(-2, 5)$
7. $(0, 1)$, $(-2, 3)$ y $(1, 6)$
8. $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $(1, 6)$ y $(-3, -2)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

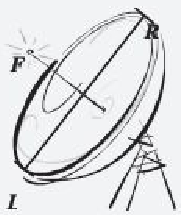
PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

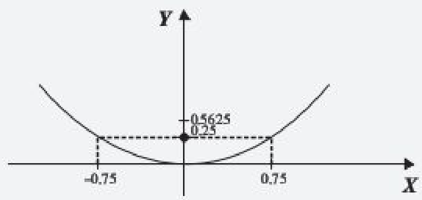
A continuación se dan ejemplos de problemas donde se aplica el concepto de parábola.

1 El diámetro de una antena parabólica es de 1.5 metros y su profundidad es de 25 centímetros. ¿A qué altura se debe colocar el receptor?

Solución

La reflexión es una de las propiedades importantes de la parábola. Cuando una onda emana del foco y choca con la parábola se produce una reflexión paralela al eje y viceversa si la onda viaja paralela al eje, al chocar con la parábola, se refleja y cruza por el foco. Luego, si se gira una parábola sobre su eje, se obtiene una superficie en revolución llamada paraboloide, es la forma que tienen precisamente las antenas parabólicas.





Se construye una parábola con vértice en el origen y eje vertical, si el diámetro de la antena es de 1.5 metros y su fondo mide 25 cm, entonces la parábola por ser simétrica, pasa por los puntos $(-0.75, 0.25)$ y $(0.75, 0.25)$, por tanto sustituimos uno de estos puntos en la ecuación:

$$x^2 = 4py, \text{ para despejar } p.$$

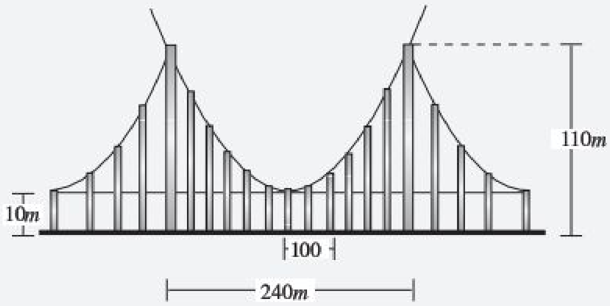
$$x^2 = 4py$$

$$(-0.75)^2 = 4p(0.25)$$

$$p = 0.5625$$

Las coordenadas del foco están dadas por $F(0, 0.5625)$, por consiguiente, se debe colocar el receptor a 56.25 centímetros del vértice.

2 Las dos torres de un puente colgante, como se muestra en la figura tienen una separación de $240m$ y una altura de $110m$, si el puntal más corto mide $10m$ determina la altura de un puntal que se encuentra a $100m$ del centro.

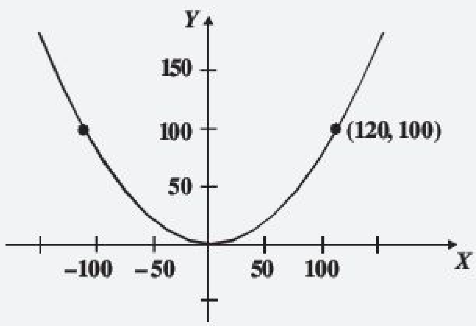


Solución

Se construye una parábola con vértice en el origen y eje vertical, si las torres están separadas $240m$ y su altura con respecto al vértice de la parábola es de $100m$ ($110m - 10m = 100m$), entonces la parábola pasa por los puntos:

$$(-120, 100) \text{ y } (120, 100)$$

Se sustituye el punto (120, 100) en la ecuación $x^2 = 4py$ para obtener p.



$$x^2 = 4py$$
$$(120)^2 = 4p(100)$$
$$p = 36$$

Por tanto, la ecuación es

$$x^2 = 4(36)y \quad \rightarrow \quad x^2 = 144y$$

Para encontrar la ordenada cuya abscisa es $x = 100$, se sustituye en la ecuación obtenida:

$$(100)^2 = 144y$$
$$y = 69.44$$

El puntal que se encuentra a 100 metros del centro mide:

$$69.44m + 10m = 79.4m$$

Ecuación de una recta tangente a una parábola

Si se tiene una parábola con vértice en el origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0) \qquad \text{Vertical: } y - y_0 = \frac{2y_0}{x_0}(x - x_0)$$

Si se tiene una parábola con vértice (h, k) fuera del origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } y - y_0 = \frac{y_0 - k}{2(x_0 - h)}(x - x_0) \qquad \text{Vertical: } y - y_0 = \frac{2(y_0 - k)}{x_0 - h}(x - x_0)$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 12x = 0$, en el punto $(3, 6)$.

Solución

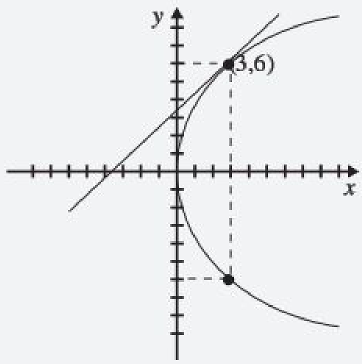
Se sustituye el punto $(3, 6)$ en la fórmula:

$$y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$$

$$y - 6 = \frac{6}{2(3)}(x - 3)$$

De donde se obtiene la ecuación:

$$x - y + 3 = 0$$



2 Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $4x^2 + 5y = 0$, en el punto $(5, -20)$.

Solución

Se sustituye el punto $(5, -20)$ en la fórmula:

$$y - y_0 = \frac{2y_0}{x_0}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - (-20) = \frac{2(-20)}{5}(x - 5) \quad \rightarrow \quad 8x + y - 20 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la recta es: $8x + y - 20 = 0$.

3 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$, en el punto $(8, -3)$.

Solución

Se transforma la ecuación de la parábola a su forma ordinaria.

$$x^2 - 8x + 8y + 24 = 0 \quad \rightarrow \quad (x - 4)^2 = -8(y + 1)$$

Se sustituye el vértice $V(h, k) = V(4, -1)$ y el punto $(8, -3)$ en la fórmula y se obtiene:

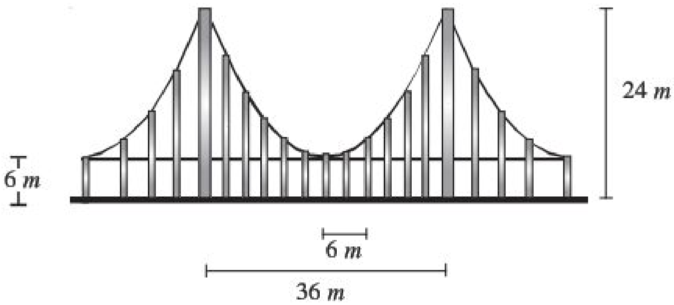
$$y - y_0 = \frac{2(y_0 - k)}{x_0 - h}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - (-3) = \frac{2(-3 - (-1))}{8 - 4}(x - 8) \rightarrow x + y - 5 = 0$$

En consecuencia, la ecuación de la recta es: $x + y - 5 = 0$.

EJERCICIO 29

Resuelve los siguientes problemas:

1. Dos torres de 24 metros de altura sostienen un puente colgante, como el que se muestra en la figura. Si las torres están separadas 36 metros y el puntal más corto mide 6 metros, ¿cuál es la altura de un puntal que se encuentra a 6 metros del centro?

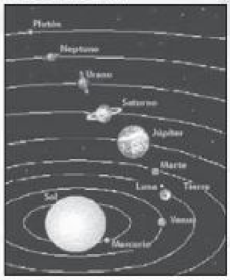


2. El diámetro de una antena parabólica es de 2 m y su profundidad es de 40 cm. ¿A qué altura se debe colocar el receptor?
3. Se desea diseñar un faro que tenga 30 centímetros de diámetro. El filamento de la bombilla se encuentra a 3 cm del vértice. ¿Qué profundidad debe tener el faro si se quiere que el filamento quede justo en la posición de su foco?
4. Si en el ejercicio anterior se quiere que el faro tenga 2.75 cm menos de profundidad, ¿cuánto debe medir el diámetro?
5. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 8y = 0$ en el punto (4, 2)
6. Obtén la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 6x = 0$ en el punto (24, 12)
7. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 4x - 8y + 28 = 0$ en el punto (10, 11)
8. Calcula la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 12x + 6y + 57 = 0$ en el punto (16, 9)
9. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 4x + 4y + 28 = 0$ en el punto $P(15, 4)$
10. Obtén la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 8x - 6y + 4 = 0$ en el punto $\left(6, -\frac{4}{3}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 26
Elipse

Reseña HISTÓRICA



La elipse en el sistema solar

En el universo el movimiento más frecuente de estrellas, planetas, satélites, etc., es el descrito mediante trayectorias elípticas. Esto es así porque a grandes distancias y para objetos sin carga eléctrica neta importante, la fuerza principal que gobierna este movimiento es la fuerza gravitatoria.

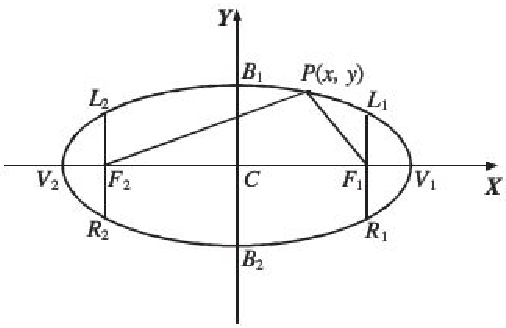
Fue el gran físico y matemático Isaac Newton quien formuló la ley de la gravitación universal, que explica los movimientos de los planetas y satélites en el sistema solar. Esta ley reúne las tres leyes de Kepler en una sola:

$$F = G\frac{Mm}{d^2}$$

Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$



C: Centro
V_1 y V_2: Vértices
F_1 y F_2: Focos
B_1 y B_2: Extremos del eje menor
$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje mayor)
$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)
$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje menor)
Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$
Donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$ (lado recto)
$e = \dfrac{c}{a} < 1$ excentricidad

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuyas sumas de distancias a los puntos fijos $F_1(0, 3)$ y $F_2(0, -3)$, son siempre iguales a 10 unidades.

Solución

Sea $P(x, y)$ un punto que cumple con la condición dada, mediante la fórmula: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ se encuentra la distancia a los puntos $F_1(0, 3)$ y $F_2(0, -3)$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}\ ,\ \overline{PF_2} = \sqrt{x^2 + (y-(-3))^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 10$$

Se despeja un radical y se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado:

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + (y+3)^2$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + y^2 + 6y + 9$$

$$20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 100 + 12y$$

$$5\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 25 + 3y$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros y se obtiene:

$$\left(5\sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2 = (25 + 3y)^2$$

$$25(x^2 + y^2 + 6y + 9) = 625 + 150y + 9y^2$$

$$25x^2 + 25y^2 + 150y + 225 = 625 + 150y + 9y^2$$

$$25x^2 + 16y^2 = 400$$

Por tanto la ecuación de la curva es: $25x^2 + 16y^2 = 400$, la cual por la definición corresponde a una elipse.

2 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (3, 4) y (9, 4) es siempre igual a 8 unidades.

Solución

Al aplicar la definición de elipse se obtiene:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}=8$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=8-\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2=64-16\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}+(x-9)^2+(y-4)^2$$

Se desarrollan y se simplifica para determinar la ecuación.

$$(3x-34)^2=\left(-4\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}\right)^2$$

$$9x^2-204x+1156=16\left(x^2-18x+81\right)+16\left(y^2-8y+16\right)$$

$$9x^2-204x+1156=16x^2+16y^2-288x-128y+1552$$

$$7x^2+16y^2-84x-128y+396=0$$

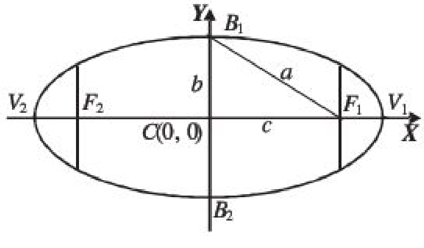
EJERCICIO 30

Determina la ecuación del lugar geométrico (elipse), según los datos proporcionados:

1. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (4, 0) y (–4, 0) es igual a 12.
2. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (2, 0) y (– 2, 0) es igual a 6.
3. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (0, 5) y (0, – 5) es igual a 14.
4. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (– 2, 1) y (– 2, 7) es siempre igual a 10.
5. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (9, – 2) y (– 7, – 2) siempre es igual a 20.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de una elipse con centro en el origen



En la figura:

$\overline{CV_1}=\overline{CV_2}=a$

$\overline{CB_1}=\overline{CB_2}=b$

$\overline{CF_1}=\overline{CF_2}=c$

Como $\overline{CV_1}=\overline{CV_2}=a$, entonces $\overline{V_1V_2}=2a$ y al ser V_1 un punto de la elipse $\overline{V_1F_1}+\overline{V_1F_2}=2a$, por tanto, la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los dos puntos fijos (focos) es igual a $2a$; como B_1 es un punto de la elipse, entonces por la definición $\overline{B_1F_1}+\overline{B_1F_2}=2a$, de donde $\overline{B_1F_1}=a$ y por la gráfica $a^2=b^2+c^2$.

Sea $P(x, y)$ un punto de la elipse, entonces por la definición $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, se aplica la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ para obtener la distancia de P a los puntos fijos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ se obtiene:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Se despeja un radical: $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

Se despeja el radical y se divide entre -4:

$$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Se eleva al cuadrado y se simplifica: $(cx + a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

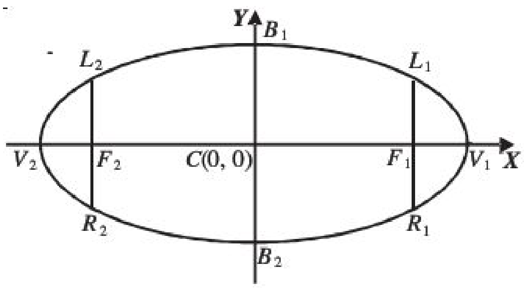
Se divide entre $a^2(a^2 - c^2)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. Si $a^2 = b^2 + c^2$, entonces $b^2 = a^2 - c^2$, se sustituye y se obtiene: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Por tanto, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es la ecuación de una elipse horizontal con centro en el origen; para una elipse vertical con centro en el origen se sigue un procedimiento análogo y se obtiene: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Elementos y ecuación

Elipse horizontal

El eje mayor coincide con el eje X.



Ecuación canónica: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Elementos:

Vértices: $V(\pm a, 0)$

Focos: $F(\pm c, 0)$

Extremos del eje menor: $B(0, \pm b)$

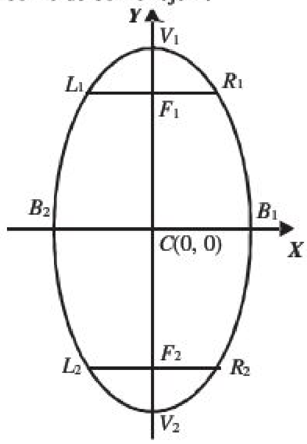
Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e < 1)$

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$ donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Elipse vertical

El eje mayor coincide con el eje *Y*.



Ecuación canónica: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Elementos:

Vértices: $V(0,\pm a)$

Focos: $F(0,\pm c)$

Extremos del eje menor: $B(\pm b,0)$

Lado recto: $\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$ $(e<1)$

Condición: $a^2=b^2+c^2$; $a>b$, $a>c$ donde $b=\sqrt{a^2-c^2}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los elementos y grafica la elipse, cuya ecuación es: $9x^2+4y^2-36=0$.

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria.

$$9x^2+4y^2=36$$

Se divide por el término independiente, $\frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=\frac{36}{36}$

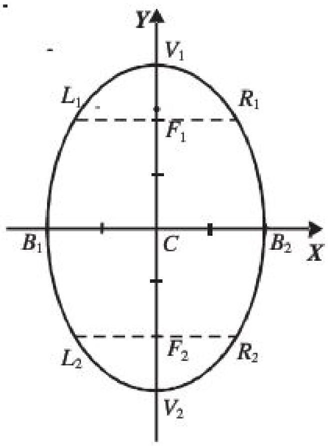
Se simplifica y se obtiene la forma canónica, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

$a^2=9$ y $b^2=4$, porque $a>b$, de donde $a=3$ y $b=2$, entonces tenemos una elipse vertical de ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Para encontrar c, se sustituye a^2 y b^2 en $c=\sqrt{a^2-b^2}$,

$$c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

Los elementos se obtienen al sustituir los valores de a, b y c en:



Vértices

$V_1(0, a)$ y $V_2(0, -a)$ → $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$

Focos

$F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$ → $F_1(0,\sqrt{5})$ y $F_2(0,-\sqrt{5})$

Extremos del eje menor

$B_1(b, 0)$ y $B_2(-b, 0)$ → $B_1(2, 0)$ y $B_2(-2, 0)$

$\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(2)^2}{3}=\frac{8}{3}$ Longitud del lado recto

$\overline{V_1V_2}=2a=2(3)=6$ Longitud del eje mayor

$\overline{F_1F_2}=2c=2\sqrt{5}$ Longitud del eje focal

$\overline{B_1B_2}=2b=2(2)=4$ Longitud del eje menor

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ Excentricidad

2 Determina los elementos y grafica la elipse: $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria.

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \rightarrow \frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400}$$

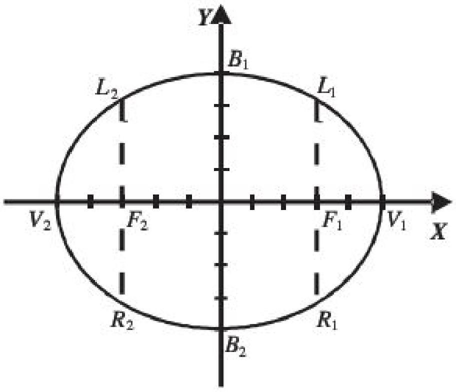
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Como el denominador mayor se encuentra bajo la variable x esta ecuación corresponde a una elipse horizontal de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, obteniendo que $a = 5$ y $b = 4$.

Para hallar c se sustituye a^2 y b^2 en $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$c = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

La gráfica y los elementos son:



Vértices

$V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$

Focos

$F_1(3, 0)$ y $F_2(-3, 0)$

Extremos del eje menor

$B_1(0, 4)$ y $B_2(0, -4)$

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{5} = \frac{32}{5}$ Lado recto

$\overline{V_1V_2} = 2a = 2(5) = 10$ Longitud del eje mayor

$\overline{F_1F_2} = 2c = 2(3) = 6$ Longitud del eje focal

$\overline{B_1B_2} = 2b = 2(4) = 8$ Longitud del eje menor

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ Excentricidad

3 Determina las coordenadas de los focos de la elipse cuya ecuación es: $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria.

$$4x^2 + 9y^2 = 1 \rightarrow \frac{4x^2}{1} + \frac{9y^2}{1} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$$

De la cual $a^2 = \frac{1}{4}$, $b^2 = \frac{1}{9}$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9-4}{36}} = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$

La ecuación tiene la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, es decir, es una elipse horizontal.

Para encontrar los focos se sustituyen los valores:

$$F_1(c,0) = F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right) \qquad \rightarrow \qquad F_2(-c,0) = F_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$$

Por consiguiente, las coordenadas de los focos son: $F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$ y $F_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$.

EJERCICIO 31

Determina los elementos de las siguientes elipses:

1. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$
2. $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$
3. $12x^2 + 5y^2 - 60 = 0$
4. $x^2 + 16y^2 - 64 = 0$
5. $9x^2 + 25y^2 = 225$
6. $16x^2 + 4y^2 = 64$
7. $9x^2 + 4y^2 = 25$
8. $4x^2 + y^2 = 1$
9. $3x^2 + 2y^2 = 6$
10. $16x^2 + 9y^2 - 1 = 0$
11. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$
12. $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$
13. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$
14. $100x^2 + 25y^2 - 200 = 0$
15. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$
16. $3x^2 + y^2 - 12 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dados sus elementos obtener la ecuación de la elipse con centro en el origen

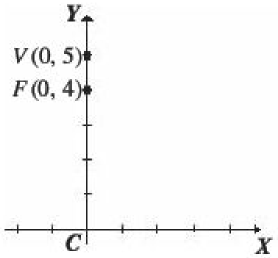
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la elipse de centro en el origen, vértice (0, 5) y foco en (0, 4).

Solución

Se grafican los datos.



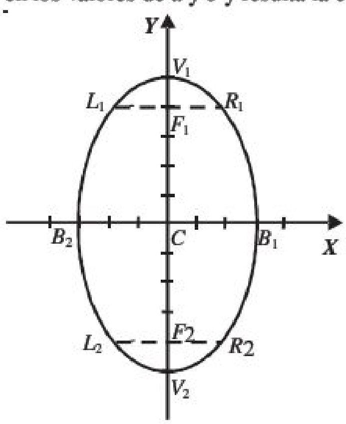
La elipse es vertical y su ecuación es $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, de la gráfica se obtiene la distancia del centro al vértice (a) y la distancia del centro al foco (c), por tanto:

$$a = 5 \text{ y } c = 4$$

Para encontrar b se sustituyen los valores de a y c en $b = \sqrt{a^2 - c^2}$:

$$b = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

Se sustituyen los valores de a y b y resulta la ecuación:



Forma canónica: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Al multiplicar por 225 e igualar a cero, se obtiene la ecuación en su forma general:

$$25x^2 + 9y^2 = 225 \rightarrow 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$$

2 Determina la ecuación de la elipse con vértices en (– 6, 0) y (6, 0) y la longitud de uno de sus lados rectos igual a $\frac{20}{3}$.

Solución

El eje mayor (2a) es la distancia entre los vértices, utilizando la fórmula:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, se obtiene:

$$2a = \sqrt{(6+6)^2 + (0-0)^2} \rightarrow 2a = 12 \rightarrow a = 6$$

Al sustituir $a = 6$, $\overline{LR} = \frac{20}{3}$ y despejar b^2 de la fórmula del lado recto $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$, se obtiene:

$$\frac{2b^2}{6} = \frac{20}{3} \rightarrow b^2 = 20$$

La elipse es horizontal y la ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

Se multiplica por 180 y tenemos que la ecuación es:

$$5x^2 + 9y^2 \quad = \quad 180 \qquad 5x^2 + 9y^2 - 180 = 0$$

3 El eje mayor de una elipse mide 20 unidades, si la excentricidad es $e = \frac{7}{10}$, ¿cuál es la longitud del eje menor?

Solución

El eje mayor es la distancia entre los vértices, $\overline{V_1V_2} = 2a = 20$.

$$2a = 20 \text{ por tanto, } a = 10$$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{10}$, de donde $\frac{c}{10} = \frac{7}{10}$.

Al despejar se obtiene que $c = 7$.
Si $a = 10$ y $c = 7$, se utiliza la condición $b = \sqrt{a^2 - c^2}$,

$$b = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{100 - 49} = \sqrt{51}$$

Así, la longitud del eje menor es $2b = 2\sqrt{51}$.

EJERCICIO 32

Determina la ecuación de la elipse, según los datos proporcionados.

1. $V(\pm 6, 0)$ y $F(\pm 4, 0)$
2. $V(\pm 3, 0)$ y $F(\pm\sqrt{2}, 0)$
3. $V(\pm\sqrt{5}, 0)$ y $F(\pm 2, 0)$
4. $V(0, \pm 7)$ y $F(0, \pm 5)$
5. $V(0, \pm\sqrt{3})$ y $F(0, \pm\sqrt{2})$
6. $V(\pm 5, 0)$ y $B(0, \pm 4)$
7. $V(\pm 4, 0)$ y $B(0, \pm\sqrt{7})$
8. $F(\pm 3, 0)$ y $B(0, \pm 2)$
9. $F(\pm\sqrt{5}, 0)$ y $B(0, \pm 3)$
10. $F(0, \pm\sqrt{2})$ y $B(\pm 2, 0)$
11. $V(0, \pm\sqrt{5})$ y $B(\pm 1, 0)$
12. $F(0, \pm 7)$ y $B(\pm 4, 0)$
13. $F(0, \pm 2)$ y lado recto $= \dfrac{10}{3}$
14. $F(\pm 4, 0)$ y excentricidad $e = \dfrac{4}{5}$
15. $F(0, \pm\ 6)$ y excentricidad $e = \dfrac{3}{4}$
16. $B\left(0, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y excentricidad igual a $\dfrac{1}{2}$
17. Excentricidad $= \dfrac{1}{3}$, lado recto $= \dfrac{16}{3}$ (dos soluciones).
18. Eje mayor paralelo al eje Y y pasa por los puntos $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3}{2}\right)$ y $\left(1, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
19. $V(\pm 4, 0)$ y lado recto igual a 2
20. Focos los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4 = 0$ con el eje X, y lado recto $\dfrac{18\sqrt{13}}{13}$
21. El eje mayor es el doble del eje menor, su semidistancia focal es $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, y su eje focal coincide con el eje X.
22. La distancia focal equivale al eje menor y su lado recto es $\sqrt{2}$ (dos soluciones).

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de una elipse con centro en el punto (h, k)

Para una elipse horizontal con centro fuera del origen en el punto (h, k), se hace una traslación de los ejes XY al punto $C(h, k)$.

Sean $x' = x - h$, $y' = y - k$, la ecuación de la elipse en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

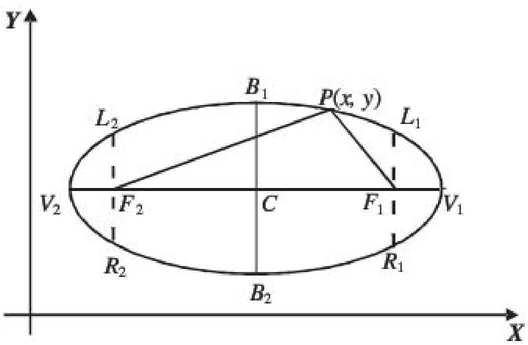
Se sustituyen x', y' en la ecuación y se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Del mismo modo se obtiene la ecuación de una elipse vertical con centro (h, k) fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Gráfica



Elementos:

C: Centro

V_1 y V_2: Vértices

F_1 y F_2: Focos

B_1 y B_2: Extremos del eje menor

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje mayor)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje menor)

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$ $(e < 1)$

$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$ (lado recto)

Elipse horizontal

Ecuación: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Elementos:

Vértices: $V(h \pm a, k)$

Focos: $F(h \pm c, k)$

Extremos del eje menor: $B(h, k \pm b)$

Elipse vertical

Ecuación: $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Elementos:

Vértices: $V(h, k \pm a)$

Focos: $F(h, k \pm c)$

Extremos del eje menor: $B(h \pm b, k)$

Ecuación general de la elipse: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $A \neq C$, y ambas cantidades de igual signo.

Dada la ecuación, obtener sus elementos

EJEMPLOS

1 Determina los elementos de la elipse $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$ y traza su gráfica.

Solución

$$9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0 \rightarrow 9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y = -144$$

Se agrupan los términos en xy:

$$(9x^2 - 72x) + (4y^2 - 24y) = -144$$

Se factoriza:

$$9(x^2 - 8x) + 4(y^2 - 6y) = -144$$

Se completan los trinomios cuadrados perfectos:

$$9\left(x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2\right) + 4\left(y^2 - 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) = -144 + 9\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$9(x^2 - 8x + (4)^2) + 4(y^2 - 6y + (3)^2) = -144 + 9(4)^2 + 4(3)^2$$

$$9(x^2 - 8x + 16) + 4(y^2 - 6y + 9) = -144 + 144 + 36$$

Al factorizar y simplificar, se obtiene,

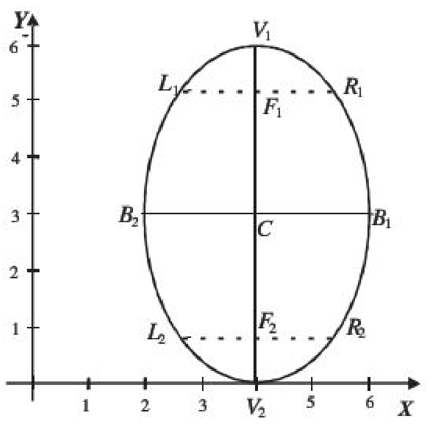
$$9(x-4)^2 + 4(y-3)^2 = 36$$

Se dividien ambos miembros entre 36:

$$\frac{9(x-4)^2}{36} + \frac{4(y-3)^2}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \rightarrow \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Es una elipse vertical con centro en $C(4, 3)$, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

Estos datos se sustituyen para obtener los elementos y trazar la gráfica.



Centro $(h, k) = C(4, 3)$

Vértices $(h, k \pm a)$

$V_1(4, 3 + 3) = V_1(4, 6)$

$V_2(4, 3 - 3) = V_2(4, 0)$

Focos $(h, k \pm c)$

$F_1\left(4, 3 + \sqrt{5}\right) = F_1\left(4, 5.2\right)$

$F_2\left(4, 3 - \sqrt{5}\right) = F_2\left(4, 0.7\right)$

Extremos del eje menor $(h \pm b, k)$

$B_1(4 + 2, 3) = B_1(6, 3)$

$B_2(4 - 2, 3) = B_2(2, 3)$

$$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Eje mayor $= 2a = 6$

Eje menor $= 2b = 4$

Eje focal $= 2c = 2\sqrt{5}$

2 Determina los elementos de la elipse, cuya ecuación es:

$$x^2 + 16y^2 + 4x - 32y - 44 = 0$$

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria,

$$x^2 + 16y^2 + 4x - 32y - 44 = 0 \rightarrow (x^2 + 4x) + (16y^2 - 32y) = 44$$

$$(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 2y) = 44$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto, $(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 - 2y + 1) = 44 + 4 + 16$

Al factorizar y simplificar se obtiene: $(x + 2)^2 + 16(y - 1)^2 = 64$

Se divide entre 64, $\dfrac{(x+2)^2}{64} + \dfrac{16(y-1)^2}{64} = \dfrac{64}{64}$

Forma ordinaria: $\dfrac{(x+2)^2}{64} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

La ecuación representa una elipse horizontal de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Se obtienen las coordenadas del centro, el semieje mayor y el semieje menor:

Centro $C(-2, 1)$; $a = 8$ y $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{64-4} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

Por tanto, los elementos y la gráfica son:

Centro: $C(h, k) = C(-2, 1)$

Vértices $V(h \pm a, k)$

$V_1(-2 + 8, 1) = V_1(6, 1)$

$V_2(-2 - 8, 1) = V_2(-10, 1)$

Focos $F(h \pm c, k)$

$F_1\left(-2 + 2\sqrt{15}, 1\right) = (5.7, 1)$

$F_1\left(-2 - 2\sqrt{15}, 1\right) = (-9.7, 1)$

Extremos del eje menor $B(h, k \pm b)$

$B_1(-2, 1 + 2) = B_1(-2, 3)$

$B_2(-2, 1 - 2) = B_2(-2, -1)$

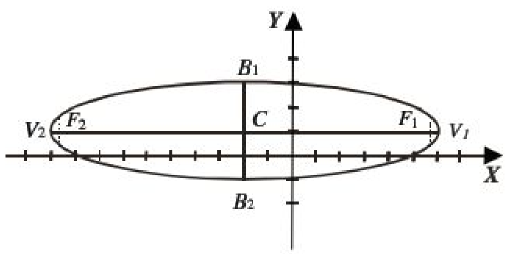
$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(4)}{8} = \dfrac{8}{8} = 1$

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{15}}{8} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Eje mayor: $2a = 16$

Eje menor: $2b = 4$

Eje focal: $2c = 4\sqrt{15}$



3 Determina las coordenadas de los vértices de la elipse cuya ecuación es:

$$4x^2+9y^2-4x-6y+1=0$$

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$4x^2+9y^2-4x-6y+1=0 \rightarrow (4x^2-4x)+(9y^2-6y)=-1$$

$$4(x^2-x)+9\left(y^2-\frac{2}{3}y\right)=-1 \rightarrow 4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+9\left(y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}\right)=-1+1+1$$

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+9\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=1 \rightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}}=1$$, la ecuación tiene la forma de una elipse horizontal

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, con centro en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ y $a^2=\frac{1}{4} \rightarrow a=\frac{1}{2}$

Se sustituyen el centro y el valor de a para obtener los vértices:

$$V_1(h+a,k)=V_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=V_1\left(1,\frac{1}{3}\right) \qquad \rightarrow \qquad V_2(h-a,k)=V_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=V_2\left(0,\frac{1}{3}\right)$$

EJERCICIO 33

Determina los elementos de las siguientes elipses:

1. $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$
2. $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+4(y-1)^2=4$
3. $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$
4. $\frac{x^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$
5. $x^2+16y^2-10x+64y+73=0$
6. $4x^2+y^2-16x-6y-11=0$
7. $36x^2+16y^2+180x-24y+90=0$
8. $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$
9. $9x^2+16y^2+42x-24y+57=0$
10. $18x^2+12y^2+60x+84y+161=0$
11. $5x^2+9y^2+30x-36y+36=0$
12. $4x^2+9y^2+20x-24y+5=0$
13. $4x^2+25y^2+4x-120y+45=0$
14. $x^2+4y^2+8y+3=0$
15. $4x^2+3y^2+16x+4=0$
16. $16x^2+9y^2+48x-6y-107=0$
17. $4x^2+9y^2+8x-36y+39=0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

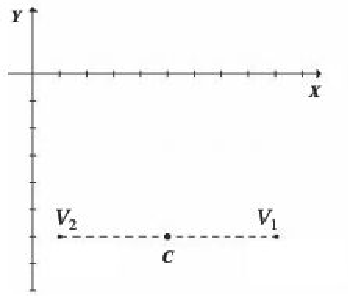
Dados sus elementos, obtener la ecuación

EJEMPLOS

1 Determina la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (1, – 6), (9, – 6) y la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$.

Solución

Se localizan los vértices en el plano cartesiano:



De la gráfica se deduce que la elipse es horizontal con centro $C(5, -6)$, y $\overline{V_1V_2} = 2a = 8$, donde $a = 4$.

Al sustituir $a = 4$ en la fórmula del lado recto y despejar b, se obtiene:

$$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{9}{2} \rightarrow \frac{2b^2}{4} = \frac{9}{2}$$

$$b^2 = 9$$

$$b = 3$$

Para encontrar la ecuación de la elipse se sustituyen las coordenadas del centro (5, – 6), el semieje mayor $a = 4$ y el semieje menor $b = 3$, en la fórmula:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-5)^2}{(4)^2} + \frac{(y-(-6))^2}{(3)^2} = 1$$

Forma ordinaria: $$\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$$

Se desarrolla y simplifica la ecuación para obtener la forma general:

$$9(x-5)^2 + 16(y+6)^2 = 144$$

$$9(x^2 - 10x + 25) + 16(y^2 + 12x + 36) = 144$$

$$9x^2 - 90x + 225 + 16y^2 + 192y + 576 - 144 = 0$$

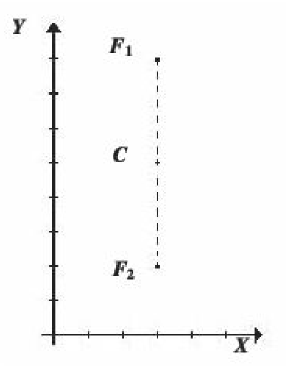
$$9x^2 + 16y^2 - 90x + 192y + 225 + 576 - 144 = 0$$

Forma general: $$9x^2 + 16y^2 - 90x + 192y + 657 = 0$$

2 Determina la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (3, 8) y (3, 2), la longitud de su eje menor es 8.

Solución

Se localizan los focos en el plano cartesiano:



Es una elipse vertical y de la gráfica se obtienen las coordenadas del centro $C(3, 5)$ y el valor de $c = 3$, el eje menor es $2b$, por tanto,

$$2b = 8 \rightarrow b = 4$$

Se utiliza la condición para encontrar el valor de a (semieje mayor):

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Con las coordenadas del centro, el semieje mayor y el semieje menor, se obtiene la ecuación de la elipse.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-3)^2}{(4)^2} + \frac{(y-5)^2}{(5)^2} = 1$$

Forma ordinaria: $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

Se multiplica por 400: $25(x-3)^2 + 16(y-5)^2 = 400$

Se desarrollan los binomios y se simplifica,

$$25(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 - 10y + 25) - 400 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación de la elipse en su forma general es:

$$25x^2 + 16y^2 - 150x - 160y + 225 = 0$$

EJERCICIO 34

Determina la ecuación en su forma ordinaria y general de la elipse, según los datos dados:

1. $C(7, -2)$, eje mayor = 8, eje menor = 4 y eje focal paralelo al eje X.
2. $V_1(-2, 3)$, $V_2(8, 3)$ y $F_1(-1, 3)$, $F_2(7, 3)$
3. $V_1(-2, -5)$, $V_2(-2, 3)$ y $F_1(-2, -4)$, $F_2(-2, 2)$
4. $V_1(0, 0)$, $V_2(8, 0)$ y $B_1(4, 3)$, $B_2(4, -3)$
5. $B_1(3, 2)$, $B_2(3, 6)$ y su eje mayor igual a 10 unidades.
6. $V_1(-4, 5)$, $V_2(16, 5)$ y su excentricidad es $\frac{4}{5}$
7. Su excentricidad es igual a $\frac{2}{3}$ y las coordenadas de sus focos son los puntos $(0, 0)$ y $(0, -4)$
8. $V_1(3, 4)$, $V_2(3, -8)$ y su excentricidad es $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
9. $V_1(-4, 6)$, $V_2(-4, -4)$ y uno de sus focos es el punto $(-4, -3)$
10. $C(-7, 5)$, $F_1\left(-7+4\sqrt{2},\ 5\right)$ y la longitud de su lado recto es $\frac{4}{3}$
11. $F_1(-9, -2)$, $F_2(-3, -2)$ y excentricidad $e = \frac{3}{5}$
12. $C\left(\frac{8}{3},\ -\frac{11}{2}\right)$, $LR = \frac{16}{3}$, excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y eje mayor paralelo al eje X.
13. $C(5, 7)$, $LR = \frac{2}{3}$, $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ y eje focal paralelo al eje X.
14. $C(-4, 0)$, uno de sus focos en $(-1, 0)$ y la longitud de su lado recto igual a $\frac{7}{2}$
15. Es concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$, uno de sus focos es el punto $(3, 2)$ y su lado recto es $\frac{18}{5}$
16. El foco y el lado recto coinciden con los de la parábola, cuya ecuación es:

$$y^2 - 12x - 12y + 84 = 0$$

    y su centro es el punto $(3, 6)$
17. El centro es el de la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$, su foco el punto de tangencia de la circunferencia con el eje Y, y uno de sus vértices es el punto $(1, 3)$
18. El centro es el punto $(2, 1)$, el eje mayor paralelo al eje Y, y pasa por el punto $(1, 4)$ y su lado recto mide $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Casos especiales

Dada la ecuación general de la elipse $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A \neq C$ pero del mismo signo, N es el identificador que permite conocer la representación geométrica de la ecuación, siendo $N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$.

- Si $N > 0$ la ecuación representa una elipse.
- Si $N = 0$ la ecuación representa un punto.
- Si $N < 0$ la ecuación representa un conjunto vacío.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si la ecuación $8x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 89 = 0$ representa una elipse, un punto o un conjunto vacío.

Solución

Al aplicar la fórmula se determina que:

$$N = (9)(-16)^2 + (8)(-54)^2 - 4(8)(9)(89) = 2\,304 + 23\,328 - 25\,632 = 0$$

Por tanto, la ecuación representa un punto y al transformar a la forma ordinaria se obtiene:

$$8x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 89 = 0$$
$$(8x^2 - 16x) + (9y^2 - 54y) + 89 = 0$$
$$8(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 6y) = -89$$
$$8(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 6y + 9) = -89 + 8 + 81$$
$$8(x - 1)^2 + 9(y - 3)^2 = 0$$

El punto que representa es el $(1, 3)$.

2 Identifica la ecuación $3x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$.

Solución

Al utilizar la fórmula del identificador:

$$N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$$
$$N = 2(-6)^2 + 3(4)^2 - 4(3)(2)(-1) = 72 + 48 + 24 = 144$$

Como $N > 0$, entonces dicha ecuación representa una elipse.

3 Identifica la ecuación $8x^2 + 3y^2 - 16x + 6y + 62 = 0$.

Solución

Al aplicar la fórmula del identificador:

$$N = CD^2 + AE^2 - 4ACF \rightarrow N = (3)(-16)^2 + (8)(6)^2 - 4(8)(3)(62)$$
$$= 768 + 288 - 5\,952$$
$$= -4\,896$$

Como $N < 0$, representa un conjunto vacío.

EJERCICIO 35

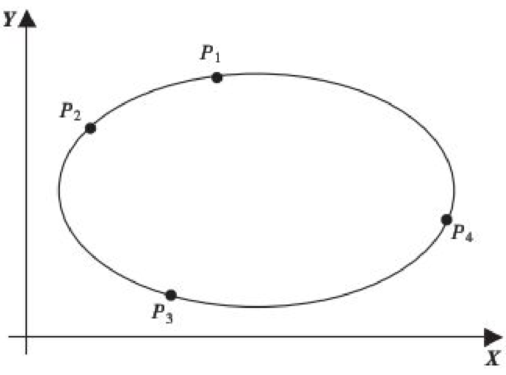
Determina si las siguientes ecuaciones representan una elipse, un punto o un conjunto vacío.

1. $2x^2 + 3y^2 + 6 = 0$
2. $4x^2 + 5y^2 + 8x - 10y + 9 = 0$
3. $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$
4. $3x^2 + 2y^2 - 8y - 4 = 0$
5. $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$
6. $2x^2 + 3y^2 + 12x + 30 = 0$
7. $3x^2 + 4y^2 - 30x - 24y + 111 = 0$
8. $2x^2 + 3y^2 + 4x + 42y + 149 = 0$
9. $6x^2 + 5y^2 - 48x + 10y + 131 = 0$
10. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 68 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la elipse que pasa por cuatro puntos

Para encontrar la ecuación se sustituyen los puntos dados en la ecuación general y así se obtiene un sistema de ecuaciones con cuatro incógnitas, la solución del sistema determina los coeficientes de la ecuación.



Ecuación general de la elipse

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

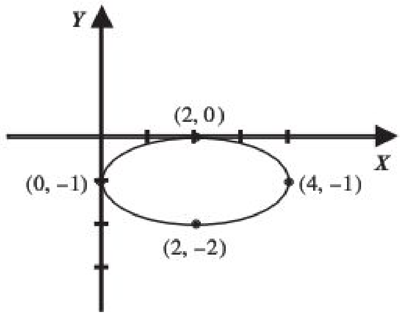
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la elipse que pasa por los puntos (0, – 1), (2, 0), (4, – 1) y (2, – 2).

Solución

Se localizan los puntos:



Se sustituyen los puntos en la ecuación general de la elipse tomando $A = 1$; es decir se sustituye en $x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Punto (0, – 1)

$$(0)^2 + (-1)^2 C + (0)D + (-1)E + F = 0 \rightarrow C - E + F = 0$$

Punto (2, 0)

$$(2)^2 + (0)^2 C + (2)D + (0)E + F = 0 \rightarrow 2D + F = -4$$

Punto (4, – 1)

$$(4)^2 + (-1)^2 C + (4)D + (-1)E + F = 0 \rightarrow C + 4D - E + F = -16$$

Punto (2, – 2)

$$(2)^2 + (-2)^2 C + (2)D + (-2)E + F = 0 \rightarrow 4C + 2D - 2E + F = -4$$

Se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, cuyos resultados son:

$$C = 4,\ D = -4,\ E = 8 \text{ y } F = 4$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación general de la elipse:

$$x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Y, finalmente, se obtiene la ecuación de la elipse:

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$$

2 Determina la ecuación de la elipse que pasa por los puntos (0, 3), (2, 0), $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\sqrt{1}\right)$.

Solución

Se sustituyen los puntos en la ecuación general de la elipse tomando $A = 1$:

Punto (0, 3)

$$(0)^2 + (3)^2 C + (0)D + (3)E + F = 0 \rightarrow 9C + 3E + F = 0$$

Punto (2, 0)

$$(2)^2 + (0)^2 C + (2)D + (0)E + F = 0 \rightarrow 2D + F = -4$$

Punto $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$(1)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 C + (1)D + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)E + F = 0 \rightarrow 27C + 4D + 6\sqrt{3}E + 4F = -4$$

Punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\sqrt{1}\right)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)^2 C + \left(\frac{1}{2}\right)D + \left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)E + F = 0 \rightarrow 135C + 8D + 12\sqrt{15}E + 16F = -4$$

Se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, cuyos resultados son:

$$C = \frac{4}{9}, D = 0, E = 0 \text{ y } F = -4$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación general de la elipse:

$$x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad x^2 + \frac{4}{9}y^2 - 4 = 0$$

Finalmente el resultado es la ecuación de la elipse:

$$9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$$

EJERCICIO 36

Encuentra la ecuación de la elipse que pasa por los siguientes puntos:

1. $(-7, -1)$, $(-3, 2)$, $(1, -1)$ y $(-3, -3)$
2. $(2, 5)$, $(0, 2)$, $(2, -1)$ y $(4, 2)$
3. $(4, 4)$, $(5, 2)$, $(4, 0)$ y $(3, 2)$
4. $(0, 0)$, $(3, 1)$, $\left(1, \frac{2\sqrt{2}+3}{3}\right)$ y $\left(1, \frac{3-2\sqrt{2}}{3}\right)$
5. $(-3, 0)$, $(2, 2)$, $\left(1, \frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$ y $\left(3, \frac{-4\sqrt{6}}{5}\right)$
6. $(-4, 0)$, $(0, 2)$, $\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ y $\left(-2, \sqrt{3}\right)$
7. $\left(0, -\sqrt{3}\right)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$
8. $\left(1, \frac{6\sqrt{6}}{5}\right)$, $\left(3, \frac{12}{5}\right)$, $\left(-2, -\frac{3}{5}\sqrt{2}\right)$ y $\left(-4, \frac{9}{5}\right)$
9. $\left(0, \frac{3\sqrt{3}-6}{2}\right)$, $\left(-2, \frac{-3\sqrt{3}-6}{2}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{5}-3}{3}, -1\right)$ y $\left(\frac{-2\sqrt{5}-3}{3}, -5\right)$
10. $\left(1, \frac{-5\sqrt{3}-2}{2}\right)$, $\left(\frac{-2\sqrt{21}+10}{5}, -3\right)$, $\left(3, \frac{5\sqrt{3}-2}{2}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{21}+10}{5}, 1\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una de las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario dice que "Los planetas se mueven en órbitas elípticas, donde el Sol precisamente se ubica en uno de sus focos".

Determina la longitud del semieje menor de la órbita de Mercurio, si su excentricidad es de 0.206 y su semieje mayor mide 0.387 unidades astronómicas (UA).

Solución

El semieje mayor es $a = 0.387$ y la excentricidad $e = \frac{c}{a} = 0.206$:

$$\frac{c}{0.387} = 0.206 \qquad \rightarrow \qquad c = 0.079722$$

Al sustituir en $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(0.387)^2 - (0.079722)^2} = 0.3787$ UA

2 La tercera ley de Kepler dice que "El cuadrado del periodo p de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol". Determina el periodo de Saturno, si su distancia media al Sol es de 9.539 UA.

Solución

$$p^2 = a^3 \qquad \rightarrow \qquad p = \sqrt{a^3} \qquad \rightarrow \qquad p = \sqrt{(9.539)^3} = 29.46 \text{ años}$$

Ecuación de una recta tangente a una elipse

Si se tiene una elipse con centro en el origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \qquad \text{Vertical: } \frac{x_0x}{b^2}+\frac{y_0y}{a^2}=1$$

Si se tiene una parábola con vértice (h, k) fuera del origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

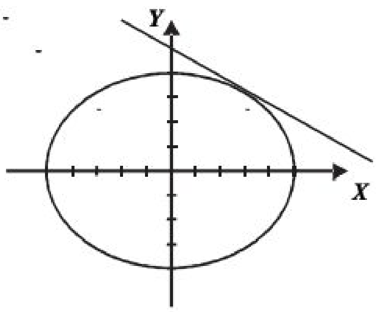
$$\text{Horizontal: } \frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1$$

$$\text{Vertical: } \frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{a^2}=1$$

Ejemplo

Determina la ecuación de la recta tangente a la elipse $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$, en el punto $\left(3, \frac{16}{5}\right)$.

Solución



Se expresa la ecuación en su forma ordinaria:

$$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0 \ \rightarrow\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Donde $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$

Al sustituir estos valores y el punto $\left(3, \frac{16}{5}\right)$ en la fórmula $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$, se obtiene:

$$\frac{(3)x}{25}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)y}{16}=1$$

Al simplificar se determina que:

$$\frac{3x}{25}+\frac{y}{5}=1 \rightarrow 3x+5y-25=0$$

EJERCICIO 37

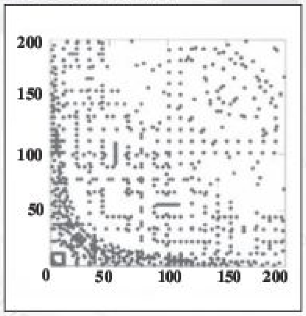
1. Determina la longitud del semieje menor de la órbita de Neptuno, si su excentricidad es de 0.009 y su semieje mayor mide 30.06 UA.
2. Calcula la longitud del semieje menor de la órbita de Venus, si su excentricidad es de 0.007 y su semieje mayor mide 0.723 UA.
3. Encuentra el periodo de Marte si su distancia media al Sol es de 1.52 UA.
4. Obtén el periodo de Júpiter si su distancia media al Sol es de 5.2 UA.
5. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la elipse $9x^2 + y^2 - 9 = 0$, en el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$?
6. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la elipse $16x^2 + 25y^2 - 96x - 100y - 156 = 0$, en el punto $\left(6, \frac{26}{5}\right)$?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 27

HIPÉRBOLA

PALINDROMÍA



Palíndromo numérico
que forma una hipérbola

Palindromía son aquellas frases o cantidades numéricas que pueden ser leídas de derecha a izquierda o viceversa.

A TI MI AMA IMITA

TU MAMA MAMUT

Un ejemplo de un palíndromo numérico es el gráfico de la izquierda, en el cual se observa que en la zona inferior izquierda se distingue perfectamente una hipérbola. El eje horizontal da los enteros x y el vertical indica el factor a. Un punto en el gráfico indica que ax es palíndromo.

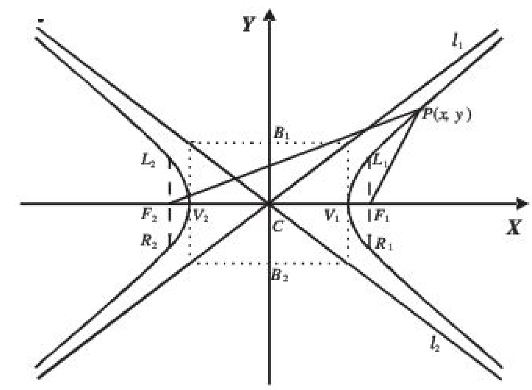
Se observa que la distribución no es uniforme, aunque se aprecian unas interesantes regularidades. Por ejemplo los puntos bastante equidistantes para $x = 45$, $x = 101$, $x = 11$ y otros.

Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre constante.

$$\left|\, \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \,\right| = 2a$$

Gráfica



Elementos

C: Centro

V_1 y V_2: Vértices

F_1 y F_2: Focos

B_1 y B_2: Extremos del eje conjugado

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje transverso o real)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje conjugado o imaginario)

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$

$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$ (lado recto)

l_1 y l_2: Asíntotas

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de sus distancias a los puntos fijos (5, 0) y (– 5, 0), es siempre igual a 8 unidades.

Solución

Se obtienen las distancias del punto $P(x, y)$ a los puntos fijos (focos),

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} \text{ y } \overline{PF_2} = \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

Y se aplica la definición de hipérbola,

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 8$$

Se despeja un radical y se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado,

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 8 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2} \;\rightarrow\; \left(\sqrt{(x-5)^2 + y^2}\right)^2 = \left(8 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}\right)^2$$

Al desarrollar se determina que:

$$(x-5)^2 + y^2 = 64 + 16\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + (x+5)^2 + y^2 \;\rightarrow\; -4\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 16$$

Ahora al elevar ambos miembros al cuadrado resulta que,

$$\left(-4\sqrt{(x+5)^2 + y^2}\right)^2 = (5x+16)^2 \;\rightarrow\; 16(x^2 + y^2 + 10x + 25) = 25x^2 + 160x + 256$$

Finalmente, se simplifica y se obtiene la ecuación: $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

2 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos fijos (–2, 2) y (4, 2), es igual a 4.

Solución

Se aplica la definición y se obtiene:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=4$$

Se despeja una raíz y se elevan al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}\right)^2=\left(4+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\right)^2$$

$$(x+2)^2+(y-2)^2=16+8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+(x-4)^2+(y-2)^2$$

$$x^2+4x+4=16+8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+x^2-8x+16$$

$$12x-28=8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

$$3x-7=2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

$$(3x-7)^2=\left(2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\right)^2$$

$$9x^2-42x+49=4x^2-32x+64+4y^2-16y+16$$

$$5x^2-4y^2-10x+16y-31=0$$

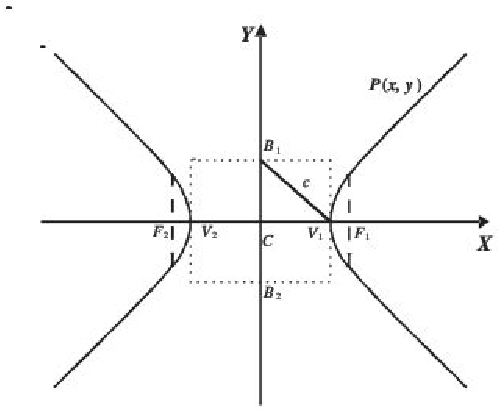
EJERCICIO 38

Resuelve lo siguiente:

1. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (–3, 0) y (3, 0), es siempre igual a 4
2. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (–5, 0) y (5, 0), es siempre igual a 6
3. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (0, –7) y (0, 7), es siempre igual a 12
4. Obtén la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (0, 4) y (0, –4), es siempre igual a 5
5. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos $\left(\sqrt{7},0\right)$ y $\left(-\sqrt{7},0\right)$, es siempre igual a 4
6. Encuentra el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (9, 4) y (1, 4), es siempre igual a 6
7. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (–3, 7) y (–3, –3), es siempre igual a 8

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de una hipérbola con centro en el origen



En la figura:

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$

$\overline{CB_1} = \overline{CB_2} = b$

$\overline{CF_1} = \overline{CF_2} = c$

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$, entonces, $\overline{V_1V_2} = 2a$ al ser V_1 un punto de la hipérbola se tiene que: $\overline{V_1F_2} - \overline{V_1F_1} = 2a$, por tanto, la diferencia de las distancias de cualquier punto de la hipérbola a los dos puntos fijos (focos) es igual a $2a$.

La distancia de $B_1(0, b)$ a $V_1(a, 0)$ es: $\overline{B_1V_1} = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = c$, de donde $b^2 = c^2 - a^2$, sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola, al hallar la distancia de P a los puntos fijos $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ y al aplicar la definición $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$, se obtiene:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a \rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

Se despeja una radical: $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Se despeja el radical y se divide entre $4a$:

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \rightarrow \frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Se eleva al cuadrado y se simplifica:

$$\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \rightarrow \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

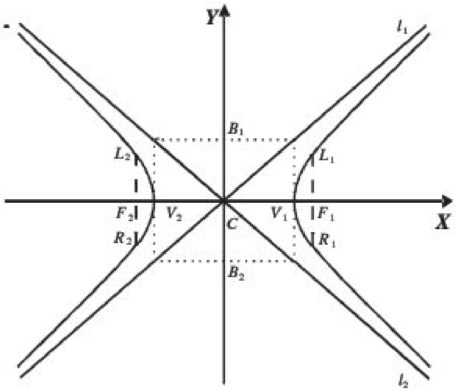
$\dfrac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - y^2 + a^2 - c^2 = 0 \rightarrow \dfrac{c^2-a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2$, se divide entre $c^2 - a^2$:

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2-a^2} = 1$, pero $b^2 = c^2 - a^2$, se sustituye y se obtiene: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, la cual es la ecuación de una hipérbola horizontal con centro en el origen.

De forma análoga para una hipérbola vertical, resulta la ecuación: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

Elementos y ecuación

Hipérbola horizontal



Ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértices: $V(\pm a, 0)$

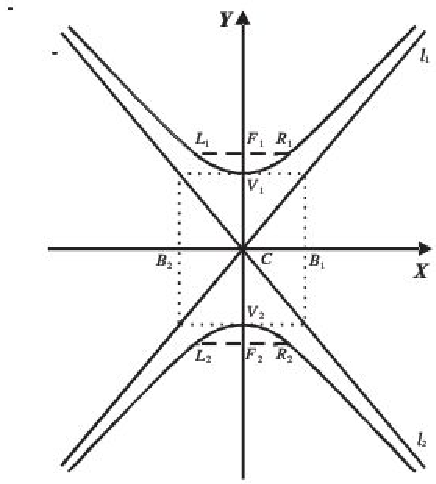
Focos: $F(\pm c, 0)$

Extremos del eje conjugado: $B(0, \pm b)$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$l_1: y = \frac{b}{a}x \qquad l_2: y = -\frac{b}{a}x$$

Hipérbola vertical



Ecuación canónica

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértices: $V(0, \pm a)$

Focos: $F(0, \pm c)$

Extremos del eje conjugado: $B(\pm b, 0)$

Ecuaciones de las asíntotas

$$l_1: y = \frac{a}{b}x \qquad l_2: y = -\frac{a}{b}x$$

Para hipérbolas horizontales y verticales se tiene que:

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$, excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$, lado recto: $\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$

Eje transverso: $2a$, eje conjugado: $2b$, eje focal: $2c$.

Dada la ecuación, obtener sus elementos

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los elementos y traza la gráfica de la hipérbola, cuya ecuación es:

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

Solución

Se transforma la ecuación a la forma canónica:

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

Se divide entre el término independiente y se simplifica:

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

$$\frac{9x^2}{36} - \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ Ecuación en su forma canónica.}$$

La ecuación representa una hipérbola horizontal de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

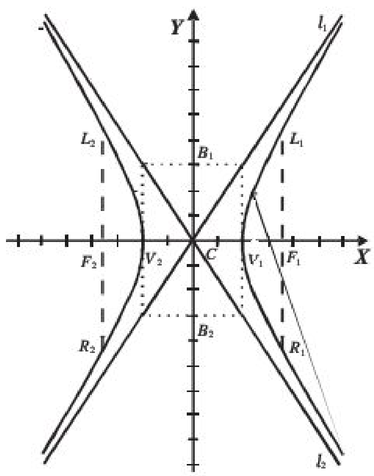
De la cual se obtiene el semieje transverso a y el semieje conjugado b:

$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2 \text{ y } b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

Se aplica la condición para encontrar el valor de c (distancia del centro al foco):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Al sustituir: $a = 2$, $b = 3$ y $c = \sqrt{13}$, se obtiene:



Vértices: $V(\pm a, 0) = V(\pm 2, 0)$

Focos: $F(\pm c, 0) = F\left(\pm\sqrt{13}, 0\right)$

Extremos del eje conjugado:

$$B(0, \pm b) = B(0, \pm 3)$$

Asíntotas:

$$l_1: y = \frac{3}{2}x \rightarrow 3x - 2y = 0$$

$$l_2: y = -\frac{3}{2}x \rightarrow 3x + 2y = 0$$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(2) = 4$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{13}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(3) = 6$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

2 Determina los elementos de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$.

Solución

Se transforma la ecuación $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$ a su forma canónica:

$$x^2 - 4y^2 = -4$$

$$\frac{x^2}{-4} - \frac{4y^2}{-4} = \frac{-4}{-4} \qquad \text{Se divide entre el término independiente.}$$

$$\frac{x^2}{-4} + \frac{y^2}{1} = 1 \qquad \text{Se simplifican las fracciones.}$$

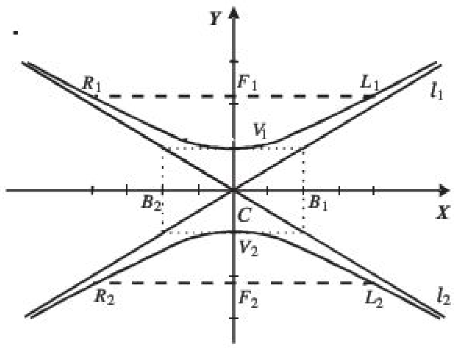
$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1 \qquad \text{Ecuación en su forma canónica.}$$

Es una hipérbola vertical de la forma: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

De la cual $a^2 = 1$ y $b^2 = 4$, por tanto, $a = 1$ y $b = 2$.

El valor de c es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$.

Con los valores de $a = 1$, $b = 2$ y $c = \sqrt{5}$, se determinan los elementos y la gráfica.



Vértices: $V(0, \pm a) = V(0, \pm 1)$

Focos: $F(0, \pm c) = F(0, \pm \sqrt{5})$

Extremos del eje conjugado:

$$B(\pm b,\ 0) = B(\pm 2,\ 0)$$

Asíntotas

$$l_1\text{: } y = \frac{1}{2}x \rightarrow x - 2y = 0$$

$$l_2\text{: } y = -\frac{1}{2}x \rightarrow x + 2y = 0$$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{1} = 8$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(1) = 2$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{5}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(2) = 4$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

3 Determina los vértices, los focos, los extremos del eje conjugado, la excentricidad, el lado recto y las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - 8y^2 = 8$.

Solución

Al transformar la ecuación a su forma canónica se determina que:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{1} = 1$$

La ecuación representa una hipérbola horizontal de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 8$ y $b^2 = 1$, por tanto, $a = 2\sqrt{2}$ y $b = 1$, el valor de c se obtiene:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$$

Los elementos son:

Vértices: $V(\pm a, 0) = V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Focos: $F(\pm c, 0) = F(\pm 3, 0)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Extremos del eje conjugado: $B(0, \pm 1)$

Asíntota l_1: $y = \frac{b}{a}x$

$$x - 2\sqrt{2}y = 0$$

Asíntota l_2: $y = -\frac{b}{a}x$

$$x + 2\sqrt{2}y = 0$$

EJERCICIO 39

Determina los elementos de las siguientes hipérbolas:

1. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$
2. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
3. $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{5} = 1$
4. $\frac{y^2}{4a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
5. $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0$
6. $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$
7. $4y^2 - x^2 - 4 = 0$
8. $5y^2 - 16x^2 + 400 = 0$
9. $4x^2 - 9y^2 + 144 = 0$
10. $x^2 - y^2 + 4 = 0$
11. $5x^2 - 6y^2 + 30 = 0$
12. $12x^2 - 5y^2 - 60 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dados sus elementos, obtener la ecuación

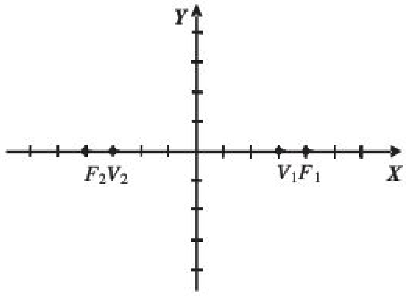
EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola cuyos vértices y focos son los puntos $(\pm 3, 0)$ y $(\pm 4, 0)$, respectivamente?

Solución

Se localizan los puntos en el plano cartesiano:



Y el resultado es una hipérbola horizontal con centro en el origen, semieje transverso $a = 3$ y semieje focal $c = 4$.

El valor de b es: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

Los valores de $a = 3$ y $b = \sqrt{7}$ se sustituyen en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Y se obtiene la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1 \quad \text{o} \quad 7x^2 - 9y^2 - 63 = 0$$

2 Determina la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, uno de sus focos, el punto $\left(2\sqrt{3},\ 0\right)$ y el lado recto $2\sqrt{2}$.

Solución

De los elementos que se tienen resulta que:

$$c = 2\sqrt{3} \quad \text{y} \quad \frac{2b^2}{a} = 2\sqrt{2}$$

Se despeja b^2 de la fórmula del lado recto en términos de a:

$$b^2 = \sqrt{2}a$$

Se sustituyen en la condición los valores de c y b^2, se simplifica y resuelve la ecuación.

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \left(2\sqrt{3}\right)^2 = a^2 + \sqrt{2}a$$

$$12 = a^2 + \sqrt{2}a$$

$$a^2 + \sqrt{2}\,a - 12 = 0$$

$$(a + 3\sqrt{2})(a - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$a = -3\sqrt{2} \text{ y } a = 2\sqrt{2}$$

$a = 2\sqrt{2}$, por tanto,

$$b^2 = \sqrt{2}\left(2\sqrt{2}\right) = 4 \rightarrow b = 2$$

Se sustituye en la fórmula $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y se obtiene:

$$\frac{x^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} - \frac{y^2}{(2)^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow x^2 - 2y^2 - 8 = 0$$

3 Determina la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son los puntos (0, 3), (0, – 3) y lado recto igual a $\frac{8}{3}$.

Solución

Se obtiene la distancia entre los vértices.

$$2a = \sqrt{(0-0)^2 + (3+3)^2} = 6$$

$$a = \frac{6}{2}$$

$$a = 3$$

Si el lado recto es $\frac{8}{3}$ y $a = 3$, entonces:

$$\frac{2b^2}{3} = \frac{8}{3} \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = 2$$

Los vértices son de la forma (0, – a) y (0, a), por tanto, la hipérbola es vertical y para determinar la ecuación se utiliza $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Al sustituir se obtiene: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

Y finalmente al transformar a su forma general se determina que:

$$4y^2 - 9x^2 - 36 = 0 \qquad \rightarrow \qquad 9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$$

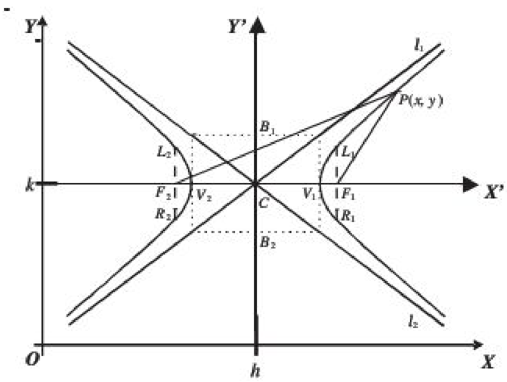
EJERCICIO 40

Determina la ecuación de la hipérbola que cumpla con las siguientes características:

1. $V(0, \pm 3)$ y $F(0, \pm 4)$
2. $V(\pm 4, 0)$ y $F(\pm 5, 0)$
3. $V(0, \pm\sqrt{6})$ y $F(0, \pm\sqrt{10})$
4. $V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ y $F(\pm 2\sqrt{3}, 0)$
5. $V(\pm 1, 0)$ y $F(\pm\sqrt{5}, 0)$
6. $V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ y $F(\pm 2\sqrt{7}, 0)$
7. $V_1(3, 0)$, $V_2(-3, 0)$ y lado recto = $\frac{8}{3}$
8. $F_1\left(0, \sqrt{41}\right)$, $F_2\left(0, -\sqrt{41}\right)$ y lado recto = $\frac{25}{2}$
9. $V_1(6, 0)$, $V_2(-6, 0)$, excentricidad = $\frac{\sqrt{5}}{2}$
10. Centro en el origen, vértice y foco en los puntos $(2\sqrt{3}, 0)$ y $(4, 0)$ respectivamente y eje conjugado sobre el eje de las ordenadas.
11. Centro en el origen, eje focal sobre el eje de las ordenadas y la longitud de su eje conjugado y lado recto $\sqrt{20}$ y $\frac{5}{3}\sqrt{6}$, respectivamente.
12. Centro en el origen, eje transverso igual a 4 y sobre el eje de las abscisas, y una de sus asíntotas es la ecuación $\sqrt{3}x - 2y = 0$
13. Centro en el origen, eje conjugado sobre el eje de las ordenadas, lado recto $2\sqrt{3}$ y excentricidad $\frac{\sqrt{6}}{2}$
14. Centro en el origen, eje transverso sobre el eje de las ordenadas, lado recto $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ y excentricidad $\frac{\sqrt{66}}{6}$
15. Asíntotas las rectas $4x + 3y = 0$ y $4x - 3y = 0$, eje imaginario igual a 8 unidades (dos soluciones).
16. Extremos del eje conjugado $B_1(0, 1)$, $B_2(0, -1)$ y excentricidad $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$
17. Eje focal sobre X, eje conjugado $\sqrt{20}$ y la longitud de cada lado recto $\frac{5\sqrt{6}}{3}$
18. Pasa por los puntos $\left(\frac{10}{3}, 4\right)$ y $\left(\frac{2}{3}\sqrt{1}, -2\right)$, eje transverso sobre el eje X.
19. Pasa por los puntos $\left(6, 2\sqrt{3}\right)$ y $\left(9, 4\sqrt{2}\right)$, eje conjugado sobre el eje Y.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de una hipérbola con centro en el punto (h, k)



Para una hipérbola horizontal con centro fuera del origen en el punto (h, k), se hace una traslación de los ejes XY al punto $C(h, k)$.

Sean $x' = x - h$, $y' = y - k$, la ecuación de la hipérbola en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Al sustituir x', y' en la ecuación se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

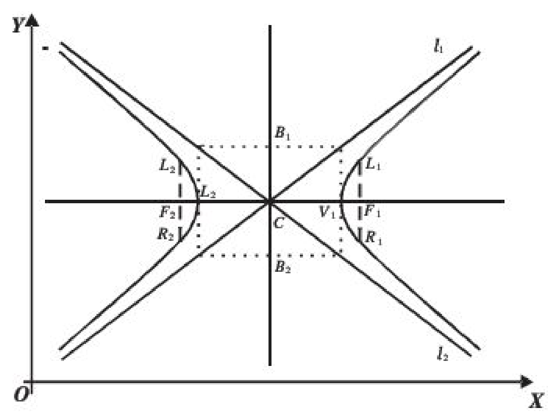
Del mismo modo se obtiene la ecuación de una hipérbola vertical con centro (h, k) fuera del origen:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Al simplificar se obtendrá una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A y C varían en signo.

Elementos y ecuación

Hipérbola horizontal



Ecuación ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Elementos

Vértices: $V(h \pm a, k)$

Focos: $F(h \pm c, k)$

Extremos del eje conjugado:

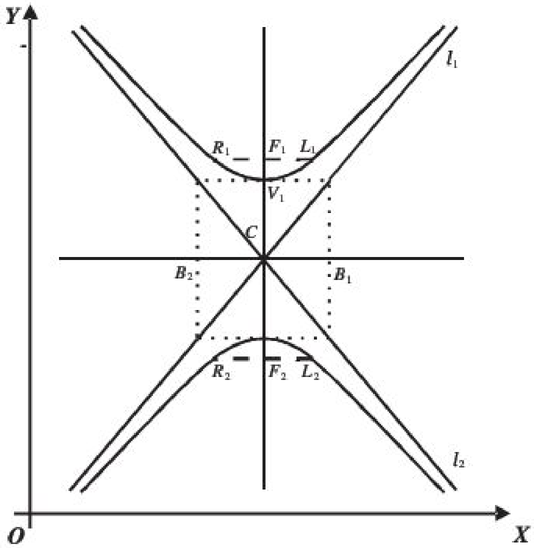
$B(h, k \pm b)$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$l_1\text{: } y - k = \frac{b}{a}(x-h)$$

$$l_2\text{: } y - k = -\frac{b}{a}(x-h)$$

Hipérbola vertical



Ecuación ordinaria

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértices: $V(h, k \pm a)$

Focos: $F(h, k \pm c)$

Extremos del eje conjugado

$B(h \pm b, k)$

Ecuaciones de las asíntotas

$$l_1: y-k=\frac{a}{b}(x-h)$$

$$l_2: y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$$

Para hipérbolas horizontales o verticales se tiene que:

Condición: $c^2=a^2+b^2$; $c>b$, $c>a$, excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}$ $(e>1)$, lado recto: $\overline{LR}=\dfrac{2b^2}{a}$

Ecuación general de la hipérbola:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Con A y C de signo contrario.

Dada la ecuación obtener sus elementos

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los elementos de la hipérbola cuya ecuación es: $4y^2 - 9x^2 + 8y - 54x - 113 = 0$.

Solución

$4y^2 + 8y - 9x^2 - 54x = 113$

$4(y^2 + 2y) - 9(x^2 + 6x) = 113$ Se factorizan los coeficientes de los términos cuadráticos.

$4(y^2 + 2y + (1)^2) - 9(x^2 + 6x + (3)^2) = 113 + 4(1)^2 - 9(3)^2$ Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$4(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 + 6x + 9) = 113 + 4 - 81$

$4(y + 1)^2 - 9(x + 3)^2 = 36$ Se factoriza.

Se dividen ambos miembros entre 36 para obtener la ecuación en su forma ordinaria.

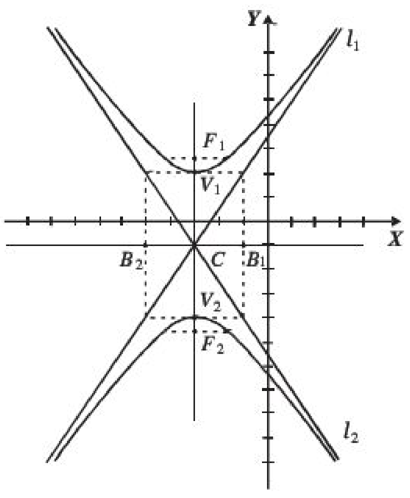
$$\frac{4(y+1)^2}{36} - \frac{9(x+3)^2}{36} = \frac{36}{36}, \quad \frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{4} = 1$$

Es una hipérbola vertical de elementos:

Centro $(-3, -1)$; $a = \sqrt{9} = 3$ y $b = \sqrt{4} = 2$

El valor de c es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Los elementos se obtienen al sustituir:



Vértices: $V(h, k \pm a)$

$V_1(-3, -1 + 3) = (-3, 2)$

$V_2(-3, -1 - 3) = (-3, -4)$

Focos: $F(h, k \pm c)$

$F_1\left(-3, -1 + \sqrt{13}\right) = (-3, 2.6)$

$F_2\left(-3, -1 - \sqrt{13}\right) = (-3, -4.6)$

Extremos del eje conjugado: $B(h \pm b, k)$

$B_1(-3 + 2, -1) = (-1, -1)$

$B_2(-3 - 2, -1) = (-5, -1)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(3) = 6$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{13}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(2) = 4$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Asíntotas

$$l_1: y - k = \frac{a}{b}(x - h) \rightarrow l_1: y + 1 = \frac{3}{2}(x + 3) \rightarrow 3x - 2y + 7 = 0$$

$$l_2: y - k = -\frac{a}{b}(x - h) \rightarrow l_2: y + 1 = -\frac{3}{2}(x + 3) \rightarrow 3x + 2y + 11 = 0$$

2 Reduce la ecuación de la hipérbola a su forma ordinaria, determina sus elementos y grafica la curva.

$$5x^2 - 4y^2 - 10x + 24y - 51 = 0$$

Solución

$$5x^2 - 4y^2 - 10x + 24y - 51 = 0$$
$$5(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 6y) = 51$$
$$5(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 6y + 9) = 51 + 5 - 36$$
$$5(x - 1)^2 - 4(y - 3)^2 = 20$$

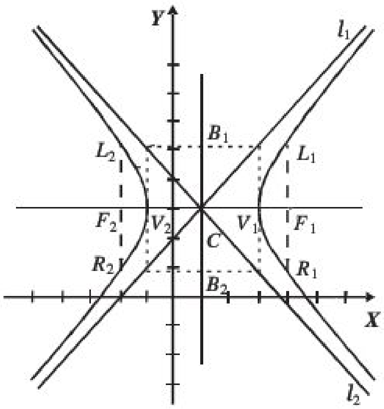
$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1 \text{ Ecuación en su forma ordinaria.}$$

El centro, el semieje transverso y el semieje conjugado son:

$$C(1, 3); a = \sqrt{4} = 2 \text{ y } b = \sqrt{5}$$

El valor de c es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$.

Se obtienen los elementos sustituyendo los valores anteriores y posteriormente se grafica:



Vértices: $V(h \pm a, k)$

$V_1(3, 3)$ $V_2(-1, 3)$

Focos: $F(h \pm c, k)$

$F_1(4, 3)$ $F_2(-2, 3)$

Extremos del eje conjugado: $B(h, k \pm b)$

$B_1(1, 5.2)$ $B_2(1, 0.8)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)}{2} = 5$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 4$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 6$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2\sqrt{5}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

Asíntotas

$$l_1: y - 3 = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1) \rightarrow \sqrt{5}x - 2y + \left(6 - \sqrt{5}\right) = 0$$

$$l_2: y - 3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1) \rightarrow \sqrt{5}x + 2y - \left(6 + \sqrt{5}\right) = 0$$

EJERCICIO 41

Determina los elementos de las siguientes hipérbolas:

1. $\frac{(x+3)^2}{25}-\frac{(y-4)^2}{9}=1$
2. $\frac{y^2}{4}-(x+1)^2=1$
3. $\frac{x^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$
4. $x^2-4y^2-2x+16y-7=0$
5. $9x^2-4y^2+18x-24y+9=0$
6. $9x^2-16y^2+36x+32y-124=0$
7. $4x^2-9y^2-4x+18y-44=0$
8. $4x^2-y^2+24x+40=0$
9. $x^2-y^2-x+y+4=0$
10. $4x^2-y^2-4y-40=0$
11. $x^2-y^2-6x-4y+4=0$
12. $9x^2-y^2-36x-4y+41=0$
13. $4x^2-9y^2-4x+6y-36=0$
14. $x^2-2y^2-8x+12y-10=0$
15. $6x^2-5y^2+12x-30y-9=0$
16. $3x^2-4y^2+24x-8y+32=0$
17. $x^2-2y^2-4x+20y-58=0$
18. $x^2-y^2+14x-2y+46=0$
19. $2x^2-y^2+28x-2y+95=0$
20. $4x^2-3y^2+8x+30y-83=0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dados sus elementos obtener la ecuación

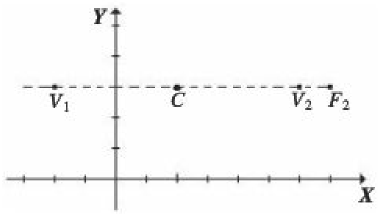
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación general de la hipérbola cuyos vértices son los puntos (–2, 3) y (6, 3), un foco se localiza en el punto (7, 3).

Solución

Se localizan los puntos en el plano:



Se obtiene el centro $C(2, 3)$, el valor del semieje transverso a es la distancia de cualquier vértice al centro y el valor del semieje focal c es la distancia del foco al centro, es decir:

$$a = 4 \text{ y } c = 5$$

Para determinar b se sustituyen los valores en la condición:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

Es una hipérbola horizontal, por tanto, la ecuación es del tipo: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Se sustituyen $C(2, 3)$, $a = 4$ y $b = 3$:

$$\frac{(x-2)^2}{(4)^2} - \frac{(y-3)^2}{(3)^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \text{ Ecuación en su forma ordinaria.}$$

Se obtiene la ecuación en su forma general:

Se multiplica la ecuación por 144, $144\left[\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1\right]$

Se desarrollan los binomios, $9(x-2)^2 - 16(y-3)^2 = 144$

Se multiplica y simplifica, $9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 - 6y + 9) = 144$

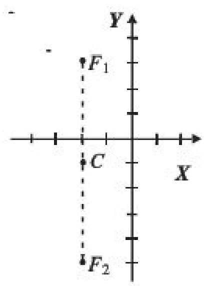
$$9x^2 - 36x + 36 - 16y^2 + 96y - 144 - 144 = 0$$

La ecuación general es: $9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y - 252 = 0$

2 Determina la ecuación general de la hipérbola cuyos focos son los puntos (–2, 3), (–2, –5) y su lado recto $\frac{14}{3}$.

Solución

Se grafican en el plano cartesiano los elementos conocidos:



Se obtienen las coordenadas del centro y el valor del semieje focal c.

$$C(-2, -1) \text{ y } c = 4$$

El lado recto es $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{14}{3}$, se despeja b^2:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{14}{3} \rightarrow b^2 = \frac{7}{3}a$$

Se sustituyen $c = 4$ y $b^2 = \frac{7}{3}a$ en la condición y se resuelve la ecuación.

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow (4)^2 = a^2 + \frac{7}{3}a$$

$$16 = a^2 + \frac{7}{3}a$$

$$0 = 3a^2 + 7a - 48$$

$$(3a + 16)(a - 3) = 0$$

De la ecuación $a = 3$, el valor del semieje conjugado es:

$$b^2 = \frac{7}{3}a \rightarrow b^2 = \frac{7}{3}(3) = 7 \rightarrow b = \sqrt{7}$$

La hipérbola es vertical, la ecuación se obtiene al sustituir las coordenadas del centro y el valor de a y el valor de b en: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

Forma ordinaria: $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{7} = 1$

Forma general: $7y^2 - 9x^2 + 14y - 36x - 92 = 0 \rightarrow 9x^2 - 7y^2 + 36x - 14y + 92 = 0$

EJERCICIO 42

Determina las ecuaciones de las hipérbolas que cumplan con las siguientes condiciones:

1. $F_1(5, 1)$, $F_2(-5, 1)$, $V_1(3, 1)$, $V_2(-3, 1)$
2. $F_1(-4, 5)$, $F_2(-4, -7)$, $V_1(-4, 4)$, $V_2(-4, -6)$
3. $F_1(7, -2)$, $F_2(-3, -2)$, $V_1(6, -2)$, $V_2(-2, -2)$
4. $F_1(1, 6)$, $F_2(1, 0)$, $V_1(1, 5)$, $V_2(1, 1)$
5. $F_1(8, 2)$, $F_2(-2, 2)$ y excentricidad $e = \frac{5}{4}$
6. $F_1(-3, 3)$, $F_2(-9, 3)$ y $LR = 5$
7. $F_1(-2, 3)$, $F_2(6, 3)$ y $LR = 12$
8. Extremos del eje conjugado, los puntos $(-1+\sqrt{7}, 3)$ y $(-1-\sqrt{7}, 3)$, $e = \frac{4}{3}$
9. Eje transverso paralelo al eje de las abscisas, excentricidad igual a $\frac{\sqrt{6}}{2}$, vértices, los puntos $(4-2\sqrt{2}, 3)$ y $(4+2\sqrt{2}, 3)$
10. Longitud del lado recto igual a $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ y extremos del eje conjugado, los puntos $(-2+\sqrt{5}, -3)$ y $(-2-\sqrt{5}, -3)$
11. Longitud del lado recto 3 y focos en los puntos $(-4+\sqrt{7}, -1)$ y $(-4-\sqrt{7}, -1)$
12. Centro en $(1, 3)$, eje transverso paralelo al eje X, excentricidad $e = \frac{5}{4}$ y $LR = \frac{9}{2}$
13. Los extremos de un lado recto son los puntos $\left(-1-\frac{4\sqrt{5}}{5}, 4\right)$ y $\left(-1+\frac{4\sqrt{5}}{5}, 4\right)$ las ecuaciones de sus asíntotas, las rectas $\sqrt{5}x+2y+\sqrt{5}-2=0$ y $\sqrt{5}x-2y+\sqrt{5}+2=0$
14. Eje transverso paralelo al eje X es igual a 4, excentricidad $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y pasa por los puntos $(-4, 1)$ y $\left(1, 1+\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Casos especiales

Existen ecuaciones que no precisamente representan una hipérbola y que sólo son un par de rectas concurrentes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si la ecuación $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$ representa una hipérbola o dos rectas concurrentes.

Solución

Al transformar la ecuación a su forma ordinaria se determina que:

$$x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x - 4y^2 = -1 \quad \rightarrow \quad (x^2 - 2x + 1) - 4y^2 = -1 + 1$$

$$(x-1)^2 - 4(y-0)^2 = 0$$

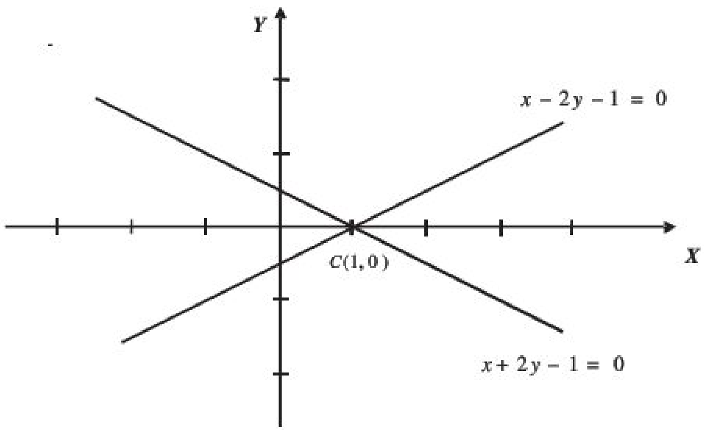
La ecuación es una diferencia de cuadrados, la cual se factoriza,

$$[(x-1) + 2(y-0)]\,[(x-1) - 2(y-0)] = 0 \quad \rightarrow \quad [x - 1 + 2y]\,[x - 1 - 2y] = 0$$

Se igualan con cero cada uno de los factores y se obtienen las siguientes rectas:

$$x + 2y - 1 = 0, \qquad x - 2y - 1 = 0$$

La representación gráfica es:



2 ¿Cuál es el valor de K para que la ecuación $x^2 - 4y^2 + 4x + 24y + K = 0$ represente un par de rectas concurrentes?

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$x^2 - 4y^2 + 4x + 24y + K = 0 \rightarrow x^2 - 4y^2 + 4x + 24y = -K$$
$$(x^2 + 4x) - 4(y^2 - 6y) = -K$$
$$(x^2 + 4x + 4) - 4(y^2 - 6y + 9) = -K + 4 - 36$$
$$(x + 2)^2 - 4(y - 3)^2 = -K - 32$$

Para que la ecuación represente dos rectas concurrentes, el segundo miembro de la ecuación debe ser cero:

$$-K - 32 = 0$$
$$-K = 32$$
$$K = -32$$

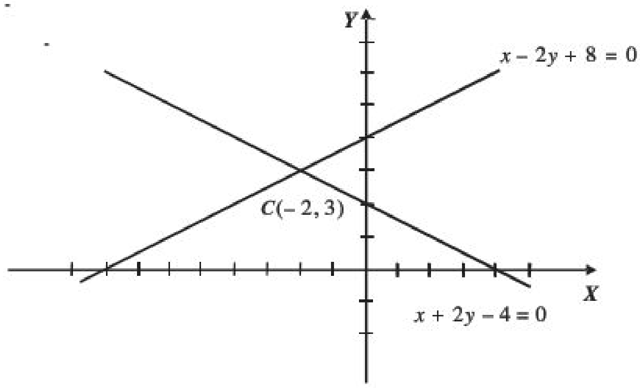
Se sustituye el valor de $K = -32$ en la ecuación $(x + 2)^2 - 4(y - 3)^2 = -K - 32$,

$$(x + 2)^2 - 4(y - 3)^2 = 0$$
$$[(x + 2) + 2(y - 3)]\,[(x + 2) - 2(y - 3)] = 0$$
$$(x + 2y - 4)\,(x - 2y + 8) = 0$$

Las ecuaciones de las rectas cuando $K = -32$, son:

$$x + 2y - 4 = 0$$
$$x - 2y + 8 = 0$$

Gráfica:



EJERCICIO 43

Determina el valor de K en las siguientes ecuaciones para que representen un par de rectas concurrentes.

1. $9x^2 - 4y^2 - 18x + 8y + K = 0$
2. $2x^2 - y^2 + 4x + 4y + K = 0$
3. $9x^2 + 54x - y^2 + 4y + K = 0$
4. $3x^2 - 2y^2 - 2x + 2y + K = 0$
5. $x^2 - 12y^2 - 2x + K = 0$
6. $4x^2 - 3y^2 - 8x + 6y + K = 0$
7. $25x^2 - 4y^2 - 100x + 24y + K = 0$
8. $y^2 - 4x^2 + 24x - 2y + K = 0$
9. $x^2 - y^2 - 2x - 2y + K = 0$
10. $9y^2 - 4x^2 + 16x - 18y + K = 0$
11. $x^2 - 4y^2 - 4x - 24y + K = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de una recta tangente a una hipérbola en un punto cualquiera

Se tiene una hipérbola con vértice en el origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } \frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

$$\text{Vertical: } \frac{y_0y}{a^2} - \frac{x_0x}{b^2} = 1$$

Se tiene una hipérbola con centro (h, k) fuera del origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } \frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2} - \frac{(y_0-k)(y-k)}{b^2} = 1$$

$$\text{Vertical: } \frac{(y_0-k)(y-k)}{a^2} - \frac{(x_0-h)(x-h)}{b^2} = 1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la recta tangente a la elipse $7x^2 - 9y^2 - 63 = 0$, en el punto $\left(4, \frac{7}{3}\right)$

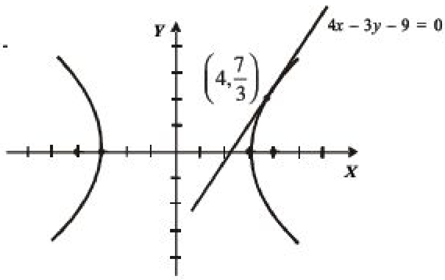
Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$7x^2 - 9y^2 - 63 = 0 \;\rightarrow\; 7x^2 - 9y^2 = 63 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1 \text{ Es una hipérbola horizontal.}$$

Entonces $a^2 = 9$, $b^2 = 7$, se sustituyen estos valores y el punto en la fórmula: $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$

$$\frac{(4)x}{9} - \frac{\left(\frac{7}{3}\right)y}{7} = 1 \rightarrow \frac{4x}{9} - \frac{7y}{21} - 1 = 0 \;\rightarrow\; \frac{4x}{9} - \frac{y}{3} - 1 = 0 \;\rightarrow\; 4x - 3y - 9 = 0$$



Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente es: $4x - 3y - 9 = 0$.

2 Determina la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$, en el punto $\left(7, \frac{21}{4}\right)$.

Solución

De la ecuación $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$, se obtiene que $C(h, k) = C(2, 3)$, $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, se sustituyen estos datos y el punto $(x_0, y_0) = \left(7, \frac{21}{4}\right)$ en: $\frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2} - \frac{(y_0-k)(y-k)}{b^2} = 1$

$$\frac{(7-2)(x-2)}{16} - \frac{\left(\frac{21}{4}-3\right)(y-3)}{9} = 1 \rightarrow \frac{5(x-2)}{16} - \frac{y-3}{4} = 1 \rightarrow 5x - 4y - 14 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente a la hipérbola es: $5x - 4y - 14 = 0$.

EJERCICIO 44

Resuelve lo siguiente:

1. Determina la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$, en el punto $\left(-5, -\frac{9}{4}\right)$
2. Obtén la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $25x^2 - 9y^2 + 225 = 0$, en el punto $\left(\frac{9}{5}, -\sqrt{3}\right)$
3. Determina la ecuación de la recta tangente a la hipérbola cuya ecuación es: $9x^2 - 16y^2 - 36x + 160y - 508 = 0$ en el punto $\left(-3, \frac{11}{4}\right)$
4. Obtén la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $5x^2 - y^2 - 4x - 2y + 24 = 0$, en el punto $(0, -6)$
5. Determina la ecuación de la recta tangente a la hipérbola cuya ecuación es: $x^2 - 17y^2 + 4x + 102y - 166 = 0$, en el punto $(-19, 7)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 28

ECUACIÓN GENERAL DE CÓNICAS

Estrabismo o dislexia
Estudio de los ejes de Fick.

Estrabismo es toda situación en que los ejes visuales no se cruzan sobre el objeto que se mira.

El ojo realiza movimientos de rotación y de traslación, pero para su tratamiento sólo se estudian los de rotación, ya que los de traslación son despreciables, el estudio se basa únicamente en los ejes de Fick (son los ejes de rotación).

Los ejes que pueden pasar por el centro de rotación (uno para cada movimiento), en el que el eje *Y* anteroposterior coincida con el eje visual y los ejes *X* y *Z* estén contenidos en un plano perpendicular al eje *Y* en el centro de rotación.

Rotación de ejes

En el sistema de ejes coordenados cuando los ejes rotan un ángulo α, manteniendo fijo el origen, los puntos $P(x, y)$ se transforman en $P(x', y')$, a esta transformación se le llama *rotación de ejes*. Los puntos están relacionados con las siguientes ecuaciones:

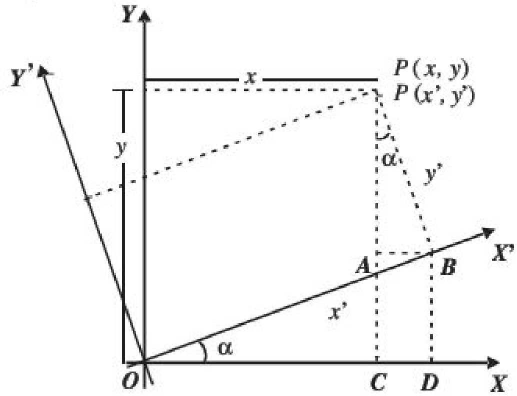
$$x' = x\cos\alpha + y\,sen\,\alpha$$
$$y' = y\cos\alpha - x\,sen\,\alpha$$

En la figura,

$$x = \overline{OD} - \overline{CD}\,;\; y = \overline{AP} + \overline{AC}$$

Pero $\overline{CD} = \overline{AB}$ y $\overline{AC} = \overline{BD}$, entonces

$$x = \overline{OD} - \overline{AB}\,;\; y = \overline{AP} + \overline{BD}$$



En el triángulo PAB

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{y'}\,;\; \cos\alpha = \frac{\overline{AP}}{y'}$$

$$\overline{AB} = y'\,sen\,\alpha,\; \overline{AP} = y'\cos\alpha$$

En el triángulo ODB

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{BD}}{x'}\,;\; \cos\alpha = \frac{\overline{OD}}{x'}$$

$$\overline{BD} = x'\,sen\,\alpha,\; \overline{OD} = x'\cos\alpha$$

Luego, al sustituir en $x = \overline{OD} - \overline{AB}\,;\; y = \overline{AP} + \overline{BD}$

$$x = x'\cos\alpha - y'\,sen\,\alpha;$$
$$y = y'\cos\alpha + x'\,sen\,\alpha$$

Al resolver el sistema se obtiene:

$$x' = x\cos\alpha + y\,sen\,\alpha$$
$$y' = y\cos\alpha - x\,sen\,\alpha$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Un sistema de coordenadas se rota 45°. Determina las coordenadas del punto $A(-1, 2)$ referido al nuevo sistema coordenado $X'Y'$.

Solución

Para determinar las nuevas coordenadas (x', y') se utiliza: $x' = x\cos\alpha + y\,sen\,\alpha$; $y' = y\cos\alpha - x\,sen\,\alpha$.

Como el ángulo a rotar es de 45°, se precisa que:

$$sen\,45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Al sustituir en las fórmulas, se determina el punto en el nuevo sistema coordenado $X'Y'$.

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y' = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

De aquí se deduce que las coordenadas del punto $A(-1, 2)$ en el nuevo sistema de coordenadas son: $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Ángulo de rotación

Para determinar el ángulo de rotación, el cual elimina el termino xy, se sustituyen las ecuaciones:

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha\ ;\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha$$

en la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, como a continuación se ejemplifica:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el ángulo de rotación de los ejes necesario para eliminar el término xy de la ecuación.

$$7x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 = 16$$

Solución

Se sustituyen las ecuaciones de rotación:

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha;\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha$$

$$7(x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha)^2 - 6\sqrt{3}\ (x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha)(x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha) + 13(x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha)^2 = 16$$

Se desarrollan y se reducen los términos semejantes:

$$(7 \cos^2\alpha - 6\sqrt{3} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + 13 \operatorname{sen}^2\alpha)x'^2 + [12 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - 6\sqrt{3}\ (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)]\, x'y'$$

$$+ (7\operatorname{sen}^2\alpha + 6\sqrt{3}\ \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + 13 \cos^2\alpha)y'^2 = 16$$

Para eliminar el término en $x'y'$, se iguala con cero el coeficiente de dicho término y se despeja el ángulo α.

$$12 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - 6\sqrt{3}\ (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0 \rightarrow 6 \operatorname{sen} 2\alpha - 6\sqrt{3} \cos 2\alpha = 0$$

y al dividir entre $\cos 2\alpha$, se obtiene:

$$\tan 2\alpha = \sqrt{3} \rightarrow 2\alpha = 60°$$

Finalmente, el ángulo $\alpha = 30°$.

En el ejemplo anterior se observa que determinar el ángulo de rotación de los ejes es un tanto laborioso, no obstante, una forma práctica es tomar los coeficientes de los términos cuadráticos y el término xy de la ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Y sustituirlos en la ecuación:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

2 Determina el ángulo de rotación de los ejes necesario para eliminar el término xy de la ecuación.

$$13x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 15y^2 = 36$$

Solución

Los valores de $A = 13$, $B = 2\sqrt{3}$ y $C = 15$ se sustituyen en la fórmula:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{15 - 13} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \rightarrow \tan 2\alpha = \sqrt{3} \rightarrow 2\alpha = 60°$$

Por consiguiente, el ángulo $\alpha = 30°$.

Transformación de la ecuación general de segundo grado

Para transformar la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, a otra que carezca del término xy conociendo el ángulo de rotación α, se sustituye dicho ángulo en las fórmulas:

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha; \; y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha$$

y éstas a su vez en la ecuación, desarrollando y simplificando los términos resultantes.

Ejemplo

Transforma la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$, cuando se giran los ejes un ángulo de 45°.

Solución

Debido a que el ángulo de rotación es de 45°, se determinan las ecuaciones de rotación.

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\,;\; y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

Se sustituyen estos valores en la ecuación dada, el resultado es:

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right) - 4\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 3 = 0$$

Al desarrollar y simplificar se obtiene al final:

$$2y'^2 - \sqrt{2}\,x' - 3\sqrt{2}\,y' + 3 = 0$$

EJERCICIO 45

Rota las siguientes curvas a los ángulos indicados.

1. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0;\ \alpha = 45°$
2. $13x^2 + 2\sqrt{3}xy + 15y^2 - 48 = 0;\ \alpha = 150°$
3. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 8 = 0;\ \alpha = 120°$
4. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y = 0;\ \alpha = 30°$
5. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x - 6 = 0;\ \alpha = 135°$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación aplicando las identidades trigonométricas

Para transformar la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ a otra que carezca de término xy se utilizan las siguientes fórmulas:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$$

Y las identidades trigonométricas

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 2\alpha + 1}};\ \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\ ;\ \cos \alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

Como se muestra a continuación:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Mediante una rotación de ejes elimina el término xy de la ecuación $3x^2 + 3xy - y^2 = 9$.

Solución

Se determinan los valores $A = 3$, $B = 3$ y $C = -1$, para determinar $\tan 2\alpha$ y el resultado se evalúa en la fórmula de $\cos 2\alpha$:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{3}{3-(-1)} = \frac{3}{4} \rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 2\alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}} = \frac{4}{5}$$

Luego, con la aplicación de las siguientes fórmulas se encuentran los valores de seno y coseno:

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\ ;\ \cos \alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{4}{5}\right)}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Las ecuaciones de rotación son:

$$x = x'\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3x'-y'}{\sqrt{10}}\ ;\ y = x'\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + y'\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}$$

Estas ecuaciones se sustituyen en la ecuación de la cónica.

$$3\left(\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}}\right)^2 + 3\left(\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}\right) - \left(\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}\right)^2 = 9$$

Se desarrollan las operaciones y se simplifica para obtener finalmente la ecuación.

$$7x'^2 - 3y'^2 = 18$$

2 Mediante una rotación de ejes elimina el término xy, e identifica la naturaleza de la curva de ecuación:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$$

Solución

Al comparar con la ecuación general se determina que $A = 3$, $B = -2$ y $C = 3$, como $A = C$, entonces el ángulo de rotación es de 45°; por tanto, las ecuaciones son:

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

Se sustituyen en la ecuación $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$,

$$3\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8$$

Ahora, al desarrollar y simplificar, se encuentra la ecuación de la curva sin término en xy.

$$3\left(\frac{x'^2}{2} - 2\left(\frac{x'y'}{2}\right) + \frac{y'^2}{2}\right) - 2\left(\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}\right) + 3\left(\frac{x'^2}{2} + 2\left(\frac{x'y'}{2}\right) + \frac{y'^2}{2}\right) = 8$$

$$3\left(\frac{x'^2}{2} - x'y' + \frac{y'^2}{2}\right) - 2\left(\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}\right) + 3\left(\frac{x'^2}{2} + x'y' + \frac{y'^2}{2}\right) = 8$$

$$\frac{3x'^2}{2} - 3x'y' + \frac{3y'^2}{2} - x'^2 + y'^2 + \frac{3x'^2}{2} + 3x'y' + \frac{3y'^2}{2} = 8$$

$$\frac{6x'^2}{2} + \frac{6y'^2}{2} - x'^2 + y'^2 = 8$$

$$2x'^2 + 4y'^2 = 8$$

Finalmente, la ecuación es: $x'^2 + 2y'^2 = 4$, la cual representa una elipse.

EJERCICIO 46

Transforma las siguientes ecuaciones a otra que no contenga el término xy.

1. $2xy = 1$
2. $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}\,x - 8\sqrt{2}\,y = 0$
3. $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 8\sqrt{3}\,x + 16x - 8y - 16\sqrt{3}y + 16 = 0$
4. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 6x - 2\sqrt{3}y = 0$
5. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 4 = 0$
6. $13x^2 - 10xy + 13y^2 + 16x + 16y - 56 = 0$
7. $x^2 + xy + y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$
8. $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 20x + 10y = 0$
9. $x^2 - 2xy + y^2 - 20x + 10y = 0$
10. $x^2 + 4xy + y^2 - 24x - 24y + 104 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación de la ecuación de una cónica por rotación y traslación de los ejes

Para analizar geométricamente una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

sin muchos problemas, ésta se reduce con una rotación y traslación de ejes.

Al realizar la rotación de ejes, ésta orienta los ejes coordenados en la dirección de las cónicas elipse e hipérbola, y la traslación de ejes lleva al nuevo origen al centro de las mismas. En el caso de la parábola, al rotar los ejes, uno de ellos es paralelo al eje focal y la traslación lleva al nuevo origen al vértice.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Mediante una rotación y traslación de ejes, reduce y grafica la ecuación:

$$52x^2 + 72xy + 73y^2 + 160x + 130y + 25 = 0$$

Solución

Se realiza la rotación de ejes.

Se aplican las fórmulas para encontrar el valor de *sen* α y *cos* α, entonces,

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{72}{52-73} = \frac{72}{-21} = \frac{24}{-7} = -\frac{24}{7}$$

Luego $2\alpha \in$ II cuadrante

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{\tan^2 2\alpha + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{24}{7}\right)^2 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{576}{49} + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{625}{49}}} = -\frac{1}{\frac{25}{7}} = -\frac{7}{25}$$

Por tanto,

$$\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$$

Luego, con el valor de *cos* 2α se determinan los valores de *sen* α y *cos* α:

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{7}{25}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{32}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{32}{50}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{7}{25}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{18}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Por consiguiente, las ecuaciones de transformación para rotar son:

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' = \frac{3x' - 4y'}{5}$$

$$y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' = \frac{4x' + 3y'}{5}$$

Luego, al sustituir en la ecuación:

$$52x^2 + 72xy + 73y^2 + 160x + 130y + 25 = 0$$

Se determina que:

$$52\left(\frac{3x'-4y'}{5}\right)^2+72\left(\frac{3x'-4y'}{5}\right)\left(\frac{4x'+3y'}{5}\right)+73\left(\frac{4x'+3y'}{5}\right)^2+160\left(\frac{3x'-4y'}{5}\right)+130\left(\frac{4x'+3y'}{5}\right)+25=0$$

La cual, al simplificarla resulta:

$$4x'^2+y'^2+8x'-2y'+1=0$$

Luego se realiza la traslación de ejes.

Se sustituyen,

$$x'=x''+h,\ y'=y''+k$$

En la ecuación $4x'^2+y'^2+8x'-2y'+1=0$

$$4(x''+h)^2+(y''+k)^2+8(x''+h)-2(y''+k)+1=0$$

Se desarrollan las operaciones

$$4(x''^2+2\,x''h+h^2)+(y''^2+2\,y''k+k^2)+8(x''+h)-2(y''+k)+1=0$$

$$4x''^2+8\,x''h+4h^2+y''^2+2\,y''k+k^2+8x''+8h-2y''-2k+1=0$$

$$4x''^2+y''^2+8\,x''h+8x''+2\,y''k-2y''+4h^2+k^2+8h-2k+1=0$$

$$4x''^2+y''^2+(8\,h+8)\,x''+(2\,k-2)\,y''+(4h^2+k^2+8h-2k+1)=0$$

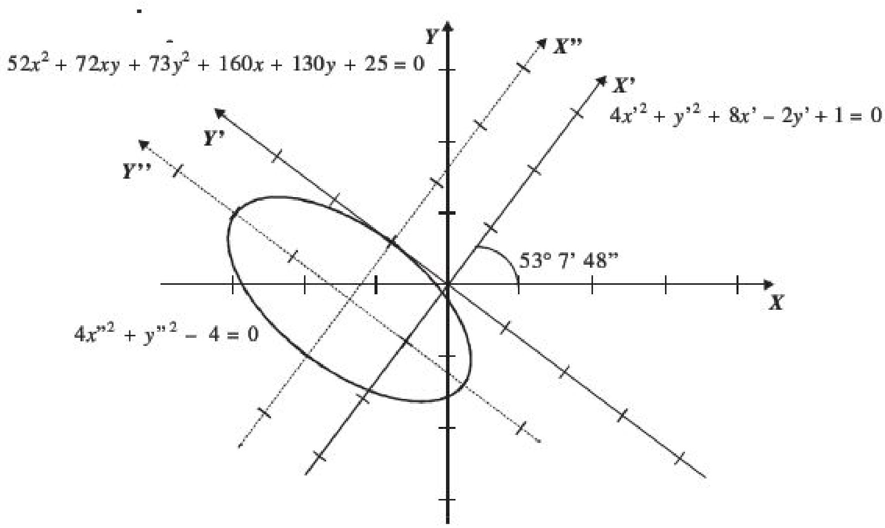
$$8h+8=0\rightarrow h=-1$$

$$2k-2=0\rightarrow k=1$$

Por tanto, el nuevo origen es el punto $O''\,(-1,1)$

Al sustituir los valores de h y k, la ecuación se reduce a:

$$4x''^2+y''^2-4=0$$



EJERCICIO 47

Mediante una transformación de coordenadas, simplifica las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x = 0$
2. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16\sqrt{2}x - 32\sqrt{2}y + 96 = 0$
3. $13x^2 - 10xy + 13y^2 + 44\sqrt{2}x - 28\sqrt{2}y + 8 = 0$
4. $5x^2 - 26xy + 5y^2 - 70\sqrt{2}y + 38\sqrt{2}x + 202 = 0$
5. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 8\left(1+2\sqrt{3}\right)x + 8\left(2-\sqrt{3}\right)y - 112 = 0$
6. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 12\left(1+\sqrt{3}\right)x - 12\left(1-\sqrt{3}\right)y + 12 = 0$
7. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 8\sqrt{3}x + 8y + 50 = 0$
8. $x^2 + 2xy + y^2 + 10\sqrt{2}x - 14\sqrt{2}y + 2 = 0$
9. $7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 + 4\left(8+\sqrt{3}\right)x + 4\left(8\sqrt{3}-1\right)y + 52 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Identificación de una cónica

Una forma de conocer la naturaleza de la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

es realizar una rotación y traslación de ejes, pero esta transformación es muy laboriosa.

Otra forma de identificar su naturaleza, sin tener que realizar la transformación es sustituir los coeficientes de la ecuación general en la expresión:

$$I = B^2 - 4AC$$

Que recibe el nombre de *invariante o indicador*.

Caso I: si se elige un ángulo α de modo que $B = 0$, entonces:

- Si A o $C = 0$ la ecuación representa una parábola.
- Si $A \neq C$ y de signos iguales la ecuación representa una elipse.
- Si A y C tienen signos contrarios la ecuación representa una hipérbola.

Caso II: si $B \neq 0$ la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, representa una cónica no degenerada si:

- $B^2 - 4AC = 0$ la ecuación representa una parábola.
- $B^2 - 4AC < 0$ la ecuación representa una elipse.
- $B^2 - 4AC > 0$ la ecuación representa una hipérbola.

Una curva degenerada es aquella que representa:

- Dos rectas concurrentes.
- Un punto.
- Dos rectas paralelas.
- Una sola recta.

EJEMPLOS

1 Determina la naturaleza de la cónica $x^2 - 4xy + 3y^2 + x - y + 4 = 0$.

Solución

De la ecuación se obtiene:

$$A = 1,\ B = -4 \text{ y } C = 3$$

Al sustituir en el indicador:

$$I = B^2 - 4AC$$

$$I = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$

De acuerdo con el indicador $I > 0$, por tanto, la curva representa una hipérbola.

2 ¿Qué cónica representa la curva $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + y - 20 = 0$?

Solución

De la ecuación se obtiene:

$$A = 1,\ B = 2 \text{ y } C = 1$$

Al sustituir en el indicador

$$I = (2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

De acuerdo con el indicador $I = 0$, la ecuación representa una parábola.

3 ¿Cuál es la naturaleza de la cónica $2x^2 - 7xy + 8y^2 - 5x - 10 = 0$?

Solución

De la ecuación se determina que:

$$A = 2,\ B = -7 \text{ y } C = 8$$

Al sustituir en el indicador,

$$I = (-7)^2 - 4(2)(8) = 49 - 64 = -15$$

De acuerdo con el indicador $I < 0$, la ecuación corresponde a una elipse.

EJERCICIO 48

Determina la naturaleza de las siguientes cónicas no degeneradas.

1. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$
2. $13x^2 + 2\sqrt{3}xy + 15y^2 - 48 = 0$
3. $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 - 8 = 0$
4. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y = 0$
5. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x - 6 = 0$
6. $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}\,y = 0$
7. $13x^2 - 10xy + 13y^2 + 16x + 16y - 56 = 0$
8. $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 20x + 10y = 0$
9. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 40x + 20y = 0$
10. $x^2 + 4xy + y^2 - 24x - 24y + 104 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Identificación de cónicas degeneradas

Son aquellas que de acuerdo con el indicador representan una parábola, elipse o hipérbola; sin embargo, al realizar un despeje se obtienen las características para determinar la naturaleza de la ecuación. Las curvas degeneradas representan un punto, dos rectas concurrentes, dos rectas paralelas o sólo una recta.

EJEMPLOS

1 Determina la naturaleza de la cónica $9x^2 - 6xy + y^2 - 12x + 4y + 4 = 0$.

Solución

De la ecuación se obtiene:

$$A = 9,\ B = -6 \text{ y } C = 1$$

Al sustituir en el indicador,

$$I = (-6)^2 - 4(9)(1) = 36 - 36 = 0$$

Por tanto, la ecuación representa una parábola.

Sin embargo, al factorizar la ecuación,

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 12x + 4y + 4 = 0 \rightarrow (3x - y)^2 - 4(3x - y) + 4 = 0$$

$$(3x - y - 2)^2 = 0$$

$$3x - y - 2 = 0$$

Lo que significa que la ecuación representa una línea recta, en este caso se le denomina curva degenerada.

2 Encuentra la naturaleza de la cónica $36x^2 - 24xy + 5y^2 - 12x + 5 = 0$.

Solución

Se utiliza el indicador, $I = B^2 - 4AC$, si $A = 36$, $B = -24$ y $C = 5$

$$I = (-24)^2 - 4(36)(5) = 576 - 720 = -144$$

De acuerdo con el resultado $I < 0$ y la curva representa una elipse; sin embargo, al resolver la ecuación de segundo grado con incógnita x se tiene:

$$36x^2 + (-24y - 12)x + (5y^2 + 5) = 0$$

Donde,

$$x = \frac{-(-24y - 12) \pm \sqrt{(-24y - 12)^2 - 4(36)(5y^2 + 5)}}{2(36)} = \frac{(2y + 1) \pm (y - 2)\sqrt{-1}}{6}$$

Se observa que x es imaginario para cualquier valor de y diferente de 2, luego si $y = 2$, entonces la ecuación representa al punto $P\left(\frac{5}{6}, 2\right)$.

3 ¿Cuál es la naturaleza de la cónica $3x^2 - 7xy - 6y^2 - 2x + 17y - 5 = 0$?

Solución

Para la ecuación $A = 3$, $B = -7$ y $C = -6$, se sustituyen los valores en el indicador y se obtiene:

$$I = (-7)^2 - 4(3)(-6) = 49 + 72 = 121$$

Por lo que se deduce que $I > 0$; esto indica que la curva representa una hipérbola.

No obstante, al despejar x de la ecuación $3x^2 - 7xy - 6y^2 - 2x + 17y - 5 = 0$

$$x = \frac{-(-7y-2) \pm \sqrt{(-7y-2)^2 - 4(3)(-6y^2 + 1\ \ y - 75)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{7y + 2 \pm \sqrt{121y^2 - 176y + 64}}{6}$$

$$x = \frac{7y + 2 \pm \sqrt{(11y-8)^2}}{6}$$

$$x = \frac{7y + 2 \pm (11y - 8)}{6}$$

Por consiguiente,

$$x = 3y - 1 \text{ y } x = \frac{-2y+5}{3}$$

El resultado anterior indica que la ecuación $3x^2 - 7xy - 6y^2 - 2x + 17y - 5 = 0$, representa a las rectas concurrentes:

$$x - 3y + 1 = 0;\ 3x + 2y - 5 = 0$$

EJERCICIO **49**

Determina la naturaleza de las siguientes cónicas degeneradas.

1. $x^2 + xy - 2y^2 + 3x + 6y = 0$
2. $9x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$
3. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$
4. $4x^2 + 3xy - y^2 + 19x + 4y + 21 = 0$
5. $3x^2 + xy - 2y^2 = 0$
6. $x^2 + 10xy + 25y^2 - 4x - 20y + 4 = 0$
7. $4x^2 - 8xy + 5y^2 + 2y + 1 = 0$
8. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 12x - 16y + 4 = 0$
9. $x^2 + xy - 6y^2 + 10y - 4 = 0$
10. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 20x - 30y + 25 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

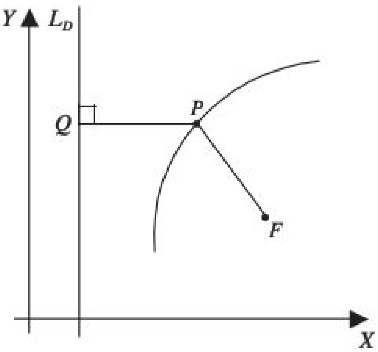
Definición general de cónicas

Lugar geométrico que describen un punto del plano de tal forma que la razón de su distancia a un punto fijo y a una recta fija, siempre es constante.

El punto fijo se llama foco, la recta fija directriz y la distancia constante excentricidad (e).

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}} = e$$

Gráfica



Elementos
F: Foco
P: $P(x, y)$
L_D: Directriz
Q: punto sobre la directriz

Condiciones:

- Si $e = 1$ el lugar geométrico representa una parábola.
- Si $e < 1$ el lugar geométrico representa una elipse.
- Si $e > 1$ el lugar geométrico representa una hipérbola.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la cónica cuyo foco es el punto $F(-1, 3)$, ecuación de la directriz $x + 3 = 0$ y excentricidad 1?

Solución

Como la excentricidad es igual a 1, la ecuación a encontrar es de una parábola.

Se aplica la definición de cónicas:

$$\frac{\textit{Distancia del punto al foco}}{\textit{Distancia del punto a la directriz}} = e$$

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}}{x+3}=1 \rightarrow \frac{\sqrt{x^2+2x+1+y^2-6y+9}}{x+3}=1$$

$$x^2+2x+1+y^2-6y+9=(x+3)^2 \rightarrow x^2+2x+1+y^2-6y+9=x^2+6x+9$$

Al simplificar se obtiene la ecuación:

$$y^2-4x-6y+1=0$$

2 Determina la ecuación de la cónica cuyo foco es el punto $F(3, -2)$, ecuación de la directriz $2x - y + 4 = 0$ y excentricidad $\frac{3}{2}$.

Solución

Como la excentricidad es mayor que 1, la ecuación a encontrar es de una hipérbola.

Se aplica la definición de las cónicas:

$$\frac{\textit{Distancia del punto al foco}}{\textit{Distancia del punto a la directriz}} = e$$

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}}{\frac{2x-y+4}{-\sqrt{5}}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{-\sqrt{5}\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}}{2x-y+4} = \frac{3}{2}$$

Se realiza un producto cruzado,

$$-2\sqrt{5}\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} = 3(2x-y+4)$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros,

$$\left[-2\sqrt{5}\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}\right]^2 = \left[3(2x-y+4)\right]^2$$

$$20\left[(x-3)^2+(y+2)^2\right] = 9(2x-y+4)^2$$

$$20\left(x^2-6x+9+y^2+4y+4\right) = 9\left(4x^2+y^2+16-4xy+16x-8y\right)$$

$$20x^2 - 120x + 180 + 20y^2 + 80y + 80 = 36x^2 + 9y^2 + 144 - 36xy + 144x - 72y$$

Finalmente, al simplificar los términos semejantes e igualar con cero, se obtiene la ecuación:

$$16x^2 - 36xy - 11y^2 + 264x - 152y - 116 = 0$$

3 Determina la ecuación de la cónica cuya directriz es la recta $x + 3y - 5 = 0$, foco en el punto $F(-1, 3)$ y excentricidad $\frac{2}{5}$.

Solución

De acuerdo con el valor de la excentricidad la ecuación de la cónica representa una elipse.

Se aplica la definición de cónicas:

$$\frac{\textit{Distancia del punto al foco}}{\textit{Distancia del punto a la directriz}} = e$$

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}}{\frac{x+3y-5}{\sqrt{10}}} = \frac{2}{5} \quad \rightarrow \quad 5\sqrt{10}\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} = 2(x+3y-5)$$

Ahora, al elevar ambos miembros al cuadrado y simplificar se obtiene la ecuación:

$$\left[5\sqrt{10}\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right]^2 = \left[2(x+3y-5)\right]^2$$

$$250(x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9) = 4(x^2 + 9y^2 + 25 + 6xy - 10x - 30y)$$

$$250x^2 + 250y^2 + 500x - 1\,500y + 2\,500 = 4x^2 + 36y^2 + 24xy - 40x - 120y + 100$$

$$246x^2 - 24xy + 214y^2 + 540x - 1\,380y + 2\,400 = 0$$

Por consiguiente la ecuación es:

$$123x^2 - 12xy + 107y^2 + 270x - 690y + 1\,200 = 0$$

EJERCICIO 50

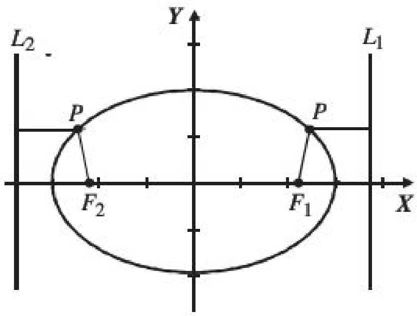
Determina la ecuación de la cónica que satisface las siguientes condiciones:

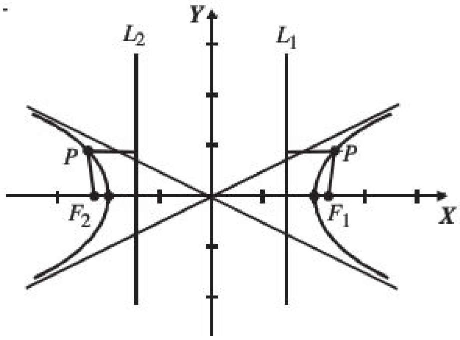
1. $F(0, 3)$, directriz $x = 6$, excentricidad $= \frac{2}{3}$
2. $F(1, 1)$, directriz $y = -2$, excentricidad $= \frac{1}{2}$
3. $F(-2, 3)$, directriz $x = 5$, excentricidad $= 1$
4. $F(0, 0)$, directriz $y = 4$, excentricidad $= \frac{5}{4}$
5. $F(2, -1)$, directriz $x + y = 0$, excentricidad $= \frac{4}{3}$
6. $F(-3, 2)$, directriz $2x + y = 3$, excentricidad $= \sqrt{5}$
7. $F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, directriz $3x - 2y = 6$, excentricidad $= 1$
8. $F(-a, a)$, directriz $x - y + a = 0$, excentricidad $= \sqrt{2}$
9. $F(4, 5)$, directriz $3x - 4y + 12 = 0$, excentricidad $= \frac{5}{3}$
10. $F(a\sqrt{3}, 0)$, directriz $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, excentricidad $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones de las directrices de la elipse y de la hipérbola

En la elipse y en la hipérbola existen dos directrices, una para cada foco.





Casos:

I. Si la elipse o la hipérbola es horizontal con centro en el origen, las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_1\colon x = \frac{a^2}{c}\ ;\ L_2\colon\ x = -\frac{a^2}{c}$$

II. Si la elipse o la hipérbola es vertical con centro en el origen, las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_1\colon y = \frac{a^2}{c}\ ;\ L_2\colon\ y = -\frac{a^2}{c}$$

III. Si la elipse o la hipérbola es horizontal con centro en (h, k), las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_1\colon x = h + \frac{a^2}{c}\ ;\ L_2\colon\ x = h - \frac{a^2}{c}$$

IV. Si la elipse o la hipérbola es vertical con centro en (h, k), las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_1\text{: } y = k + \frac{a^2}{c}\text{ ; } L_2\text{: } y = k - \frac{a^2}{c}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina las ecuaciones de las directrices de la elipse cuya ecuación es:

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

Solución

Se transforma a la forma canónica $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Se precisa que la elipse es horizontal con centro en el origen, donde,

$$a^2 = 25,\ b^2 = 9$$

Luego,

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow c = 4$$

Por consiguiente, las ecuaciones de las directrices son:

$$x = \frac{a^2}{c} = \frac{25}{4}\text{ ; } x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{25}{4}$$

2 Determina las ecuaciones de las directrices de la ecuación:

$$7x^2 - 9y^2 - 42x + 36y - 36 = 0$$

Solución

Se transforma a la forma ordinaria: $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$

La hipérbola es horizontal con centro en $(3, 2)$, $a^2 = 9$ y $b^2 = 7$

El valor de c es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4$

En consecuencia, las ecuaciones de las directrices son:

$$x = h + \frac{a^2}{c} = 3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}\text{ ; } x = h - \frac{a^2}{c} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

EJERCICIO 51

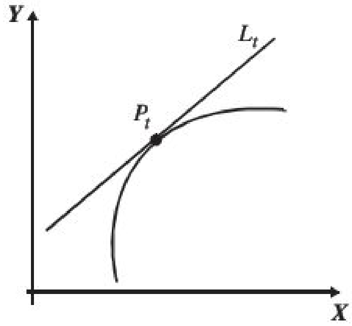
Determina las ecuaciones de las directrices de las siguientes curvas, cuyas ecuaciones son:

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
3. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$
4. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$
5. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
6. $25x^2 - 9y^2 + 225 = 0$
7. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$
8. $\frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y+4)^2}{16} = 1$
9. $x^2 - y^2 + 6y - 10 = 0$
10. $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Tangente a una cónica

Es aquella recta que sólo toca un punto de la curva.



L_t: recta tangente
P_t: punto de tangencia

Las cónicas que se analizarán serán de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Casos de tangencia:

I. Dado el punto de tangencia.

II. Dada la pendiente de la recta tangente.

III. Dado un punto exterior a la cónica.

Dado el punto de tangencia

Ejemplo

¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en el punto de tangencia $P_1(x_1, y_1)$?

Solución

Sea $y - y_1 = m(x - x_1)$ la ecuación de la recta tangente, como el punto P_1 pertenece a la curva y a la recta, se resuelve el sistema.

$$\begin{cases} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = mx - mx_1 + y_1 \end{cases}$$

Se sustituye la ecuación de la recta en la ecuación de la curva,

$$Ax^2 + C(mx - mx_1 + y_1)^2 + Dx + E(mx - mx_1 + y_1) + F = 0$$

Al desarrollar y acomodar en términos de x, se obtiene:

$$(A + Cm^2)x^2 + (D + Em + 2Cmy_1 - 2Cm^2x_1)x + (Cm^2x_1^{\,2} + Cy_1^{\,2} - 2Cmx_1y_1 + Ey_1 - Emx_1 + F) = 0$$

Para que exista solución se debe cumplir que $b^2 - 4ac \geq 0$.

con $a = A + Cm^2$

$b = D + Em + 2Cmy_1 - 2Cm^2x_1$

$c = Cm^2x_1^{\,2} + Cy_1^{\,2} - 2Cmx_1y_1 + Ey_1 - Emx_1 + F$

La expresión $b^2 - 4ac = 0$ es la condición de tangencia. Al sustituir los valores respectivos, resulta una ecuación con incógnita m, y la ecuación de segundo grado que se obtiene es un trinomio cuadrado perfecto. Es decir, existe una y sólo una recta de pendiente m que es tangente a la curva en el punto $P_1(x_1, y_1)$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 4x + y + 4 = 0$, en el punto de tangencia $(3, -1)$?

Solución

El punto pertenece a la recta tangente, entonces la ecuación de la recta es de la forma:

$$y + 1 = m(x - 3),\text{ donde: } y = mx - 3m - 1$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x^2 - 4x + y + 4 = 0 \\ y = mx - 3m - 1 \end{cases}$

Se sustituye $y = mx - 3m - 1$ en la ecuación de la curva,

$$x^2 - 4x + (mx - 3m - 1) + 4 = 0$$
$$x^2 + x(m - 4) + (3 - 3m) = 0$$

En la ecuación $a = 1$, $b = m - 4$ y $c = 3 - 3m$, estos valores se sustituyen en la condición de tangencia.

$$(m - 4)^2 - 4(1)(3 - 3m) = 0$$

De la cual, al desarrollar y simplificar, se obtiene la ecuación:

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$
$$(m + 2)^2 = 0$$
$$m = -2$$

Se deduce entonces que la ecuación de la recta es:

$$y = mx - 3m - 1 \rightarrow y = -2x - 3(-2) - 1$$
$$y = -2x + 5$$
$$2x + y - 5 = 0$$

2 Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 16 = 0$ en el punto de tangencia $(2, 2)$.

Solución

Como $(2, 2)$ es el punto de tangencia, entonces la ecuación de la recta es de la forma:

$$y - 2 = m(x - 2),\text{ donde } y = mx - 2m + 2$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y - 16 = 0 \\ y = mx - 2m + 2 \end{cases}$$

Se sustituye $y = mx - 2m + 2$ en la ecuación de la circunferencia.

$$x^2 + (mx - 2m + 2)^2 - 2x + 6(mx - 2m + 2) - 16 = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 + (-4m^2 + 10m - 2)x + (4m^2 - 20m) = 0$$

Los coeficientes de la ecuación son: $a = 1 + m^2$, $b = -4m^2 + 10m - 2$ y $c = 4m^2 - 20m$, éstos se sustituyen en la condición de tangencia y se obtiene:

$$(-4m^2 + 10m - 2)^2 - 4(1 + m^2)(4m^2 - 20m) = 0$$

De la cual, al desarrollar y simplificar, se obtiene la ecuación:

$$25m^2 + 10m + 1 = 0$$
$$(5m + 1)^2 = 0$$
$$m = -\frac{1}{5}$$

Al final la ecuación de la recta tangente es:

$$y = mx - 2m + 2 \rightarrow y = -\frac{1}{5}x - 2\left(-\frac{1}{5}\right) + 2$$
$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} + 2$$
$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{12}{5}$$
$$5y = -x + 12$$
$$x + 5y - 12 = 0$$

EJERCICIO 52

Determina la ecuación de la recta tangente a la cónica dada en el punto indicado.

1. $x^2 + y^2 = 25$, en el punto $(3, 4)$
2. $3x^2 + 4y^2 = 31$, en el punto $(3, 1)$
3. $x^2 - 4y^2 = 21$, en el punto $(5, 1)$
4. $y^2 + 6x - 3y + 32 = 0$, en el punto $(-6, -1)$
5. $x^2 + 4x - 5y - 22 = 0$, en el punto $(4, 2)$
6. $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 18 = 0$, en el punto $(3, 5)$
7. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 26 = 0$, en el punto $(-1, 3)$
8. $4x^2 + 9y^2 + 8x - 6y - 20 = 0$, en el punto $(-1, 2)$
9. $3x^2 + 3y^2 - 9x + 3y - 30 = 0$, en el punto $(4, -3)$
10. $16x^2 - 25y^2 - 64x - 200y - 255 = 0$, en el punto $(-1, -1)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dada la pendiente de la recta tangente

Encuentra la ecuación de la recta tangente de pendiente m a la cónica.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Solución

Sea $y = mx + b$ la ecuación de la recta tangente, entonces se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ &y = mx + k \end{aligned}$$

Se sustituye $y = mx + b$ en la ecuación de la cónica.

$$Ax^2 + C(mx + k)^2 + Dx + E(mx + k) + F = 0$$

$$(A + Cm^2)x^2 + (2Ckm + D + Em)x + (k^2C + Ek + F) = 0$$

Para que exista solución, $I = b^2 - 4ac \geq 0$, entonces la condición de tangencia es: $b^2 - 4ac = 0$, donde: $a = A + Cm^2$ $b = 2Ckm + D + Em$ $c = k^2C + Ek + F$ y al sustituir los coeficientes de la ecuación en la condición:

$$(2Ckm + D + Em)^2 - 4(A + Cm^2)(k^2C + Ek + F) = 0$$

Resulta una ecuación, cuya incógnita es k, obteniendo dos resultados, éstos se sustituyen en la ecuación $y = mx + k$, por consiguiente, resultan dos ecuaciones tangentes con la misma pendiente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la recta tangente a la cónica $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0$ con pendiente $\frac{5}{2}$.

Solución

Si la pendiente de la recta es $\frac{5}{2}$, entonces su ecuación es: $y = \frac{5}{2}x + k$

Se forma el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0 \\ y = \frac{5}{2}x + k \end{cases}$$

Se sustituye la segunda ecuación en la primera,

$$x^2 + \left(\frac{5}{2}x + k\right)^2 + 4x - 2\left(\frac{5}{2}x + k\right) - 24 = 0$$

Se desarrolla y simplifica la ecuación,

$$29x^2 + (20k - 4)x + (4k^2 - 8k - 96) = 0$$

Finalmente, los valores de los coeficientes son: $a = 29$, $b = 20k - 4$ y $c = 4k^2 - 8k - 96$.

Estos valores se sustituyen en la condición de tangencia.

$$(20k - 4)^2 - 4(29)(4k^2 - 8k - 96) = 0$$
$$4k^2 - 48k - 697 = 0$$
$$(2k + 17)(2k - 41) = 0$$
$$k = -\frac{17}{2}, \quad k = \frac{41}{2}$$

Por consiguiente, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

Si $k = -\frac{17}{2}$, entonces

$$y = \frac{5}{2}x + k \rightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{17}{2}$$
$$5x - 2y - 17 = 0$$

Si $k = \frac{41}{2}$, entonces

$$y = \frac{5}{2}x + k \rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{41}{2}$$
$$5x - 2y + 41 = 0$$

2 ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la cónica $x^2 - y^2 = 5$ y tiene pendiente $-\frac{3}{2}$?

Solución

Sea la ecuación de la recta $y = \frac{3}{2}x + k$, entonces al sustituir en la ecuación de la curva,

$$x^2 - \left(-\frac{3}{2}x + k\right)^2 = 5$$

Al desarrollar y simplificar se determina que:

$$-5x^2 + 12kx - 4k^2 - 20 = 0$$

Por consiguiente, al igualar el discriminante a cero, se determina el valor de b,

$$(12k)^2 - 4(-5)(-4k^2 - 20) = 0$$
$$4k^2 - 25 = 0$$
$$k = \frac{5}{2} \text{ o } k = -\frac{5}{2}$$

Finalmente, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$$3x + 2y - 5 = 0; \; 3x + 2y + 5 = 0$$

EJERCICIO 53

Determina la ecuación de la recta tangente que cumpla con las siguientes condiciones:

1. $x^2 + y^2 = 13$, de pendiente $\frac{3}{2}$
2. $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$ y es paralela a la recta $2x - 3y - 4 = 0$
3. $y^2 - x + 2y - 10 = 0$ y es paralela a la recta $2x - 12y + 5 = 0$
4. $x^2 - 2x + 8y + 13 = 0$, de pendiente $-\frac{1}{2}$
5. $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$ y es perpendicular a la recta $4x - y - 5 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dado un punto exterior a la curva

Para determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y es tangente a la cónica $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, se sigue el siguiente proceso:

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Se despeja y:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Con esta ecuación y la ecuación de la cónica se forma el sistema:

$$\begin{cases} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = mx - mx_1 + y_1 \end{cases}$$

El cual tiene la forma del caso I.

EJEMPLOS

1 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, -1)$ y es tangente a la cónica $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$.

Solución

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(-1, -1)$ tiene la forma:

$$y = mx + m - 1$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 4y + 16 = 0 \\ y = mx + m - 1 \end{cases}$$

Se sustituye $y = mx + m - 1$ en la ecuación de la cónica,

$$x^2 - 4x - 4(mx + m - 1) + 16 = 0$$
$$x^2 + x(-4m - 4) - 4m + 20 = 0$$

Por la condición de tangencia, se tiene la ecuación de segundo grado,

$$(-4m - 4)^2 - 4(1)(-4m + 20) = 0$$
$$16m^2 + 48m - 64 = 0$$
$$m^2 + 3m - 4 = 0$$
$$(m + 4)(m - 1) = 0$$
$$m = -4,\ m = 1$$

Por consiguiente, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

Si $m = -4$	Si $m = 1$
$y = -4x - 4 - 1$	$y = x + 1 - 1$
$y = -4x - 5$	$y = x$
$4x + y + 5 = 0$	$x - y = 0$

2 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la cónica $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0$, y que pasa por el punto exterior $(2, -3)$.

Solución

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(2, -3)$ tiene la forma:

$$y = mx - 2m - 3$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0 \\ y = mx - 2m - 3 \end{cases}$$

Se sustituye $y = mx - 2m - 3$ en la ecuación de la cónica,

$$x^2 + (mx - 2m - 3)^2 + 8x - 2(mx - 2m - 3) - 9 = 0$$
$$(1 + m^2)\,x^2 + x\,(-4m^2 - 8m + 8) + (4m^2 + 16m + 6) = 0$$

Al sustituir los coeficientes en la condición de tangencia, se obtiene:

$$(-4m^2 - 8m + 8)^2 - 4(1 + m^2)(4m^2 + 16m + 6) = 0$$
$$5m^2 + 24m - 5 = 0$$
$$(m + 5)(5m - 1) = 0$$
$$m = -5,\ m = \frac{1}{5}$$

Finalmente, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

Si $m = -5$

$$y = -5x - 2(-5) - 3$$
$$y = -5x + 7$$
$$5x + y - 7 = 0$$

Si $m = \frac{1}{5}$

$$y = \frac{1}{5}x - 2\left(\frac{1}{5}\right) - 3$$
$$5y = x - 17$$
$$x - 5y - 17 = 0$$

EJERCICIO 54

Determina la ecuación de la recta tangente a la curva:

1. $y^2 = 8x$, pasa por el punto exterior $(-4, -2)$
2. $x^2 = 8y$, pasa por el punto $(-4, 0)$
3. $x^2 + 3y^2 = 6$, pasa por el punto $(0, 2)$
4. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 26 = 0$ y pasa por el punto exterior $(4, 6)$
5. $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y - 9 = 0$, pasa por el punto $(1, 3)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 29

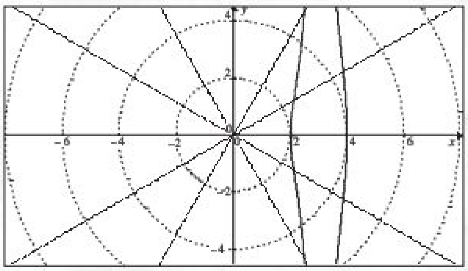
COORDENADAS POLARES

Reseña HISTÓRICA

Nicomedes
(280 *a. C.* – 210 *a. C.*)

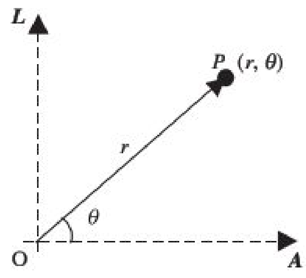
Se sabe muy poco de la vida de Nicomedes, incluso para establecer el periodo en el que vivió hay que hacerlo con referencias indirectas. Se sabe que Nicomedes criticó la duplicación del cubo de Eratóstenes (276 a. C.–194 a. C.) y que Apolonio (262 a. C.–190 a. C.) también habló de Nicomedes.

Es famoso por su tratado *Las líneas de la concoide*, y quiso utilizar la concoide para solucionar los problemas clásicos de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.



Sistema polar

El sistema polar es similar al cartesiano, su objetivo es la representación gráfica de elementos geométricos utilizando pares coordenados de magnitud y dirección, mediante un segmento y un ángulo, tal segmento recibe el nombre de radio vector y el ángulo argumento.



La recta $\overline{OA}$ y el punto P forman un marco de referencia, como los ejes coordenados en el sistema cartesiano.

$\overline{OP} = r$; radio vector

θ; Argumento

O; polo

$\overline{OA}$; Eje polar

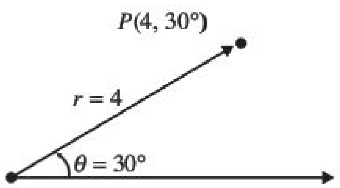
L; Eje $\frac{\pi}{2}$

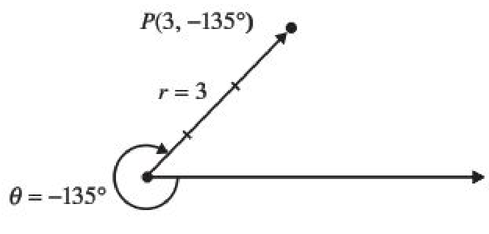
Gráfica de un punto en coordenadas polares

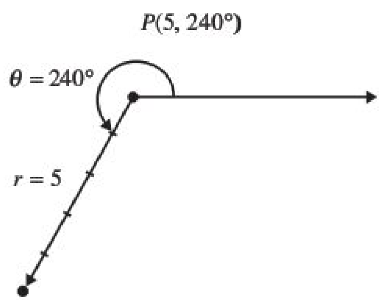
Un punto $P(r, \theta)$ en coordenadas polares se grafica a r unidades del polo sobre un rayo que se llama lado terminal conocido también como radio vector que forma el argumento θ.

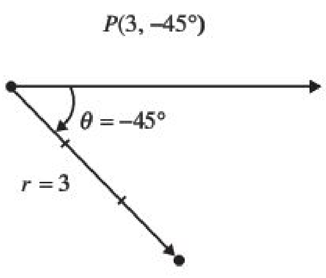
El argumento de un punto cuyas coordenadas son polares, se considera positivo si es en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo si es en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

Ejemplos



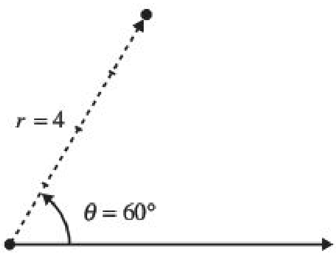




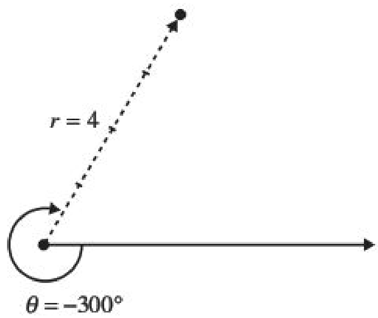


La representación gráfica de un par de coordenadas polares, no son únicas, es decir, hay otros valores coordenados que definen este mismo punto. Como verás a continuación:

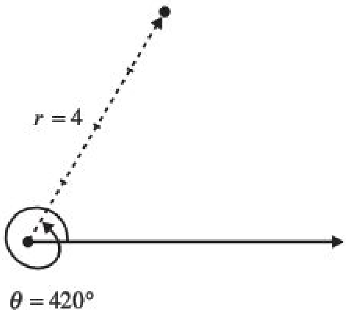
$P(4, 60°)$



$P(4, -300°)$



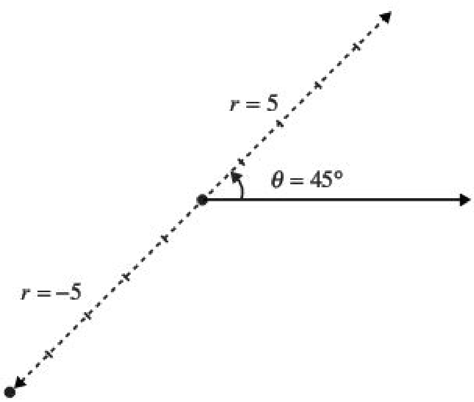
$P(4, 420°)$



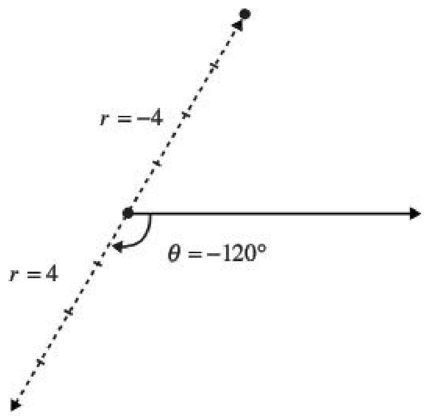
Hay puntos cuya coordenada r se extienden en sentido opuesto al lado terminal del ángulo, que se denota como $-r$, entonces las coordenadas del punto tendrán la forma $P(-r, \theta)$, cabe mencionar que esto no significa que r sea negativa, sólo se designa de este modo a la distancia del lado terminal en esta dirección.

Ejemplos:

$P(-5, 45°)$



$P(-4, -120°)$



Conversión de un punto en coordenadas polares

I. Sea el punto (r, θ), entonces su equivalente es $(-r, \theta + \pi)$

II. Sea el punto $(-r, \theta)$, entonces su equivalente es $(r, \theta - \pi)$

EJEMPLOS

1. Determina un punto equivalente a $(-2, 45°)$, cuyo radio vector sea positivo.

Solución

Se aplican las equivalencias,

$$(-2, 45°) = (2, 45° - 180°) = (2, -135°) = (2, 225°)$$

2. Encuentra un punto equivalente a $(3, 215°)$, cuyo radio vector sea negativo.

Solución

Se aplican las equivalencias,

$$(3, 215°) = (-3, 215° + 180°) = (-3, 395°) = (-3, 35°)$$

3. Calcula un punto equivalente a $(-5, -60°)$, cuyo radio vector sea positivo.

Solución

Se aplican las equivalencias,

$$(-5, -60°) = (5, -60° - 180°) = (5, -240°) = (5, 120°)$$

Relación entre las coordenadas rectangulares y polares

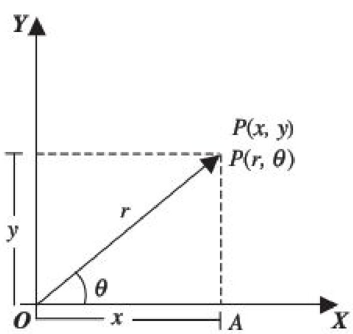
Las coordenadas polares representan a los puntos del plano en función de su distancia al origen y su ángulo de inclinación medido respecto a la horizontal.

$$P(r, \theta)$$

Donde r: distancia del punto al origen.

θ: Ángulo de inclinación.

Las coordenadas rectangulares (x, y) y las polares (r, θ) de un punto P se relacionan como sigue:



Por el teorema de Pitágoras

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

En el triángulo rectángulo OAP

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Transformación de un punto en coordenadas polares a rectangulares

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina las coordenadas rectangulares del punto $P(6, 150°)$.

Solución

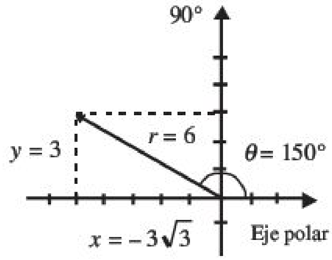
Las coordenadas polares del punto P son: $r = 6$ y $\theta = 150°$

Se sustituyen los valores de r y θ:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,sen\,\theta$$
$$x = 6\cos 150° \qquad y = 6\,sen\,150°$$
$$x = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad y = 6\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$x = -3\sqrt{3} \qquad y = 3$$

Por tanto, las coordenadas de punto en el sistema de coordenadas rectangulares son: $\left(-3\sqrt{3}, 3\right)$

Gráfica



Transformación de un punto en coordenadas rectangulares a polares

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma a coordenadas polares el punto $A(-4, -7)$.

Solución

Las coordenadas rectangulares del punto A son: $x = -4$; $y = -7$

Los valores se sustituyen en las fórmulas que determinan la longitud del radio vector y el argumento.

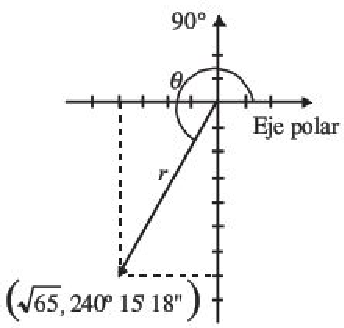
$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{(-4)^2 + (-7)^2} = \pm\sqrt{16 + 49} = \pm\sqrt{65}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-7}{-4}\right) = tan^{-1}(1.75) = 60°\ 15'\ 18''$$

Finalmente, las coordenadas del punto A en coordenadas polares son:

$$\left(\sqrt{65},\ 240°\ 15'\ 18''\right) = \left(-\sqrt{65},\ 60°\ 15'\ 18''\right)$$

Gráfica



EJERCICIO 55

Transforma a coordenadas rectangulares los siguientes puntos:

1. $A(6, 45°)$
2. $R(4, 300°)$
3. $P\left(4\sqrt{2}, 135°\right)$
4. $A\left(8, \frac{\pi}{6}\right)$
5. $B\left(10, \frac{5\pi}{3}\right)$
6. $C\left(4, -\frac{\pi}{2}\right)$
7. $Q(5, 60°)$
8. $M(-7, 315°)$
9. $N(-10, 225°)$
10. $S(15, -210°)$
11. $T(-3, 120°)$
12. $A\left(-2, -\frac{\pi}{3}\right)$
13. $S\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$
14. $C\left(\sqrt{3}, -\frac{11}{6}\pi\right)$
15. $B\left(-\frac{3}{4}, \frac{\pi}{12}\right)$

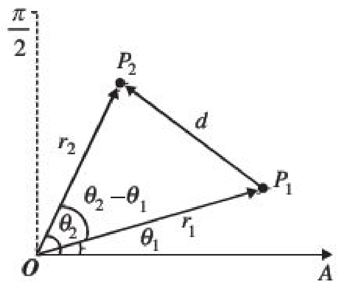
Transforma a coordenadas polares los siguientes puntos:

16. $A(5, 12)$
17. $P(-6, -4)$
18. $C(4, -3)$
19. $B(9, -12)$
20. $C(4, 0)$
21. $W(0, -6)$
22. $M(3, -4)$
23. $Q(-12, 5)$
24. $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
25. $F(24, 7)$
26. $Z\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
27. $Q(5, -3)$
28. $L(-3, 0)$
29. $J\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
30. $K(0, 5)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Distancia entre dos puntos en coordenadas polares

Dado $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ puntos en el sistema polar:



De la gráfica se tiene el triángulo OP_1P_2 del cual se desea determinar la distancia d, esto se obtiene aplicando la ley de los cosenos

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

EJEMPLOS

1 Obtén la distancia entre los puntos $A(3, 90°)$ y $B(-2, 30°)$.

Solución

Se sustituyen los valores $r_1 = 3$, $\theta_1 = 90°$, $r_2 = -2$ y $\theta_2 = 30°$, en la fórmula, para obtener:

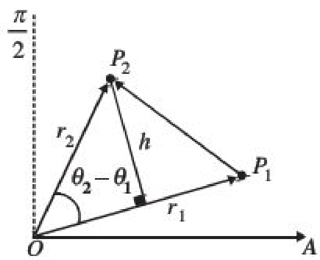
$$d = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 - 2(3)(-2)\cos(30° - 90°)}$$

$$d = \sqrt{9+4+12\cos(-60°)} = \sqrt{9+4+12\cos(60°)} = \sqrt{13+12\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{13+6} = \sqrt{19}\,u$$

Por consiguiente, la distancia entre los puntos es de $\sqrt{19}$ unidades.

Área de un triángulo en coordenadas polares

Sea el triángulo determinado por los puntos $O(0, 0)$, $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$, en el sistema polar:



El área del triángulo OP_1P_2 es:

$A = \frac{1}{2} r_1 \cdot h$, pero $h = r_2 \,sen\, (\theta_2 - \theta_1)$

$$A = \frac{1}{2}\left|r_1 \cdot r_2 \cdot sen(\theta_2 - \theta_1)\right|$$

EJEMPLOS

1 Determina el área del triángulo formado por los puntos $O(0,0)$ $A(7, 10°)$ y $B(4, 40°)$.

Solución

Se sustituyen los valores $r_1 = 7$, $\theta_1 = 10°$, $r_2 = 4$ y $\theta_2 = 40°$, en la fórmula, para obtener:

$$A = \frac{1}{2}(7)(4)\,sen(40° - 10°) = 14\,sen\,(30°) = 14\left(\frac{1}{2}\right) = 7u^2$$

Finalmente, el área del triángulo es de $7u^2$.

EJERCICIO 56

Determina la distancia entre los siguientes pares de puntos:

1. $A(2, 30°)$ y $B(-1, 120°)$
2. $C(-6, 0°)$ y $D(-3, 90°)$
3. $E(12, 150°)$ y $F(5, -30°)$
4. $G(-4, -60°)$ y $H(2, 240°)$
5. $I(5, 45°)$ y $J(8, 15°)$

Obtén el área del triángulo determinado por los puntos:

6. $O(0, 0)$, $A(6, 0°)$ y $B(12, 90°)$
7. $O(0, 0)$, $R(4, 30°)$ y $S(3, 120°)$
8. $O(0, 0)$, $A(-8, 135°)$ y $B(8, 45°)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación de una ecuación rectangular a polar

Para transformar una ecuación en coordenadas rectangulares a una ecuación en coordenadas polares se utilizan las siguientes fórmulas:

$$x = r\cos\theta;\ \ y = r\,sen\,\theta;\ x^2 + y^2 = r^2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma la ecuación dada a su forma polar.

$$x^2 - y^2 = 16$$

Solución

Se sustituyen $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$ en la ecuación rectangular.

$$x^2 - y^2 = 16 \rightarrow (r\cos\theta)^2 - (r\,sen\,\theta)^2 = 16$$

$$r^2\cos^2\theta - r^2 sen^2\theta = 16 \qquad \text{Se factoriza } r^2$$

$$r^2(\cos^2\theta - sen^2\theta) = 16$$

Pero $\cos^2\theta - sen^2\theta = \cos 2\theta$ sustituyendo,

$$r^2\cos 2\theta = 16$$

Se despeja r^2

$$r^2 = \frac{16}{\cos 2\theta}\text{, por identidad recíproca } \frac{1}{\cos 2\theta} = \sec 2\theta,\ \text{ entonces}$$

$$r^2 = 16\sec 2\theta$$

Finalmente, la transformación en coordenadas polares de la ecuación $x^2 - y^2 = 16$, es:

$$r^2 = 16\sec 2\theta$$

2 Transforma a su forma polar la ecuación $4x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$.

Solución

Al sustituir $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$ en la ecuación rectangular se obtiene:

$$4(r\cos\theta)^2 + 4(r\,sen\,\theta)^2 - 2(r\cos\theta) - 16(r\,sen\,\theta) + 13 = 0$$

$$4r^2\cos^2\theta + 4r^2 sen^2\,\theta - 2\,r\cos\theta - 16\,r\,sen\,\theta + 13 = 0$$

$$4\,r^2\,(\cos^2\theta + sen^2\,\theta) - 2\,r\cos\theta - 16\,r\,sen\,\theta + 13 = 0$$

Pero $\cos^2\theta + sen^2\,\theta = 1$

$$4r^2 - 2\,r\cos\theta - 16\,r\,sen\,\theta + 13 = 0$$

EJERCICIO 57

Transforma a ecuaciones polares las siguientes expresiones:

1. $y = -3$
2. $x = 5$
3. $y = \sqrt{3}x$
4. $2x - 3y = 6$
5. $y = -x + 2$
6. $x\cos w + y\,sen\,w - p = 0$
7. $x^2 + y^2 = 16$
8. $x^2 + y^2 + 4x = 0$
9. $x^2 + y^2 - 2y = 0$
10. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
11. $y^2 = -8x$
12. $y^2 - 12x - 36 = 0$
13. $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} = 2xy$
14. $x^2 - 2x - 4y - 3 = 0$
15. $9x^2 + 4y^2 = 36$
16. $16x^2 + 25y^2 = 400$
17. $9x^2 - 72y + 25y^2 - 81 = 0$
18. $\frac{x^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$
19. $x^2 - y^2 = 9$
20. $16x^2 - 9y^2 = 144$
21. $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$
22. $(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$
23. $xy = -4$
24. $\sqrt{4x^2 - 4y^2} = 2x^2 + 2y^2$
25. $\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 1$
26. $x^2y - 2x^2 - 16y = 0$
27. $y^2 = 12x$
28. $4x - 3y + 12 = 0$
29. $x^2 - 4y^2 = 16$
30. $x^2 + 4y - 8 = 0$
31. $(x^2 + y^2 + 3y)^2 = 4x^2 + 4y^2$
32. $4x^2 + 9y^2 = 36$
33. $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$
34. $3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 = 0$
35. $4y^2 - 5x^2 - 8y - 6 = 0$
36. $x^2 - 5y + 15 = 0$
37. $3y^2 + 4x - 2y = 0$
38. $x^2 + 3xy - y^2 = 4$
39. $y = x^3 - 2x^2$
40. $y = \frac{3x-2}{x-1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación de una ecuación polar a rectangular

De las fórmulas: $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$ y $x^2 + y^2 = r^2$, se aplican los despejes respectivos:

$$\cos\theta = \frac{x}{r},\ sen\,\theta = \frac{y}{r} \text{ y } r = \sqrt{x^2+y^2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación rectangular del lugar geométrico, cuya ecuación es:

$$r = \frac{1}{1-2\,sen\,\theta}$$

Solución

Se elimina el denominador.

$$r(1-2\ sen\ \theta) = 1 \ \rightarrow r - 2r\,sen\,\theta = 1$$

Y al sustituir en la ecuación $y = r\,sen\,\theta$ y $r = \sqrt{x^2+y^2}$, se obtiene:

$$\sqrt{x^2+y^2} - 2y = 1$$

Al despejar el radical y elevar al cuadrado resulta la ecuación en su forma rectangular.

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (1+2y)^2 \ \rightarrow x^2 + y^2 = 1 + 4y + 4y^2$$

$$x^2 + y^2 - 1 - 4y - 4y^2 = 0$$

$$x^2 - 3y^2 - 4y - 1 = 0$$

2 Transforma la ecuación $r = \dfrac{4}{1-sen\theta}$ a coordenadas rectangulares.

Solución

Se elimina el denominador de la ecuación.

$$r(1-sen\,\theta) = 4 \ \rightarrow r - r\,sen\,\theta = 4$$

Y al sustituir $y = r\,sen\,\theta$ y $r = \sqrt{x^2+y^2}$, se obtiene:

$$r - rsen\,\theta = 4 \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - y = 4$$

$$x^2 + y^2 = (4 + y)^2$$

$$x^2 + y^2 = 16 + 8y + y^2$$

$$x^2 - 8y - 16 = 0$$

3 Convierte la ecuación $r = 5\ cos\ 2\theta$ a coordenadas rectangulares.

Solución

Se sabe que $cos\ 2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta$, entonces:

$$r = 5\ cos\ 2\theta = 5(cos^2\theta - sen^2\theta)$$

Y al sustituir,

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ cos\ \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \text{ y } sen\ \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Se obtiene finalmente:

$$r = 5(cos^2\theta - sen^2\theta) \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 5\left[\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\right]$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 5\left[\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right]$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 5\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]$$

$$\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = 5\left(x^2-y^2\right)$$

$$\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} = 5\left(x^2-y^2\right)$$

4 Convierte $r = \frac{3sen\ \theta}{2-3cos\ \theta}$ a coordenadas rectangulares.

Solución

Si $cos\ \theta \neq \frac{2}{3}$, entonces la ecuación se puede representar como:

$$2r - 3r\ cos\ \theta = 3\ sen\ \theta$$

Al sustituir $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\ cos\ \theta$ y $sen\ \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ se obtiene:

$$2r - 3rcos\ \theta = 3sen\ \theta \rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2} - 3x = \frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$2\left(x^2+y^2\right) - 3x\sqrt{x^2+y^2} = 3y$$

$$2\left(x^2+y^2\right) = 3y + 3x\sqrt{x^2+y^2}$$

EJERCICIO 58

Transforma a su forma rectangular las siguientes ecuaciones polares.

1. $r=\dfrac{5}{sen\ \theta}$
2. $r=-8\ sec\ \theta$
3. $r=\dfrac{4\ cos\ \theta}{2-cos^2\ \theta}$
4. $r=4\ sen\ \theta$
5. $r=\dfrac{5}{2\ sen\quad +3}$
6. $r=sen\ 2\theta$
7. $r=\dfrac{16}{\sqrt{1+sen^2\ \theta}}$
8. $r(1-cos\ \theta)=5$
9. $r=2-cos\ \theta$
10. $r-cos\ \theta=4$
11. $r=4(1-cos\ \theta)$
12. $r^2\ sen\ 2\theta=9$
13. $r(1+sen\ \theta)=-3$
14. $r(2+2\ cos\ \theta)=8$
15. $r=4\ cos\ 2\theta$
16. $r=\sqrt{sen\ \theta}$
17. $r=\dfrac{6}{3+\ sen\ \theta}$
18. $r=\dfrac{2}{2-\ cos\ \theta}$
19. $r=\dfrac{3}{1-2\ cos\ \theta}$
20. $r=\dfrac{1}{cos\ \theta+2}$
21. $r=\dfrac{4}{2-cos\theta}$
22. $r=4\sqrt{cos\ 2\theta}$
23. $r=\dfrac{6\ sec\ \theta}{2\ sec\ \theta+3}$
24. $r=\dfrac{2\ csc\ \theta}{1-csc\ \theta}$
25. $sen^2\ \theta-4r\ cos^3\ \theta=0$
26. $r^2-5r\ cos\ \theta+3r\ sen\ \theta-8=0$
27. $r^2\ cos^2\ \theta+r(\ 3\ cos\ \theta-2\ sen\ \theta)+4=0$
28. $r=\ 12\ cot\ \theta\ csc\ \theta$
29. $r=\ \dfrac{1}{\sqrt{cos\ 2\theta}}$
30. $r\ cos\ (\theta-60°)=-4$
31. $\theta=arc\ tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$
32. $r=cos\ 3\theta$
33. $r\ sec\ 3\theta=2$
34. $r=\ 5\ cos\ 4\theta$
35. $r=\ 3\theta$
36. $r=3\ sen\ \dfrac{\theta}{2}$
37. $r=2\ cos^2\ \dfrac{\theta}{4}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Identificación de una cónica en su forma polar

Sean las ecuaciones de las cónicas:

$$\text{Horizontales } r=\frac{ke}{1\pm e\cos\theta};\ \text{Verticales } r=\frac{ke}{1\pm e\,sen\,\theta}$$

Entonces, la ecuación representa:

- Parábola si $e = 1$
- Elipse si $0 < e < 1$
- Hipérbola si $e > 1$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Identifica la naturaleza de la siguiente ecuación $r=\dfrac{4}{1-\cos\theta}$.

Solución

Se compara la ecuación $r=\dfrac{4}{1-\cos\theta}$ con la ecuación de la cónica $r=\dfrac{ke}{1-e\cos\theta}$, se obtiene que $e=1$, por consiguiente, la ecuación representa una parábola horizontal.

2 Identifica la naturaleza de la siguiente ecuación $r=\dfrac{3}{5+2\,sen\,\theta}$.

Solución

La ecuación $r=\dfrac{3}{5+2\,sen\,\theta}$ se representa como $r=\dfrac{\frac{3}{5}}{1+\frac{2}{5}sen\,\theta}$, comparando con la ecuación $r=\dfrac{ke}{1+e\,sen\,\theta}$, se determina que $e=\dfrac{2}{5}$; este resultado indica que se trata de una elipse vertical.

3 Identifica la naturaleza de la siguiente ecuación $r=\dfrac{4}{2-3\cos\theta}$.

Solución

La ecuación $r=\dfrac{4}{2-3\cos\theta}$ se representa como $r=\dfrac{2}{1-\frac{3}{2}\cos\theta}$, la cual es de la forma $r=\dfrac{ke}{1-e\cos\theta}$, donde $e=\dfrac{3}{2}$; esto indica que se trata de una hipérbola horizontal.

EJERCICIO 59

Identifica la naturaleza de las siguientes ecuaciones:

1. $r=\frac{8}{1+\cos\theta}$
2. $r=\frac{2}{1-\cos\theta}$
3. $r=\frac{8}{2+2\,\text{sen}\,\theta}$
4. $r=\frac{20}{3-3\,\text{sen}\,\theta}$
5. $r=\frac{20}{5-4\,\text{sen}\,\theta}$
6. $r=\frac{16}{4-5\,\text{sen}\,\theta}$
7. $r=\frac{15}{3+2\cos\theta}$
8. $r=\frac{21}{3-\cos\theta}$
9. $r=\frac{18}{2-5\cos\theta}$
10. $r=\frac{36}{4+9\cos\theta}$
11. $r=\frac{4}{3\,\text{sen}\,\theta-1}$
12. $r=\frac{2}{1-\text{sen}\,\theta}$
13. $r=\frac{-8}{3-4\cos\theta}$
14. $r=\frac{45}{5+4\cos\theta}$
15. $r=\frac{4}{1+\cos\theta}$
16. $r=\frac{16}{\cos\theta-2}$
17. $r=\frac{-12}{7-4\cos\theta}$
18. $r=\frac{6}{4-3\,\text{sen}\,\theta}$
19. $r=\frac{5}{1+\text{sen}\,\theta}$
20. $r=\frac{-10}{3-2\,\text{sen}\,\theta}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Gráfica de una ecuación en coordenadas polares

La gráfica de una ecuación en coordenadas polares (r, θ), es el conjunto de los puntos que tienen por lo menos un par de coordenadas polares (r, θ) y que satisfacen la ecuación $r = f(\theta)$.

Análisis de una ecuación en coordenadas polares

1. Una curva es simétrica respecto a la recta $\frac{\pi}{2}$, si se cumple que:

$$f(\pi-\theta)=f(\theta)$$

Esto es, se sustituye el punto $(r, \pi-\theta)$ por (r, θ)

2. Una curva es simétrica con el polo si se cumple que:

$$f(\pi+\theta)=f(\theta)$$

Esto es, se sustituye el punto $(r, \pi+\theta)$ por (r, θ)

3. Una curva es simétrica con el eje polar si se cumple que:

$$f(-\theta)=f(\theta)$$

Esto es, se sustituye el punto $(r, -\theta)$ por (r, θ)

Si una curva cumple con dos de los casos anteriores, se deduce que el tercer caso también se cumple.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Traza la gráfica de la ecuación $r = 4\cos 2\theta$.

Solución

Paso I. Se analizan las simetrías de la ecuación:

1. Simetría con el eje $\frac{\pi}{2}$

   Se sustituye el punto $(r, \pi - \theta)$, entonces,

$$r = 4\cos 2(\pi - \theta)$$

   Se aplican las identidades,

$$\begin{aligned} r = 4\cos 2(\pi - \theta) &= 4\cos(2\pi - 2\theta) \\ &= 4[\cos 2\pi \cos 2\theta + \sin 2\pi \sin 2\theta] \\ &= 4[(1)\cos 2\theta + (0)\sin 2\theta] \\ r &= 4\cos 2\theta \end{aligned}$$

   La ecuación es idéntica a la original, por consiguiente, es simétrica respecto a $\frac{\pi}{2}$.

2. Simetría con el polo.

   Se sustituye el punto $(r, \pi + \theta)$, entonces,

$$r = 4\cos 2(\pi + \theta)$$

   Se aplican las identidades,

$$\begin{aligned} r = 4\cos 2(\pi + \theta) &= 4\cos(2\pi + 2\theta) \\ &= 4[\cos 2\pi \cos 2\theta - \sin 2\pi \sin 2\theta] \\ &= 4[(1)\cos 2\theta - (0)\sin 2\theta] \\ r &= 4\cos 2\theta \end{aligned}$$

   La ecuación no se alteró, por tanto, es simétrica con el polo.

3. Simetría con el eje polar.

   Se sustituye el punto $(r, -\theta)$, entonces,

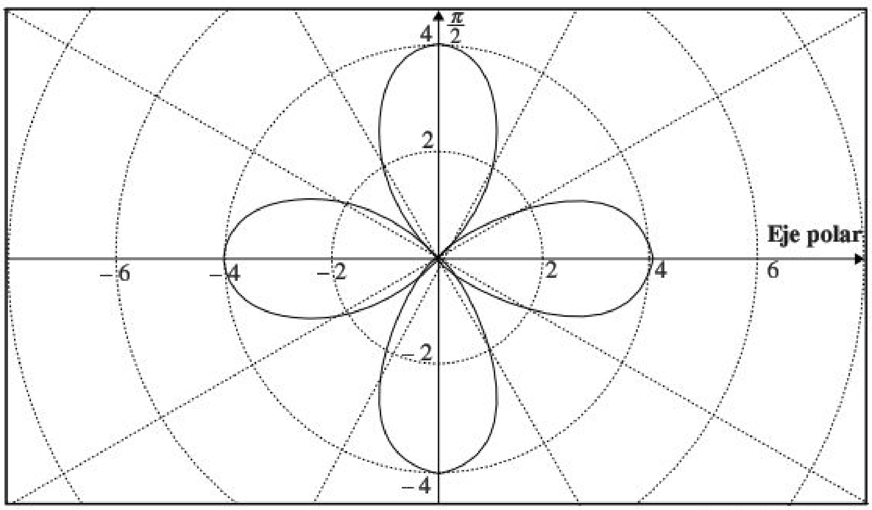
$$r = 4\cos 2(-\theta) = r = 4\cos(-2\theta) = 4\cos 2\theta$$

   La ecuación no se alteró, por consiguiente, es simétrica con el eje polar.

Paso II. Se una tabla de valores.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$r = 4\cos 2\theta$	4	2	0	−2	−4	−2	0	2	4

Gráfica



Rosa de cuatro pétalos

2 Construye la gráfica de la ecuación $r = 2 - 2\cos\theta$.

Solución

Paso I. Se analizan las simetrías de la ecuación:

1. Simetría con el eje $\frac{\pi}{2}$.

Se sustituye el punto $(r, \pi - \theta)$, entonces,

$$r = 2 - 2\cos(\pi - \theta)$$

Se aplican identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned} r = 2 - 2\cos(\pi - \theta) &= 2 - 2[\cos\pi\ \cos\theta + \operatorname{sen}\pi\ \operatorname{sen}\theta] \\ &= 2 - 2[(-1)\cos\theta + (0)\operatorname{sen}\theta] \\ &= 2 - 2[-\cos\theta] \\ r &= 2 + 2\cos\theta \end{aligned}$$

La curva no es simétrica respecto al eje $\frac{\pi}{2}$.

2. Simetría con el polo.

Se sustituye el punto $(r, \pi + \theta)$, entonces,

$$r = 2 - 2\cos(\pi + \theta)$$

Se aplican identidades,

$$\begin{aligned} r = 2 - 2\cos(\pi + \theta) &= 2 - 2[\cos\pi\ \cos\theta - \operatorname{sen}\pi\ \operatorname{sen}\theta] \\ &= 2 - 2[(-1)\cos\theta - (0)\operatorname{sen}\theta] \\ &= 2 - 2[-\cos\theta] \\ r &= 2 + 2\cos\theta \end{aligned}$$

La curva no es simétrica respecto al polo.

3. Simetría con el eje polar.

Se sustituye el punto $(r, -\theta)$, entonces,

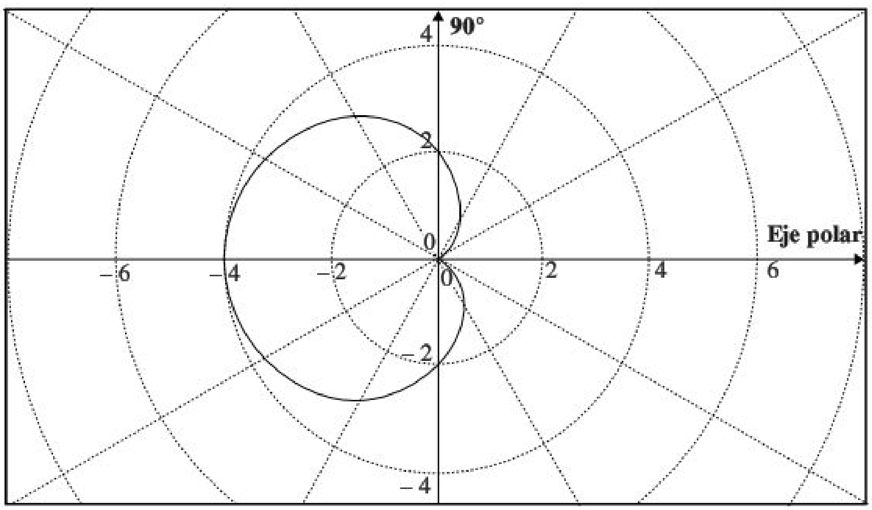
$$r = 2 - 2\cos(-\theta) = 2 - 2\cos\theta$$

Por tanto, la curva es simétrica respecto al eje polar.

Paso II. Se construye una tabla de valores.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$r = 2 - 2\cos\theta$	0	0,26	0,58	1	2	3	3,41	3,73	4

Gráfica



Cardioide

3 Grafica la ecuación $r = 4 + 5\ sen\ \theta$.

Solución

Paso I. Se analizan las simetrías de la ecuación.

1. Simetría con el eje $\frac{\pi}{2}$.

   Se sustituye el punto $(r,\ \pi - \theta)$, entonces,

$$r = 4 + 5\ sen\ (\pi - \theta)$$

   Se aplican identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned} r = 4 + 5\ sen\ (\pi - \theta) &= 4 + 5[sen\ \pi\ \ cos\ \theta - cos\ \pi\ \ sen\ \theta] \\ &= 4 + 5[(0)\ cos\ \theta - (-1)\ sen\ \theta] \\ &= 4 + 5[sen\ \theta] \\ r &= 4 + 5\ sen\ \theta \end{aligned}$$

   De acuerdo con el resultado, la curva es simétrica respecto al eje $\frac{\pi}{2}$.

2. Simetría con el polo.

   Se sustituye el punto $(r,\ \pi + \theta)$, entonces,

$$r = 4 + 5\ sen\ (\pi + \theta)$$

   Se aplican identidades,

$$\begin{aligned} r = 4 + 5 sen\ (\pi + \theta) &= 4 + 5[sen\ \pi\ \ cos\ \theta + cos\ \pi\ \ sen\ \theta] \\ &= 4 + 5[(0)\ cos\ \theta + (-1)\ sen\ \theta] \\ &= 4 + 5[-\ sen\ \theta] \\ r &= 4 - 5\ sen\ \theta \end{aligned}$$

   Por tanto, la curva no es simétrica respecto al polo.

3. Simetría con el eje polar.

   Se sustituye el punto $(r, -\theta)$, entonces,

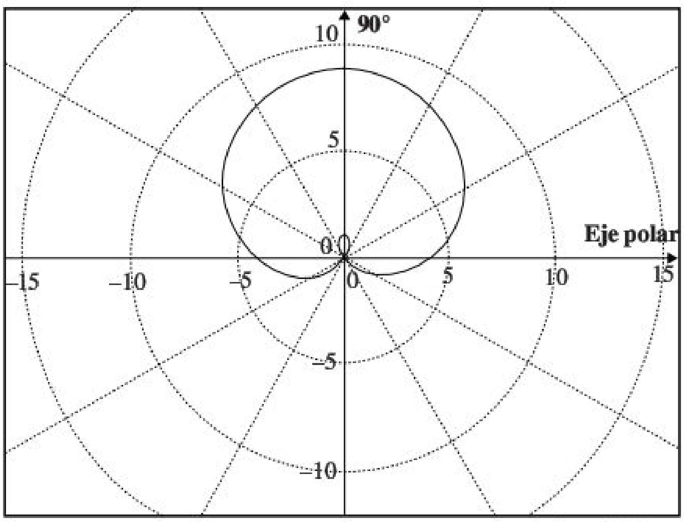
$$r = 4 + 5\ sen\ (-\theta) = 4 - 5\ sen\ \theta$$

   Por consiguiente, la curva no es simétrica respecto al eje polar.

Paso II. Se construye una tabla de valores.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	240°	270°
$r = 4 + 5\ sen\ \theta$	4	6.5	7.53	8.3	9	8.3	7.53	6.5	4	1.5	– 0.33	– 1

Gráfica



Caracol de Pascal

EJERCICIO 60

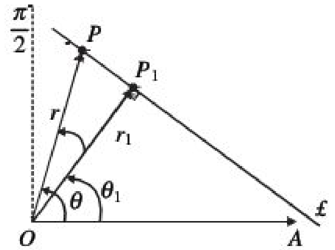
Traza la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $r = 3\ sen\ \theta$ (Circunferencia)
2. $r = \dfrac{3}{1 + sen\ \theta}$ (Parábola)
3. $r = \dfrac{6}{4 - 3\ sen\ \theta}$ (Elipse)
4. $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\theta}$ (Hipérbola)
5. $r = \dfrac{2}{sen\ \theta + \cos\theta}$ (Recta)
6. $r = sen\ 3\theta$ (Rosa de 3 pétalos)
7. $r = 4\cos 3\theta$ (Rosa de 3 pétalos)
8. $r = 2 - 3\cos\theta$ (Caracol con lazo)
9. $r = 3\cos 3\theta$ (Rosa de 3 pétalos)
10. $r^2 = 16\cos 2\theta$ (Lemniscata)
11. $r = 2\theta$ (Caracol)
12. $r = 3\ sen\ 2\theta$ (Rosa de 4 pétalos)
13. $r = 3(1 + \cos\theta)$ (Cardioide)
14. $r = 2\ sen\ 4\theta$ (Rosa de 8 pétalos)
15. $r^2 = -4\cos 2\theta$ (Lemniscata)
16. $r^2 = 25\ sen\ 2\theta$ (Lemniscata)
17. $r = 4 - 2\sec\theta$ (Concoide de Nicomedes)
18. $r = 3 + \csc\theta$ (Concoide de Nicomedes)
19. $r = \dfrac{2\pi}{\theta}$ (Espiral recíproca)
20. $r = \theta(1 - \cos\theta)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación polar de la recta

Dados los puntos $P(r, \theta)$ y $P_1(r_1, \theta_1)$ sobre la recta £ en el sistema polar:



Del triángulo rectángulo OPP_1 se tiene que:

$$\cos(\theta - \theta_1) = \frac{r_1}{r}$$

Entonces, la ecuación polar de la recta es:

$$£:\ r \cdot \cos(\theta - \theta_1) = r_1$$

Casos particulares

Caso I.

Si $\theta_1 = 0°$ entonces $r \cos \theta = r_1$

La recta es perpendicular al eje polar y se encuentra a r_1 unidades a la derecha del polo.

Caso II.

Si $\theta_1 = 180°$ entonces $r \cos \theta = -r_1$

La recta es perpendicular y está a r_1 unidades a la izquierda del polo.

Caso III.

Si $\theta_1 = 90°$ entonces $r\ sen\ \theta = r_1$

La recta es paralela al eje polar a r_1 unidades por arriba del eje polar.

Caso IV.

Si $\theta_1 = 270°$ entonces $r\ sen\ \theta = -r_1$

La recta es paralela al eje polar a r_1 unidades por debajo del eje polar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la recta en su forma polar, que pasa por el punto $P(6, 90°)$ y es paralela al eje polar.

Solución

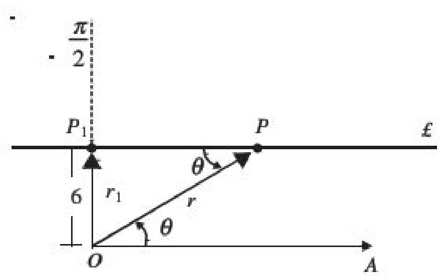
En la gráfica se observa que la recta es paralela al eje polar y está por arriba 6 unidades, entonces se aplica el caso III.

Entonces $r_1 = 6$, al sustituir este valor en la fórmula resulta la ecuación:

$$r\ sen\ \theta = r_1 \rightarrow r\ sen\ \theta = 6$$

Por tanto, la ecuación de la recta en su forma polar es £: $r\ sen\ \theta = 6$.

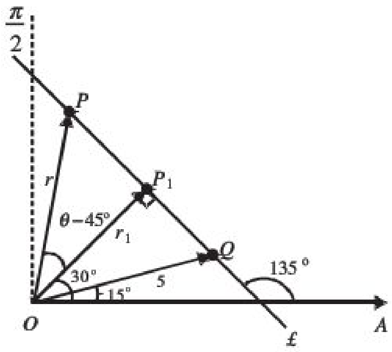
Gráfica



2 Determina la ecuación de la recta en su forma polar, que pasa por el punto Q (5, 15°) y forma un ángulo de 135° con el eje polar.

Solución

Se realiza una gráfica con los datos.



Luego, de la gráfica se tiene que $\theta_1 = 45°$ y en el triángulo OQP_1, $r_1 = 5\ cos\ 30° = \frac{5}{2}\sqrt{3}$, estos valores se sustituyen en la fórmula $r\ cos\ (\theta - \theta_1) = r_1$ para obtener la ecuación de la recta, por tanto, la ecuación de la recta £ es:

$r\ cos\ (\theta - 45°) = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

EJERCICIO 61

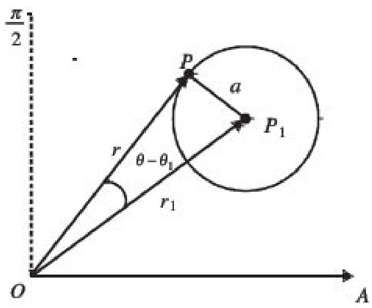
Determina la ecuación polar de las siguientes rectas:

1. Perpendicular al eje polar y se encuentra a 5 unidades a la derecha del polo.
2. Horizontal y está a 7 unidades por debajo del eje polar.
3. Horizontal, pasa por el punto (5, 90°).
4. Vertical, pasa por el punto (–1, 0°).
5. Pasa por el punto (10, 30°) y forma un ángulo de 150° con el eje polar.
6. Pasa por el punto (8, 30°) y forma un ángulo de 165° con el eje polar.
7. Pasa por el punto (2, 150°) y es perpendicular a la recta que une el punto (2, 150°) con el polo.
8. Pasa por el punto (5, 135°) y es perpendicular a la recta que une el punto (2, 135°) con el polo.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación polar de la circunferencia

Sea el punto $P_1\ (r_1, \theta_1)$ el centro de una circunferencia, $P(r, \theta)$ un punto de la circunferencia y la distancia entre los puntos el radio a, su ecuación está determinada por la fórmula:



$$a^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cdot cos\ (\theta - \theta_1)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación polar de la circunferencia con centro en el punto (4, 30°) y de radio 1 unidad.

Solución

Los valores de $a = 1$, $r_1 = 4$ y $\theta - \theta_1 = \theta - 30°$, se sustituyen:

$$a^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cdot cos\left(\theta - \theta_1\right)$$

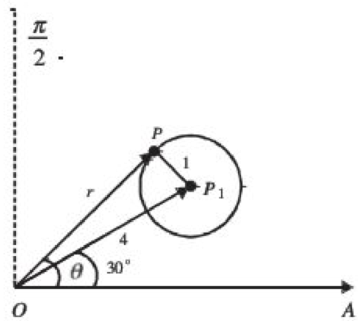
$$(1)^2 = r^2 + (4)^2 - 2r(4) \cdot cos\left(\theta - 30°\right)$$

$$1 = r^2 + 16 - 8r \cdot cos\left(\theta - 30°\right)$$

$$r^2 + 16 - 8r \cdot cos\left(\theta - 30°\right) - 1 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es:

$$r^2 - 8r \cdot cos\left(\theta - 30°\right) + 15 = 0$$



EJERCICIO 62

Determina la ecuación polar de las siguientes circunferencias.

1. Centro el punto (3, 30°) y radio 9 unidades.
2. Centro el punto (5, 120°) y radio 1 unidad.
3. Centro el punto (10, 45°) y radio 4 unidades.
4. Centro el punto (7, 90°) y radio 7 unidades.
5. Centro el punto (0, 0°) y radio 6 unidades.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Intersección de curvas en coordenadas polares

Al resolver un sistema de ecuaciones en coordenadas rectangulares, se obtienen los puntos de intersección de las curvas. Estos puntos satisfacen recíprocamente el sistema.

En coordenadas polares **no** siempre se cumple la segunda afirmación, ya que un punto en coordenadas polares tiene más de un par de coordenadas polares.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve el sistema de ecuaciones y traza la gráfica de $\begin{cases} r = 4\,cos\,\theta \\ r = 4\,sen\,\theta \end{cases}$

Solución

Se igualan las ecuaciones.

$$4\,cos\,\theta = 4\,sen\,\theta$$

Se dividen ambos miembros entre $cos\,\theta$, si $cos\,\theta \neq 0$, entonces,

$$\frac{4\,cos\,\theta}{cos\,\theta} = \frac{4\,sen\,\theta}{cos\,\theta} \rightarrow 4 = 4\,tan\,\theta \rightarrow tan\,\theta = 1$$

$$\theta = arc\,tan\,(1)$$

$$\theta = 45°, 225°$$

Se sustituyen los ángulos encontrados en cualquiera de las ecuaciones para determinar el valor del radio vector r.

Si $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$, en consecuencia,

$$r = 4\,cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} \approx 2.8$$

Si $\theta = 225° = \frac{5\pi}{4}$, entonces,

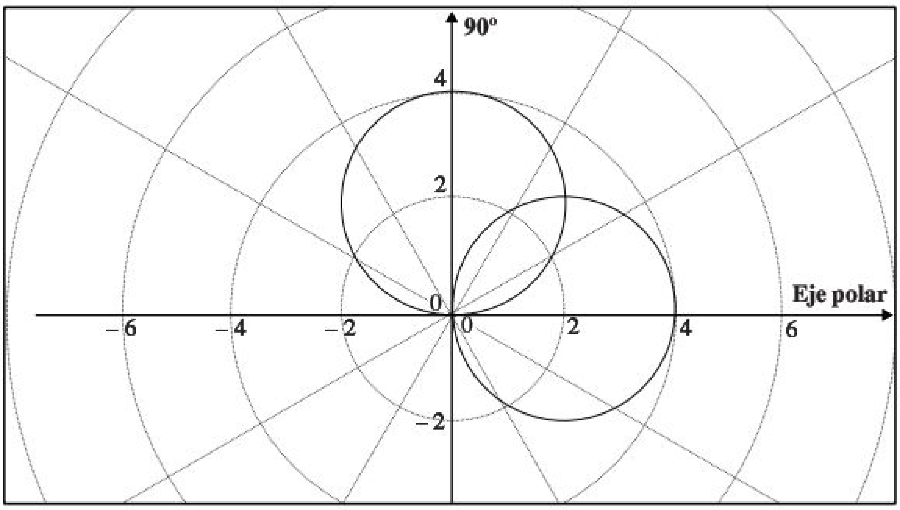
$$r = 4\,cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} \approx -2.8$$

Se generan dos puntos de intersección $(2\sqrt{2}, 45°)$ y $(-2\sqrt{2}, 225°)$.

Tabulación:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	330°
$r = 4\,cos\,\theta$	4	3.4	2.8	2	0	–2	–3	–4	–3.4	–2.8	–2	0	2	3.4
$r = 4\,sen\,\theta$	0	2	2.8	3.4	4	3.4	2	0	–2	–2.8	–3.4	–4	–3.4	–2

Se traza la gráfica de las ecuaciones polares.



En la gráfica se observa que existe un punto de intersección en el polo; sin embargo, para $r = 4\,sen\,\theta$ el punto que determina el polo es (0, 0°), y para la ecuación $r = 4\,cos\,\theta$ el punto que determina el polo es (0, 90°), entonces el origen (polo) no tiene ningún par de coordenadas que satisfagan el sistema.

2 Resuelve el siguiente sistema y traza la gráfica de $\begin{cases} r = 5\cos\theta \\ r = 5\,sen\,2\theta \end{cases}$

Solución

Se igualan las ecuaciones.

$$5\,sen\,2\theta = 5\cos\theta$$

Y al sustituir $sen\,2\theta = 2\,sen\,\theta\cos\theta$ y despejar θ, se obtiene:

$$5\,sen\,2\theta = 5\cos\theta \rightarrow 5(2\,sen\,\theta\cos\theta) = 5\cos\theta$$
$$10\,sen\,\theta\cos\theta = 5\cos\theta$$
$$10\,sen\,\theta\cos\theta - 5\cos\theta = 0$$
$$5\cos\theta\,(2\,sen\,\theta - 1) = 0$$
$$\cos\theta = 0;\ 2\,sen\,\theta - 1 = 0$$
$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\ \text{o}\ \theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

Se sustituyen los ángulos encontrados en cualquiera de las ecuaciones para determinar el valor del radio vector r.

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ entonces } r = 5\cos\theta = 5\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt{3} \approx 4.3$$

$$\text{Si } \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ entonces } r = 5\cos\theta = 5\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2}\sqrt{3} \approx -4.3$$

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ entonces } r = 5\cos\theta = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5(0) = 0$$

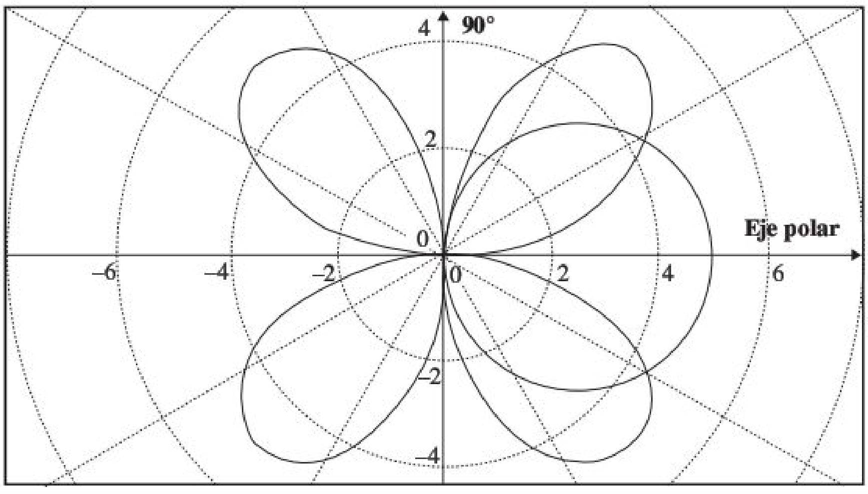
$$\text{Si } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ entonces } r = 5\cos\theta = 5\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5(0) = 0$$

Por consiguiente, las curvas se intersecan en los puntos $\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Tabulación:

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
$r = 5\cos\theta$	5	4.3	2.5	0	–2.5	–4.3	–5	–4.3	–2.5	0	2.5	4.3
$r = 5\,sen\,2\theta$	0	4.3	4.3	0	–4.3	–4.3	0	4.3	4.3	0	–4.3	–4.3

Gráfica



EJERCICIO 63

Determina los puntos de intersección y traza la gráfica de los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $\begin{cases} 2r\cos\theta = -\sqrt{3} \\ r = 2\cos\theta - \left(1+\sqrt{3}\right) \end{cases}$

2. $\begin{cases} r = \dfrac{4}{1+sen\,\theta} \\ r\,sen\,\theta = -4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} r = 4\,sen\,\theta \\ r\,sen\,\theta = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} r = 2 \\ r = 4\,sen\,\theta \end{cases}$

5. $\begin{cases} r = -2\,sen\,\theta \\ r = -2\cos\theta \end{cases}$

6. $\begin{cases} r = 2\cos 2\theta \\ r = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} r = \dfrac{1}{sen\,\theta} \\ r\,sen\,2\theta = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} r = 3\left(1+\cos\theta\right) \\ r = 6\cos\theta \end{cases}$

9. $\begin{cases} r = \dfrac{6}{1+sen\,\theta} \\ r = \dfrac{2}{sen\,\theta} \end{cases}$

10. $\begin{cases} r = 3\cos 2\theta \\ r = 3\,sen\,\theta \end{cases}$

11. $\begin{cases} r = 5\,sen\,\dfrac{1}{2}\theta \\ r = 5\cos\theta \end{cases}$

12. $\begin{cases} r = 1 - sen\,\theta \\ r = 1 - sen\,2\theta \end{cases}$

13. $\begin{cases} r = 3\left(1+sen\,\theta\right) \\ r = 3\left(1+\cos\theta\right) \end{cases}$

14. $\begin{cases} r = 6\cos 4\theta \\ r = 3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} r = 2\left(1+sen\,2\theta\right) \\ r = 2\left(1+sen\,\theta\right) \end{cases}$

16. $\begin{cases} r = \dfrac{6\theta}{\pi} \\ r = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} r = 1+4\cos 2\theta \\ r = 3 \end{cases}$

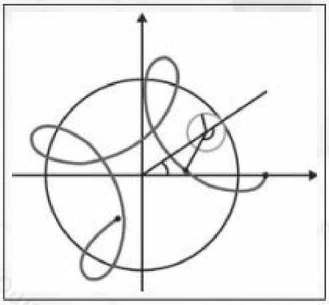
18. $\begin{cases} r = 4 - 2\cos\theta \\ r = \dfrac{16}{4+2\cos\theta} \end{cases}$

19. $\begin{cases} r = 4 - 4\,sen\,2\theta \\ r = 4 - 4\,sen\,\theta \end{cases}$

20. $\begin{cases} r = 2 - sen\,\theta \\ r = 2 + \cos 2\theta \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 30
ECUACIONES PARAMÉTRICAS



Gráfica de la hipotrocoide

La gran belleza de las curvas

El campo de las curvas paramétricas está lleno de objetos matemáticos fascinantes y las trocoides destacan por su increíble belleza. Un ejemplo de ello es la curva que se conoce con el nombre de hipotrocoide.

La belleza de esta figura proviene sin duda de su simetría muy particular que se expresa en el lenguaje matemático con las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x=(a-b)\cos t+c\cdot\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right) \\ y=(a-b)\operatorname{sen} t-c\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{b}t\right) \end{cases}$$

donde a, b y c son constantes.

Definición

Si $f(x, y) = 0$ es la ecuación rectangular de una curva plana y las variables x y y están en función de una tercera variable t, llamada parámetro, entonces,

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Estas relaciones se conocen como ecuaciones paramétricas.

El objetivo de resolver el sistema es representar en una sola ecuación las variables x y y eliminando el parámetro.

Transformación de ecuaciones paramétricas a rectangulares

Dada una curva en su forma paramétrica, su transformación a rectangular se obtiene con la eliminación del parámetro. No hay un método general para efectuar la eliminación, depende, en cada caso, de la forma de las ecuaciones paramétricas.

Si éstas contienen funciones trigonométricas, la ecuación rectangular surge al eliminar el parámetro por medio de las identidades trigonométricas fundamentales.

Si las ecuaciones paramétricas son algebraicas, su forma sugerirá alguna operación para eliminar el parámetro.

Si de dos ecuaciones paramétricas una es más complicada que la otra, la ecuación rectangular puede obtenerse despejando el parámetro de la ecuación más sencilla y sustituyendo su valor en la otra ecuación.

Sistemas paramétricos algebraicos

Si el sistema paramétrico es algebraico, se elimina por procedimientos algebraicos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Escribe en su forma rectangular la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t \end{cases}$$

Solución

Se despeja el parámetro t de la ecuación $y = 3t$:

$$y = 3t \rightarrow t = \frac{y}{3}$$

y se sustituye en la ecuación $x = 2t - 1$,

$$x = 2\left(\frac{y}{3}\right) - 1 \rightarrow x = \frac{2y}{3} - 1$$

Resulta que la ecuación en su forma rectangular es: $3x - 2y + 3 = 0$.

2 Expresa en forma rectangular la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = -2t^2 + 4t - 3 \\ y = 2t \end{cases}$$

Solución

Se despeja el parámetro t de la ecuación $y = 2t$:

$$y = 2t \rightarrow t = \frac{y}{2}$$

Se sustituye en $x = -2t^2 + 4t - 3$ y resulta que,

$$x = -2t^2 + 4t - 3 \rightarrow x = -2\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{2}\right) - 3$$

$$x = -2\left(\frac{y^2}{4}\right) + 2y - 3$$

$$x = -\frac{y^2}{2} + 2y - 3$$

Al multiplicar por 2 e igualar a cero, se obtiene:

$$y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$$

3 Expresa en forma rectangular la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \dfrac{t-1}{t} \end{cases}$$

Solución

Se despeja la variable t de cualquiera de ambas ecuaciones:

$$x = \sqrt{t-1} \rightarrow x^2 = t - 1 \rightarrow t = x^2 + 1$$

Se sustituye en $y = \dfrac{t-1}{t}$, entonces la ecuación en su forma rectangular es:

$$y = \frac{t-1}{t} \rightarrow y = \frac{x^2+1-1}{x^2+1}$$

$$(x^2+1)y = x^2$$

Finalmente, al desarrollar el producto e igualar con cero se obtiene:

$$x^2y - x^2 + y = 0$$

EJERCICIO 64

Determina la ecuación rectangular de cada una de las siguientes ecuaciones paramétricas.

1. $\begin{cases} x=4t \\ y=t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=at+b \\ y=ct-d \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=a(1+t) \\ y=2bt \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=2-4t \\ y=3t-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} xt-t=1 \\ ty=2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t-2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=t+2 \\ y=t^2+4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=2t^2+1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^3=t^2+3t-10 \\ y=6t+2t^2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y^3=t^3+3t^2+3t+1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+2=(t^2-t)^2 \\ y^2-2y+1=16(t^4-2t^3+t^2) \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=t^2-t \\ y=\dfrac{t-1}{t} \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t+2} \\ y=\dfrac{t}{2} \end{cases}$

14. $\begin{cases} x=2t-\dfrac{1}{t} \\ y=\dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{t} \end{cases}$

15. $\begin{cases} x=\dfrac{-1}{t^2+4} \\ y=\dfrac{t}{t^2+4} \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=\dfrac{4t}{t^2-1} \\ y=\dfrac{4t^2}{t^2-1} \end{cases}$

17. $\begin{cases} x=\sqrt{t+1} \\ y=\sqrt{15-t} \end{cases}$

18. $\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{t+2}{t-1}} \\ y=t-2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{t-2}{t+1}} \\ y=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-2}} \end{cases}$

20. $\begin{cases} x=\dfrac{2t^2-1}{t^2} \\ y=\sqrt{\dfrac{t-2}{3}} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x=\dfrac{t-1}{t^2-1} \\ y=\dfrac{t^2+3t+2}{t^2-4} \end{cases}$

22. $\begin{cases} x=\dfrac{t^3+1}{t+1} \\ y=(t^2-t)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x=\dfrac{2t^2-7t-15}{t^2-3t-10} \\ y=\dfrac{t^2-4}{2t^2-t-6} \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistemas de ecuaciones paramétricas que contienen funciones trigonométricas

Si el parámetro es el argumento de funciones trigonométricas, la ecuación rectangular se obtiene empleando identidades trigonométricas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en forma rectangular la curva cuyas ecuaciones son $\begin{cases} x = 3\tan\alpha - 3 \\ y = 2\sec\alpha + 2 \end{cases}$

Solución

Se despejan de ambas ecuaciones $tan\ \alpha$ y $sec\ \alpha$ respectivamente, entonces,

$$x = 3\tan\alpha - 3 \qquad y = 2\sec\alpha + 2$$

$$x + 3 = 3\tan\alpha \qquad y - 2 = 2\sec\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{x+3}{3} \qquad \sec\alpha = \frac{y-2}{2}$$

Se sustituyen los despejes en la identidad,

$$\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1 \rightarrow \left[\frac{y-2}{2}\right]^2 - \left[\frac{x+3}{3}\right]^2 = 1$$

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

Por consiguiente, la ecuación es una hipérbola.

2 Transforma las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2 + 3\tan\theta \\ y = 1 + 4\sec\theta \end{cases}$ a una ecuación rectangular.

Solución

Las ecuaciones paramétricas contienen funciones trigonométricas, entonces se utiliza esta identidad trigonométrica:

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

Al despejar en cada ecuación la función trigonométrica y sustituirla en la identidad se obtiene:

$$x = 2 + 3\tan\theta \qquad y = 1 + 4\sec\theta$$

$$x - 2 = 3\tan\theta \qquad y - 1 = 4\sec\theta$$

$$\frac{x-2}{3} = \tan\theta \qquad \frac{y-1}{4} = \sec\theta$$

Los despejes se sustituyen en la identidad, por tanto, la ecuación en su forma rectangular es:

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

3 ¿Cuál es la ecuación en coordenadas rectangulares de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 3\cos\alpha - sen\,\alpha \\ y = \cos\alpha + 5\,sen\,\alpha \end{cases} ?$$

Solución

Se resuelve un sistema de ecuaciones para hallar el valor de $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$ en términos de x y y.

1. Se elimina la función coseno y se obtiene el valor de $sen\,\alpha$,

$$\begin{array}{c} x = 3\cos\alpha - sen\,\alpha \\ -3(y) = -3(\cos\alpha + 5\,sen\,\alpha) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x = 3\cos\alpha - sen\,\alpha \\ -3y = -3\cos\alpha - 15\,sen\,\alpha \end{array}$$

Y resulta,

$$x - 3y = -16\,sen\,\alpha \rightarrow sen\,\alpha = \frac{x-3y}{-16}$$

2. Se elimina la función seno,

$$\begin{array}{c} 5(x) = 5(3\cos\alpha - sen\,\alpha) \\ y = \cos\alpha + 5\,sen\,\alpha \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 5x = 15\cos\alpha - 5\,sen\,\alpha \\ y = \cos\alpha + 5\,sen\,\alpha \end{array}$$

Y resulta,

$$5x + y = 16\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{5x+y}{16}$$

Se sustituyen los despejes en la identidad $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$,

$$\left(\frac{x-3y}{-16}\right)^2 + \left(\frac{5x+y}{16}\right)^2 = 1$$

Al resolver y simplificar,

$$\frac{x^2-6xy+9y^2}{256} + \frac{25x^2+10xy+y^2}{256} = 1$$

$$26x^2 + 4xy + 10y^2 = 256$$

Se concluye que la ecuación es:

$$13x^2 + 2xy + 5y^2 - 128 = 0$$

EJERCICIO 65

Transforma las siguientes ecuaciones paramétricas a coordenadas rectangulares.

1. $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=7\,sen\,\theta \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=2\,sen\,\theta \\ y=4\cos\theta \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\,sen\,\theta \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=a\cot\theta \\ y=b\csc\theta \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=4\tan\theta \\ y=32\cot\theta \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=\cot\theta \\ y=\csc\theta \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=\tan^2\theta \\ y=4\sec^2\theta \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=\cos 2\theta \\ y=sen\,\theta \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=2\,sen\,\theta \\ y=2\,sen\,2\theta \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=sen\,\theta \\ y=sen\,3\theta \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=1+2\,sen\,\theta \\ y=2+3\cos\theta \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=3-\cos\theta \\ y=3-sen\,\theta \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=2-3\,sen\,\theta \\ y=-1-2\cos\theta \end{cases}$

14. $\begin{cases} x=4-\cos\theta \\ y=3-2\,sen\,\theta \end{cases}$

15. $\begin{cases} x=\tan 2\theta \\ y=\tan\theta+1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=2\sec\theta+1 \\ y=2\tan\theta \end{cases}$

17. $\begin{cases} x=2\cos\theta-2\,sen\,\theta \\ y=\cos\theta+2\,sen\,\theta \end{cases}$

18. $\begin{cases} x=3\cos\theta-5\,sen\,\theta \\ y=\cos\theta-sen\,\theta \end{cases}$

19. $\begin{cases} x=2\csc\theta-3 \\ y\,sen\,\theta=2\,sen^3\,\theta+\cos\theta\,sen\,2\theta+2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x=\dfrac{2}{sen\,\theta} \\ y=2+3\cot\theta \end{cases}$

21. $\begin{cases} x=\dfrac{\cos 2\theta}{\sqrt{1-sen^2\,\theta}} \\ y=4\cos\theta \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Anexo A: Relaciones y funciones

Anexo A

Relaciones y funciones

Reseña HISTÓRICA

La aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de un largo proceso, cuya esencia matemática interna consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial.

Para el desarrollo de este proceso se contaba con el álgebra; las técnicas de cálculo; introducción a las matemáticas variables; el método de coordenadas; ideas infinitesimales clásicas, especialmente de Arquímedes; problemas de cuadraturas y la búsqueda de tangentes. Las causas que motivaron este proceso fueron las exigencias de la mecánica newtoniana y la astronomía.

La última etapa del desarrollo del análisis infinitesimal fue el establecimiento de la relación e inversibilidad mutua entre las investigaciones diferenciales, y a partir de aquí la formación del cálculo diferencial.

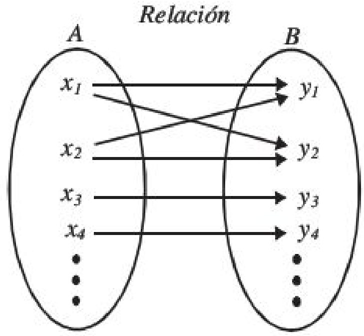
El cálculo diferencial surgió casi simultáneamente en dos formas diferentes: en la forma de teoría de fluxiones de Newton y bajo la forma del cálculo de diferenciales de G. W. Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Relación

Regla de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

Ejemplo



Esta relación se representa con el siguiente conjunto de pares ordenados

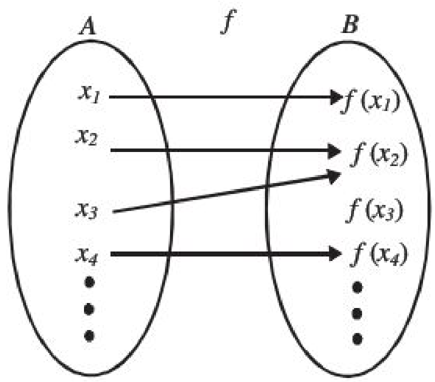
$$R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\ldots\}$$

Función

El concepto de función es uno de los más importantes en el mundo de las matemáticas. Las funciones no sólo representan fórmulas, o lugares geométricos, también se utilizan como modelos matemáticos que resuelven problemas de la vida real.

A continuación se dan algunas definiciones de función:

- Es una regla de correspondencia que asocia a los elementos de dos conjuntos. La cual a cada elemento del primer conjunto (dominio) le asocia un solo elemento del segundo conjunto (contradominio).
- Sean A y B dos conjuntos y f una regla que a cada $x \in A$ asigna un único elemento $f(x)$ del conjunto B, se dice que f es una función que va del conjunto A al B, y se representa de la siguiente forma: $f: A \rightarrow B$, donde al conjunto A se le llama dominio y al B contradominio, que también se representa por medio de un diagrama de flechas:

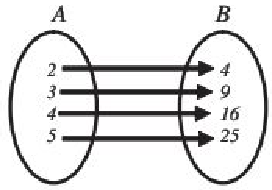


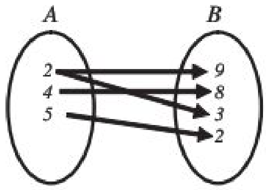
- Una función es una colección de pares ordenados con la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen a una colección, entonces se cumple que $b = c$; es decir, en una función no puede haber dos pares con el mismo primer elemento.

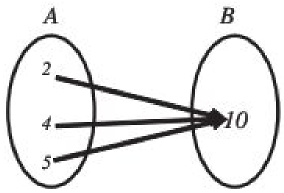
EJEMPLOS

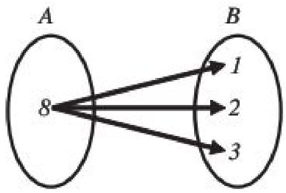
Ejemplos

1 Determina si los siguientes diagramas representan una función o una relación:

1.


2.


3.


4.


Solución

El primer y el tercer diagramas corresponden a una función ya que a cada elemento del conjunto A se le asigna un solo elemento del conjunto B.

En el segundo diagrama al menos a un elemento del conjunto A se le asignan dos elementos del conjunto B, mientras que en el cuarto diagrama el elemento 8 se asocia con tres elementos del conjunto B, por tanto, se concluye que estos conjuntos representan una relación.

2 Determina si los siguientes conjuntos de pares ordenados corresponden a una función o a una relación:

$$A = \{(-2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$$

$$B = \{(3, 2), (3, 6), (5, 7), (5, 8)\}$$

$$C = \{(2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$$

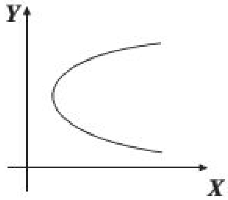
$$M = \{(2, 4), (6, 2), (7, 3), (4, 12), (2, 6)\}$$

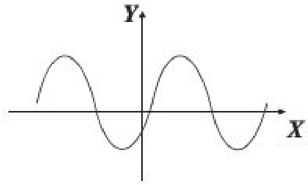
Solución

Los conjuntos A y C son funciones ya que el primer elemento de cada par ordenado no se repite. En el conjunto B el 3 y el 5 aparecen dos veces como primer elemento del par ordenado mientras que en el conjunto M al 2 se le están asignando el 4 y el 6 como segundo elemento, por tanto, B y M son relaciones.

Las funciones y relaciones pueden tener una representación gráfica en el plano cartesiano. Para distinguir si se trata de una función o una relación basta con trazar una recta paralela al eje "Y" sobre la gráfica; si ésta interseca en dos o más puntos es una relación, si sólo interseca un punto será una función.

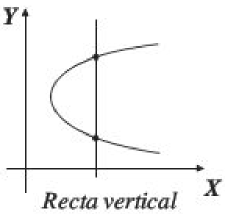
3 Determina si las siguientes gráficas representan una relación o una función.

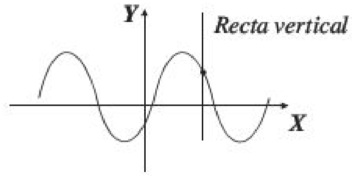
1.


2.


Solución

Se traza una recta vertical en ambas gráficas y se observa que en la primera interseca en dos puntos a la gráfica, por tanto, representa una relación y en la segunda, la recta vertical interseca en un punto a la gráfica, por consiguiente representa una función.

1.


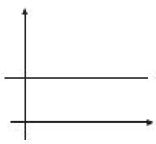
2.


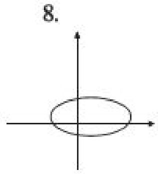
EJERCICIO 1

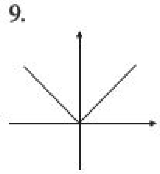
Identifica si los siguientes conjuntos representan funciones o relaciones.

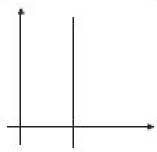
1. $\{(0, 3), (2, 3), (-1, 3)\ldots\}$
2. $\{(-3, 5), (3, 5), (-3, 2)\ldots\}$
3. $\{(4, 7), (-4, \sqrt{3}), (\sqrt{2}, 5)\ldots\}$
4. $\{(2, 5), (\sqrt{4}, 2), (3, -3)\ldots\}$
5. $\{(a, 2a), (-2a, 3a), (4a, a)\ldots\}$
6. $\left\{\left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{6}{4}, -1\right), \left(1, \frac{5}{2}\right)\ldots\right\}$

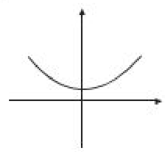
Identifica qué representa cada gráfica (función o relación):

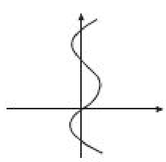
7.


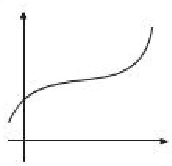
8.


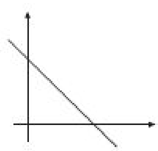
9.


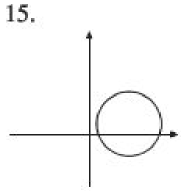
10.


11.


12.


13.


14.


15.


Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Notación

Una función se denota o escribe como $y = f(x)$, donde:

x: variable independiente.

y: variable dependiente.

f: función, regla de asignación o correspondencia.

Clasificación

Las funciones se clasifican en: *algebraicas* y *trascendentes*

$$\text{Función}\begin{cases}\text{Algebraicas}\\ \text{Trascendentes}\begin{cases}\text{Trigonométricas}\\ \text{Inversas trigonométricas}\\ \text{Exponenciales}\\ \text{Logarítmicas}\end{cases}\end{cases}$$

Ejemplos

Algebraicas

$f(x) = x^3 - 4x$ $\qquad f(x) = \sqrt{x-4}$ $\qquad y = |x|$

$y = 3x^2 - 5x - 6$ $\qquad g(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ $\qquad g(x) = |x-2| - 1$

Trascendentes

$f(x) = \cos x$ $\qquad f(x) = e^{4x}$ $\qquad s(t) = \ln(2t-4)$

$f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$ $\qquad y = e^{\sqrt{x}} + 2$ $\qquad g(x) = \log(x+1)$

Las funciones algebraicas y trascendentes pueden ser:

- **Explícitas**
  Es cuando la función está en términos de una variable, por ejemplo:

$y = x^2$ $\qquad f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$ $\qquad y = \operatorname{sen} 3x$ $\qquad s(t) = e^t$ $\qquad y = \log x$

$y = x^3 - 1$ $\qquad g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ $\qquad f(x) = \cos\dfrac{1}{2}x$ $\qquad g(x) = 2^{x+3}$ $\qquad f(x) = \ln(3x)$

- **Implícitas**
  Es cuando ambas variables forman parte de la ecuación, por ejemplo:

$$x^2 - 8y + 16 = 0 \qquad x^3 + y^2 - 3x = 0 \qquad \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \qquad e^y = x + 3$$

Las funciones que se estudiarán en este libro siempre tomarán valores de números reales tanto para la variable independiente como para la dependiente.

Valor de una función

El valor real $f(x)$ de una función es aquel que toma y cuando se asigna a x un determinado valor real.

EJEMPLOS

1 Obtén $f(-3)$ para $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$

Solución

Para obtener $f(-3)$ se sustituye $x = -3$ en la función y se realizan las operaciones indicadas,

$$f(-3) = 3(-3)^2 - 5(-3) - 2 = 27 + 15 - 2 = 40$$

Por tanto $f(-3) = 40$, es decir $y = 40$ cuando $x = -3$ o lo que es lo mismo, la curva pasa por el punto $(-3, 40)$ en el plano cartesiano.

2 Si $f(x) = \dfrac{3x-1}{5-x}$, encuentra $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

Solución

Se sustituye $x = \dfrac{3}{4}$ en la función y se realizan las operaciones:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\left(\frac{3}{4}\right)-1}{5-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{9}{4}-1}{5-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{17}{4}} = \frac{5}{17}\text{, por tanto, cuando } x = \frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{17}$$

3 Si $s(t) = \sqrt{t-5}$, determina $s(4)$, $s(a+5)$

Solución

$s(4) = \sqrt{4-5} = \sqrt{-1}$, la función no está definida para $t = 4$, $\sqrt{-1}$ no tiene solución real

$$s(a+5) = \sqrt{a+5-5} = \sqrt{a}$$

4 Si $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, determina $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Solución

Se sustituye $x = \dfrac{\pi}{3}$, en $f(x)$ y se utiliza la identidad $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

5 Determina $\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b}$ si $f(x) = \sqrt{x}$

Solución

Se obtiene que $\qquad f(a+b) = \sqrt{a+b}$ y $f(a) = \sqrt{a}$

Se sustituyen los valores obtenidos:

$$\frac{f(a+b)-f(a)}{b} = \frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}$$

Un resultado equivalente se obtiene al racionalizar el numerador:

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}\cdot\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}=\frac{\left(\sqrt{a+b}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{b\cdot\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{b}{b\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$$

Finalmente, el resultado de $\frac{f(a+b)-f(a)}{b}=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}=\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$

6 Si $y=\frac{x}{x+2}$, encuentra el valor de y cuando $x=-2$

Solución

Al evaluar la función en $x=-2$, se obtiene:

$$y=\frac{-2}{-2+2}=-\frac{2}{0}$$

La función no está definida para $x=-2$, ya que la división entre cero no está determinada.

7 Si $f(x)=x^2-1$, demuestra que $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{f(x)}{x^2}$

Demostración

Se sustituye $\frac{1}{x}$ en la función:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-1=\frac{1}{x^2}-1=\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{-\left(-1+x^2\right)}{x^2}=-\frac{x^2-1}{x^2}$$

Pero $x^2-1=f(x)$

Por tanto, $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{f(x)}{x^2}$

EJERCICIO 2

Evalúa las siguientes funciones:

1. Si $f(x)=2x^2-3$, obtén $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(3)$, $f(0)$
2. Si $f(x)=x^2-5x+6$, determina $f(a)$, $f(a+b)$
3. Si $f(x)=3x^2+4x-2$, determina $f(x+h)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
4. Si $f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$, determina $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(x+h)-f(x)$
5. Si $f(x)=\sqrt{x^2-16}$, determina $f(5)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(3)$
6. Si $f(x)=\sqrt{x^2-3}$, determina $f(x+h)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

7. Si $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, determina $\dfrac{f(x+b)-f(x)}{b}$

8. Si $f(x) = \sqrt{1-x}$, determina $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

9. Si $f(x) = \dfrac{|x-5|}{x+2}$, determina $f(1)$, $f(0)$, $f(x+5)$

10. Si $f(x) = -3x^2 + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x}$, determina $f(-1)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

11. Si $f(x) = x^2 - 3x$, demuestra que $f(3x) - f(x-1) = 4(x-1)(2x+1)$

12. Si $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, demuestra que $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$

13. Si $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, demuestra que $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

14. Si $f(x) = \tan x$, demuestra que $f(x) = f(x + 3\pi)$

15. Si $f(x) = \cos 2x$, demuestra que $f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -f(x)$

16. Demuestra que para $f(x) = \sqrt{x-2}$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1}{f(x+h)+f(x)}$

17. Si $h(x) = \sqrt{x^2-4}$, $r(x) = \sqrt{x^2+4}$, demuestra que $h\left(n+\dfrac{1}{n}\right) + r\left(n-\dfrac{1}{n}\right) = 2n$

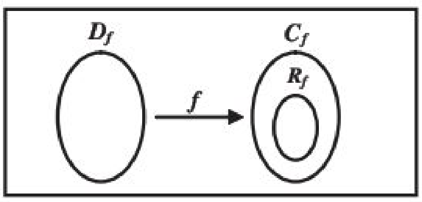
18. Si $f(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$, demuestra que $\dfrac{f(m)-f(n)}{1+[f(m)][f(n)]} = \dfrac{m-n}{1+mn}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dominio, contradominio y rango de una función

Dada una función $f: A \rightarrow B$, se dice que el conjunto A es el **dominio** (D_f) y B el **contradominio** (C_f) o codominio de f. En términos del plano cartesiano, el dominio corresponde al conjunto formado por los valores posibles para X mientras que el contradominio corresponde a los valores posibles para Y.

- **Rango (R_f)**
  Valores del contradominio para los cuales $y = f(x)$, siendo $f(x)$ la imagen de x.



EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = 3x^2 - 5x - 6$?

Solución

La función es polinomial, x puede tomar cualquier valor, por tanto, el dominio son todos los números reales, es decir $x \in R$ o dicho de otra forma $x \in (-\infty, \infty)$.

2 Determina el dominio de la función $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$

Solución

La función es racional y el denominador debe ser distinto de cero, ya que la división entre cero no está definida, por tanto, se busca el valor para el cual $x + 5 = 0$ obteniendo $x = -5$, entonces el dominio es: $D_f = \{x \in R \mid x \neq -5\}$ o bien $x \in (-\infty, -5) \cup (-5, \infty)$.

3 ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x - 6}$?

Solución

Al factorizar el denominador se obtiene: $f(x) = \frac{x}{(x-6)(x+1)}$, el denominador se hace cero para

$$x = 6 \quad \text{o} \quad x = -1, D_f = \{x \in R \mid x \neq -1, x \neq 6\} \quad \text{o bien} \quad \{x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 6) \cup (6, \infty)$$

4 Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-5}$

Solución

El radicando debe ser mayor o igual a cero (ya que no hay valor real para raíces cuadradas de números negativos) es decir $x - 5 \geq 0$, de donde $x \geq 5$, por tanto $D_f = \{x \in R \mid x \geq 5\}$ o bien $x \in [5, \infty)$

5 Encuentra el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

Solución

Se plantea la desigualdad $x^2 - 16 \geq 0$, al resolverla se obtiene que el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \leq -4 \text{ o } x \geq 4\}$ o bien $x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

6 Determina el dominio de la función $f(x) = \log(2x - 3)$

Solución

Para determinar el dominio de esta función se debe tomar en cuenta que $\log_b N = a$, para $N > 0$, por tanto, se plantea la desigualdad y se resuelve:

$$2x - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad 2x > 3 \quad \rightarrow \quad x > \frac{3}{2}$$

Entonces, el dominio es el conjunto $D_f = \left\{x \in R \mid x > \frac{3}{2}\right\}$, o bien, $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

7 Encuentra el rango de la función $f(x) = \dfrac{6x+1}{1+3x}$

Solución

Se despeja x:

$$y = \frac{6x+1}{1+3x} \rightarrow y(1+3x) = 6x+1 \rightarrow y + 3xy = 6x + 1$$

$$3xy - 6x = 1 - y \rightarrow 3x(y-2) = 1 - y \rightarrow x = \frac{1-y}{3(y-2)}$$

El denominador se hace cero cuando $y = 2$, por tanto el rango es el conjunto:

$$R_f = \{y \in R \mid y \neq 2\} \text{ o bien, } y \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

8 Determina el rango de la función $y = \sqrt{9-x^2}$

Solución

$y \geq 0$, porque la raíz es positiva o cero, se despeja x:

$$y = \sqrt{9-x^2} \rightarrow y^2 = 9 - x^2 \rightarrow x^2 = 9 - y^2 \rightarrow x = \sqrt{9-y^2}$$

Se plantea la desigualdad $9 - y^2 \geq 0$, al resolverla se obtiene que $y \in [-3, 3]$, pero $y \geq 0$, por tanto, el rango es el conjunto $R_f = \{y \in R \mid 0 \leq y \leq 3\}$, o bien, $y \in [0, 3]$

EJERCICIO 3

Determina el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 - 4$
2. $f(x) = 3x^3 - 2$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$
4. $f(x) = \dfrac{x-4}{5-x}$
5. $f(x) = \dfrac{3}{x^2-16}$
6. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-7x+10}$
8. $f(x) = \dfrac{x-1}{25-x^2}$
9. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
10. $f(x) = \dfrac{x-3}{2x^2+10x}$
11. $f(x) = \dfrac{1}{x^3-x}$
12. $f(x) = \sqrt{x+1}$
13. $f(x) = \sqrt{x-6}$
14. $f(x) = \sqrt{2-x}$
15. $f(x) = \sqrt{12-3x}$
16. $f(x) = \sqrt{x^2-25}$
17. $f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$
18. $f(x) = \sqrt{36-x^2}$

19. $f(x) = \sqrt{9+x^2}$

20. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

21. $f(x) = \sqrt[4]{x-5}$

22. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$

23. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$

24. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+8}}$

25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+4}{x-3}}$

26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{2x-3}}$

27. $f(x) = \log(3x + 6)$

28. $f(x) = \ln(5 - 2x)$

29. $f(x) = \log\left(\dfrac{1}{x}\right)$

30. $f(x) = \log(3 + 2x - x^2)$

Determina el rango de las siguientes funciones:

31. $f(x) = x^2 + 1$

32. $f(x) = x^2 - 4$

33. $f(x) = 9 - x^2$

34. $f(x) = 3x - x^2$

35. $f(x) = \dfrac{10x-1}{3-5x}$

36. $f(x) = \dfrac{2x-3}{4x+1}$

37. $y = \sqrt{x^2+1}$

38. $y = -\sqrt{2-x}$

39. $y = \sqrt{4-x^2}$

40. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

41. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$

42. $y = |x - 4|$

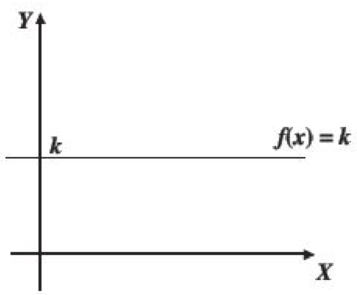
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Algunos tipos de funciones

Función constante

$f(x) = k$ con $k \in R$ representa una recta paralela al eje "X" sobre k.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Rango: $R_f = \{k\}$



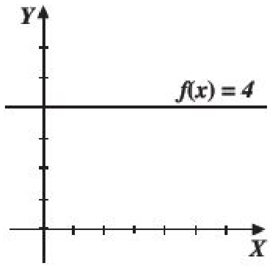
Ejemplo

Obtén la gráfica de $f(x) = 4$

Solución

Se traza una recta paralela al eje X sobre $y = 4$

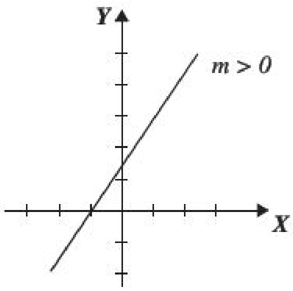
$$D_f = R \qquad R_f = \{4\}$$

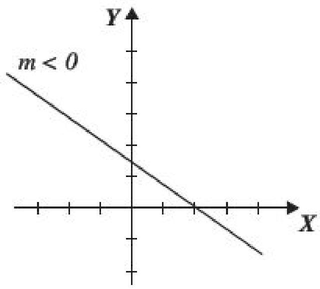


Función lineal

Esta función tiene la forma $f(x) = mx + b$ y representa una recta en el plano cartesiano, en donde m es la pendiente y b la ordenada al origen.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$, Rango: $R_f = R$ o bien $y \in (-\infty, \infty)$





Para graficar una función lineal se lleva a cabo lo siguiente:

I. Se localiza la ordenada al origen, es decir, el punto $(0, b)$.

II. A partir de este punto, se localiza otro, tomando la pendiente como el incremento o decremento vertical sobre el incremento horizontal.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Grafica la función $y = \frac{2}{3}x + 4$

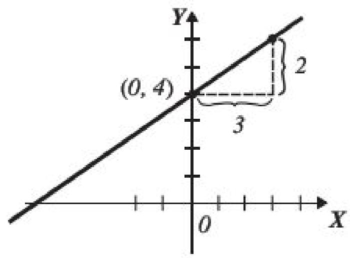
Solución

La pendiente y la ordenada al origen de la función:

$$y = \frac{2}{3}x + 4$$

$$m = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \text{ incremento vertical}}{3 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 4, \text{ representa el punto } (0, 4)$$

Gráfica de la función



2 Traza la gráfica de la función $y = -\frac{4}{5}x + 2$

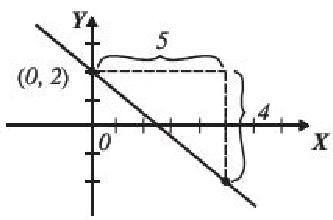
Solución

La pendiente y la ordenada al origen de la función:

$$y = -\frac{4}{5}x + 2$$

$$m = -\frac{4}{5} = \frac{-4}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{-4 \text{ decremento vertical}}{5 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 2, \text{ representa el punto } (0, 2)$$

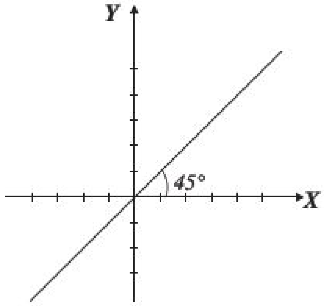
Gráfica de la función



Función identidad

Es la función lineal $f(x) = mx + b$, con $m = 1$ y $b = 0$, es decir: $f(x) = x$

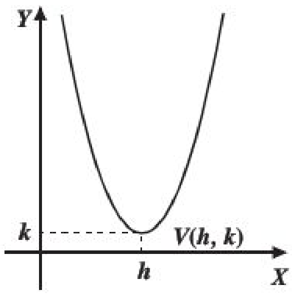
Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Rango: $R_f = R$ o bien $y \in (-\infty, \infty)$

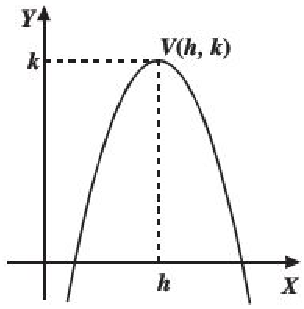


Función cuadrática

Es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y representa una parábola cóncava hacia arriba o hacia abajo

Si $a > 0$ Si $a < 0$





$V(h, k)$: son las coordenadas del vértice.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$

Rango: $y \in \left[\dfrac{4ac - b^2}{4a}, \infty\right)$ Rango: $y \in \left(-\infty, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right]$

Para obtener las coordenadas (h, k) del vértice se aplican las siguientes fórmulas:

$$h = -\frac{b}{2a},\ k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Ejemplo

Obtén el dominio, rango y la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Solución

Se identifican los valores de los coeficientes de cada término: $a = 1$, $b = -4$ y $c = 5$

$a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba

Se calculan los valores de h y k:

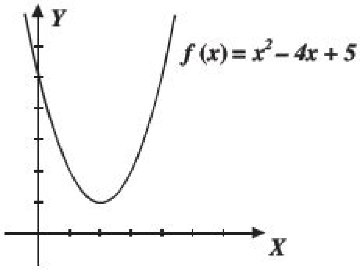
$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2;\quad k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(5) - (-4)^2}{4(1)} = 1$$

El vértice es el punto $V(2, 1)$ y el dominio y rango son:

$$D_f = R \text{ o bien } x \in (-\infty, \infty) \qquad y \in \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, \infty\right) = [1, \infty)$$

Para graficar, se tabula y se asignan valores de x menores y mayores que 2

x	0	1	2	3	4
y	5	2	1	2	5



La función $f(x) = x^n$

Con "n" entero positivo tiene como: Dominio $x \in (-\infty, \infty)$ es decir el conjunto de los reales R y Rango:

$$\begin{cases} y \in [0, \infty) & \text{si } n \text{ es par} \\ y \in (-\infty, \infty) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

EJEMPLOS

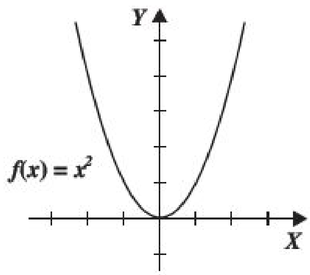
Ejemplos

1 Obtén la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^4$

Solución

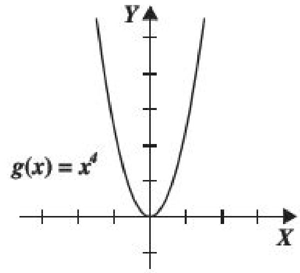
Se tabula con valores arbitrarios de x:

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = x^2$	4	1	0	1	4



Al graficar se obtiene:

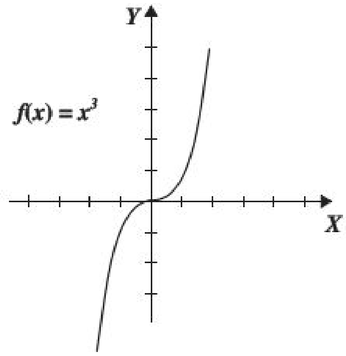
x	$-\frac{3}{2}$	−1	0	1	$\frac{3}{2}$
$g(x) = x^4$	$\frac{81}{16}$	1	0	1	$\frac{81}{16}$



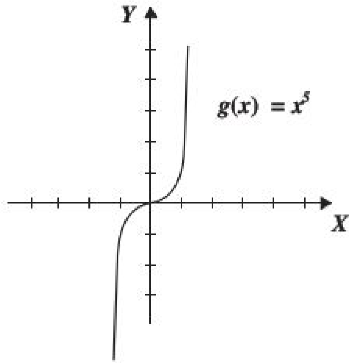
2 Obtén la gráfica de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^5$

Solución

Se tabula para valores arbitrarios de x:



x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = x^3$	−8	−1	0	1	8



x	$-\frac{3}{2}$	−1	0	1	$\frac{3}{2}$
$g(x) = x^5$	$-\frac{243}{32}$	−1	0	1	$\frac{243}{32}$

Función racional

Se expresa como el cociente de dos funciones polinomiales.

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con } Q(x) \neq 0$$

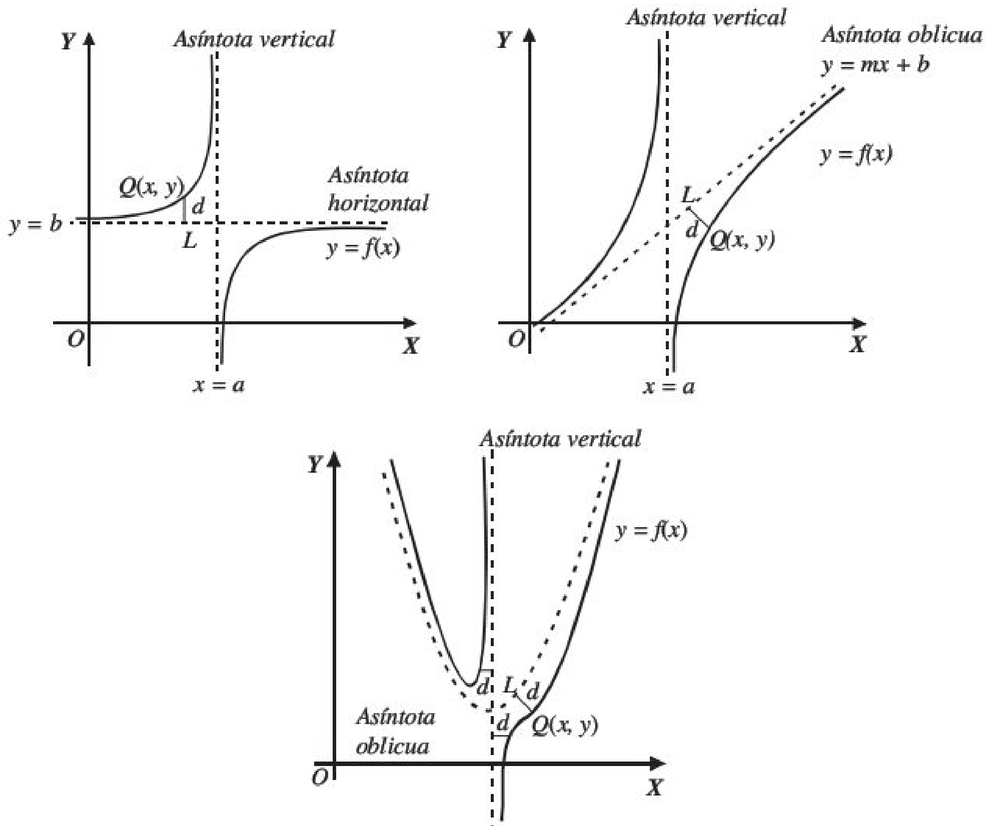
Definición de asíntota

Si la distancia d entre una recta o curva L y el punto móvil $Q(x, y)$ de la función tiende a cero, entonces la recta o curva recibe el nombre de asíntota.

Existen tres tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

Cuando la gráfica de la función $f(x)$ se acerca a la curva o recta $L(x)$ y la distancia d entre un punto de $f(x)$ y la curva o recta $L(x)$ tiende a cero (es decir la gráfica no toca a $L(x)$), entonces $L(x)$ recibe el nombre de asíntota.

Ejemplos



En este capítulo sólo se estudiarán las asíntotas horizontales y verticales.

- **Asíntotas verticales**

  Una función de la forma $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, tiene asíntotas verticales si existen valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tal que se cumple lo siguiente:

$$Q(x_1) = Q(x_2) = \ldots = Q(x_n) = 0$$

- **Asíntotas horizontales**

  Se despeja la variable independiente x, si se obtiene una función de la forma $G(y) = \dfrac{R(y)}{S(y)}$, tal que para los valores de $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ se cumpla que:

$$S(y_1) = S(y_2) = \ldots = S(y_n) = 0$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución

El dominio de la función está dado por el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$, teniendo una asíntota en $x = 0$, es decir el eje vertical del plano.

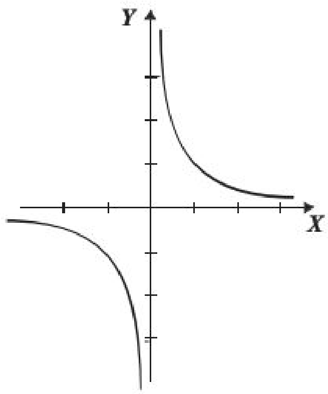
Al despejar x se obtiene $x = \dfrac{1}{y}$

De la cual se deduce que el rango está dado por $R_f = \{y \in R \mid y \neq 0\}$ y su asíntota horizontal es $y = 0$, es decir el eje horizontal del plano.

Si tabulas para valores de x diferentes de cero obtienes:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
f(x)	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	no existe	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Se grafican las asíntotas y se localizan los puntos en el plano, se unen y se observa cómo la curva se acerca a las asíntotas sin tocarlas, haciendo la distancia entre la curva y las rectas cada vez más pequeña.



2 Determina el dominio, el rango y la gráfica de la función $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$

Solución

El denominador debe ser diferente de cero,

$$x + 2 \neq 0, \text{ entonces } x \neq -2$$

Por tanto, el dominio está dado por:

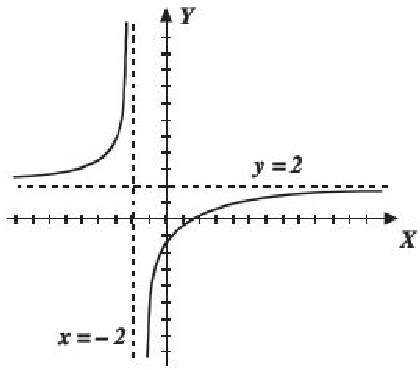
$$D_f = \{x \in R \mid x \neq -2\} \text{ o } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) \text{ y la asíntota vertical es } x = -2$$

Al despejar x se obtiene el rango y la asíntota horizontal:

$$y = \frac{2x-3}{x+2}, \text{ entonces } x = \frac{2y+3}{2-y} \text{ donde } 2 - y \neq 0 \rightarrow y \neq 2$$

Por tanto, el $R_f = \{y \in R \mid y \neq 2\}$ y la asíntota horizontal es $y = 2$

Gráfica: Se trazan las asíntotas y mediante una tabulación se obtienen los pares ordenados, los cuales forman la siguiente curva:



Función raíz cuadrada

La función está dada por: $f(x) = \sqrt{g(x)}$, con $g(x) \geq 0$

EJEMPLOS

1 Obtén la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$

Solución

Para determinar el dominio se resuelve la desigualdad: $x + 2 \geq 0$ donde $x \geq -2$, entonces el dominio es el conjunto: $\{x \in R \mid x \geq -2\}$ o $x \in [-2, \infty)$

El rango se obtiene despejando x

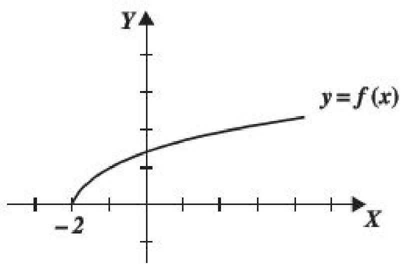
$$y = \sqrt{x+2} \quad \rightarrow \quad y^2 = x + 2 \quad \rightarrow \quad x = y^2 - 2$$

La función es una raíz positiva, o cero, es decir $y \in [0, \infty)$ y el despeje da como resultado una expresión polinomial donde $y \in R$, por tanto el rango está definido para $y \in [0, \infty)$

Al tabular dando algunos valores en el intervalo $x \in [-2, \infty)$ se obtiene:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

La gráfica que se obtiene es:



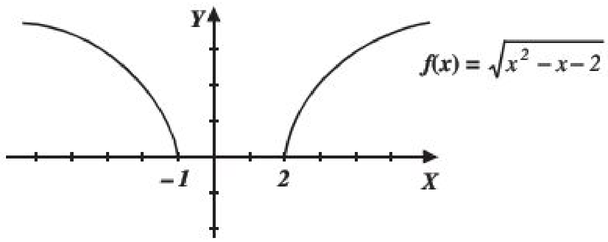
2 Determina la gráfica de la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

Solución

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $x^2 - x - 2 \geq 0$, obteniendo que

$$x \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$$

Al despejar x se obtiene, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4y^2 + 9}}{2}$ donde $y \in (-\infty, \infty)$, $f(x)$ es una raíz positiva, o cero, por tanto el rango es: $y \in (-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$



3 Grafica la función $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Solución

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$, obteniendo que:

$$x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$$

Al despejar x para obtener el rango:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \;\rightarrow\; y^2 = \frac{x-1}{x+1} \;\rightarrow\; y^2(x+1) = x - 1 \;\rightarrow\; y^2x + y^2 = x - 1$$

$$y^2x - x = -1 - y^2$$

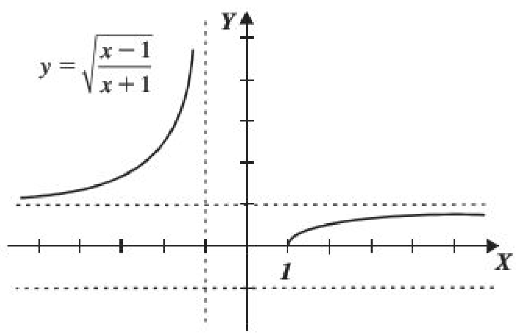
$$x(y^2 - 1) = -1 - y^2$$

$$x = \frac{-1 - y^2}{y^2 - 1}, \text{ donde } y \neq \pm 1.$$

La función es una raíz positiva, por tanto, $y \in [0, \infty)$, entonces el rango corresponde a:

$$y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = -1$ y dos horizontales en $y = -1$, $y = 1$, al graficar se obtiene:



Nota: Observe que gráficamente $y = -1$ no es asíntota.

Función valor absoluto

La función es $f(x) = |g(x)|$, donde $x \in D_g$ y $f(x) \geq 0$.

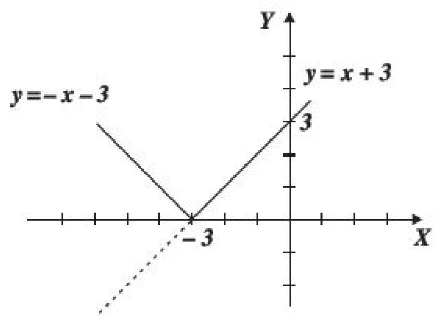
EJEMPLOS

1 Obtén la gráfica de $f(x) = |x + 3|$.

Solución

Se parte de la definición de valor absoluto, en la que $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$, se obtienen las siguientes igualdades: $y = x + 3$, $y = -x - 3$, las cuales son dos rectas donde el dominio son los números reales y el rango está dado por $y \in [0, \infty)$

La gráfica que se obtiene es:



2 Obtén la gráfica de $f(x) = \left|\dfrac{2}{x}\right|$.

Solución

$\dfrac{2}{x}$, está definido para $x \neq 0$, por tanto el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$ o bien

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

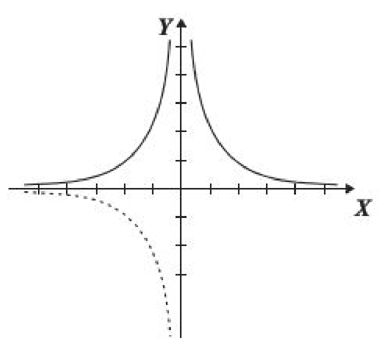
Para el rango se despeja x de las igualdades que se obtienen al aplicar la definición de valor absoluto.

$$y = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2}{y}, \text{ donde } y \neq 0, \qquad y = -\frac{2}{x} \rightarrow x = -\frac{2}{y}, \text{ donde } y \neq 0$$

También se toma el hecho de que $f(x) > 0$, ya que $\left|\dfrac{2}{x}\right| > 0$, por tanto el rango es el conjunto $R_f = \{y \in R \mid y > 0\}$ o bien $y \in (0, \infty)$.

La asíntota horizontal es $y = 0$, mientras que la vertical es la recta $x = 0$.

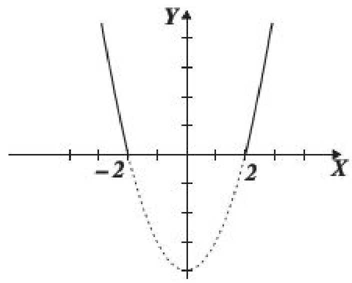
Luego la gráfica que se obtiene es:



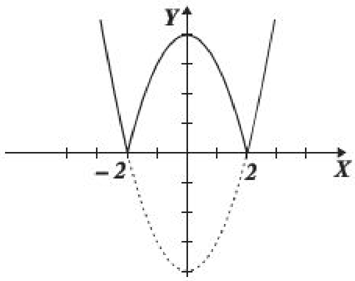
3 Obtén la gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$.

Solución

$y = x^2 - 4$ es una función cuadrática con dominio $x \in R$ y rango $y \in [-4, \infty)$, teniendo como gráfica:



$f(x) \geq 0$, luego el rango de la función es: $y \in [0, \infty)$, por tanto, al hacer positiva la parte donde $x^2 - 4$ es negativa se obtiene la siguiente gráfica:



4 Obtén el dominio, el rango y la gráfica de $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|$

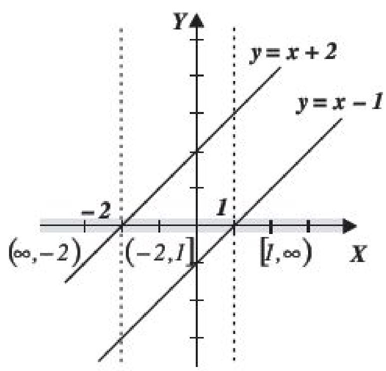
Solución

Dominio: Para $y = \dfrac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$, por tanto el dominio de la función está dado por:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$$

Rango: $f(x) > 0$, por tanto, el rango está dado por $y \in [0, \infty]$, pero al despejar "x" se obtiene $x = \dfrac{1-2y}{y-1}$, entonces $y \neq 1$, por tanto $y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$

Gráfica 1

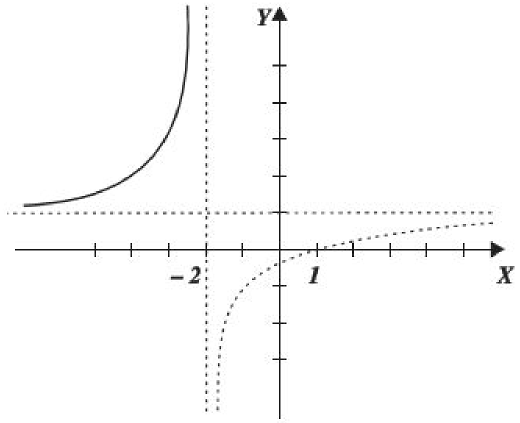


En la gráfica 1 se muestran los intervalos que se analizarán para construir la gráfica que se propone.

i) En el intervalo $(-\infty, -2)$ las rectas $y = x - 1$, $y = x + 2$, toman valores negativos, es decir

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{-(x-1)}{-(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

La porción de gráfica en el intervalo $(-\infty, -2)$ es:



ii) En el intervalo $(-2, 1]$

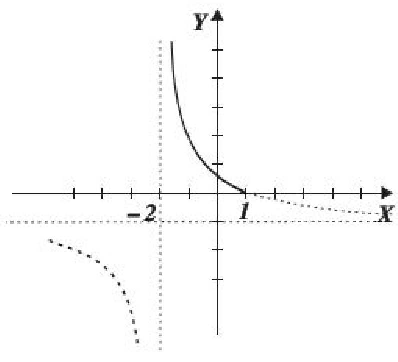
$y = x - 1$ toma valores negativos

$y = x + 2$ los toma positivos

es decir:

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{-(x-1)}{+(x+2)} = \frac{1-x}{x+2}$$

La porción de gráfica es:



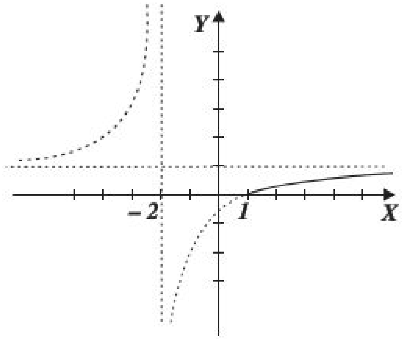
iii) En el intervalo $[-1, \infty)$

$$y = x - 1, y = x + 2$$

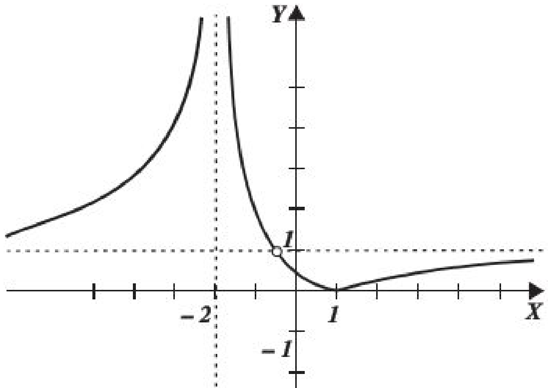
toma valores positivos es decir

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{+(x-1)}{+(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

Tiene la misma gráfica que en el caso i)
La porción de gráfica es:



Finalmente, la gráfica es la unión de las porciones de gráfica en cada intervalo.



Nota: En la gráfica aparece un hueco en $y = 1$ ya que el rango es $y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$

Función mayor entero

Tiene la forma: $f(x) = [x]$ con la propiedad de que $[x] = n$ para todo $n \leq x < n + 1$, con $n \in Z$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la gráfica de: $f(x) = [x]$

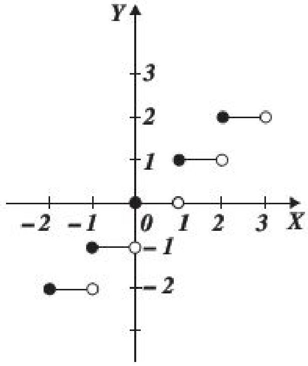
Dominio: $D_f = \{x \mid x \in R\}$

Rango: $R_f = \{y \mid y \in Z\}$

Se toma un subconjunto del dominio por ejemplo $x \in [-2, 3]$ se tiene que:

$$f(x) = [x] = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 3 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

Gráfica:



También recibe el nombre de función escalón.

2 Traza la gráfica de $f(x) = \left[\frac{2}{3}x\right]$

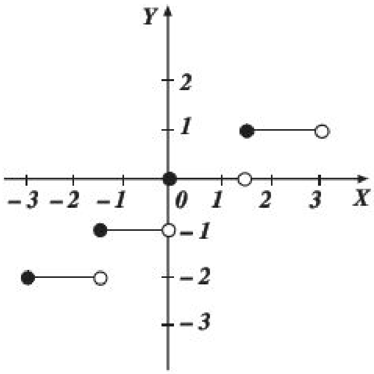
Solución

El dominio y el rango de la función se definen:

$$D_f = \{x \mid x \in R\} \text{ y } R_f = \{y \mid y \in Z\}$$

Se elige el subconjunto del dominio $x \in [-2, 2]$ entonces:

	Longitud del escalón	f(x)
$-2 \leq \frac{2}{3}x < -1$	$-3 \leq x < -\frac{3}{2}$	-2
$-1 \leq \frac{2}{3}x < 0$	$-\frac{3}{2} \leq x < 0$	-1
$0 \leq \frac{2}{3}x < 1$	$0 \leq x < \frac{3}{2}$	0
$1 \leq \frac{2}{3}x < 2$	$\frac{3}{2} \leq x < 3$	1



EJERCICIO 4

Obtén la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 4$
2. $f(x) = -\frac{2}{5}$
3. $f(x) = \pi$
4. $f(x) = 3x + 5$
5. $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$
6. $f(x) = -\frac{3}{4}x + 2$
7. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
8. $f(x) = -2x^2 + 12x - 13$
9. $f(x) = 4 - x^2$
10. $y = \frac{3}{x}$
11. $f(x) = -\frac{1}{x}$
12. $f(x) = \frac{x}{x-2}$
13. $y = \frac{x-2}{x+4}$
14. $f(x) = \frac{x+2}{3-x}$
15. $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$
16. $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}$
17. $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-9}$
18. $f(x) = \sqrt{-x}$
19. $y = \sqrt{x-4}$
20. $y = -\sqrt{9-x}$
21. $y = \sqrt{x^2-36}$
22. $y = \sqrt{16-x^2}$
23. $f(x) = \sqrt{x^2+x-12}$
24. $f(x) = \sqrt{4x^2-9}$
25. $f(x) = \sqrt{\frac{900-100x^2}{9}}$
26. $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$
27. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2}}$
28. $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x-3}}$
29. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$
30. $f(x) = |x|$
31. $f(x) = |x - 2|$
32. $f(x) = |x + 4|$
33. $f(x) = |x^2 - 1|$
34. $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$
35. $f(x) = |2 - x^2|$
36. $f(x) = \left|\frac{1}{x-2}\right|$
37. $f(x) = \left|\frac{2}{3-x}\right|$
38. $f(x) = \left|\frac{x+3}{x-3}\right|$
39. $f(x) = \left|\frac{x-3}{x+1}\right|$
40. $f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right]$
41. $f(x) = \left[\frac{5}{3}x\right]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función característica

Son funciones que están seccionadas por intervalos y en cada intervalo se presenta una función distinta. Para graficarla basta con dibujar la gráfica de cada una de las funciones en el intervalo dado.

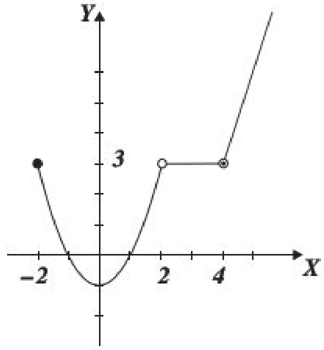
Ejemplo

Obtén la gráfica de:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } -2\leq x<2 \\ 3 & \text{si } 2<x<4 \\ 3x-9 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$$

Solución

Se tabula cada una de las funciones en el intervalo dado, se localizan los puntos y se grafican, observa que hay puntos que no están incluidos, para esos valores se coloca un círculo abierto.



EJERCICIO 5

Obtén la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\leq x<2 \\ -x+4 & \text{si } 2\leq x\leq 4 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\geq 3 \\ 0 & \text{si } x<-3 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si } x<-1 \\ 3 & \text{si } -1<x<2 \\ x+1 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x<2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 5 & \text{si } x<-2 \\ x^2+1 & \text{si } -2<x\leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

7. $f(x)=\dfrac{|x-4|}{x-4}$ Recuerda que $|a|=\begin{cases} a & \text{si } a\geq 0 \\ -a & \text{si } a<0 \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

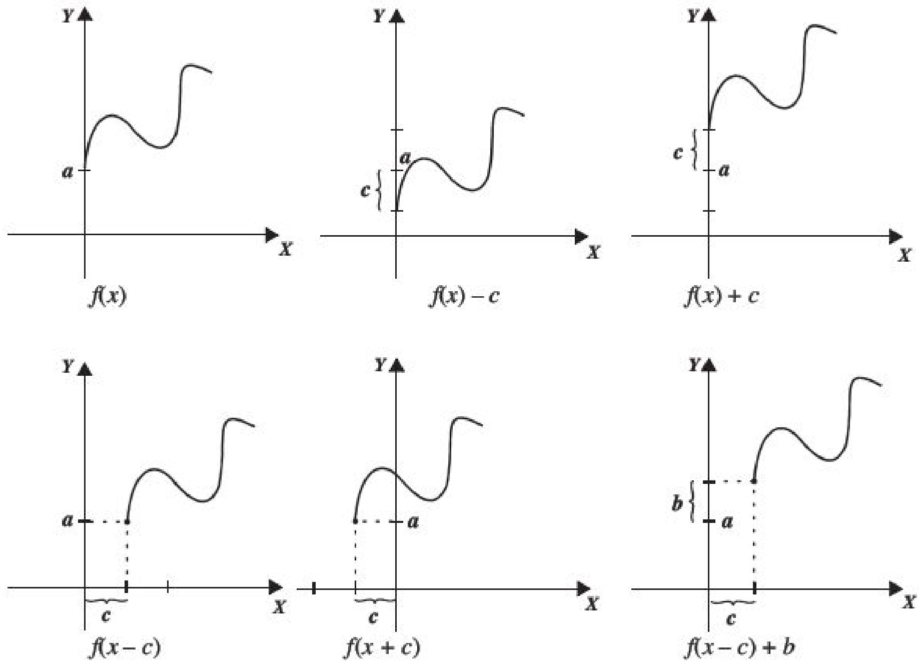
Gráfica de una función a partir de otra conocida

Algunas funciones se grafican a partir de que se conoce la gráfica de otra, a través de desplazamientos, alargamientos o reflexiones de esta última.

Desplazamientos

Sea $f(x)$ una función, $c > 0$ y $b > 0$, si:

a) $y = f(x) + c$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia arriba.
b) $y = f(x) - c$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia abajo.
c) $y = f(x + c)$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda.
d) $y = f(x - c)$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades a la derecha.
e) $y = f(x + c) + b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda y b unidades hacia arriba.
f) $y = f(x + c) - b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la izquierda y b unidades hacia abajo.
g) $y = f(x - c) + b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la derecha y b unidades hacia arriba.
h) $y = f(x - c) - b$ entonces se desplaza la gráfica de $f(x)$, c unidades hacia la derecha y b unidades hacia abajo.



Alargamientos

Sea $f(x)$ una función, $c > 1$, si:

a) $y = cf(x)$, se alarga verticalmente la gráfica de $f(x)$, c veces.

b) $y = \frac{1}{c}f(x)$, se comprime verticalmente la gráfica de $f(x)$, en $\frac{1}{c}$

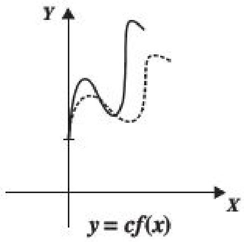
c) $y = f(cx)$, se comprime horizontalmente la gráfica de $f(x)$, c veces.

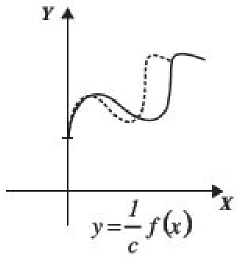
d) $y = f\left(\frac{1}{c}x\right)$, se alarga horizontalmente la gráfica de $f(x)$, en $\frac{1}{c}$

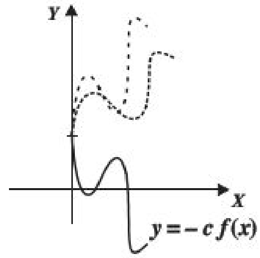
Reflexiones verticales y horizontales

Sea $f(x)$ una función si:

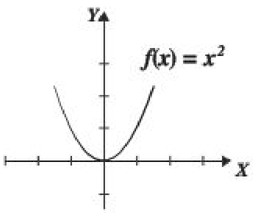
1. $y = -f(x)$, se refleja la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje X.
2. $y = f(-x)$, se refleja la gráfica de $f(x)$ con respecto al eje Y.

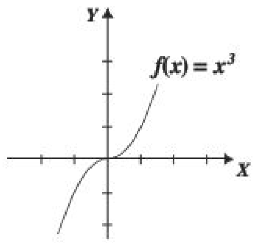


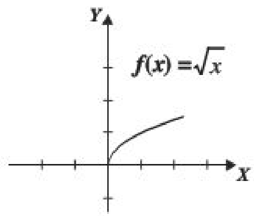


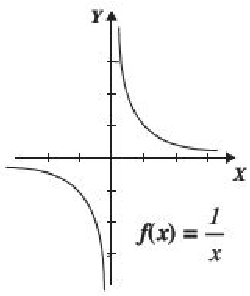


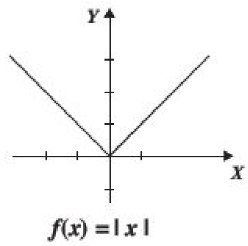
Se tomarán como base las siguientes funciones para graficar otras de la misma forma:











EJEMPLOS

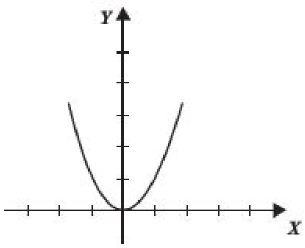
Ejemplos

1 Con base en la función $f(x) = x^2$, obtén la gráfica de: $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$,

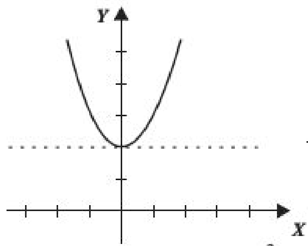
$$y = (x-2)^2,\ y = (x+2)^2,\ y = 2x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = -x^2,\ y = x^2 - 2x - 3$$

Solución

$f(x) = x^2$

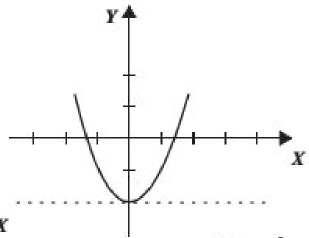


$y = x^2 + 2$



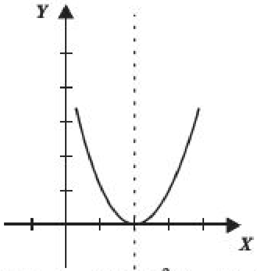
Se desplaza la gráfica $f(x) = x^2$ dos unidades hacia arriba

$y = x^2 - 2$



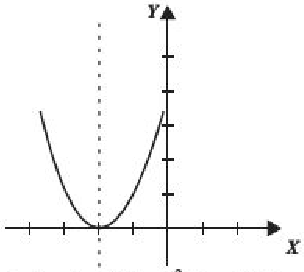
Se desplaza la gráfica $f(x) = x^2$ dos unidades hacia abajo

$y = (x-2)^2$



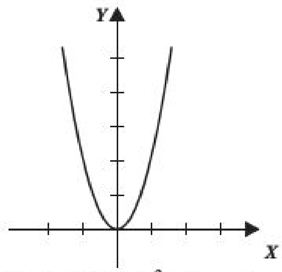
Se desplaza $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la derecha

$y = (x+2)^2$



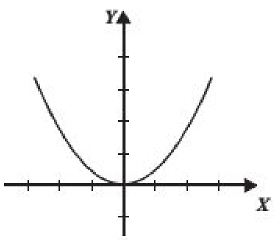
Se desplaza $f(x) = x^2$ dos unidades hacia la izquierda

$y = 2x^2$



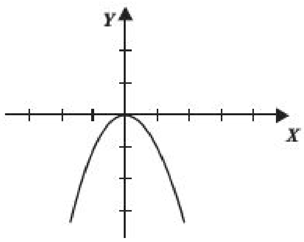
Se alarga $f(x) = x^2$ verticalmente dos veces

$y = \frac{1}{2}x^2$



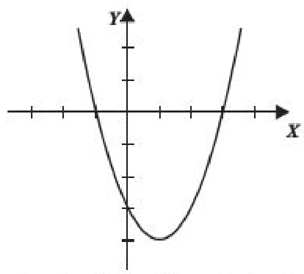
Se comprime $f(x) = x^2$ a la mitad verticalmente

$y = -x^2$



Se refleja $f(x) = x^2$ con respecto al eje X

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

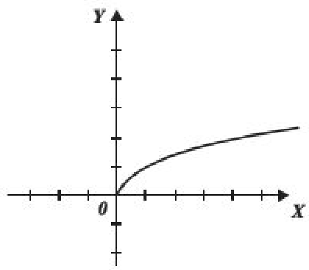


Se desplaza $f(x) = x^2$ hacia la derecha una unidad y baja cuatro unidades

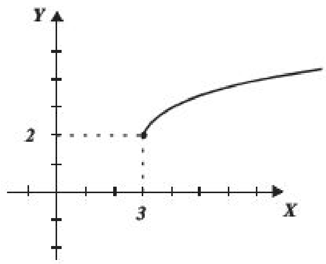
2 Determina la gráfica de $y = \sqrt{x-3} + 2$, a partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

Solución

La gráfica de $y = \sqrt{x}$ es:



Para obtener la gráfica de $y = \sqrt{x-3} + 2$, se toma la gráfica de $y = \sqrt{x}$, ésta se desplaza 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba



EJERCICIO 6

Utiliza desplazamientos, alargamientos o reflexiones para obtener la gráfica de las siguientes funciones:

1. $y = x^2 - 4$
2. $y = (x+3)^2$
3. $y = 1 - x^2$
4. $y = x^2 - 6x + 10$
5. $y = 3x^2 + 12x + 11$
6. $y = -x^3$
7. $y = x^3 + 1$
8. $y = (x-1)^3 + 2$
9. $y = \frac{1}{2}x^3 - 2$
10. $y = \sqrt{x-2} + 2$
11. $y = \sqrt{x-3} - 2$
12. $y = -\sqrt{x+3}$
13. $y = |x-3| - 2$
14. $y = 3 - |x+4|$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones creciente y decreciente

Una función es **creciente** en un intervalo I, si para cualquier $x_1, x_2 \in I$,

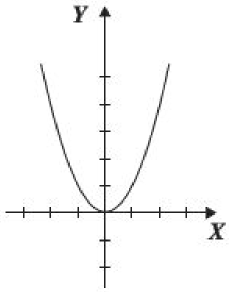
$$f(x_1) < f(x_2) \text{ donde } x_1 < x_2$$

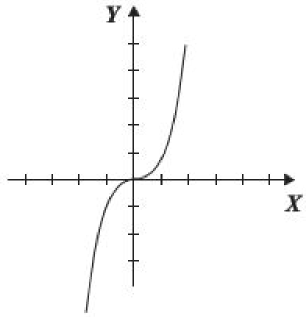
Una función es **decreciente** en un intervalo I, si para cualquier $x_1, x_2 \in I$,

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ donde } x_1 < x_2$$

Ejemplos

Las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ son:





La función $f(x) = x^2$, es decreciente en el intervalo de $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$, mientras que $g(x) = x^3$ es creciente para toda x de su dominio.

EJERCICIO 7

Con las funciones conocidas determina el intervalo donde crecen o decrecen:

1. $f(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = x$
4. $f(x) = |x|$
5. $f(x) = \sqrt{x-2}$
6. $f(x) = -\sqrt{x+3}$
7. $f(x) = 9 - x^2$
8. $f(x) = |x - 3| - 2$
9. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$
10. $f(x) = 6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones inyectiva, suprayectiva y biyectiva

Función inyectiva (uno a uno)

Si $x_1, x_2 \in D_f$ y $x_1 \neq x_2$, f es una función inyectiva si y solo si $f(x_1) \neq f(x_2)$, o dicho de otra forma, $f(x_1) \neq f(x_2)$ si y solo si $x_1 \neq x_2$.

Se determina si la *función es inyectiva* al trazar una recta paralela al eje X sobre la gráfica y si toca un solo punto es inyectiva. También se puede decir que una función inyectiva es aquella que siempre es creciente o siempre decreciente.

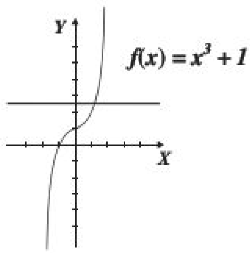
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si la función $f(x) = x^3 + 1$, es inyectiva.

Solución

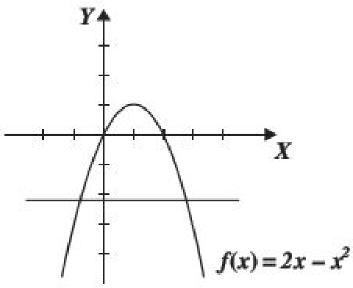
Sean $x_1 \neq x_2$, se tiene que $(x_1)^3 + 1 \neq (x_2)^3 + 1$, ya que no hay números distintos cuyos cubos sean iguales, con este resultado podemos afirmar que la función es inyectiva; por otro lado, si se observa que la gráfica es creciente, por tanto, es inyectiva. Otra forma de saber si la función es inyectiva es trazar cualquier recta paralela al eje X, y ésta debe tocar un solo punto de la gráfica.



2 Determina si la función $f(x) = 2x - x^2$ es inyectiva.

Solución

No es inyectiva, ya que para $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$ se obtiene que $f(x_1) = f(x_2) = -3$, lo que contradice la definición. Luego, si se traza una recta paralela al eje X, se observa que ésta toca dos puntos de la gráfica; por otro lado, no es una función que sea creciente ni decreciente siempre.



Función suprayectiva

Una función $f: A \rightarrow B$ es suprayectiva o sobreyectiva si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$; es decir, para todo elemento de B siempre hay uno de A al cual fue asignado.

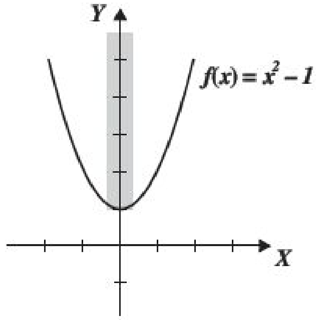
Otra forma de reconocer una función suprayectiva es si su contradominio es igual a su rango. Al menos que se indique lo contrario el contradominio de las funciones dadas serán los números reales.

EJEMPLOS

1 Determina si la función $f(x) = x^2 + 1$ es suprayectiva.

Solución

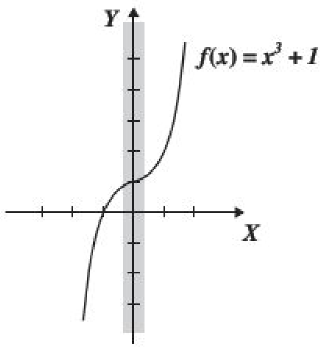
El contradominio de la función es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y su rango el intervalo $[1, \infty)$, por tanto, la función no es suprayectiva.



2 Determina si la función $f(x) = x^3 + 1$ es suprayectiva

Solución

El contradominio de la función es el intervalo $(-\infty, \infty)$ y su rango el intervalo $(-\infty, \infty)$, por tanto, la función es suprayectiva.



Función biyectiva

Una función "f" es *biyectiva* si es *inyectiva* y *suprayectiva.*

EJEMPLOS

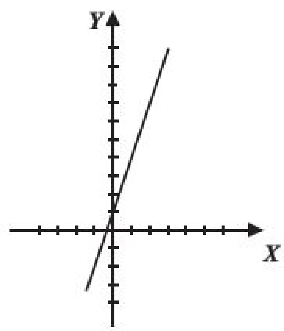
Ejemplos

1 Determina si la función $f(x) = 3x + 1$ es biyectiva.

Solución

Es una función siempre creciente, por tanto, es inyectiva. El contradominio de la función es $(-\infty, \infty)$ y su rango $(-\infty, \infty)$ entonces es suprayectiva.

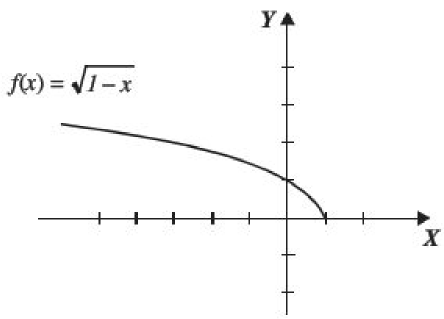
La función es inyectiva y suprayectiva, por tanto, es biyectiva.



2 Determina si la función $f(x) = \sqrt{1-x}$ es biyectiva.

Solución

Gráfica



Si al trazar una recta paralela al eje X interseca a la curva en un punto es inyectiva; no es suprayectiva, ya que su contradominio son los reales y su rango es el intervalo $[0, \infty)$. Es inyectiva pero no suprayectiva, entonces no es biyectiva.

3 Determina si la función f: $(-\infty, 1] \to [0, \infty)$, tal que $f(x) = \sqrt{1-x}$ es biyectiva.

Solución

La gráfica es la misma de la función del ejemplo anterior, por tanto, la función es inyectiva.

En este caso se especifica el contradominio como el intervalo $[0, \infty)$ el cual es igual al rango, entonces, es suprayectiva.

Es inyectiva y suprayectiva, por consiguiente, es biyectiva.

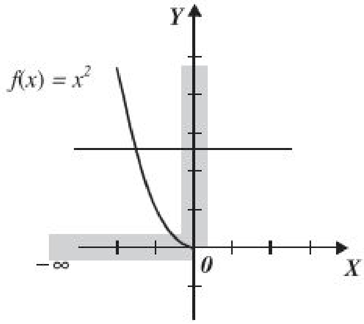
4 Determina si la función $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = x^2$ es biyectiva.

Solución

De la gráfica se observa que la función es inyectiva, ya que la recta horizontal sólo toca un punto.

Por otro lado, el contradominio es el intervalo $[0, \infty)$ el cual es igual al rango, por tanto, es suprayectiva.

Por último, es inyectiva y suprayectiva, por consiguiente, es biyectiva.



EJERCICIO 8

Indica cuál de las siguientes funciones es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = 3$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = x^3$
5. $f(x) = x^2, x \in [0, \infty)$
6. $f(x) = x^2 - 7x + 10$
7. $f(x) = 2x - 3$
8. $f(x) = \sqrt{x-3}$
9. $f: R \rightarrow [-1, \infty)$, tal que $f(x) = x^2 - 1$
10. $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = |x|$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones con dominios D_f y D_g respectivamente

- $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$, con dominio: $D_f \cap D_g$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, con dominio: $\{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Sean las funciones $f(x) = x^2 - 7x + 10$, y $g(x) = x - 5$

Determina

a) $f(x) + g(x)$
b) $f(x) - g(x)$
c) $f(x) \cdot g(x)$
d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución

Se obtienen los dominios de f y g para efectuar las operaciones.

$$D_f : (-\infty, \infty), D_g : (-\infty, \infty)$$

a) $f(x) + g(x) = (x^2 - 7x + 10) + (x - 5)$
$= x^2 - 6x + 5$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$

b) $f(x) - g(x) = (x^2 - 7x + 10) - (x - 5)$
$= x^2 - 8x + 15$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$

c) $f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 7x + 10)(x - 5)$
$= x^3 - 7x^2 + 10x - 5x^2 + 35x - 50$
$= x^3 - 12x^2 + 45x - 50$, con $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$

d) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = \dfrac{(x-5)(x-2)}{x-5} = x - 2$ con, $\{x \in D_f \cap D_g \,|\, x \neq 5\}$

2 Sean las funciones $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = x$ determina: $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución

Se obtienen los dominios de las funciones: D_f: $[-3, 3]$, D_g: $(-\infty, \infty)$ y se realizan las operaciones.

$f(x) + g(x) = \sqrt{9 - x^2} + x$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$f(x) - g(x) = \sqrt{9 - x^2} - x$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{9 - x^2} \cdot x = x\sqrt{9 - x^2}$, con dominio: $D_f \cap D_g = [-3, 3] \cap (-\infty, \infty) = [-3, 3]$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$, con dominio: $\{x \in [-3, 3] | x \neq 0\}$ o bien $x \in [-3, 0) \cap (0, 3]$

3 Sean $f = \{(2, 3), (3, -1), (4, -5), (5, -9)\}$ y $g = \{(1, 2), (2, 5), (3, 8), (7, 10)\}$, determina $f + g$

Solución

Los dominios son $D_f = \{2, 3, 4, 5\}$ y $D_g = \{1, 2, 3, 7\}$, entonces $D_{f+g} = \{2, 3\}$, para calcular $f(x) + g(x)$ se sustituyen los valores del dominio de la suma.

$$f(2) + g(2) = 3 + 5 = 8$$
$$f(3) + g(3) = -1 + 8 = 7$$

Por tanto, $f(x) + g(x) = \{(2, 8), (3, 7)\}$

EJERCICIO 9

Para las siguientes funciones determina:

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)\cdot g(x) \text{ y } \frac{f(x)}{g(x)}$$

1. $f(x)=5,\ g(x)=-2$
2. $f(x)=2x-5,\ g(x)=2x+5$
3. $f(x)=x^2-4x-5,\ g(x)=x^2+3x+2$
4. $f(x)=\dfrac{2x-1}{2},\ g(x)=\dfrac{x+2}{3}$
5. $f(x)=\sqrt{x-3},\ g(x)=\sqrt{x+4}$
6. $f(x)=x+\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt{x}$
7. $f(x)=\operatorname{sen}^2 x,\ g(x)=\cos^2 x$
8. $f=\{(-1,2),(0,3),(1,4),(3,6),(5,7)\},\ g=\{(-3,6),(-2,8),(-1,10),(2,12),(3,14),(5,16),(6,18)\}$
9. $f=\{(-2,-5),(-1,-3),(0,-1),(1,1),(2,3)\},\ g=\{(-5,8),(-4,7),(-3,6),(-2,5),(-1,4),(0,3)\}$
10. $f=\left\{\left(-2,-\frac{1}{2}\right),(-1,-1),(1,1),\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{3}\right)\right\},\ g=\left\{(-1,2),(1,0),\left(2,\frac{1}{2}\right)\right\}$

Dadas las funciones:

$$f(x)=x+3,\ g(x)=x^2+5x+6,\ r(x)=x+2,\ s(x)=x^2-3x-10$$

Determina:

11. $f(x)+r(x)$
12. $f(x)-s(x)$
13. $g(x)\cdot s(x)$
14. $\dfrac{g(x)}{r(x)}$
15. $\dfrac{s(x)}{r(x)}$
16. $g(x)-s(x)$
17. $f(x)\cdot r(x)$
18. $\dfrac{f(x)}{r(x)}$
19. $\dfrac{g(x)}{s(x)}$
20. $\dfrac{g(x)}{f(x)}+\dfrac{s(x)}{r(x)}$

Dadas las funciones:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+2},\ g(x)=\frac{1}{x} \text{ y } h(x)=\frac{1-x}{3-x}, \text{ determina:}$$

21. $f(x)+g(x)$
22. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
23. $f(x)\cdot g(x)$
24. $f(x)-h(x)$
25. $g(x)\cdot h(x)$
26. $\dfrac{f(x)}{g(x)}+h(x)$

27. $\dfrac{h(x)}{f(x)} - g(x)$

28. $\dfrac{h(2)-f(1)}{g(3)}$

29. $f(x+1)\cdot\dfrac{1}{h(x+1)}$

30. $h(x) - g(x)$

31. $\dfrac{h(x)}{g(x)} - \dfrac{g(x)}{f(x)}$

32. $f(x)\cdot h(x) - g(x)$

33. $\dfrac{f(x)+h(x)}{g(x)}$

34. $\dfrac{1}{g(x)+h(x)}$

35. $\dfrac{1}{1-h(x)}$

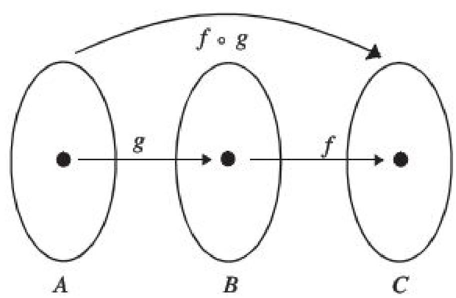
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función composición (Función de funciones)

Sean f y g funciones cualesquiera que definen una nueva función, la cual recibe el nombre de función composición de f con g y se denota con:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$

y es la función cuyo dominio son los elementos del dominio de g, tal que $g(x)$ pertenece al dominio de f; es decir, $D_{f\circ g}$: $\{x \mid x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Si $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ y $g = \{(3, 1), (-1, 3), (-5, 5), (-9, 2)\}$, determina $f \circ g$.

Solución

Se determinan los pares ordenados de la función g, de tal manera que el segundo término sea el primer término de los pares ordenados de la función f. Los primeros términos, de cada par ordenado encontrado, forman el dominio de la función composición.

Los pares ordenados de g que cumplen con la condición son:

$$(3, 1), (-1, 3), (-5, 5)$$

Por tanto, el dominio de la función composición es:

$$D_{fog}: \{-5, -1, 3\}$$

El dominio se evalúa de la siguiente manera:

Por definición $f \circ g = f(g(x))$, entonces el conjunto solución son todas las parejas ordenadas de la forma: $(x, f(g(x)))$

$$f(g(-5)) = f(5) = 6$$

$$f(g(-1)) = f(3) = 4$$

$$f(g(3)) = f(1) = 2$$

Finalmente el conjunto es:

$$f \circ g = \{(-5, 6), (-1, 4), (3, 2)\}$$

2 Determina $f \circ g$; $g \circ f$; $f \circ f$; $g \circ g$, para $f(x) = x + 3$, $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

$$f \circ g = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x}{x-1} + 3 = \frac{x+3(x-1)}{x-1} = \frac{4x-3}{x-1}$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x+3) = \frac{x+3}{(x+3)-1} = \frac{x+3}{x+2}$$

$$f \circ f = f(f(x)) = f(x+3) = (x+3)+3 = x+6$$

$$g \circ g = g(g(x)) = g\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1} = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-(x-1)}{x-1}} = \frac{x(x-1)}{1(x-1)} = x$$

Para determinar $f \circ g \circ h$ se aplica primero h, después g y, por último, f

3 Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ y $h(x) = x - 4$, determina $f \circ g \circ h$.

Solución

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x-4)) = f(2(x-4)-1) = f(2x-8-1) = f(2x-9)$$
$$= (2x-9)^2 = 4x^2 - 36x + 81$$

4 Si $F(x) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$, determina f, g y h tal que $F = f \circ g \circ h$

Solución

$F(x) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$, la función dice suma 4, eleva al cuadrado, resta 5 y obtén la raíz.
Entonces se tiene que:

$$h(x) = x + 4 \qquad g(x) = x^2 - 5 \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

De tal forma que $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x+4)) = f((x+4)^2 - 5) = \sqrt{(x+4)^2 - 5}$

EJERCICIO **10**

Determina $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ para las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ y $g(x) = 2x - 3$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$
3. $f(x) = 4$ y $g(x) = 2$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
5. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = \log(x - 2)$ y $g(x) = x - 2$
8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
9. $f(x) = \{(2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)\}$ y $g(x) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
10. $f(x) = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ y $g(x) = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 3), (1, 4)\}$
11. $f(x) = \{(0, 1), (1, 3), (-1, -1), (-2, -3)\}$ y $g(x) = \{(3, 0), (-2, -2), (1, -1)\}$

Encuentra f de manera que $(f \circ g)(x) = F(x)$

12. $g(x) = \dfrac{3-x}{1-x}$ y $F(x) = \dfrac{1-x}{3-x}$
13. $g(x) = x - 1$ y $F(x) = \sqrt{x - 1}$
14. $g(x) = x^3$ y $F(x) = mx^3 + b$

15. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $F(x) = x^2 - 1$

16. $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y $F(x) = \sqrt{\dfrac{1-2x}{x}}$

Determina $f \circ g \circ h$

17. $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ y $h(x) = 3x - 1$

18. $f(x) = x^3$, $g(x) = 1 - x$ y $h(x) = 4x^2$

19. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 5$ y $h(x) = x - 2$

20. $f(x) = x^2$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $h(x) = x - 2$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $h(x) = \cos x$

22. $f(x) = \log x$, $g(x) = 10^x$ y $h(x) = \operatorname{sen} x$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Funciones par e impar

- Se dice que una función f es par si: $f(-x) = f(x)$.
- Se dice que una función f es impar si: $f(-x) = -f(x)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 $f(x) = x^2 - 4$ es función par, ya que

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x).$$

2 $f(x) = 3x^3 + 4x$ es función impar ya que:

$$f(-x) = 3(-x)^3 + 4(-x) = -3x^3 - 4x = -(3x^3 + 4x) = -f(x)$$

3 $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ no es par ni impar, ya que:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 - 5(-x) + 2 = -x^3 - x^2 + 5x + 2 = -(x^3 + x^2 - 5x - 2)$$

$$f(-x) \neq f(x) \quad \text{y} \quad f(-x) \neq -f(x)$$

Observaciones:

Si f y g son funciones pares y h y r funciones impares, entonces se cumple:

I. $f \cdot g$ es par

II. $f \cdot h$ es impar

III. $h \cdot r$ es par

EJERCICIO 11

Indica si f es par, impar o ninguna.

1. $f(x) = x^2 - x$
2. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = -x^2 + 2x - 4$
5. $f(x) = (x - 2)^3$
6. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
8. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
9. $f(x) = (x + 1)^2 + x^3$
10. $f(x) = x^3 - 2x$
11. $f(x) = x^4 - 2x^2$
12. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
13. $f(x) = 3x^5 - 2x$
14. $f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$
15. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Función inversa

Sea f una función inyectiva con dominio A y contradominio B; la función g que satisface $f(g(x)) = x$, se llama *función inversa* de f y se denota $f^{-1}(x)$ con dominio B y contradominio A.

EJEMPLOS

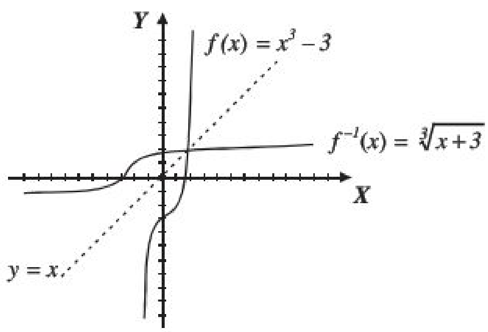
1 Determina la función inversa de $f(x) = x^3 - 3$.

Solución

$f(x) = x^3 - 3$

Al emplear la definición

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad (f^{-1}(x))^3 - 3 = x \qquad (f^{-1}(x))^3 = x + 3 \qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+3}$$



Observa que $f^{-1}(x)$ es un reflejo de $f(x)$ sobre la función identidad $y = x$.
Comprobación:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{x+3}\right) = \left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3 - 3 = x + 3 - 3 = x$$

Otra forma de obtener la función inversa es resolver la ecuación para x dejándola en términos de y, se intercambia x por $f^{-1}(x)$, y por x.

2 Determina la función inversa de $f(x) = 3x - 12$

Solución

$f(x) = 3x - 12 \rightarrow y = 3x - 12 \rightarrow y + 12 = 3x \rightarrow \dfrac{y}{3} + 4 = x$

Se intercambia y por x, x por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3} + 4$

Comprobación:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{3} + 4\right) = 3\left(\frac{x}{3} + 4\right) - 12 = x + 12 - 12 = x$$

3 Determina la función inversa de $f(x) = x^2$

Solución

La función no es inyectiva, por tanto, no tiene inversa.

Propiedades

Si f es una función con inversa f^{-1}, entonces

- El dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de f.
- $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$
- f^{-1} es invertible y su inversa es f.
- Si f es una función real entonces la gráfica de f^{-1} es el reflejo de f sobre la función $y = x$

EJERCICIO 12

Determina la función inversa (si es posible) para las siguientes funciones:

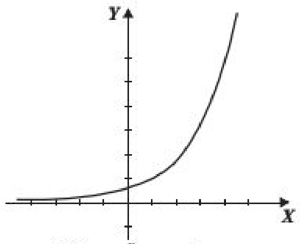
1. $f(x) = x$
2. $f(x) = 2x - 5$
3. $f(x) = x^2 - 9$, $x \in [0, \infty)$
4. $f(x) = x^2 + 3x + 2$
5. $f(x) = x^3$
6. $f(x) = x^5$
7. $f(x) = x^4$, $x \in [0, \infty)$
8. $f(x) = \sqrt{3 - x}$
9. $f(x) = (2x - 5)^2$
10. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0, 2]$
11. $f(x) = \sqrt[3]{x + 9}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{2x + 3}$
13. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in [1, \infty)$
14. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$
15. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x - 1}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

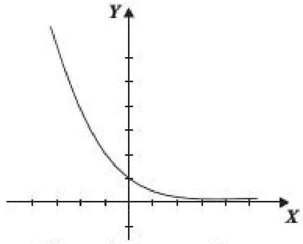
Funciones trascendentes

Función exponencial

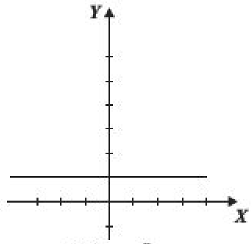
Es una función de la forma $f(x) = a^x$, con dominio $D_f : x \in (-\infty, \infty)$ y rango $y \in (0, \infty)$ (si $a = 1$, entonces el rango es $\{1\}$) y básicamente existen tres tipos:



$f(x) = a^x,\ a > 1$



$f(x) = a^x,\ 0 < a < 1$



$f(x) = 1^x$

EJEMPLOS

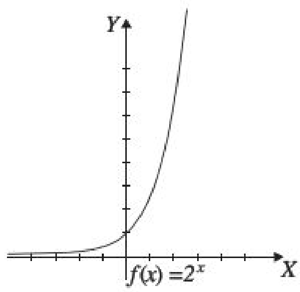
1 Obtén las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$:

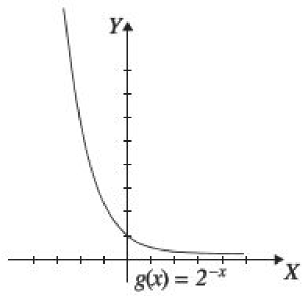
Solución

Se hace una tabulación para cada gráfica y se obtiene:

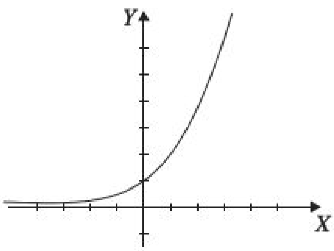
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g(x) = 2^{-x}$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$





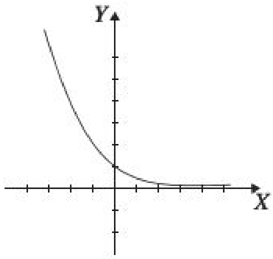
Una de las funciones exponenciales más comunes es: $f(x) = e^x$, con $e \approx 2.71828$



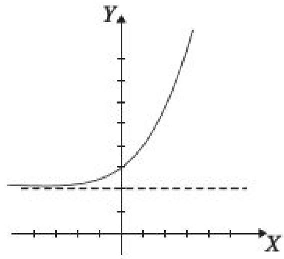
2 Obtén las gráficas de $y = e^{-x}, y = e^{x} + 2, y = \frac{2}{3}e^{x}, y = -e^{x}, y = -e^{-x}$

Solución

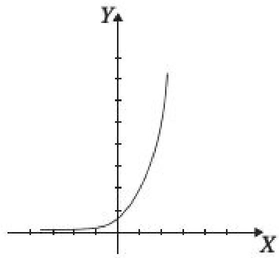
Mediante reflexiones, desplazamientos y alargamientos de una función se obtienen las siguientes gráficas:



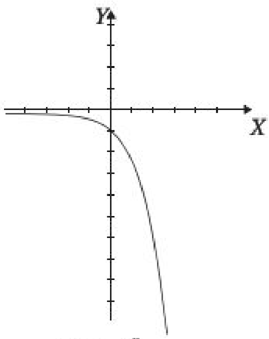
$y = e^{-x}$



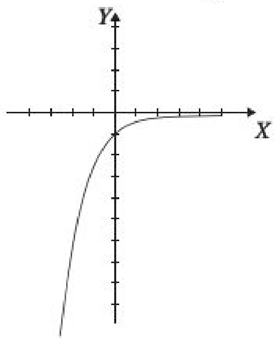
$y = e^{x} + 2$



$y = \frac{2}{3}e^{x}$



$y = -e^{x}$



$y = -e^{-x}$

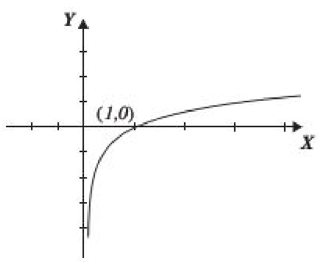
La *función exponencial* $f(x) = a^{x}$ es inyectiva (ya que es creciente), por tanto, debe tener inversa, la cual es el logaritmo con base a. Un logaritmo se define como el exponente al que se eleva un número llamado base, para obtener cierto número, de tal forma que aplicado a la función exponencial queda:

$$y = a^{x} \text{ entonces } \log_a y = x, y > 0, \text{ por tanto } f^{-1}(x) = \log_a x$$

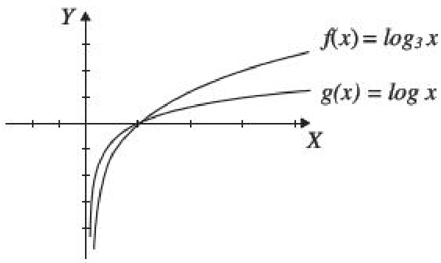
De lo anterior, se define la *función logarítmica* como:

$$g(x) = \log_a x \quad \text{Dominio: } x \in (0, \infty), \text{ Rango: } x \in (-\infty, \infty)$$

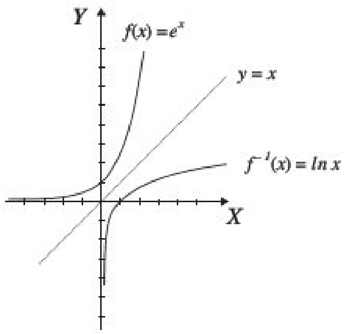
Gráfica:



Pasa por el punto (1, 0), porque $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$, es creciente y tiene una asíntota vertical en $x = 0$
Por ejemplo, las gráficas de las funciones: $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = \log x$ son:



Por otro lado $\ln x = \log_e x$, por tanto, si $f(x) = e^x$ entonces $f^{-1}(x) = \ln x$



EJEMPLOS

Ejemplos

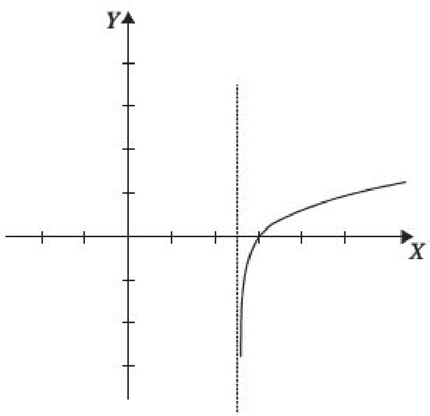
1 Determina la gráfica de $y = \log(2x - 5)$.

Solución

Se determina el dominio; recuerda que $\log_b N = a$, entonces $N > 0$:

$$2x - 5 > 0 \rightarrow x > \frac{5}{2} \rightarrow x \in \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$$

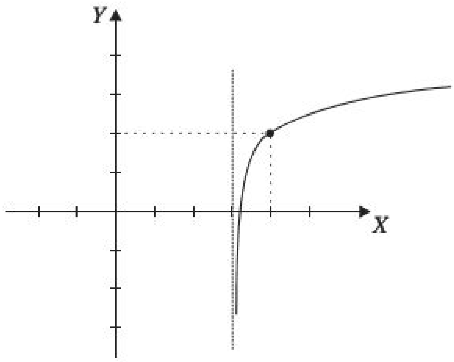
Se traza una asíntota en $x = \frac{5}{2}$ y se desplaza la gráfica $y = \log_{10} x$



2 Determina la gráfica de $y = \log(x - 3) + 2$.

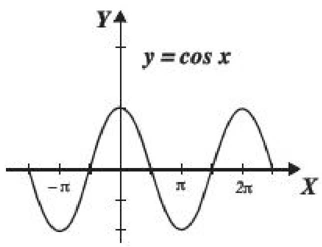
Solución

Se desplaza la gráfica de $y = \log x$ dos unidades hacia arriba y tres a la izquierda



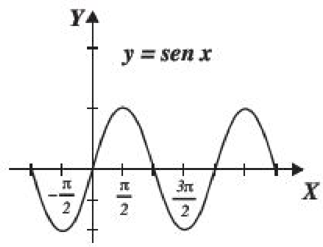
Funciones trigonométricas

Para la gráfica de las siguientes *funciones trigonométricas* se utilizarán por convención valores en radianes para x.



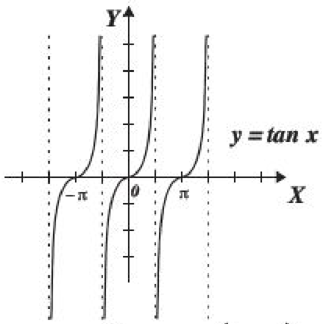
Dominio: $x \in (-\infty, \infty)$

Rango: $y \in [-1, 1]$



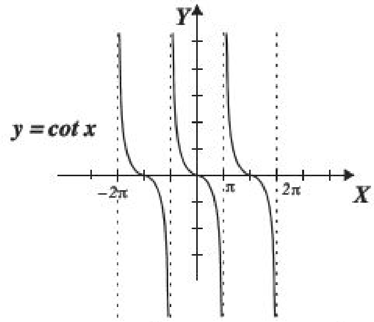
Dominio: $x \in (-\infty, \infty)$

Rango: $y \in [-1, 1]$



Dominio: $\left\{x \in R \middle| x \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}, n \in Z\right\}$

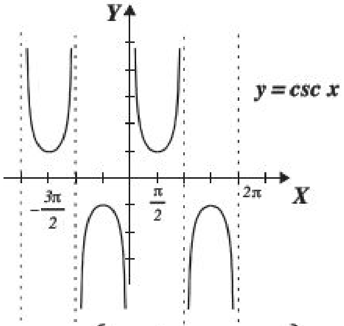
Rango: $y \in (-\infty, \infty)$



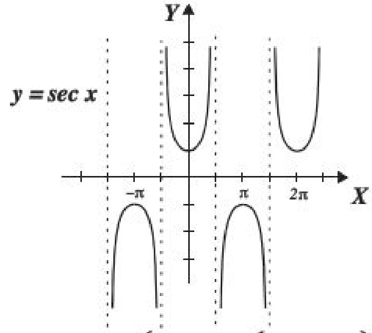
Dominio: $\{x \in R \mid x \neq n\pi, n \in Z\}$

Rango: $y \in (-\infty, \infty)$

Las relaciones $y = \csc x$, $y = \sec x$



Dominio: $\{x \in R \mid x \neq n\pi, n \in Z\}$
Rango: $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



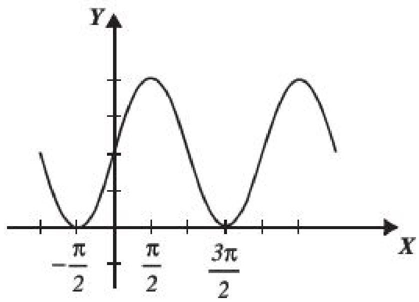
Dominio: $\left\{x \in R \mid x \neq \frac{1}{2}n\pi, n \in Z\right\}$
Rango: $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Ejemplo

Determina la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x + 2$

Solución

La función $f(x) = \text{sen } x$ se alarga 2 unidades verticalmente y se desplaza dos unidades hacia arriba, obteniendo la siguiente gráfica:



EJERCICIO 13

Obtén la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3^x$
2. $y = 3^{-x}$
3. $y = 3^x - 3$
4. $f(x) = e^x + 1$
5. $f(x) = 1 - e^x$
6. $f(x) = e^{-x} + 2$
7. $f(x) = \ln(x - 2)$
8. $f(x) = 1 + \log x$
9. $f(x) = 2 + \ln(x + 1)$
10. $f(x) = 3 \cos x - 2$
11. $f(x) = -2 \text{ sen } x + 1$
12. $f(x) = -\tan x$
13. $f(x) = -2 \sec x + 1$
14. $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Las funciones como modelos matemáticos

Como se afirmó al principio del capítulo, las funciones representan modelos para resolver problemas de la vida real.

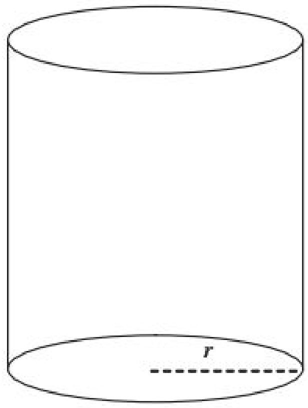
EJEMPLOS

1 La altura de un recipiente cilíndrico es el doble que el radio de su base, expresa el volumen del cilindro en función de su altura.

Solución

El volumen de un cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$



Puesto que la altura es el doble del radio de la base, entonces:

$$h = 2r \rightarrow r = \frac{h}{2}$$

Al sustituir $r = \frac{h}{2}$ en el volumen se obtiene:

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad h = \pi\frac{h^2}{4} \quad h = \frac{\pi h^3}{4}$$

Por consiguiente

$$V(h) = \frac{\pi h^3}{4}$$

2 El perímetro de un rectángulo es de 26 unidades, expresa el área del rectángulo en función de su largo.

Solución

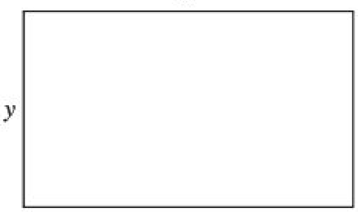
Se establecen las dimensiones del rectángulo:

x: largo, y: ancho

El perímetro es

$$2x + 2y = 26 \rightarrow x + y = 13$$

$$y = 13 - x$$



El área del rectángulo es

$$A = xy$$

Al sustituir $y = 13 - x$, se obtiene:

$$A = x(13 - x) = 13x - x^2$$

Por consiguiente,

$$A(x) = 13x - x^2$$

3 Una persona tiene una pared de piedra en un costado de un terreno. Dispone de 1 600 m de material para cercar y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados. Expresa el área del corral en términos del ancho de éste.

Solución

Sean x y y las dimensiones del corral donde,

x: ancho del corral, y: largo del corral

Entonces,

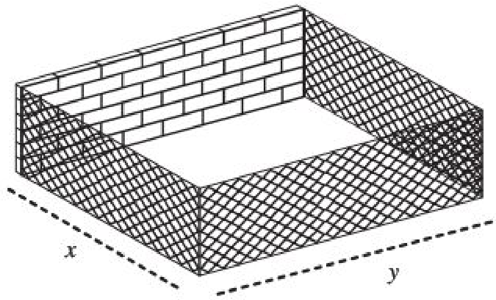
$$2x + y = 1\,600 \rightarrow y = 1\,600 - 2x$$

el área del rectángulo está dada por:

$$A = xy$$

Al sustituir $y = 1\,600 - 2x$, se obtiene:

$$A(x) = x(1\,600 - 2x) = 1\,600x - 2x^2$$



4 Un globo asciende desde un punto con velocidad constante de $1.5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a 30 m del punto del despegue se encuentra una casa. Si t es el tiempo en segundos, expresa la distancia que existe entre la casa y el globo en función del tiempo.

Solución

Sea $v = \frac{d}{t}$, entonces $d = vt$, donde, d es la distancia, v la velocidad, t el tiempo.

Al transcurrir t segundos el globo sube $1.5\,t$ en metros; entonces se aplica el teorema de Pitágoras para obtener:

$$d^2 = (1.5\,t)^2 + (30)^2 \rightarrow d^2 = \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + (30)^2$$

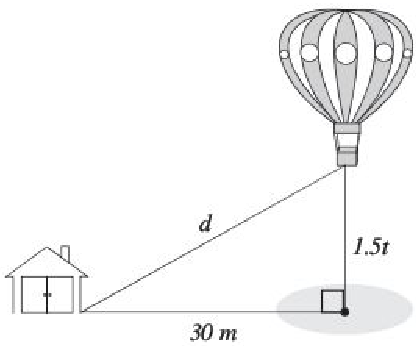
$$d^2 = \frac{9}{4}t^2 + 900$$

$$d = \sqrt{\frac{9t^2 + 3\,600}{4}}$$

$$d = \frac{3}{2}\sqrt{t^2 + 400}$$

Por tanto:

$$d(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t^2 + 400}$$

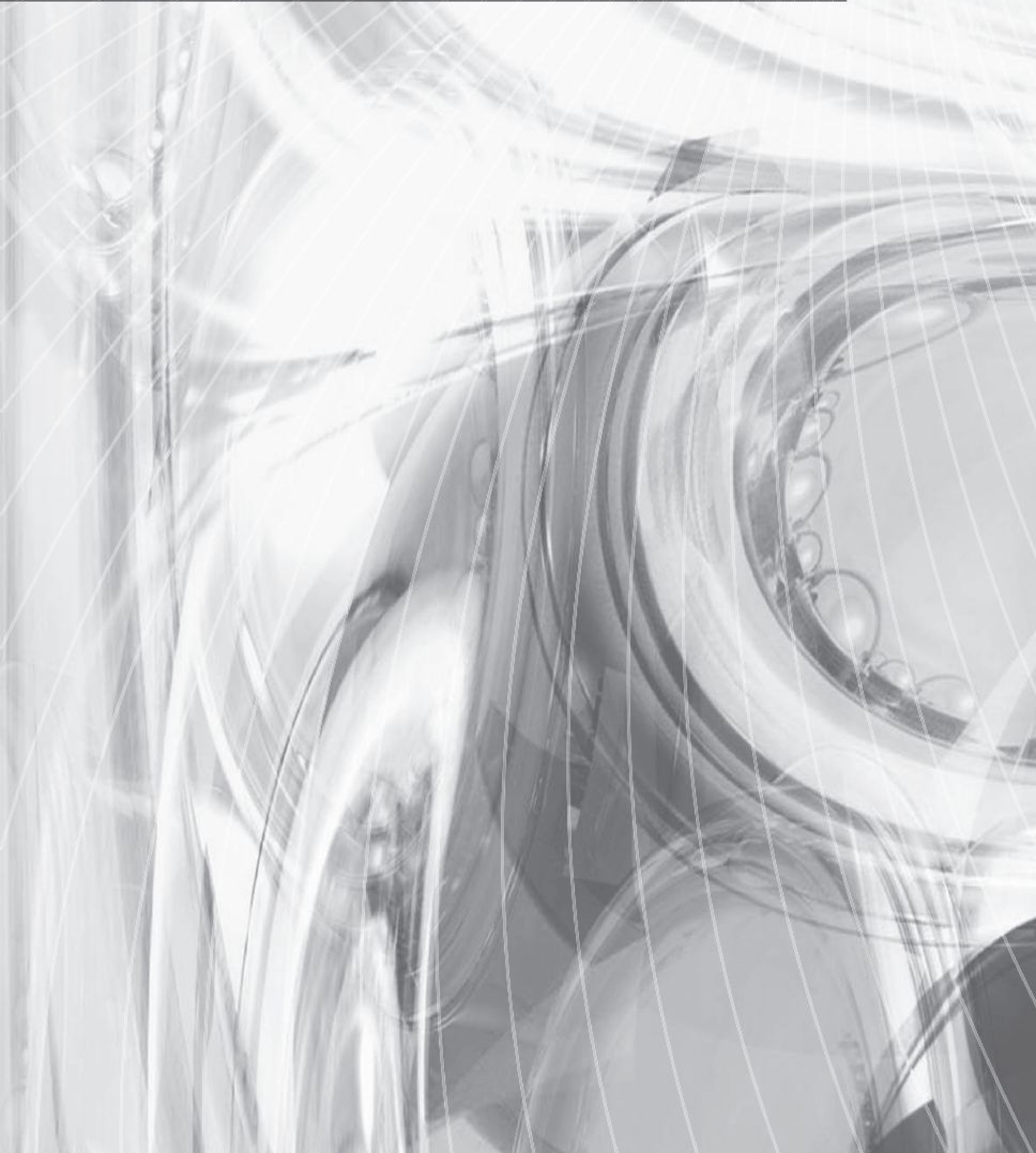


EJERCICIO 14

1. El área de la base de un cilindro es de 40 π m^2. Expresa el volumen en función de la altura.
2. Fluye agua por un tanque cónico de 10 m de radio y 25 m de altura. Cuando el nivel del agua está a una altura de h y radio r, expresa el volumen del agua en función de la altura.
3. Si el ancho de un rectángulo es la quinta parte de su largo, determina el perímetro en función de su área.
4. Dada una circunferencia de radio r, precisa el área de la circunferencia en función de su diámetro d.
5. Se inscribe un cubo de arista x en una esfera de radio r. Expresa el volumen de la esfera en función de la arista del cubo.
6. Al graficar la recta, cuya ecuación es $3x - 2y + 6 = 0$, y trazar una línea vertical paralela al eje Y en cualquier punto sobre el eje X se genera un triángulo rectángulo. Expresa el área de dicho triángulo en función de la abscisa x.
7. Se desea construir un tanque de gas en forma de cilindro circular recto de 2.5 m de altura y a cada extremo del cilindro van unidas dos semiesferas de radio r. Expresa el volumen del tanque en función de r.
8. Se inscribe un triángulo equilátero de lado x en una circunferencia de radio r. Expresa el área de la circunferencia en función del lado x.
9. Se inscribe un rectángulo en una elipse cuya ecuación es $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$. Precisa el área del rectángulo en función de la abscisa x.
10. Un cartel de base x y altura y tiene un área de 540 cm^2 con márgenes de 2 cm a los lados y 1.5 cm en las partes superior e inferior. Expresa el área impresa en función de la base del cartel.
11. Desde cierto puente de la Ciudad de México un peatón observa un automóvil que viaja a 18 m/s en una avenida perpendicular al puente peatonal. Si t es el tiempo en segundos, determina la distancia entre el peatón y el automóvil en función del tiempo, si la altura del puente es de 4.5 m.
12. Una lancha es remolcada con un cable hacia un muelle. El cable es enrollado a razón de 0.5 m/s y la lancha se encuentra a 2 m por debajo del nivel del muelle. Si t es el tiempo en segundos, expresa la distancia que le falta recorrer a la lancha hacia el muelle en función del tiempo.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Solución a los ejercicios



CAPÍTULO 2

EJERCICIO 1

1. 40,1708°
2. 61,7058°
3. 1,03416°
4. 73,6777°
5. 9,1525°
6. 98,3791°
7. 40° 19' 12"
8. 61° 14' 24"
9. 18° 15' 18"
10. 29° 24' 39"
11. 19° 59' 24"
12. 44° 00' 36"

EJERCICIO 2

1. $\frac{7}{6}\pi\ rad = 3.665\ rads$
2. $\frac{5}{3}\pi\ rad = 5.236\ rads$
3. $\frac{5}{4}\pi\ rad = 3.927\ rads$
4. $\frac{5}{2}\pi\ rad = 7.854\ rads$
5. $\frac{2}{5}\pi\ rad = 1.256\ rads$
6. $\frac{5}{9}\pi$ rad = 1.745 *rads*
7. $\frac{1}{6}\pi\ rad = 0.523\ rad$
8. $\frac{11}{6}\pi\ rad = 5.759\ rads$
9. $\frac{2}{3}\pi\ rad = 2.094\ rads$
10. $\frac{3}{4}\pi\ rad = 2.356\ rads$
11. $\frac{4523}{18000}\pi\ rad = 0.789\ rad$
12. $\frac{1283}{1800}\pi\ rad = 2.239\ rads$
13. $\frac{2711}{3240}\pi\ rad = 2.628\ rads$
14. $\frac{33601}{14400}\pi\ rad = 7.330\ rads$

EJERCICIO 3

1. 120°
2. 330°
3. 135°
4. 240°
5. 1260°
6. 20°
7. 468°
8. 15°
9. 90°
10. 270°
11. 9° 38' 34"
12. 64° 10' 37"
13. 360°
14. 28° 38' 52"

EJERCICIO 4

1. 55° 46' 50"
2. 40° 13' 15"
3. 49° 19' 33"
4. 59° 19' 45"
5. 108° 7' 48"
6. 75° 44' 22"
7. 246° 34' 15"
8. 875° 11'40"
9. 383° 51' 21"
10. 227° 3' 18"
11. 4° 33' 11"
12. 15° 41' 18"
13. 3° 21' 41"
14. 13° 15' 18"

EJERCICIO 5

1. Suplementarios
2. Complementarios
3. Conjugados
4. Conjugados
5. Conjugados
6. Complementarios
7. Suplementarios
8. Complementarios
9. Conjugados
10. Suplementarios
11. 10°
12. 57°
13. 80°
14. 30°
15. 18°
16. 20°
17. 36°
18. 120°
19. *a*) $\angle COB = 30°$, $\angle BOA = 60°$
    b) $\angle AOB = 45°$, $\angle BOC = 30°$, $\angle COD = 15°$
    c) $\angle AOB = 50°$, $\angle DOB = 130°$
    d) $\angle AOB = 65°$, $\angle BOC = 45°$, $\angle COD = 70°$
    e) $\angle AOB = 30°$, $\angle BOC = 90°$, $\angle COD = 60°$
    f) $\angle AOB = \angle COD = 45°$, $\angle BOC = 55°$, $\angle DOE = 35°$
    g) $\angle AOB$ (convexo) $= 134°$, $\angle AOB$ (cóncavo) $= 226°$
    h) $\angle AOB$ (convexo) $= 50°$, $\angle AOB$ (cóncavo) $= 310°$

EJERCICIO 6

1. 135°
2. 115°.
3. $\theta = 25°$, $\alpha = 30°$
4. O63° 18' S, S26° 42' O
5. 22° 30'
6. 115°
7. 292° 30'
8. 12:30 *h*
9. $48\ \pi\ rad$
10. 3:40 *h*

CAPÍTULO 3

EJERCICIO 7

1. $x = 60°$, $\angle a = 60°$, $\angle b = 120°$
2. $x = 46.5°$, $\angle a = \angle b = \angle e = 46.5°$, $\angle c = \angle d = \angle f = 133.5°$
3. $x = 40°$, $\angle a = \angle b = \angle e = 80°$, $\angle c = \angle d = \angle f = 100°$
4. $\angle a = \angle c = 137°$, $\angle b = 43°$
5. $\angle a = \angle c = \angle d = \angle g = 47°$, $\angle b = \angle e = \angle f = 133°$
6. $x = 25°$
7. $x = 26°$, $\angle a = 128°$, $\angle b = 52°$
8. $\angle 10 = \angle 4 = \angle 7 = 70°$, $\angle 1 = \angle 13 = \angle 16 = 110°$
9. $x = 115°$, $y = 65°$
10. $x = 40°$, $y = 110°$
11. $x = 80°$, $y = 60°$
12. $R = 120°$
13. $\angle a = \angle c = \angle e = \angle f = 126°$, $\angle b = \angle d = 54°$
14. $\angle n = \angle z = 50°$, $\angle m = \angle s = \angle y = \angle r = 130°$
15. $\angle x = \angle q = \angle p = \angle k = 35°$, $\angle y = \angle r = \angle s = 145°$
16. $\angle q = \angle z = \angle y = 60°$, $\angle r = \angle w = \angle p = 120°$
17. *a*), *b*), *d*) y *f*)

CAPÍTULO 4

EJERCICIO 8

1. 105°, 110°
2. 10°, 80°
3. 80°, 80°, 20°
4. 55°, 41°
5. 118°, 38° y 24°; 68°, 70° y 42°
6. $\theta = 54°$ y $\beta = 72°$
7. $\angle A = 35°$, $\angle B = 95°$, $\angle C = 50°$
8. $ABC = 69°$, $BCA = 73°$, $BAC = 38°$, $ACD = 107°$, $CDA = 35°$, $CAD = 38°$

Ejercicio 9

1. Teorema II (*LAL*) $x = 85°$ $y = 12$
2. Teorema III (*ALA*) $x = 13$ $y = 19.8$
3. Teorema I (*LLL*) $x = 32°$ $y = 62°$

Ejercicio 10

1 a 8. No se incluye la solución por ser demostraciones.

Ejercicio 11

1. $a = 36°, b = 8°$ 4. $x = 25, y = 14$
2. $x = 15, y = 45$ 5. $a = 12°, b = 25°$
3. $x = 15°, y = 20°$

Ejercicio 12

1. $x = 3$ 4. $x = 7, x = 0$ 7. $x = \pm 6y$ 10. $x = 3$
2. $x = 7.2$ 5. $x = \pm\ 4\sqrt{2}$ 8. $x = \pm 5$
3. $x = \pm 9$ 6. $x = 2$ 9. $x = \pm 4$

Ejercicio 13

1. $a' = 3, c' = 5$
2. $a = 30, b' = 16$
3. Lados 12 y 22; $x = 11, y = 36$
4. Lados 8 y 4; $x = 7, y = 5$
5. Lados 8 y 6; $u = 3, t = 10$
6. Lados 10 y 9; $x = 5, y = 3$

Ejercicio 14

1. $x = 10$ 4. $x = \frac{12}{5}$ 7. $x = 4$ 10. $x = 30$
2. $x = \frac{9}{2}$ 5. $x = \frac{25}{3}$ 8. $x = \frac{27}{22}$
3. $x = 6$ 6. $x = 16$ 9. $x = 10$

Ejercicio 15

1. $68\ m$ 3. $160\ m$ 5. *a*) $28\ m$
2. $481.6\ m$ 4. $15\ m$ *b*) $120\ m$

Ejercicio 16

1. $c = 25$ 8. $b = 5\sqrt{2}$ 15. Acutángulo
2. $c = \sqrt{41}$ 9. $c = 3\sqrt{5}\ m$ 16. Rectángulo
3. $c = 4\sqrt{5}$ 10. $b = 5\ m$ 17. Rectángulo
4. $c = 7\sqrt{2}$ 11. $c = \sqrt{421}\ cm$ 18. Obtusángulo
5. $b = 16$ 12. $a = 5\sqrt{7}\ dm$ 19. Rectángulo
6. $a = 2\sqrt{7}$ 13. Obtusángulo 20. Acutángulo
7. $c = 8$ 14. Rectángulo 21. Rectángulo

22. *a*) $2\sqrt{15}$, *b*) $5\sqrt{13}$, *c*) $2\sqrt{10}$, *d*) $6\sqrt{21}$ *e*) $\frac{40}{3}$, *f*) $\frac{91\sqrt{218}}{218}$, *g*) $\frac{169}{60}\sqrt{30}$

Ejercicio 17

1. $100\sqrt{73}\ m$ 6. $\sqrt{91}\ m$
2. $2\sqrt{5}\ m$ 7. $5\ cm$
3. $40\ cm$ 8. $8\sqrt{3}\ cm$
4. $5\sqrt{3}\ cm$ 9. $9\sqrt{2}\ km$
5. $4\sqrt{2}\ m$ 10. $5\sqrt{2}\ cm$

11. $\frac{2\sqrt{2}}{3}m,\ \frac{m}{3}$
12. $2\sqrt{\frac{4m^2-n^2}{15}},\ 2\sqrt{\frac{4n^2-m^2}{15}}$ y $2\sqrt{\frac{m^2+n^2}{5}}$

Capítulo 5

Ejercicio 18

1. $\angle A = \angle C = 140°, \angle B = 40°$
2. $\angle DCA = 40°, \angle CAD = 60°, \angle DAB = \angle DCB = 100°, \angle D = \angle B = 80°$
3. $\angle ADC = \angle B = 110°, \angle A = \angle C = 70°$
4. $x = 30°, z = 120°, y = 60°$
5. $x = 127°, y = 53°$
6. $x = 120°, y = 55°, z = 125°$
7. $x = 60°, y = 120°, z = 60°$
8. $x = 15°, y = 70°, z = 110°$

Ejercicio 19

1 a 6. No se incluye la solución por ser demostraciones.

Ejercicio 20

1. $x = 4\ cm$ 4. $\angle NPO = 24°$ 7. $\overline{MN} = 20\ u$
2. 4 y 8 u 5. $x = 20°, y = 68°$ 8. $\overline{AB} = a,\ \overline{IJ} = b$
3. 41 u 6. $\overline{AB} = 11\ cm$ 9. $\overline{AE} = 5$

Capítulo 6

Ejercicio 21

1. $d = 8$
2. Icoságono
3. $d = 7$
4. Dodecágono
5. Nonágono
6. *a*) 170, *b*) 54, *c*) 27, *d*) 9, *e*) 90, *f*) 14, *g*) 104, *h*) 135, *i*) 44
7. Heptágono
8. Hexadecágono
9. Heptadecágono
10. Nonadecágono
11. Heptágono
12. Undecágono
13. Pentágono
14. Tridecágono
15. Dodecágono
16. Octágono
17. Icoságono

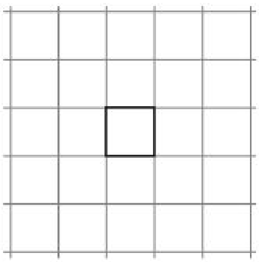
Ejercicio 22

1. *a*) 120°, *b*) 135°, *c*) 150°, *d*) 162°, *e*) 160°, *f*) 171° 25' 42"
2. *a*) 540°, *b*) 1 440°, *c*) 2 340°, *d*) 1 080°, *e*) 1 980°, *f*) 6 300°
3. Nonágono (nueve lados)
4. Heptágono (siete lados)
5. Hexadecágono (16 lados)
6. Undecágono (11 lados)
7. Hexágono (seis lados)
8. Hexadecágono (16 lados)
9. Nonágono (nueve lados)
10. Dodecágono (12 lados)
11. Octágono (ocho lados)
12. Triángulo
13. Hexágono (seis lados)
14. Pentadecágono (15 lados)
15. Nonágono (nueve lados)
16. Pentágono (cinco lados)
17. 54°, 129.6°, 129.6°, 108° y 118.8°
18. 110°, 100°, 115°, 135° y 80°
19. 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 210° y 240°
20. $\angle A = 70°$, $\angle B = 65°$, $\angle C = 10°$, $\angle D = 110°$ y $\angle E = 105°$
21. $\angle A = 54°$, $\angle B = 64°$, $\angle C = 116°$, $\angle D = 64°$, $\angle E = 17°$ y $\angle F = 45°$

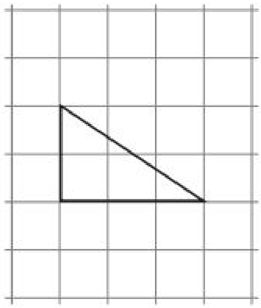
Capítulo 7

Ejercicio 23

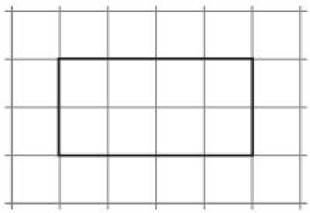
1.



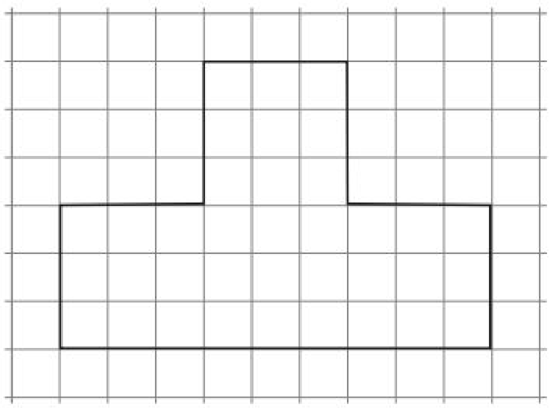
2.



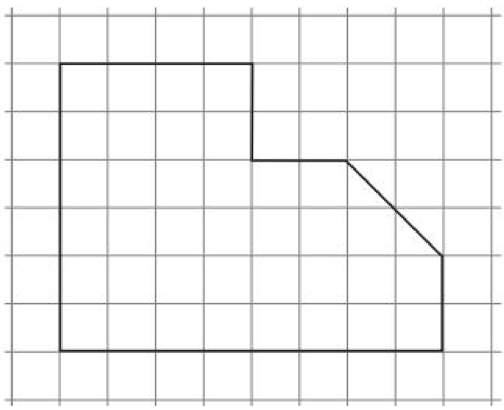
3.



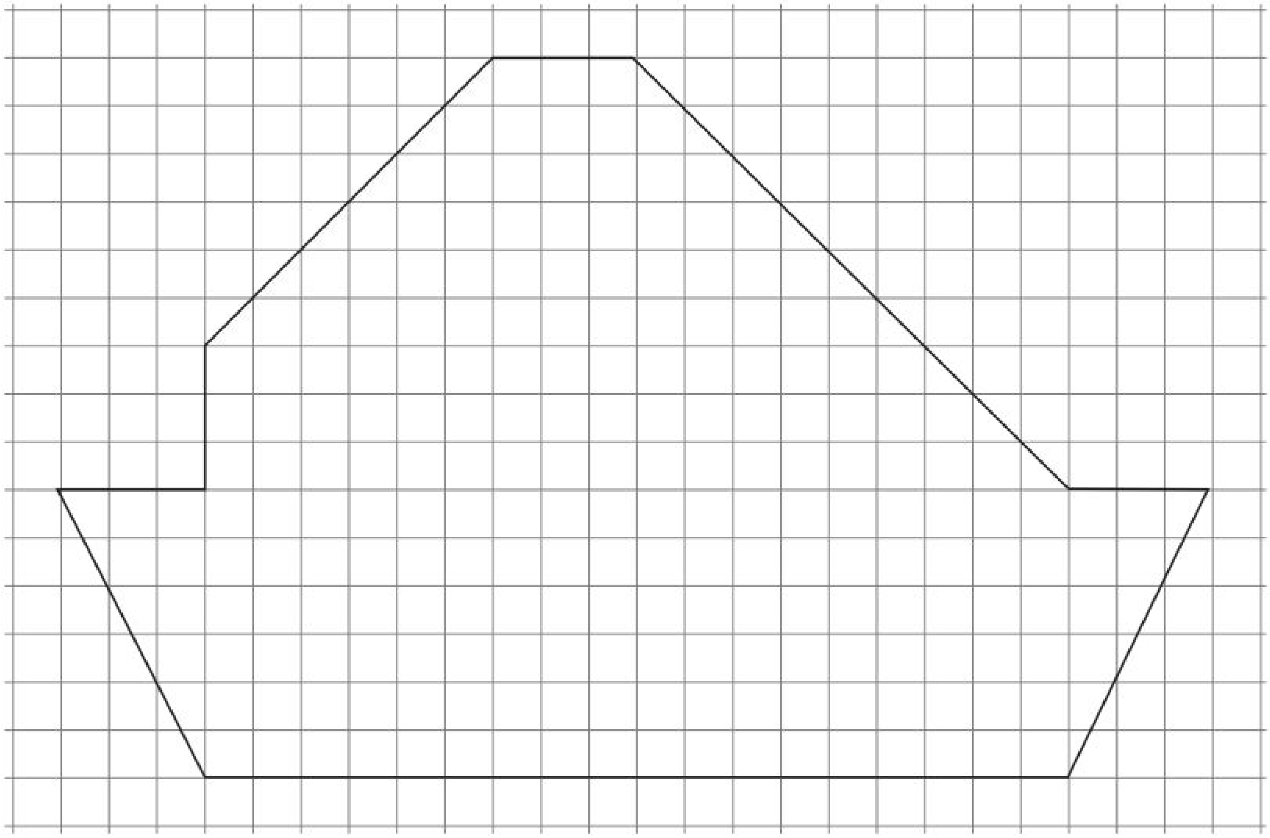
4.



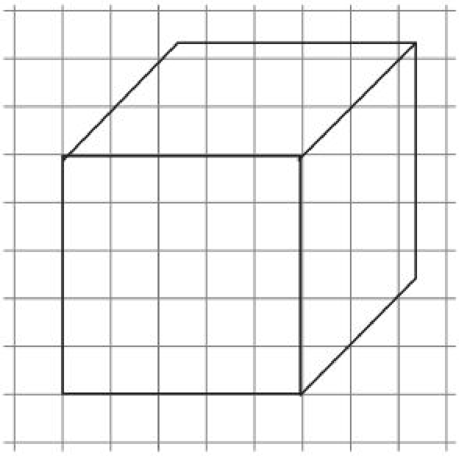
5.



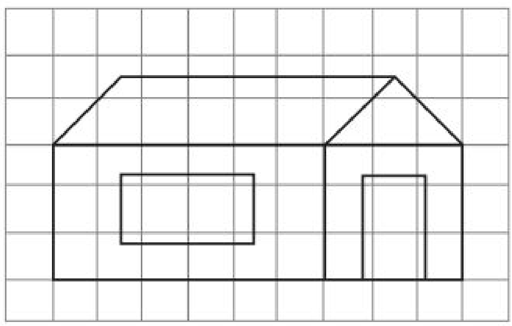
6.



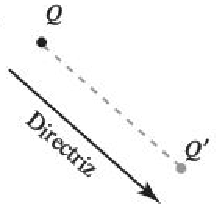
7.

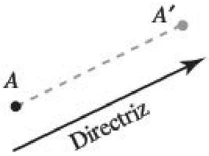


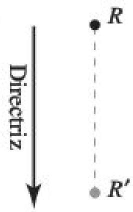
8.

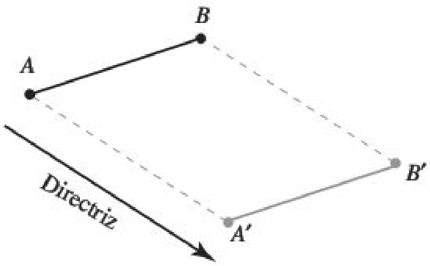


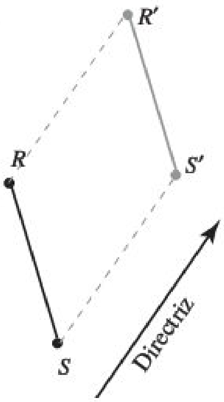
Ejercicio 24

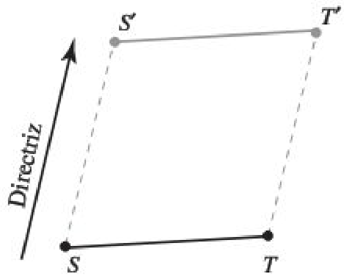
1. 

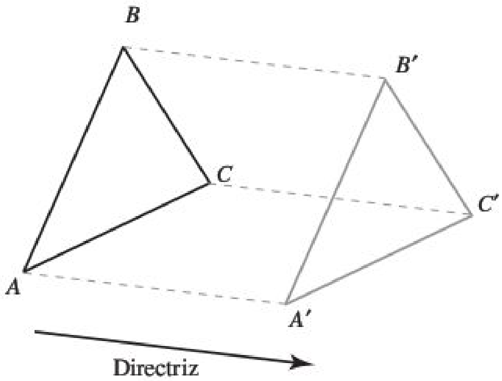
2. 

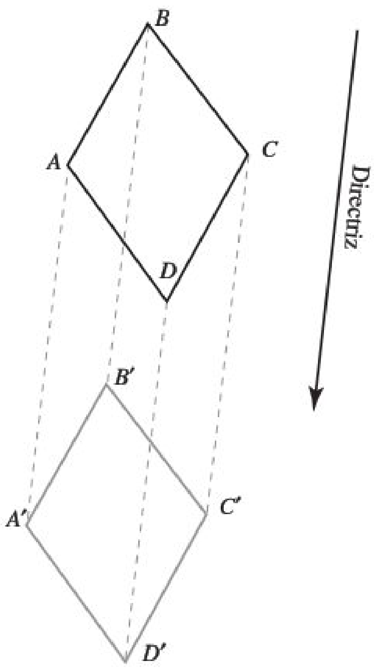
3. 

4. 

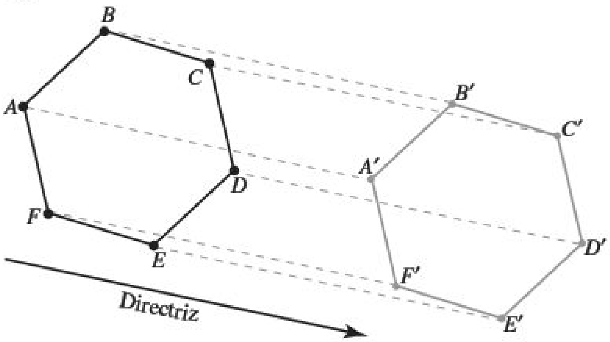
5. 

6. 

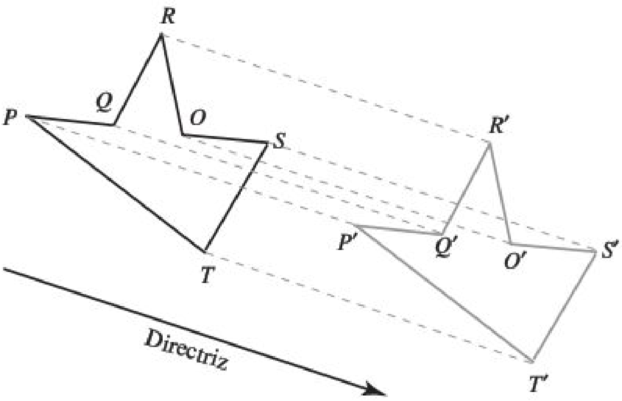
7. 

8. 

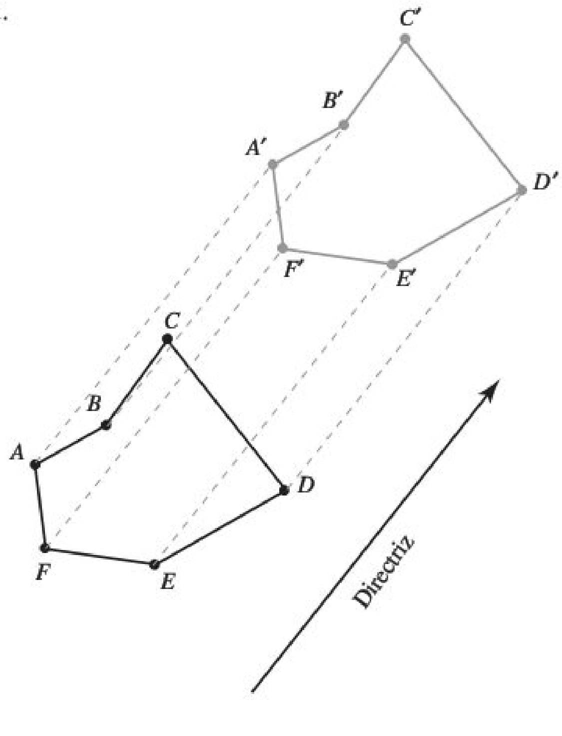
9.



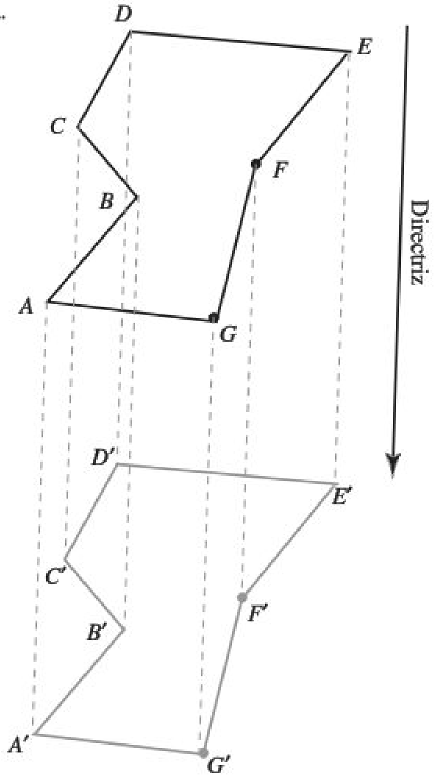
10



11.

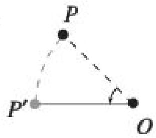


12.

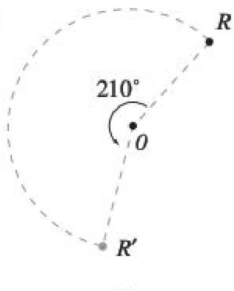


Ejercicio 25

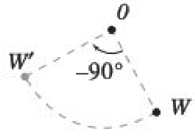
1.



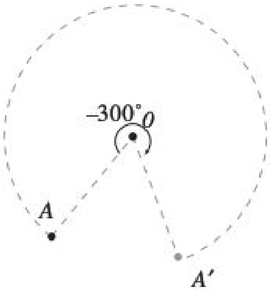
2.



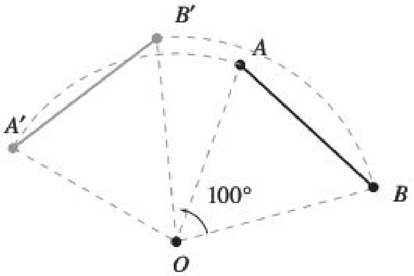
3.



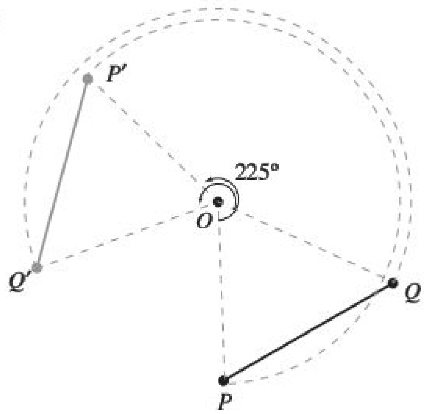
4.


–300°
O
A
A′

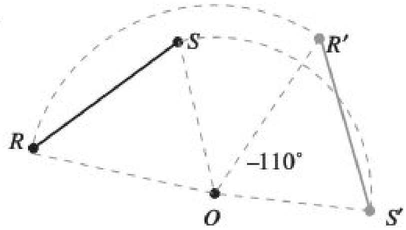
5.


B′
A
A′
100°
B
O

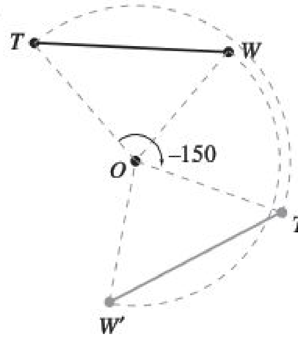
6.


P′
225°
O
Q′
Q
P

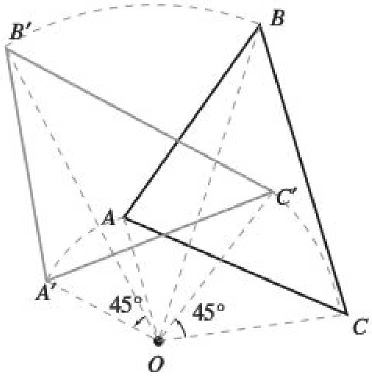
7.


S
R′
R
–110°
O
S′

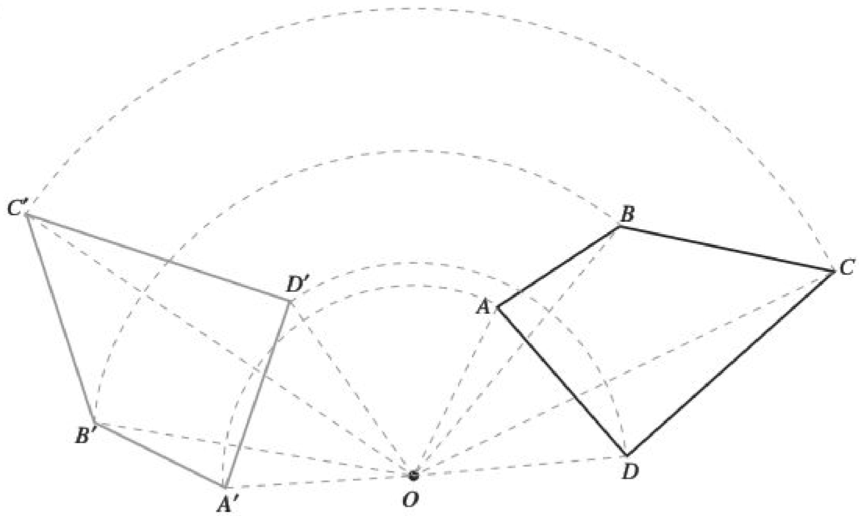
8.


T
W
O
–150
T′
W′

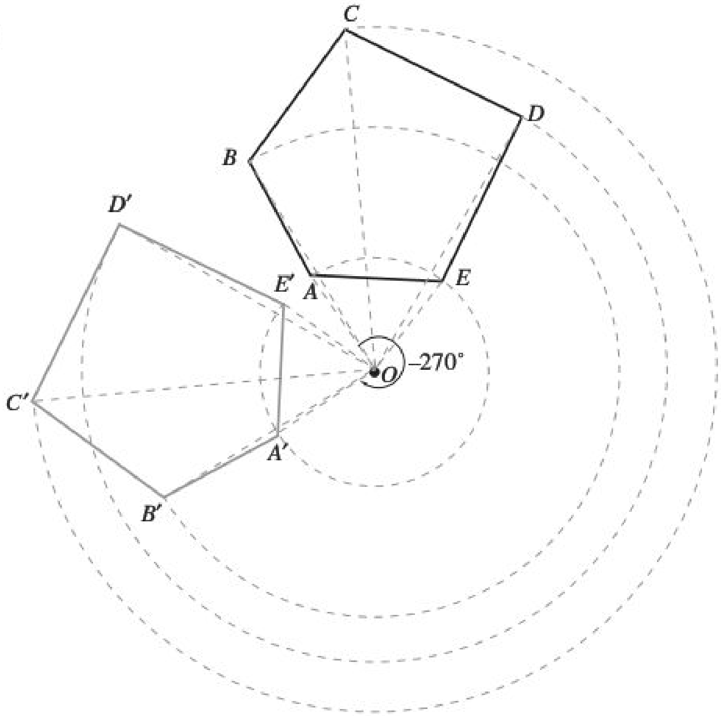
9.


B′
B
C′
A
A′
45°
45°
C
O

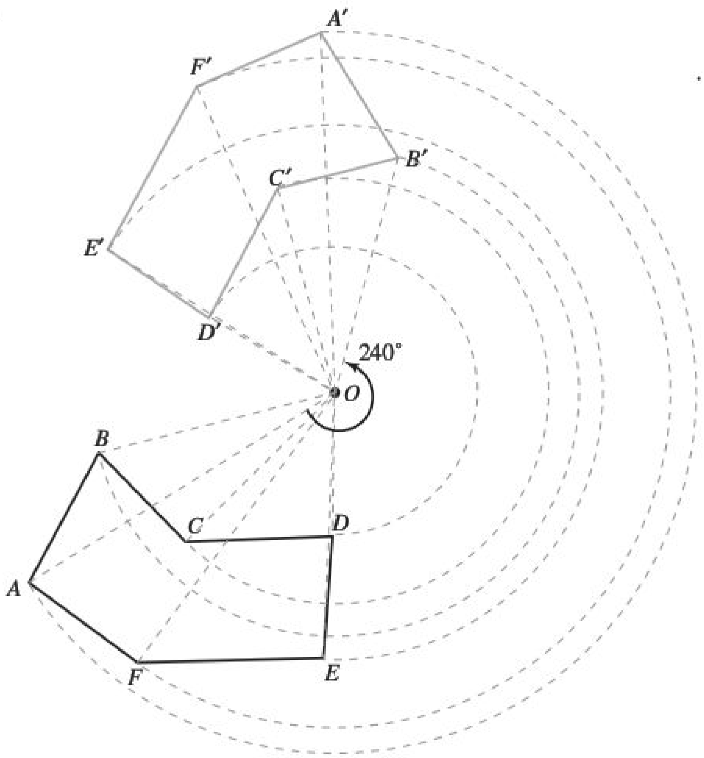
10.


C′
B
C
D′
A
B′
A′
O
D

11.

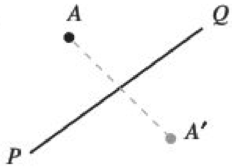


12.

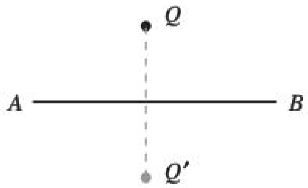


Ejercicio 26

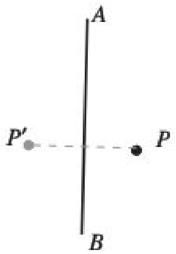
1.



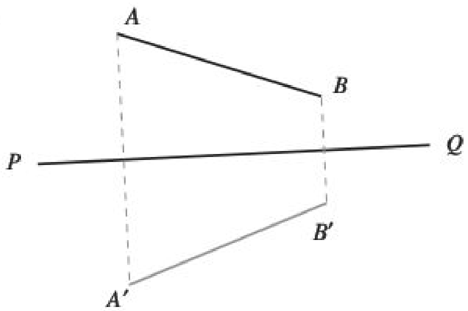
2.



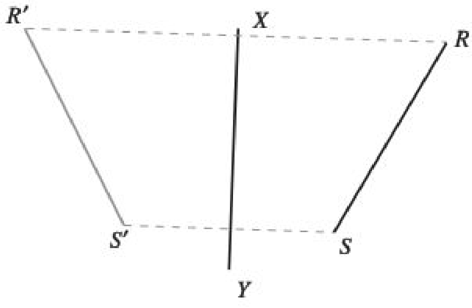
3.



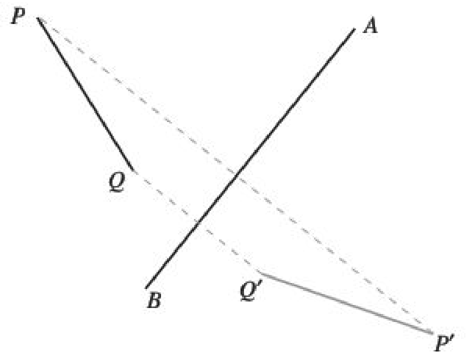
4.



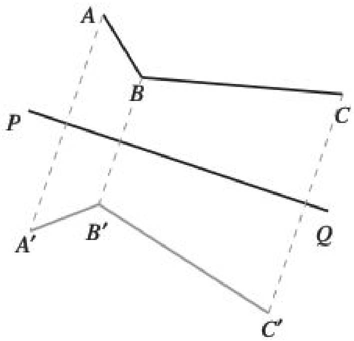
5.



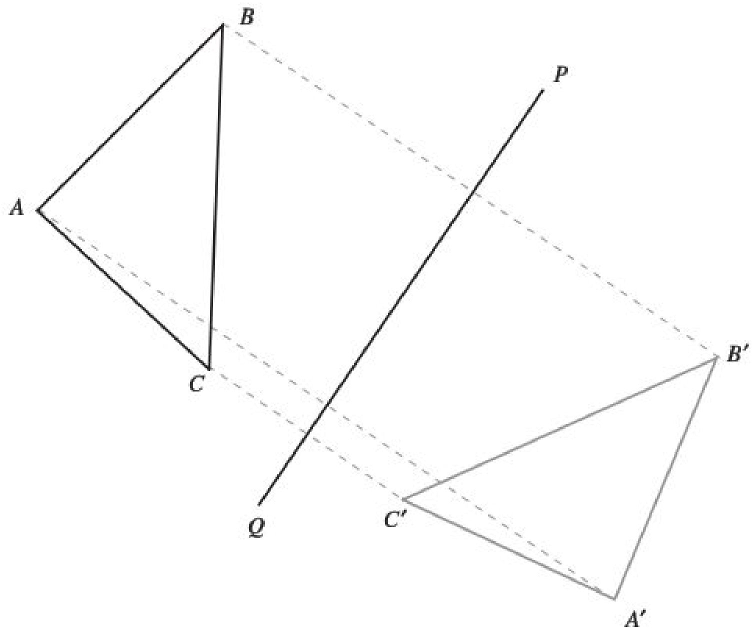
6.



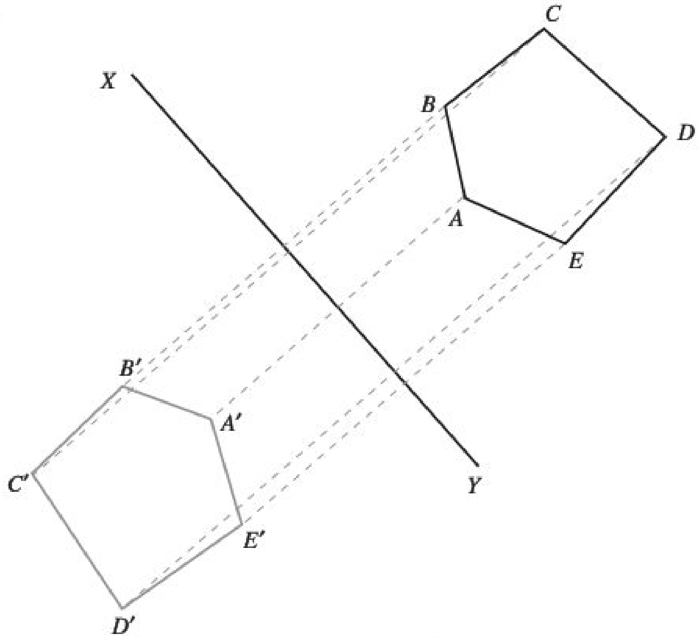
7.



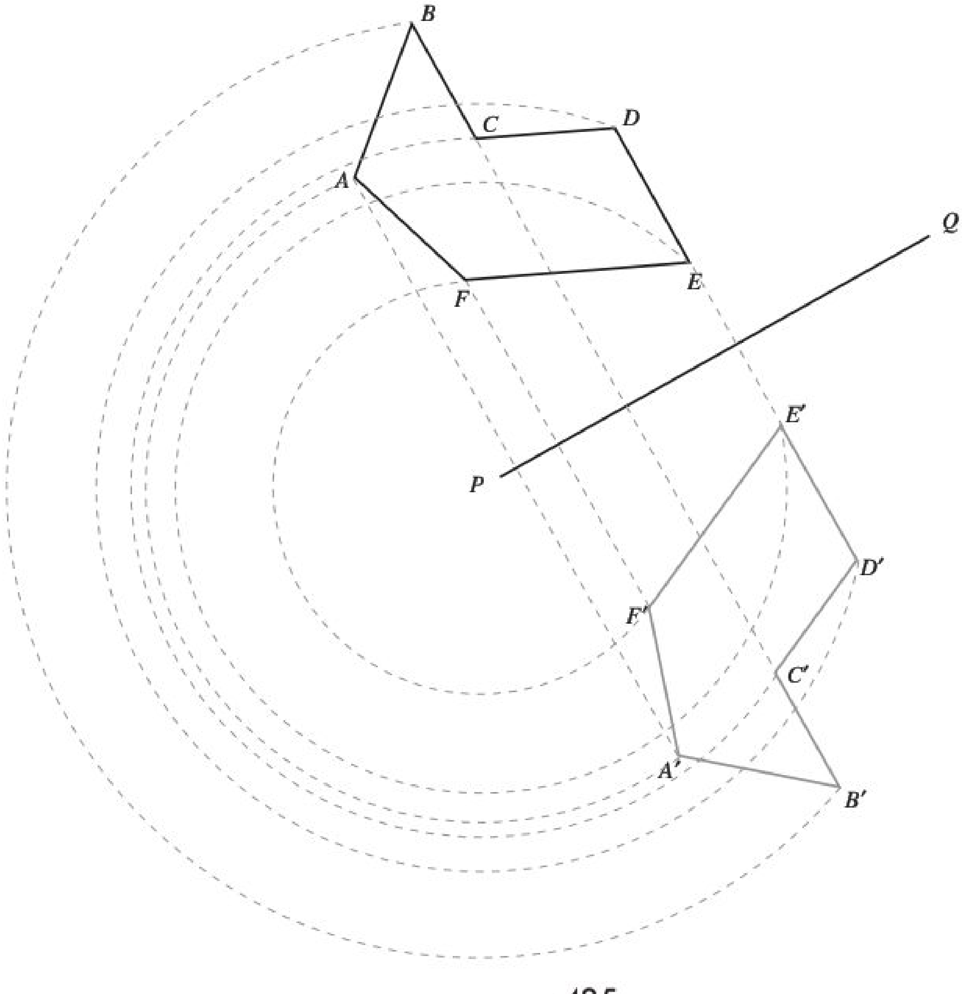
8.



9.

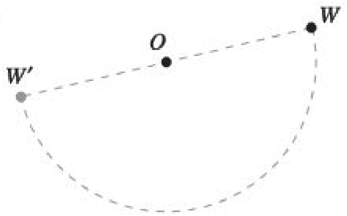


10

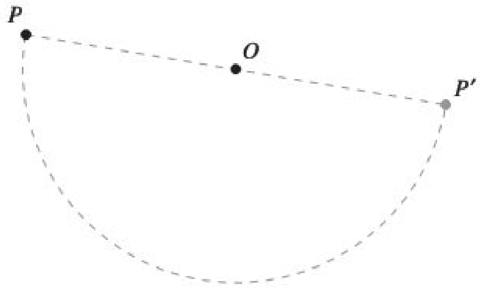


Ejercicio 27

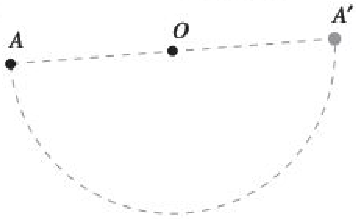
1.



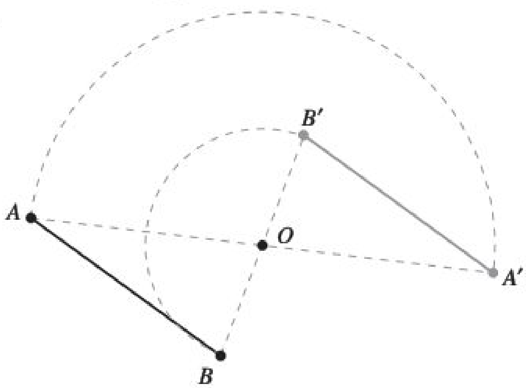
2.



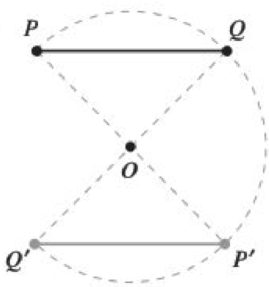
3.



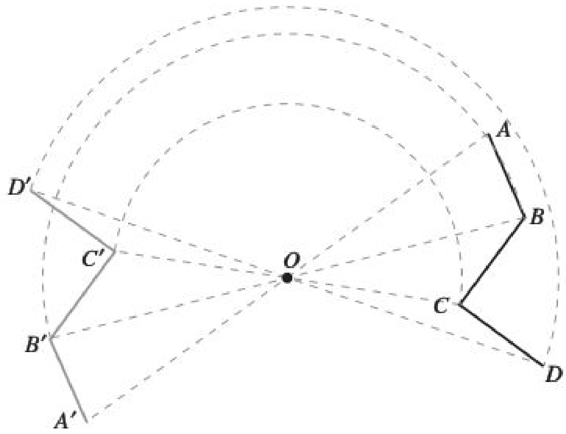
4.



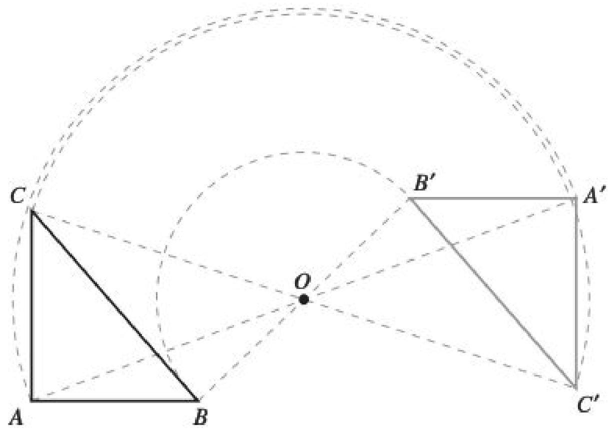
5.



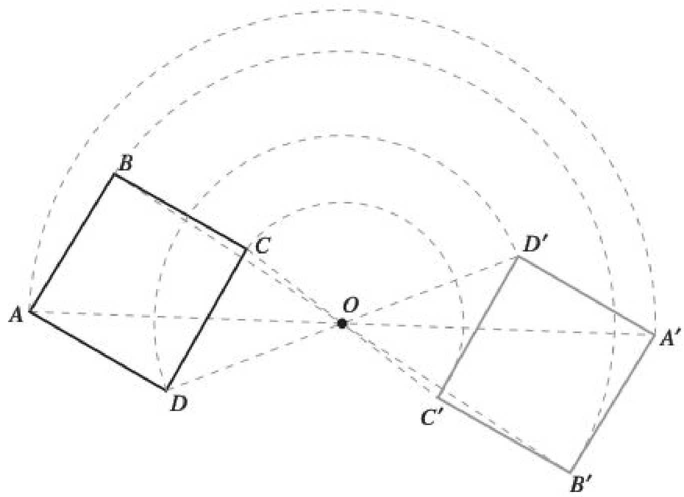
6.



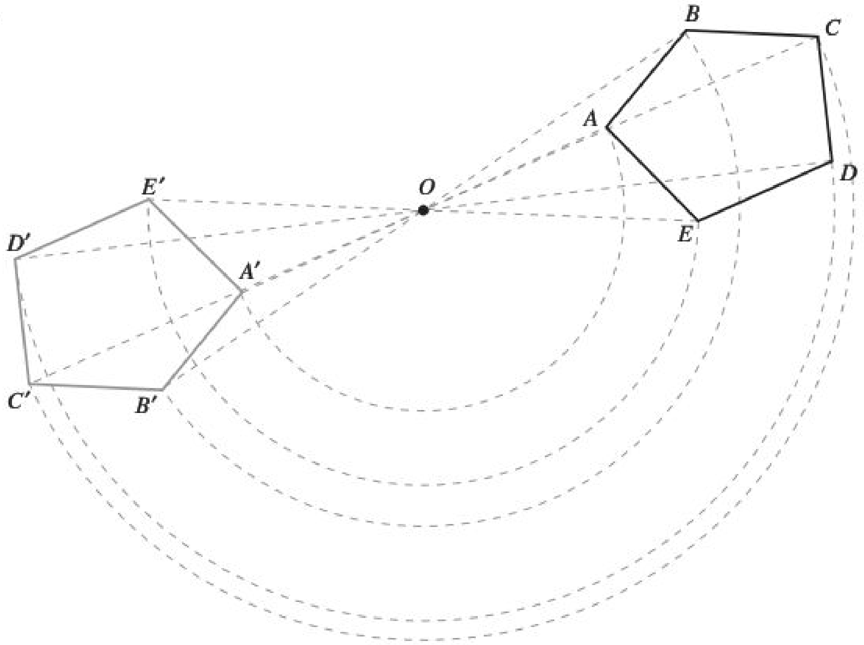
7.



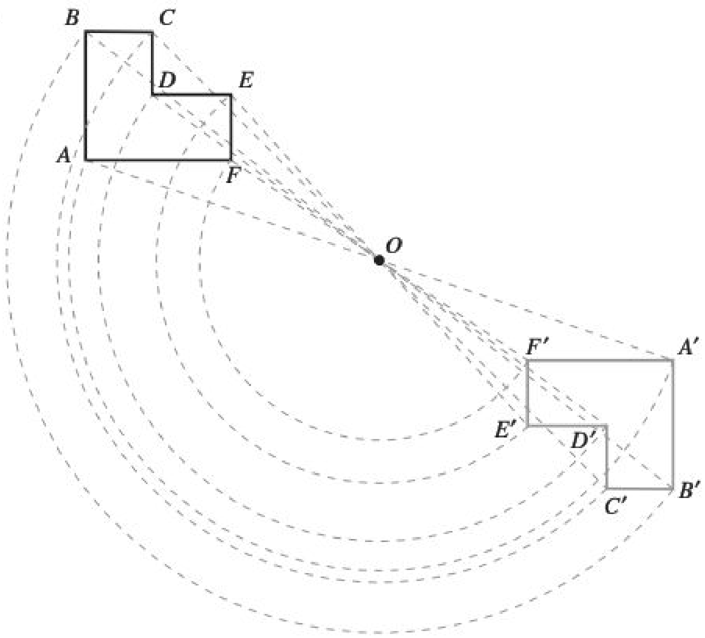
8.



9.



10.



CAPÍTULO 8

EJERCICIO 28

1. $\angle ABC = 30°$, $\angle AOC = 60°$, $\angle BOC = 104°$, $\widehat{AD} = 116°$
2. $\angle a = 75°$, $\angle b = 50°$, $\angle c = 55°$, $\angle d = 55°$, $\angle e = 50°$, $\angle f = 75°$
3. $\angle ABC = 27.5° = 27°30'$
4. $\angle ABC = 85°$, $\angle DBA = 95°$
5. $\angle A = 105°$, $\angle B = 95°$, $\angle C = 75°$, $\angle D = 85°$
6. *a)* $\angle A = 30°$, *b)* $\angle A = 40°$
7. $\angle a = 60°$, $\angle b = 15°$, $\angle c = 25°$, $\angle d = 30°$, $\angle e = 50°$
8. *a)* $\angle A = 15°$, *b)* $\angle A = 40°$, *c)* $\angle A = 30°$, *d)* $\widehat{a} = 35°$
   e) $\widehat{c} = 120°$, *f)* $\widehat{c} - \widehat{a} = 140°$, *g)* $\widehat{a} = 70°$, *h)* $\widehat{a} = 40°$
9. $\angle u = 120°$, $\angle x = 60°$, $\angle y = 30°$, $\angle w = 60°$, $\angle z = 90°$
10. $\angle a = 90°$, $\angle b = 90°$, $\angle c = 90°$, $\angle d = 90°$, $\angle e = 25°$, $\angle f = 25°$,
    $\angle g = 65°$, $\angle h = 65°$, $\angle i = 40°$

EJERCICIO 29

1. *a)* 10.8, *b)* 7.8, *c)* 9.4
2. *a)* 10.09, *b)* 16.2, *c)* 17.29

EJERCICIO 30

1. Exteriores
2. Tangentes exteriores
3. Interiores
4. Secantes
5. Tangentes interiores
6. Tangentes exteriores
7. $3r$
8. $2u$
9. $2\sqrt{3}\ u$
10. $5\ cm$
11. $\overline{C_1C_3} = \frac{7}{18}R$, $\overline{C_1C_2} = \frac{1}{6}R$
12. r
13. $\frac{\sqrt{5}}{2}R$

CAPÍTULO 9

EJERCICIO 31

1. $P = 8.4\ m$, $A = 4.25\ m^2$
2. $P = 24.9\ m$, $A = 29.4\ m^2$
3. $P = 38.6\ m$, $A = 82.5\ m^2$
4. $P = 52.5\ m$, $A = 118.12\ m^2$
5. $P = 40.0\ m$, $A = 110\ m^2$
6. $P = 65.4\ m$, $A = 37.375\ m^2$
7. $P = 36\ cm$, $A = 81\ cm^2$
8. $P = 10\ m$, $A = 6\ m^2$
9. $A = 150\ m^2$
10. $A = (x^2 - 3x + 2)m^2$
11. $A = 63\ dm^2$
12. $A = 17.5\ dm^2$
13. $A = 900\pi\, cm^2$
14. $A = 81\pi\, cm^2$
15. $A = 400\ cm^2$
16. $\$\ 2.6/m^2$
17. $\$\ 725.5$
18. Altura = 36 m, base = 27 m
19. Altura = 10 m
20. 80 círculos, $1280\pi\ cm^2$
21. *a)* $12\sqrt{14}\ u^2$, *b)* $2\sqrt{255}\ u^2$,
    c) $\frac{15}{4}\sqrt{15}\ u^2$
22. $x = 9$, $A = 98\ m^2$
23. *a)* $2\pi\ cm^2$, *b)* $\frac{1}{6}\pi\ cm^2$,
    c) $\frac{9}{4}\pi\ cm^2$, *d)* $\frac{32}{3}\pi\ cm^2$
24. *a)* $(\pi - 2)cm^2$
    b) $\frac{3}{2}\left(\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)cm^2$
    c) $16(\pi - 2)cm^2$

EJERCICIO 32

1. *a)* $\overline{TS} = 24\ cm$, *b)* $\overline{BC} = 13\ cm$, *c)* $P = 44\ cm$, $A = 14\sqrt{11}\ cm^2$
2. $A = 84\ cm^2$
3. $A = 2r^2(4 - \pi)$
4. $A = 3\pi r^2$
6. $A = 25(2\sqrt{3} - \pi)dm^2$
7. $A_s = 25(4 - \pi)\ cm^2$
8. $A_s = 100\pi\ dm^2$
9. $A_s = 64(4 - \pi)\ mm^2$
10. $A_s = 4(10 + \pi)\ dm^2$
11. $A_s = 196(4 - \pi)\ cm^2$
12. $A_s = 1\,152(\pi - 2)\ mm^2$
    $P = 96\pi\ mm$
13. $A_s = 32(6 - \pi)mm^2$
14. $A_s = 128(\pi - 2)\ mm^2$
15. $A_s = 256(4 - \pi)\ cm^2$
16. *a)* $A = 3\sqrt{3}\ dm^2$
    b) $A = 256\sqrt{3}\ dm^2$
17. $A_s = 36\pi\ cm^2$
18. $A_s = \frac{1}{8}\pi\ cm^2$
19. $A_s = 2\ cm^2$,
    $P = 2(1 + \pi)cm$
20. $A_s = \frac{5}{2}\pi\ cm^2$
    $P = (6 + 4\pi)cm$

CAPÍTULO 10

EJERCICIO 33

1. $A_T = 4\sqrt{3}\ cm^2$, $V_T = \frac{2}{3}\sqrt{2}\ cm^3$
2. $A_T = 3\sqrt{3}\ cm^2$, $V_T = \frac{\sqrt{6}}{4}\ cm^3$
3. $A_T = 72\ cm^2$, $V_T = 24\sqrt{3}\ cm^3$
4. $A_T = 150\ cm^2$, $V_T = 125\ cm^3$
5. $A_T = 72\sqrt{3}\ cm^2$, $V_T = 72\sqrt{2}\ cm^3$

6. $A_T = 6\sqrt{3}\ cm^2, V_T = \sqrt{6}\ cm^3$
7. $A_T = \left(60\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right) cm^2, V_T = (350 + 150\sqrt{5}\ )cm^3$
8. $A_T = \left(12\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right) cm^2, V_T = (30 + 14\sqrt{5}\ )cm^3$
9. $A_T = 15\sqrt{3}\ cm^2, V_T = \left(\dfrac{15\sqrt{3}+5\sqrt{15}}{4}\right) cm^3$
10. $A_T = 250\sqrt{3}\ dm^2, V_T = \left(\dfrac{1875\sqrt{2}+625\sqrt{10}}{6}\right) dm^3$
11. $A_T = 9\sqrt{3}\ cm^2$
12. $V_T = \dfrac{27\sqrt{6}}{4}\ cm^3$
13. $h = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\ cm$
14. $V_T = 2\sqrt{2}\ cm^3$
15. $L = \sqrt[3]{2}\ m, A_T = 6\sqrt[3]{4}\ m^2$
16. $h = 6\sqrt{2}\ cm, A_T = 72\sqrt{3}\ cm^2$
17. $V_T = \dfrac{4}{3}\ cm^3$
18. $V_T = 36\ cm^3$
19. $V_T = \dfrac{15\sqrt{2}+5\sqrt{10}}{6}\ cm^3$
20. $V_T = \dfrac{\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt[4]{75}\sqrt{A_t^{\,3}}}{180}$

Ejercicio 34

1. $A_L = 50\ cm^2, A_T = 62\ cm^2, V_T = 30\ cm^3$
2. $A_L = 72\ cm^2,\ A_T = (72+8\sqrt{3})cm^2, V_T = 24\sqrt{3}cm^3$
3. $A_L = 16\ cm^2, A_T = 18\ cm^2, V_T = 4\ cm^3$
4. $A_L = 97.5\ cm^2, A_T = \dfrac{195+75\sqrt{3}}{2}\ cm^2, V_T = \dfrac{975}{8}\sqrt{3}\ cm^3$
5. $A_L = \left(16\sqrt{2}+8\right) cm^2, A_T = \left(24\sqrt{2}+8\right) cm^2, V_T = 16\ cm^3$
6. $A_L = 16\ cm^2, A_T = 24\ cm^2, V_T = 8\ cm^3$
7. $A_L = 64\sqrt{3}\ cm^2, A_T = \left(64\sqrt{3}+24\right) cm^2, V_T = 96\ cm^3$
8. $A_L = 400\ cm^2, A_T = 400\left(2+\sqrt{2}\right) cm^2, V_T = 1000\left(1+\sqrt{2}\right)\ cm^3$
9. $A_L = 1200\ cm^2, A_T = 300\left(4+\sqrt{5}\right) cm^2, V_T = 3000\sqrt{3}\ cm^3$
10. $A_L = 16\sqrt{3}\ cm^2$
11. $V_T = 27u^3$
12. $A_L = 48\ cm^2$
13. $V_T = \dfrac{21}{4}\ cm^3$
14. $A_T = \dfrac{180+25\sqrt{3}}{2}\ cm^2$
15. $V_T = \dfrac{81}{2}\ cm^3$
16. $A_L = 16\left(1+\sqrt{2}\right) cm^2$
17. $V_T = \dfrac{\sqrt{6A_t^{\,3}}}{36}$
18. $V_T = \dfrac{\sqrt{A_L^{\,3}}}{8}$
19. $V_T = \dfrac{27\sqrt{2}}{4}\ cm^3$
20. $A_L = 3\sqrt[3]{3V_t^{\,2}}$

Ejercicio 35

1. $A_L = 3\sqrt{55}\ cm^2, A_T = \left(9+3\sqrt{55}\right) cm^2, V_T = 12\ cm^3$
2. $A_L = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\ cm^2, A_T = \sqrt{3}\ cm^2, V_T = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\ cm^3$
3. $A_L = 12\sqrt{7}\ cm^2, A_T = \left(12\sqrt{7}+7\sqrt{3}\right) cm^2,$
   $V_T = \dfrac{35\sqrt{3}}{3}\ cm^3$
4. $A_L = 38.4\ cm^2, A_T = 64\ cm^2, V_T = 81.92\ cm^3$
5. $A_L = 30\pi\ cm^2, A_T = 48\pi\ cm^2, V_T = 45\pi\ cm^3$
6. $A_L = 32\pi\ cm^2, A_T = 64\pi\ cm^2, V_T = 64\pi\ cm^3$
7. $A_L = 7\sqrt{150}\ \pi\,cm^2, A_T = \left(7\sqrt{150}+49\right)\pi\,cm^2,$
   $V_T = 147\pi\ cm^3$
8. $A_L = 4\sqrt{17}\ \pi\,cm^2, A_T = \left(4+4\sqrt{17}\right)\pi\,cm^2,$
   $V_T = \dfrac{32}{3}\pi\ cm^3$
9. $A_L = \dfrac{15\sqrt{3}}{4}\pi\,cm^2, A_T = \dfrac{5}{4}\left(5+3\sqrt{3}\right)\pi\,cm^2$
   $V_T = \dfrac{25\sqrt{3}}{6}\pi\ cm^3$
10. $A_L = 3\pi\,cm^2, A_T = 4\pi\,cm^2, V_T = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi\ cm^3$
11. $V_T = 12\ cm^3$
12. $V_T = 8\ cm^3$
13. $V_T = 12\sqrt{46}\ cm^3$
14. $V_T = \dfrac{560}{3}\ cm^3$
15. $A_B = 24\sqrt{3}\ cm^2$
16. $V_T = 24\pi\ cm^3$

17. $A_L = 70\pi\ cm^2$

18. $V_T = 12\pi\ cm^3$

19. $A_T = 48\pi\ cm^2$

20. $A_T = \frac{1}{2}\sqrt[3]{18\left(1+\sqrt{5}\right)^3 \pi V_T^{\,2}}$

EJERCICIO 36

1. $A = 64\pi\ cm^2,\ V = \frac{256}{3}\pi\ cm^3$
2. $V = 180\sqrt{5}\ \pi\ cm^3$
3. $V = 6\pi\ cm^3$
4. $V = 270\pi\ cm^3$
5. $A = 60\pi\ cm^2$
6. $A = 96\pi\ cm^2$
7. $V = \frac{28}{3}\pi\ cm^3$
8. $V = \frac{52}{3}\pi\ cm^3$
9. $V = 339\pi\ cm^3,$
   $A = 72\pi\ cm^2$
10. $V = \frac{211}{216}\pi\ cm^3$
11. $A = \frac{200}{3}\pi\ cm^2$
12. $n = 120°$
13. $V = 72\sqrt{3}\ \pi\ cm^3$
14. $r = \frac{9}{2}\ cm,\ A = 9\pi\ cm^2$

    $V = \frac{243}{2}\pi\ cm^3$

CAPÍTULO 11

EJERCICIO 37

Inciso 1)

a)

$sen\ A = \frac{2\sqrt{14}}{9}$ $\quad cos\ A = \frac{5}{9}$ $\quad tan\ A = \frac{2\sqrt{14}}{5}$

$ctg\ A = \frac{5\sqrt{14}}{28}$ $\quad sec\ A = \frac{9}{5}$ $\quad csc\ A = \frac{9\sqrt{14}}{28}$

$sen\ B = \frac{5}{9}$ $\quad cos\ B = \frac{2\sqrt{14}}{9}$ $\quad tan\ B = \frac{5\sqrt{14}}{28}$

$ctg\ B = \frac{2\sqrt{14}}{5}$ $\quad sec\ B = \frac{9\sqrt{14}}{28}$ $\quad csc\ B = \frac{9}{5}$

b)

$sen\ M = \frac{10\sqrt{149}}{149}$ $\quad cos\ M = \frac{7\sqrt{149}}{149}$ $\quad tan\ M = \frac{10}{7}$

$ctg\ M = \frac{7}{10}$ $\quad sec\ M = \frac{\sqrt{149}}{7}$ $\quad csc\ M = \frac{\sqrt{149}}{10}$

$sen\ N = \frac{7\sqrt{149}}{149}$ $\quad cos\ N = \frac{10\sqrt{149}}{149}$ $\quad tan\ N = \frac{7}{10}$

$ctg\ N = \frac{10}{7}$ $\quad sec\ N = \frac{\sqrt{149}}{10}$ $\quad csc\ N = \frac{\sqrt{149}}{7}$

c)

$sen\ A = \frac{2}{3}$ $\quad cos\ A = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $\quad tan\ A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$ctg\ A = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad sec\ A = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ $\quad csc\ A = \frac{3}{2}$

$sen\ B = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $\quad cos\ B = \frac{2}{3}$ $\quad tan\ B = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$ctg\ B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad sec\ B = \frac{3}{2}$ $\quad csc\ B = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

d)

$sen\ M = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad cos\ M = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tan\ M = 1$

$ctg\ M = 1$ $\quad sec\ M = \sqrt{2}$ $\quad csc\ M = \sqrt{2}$

$sen\ N = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad cos\ N = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad tan\ N = 1$

$ctg\ N = 1$ $\quad sec\ N = \sqrt{2}$ $\quad csc\ N = \sqrt{2}$

Inciso 2)

a)

$sen\ \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ $\quad cos\ \theta = \frac{1}{5}$ $\quad tan\ \theta = 2\sqrt{6}$

$ctg\ \theta = \frac{\sqrt{6}}{12}$ $\quad sec\ \theta = 5$ $\quad csc\ \theta = \frac{5\sqrt{6}}{12}$

$sen\ \alpha = \frac{1}{5}$ $\quad cos\ \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ $\quad tan\ \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$

$ctg\ \alpha = 2\sqrt{6}$ $\quad sec\ \alpha = \frac{5\sqrt{6}}{12}$ $\quad csc\ \alpha = 5$

b)

$sen\ A = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ $\quad cos\ A = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ $\quad tan\ A = \frac{3}{2}$

$ctg\ A = \frac{2}{3}$ $\quad sec\ A = \frac{\sqrt{13}}{2}$ $\quad csc\ A = \frac{\sqrt{13}}{3}$

$sen\ B = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ $\quad cos\ B = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ $\quad tan\ B = \frac{2}{3}$

$ctg\ B = \frac{3}{2}$ $\quad sec\ B = \frac{\sqrt{13}}{3}$ $\quad csc\ B = \frac{\sqrt{13}}{2}$

c)

$sen\ N = \frac{1}{2}$ $cos\ N = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $tan\ N = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$ctg\ N = \sqrt{3}$ $sec\ N = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $csc\ N = 2$

$sen\ M = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $cos\ M = \frac{1}{2}$ $tan\ M = \sqrt{3}$

$ctg\ M = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $sec\ M = 2$ $csc\ M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d)

$sen\ \theta = \frac{\sqrt{33}}{6}$ $cos\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{6}$ $tan\ \theta = \sqrt{11}$

$ctg\ \theta = \frac{\sqrt{11}}{11}$ $sec\ \theta = 2\sqrt{3}$ $csc\ \theta = \frac{2\sqrt{33}}{11}$

$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$ $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{33}}{6}$ $tan\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$

$ctg\ \alpha = \sqrt{11}$ $sec\ \alpha = \frac{2\sqrt{33}}{11}$ $csc\ \alpha = 2\sqrt{3}$

e)

$sen\ \beta = \frac{\sqrt{6}}{4}$ $cos\ \beta = \frac{\sqrt{10}}{4}$ $tan\ \beta = \frac{\sqrt{15}}{5}$

$ctg\ \beta = \frac{\sqrt{15}}{3}$ $sec\ \beta = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ $csc\ \beta = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$ $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$ $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{3}$

$ctg\ \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$ $sec\ \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ $csc\ \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

f)

$sen\ A = \frac{4\sqrt{29}}{29}$ $cos\ A = \frac{\sqrt{377}}{29}$ $tan\ A = \frac{4\sqrt{13}}{13}$

$ctg\ A = \frac{\sqrt{13}}{4}$ $sec\ A = \frac{\sqrt{377}}{13}$ $csc\ A = \frac{\sqrt{29}}{4}$

$sen\ B = \frac{\sqrt{377}}{29}$ $cos\ B = \frac{4\sqrt{29}}{29}$ $tan\ B = \frac{\sqrt{13}}{4}$

$ctg\ B = \frac{4\sqrt{13}}{13}$ $sec\ B = \frac{\sqrt{29}}{4}$ $csc\ B = \frac{\sqrt{377}}{13}$

EJERCICIO 38

1.

$sen\ \alpha = -\frac{5}{13}$ $cos\ \alpha = \frac{12}{13}$ $tan\ \alpha = -\frac{5}{12}$

$ctg\ \alpha = -\frac{12}{5}$ $sec\ \alpha = \frac{13}{12}$ $csc\ \alpha = -\frac{13}{5}$

2.

$sen\ \alpha = -\frac{4\sqrt{65}}{65}$ $cos\ \alpha = -\frac{7\sqrt{65}}{65}$ $tan\ \alpha = \frac{4}{7}$

$ctg\ \alpha = \frac{7}{4}$ $sec\ \alpha = -\frac{\sqrt{65}}{7}$ $csc\ \alpha = -\frac{\sqrt{65}}{4}$

3.

$sen\ \beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ $cos\ \beta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ $tan\ \beta = \frac{3}{2}$

$ctg\ \beta = \frac{2}{3}$ $sec\ \beta = \frac{\sqrt{13}}{2}$ $csc\ \beta = \frac{\sqrt{13}}{3}$

4.

$sen\ \omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $cos\ \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $tan\ \omega = -1$

$ctg\ \omega = -1$ $sec\ \omega = \sqrt{2}$ $csc\ \omega = -\sqrt{2}$

5.

$sen\ \alpha = -\frac{2}{3}$ $cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ $tan\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$ctg\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $sec\ \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$ $csc\ \alpha = -\frac{3}{2}$

6.

$sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{77}}{11}$ $cos\ \alpha = \frac{2\sqrt{11}}{11}$ $tan\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{2}$

$ctg\ \alpha = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$ $sec\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{2}$ $csc\ \alpha = -\frac{\sqrt{77}}{7}$

7.

$sen\ \beta = \frac{2\sqrt{22}}{13}$ $cos\ \beta = -\frac{9}{13}$ $tan\ \beta = -\frac{2\sqrt{22}}{9}$

$ctg\ \beta = -\frac{9\sqrt{22}}{44}$ $sec\ \beta = -\frac{13}{9}$ $csc\ \beta = \frac{13\sqrt{22}}{44}$

8.

$sen\ \omega = -\frac{\sqrt{65}}{65}$ $cos\ \omega = \frac{8\sqrt{65}}{65}$ $tan\ \omega = -\frac{1}{8}$

$ctg\ \omega = -8$ $sec\ \omega = \frac{\sqrt{65}}{8}$ $csc\ \omega = -\sqrt{65}$

9.

$sen\ \delta = \frac{5}{13}$ $cos\ \delta = -\frac{12}{13}$ $tan\ \delta = -\frac{5}{12}$

$ctg\ \delta = -\frac{12}{5}$ $sec\ \delta = -\frac{13}{12}$ $csc\ \delta = \frac{13}{5}$

10.

$sen\ \beta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ $cos\ \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $tan\ \beta = \sqrt{2}$

$ctg\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $sec\ \beta = -\sqrt{3}$ $csc\ \beta = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

11.

$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $cos\ \alpha = -\frac{1}{2}$ $tan\ \alpha = -\sqrt{3}$

$ctg\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $sec\ \alpha = -2$ $csc\ \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

12.

$sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $cos\ \alpha = \frac{1}{2}$ $tan\ \alpha = -\sqrt{3}$

$ctg\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $sec\ \alpha = 2$ $csc\ \alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

EJERCICIO 39

Inciso 1)

a) $-sen\ 30° = -cos\ 60°$

b) $-tan\ 15° = -ctg\ 75°$

c) $cos\ 80° = sen\ 10°$

d) $csc\ 60° = sec\ 30°$

e) $sec\ 2° = csc\ 88°$

f) $-sen\ 60°\ 37'\ 25'' = -cos\ 29°\ 22'\ 35''$

g) $-ctg\ 45° = -tan\ 45°$

h) $tan\ 74°\ 46'\ 24'' = ctg\ 15°\ 13'\ 36''$

i) $-cos\ 84°\ 35' = -sen\ 5°\ 25'$

j) $sec\ 39°\ 11'\ 48'' = csc\ 50°\ 48'\ 12''$

k) $csc\ 53° = sec\ 37°$

l) $-ctg\ 48° = -tan\ 42°$

m) $cos\ 38°\ 54' = sen\ 51°\ 6'$

n) $-sen\ 28°\ 35'\ 24'' = -cos\ 61°\ 24'\ 36''$

Inciso 2)

a) $-sen\ 160°$

b) $-ctg\ 140°$

c) $sec\ 240°$

d) $cos\ 280°$

e) $-tan\ 345°$

f) $-csc\ 90°$

g) $cos\ 225°\ 15'\ 46''$

h) $-ctg\ 176°\ 45'\ 23''$

i) $sec\ 108°\ 32'$

j) $-sen\ 228°15'$

Inciso 3)

a) $-sen\ 20°$

b) $-ctg\ 20°$

c) $cos\ 80°$

d) $tan\ 45°$

e) $-csc\ 81°\ 27'\ 48''$

f) $-sec\ 50°$

g) $-sen\ 55°$

h) $-tan\ 76°\ 34'\ 42''$

i) $cos\ 68°\ 45'\ 24''$

j) $ctg\ 20°$

k) $-sec\ 40°$

l) $-csc\ 31°\ 26'\ 19''$

Inciso 4)

a) 0.3090

b) 0.9657

c) 1.1034

d) 0.1219

e) 0.7536

f) 1.0187

g) 0.9261

h) 3.8208

i) 1.0170

j) 0.4975

Capítulo 12

Ejercicio 40

Grados	Radianes	sen	cos	tan	csc	sec	ctg
0°	0	0	1	0	No existe	1	No existe
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	No existe	1	No existe	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0	No existe	-1	No existe
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	No existe	-1	No existe	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0	No existe	1	No existe

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$	5. $\frac{3}{16}$	9. 1	13. -1
2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$	6. $\frac{1}{8}$	10. $\frac{\sqrt{3}}{4}$	14. 0
3. $\frac{3}{2}$	7. 9	11. 2	15. 2
4. 0	8. $\sqrt{2}$	12. 1	

16 a 20. No se incluye la solución por ser demostraciones.

CAPÍTULO 13

EJERCICIO 41

1. Amplitud: 2, Periodo: $\frac{2}{3}\pi$

   Desplazamiento de fase: $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

2. Amplitud: 2, Periodo: $\frac{1}{2}\pi$

   Desplazamiento de fase: 0, $\frac{1}{2}\pi$

3. Amplitud: $\frac{4}{3}$, Periodo: 3π

   Desplazamiento de fase: $-\frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi$

4. Amplitud: 5, Periodo: 8π

   Desplazamiento de fase: $-2\pi, 6\pi$

5. Amplitud: 4

   Periodo: 2π

   Desplazamiento de fase: $\frac{3\pi}{4}, \frac{11}{4}\pi$

6. Amplitud: 3

   Periodo: π

   Desplazamiento de fase: 0, π

7. Amplitud: $\frac{3}{2}$

   Periodo: $\frac{2}{5}\pi$

   Desplazamiento de fase: $-\frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{10}$

8. Amplitud: $\frac{1}{3}$

   Periodo: 8π

   Desplazamiento de fase: $-\frac{4\pi}{3}, \frac{20\pi}{3}$

9. Amplitud: 1

   Periodo: 6π

   Desplazamiento de fase: 0, 6π

10. Periodo: $\frac{\pi}{2}$

    Asíntotas verticales: $\ldots, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \ldots$

    Desplazamiento de fase: no existe

11. Periodo: π

    Asíntotas verticales: $\ldots, -\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}, \ldots$

    Desplazamiento de fase: $-\frac{\pi}{4}$ a la izq.

12. Periodo: $\frac{\pi}{3}$

    Asíntotas verticales: $\ldots, -\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \ldots$

    Desplazamiento de fase: $\frac{\pi}{9}$ a la der.

13. Periodo: 2π

    Asíntotas verticales: $\ldots, \pi, 3\pi, \ldots$

    Desplazamiento de fase: 2π a la der.

14. Periodo: 4π

    Asíntotas verticales: $\ldots, 0, 4\pi, \ldots$

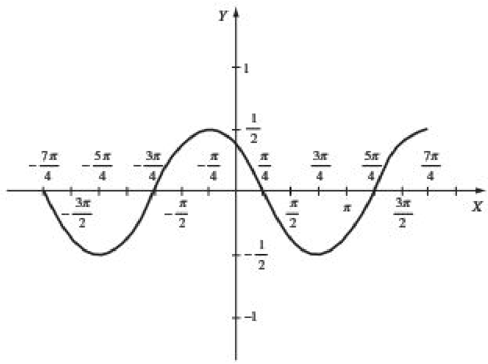
    Desplazamiento de fase: 2π a la der.

15. Periodo: π

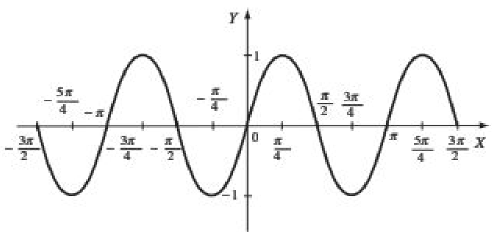
    Asíntotas verticales: $\ldots, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$

    Desplazamiento de fase: π a la der.

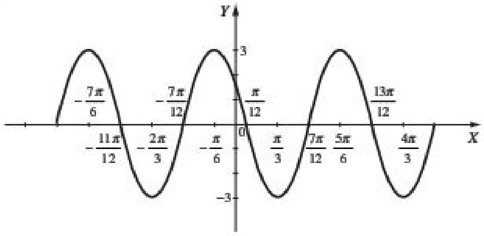
16.



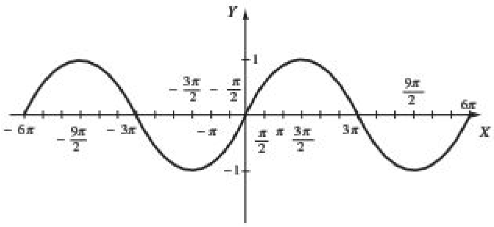
17.



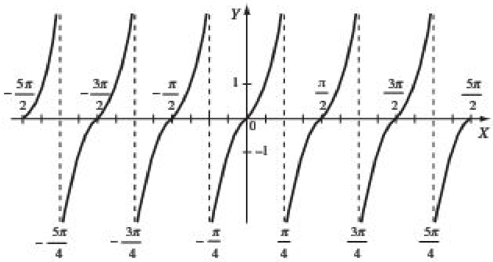
18.



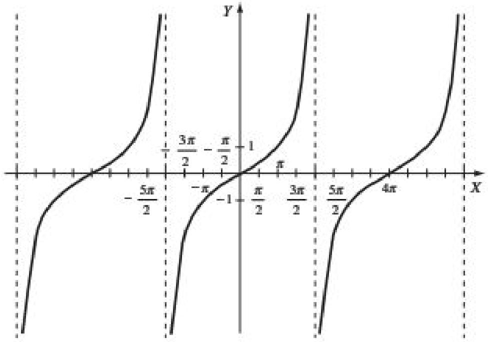
19.



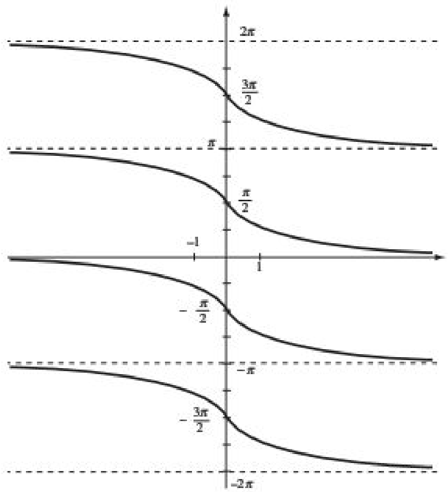
20.



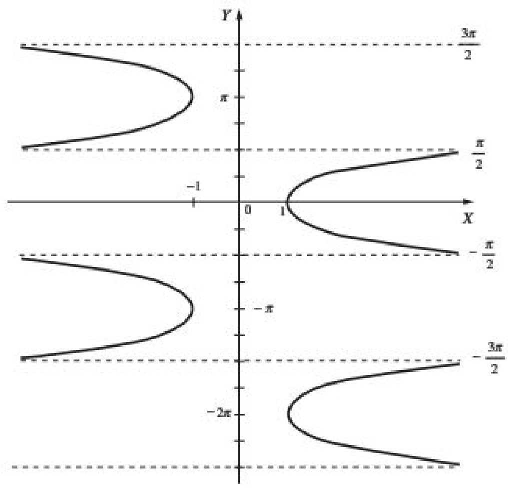
21.



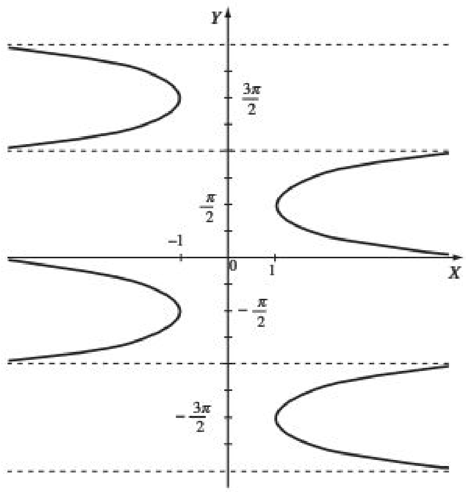
22.



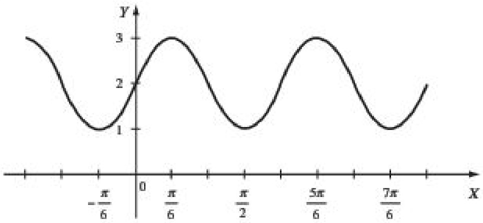
23.



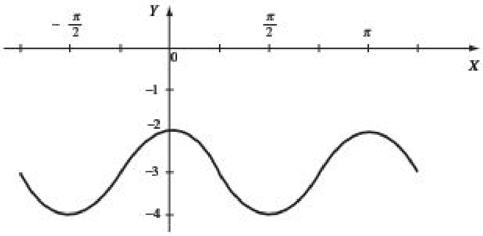
24.



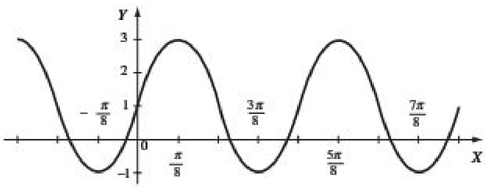
25.



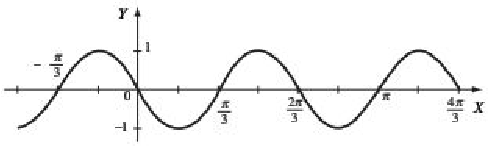
26.



27.



28.



Capítulo 14

Ejercicio 42

1 a 32. No se incluye la solución por ser demostraciones.

Ejercicio 43

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
3. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
4. -1
5. $-\sqrt{2}$
6. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
7. $-\sqrt{3}$
8. $-\sqrt{2}$
9. 1
10. 1
11. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}sen\,\theta+\cos\theta\right)$
12. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(sen\,x-\cos x\right)$
13. $sen\,\beta$
14. $\frac{1}{\tan x}=\cot x$
15. $\frac{2}{\sqrt{3}\cos\alpha-sen\,\alpha}$
16. $\frac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}$
17. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}sen\,x-\cos x\right)$
18. $-\sec 2\omega$
19. $-\tan\alpha$
20. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(sen\theta+\cos\theta\right)$

Ejercicio 44

1. $-\left(2+\sqrt{3}\right)$
2. $2-\sqrt{3}$
3. $\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$
4. $-\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$
5. $2+\sqrt{3}$
6. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
7. $\sqrt{3}-2$
8. $-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$
9. $\sqrt{2}-\sqrt{6}$
10. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

11. $sen\,(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{13}}{65}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{18\sqrt{13}}{65}$,

$\tan(\alpha+\beta)=-\frac{1}{18}$

12. $sen\,(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

$\tan(\alpha-\beta)=-\left(2+\sqrt{3}\right)$

13. Funciones del ángulo $(\alpha+\beta)$

$$sen(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{3}}{9}\left(2+\sqrt{10}\right), \cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{9}\left(\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)$$

$$\tan(\alpha+\beta)=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}, ctg(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{2},$$

$$\sec(\alpha+\beta)=-\left(\sqrt{15}+2\sqrt{6}\right), csc(\alpha+\beta)=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{30}$$

Funciones del ángulo $(\alpha-\beta)$

$$sen\left(\alpha-\beta\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}\left(2-\sqrt{10}\right), \cos\left(\alpha-\beta\right)=-\frac{\sqrt{3}}{9}\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)$$

$$\tan\left(\alpha-\beta\right)=2\sqrt{5}-3\sqrt{2}, ctg\left(\alpha-\beta\right)=\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2}$$

$$\sec\left(\alpha-\beta\right)=\sqrt{15}-2\sqrt{6}, csc\left(\alpha-\beta\right)=-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{30}$$

14 a 34. No se incluye la solución por ser demostraciones.

EJERCICIO 45

1.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\pi}{8}$

$sen\ \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad ctg\ \frac{\pi}{8} = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$

$cos\ \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad sec\ \frac{\pi}{8} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$

$tan\ \frac{\pi}{8} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $\quad csc\ \frac{\pi}{8} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{3}{8}\pi$

$sen\ \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad ctg\ \frac{3}{8}\pi = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$cos\ \frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad sec\ \frac{3}{8}\pi = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

$tan\ \frac{3}{8}\pi = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ $\quad csc\ \frac{3}{8}\pi = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{5}{8}\pi$

$sen\ \frac{5}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad ctg\ \frac{5}{8}\pi = -\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$cos\ \frac{5}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad sec\ \frac{5}{8}\pi = -\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

$tan\ \frac{5}{8}\pi = -\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ $\quad csc\ \frac{5}{8}\pi = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{7}{8}\pi$

$sen\ \frac{7}{8}\pi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad ctg\ \frac{7}{8}\pi = -\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

$cos\ \frac{7}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad sec\ \frac{7}{8}\pi = -\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

$tan\ \frac{7}{8}\pi = -\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $\quad csc\ \frac{7}{8}\pi = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

2.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\alpha}{2}$

$sen\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$ $\quad ctg\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{31-8\sqrt{15}}$

$cos\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$ $\quad sec\ \frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

$tan\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{31+8\sqrt{15}}$ $\quad csc\ \frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

Funciones trigonométricas del ángulo 2α

$sen\ 2\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{8}$ $\quad ctg\ 2\alpha = -\frac{7\sqrt{15}}{15}$

$cos\ 2\alpha = \frac{7}{8}$ $\quad sec\ 2\alpha = \frac{8}{7}$

$tan\ 2\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{7}$ $\quad csc\ 2\alpha = -\frac{8\sqrt{15}}{15}$

3.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\beta}{2}$

$sen\ \frac{\beta}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ $\quad ctg\ \frac{\beta}{2} = -\frac{2}{3}$

$cos\ \frac{\beta}{2} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$ $\quad sec\ \frac{\beta}{2} = -\frac{\sqrt{13}}{2}$

$tan\ \frac{\beta}{2} = -\frac{3}{2}$ $\quad csc\ \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Funciones trigonométricas del ángulo 2β

$sen\ 2\beta = \frac{120}{169}$ $\quad ctg\ 2\beta = -\frac{119}{120}$

$cos\ 2\beta = -\frac{119}{169}$ $\quad sec\ 2\beta = -\frac{169}{119}$

$tan\ 2\beta = -\frac{120}{119}$ $\quad csc\ 2\beta = \frac{169}{120}$

4.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\omega}{2}$

$sen\ \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\quad ctg\ \frac{\omega}{2} = -\frac{\sqrt{39}}{3}$

$cos\ \frac{\omega}{2} = -\frac{\sqrt{13}}{4}$ $\quad sec\ \frac{\omega}{2} = -\frac{4\sqrt{13}}{13}$

$tan\ \frac{\omega}{2} = -\frac{\sqrt{39}}{13}$ $\quad csc\ \frac{\omega}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Funciones trigonométricas del ángulo 2ω

$sen\ 2\omega = -\frac{5\sqrt{39}}{32}$ $\quad ctg\ 2\omega = \frac{7\sqrt{39}}{195}$

$cos\ 2\omega = -\frac{7}{32}$ $\quad sec\ 2\omega = -\frac{32}{7}$

$tan\ 2\omega = \frac{5\sqrt{39}}{7}$ $\quad csc\ 2\omega = -\frac{32\sqrt{39}}{195}$

5.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\alpha}{2}$

$sen\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{98+28\sqrt{7}}}{14}$ $\quad ctg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{33-12\sqrt{7}}}{3}$

$cos\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{98-28\sqrt{7}}}{14}$ $\quad sec\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{42+12\sqrt{7}}}{3}$

$tan\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{33+12\sqrt{7}}}{3}$ $\quad csc\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{42-12\sqrt{7}}}{3}$

Funciones trigonométricas del ángulo 2α

$sen\ 2\alpha = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$ $\quad ctg\ 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{12}$

$cos\ 2\alpha = \frac{1}{7}$ $\quad sec\ 2\alpha = 7$

$tan\ 2\alpha = -4\sqrt{3}$ $\quad csc\ 2\alpha = -\frac{7\sqrt{3}}{12}$

6.

Funciones trigonométricas del ángulo α

$sen\ \alpha = \frac{2}{3}$ $\quad cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\quad tan\ \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

7.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\beta}{2}$

$sen\ \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{578+136\sqrt{17}}}{34}$ $\quad ctg\ \frac{\beta}{2} = -\sqrt{33-8\sqrt{17}}$

$cos\ \frac{\beta}{2} = -\frac{\sqrt{578-136\sqrt{17}}}{34}$ $\quad sec\ \frac{\beta}{2} = -\sqrt{34+8\sqrt{17}}$

$tan\ \frac{\beta}{2} = -\sqrt{33+8\sqrt{17}}$ $\quad csc\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{34-8\sqrt{17}}$

Funciones trigonométricas del ángulo β

$sen\ \beta = -\frac{\sqrt{17}}{17}$ $\quad ctg\ \beta = 4$

$cos\ \beta = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$ $\quad sec\ \beta = -\frac{\sqrt{17}}{4}$

$tan\ \beta = \frac{1}{4}$ $\quad csc\ \beta = -\sqrt{17}$

8.

Funciones trigonométricas del ángulo α

$sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad tan\ \alpha = 2$ $\quad sec\ \alpha = \sqrt{5}$

$cos\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad ctg\ \alpha = \frac{1}{2}$ $\quad csc\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

9.

Funciones trigonométricas del ángulo $\frac{\beta}{2}$

$sen\ \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad tan\ \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad sec\ \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$cos\ \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ $\quad ctg\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{2}$ $\quad csc\ \frac{\beta}{2} = \sqrt{3}$

Funciones trigonométricas del ángulo β

$sen\ \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\quad tan\ \beta = 2\sqrt{2}$ $\quad sec\ \beta = 3$

$cos\ \beta = \frac{1}{3}$ $\quad ctg\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\quad csc\ \beta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

10.

Funciones trigonométricas del ángulo ω

$sen\ \omega = -\frac{3}{5}$ $\quad ctg\ \omega = -\frac{4}{3}$

$cos\ \omega = \frac{4}{5}$ $\quad sec\ \omega = \frac{5}{4}$

$tan\ \omega = -\frac{3}{4}$ $\quad csc\ \omega = -\frac{5}{3}$

Funciones trigonométricas del ángulo 2ω

$sen\ 2\omega = -\frac{24}{25}$ $\quad ctg\ 2\omega = -\frac{7}{24}$

$cos\ 2\omega = \frac{7}{25}$ $\quad sec\ 2\omega = \frac{25}{7}$

$tan\ 2\omega = -\frac{24}{7}$ $\quad csc\ 2\omega = -\frac{25}{24}$

Funciones trigonométricas del ángulo 4ω

$sen\ 4\omega = -\frac{336}{625}$ $\quad ctg\ 4\omega = \frac{527}{336}$

$cos\ 4\omega = -\frac{527}{625}$ $\quad sec\ 4\omega = -\frac{625}{527}$

$tan\ 4\omega = \frac{336}{527}$ $\quad csc\ 4\omega = -\frac{625}{336}$

11 a 25. No se incluye la solución por ser demostraciones.

EJERCICIO 46

1. $\frac{1}{2}\left[sen(2\alpha)+sen(2\beta)\right]$

2. $\frac{1}{2}\left[sen(105°)+sen(15°)\right]$

3. $-\frac{1}{2}\left[cos(2y)-cos(2\beta)\right]$

4. $\frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right]$

5. $\frac{1}{2}\left[sen(120°)+sen(45°)\right]$

6. $-\frac{1}{2}\left[cos(45°)-cos(30°)\right]$

7. $\frac{1}{2}\left[sen(2x)-sen(2\alpha)\right]$

8. $\frac{1}{2}\left[cos(\pi)+cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right]$

9. $\frac{1}{2}\left[sen(45°)-sen(30°)\right]$

10. $\frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{11}{6}\pi\right)+cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right]$

11. $-2\left[cos(4\alpha)-cos(2\alpha)\right]$

12. $\frac{5}{2}\left[sen(8\alpha)+sen(4\alpha)\right]$

13. $\frac{1}{2}\left[sen(90°)-sen(4°)\right]$

14. $\frac{1}{2}\left[cos\frac{1}{3}(2\alpha+5\beta)+cos\frac{1}{3}(2\alpha-5\beta)\right]$

15. $\frac{3}{2}\left[sen\left(\frac{19}{2}\alpha\right)+sen\left(\frac{17}{2}\alpha\right)\right]$

16. $\dfrac{2}{cos\frac{\pi}{2}+cos\frac{\pi}{6}}$

17. $\dfrac{sen3\alpha+sen\alpha}{sen3\alpha-sen\alpha}$

18. $\dfrac{2}{sen\pi-sen\frac{\pi}{2}}$

19. $\dfrac{cos2\alpha-cos2x}{cos2\alpha+cos2x}$

20. $\frac{1}{2}\left[sen(4\alpha)+sen(2\beta)\right]$

EJERCICIO 47

1 a 14. No se incluye la solución por ser demostraciones.

EJERCICIO 48

1. $2\left[sen(120°)\cdot cos(45°)\right]$

2. $2\left[cos\left(\frac{5}{2}\beta\right)cos\left(\frac{9}{2}\beta\right)\right]$

3. $2\left[sen(180°)cos(60°)\right]$

4. $-2\left[sen(4\theta)sen(\theta)\right]$

5. $2\left[cos(45°)cos(7°31')\right]$

6. $2\left[cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)sen\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right]$

7. $2\left[cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)cos\left(\frac{1}{36}\pi\right)\right]$

8. $2\left[cos(30°)sen(5°)\right]$

9. $-2\left[sen\left(\frac{5}{12}\pi\right)sen\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right]$

10. $2\left[cos(\beta)cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right]$

11. $2\left[sen\left(\frac{7}{24}\pi\right)cos\left(\frac{1}{24}\pi\right)\right]$

12. $2\left[sen\left(\frac{3}{4}(\alpha+\beta)\right)cos\left(\frac{1}{4}(\alpha-\beta)\right)\right]$

13. $-2\left[sen(\alpha)sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

14. $2\left[sen(\beta)cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$

15. $2\left[sen\left(\frac{3}{4}\pi\right)cos\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)\right]$

16. $-2\left[sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$

EJERCICIO 49

1 a 12. No se incluye la solución por ser demostraciones.

EJERCICIO 50

1. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$
2. $\frac{\pi}{2}$, $36°\ 52'\ 11''$
3. $\frac{7}{12}\pi$, $\frac{23}{12}\pi$
4. $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
5. $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$
6. $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$
7. $0, \pi, 2\pi$
8. $0, \pi, 2\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$
9. $0, 2\pi, 152°\ 44', 207°\ 15'$
10. $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
11. $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
12. $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$
13. $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
14. $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$
15. $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$
16. $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$
17. $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
18. $0, \pi, 2\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$
19. $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$
20. $0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \pi, 2\pi$
21. $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \pi, 2\pi$
22. $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$
23. $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$
24. $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$
25. $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$
26. $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$
27. $\frac{7}{12}\pi$, $\frac{11}{12}\pi$
28. $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$
29. $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$
30. $\frac{1}{3}\pi$, π, $\frac{5}{3}\pi$

CAPÍTULO 15

EJERCICIO 51

1. $c=\sqrt{145}$, $A=44°\ 54'$, $\angle C=45°\ 6'$
2. $a=2.11$, $c=3.39$, $\angle C=58°$
3. $c=5.23$, $b=7.24$, $\angle A=43°\ 40'$
4. $b=52.55$, $\angle A=38°\ 11'\ 40''$, $\angle C=51°\ 48'\ 20''$
5. $c=13$, $b=13\sqrt{2}$, $\angle C=45°$
6. $a=13.28$, $c=18.28$, $\angle A=36°$
7. $a=12.51$, $\angle A=33°\ 46'\ 46''$, $\angle C=56°\ 13'\ 14''$
8. $a=25.71$, $c=22.9$, $\angle C=41°\ 48'$
9. $a=82.68$, $b=100.36$, $\angle A=55°\ 28'$
10. $c=7.87$, $\angle A=66°\ 39'\ 17''$, $\angle C=23°\ 20'\ 43''$
11. $b=22.36$, $c=18.86$, $\angle C=57°\ 33'$
12. $c=\sqrt{13}$, $\angle A=29°\ 1'\ 1''$, $\angle C=60°\ 58'\ 59''$
13. $a=15.27$, $c=17.19$, $\angle A=41°\ 37'$
14. $b=7.9$, $\angle A=71°\ 33'\ 54''$, $\angle C=18°\ 26'\ 5''$
15. $a=6.28$, $b=14.44$, $\angle C=64°\ 11'$
16. $\angle A=26°\ 33'\ 54''$, $\angle C=63°\ 26'\ 6''$

17. $a = 5, b = 13, c = 12, \angle A = 22° \ 37' \ 11'', \angle C = 67° \ 22' \ 48''$

18. $a = 4, b = 5, c = 3, \angle A = 53° \ 7' \ 49'', \angle C = 36° \ 52' \ 11''$

19. $\angle A = \angle C = 45°$

20. $\angle A = 19° \ 28' \ 16'', \angle C = 70° \ 31' \ 44''$

Ejercicio 52

1. 288.4 m
2. 4.2 m
3. $38° \ 44' \ 4''$, 1.65m
4. $\left(10\sqrt{2}+1\right) m$
5. $54° \ 8'$
6. 52.07 m
7. 11.25 m
8. a) 53.6 m , b) 59.1 m, c) 22.6 m
9. $53° \ 7'$, 3 m
10. $21° \ 47'$, 14 dm
11. $L = \frac{\pi R}{90}\left[180 - \cos^{-1}\left(\frac{R-r}{l}\right)\right] + \frac{\pi r}{90}\cos^{-1}\left(\frac{R-r}{l}\right) + 2\sqrt{l^2 - (R-r)^2}$
12. sí

Capítulo 16

Ejercicio 53

1. $a = 20.9, c = 14.7, \angle A = 79° \ 1'$
2. $b = 52.4, a = 47.7, \angle B = 79° \ 16'$
3. $b = 21.03, a = 46.9, \angle C = 67° \ 44'$
4. $b = 86.21, c = 66.87, \angle B = 76° \ 39'$
5. $a = 23.35, c = 25.23, \angle A = 67°$
6. $b = 17.09, c = 22.3, \angle C = 99°$
7. $c = 9.43, \angle B = 57° \ 58' \ 51'', \angle C = 90° \ 1' \ 8''$
8. $a = 19.8, \angle A = 118° \ 23' \ 35'', \angle B = 26° \ 21' \ 24''$
9. $c = 15.11, \angle A = 40° \ 5' \ 50'', \angle C = 83° \ 19' \ 9''$
10. $b = 11.4, \angle A = 46° \ 14' \ 25'', \angle B = 66° \ 24' \ 34''$
11. $\angle A = 31° \ 48' \ 52'', \angle B = 34° \ 12' \ 58'', \angle C = 113° \ 58' \ 10''$
12. $\angle A = 27° \ 25' \ 16'', \angle B = 44° \ 1' \ 54'', \angle C = 108° \ 32' \ 50''$
13. $\angle A = 52° \ 17' \ 24'', \angle B = 44° \ 33' \ 55'', \angle C = 83° \ 8' \ 41''$
14. $\angle A = 48° \ 20' \ 58'', \angle B = 36° \ 42' \ 37'', \angle C = 94° \ 56' \ 23''$
15. $c = 15.3, \angle A = 46° \ 39' \ 8'', \angle B = 65° \ 20' \ 52''$
16. $b = 37.07, \angle A = 47° \ 7' \ 45'', \angle C = 56° \ 52' \ 15''$
17. $a = 46.05, \angle B = 34° \ 5' \ 24'', \angle C = 110° \ 54' \ 36''$
18. $c = 15.65, \angle A = 41° \ 52' \ 18'', \angle B = 82° \ 7' \ 42''$

Ejercicio 54

1. $\overline{AB} = 369.95 \ m$
2. 1.76 cm
3. 30.34 km
4. 19.4 km
5. 8.03 m
6. 4.7 cm
7. 322.92 km
8. 307.4 m
9. 29.07 km
10. 180.37 m
11. 29.7 cm

12 a 13. No se incluye la solución por ser demostraciones.

Capítulo 17

Ejercicio 55

1. $z = \sqrt{17} cis 345° 37' 49''$
2. $z = 2cis \ 30°$
3. $z = 2\sqrt{2} \ cis \ 135°$
4. $z = 5cis \ 0°$
5. $z = 3cis \ 270°$
6. $z = \frac{5}{6} \ cis \ 53° \ 7' \ 48''$
7. $z = cis \ 315°$
8. $z = cis \ 150°$
9. $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{26} \ cis \ 75°$
10. $z_2 \cdot z_4 = \sqrt{26} \ cis \ 165°$
11. $z_1 \cdot z_3 = 2\sqrt{2} \ cis \ 105°$
12. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2\sqrt{26} \ cis \ 135°$
13. $z_1 \cdot z_3 \cdot z_4 = 4cis \ 240°$
14. $\frac{z_1}{z_4} = cis \ 270°$
15. $\frac{z_2}{z_4} = \frac{\sqrt{26}}{2} \ cis \ 255°$
16. $\frac{z_1}{z_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ cis \ 345°$
17. $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \frac{\sqrt{26}}{2} \ cis \ 15°$
18. $\frac{z_2}{z_1 \cdot z_4} = \frac{\sqrt{13}}{2} \ cis \ 210°$
19. $\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_4} = \sqrt{13} \ cis \ 270°$
20. $\frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{z_4} = 2\sqrt{13} \ cis \ 0°$
21. $z^2 = 9cis \ 240°$
22. $z^4 = 81cis \ 100°$
23. $z^3 = 125cis \ 45°$
24. $z_1 = 4cis \ 30°, z_2 = 4cis \ 210°$
25. $z_1 = 2cis \ 20°, z_2 = 2cis \ 80°, z_3 = 2cis \ 140°, z_4 = 2cis \ 200°$
    $z_5 = 2cis \ 260°, z_6 = 2cis \ 320°$
26. $z_1 = cis \ 60°, z_2 = cis \ 180°, z_3 = cis \ 300°$
27. $(z \cdot z_1)^2 = 36cis \ 120°$
28. $z_1 = 2cis \ 30°, z_2 = 2cis \ 150°, z_3 = 2cis \ 270°$
29. $28cis \ 100°$
30. $z_1 = 4cis \ 10°, z_2 = 4cis \ 130°, z_3 = 4cis \ 250°$

Geometría analítica

Capítulo 18

Ejercicio 1

1. $3u$
2. $4u$
3. $5\sqrt{3}u$
4. $\frac{5}{2}u$
5. $\frac{5}{4}u$
6. $1u$
7. $\frac{13}{24}u$
8. $\frac{17}{5}u$
9. $5a$
10. $\frac{13}{12}a$
11. $\overline{AB} = 7u$
12. $\overline{DC} = \frac{5}{4}u$
13. $\overline{AD} = \frac{5}{2}u$
14. $\overline{BA} = -7u$
15. $\overline{CB} = \frac{13}{4}u$
16. $\overline{DA} = -\frac{5}{2}u$
17. $\overline{DB} = \frac{9}{2}u$
18. $\overline{CA} = -\frac{15}{4}u$
19. $\overline{BC} = -\frac{13}{4}u$
20. $\overline{CD} = -\frac{5}{4}u$

Ejercicio 2

1. $r = \frac{1}{3}$
2. $r = \frac{1}{4}$
3. $r = 1$
4. $r = -\frac{7}{2}$
5. $r = -\frac{4}{35}$
6. $r = \frac{3}{5}a$
7. $r = \frac{7}{3}$
8. $r = -\frac{7}{9}$
9. $x = -\frac{14}{3}$
10. $x = \frac{27}{4}$
11. $x = -\frac{5}{2}$
12. $x = \frac{5}{2}$
13. $x = -\frac{17}{20}$
14. $x = -\frac{23}{40}$

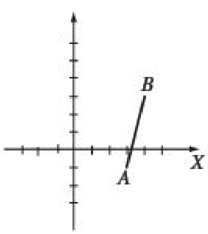
Ejercicio 3

1. 1
2. $\frac{11}{2}$
3. -5
4. $-\frac{7}{12}$
5. $\frac{5}{12}$
6. $-\frac{7}{24}$
7. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
8. $-\frac{5}{24}a$
9. $-\frac{7}{4}$
10. $-\frac{3}{2}$

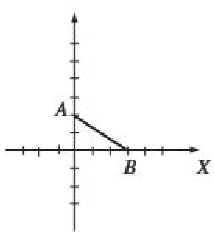
Capítulo 19

Ejercicio 4

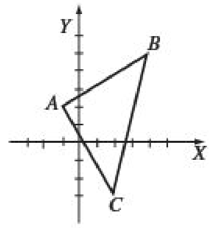
1.



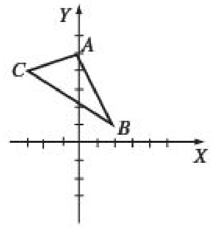
2.



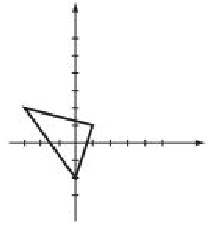
3.



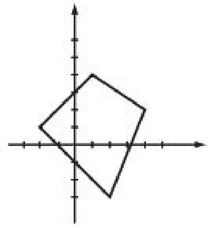
4.



5.



6.



Ejercicio 5

1. $10u$
2. $\sqrt{5}u$
3. $5\sqrt{2}u$
4. $4\sqrt{2}u$
5. $8u$
6. $\frac{\sqrt{181}}{6}u$
7. $\frac{5}{4}u$
8. $\frac{\sqrt{5}}{4}u$
9. $\frac{\sqrt{17}}{2}u$
10. $1u$
11. $28.72u$
12. $15.64u$
13. $25.10u$
14. $12u$
15. Es triángulo isósceles, debido a que $d_{AC} = d_{BC}$.
16. Perímetro = 40.96 u; Área = 133.517 u^2
17. Ordenada ($y = 11$, $y = 1$), puntos $(-4, 11)$ y $(-4, 1)$
18. $P(4, 6)$ y $P\left(-\frac{84}{13}, -\frac{126}{13}\right)$
19. sí
20. no
21. sí
22. no

Ejercicio 6

1. $r = -\frac{1}{2}$
2. $r = -\frac{4}{3}$
3. $r = \frac{1}{2}$
4. $r = -2$
5. $r = -\frac{1}{10}$
6. $r = \frac{2}{7}$
7. $P(6, -5)$
8. $P(5, 0)$
9. $P\left(\frac{2}{5}, \frac{19}{5}\right)$
10. $P\left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right)$
11. $P\left(4, -\frac{9}{2}\right)$
12. $P(-a, 3b)$
13. $r = -\frac{5}{2}$
14. $P\left(\frac{19}{5}, \frac{37}{5}\right)$
15. $P(3, 7)$
16. $r = 2$
17. $P(2, 1)$
18. $P\left(5, -\frac{11}{2}\right)$
19. $P_2\left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right)$
20. $P\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{5}\right)$

21. $r=1; x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$
22. Los puntos de trisección son:

$$A\left(\frac{x_1+2x_2}{3},\frac{y_1+2y_2}{3}\right)$$

$$B\left(\frac{2x_1+x_2}{3},\frac{2y_1+y_2}{3}\right)$$

Ejercicio 7

1. $Pm\left(\frac{5}{2},2\right)$; P_t: $\left(\frac{8}{3},3\right)$ y $\left(\frac{7}{3},1\right)$
2. $Pm\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$; P_t: $(1,5)$ y $(2,6)$
3. $Pm\,(4,7)$; P_t: $\left(\frac{7}{3},\frac{17}{3}\right)$ y $\left(\frac{17}{3},\frac{25}{3}\right)$
4. $Pm\left(8,-\frac{11}{2}\right)$; P_t: $(7,-6)$ y $(9,-5)$
5. $Pm\left(\frac{5}{12},\frac{3}{2}\right)$; P_t: $\left(\frac{4}{9},\frac{4}{3}\right)$ y $\left(\frac{7}{18},\frac{5}{3}\right)$
6. $Pm\left(\frac{11}{24},-\frac{1}{2}\right)$; P_t: $\left(\frac{7}{18},0\right)$ y $\left(\frac{19}{36},-1\right)$
7. $P_2(-5,-5)$
8. $(-1,1)$, $(7,9)$ y $(-3,5)$

Ejercicio 8

1. $3u^2$	4. $10u^2$	7. $31u^2$	10. $50.5u^2$
2. $15u^2$	5. $6u^2$	8. $17u^2$	
3. $28.5u^2$	6. a^2u^2	9. $19u^2$	

Capítulo 20

Ejercicio 9

1. $\frac{2}{5}$	7. No existe	13. $30°$
2. $-\frac{7}{5}$	8. $-\frac{17}{5}$	14. $35°\ 15'$
		15. $90°$
3. $-\frac{1}{8}$	9. $-\frac{5}{72}$	16. $0°$ o $180°$
		17. Son colineales
4. $\frac{4}{3}$	10. $\frac{b}{a}$	18. Son colineales
	11. $45°$	19. Son colineales
5. $-\frac{2}{3}$	12. $135°$	20. No son colineales
6. 0		

21. Son colineales	24. Son colineales	27. $y=-3+\sqrt{3}$
22. No son colineales	25. $x=\frac{2}{3}$	28. $y=-6$
23. Son colineales	26. $x=4$	

Ejercicio 10

1. Son perpendiculares
2. Los lados opuestos son paralelos y de igual pendiente

$$m_{BC}=m_{AD}=\frac{2}{5}\ \text{y}\ m_{CD}=m_{AB}=3$$

3. Las rectas son paralelas

$$m_{AB}=m_{CD}=-\frac{5}{3}$$

4. En un triángulo rectángulo los catetos son perpendiculares.

$$m_{AB}\cdot m_{AC}=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$$

5. En un cuadrado los lados opuestos son paralelos y los lados adyacentes son perpendiculares.

$$m_{AB}=m_{CD}=4,\ m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{4}\ \text{y}\ m_{AC}\cdot m_{BD}=-1$$

6. $x=5$
7. $m_{AB}=m_{CD}=-2;\ m_{BC}=m_{AD}=\frac{2}{7}$

Ejercicio 11

1. $\alpha=57°\ 5'\ 41''$
2. $26°\ 33'\ 54''$, $116°\ 33'\ 54''$
   $36°\ 52'\ 11''$
3. $63°\ 26'\ 5''$, $63°\ 26'\ 5''$ y
   $53°\ 7'\ 48''$
4. Un ángulo de $90°$
   los restantes de $45°$
5. $63°\ 26'\ 5''$ y $26°\ 33'\ 54''$
6. $\alpha=131°\ 49'\ 12''$
7. $130°\ 14'\ 10''$; $49°\ 45'\ 50''$
8. $117°\ 16'\ 36''$
9. $m_1=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$
10. $x=8$
11. $m_1=-\frac{1}{7}$, $m_2=7$
12. $-2+\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$

Capítulo 21

Ejercicio 12

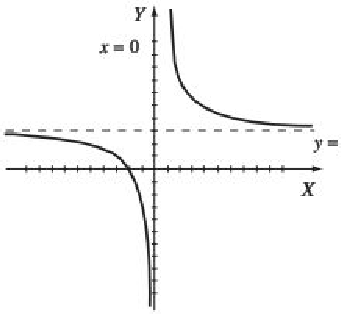
1. Intersecciones con los ejes: $(-2, 0)$

   Simetría: No existe

   Extensión: $\{x \in R \mid x \neq 0\}$; $\{y \in R \mid y \neq 3\}$

   Asíntotas: Horizontal: $y = 3$, Vertical: $x = 0$

   Gráfica



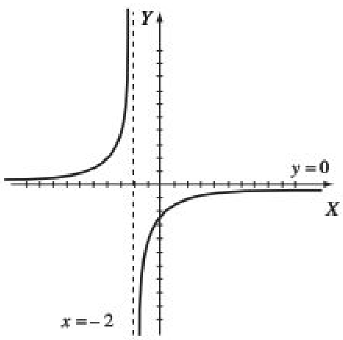
2. Intersecciones con los ejes: $(0, -2)$

   Simetría: No existe

   Extensión: $\{x \in R \mid x \neq -2\}$; $\{y \in R \mid y \neq 0\}$

   Asíntotas: Horizontal: $y = 0$, Vertical: $x = -2$

   Gráfica



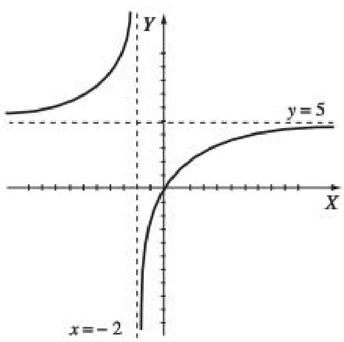
3. Intersecciones con los ejes: $(0, 0)$

   Simetría: No existe

   Extensión: $\{x \in R \mid x \neq -2\}$; $\{y \in R \mid y \neq 5\}$

   Asíntotas: Horizontal: $y = 5$, Vertical: $x = -2$

   Gráfica



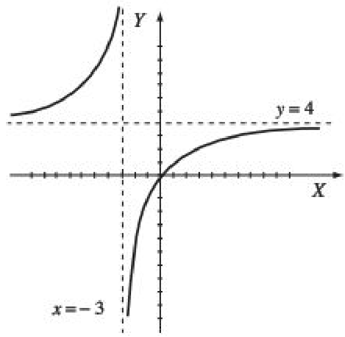
4. Intersecciones con los ejes: $(0, 0)$

   Simetría: No existe

   Extensión: $\{x \in R \mid x \neq -3\}$; $\{y \in R \mid y \neq 4\}$

   Asíntotas: Horizontal; $y = 4$, Vertical: $x = -3$

   Gráfica



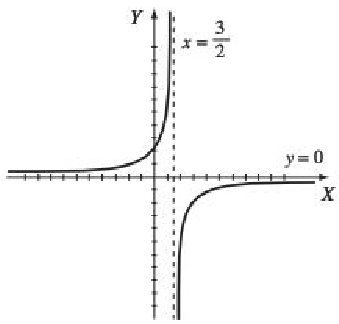
5. Intersecciones con los ejes: $(0, 2)$

   Simetría: No existe

   Extensión: $\left\{x \in R \mid x \neq \frac{3}{2}\right\}$; $\{y \in R \mid y \neq 0\}$

   Asíntotas: Horizontal: $y = 0$, Vertical: $x = \frac{3}{2}$

   Gráfica



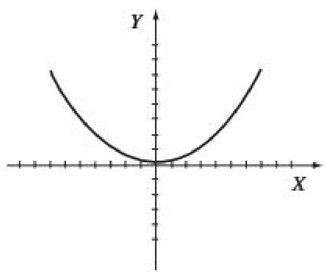
6. Intersecciones con los ejes: $(0, 0)$

   Simetría: Sólo con el eje Y

   Extensión: $\{x \in R\}$; $\{y \in R \mid y \geq 0\}$

   Asíntotas: No existen

   Gráfica



7. Intersecciones con los ejes: Eje $X \to (-4, 0), (4, 0)$

Eje $Y \to (0, 2), (0, -2)$

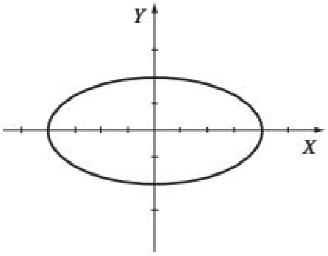
Simetría: Es simétrica con ambos ejes y con el origen

Extensión: $\{x \in R \mid -4 \le x \le 4\}$

$\{y \in R \mid -2 \le y \le 2\}$

Asíntotas: No existen

Gráfica



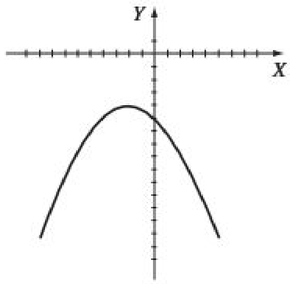
8. Intersecciones con los ejes: $(0, -5)$

Simetría: No existe

Extensión: $\{x \in R\}$; $\{y \in R \mid y \le -4\}$

Asíntotas: No existen

Gráfica



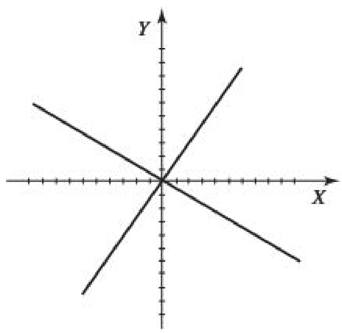
9. Intersecciones con los ejes: $(0, 0)$

Simetría: Sólo respecto al origen

Extensión: $\{x \in R\}$; $\{y \in R\}$

Asíntotas: No existen

Gráfica



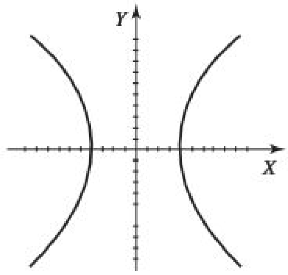
10. Intersecciones con los ejes: Eje $X \to (-4, 0), (4, 0)$

Simetría: Es simétrica con los ejes y con el origen

Extensión: $\{x \in R \mid x \le -4 \text{ o } x \ge -4\}$; $\{y \in R\}$

Asíntotas: No hay horizontales o verticales

Gráfica



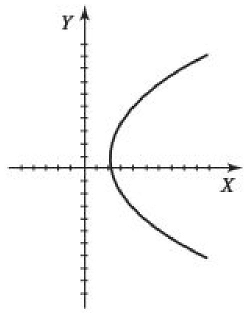
11. Intersecciones con los ejes: $\left(\frac{17}{8}, 0\right)$

Simetría: No existe

Extensión: $\{x \in R \mid x \ge 2\}$; $\{y \in R\}$

Asíntotas: No existen

Gráfica



12. Intersecciones con los ejes: $(0, 0)$ y $(6, 0)$

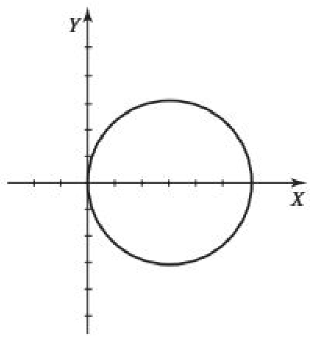
Simetría: Sólo con el eje X

Extensión: $\{x \in R \mid 0 \le x \le 6\}$

$\{y \in R \mid -3 \le y \le 3\}$

Asíntotas: No existen

Gráfica



EJERCICIO 13

1. $y - x = 2$
2. $xy = 1$
3. $x - 2y = 0$
4. $x^2 + y^2 = 25$
5. $7x - 3y + 4 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$
7. $x^2 + 10y + 25 = 0$
8. $2x + y + 5 = 0$
9. $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 51 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$
11. $21x^2 - 12xy + 16y^2 + 60x + 60y - 600 = 0$
12. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$
13. $28y^2 - 36x^2 - 63 = 0$; $36x^2 - 28y^2 + 63 = 0$
14. $16x^2 + 7y^2 - 112 = 0$
15. $7x^2 - 9y^2 - 28x + 90y - 260 = 0$

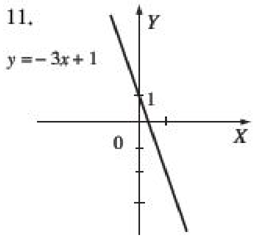
CAPÍTULO 22

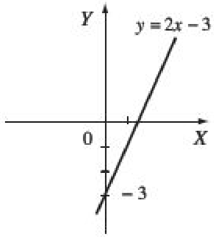
EJERCICIO 14

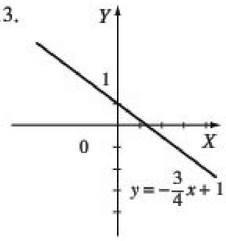
1. $2x + 5y - 14 = 0$
2. $2x - y + 3 = 0$
3. $2y - 1 = 0$
4. $2x + 2y + 1 = 0$
5. $3x - 5y + 11 = 0$
6. $4x - 3y + 6 = 0$
7. $x - 3 = 0$
8. $8x - 4y - 7 = 0$
9. $3x + 2y - 2 = 0$
10. $3x + 5y - 12 = 0$
11. $3x + 2y - 5 = 0$
12. $\sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0$
13. $x + y - 4 = 0$
14. $x - 3 = 0$
15. $x + 4 = 0$
16. $3x - 2y - 12 = 0$
17. $x + 4y + 2 = 0$
18. $2x + y = 0$
    $3x - 4y + 11 = 0$
    $5x + 2y - 25 = 0$
    $y = 0$
19. $2x + y - 4 = 0$
20. $6x + 5y - 82 = 0$
21. $2x - 3y + 8 = 0$
22. $4x - 7y + 10 = 0$
    $7x - 5y - 26 = 0$
    $3x + 2y + 22 = 0$
23. $4x - 6y - 5 = 0$
24. $10x - 3y - 4 = 0$
25. $2x - 3y - 7 = 0$
26. $2x + 11y + 5 = 0$
    $5x - 16y - 31 = 0$
27. $(8, 6), (-2, -8), (-6, -2)$
28. $(-3, 0), (3, 2), (4, -2)$
29. $(-3, 2), (-1, -2)$
    $(7, 0), (5, 4)$
30. $120x - y = 0$
31. $3t - 2v + 4 = 0$
32. $x + 40y - 600 = 0$
33. $120x - y + 1\,200 = 0$
34. $9T_C - 5T_F + 160 = 0$

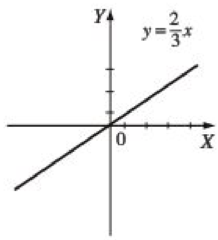
EJERCICIO 15

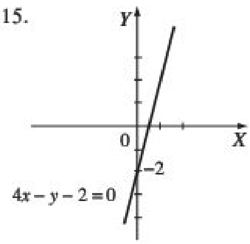
1. $y = -x + 4$; $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{4} = 1$
2. $y = \dfrac{2}{5}x + 1$; $\dfrac{x}{-5/2} + \dfrac{y}{1} = 1$
3. $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$; $\dfrac{x}{-8} + \dfrac{y}{8/3} = 1$
4. $y = 2x$
5. $y = -\dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{1/2} = 1$
6. $y = \dfrac{3}{4}x - 3$; $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-3} = 1$
7. $y = -\dfrac{3}{5}x + 2$; $\dfrac{x}{10/3} + \dfrac{y}{2} = 1$
8. $y = -\dfrac{1}{6}x - \dfrac{5}{3}$; $\dfrac{x}{-10} + \dfrac{y}{-5/3} = 1$
9. $y = \dfrac{6}{5}x + 12$; $\dfrac{x}{-10} + \dfrac{y}{12} = 1$
10. $y = -x \text{ ctg } w + p \csc w$; $\dfrac{x}{p \sec w} + \dfrac{y}{p \csc w} = 1$

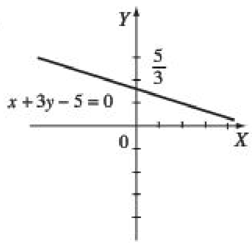
11.


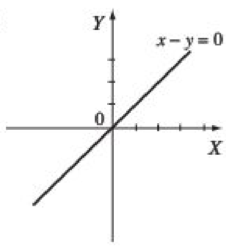
12.


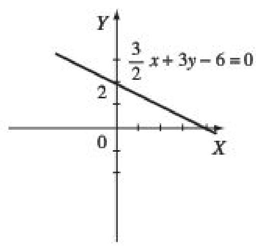
13.


14.


15.


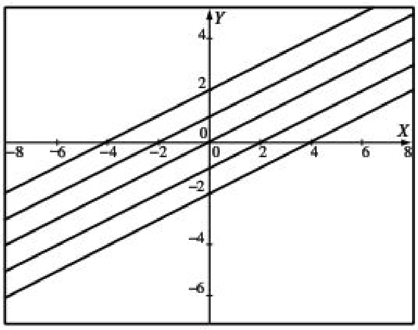
16.


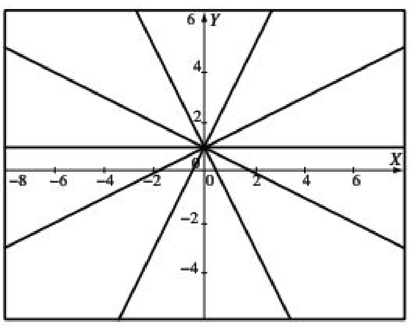
17.


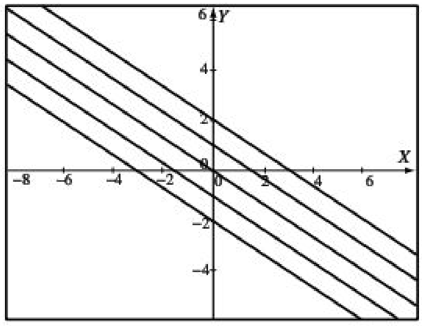
18.


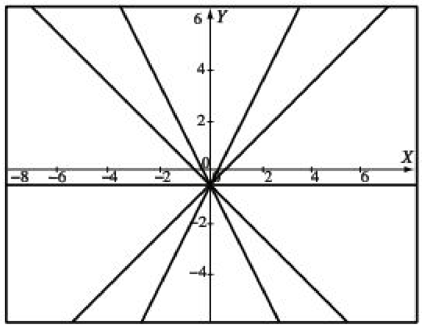
19. $x + y + 5 = 0$
20. $y = 2x + 4$
21. $y = -3x + 11$
22. $y = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{6}$
23. $y = 5x + 5$
24. $5x - 3y + 20 = 0$
25. $4x + y - 15 = 0$
26. $x - y + 1 = 0$
27. $6x + 4y + 5 = 0$
28. $3x - 2y - 6 = 0$
29. 161° 33' 54''
30. 36° 1' 38''
    102° 20' 20''
    41° 38'
31. (20, 13)
32. *a)* $y = 50x + 30\,000$
    b) \$70 000.00
33. *a)* $4m/s^2$
    b) $31m/s$
34. *a)* $C = 30x + 6\,000$
    b) \$1 000.00
    c) no
    d) 120 platillos
35. $\frac{x}{5} + \frac{y}{-5} = 1$
36. $\frac{x}{8} + \frac{y}{-4} = 1$
37. $\frac{x}{-\frac{4}{3}} + \frac{y}{-\frac{4}{5}} = 1$
38. $\frac{x}{-\frac{7}{4}} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$
39. $\frac{x}{\frac{6}{5}} + \frac{y}{-\frac{3}{2}} = 1$

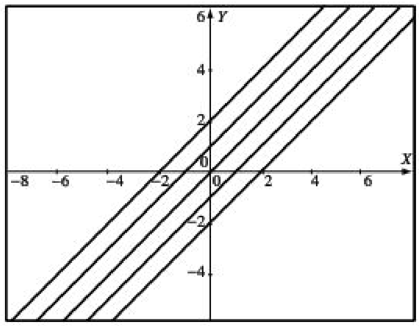
Ejercicio 16

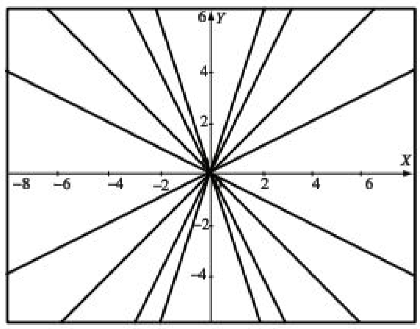
1.


2.


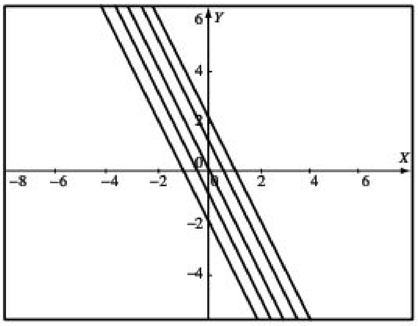
3.


4.


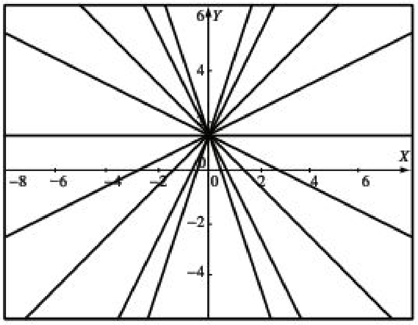
5.


6.


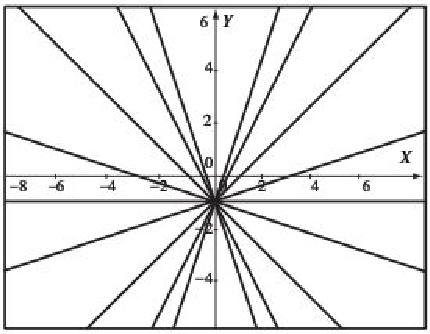
7.



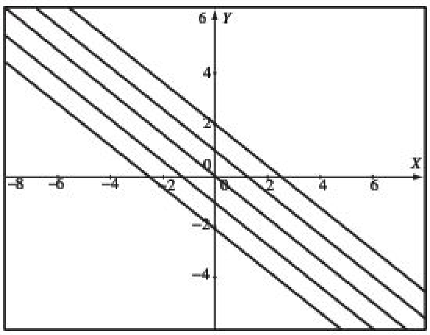
8.



9.



10.



EJERCICIO 17

1. $\frac{2x}{\sqrt{13}}+\frac{3y}{\sqrt{13}}-\frac{5}{\sqrt{13}}=0$
2. $-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}}=0$
3. $\frac{5x}{\sqrt{34}}+\frac{3y}{\sqrt{34}}=0$
4. $\frac{-x}{\sqrt{10}}+\frac{3y}{\sqrt{10}}-\frac{7}{\sqrt{10}}=0$
5. $-\frac{12x}{13}-\frac{5y}{13}-1=0$
6. $\frac{\sqrt{5}x}{3}+\frac{2y}{3}-\frac{1}{3}=0$
7. $\sqrt{3}x+y-8=0$
8. $x+y-2=0$
9. $x+\sqrt{3}y-6=0$
10. $x-\sqrt{3}y+2=0$
11. $x+\sqrt{3}=0$
12. $\sqrt{3}x-y+10=0$
13. $x+y+6=0$
14. $x-\sqrt{3}y-8\sqrt{3}=0$
15. $\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}y}{2}-2=0$
16. $\frac{2x}{\sqrt{29}}+\frac{5y}{\sqrt{29}}-\frac{12}{\sqrt{29}}=0$
17. $-\frac{3x}{\sqrt{10}}-\frac{y}{\sqrt{10}}-\frac{7}{\sqrt{10}}=0$
18. $\theta=60°$, $\theta'=120°$
19. $3x-4y-12=0$

    $3x+4y+12=0$

EJERCICIO 18

1. $\frac{23\sqrt{53}}{53}$
2. $\frac{9}{5}$
3. $5\sqrt{2}$
4. $\frac{49}{13}$
5. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$
6. 1
7. $\frac{32\sqrt{17}}{17}$
8. 10
9. $\frac{9\sqrt{10}}{5}$
10. $5u^2$
11. $r=\frac{7}{5}$
12. $K_1=2$

    $K_2=\frac{1}{2}$
13. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$
14. $-\frac{6}{5}$
15. $\frac{14}{5}$
16. $\frac{11\sqrt{29}}{29}$
17. $-\frac{7}{10}$
18. $-\frac{27\sqrt{2}}{8}$
19. $3x-4y-10=0$

    $3x-4y+20=0$
20. $y=-\sqrt{17}+\frac{7}{4}$

    $y=\sqrt{17}+\frac{7}{4}$
21. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$
22. $\frac{11\sqrt{5}}{15}$
23. $x-y-3-3\sqrt{2}=0$

    $x-y-3+3\sqrt{2}=0$
24. $2x-y-1=0$

    $2x+y-7=0$

Ejercicio 19

1. $2x - y + 3 = 0$
2. $4x - 6y + 13 = 0$
3. $x + 3y - 9 = 0$
4. $y + 6 = 0$
5. $2x - 6y - 11 = 0$; $6x + 2y - 1 = 0$
6. $99x - 27y + 50 = 0$; $21x + 77y - 80 = 0$
7. $y - 2 = 0$; $7x - y - 5 = 0$; $x + y - 3 = 0$; $(1, 2)$
8. $2x + y - 6 = 0$; $x - 6y - 10 = 0$; $3x - 5y - 16 = 0$; $\left(\frac{46}{13}, -\frac{14}{13}\right)$
9. $2x + y - 3 = 0$; $3x - 5y + 16 = 0$; $x - 6y + 19 = 0$; $\left(-\frac{1}{13}, \frac{41}{13}\right)$
10. $11x + 4y - 27 = 0$; $7x - y - 16 = 0$; $4x + 5y - 11 = 0$; $\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$
11. $\left(5\sqrt{5} - \sqrt{34}\right)x + \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{34}\right)y - \left(4\sqrt{5} + 7\sqrt{34}\right) = 0$

    $\left(\sqrt{37} + 6\sqrt{5}\right)x + \left(\sqrt{5} - 2\sqrt{37}\right)y + \left(7\sqrt{37} - 23\sqrt{5}\right) = 0$

    $\left(5\sqrt{37} + 6\sqrt{34}\right)x + \left(3\sqrt{37} + \sqrt{34}\right)y - \left(4\sqrt{37} + 23\sqrt{34}\right) = 0$

    $(1.5965, 2.2438)$
12. $55x + 47y - 144 = 0$

Capítulo 23

Ejercicio 20

1. $x^2 + y^2 - 16 = 0$
2. $4x^2 + 4y^2 - 3 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$
4. $3x^2 + 3y^2 + 3x + 4y = 0$
5. $x^2 + y^2 - 13 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 31 = 0$
7. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 35 = 0$
8. $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 25 = 0$
9. $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 0$
10. $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$
11. $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$
12. $3x^2 + 3y^2 + 13x - 65 = 0$
13. $4x^2 + 4y^2 + 41y + 66 = 0$
14. $x^2 + y^2 + 4y = 0$
15. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$
16. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$
17. $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 144 = 0$
18. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 59 = 0$
19. $2x^2 + 2y^2 + 15x - 11y - 51 = 0$
20. $17x^2 + 17y^2 - 88x + 58y - 544 = 0$
21. $9x^2 + 9y^2 - 43x + 9y - 140 = 0$
22. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$
23. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$
24. $3x^2 + 3y^2 + 8x + 10y - 43 = 0$
25. $3x^2 + 3y^2 - x + 7y - 10 = 0$
26. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 5 = 0$
27. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 29 = 0$

Ejercicio 21

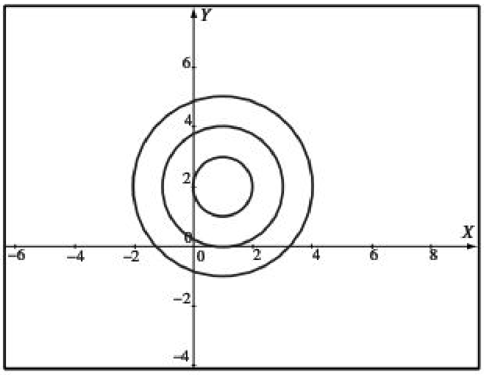
1. $C(-1, -1)$, $r = 2$
2. $C(3, -4)$, $r = \sqrt{5}$
3. Punto, $C(-3, -1)$, $r = 0$
4. Imaginaria con $C(2, -1)$ y $r = \sqrt{-9}$
5. $C(-7, 4)$, $r = 5$
6. $C(0, 4)$, $r = 3$
7. $C(-2, 0)$, $r = 1$
8. $C\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $r = \sqrt{7}$
9. $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $r = \frac{1}{2}$
10. $C\left(\frac{1}{5}, 3\right)$, $r = \frac{4}{5}$
11. $C\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{6}\right)$, $r = \frac{5}{12}$
12. $C\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $r = 3$
13. $x - 3y + 8 = 0$

    $79x + 3y - 568 = 0$
14. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$
15. $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 19 = 0$

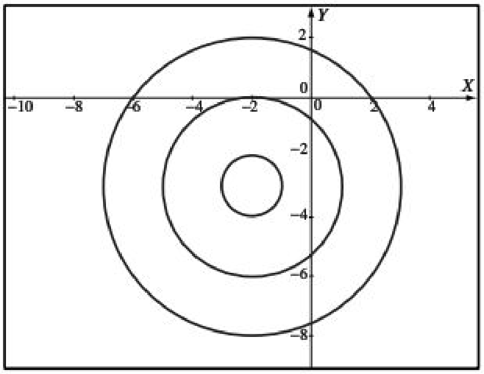
    $x^2 + y^2 + 4y - 9 = 0$
16. $x^2 + y^2 + 10x - 4 = 0$
17. $k = 5$, $k = -\frac{19}{17}$
18. $(-5, 3)$ y $(1, 9)$
19. $(2, 2)$
20. No existe intersección
21. $(3, 5)$ y $(4, 4)$
22. $(4, -1)$ y $(6, -3)$

EJERCICIO 22

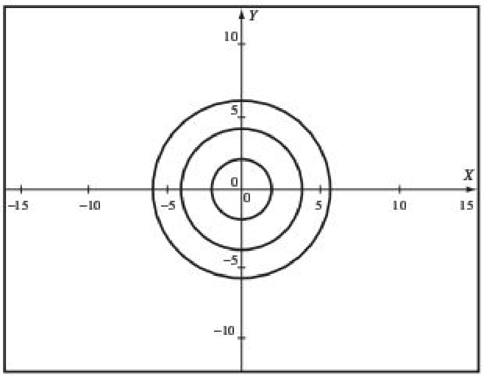
1.



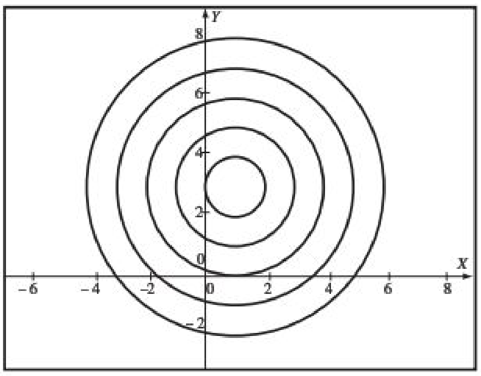
2.



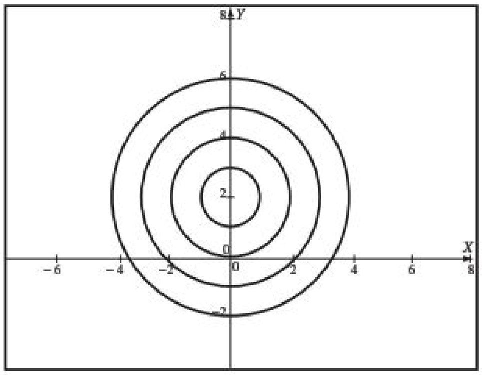
3.



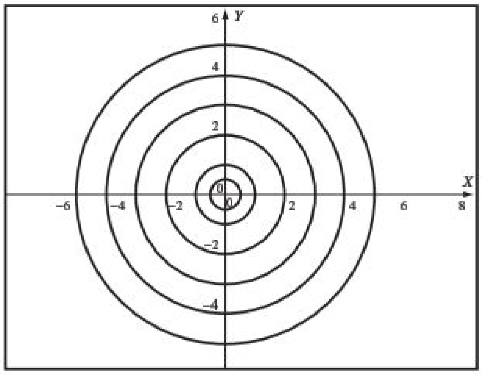
4.



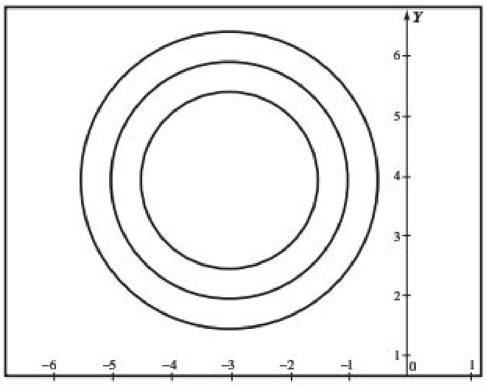
5.



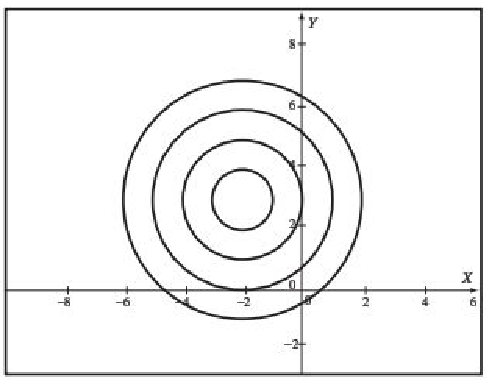
6.



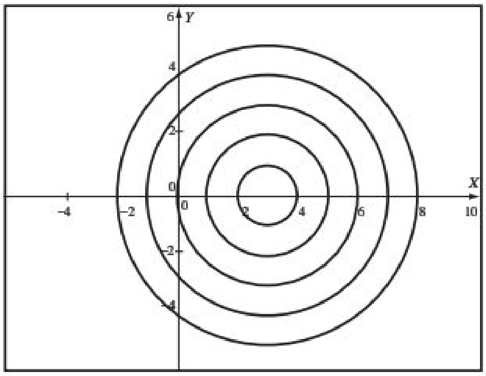
7.



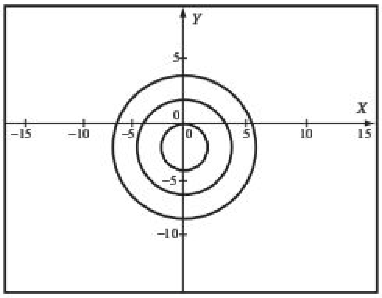
8.



9.



10.



11. $(x-1)^2+(y-1)^2=p^2$
12. $(x+1)^2+(y+3)^2=p^2$
13. $(x+2)^2+(y-3)^2=p^2$
14. $(x-1)^2+(y-0)^2=p^2$

Capítulo 24

Ejercicio 23

1. $(2, 2)$
2. $(9, 1)$
3. $(-1, 4)$
4. $(-10, -4)$
5. $(-8, 7)$
6. $y'^2-8x'=0$
7. $x'^2-4y'=0$
8. $x'^2+y'^2-9=0$
9. $x'^2+y'^2-25=0$
10. $y'^2-12x'=0$
11. $9x'^2+16y'^2-144=0$
12. $4x'^2+5y'^2-20=0$
13. $9x'^2+4y'^2-72=0$
14. $x'^2-2y'^2-2=0$
15. $4x'^2-9y'^2-36=0$
16. $y'=x'^3$
17. $y'^2=x'^3-1$

Ejercicio 24

1. $x'^2-8y'=0$
2. $y'^2-16x'=0$
3. $x'^2+y'^2-8=0$
4. $x'^2+y'^2-4=0$
5. $9x'^2+4y'^2-36=0$
6. $16x'^2+16y'^2-9=0$
7. $25x'^2-16y'^2+400=0$
8. $y'^3-x'=0$

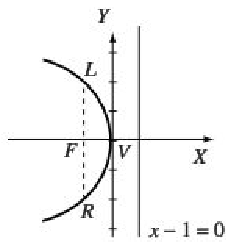
Capítulo 25

Ejercicio 25

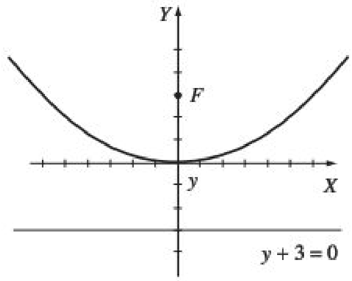
1. $y^2+8x=0$
2. $x^2+4y=0$
3. $y^2-12x+2y+1=0$
4. $x^2-16y=0$
5. $x^2-4x+4y-16=0$
6. $y^2+12x-4y+52=0$
7. $x^2-2xy+y^2+8x-4y+2=0$
8. $9x^2-12xy+4y^2-48x+32y+64=0$

Ejercicio 26

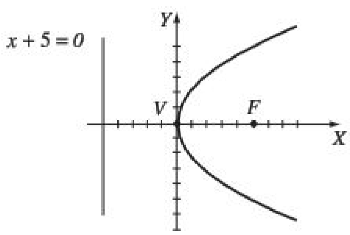
1. Foco: $F(-1, 0)$, Directriz: $x-1=0$, $LR=4$, Eje: $y=0$



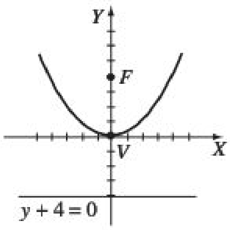
2. Foco: $F(0, 3)$, Directriz: $y+3=0$, $LR=12$, Eje: $x=0$



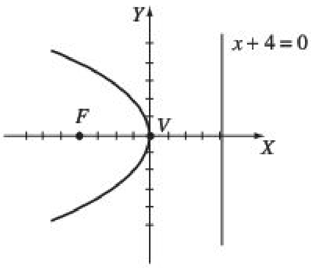
3. Foco: $F(5, 0)$, Directriz: $x+5=0$, $LR=20$, Eje: $y=0$



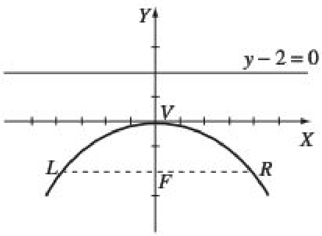
4. Foco: $F(0, 4)$, Directriz: $y + 4 = 0$, $LR = 16$,
Eje: $x = 0$



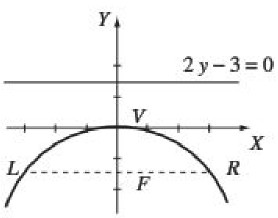
5. Foco: $F(-4, 0)$, Directriz: $x - 4 = 0$, $LR = 16$,
Eje: $y = 0$



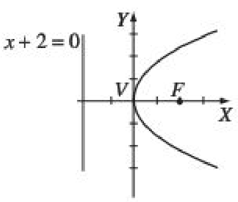
6. Foco: $F(0, -2)$, Directriz: $y - 2 = 0$, $LR = 8$,
Eje: $x = 0$



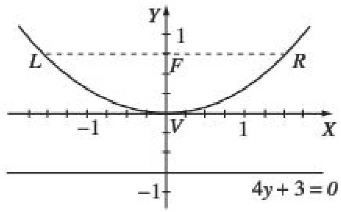
7. Foco: $F\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, Directriz: $2y - 3 = 0$, $LR = 6$,
Eje: $x = 0$



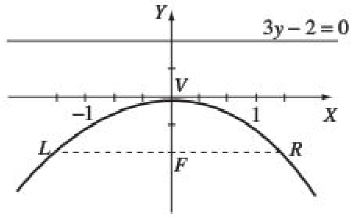
8. Foco: $F(2, 0)$, Directriz: $x + 2 = 0$, $LR = 8$,
Eje: $y = 0$



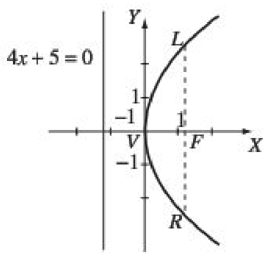
9. Foco: $F\left(0, \dfrac{3}{4}\right)$, Directriz: $4y + 3 = 0$, $LR = 3$,
Eje: $x = 0$



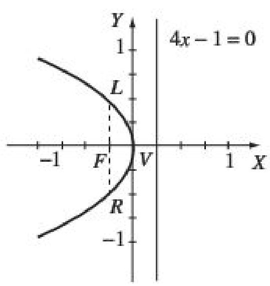
10. Foco: $\left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$, Directriz: $3y - 2 = 0$, $LR = \dfrac{8}{3}$,
Eje: $x = 0$



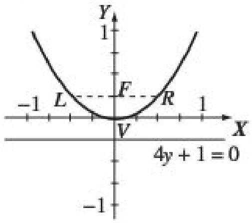
11. Foco: $F\left(\dfrac{5}{4}, 0\right)$, Directriz: $4x + 5 = 0$, $LR = 5$,
Eje: $y = 0$



12. Foco: $\left(-\dfrac{1}{4}, 0\right)$, Directriz: $4x - 1 = 0$, $LR = 1$,
Eje: $y = 0$



13. Foco: $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$, Directriz: $4y+1=0$, $LR=1$
Eje: $x=0$



14. $y^2+20x=0$
15. $x^2-24y=0$
16. $y^2-8x=0$
17. $x^2+4y=0$
18. $y^2+2x=0$
19. $3x^2+28y=0$
20. $x^2-8y=0$
21. $y^2+24x=0$
22. $x^2+10y=0$
23. $y^2+6x=0$
24. $3y^2-16x=0$
25. $x^2-y=0$
26. $y^2+18x=0$
27. $x^2+4y=0$
28. $3y^2-16x=0$
29. $3x^2+16y=0$
30. $3\sqrt{13}$ unidades
31. $5\sqrt{2}$ unidades
32. $2x^2-y=0$, $y^2-4x=0$
33. $y^2+3x=0$, $y^2-3x=0$
34. $y^2-12x=0$
35. $x^2-8y=0$

Ejercicio 27

V: Vértice, F: Foco, LR: Lado recto, D: Directriz

1. $V(1,5)$, $F(4,5)$, $LR=12$, D: $x+2=0$, Eje: $y=5$
2. $V(6,-2)$, $F(6,-6)$, $LR=16$, D: $y-2=0$, Eje: $x=6$
3. $V(-2,-4)$, $F(-7,-4)$, $LR=20$, D: $x-3=0$, Eje: $y=-4$
4. $V(-1,5)$, $F(-1,4)$, $LR=4$, D: $y-6=0$, Eje: $x=-1$
5. $V(-2,0)$, $F(0,0)$, $LR=8$, D: $x+4=0$, Eje: $y=0$
6. $V(0,2)$, $F(0,8)$, $LR=24$, D: $y+4=0$, Eje: $x=0$
7. $V(-4,2)$, $F\left(-4,\frac{7}{2}\right)$, $LR=6$, D: $2y-1=0$, Eje: $x=-4$
8. $V\left(\frac{4}{5},-3\right)$, $F\left(\frac{41}{20},-3\right)$, $LR=5$, D: $20x+9=0$, Eje: $y=-3$
9. $V\left(\frac{3}{2},2\right)$, $F\left(\frac{3}{2},3\right)$, $LR=4$, D: $y-1=0$, $x=\frac{3}{2}$
10. $V\left(2,-\frac{1}{4}\right)$, $F\left(\frac{19}{8},-\frac{1}{4}\right)$, $LR=\frac{3}{2}$, D: $x=\frac{13}{8}$, Eje: $y=-\frac{1}{4}$
11. $V\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $LR=4$, D: $2y+5=0$, Eje: $x=\frac{1}{2}$
12. $V(3,-1)$, $F\left(\frac{10}{3},-1\right)$, $LR=\frac{4}{3}$, D: $3x-8=0$, Eje: $y=-1$
13. $V\left(0,\frac{1}{4}\right)$, $F\left(0,\frac{3}{4}\right)$, $LR=2$, D: $4y+1=0$, E: $x=0$
14. $V(1,0)$, $F\left(\frac{21}{16},0\right)$, $LR=\frac{5}{4}$, D: $16x-11=0$, E: $y=0$
15. $y^2+20x-8y-24=0$
16. $x^2-6x+16y+25=0$
17. $y^2-8x-4y+28=0$
18. $x^2+10x-12y+49=0$
19. $y^2-2x+8y+20=0$
20. $3x^2+18x-28y-29=0$
21. $y^2+24x-12y-60=0$
22. $x^2-8x-16y+32=0$
23. $y^2+8y-20x+36=0$
24. $x^2+28y-28=0$
25. $y^2+14x-4y+25=0$
26. $x^2-14x-10y+54=0$
27. $x^2-2x-8y-23=0$
28. $x^2+6x-24y+129=0$
    $x^2+6x+24y-111=0$
29. $y^2+24x-4y-116=0$
30. $x^2-6x+24y-87=0$
31. $(4,8)$, $(7,-4)$

Ejercicio 28

1. $y^2-x+2y+1=0$
2. $y^2-4x=0$
3. $3y^2-x+7=0$
4. $y^2-x-4=0$
5. $x^2-4x-y+3=0$
6. $x^2-y+1=0$
7. $2x^2+3x-y+1=0$
8. $x^2+6x-2y+5=0$

Ejercicio 29

1. $8\,m$
2. $62.5\,cm$
3. $18.75\,cm$
4. $27.71\,cm$
5. $x-y-2=0$
6. $x-4y+24=0$
7. $2x-y-9=0$
8. $x-2y+2=0$
9. $x-3y-3=0$
10. $2x-3y-16=0$

Capítulo 26

Ejercicio 30

1. $5x^2+9y^2-180=0$
2. $5x^2+9y^2-45=0$
3. $49x^2+24y^2-1176=0$
4. $25x^2+16y^2+100x-128y-44=0$
5. $9x^2+25y^2-18x+100y-791=0$

Ejercicio 31

1. $V(\pm 2, 0)$, $F(\pm 1, 0)$, $B(0, \pm\sqrt{3})$, $LR = 3$, $e = \frac{1}{2}$,

$\overline{V_1V_2} = 4$, $\overline{F_1F_2} = 2$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{3}$

2. $V(0, \pm 3)$, $F(0, \pm 2)$, $B(\pm\sqrt{5}, 0)$, $LR = \frac{10}{3}$, $e = \frac{2}{3}$,

$\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 4$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{5}$

3. $V(0, \pm 2\sqrt{3})$, $F(0, \pm\sqrt{7})$, $B(\pm\sqrt{5}, 0)$, $LR = \frac{5\sqrt{3}}{3}$,

$e = \frac{\sqrt{21}}{6}$, $\overline{V_1V_2} = 4\sqrt{3}$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{7}$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{5}$

4. $V(\pm 8, 0)$, $F(\pm 2\sqrt{15}, 0)$, $B(0, \pm 2)$, $LR = 1$, $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

$\overline{V_1V_2} = 16$, $\overline{F_1F_2} = 4\sqrt{15}$ y $\overline{B_1B_2} = 4$

5. $V(\pm 5, 0)$, $F(\pm 4, 0)$, $B(0, \pm 3)$, $LR = \frac{18}{5}$, $e = \frac{4}{5}$,

$\overline{V_1V_2} = 10$, $\overline{F_1F_2} = 8$ y $\overline{B_1B_2} = 6$

6. $V(0, \pm 4)$, $F(0, \pm 2\sqrt{3})$, $B(\pm 2, 0)$, $LR = 2$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\overline{V_1V_2} = 8$, $\overline{F_1F_2} = 4\sqrt{3}$ y $\overline{B_1B_2} = 4$

7. $V(0, \pm\frac{5}{2})$, $F(0, \pm\frac{5\sqrt{5}}{6})$, $B(\pm\frac{5}{3}, 0)$, $LR = \frac{20}{9}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\overline{V_1V_2} = 5$, $\overline{F_1F_2} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ y $\overline{B_1B_2} = \frac{10}{3}$

8. $V(0, \pm 1)$, $F(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(\pm\frac{1}{2}, 0)$, $LR = \frac{1}{2}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\overline{V_1V_2} = 2$, $\overline{F_1F_2} = \sqrt{3}$, $\overline{B_1B_2} = 1$

9. $V(0, \pm\sqrt{3})$, $F(0, \pm 1)$, $B(\pm\sqrt{2}, 0)$, $LR = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$e = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{V_1V_2} = 2\sqrt{3}$, $\overline{F_1F_2} = 2$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{2}$

10. $V(0, \pm\frac{1}{3})$, $F(0, \pm\frac{\sqrt{7}}{12})$, $B(\pm\frac{1}{4}, 0)$, $LR = \frac{3}{8}$,

$e = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\overline{V_1V_2} = \frac{2}{3}$, $\overline{F_1F_2} = \frac{\sqrt{7}}{6}$ y $\overline{B_1B_2} = \frac{1}{2}$

11. $V(\pm 4, 0)$, $F(\pm 3, 0)$, $B(0, \pm\sqrt{7})$, $LR = \frac{7}{2}$, $e = \frac{3}{4}$,

$\overline{V_1V_2} = 8$, $\overline{F_1F_2} = 6$, $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{7}$

12. $V(\pm 1, 0)$, $F(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $B(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$, $LR = 1$,

$e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{V_1V_2} = 2$, $\overline{F_1F_2} = \sqrt{2}$, $\overline{B_1B_2} = \sqrt{2}$

13. $V(0, \pm\sqrt{5})$, $F(0, \pm\sqrt{3})$, $B(\pm\sqrt{2}, 0)$, $LR = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

$e = \frac{\sqrt{15}}{5}$, $\overline{V_1V_2} = 2\sqrt{5}$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{3}$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{2}$

14. $V(0, \pm 2\sqrt{2})$, $F(0, \pm\sqrt{6})$, $B(\pm\sqrt{2}, 0)$, $LR = \sqrt{2}$,

$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{V_1V_2} = 4\sqrt{2}$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{6}$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{2}$

15. $V(\pm 3, 0)$, $F(\pm\sqrt{6}, 0)$, $B(0, \pm\sqrt{3})$, $LR = 2$, $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

$\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{6}$ y $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{3}$

16. $V(0, \pm 2\sqrt{3})$, $F(0, \pm 2\sqrt{2})$, $B(\pm 2, 0)$, $LR = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\overline{V_1V_2} = 4\sqrt{3}$, $\overline{F_1F_2} = 4\sqrt{2}$ y $\overline{B_1B_2} = 4$

Ejercicio 32

1. $5x^2 + 9y^2 - 180 = 0$
2. $7x^2 + 9y^2 - 63 = 0$
3. $x^2 + 5y^2 - 5 = 0$
4. $49x^2 + 24y^2 - 1176 = 0$
5. $3x^2 + y^2 - 3 = 0$
6. $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$
7. $7x^2 + 16y^2 - 112 = 0$
8. $4x^2 + 13y^2 - 52 = 0$
9. $9x^2 + 14y^2 - 126 = 0$
10. $3x^2 + 2y^2 - 12 = 0$
11. $5x^2 + y^2 - 5 = 0$
12. $65x^2 + 16y^2 - 1040 = 0$
13. $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$
14. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$
15. $16x^2 + 7y^2 - 448 = 0$

16. $12x^2+16y^2-3=0$
17. $8x^2+9y^2-72=0;\ 9x^2+8y^2-72=0$
18. $9x^2+4y^2-36=0$
19. $x^2+4y^2-16=0$
20. $9x^2+13y^2-117=0$
21. $x^2+4y^2-9=0$
22. $x^2+2y^2-2=0;\ 2x^2+y^2-2=0$

Ejercicio 33

1. $C(2,1),\ V_1(2,5),\ V_2(2,-3),\ F_1(2,1+\sqrt{7}),\ F_2(2,1-\sqrt{7})$

   $B_1(5,1),\ B_2(-1,1),\ LR=\frac{9}{2},\ e=\frac{\sqrt{7}}{4},\ \overline{V_1V_2}=8,$

   $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{7},\ \overline{B_1B_2}=6$

2. $C\left(\frac{2}{3},1\right),\ V_1\left(\frac{8}{3},1\right),\ V_2\left(-\frac{4}{3},1\right),\ F_1\left(\frac{2+3\sqrt{3}}{3},1\right),$

   $F_2\left(\frac{2-3\sqrt{3}}{3},1\right),\ B_1\left(\frac{2}{3},2\right),\ B_2\left(\frac{2}{3},0\right),\ LR=1,\ e=\frac{\sqrt{3}}{2},$

   $\overline{V_1V_2}=4,\ \overline{F_1F_2}=2\sqrt{3},\ \overline{B_1B_2}=2$

3. $C(-5,1),\ V_1(-2,1),\ V_2(-8,1),\ F_1(-5+\sqrt{6},1),$

   $F_2(-5-\sqrt{6},1),\ B_1(-5,1+\sqrt{3}),\ B_2(-5,1-\sqrt{3}),$

   $LR=2,\ e=\frac{\sqrt{6}}{3},\ \overline{V_1V_2}=6,\ \overline{F_1F_2}=2\sqrt{6},\ \overline{B_1B_2}=2\sqrt{3}$

4. $C(0,2),\ V_1(0,7),\ V_2(0,-3),\ F_1(0,5),\ F_2(0,-1),\ B_1(4,2),$

   $B_2(-4,2),\ LR=\frac{32}{5},\ e=\frac{3}{5},\ \overline{V_1V_2}=10,\ \overline{F_1F_2}=6,\ \overline{B_1B_2}=8$

5. $C(5,-2),\ V_1(9,-2),\ V_2(1,-2),\ F_1(5+\sqrt{15},-2),$

   $F_2(5-\sqrt{15},-2),\ B_1(5,-1),\ B_2(5,-3),\ LR=\frac{1}{2},$

   $e=\frac{\sqrt{15}}{4},\ \overline{V_1V_2}=8,\ \overline{F_1F_2}=2\sqrt{15},\ \overline{B_1B_2}=2$

6. $C(2,3),\ V_1(2,9),\ V_2(2,-3),\ F_1(2,3+3\sqrt{3}),$

   $F_2(2,3-3\sqrt{3}),\ B_1(5,3),\ B_2(-1,3),\ LR=3,\ e=\frac{\sqrt{3}}{2},$

   $\overline{V_1V_2}=12,\ \overline{F_1F_2}=6\sqrt{3},\ \overline{B_1B_2}=6$

7. $C\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{4}\right),\ V_1\left(-\frac{5}{2},\frac{15}{4}\right),\ V_2\left(-\frac{5}{2},-\frac{9}{4}\right),$

   $F_1\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{4}+\sqrt{5}\right),\ F_2\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{4}-\sqrt{5}\right),\ B_1\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),$

   $B_2\left(-\frac{9}{2},\frac{3}{4}\right),\ LR=\frac{8}{3},\ e=\frac{\sqrt{5}}{3},\ \overline{V_1V_2}=6,$

   $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5},\ \overline{B_1B_2}=4$

8. $C(1,2),\ V_1(4,2),\ V_2(-2,2),\ F_1(1+\sqrt{5},2),\ F_2(1-\sqrt{5},2),$

   $B_1(1,4),\ B_2(1,0),\ LR=\frac{8}{3},\ e=\frac{\sqrt{5}}{3},\ \overline{V_1V_2}=6,$

   $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5},\ \overline{B_1B_2}=4$

9. $C\left(-\frac{7}{3},\frac{3}{4}\right),\ V_1\left(-2,\frac{3}{4}\right),\ V_2\left(-\frac{8}{3},\frac{3}{4}\right),$

   $F_1\left(\frac{-28+\sqrt{7}}{12},\frac{3}{4}\right),\ F_2\left(\frac{-28-\sqrt{7}}{12},\frac{3}{4}\right),\ B_1\left(-\frac{7}{3},1\right),$

   $B_2\left(-\frac{7}{3},\frac{1}{2}\right),\ LR=\frac{3}{8},\ e=\frac{\sqrt{7}}{4},\ \overline{V_1V_2}=\frac{2}{3},$

   $\overline{F_1F_2}=\frac{\sqrt{7}}{6},\ \overline{B_1B_2}=\frac{1}{2}$

10. $C\left(-\frac{5}{3},-\frac{7}{2}\right),\ V_1\left(-\frac{5}{3},\frac{-7+2\sqrt{3}}{2}\right),$

    $V_2\left(-\frac{5}{3},\frac{-7-2\sqrt{3}}{2}\right),\ F_1\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{2}\right),\ F_2\left(-\frac{5}{3},-\frac{9}{2}\right),$

    $B_1\left(\frac{-5+3\sqrt{2}}{3},-\frac{7}{2}\right),\ B_2\left(\frac{-5-3\sqrt{2}}{3},-\frac{7}{2}\right),$

    $LR=\frac{4\sqrt{3}}{3},\ e=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \overline{V_1V_2}=2\sqrt{3},\ \overline{F_1F_2}=2,$

    $\overline{B_1B_2}=2\sqrt{2}$

11. $C(-3,2)\ V_1(0,2),\ V_2(-6,2)\ F_1(-1,2),\ F_2(-5,2),$

    $B_1(-3,2+\sqrt{5}),\ B_2(-3,2-\sqrt{5}),\ LR=\frac{10}{3},\ e=\frac{2}{3},$

    $\overline{V_1V_2}=6,\ \overline{F_1F_2}=4,\ \overline{B_1B_2}=2\sqrt{5}$

12. $C\left(-\frac{5}{2},\frac{4}{3}\right)$, $V_1\left(\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right)$, $V_2\left(-\frac{11}{2},\frac{4}{3}\right)$,

$F_1\left(\frac{-5+2\sqrt{5}}{2},\frac{4}{3}\right)$, $F_2\left(\frac{-5-2\sqrt{5}}{2},\frac{4}{3}\right)$,

$B_1\left(-\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right)$, $B_2\left(-\frac{5}{2},-\frac{2}{3}\right)$, $LR=\frac{8}{3}$, $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\overline{V_1V_2}=6$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2}=4$

13. $C\left(-\frac{1}{2},\frac{12}{5}\right)$, $V_1\left(\frac{9}{2},\frac{12}{5}\right)$, $V_2\left(-\frac{11}{2},\frac{12}{5}\right)$

$F_1\left(\frac{-1+2\sqrt{21}}{2},\frac{12}{5}\right)$, $F_2\left(\frac{-1-2\sqrt{21}}{2},\frac{12}{5}\right)$,

$B_1\left(-\frac{1}{2},\frac{22}{5}\right)$, $B_2\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)$, $LR=\frac{8}{5}$, $e=\frac{\sqrt{21}}{5}$,

$\overline{V_1V_2}=10$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{21}$, $\overline{B_1B_2}=4$

14. $C(0,-1)$, $V_1(1,-1)$, $V_2(-1,-1)$, $F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1\right)$,

$F_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1\right)$, $B_1\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, $B_2\left(0,-\frac{3}{2}\right)$, $LR=\frac{1}{2}$,

$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{V_1V_2}=2$, $\overline{F_1F_2}=\sqrt{3}$, $\overline{B_1B_2}=1$

15. $C(-2,0)$, $V_1(-2,2)$, $V_2(-2,-2)$, $F_1(-2,1)$, $F_2(-2,-1)$,

$B_1\left(-2+\sqrt{3},0\right)$, $B_2\left(-2-\sqrt{3},0\right)$, $LR=3$,

$e=\frac{1}{2}$, $\overline{V_1V_2}=4$, $\overline{F_1F_2}=2$, $\overline{B_1B_2}=2\sqrt{3}$

16. $C\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{3}\right)$, $V_1\left(-\frac{3}{2},\frac{13}{3}\right)$, $V_2\left(-\frac{3}{2},-\frac{11}{3}\right)$,

$F_1\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{3}+\sqrt{7}\right)$, $F_2\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{3}-\sqrt{7}\right)$, $B_1\left(\frac{3}{2},\frac{1}{3}\right)$,

$B_2\left(-\frac{9}{2},\frac{1}{3}\right)$, $LR=\frac{9}{2}$, $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\overline{V_1V_2}=8$,

$\overline{F_1F_2}=2\sqrt{7}$, $\overline{B_1B_2}=6$

17. $C(-1,2)$, $V_1\left(-\frac{1}{2},2\right)$, $V_2\left(-\frac{3}{2},2\right)$, $F_1\left(-1+\frac{\sqrt{5}}{6},2\right)$,

$F_2\left(-1-\frac{\sqrt{5}}{6},2\right)$, $B_1\left(-1,\frac{7}{3}\right)$, $B_2\left(-1,\frac{5}{3}\right)$, $LR=\frac{4}{9}$,

$e=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\overline{V_1V_2}=1$, $\overline{F_1F_2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\overline{B_1B_2}=\frac{2}{3}$

EJERCICIO 34

1. $\frac{(x-7)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

$x^2+4y^2-14x+16y+49=0$

2. $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

$9x^2+25y^2-54x-150y+81=0$

3. $\frac{(x+2)^2}{7}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

$16x^2+7y^2+64x+14y-41=0$

4. $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

$9x^2+16y^2-72x=0$

5. $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$

$4x^2+25y^2-24x-200y+336=0$

6. $\frac{(x-6)^2}{100}+\frac{(y-5)^2}{36}=1$

$9x^2+25y^2-108x-250y+49=0$

7. $\frac{x^2}{5}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

$9x^2+5y^2+20y-25=0$

8. $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{36}=1$

$9x^2+y^2-54x+4y+49=0$

9. $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

$25x^2+9y^2+200x-18y+184=0$

10. $\frac{(x+7)^2}{36}+\frac{(y-5)^2}{4}=1$

$x^2+9y^2+14x-90y+238=0$

11. $\dfrac{(x+6)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$

$16x^2+25y^2+192x+100y+276=0$

12. $\dfrac{\left(x-\frac{8}{3}\right)^2}{36}+\dfrac{\left(y+\frac{11}{2}\right)^2}{16}=1$

$144x^2+324y^2-768x+3\,564y+5\,641=0$

13. $\dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y-7)^2}{1}=1$

$x^2+9y^2-10x-126y+457=0$

14. $\dfrac{(x+4)^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$

$7x^2+16y^2+56x=0$

15. $\dfrac{(x+1)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

$9x^2+25y^2+18x-100y-116=0$

16. $\dfrac{(x-3)^2}{64}+\dfrac{(y-6)^2}{48}=1$

$3x^2+4y^2-18x-48y-21=0$

17. $\dfrac{(x+5)^2}{36}+\dfrac{(y-3)^2}{11}=1$

$11x^2+36y^2+110x-216y+203=0$

18. $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{12}=1$

$3x^2+y^2-12x-2y+1=0$

Ejercicio 35

1. Conjunto vacío
2. Punto
3. Elipse
4. Elipse
5. Elipse
6. Conjunto vacío
7. Un punto
8. Un punto
9. Conjunto vacío
10. Elipse

Ejercicio 36

1. $3x^2+8y^2+18x+8y-21=0$
2. $9x^2+4y^2-36x-16y+16=0$
3. $4x^2+y^2-32x-4y+64=0$
4. $x^2+9y^2-18y=0$
5. $4x^2+25y^2-16x-84=0$
6. $x^2+4y^2-16=0$
7. $3x^2+y^2-3=0$
8. $9x^2+25y^2-225=0$
9. $9x^2+4y^2+18x+24y+9=0$
10. $25x^2+4y^2-100x+8y+4=0$

Ejercicio 37

1. 30,0588 UA
2. 0,72298 UA
3. 1,8739 años
4. 11,8578 años
5. $3x-\sqrt{3}y+6=0$
6. $3x+5y-44=0$

Capítulo 27

Ejercicio 38

1. $5x^2-4y^2-20=0$
2. $16x^2-9y^2-144=0$
3. $13y^2-36x^2-468=0$
4. $156y^2-100x^2-975=0$
5. $3x^2-4y^2-12=0$
6. $7x^2-9y^2-70x+72y-32=0$
7. $9y^2-16x^2-96x-36y-252=0$

Ejercicio 39

1. $V(\pm 9,0)$, $F(\pm 3\sqrt{10},0)$, $B(0,\pm 3)$, $\overline{V_1V_2}=18$,
$\overline{F_1F_2}=6\sqrt{10}$, $\overline{B_1B_2}=6$, $LR=2$, $e=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.
Asíntotas: $y=\pm\dfrac{1}{3}x$
2. $V(\pm 1,0)$, $F(\pm\sqrt{5},0)$, $B(0,\pm 2)$, $\overline{V_1V_2}=2$,
$\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2}=4$, $LR=8$, $e=\sqrt{5}$.
Asíntotas: $y=\pm 2x$
3. $V(0,\pm 2\sqrt{2})$, $F(0,\pm\sqrt{13})$, $B(\pm\sqrt{5},0)$, $\overline{V_1V_2}=4\sqrt{2}$,
$\overline{F_1F_2}=2\sqrt{13}$, $\overline{B_1B_2}=2\sqrt{5}$, $LR=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, $e=\dfrac{\sqrt{26}}{4}$.
Asíntotas: $y=\pm\dfrac{2\sqrt{10}}{5}x$
4. $V(0,\pm 2a)$, $F(0,\pm\sqrt{5}a)$, $B(\pm a,0)$, $\overline{V_1V_2}=4a$,
$\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5}a$, $\overline{B_1B_2}=2a$, $LR=a$, $e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
Asíntotas: $y=\pm 2x$
5. $V(\pm\sqrt{5},0)$, $F(\pm 3,0)$, $B(0,\pm 2)$, $\overline{V_1V_2}=2\sqrt{5}$,
$\overline{F_1F_2}=6$, $\overline{B_1B_2}=4$, $LR=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$, $e=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.
Asíntotas: $y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}x$
6. $V(\pm 3,0)$, $F(\pm 5,0)$, $B(0,\pm 4)$, $\overline{V_1V_2}=6$, $\overline{F_1F_2}=10$,
$\overline{B_1B_2}=8$, $LR=\dfrac{32}{3}$, $e=\dfrac{5}{3}$. Asíntotas: $y=\pm\dfrac{4}{3}x$
7. $V(0,\pm 1)$, $F(0,\pm\sqrt{5})$, $B(\pm 2,0)$, $\overline{V_1V_2}=2$,
$\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2}=4$, $LR=8$; $e=\sqrt{5}$.
Asíntotas: $y=\pm\dfrac{1}{2}x$
8. $V(\pm 5,0)$, $F(\pm\sqrt{105},0)$, $B(0,\pm 4\sqrt{5})$, $\overline{V_1V_2}=10$,
$\overline{F_1F_2}=2\sqrt{105}$, $\overline{B_1B_2}=8\sqrt{5}$, $LR=32$; $e=\dfrac{\sqrt{105}}{5}$.
Asíntotas: $y=\pm\dfrac{4\sqrt{5}}{5}x$
9. $V(0,\pm 4)$, $F(0,\pm 2\sqrt{13})$, $B(\pm 6,0)$, $\overline{V_1V_2}=8$,
$\overline{F_1F_2}=4\sqrt{13}$, $\overline{B_1B_2}=12$, $LR=18$; $e=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.
Asíntotas: $y=\pm\dfrac{2}{3}x$
10. $V(0,\pm 2)$, $F(0,\pm 2\sqrt{2})$, $B(\pm 2,0)$, $\overline{V_1V_2}=4$,
$\overline{F_1F_2}=4\sqrt{2}$, $\overline{B_1B_2}=4$, $LR=4$; $e=\sqrt{2}$.
Asíntotas: $y=\pm x$

11. $V(0, \pm\sqrt{5}), F(0, \pm\sqrt{11}), B(\pm\sqrt{6}, 0), \overline{V_1V_2} = 2\sqrt{5}$,

$\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{11}$, $\overline{B_1B_2} = 2\sqrt{6}$, $LR = \frac{12\sqrt{5}}{5}$,

$e = \frac{\sqrt{55}}{5}$. Asíntotas: $y = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}x$

12. $V(\pm\sqrt{5}, 0), F(\pm\sqrt{17}, 0), B(0, \pm 2\sqrt{3}), \overline{V_1V_2} = 2\sqrt{5}$,

$\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{17}$, $\overline{B_1B_2} = 4\sqrt{3}$, $LR = \frac{24\sqrt{5}}{5}$,

$e = \frac{\sqrt{85}}{5}$. Asíntotas: $y = \pm\frac{2\sqrt{15}}{5}x$

EJERCICIO 40

1. $7y^2 - 9x^2 - 63 = 0$
2. $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$
3. $3x^2 - 2y^2 + 12 = 0$
4. $x^2 - 2y^2 - 8 = 0$
5. $4x^2 - y^2 - 4 = 0$
6. $5x^2 - 2y^2 - 40 = 0$
7. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$
8. $25y^2 - 16x^2 - 400 = 0$
9. $x^2 - 4y^2 - 36 = 0$
10. $x^2 - 3y^2 - 12 = 0$
11. $5y^2 - 6x^2 - 30 = 0$
12. $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$
13. $x^2 - 2y^2 - 12 = 0$
14. $5y^2 - 6x^2 - 30 = 0$
15. $9y^2 - 16x^2 - 256 = 0$
    $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$
16. $x^2 - 9y^2 - 9 = 0$
17. $5x^2 - 6y^2 - 30 = 0$
18. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$
19. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$

EJERCICIO 41

1. $C(-3,4)$, $V(-3\pm 5, 4)$, $F(-3\pm\sqrt{34}, 4)$, $B(-3, 4\pm 3)$,

$\overline{V_1V_2} = 10$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{34}$, $\overline{B_1B_2} = 6$, $LR = \frac{18}{5}$,

$e = \frac{\sqrt{34}}{5}$. Asíntotas: $y - 4 = \pm\frac{3}{5}(x+3)$

2. $C(-1, 0)$, $V(-1, 0\pm 2)$, $F(-1, 0\pm\sqrt{5})$, $B(-1\pm 1, 0)$,

$\overline{V_1V_2} = 4$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2} = 2$, $LR = 1$,

$e = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Asíntotas: $y = \pm 2(x+1)$

3. $C(0,-2)$, $V(0\pm 3, -2)$, $F(0\pm\sqrt{13}, -2)$, $B(0, -2\pm 2)$,

$\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{13}$, $\overline{B_1B_2} = 4$, $LR = \frac{8}{3}$,

$e = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Asíntotas: $y + 2 = \pm\frac{2}{3}x$

4. $C(1, 2)$, $V(1, 2\pm\sqrt{2})$, $F(1, 2\pm\sqrt{10})$, $B(1\pm 2\sqrt{2}, 2)$,

$\overline{V_1V_2} = 2\sqrt{2}$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{10}$, $\overline{B_1B_2} = 4\sqrt{2}$,

$LR = 8\sqrt{2}$, $e = \sqrt{5}$. Asíntotas: $y - 2 = \pm\frac{1}{2}(x-1)$

5. $C(-1,-3)$, $V(-1,-3\pm 3)$, $F(-1,-3\pm\sqrt{13})$,

$B(-1\pm 2, -3)$, $\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{13}$, $\overline{B_1B_2} = 4$,

$LR = \frac{8}{3}$, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Asíntotas: $y + 3 = \pm\frac{3}{2}(x+1)$

6. $C(-2, 1)$, $V(-2\pm 4, 1)$, $F(-2\pm 5, 1)$, $B(-2, 1\pm 3)$,

$\overline{V_1V_2} = 8$, $\overline{F_1F_2} = 10$, $\overline{B_1B_2} = 6$, $LR = \frac{9}{2}$, $e = \frac{5}{4}$.

Asíntotas: $y - 1 = \pm\frac{3}{4}(x+2)$

7. $C\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $V\left(\frac{1}{2}\pm 3, 1\right)$, $F\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{13}, 1\right)$,

$B\left(\frac{1}{2}, 1\pm 2\right)$ $\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{13}$, $\overline{B_1B_2} = 4$,

$LR = \frac{8}{3}$, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Asíntotas: $y - 1 = \pm\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

8. $C(-3, 0)$, $V(-3, 0\pm 2)$, $F(-3, 0\pm\sqrt{5})$, $B(-3\pm 1, 0)$,

$\overline{V_1V_2} = 4$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2} = 2$, $LR = 1$, $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Asíntotas: $y = \pm 2(x+3)$

9. $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\pm 2\right)$, $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\pm 2\sqrt{2}\right)$,

$B\left(\frac{1}{2}\pm 2, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{V_1V_2} = 4$, $\overline{F_1F_2} = 4\sqrt{2}$, $\overline{B_1B_2} = 4$,

$LR = 4$, $e = \sqrt{2}$. Asíntotas: $y - \frac{1}{2} = \pm\left(x - \frac{1}{2}\right)$

10. $C(0,-2)$, $V(0\pm 3, -2)$, $F\left(0\pm 3\sqrt{5}, -2\right)$,

$B(0, -2\pm 6)$, $\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 6\sqrt{5}$, $\overline{B_1B_2} = 12$,

$LR = 24$, $e = \sqrt{5}$. Asíntotas: $y + 2 = \pm 2x$

11. $C(3,-2)$, $V(3\pm 1, -2)$, $F\left(3\pm\sqrt{2}, -2\right)$,

$B(3, -2\pm 1)$, $\overline{V_1V_2} = 2$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{2}$, $\overline{B_1B_2} = 2$,

$LR = 2$, $e = \sqrt{2}$. Asíntotas: $y + 2 = \pm(x-3)$

12. $C(2,-2)$, $V(2, -2\pm 3)$, $F\left(2, -2\pm\sqrt{10}\right)$,

$B(2\pm 1, -2)$, $\overline{V_1V_2} = 6$, $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{10}$, $\overline{B_1B_2} = 2$,

$LR = \frac{2}{3}$, $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$. Asíntotas: $y + 2 = \pm 3(x-2)$

13. $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, $V\left(\frac{1}{2}\pm 3,\frac{1}{3}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{13},\frac{1}{3}\right)$,

$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\pm 2\right)$, $\overline{V_1V_2}=6$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{13}$,

$\overline{B_1B_2}=4$, $LR=\frac{8}{3}$, $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

Asíntotas: $y-\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

14. $C(4,3)$, $V\left(4\pm 2\sqrt{2},3\right)$, $F\left(4\pm 2\sqrt{3},3\right)$,

$B(4,3\pm 2)$, $\overline{V_1V_2}=4\sqrt{2}$, $\overline{F_1F_2}=4\sqrt{3}$,

$\overline{B_1B_2}=4$, $LR=2\sqrt{2}$, $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Asíntotas: $y-3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-4)$

15. $C(-1,-3)$, $V(-1,-3\pm\sqrt{6})$, $F(-1,-3\pm\sqrt{11})$,

$B(-1\pm\sqrt{5},-3)$, $\overline{V_1V_2}=2\sqrt{6}$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{11}$,

$\overline{B_1B_2}=2\sqrt{5}$, $LR=\frac{5}{3}\sqrt{6}$, $e=\frac{\sqrt{66}}{6}$.

Asíntotas: $y+3=\pm\frac{\sqrt{30}}{5}(x+1)$

16. $C(-4,-1)$, $V(-4\pm 2,-1)$, $F(-4\pm\sqrt{7},-1)$,

$B(-4,-1\pm\sqrt{3})$, $\overline{V_1V_2}=4$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{7}$,

$\overline{B_1B_2}=2\sqrt{3}$, $LR=3$, $e=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Asíntotas: $y+1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(x+4)$

17. $C(2,5)$, $V(2\pm 2\sqrt{3},5)$, $F(2\pm 3\sqrt{2},5)$,

$B(2,5\pm\sqrt{6})$, $\overline{V_1V_2}=4\sqrt{3}$, $\overline{F_1F_2}=6\sqrt{2}$,

$\overline{B_1B_2}=2\sqrt{6}$, $LR=2\sqrt{3}$, $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Asíntotas: $y-5=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$

18. $C(-7,-1)$, $V(-7\pm\sqrt{2},-1)$, $F(-7\pm 2,-1)$,

$B(-7,-1\pm\sqrt{2})$, $\overline{V_1V_2}=2\sqrt{2}$, $\overline{F_1F_2}=4$,

$\overline{B_1B_2}=2\sqrt{2}$, $LR=2\sqrt{2}$, $e=\sqrt{2}$.

Asíntotas: $y+1=\pm 1(x+7)$

19. $C(-7,-1)$, $V(-7\pm 1,-1)$, $F(-7\pm\sqrt{3},-1)$,

$B(-7,-1\pm\sqrt{2})$, $\overline{V_1V_2}=2$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{3}$,

$\overline{B_1B_2}=2\sqrt{2}$, $LR=4$, $e=\sqrt{3}$.

Asíntotas: $y+1=\pm\sqrt{2}(x+7)$

20. $C(-1,5)$, $V(-1\pm\sqrt{3},5)$, $F(-1\pm\sqrt{7},5)$,

$B(-1,5\pm 2)$, $\overline{V_1V_2}=2\sqrt{3}$, $\overline{F_1F_2}=2\sqrt{7}$,

$\overline{B_1B_2}=4$, $LR=\frac{8}{3}\sqrt{3}$, $e=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Asíntotas: $y-5=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+1)$

Ejercicio 42

1. $16x^2-9y^2+18y-153=0$
2. $11y^2-25x^2+22y-200x-664=0$
3. $9x^2-16y^2-36x-64y-172=0$
4. $5y^2-4x^2-30y+8x+21=0$
5. $9x^2-16y^2-54x+64y-127=0$
6. $5x^2-4y^2+60x+24y+124=0$
7. $3x^2-y^2-12x+6y-9=0$
8. $9x^2-7y^2+18x+42y+9=0$
9. $x^2-2y^2-8x+12y-10=0$
10. $6x^2-5y^2+24x-30y+9=0$
11. $3x^2-4y^2+24x-8y+32=0$
12. $9x^2-16y^2-18x+96y-279=0$
13. $4y^2-5x^2-8y-10x-21=0$
14. $9x^2-4y^2+36x+8y-4=0$

Ejercicio 43

1. $k=5$
2. $k=-2$
3. $k=77$
4. $k=-\frac{1}{6}$
5. $k=1$
6. $k=1$
7. $k=64$
8. $k=-35$
9. $k=0$
10. $k=-7$
11. $k=-32$

Ejercicio 44

1. $5x-4y+16=0$
2. $5x+\sqrt{34}y+25=0$
3. $5x-4y+26=0$
4. $2x-5y-30=0$
5. $x+4y-9=0$

Capítulo 28

Ejercicio 45

1. $y'^2 - \sqrt{2}\,x = 0$
2. $3x'^2 + 4y'^2 - 12 = 0$
3. $x'^2 - y'^2 + 4 = 0$
4. $x'^2 + y' = 0$
5. $x'^2 + 2y'^2 + 4x' + 4y' - 3 = 0$

Ejercicio 46

1. $x'^2 - y'^2 - 1 = 0$
2. $y'^2 - 8x' = 0$
3. $x'^2 + 4y'^2 - 4x' - 8y' + 4 = 0$
4. $x'^2 - \sqrt{3}\,y' = 0$
5. $x'^2 - y'^2 - 2 = 0$
6. $4x'^2 + 9y'^2 + 8\sqrt{2}\,x' - 28 = 0$
7. $3x'^2 + y'^2 - 2\sqrt{2}\,x' - 10\sqrt{2}\,y' + 10 = 0$
8. $6x'^2 + y'^2 - 6\sqrt{5}\,x' + 8\sqrt{5}\,y' = 0$
9. $2y'^2 - 5\sqrt{2}\,x' + 15\sqrt{2}\,y' = 0$
10. $3x'^2 - y'^2 - 24\sqrt{2}\,x + 104 = 0$

Ejercicio 47

1. $y''^2 - 4x'' = 0$
2. $4x''^2 + y''^2 - 4 = 0$
3. $4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0$
4. $4x''^2 - 9y''^2 - 36 = 0$
5. $x''^2 + 8y'' = 0$
6. $y''^2 + 6x'' = 0$
7. $x''^2 - y''^2 + 9 = 0$
8. $x''^2 - 12y'' = 0$
9. $4x''^2 + y''^2 - 4 = 0$

Ejercicio 48

1. Parábola
2. Elipse
3. Hipérbola
4. Parábola
5. Elipse
6. Parábola
7. Elipse
8. Elipse
9. Parábola
10. Hipérbola

Ejercicio 49

1. $x - y + 3 = 0$; $x + 2y = 0$
2. $3x + y + 1 = 0$
3. $x - y + 1 = 0$
4. $x + y + 3 = 0$; $4x - y + 7 = 0$
5. $3x - 2y = 0$; $x + y = 0$
6. $x + 5y - 2 = 0$
7. $P(-1, -1)$
8. $3x + 4y - 2 = 0$
9. $x + 3y - 2 = 0$; $x - 2y + 2 = 0$
10. $2x + 3y - 5 = 0$

Ejercicio 50

1. $5x^2 + 9y^2 + 48x - 54y - 63 = 0$
2. $4x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 4 = 0$
3. $y^2 + 14x - 6y - 12 = 0$
4. $16x^2 - 9y^2 + 200y - 400 = 0$
5. $x^2 - 16xy + y^2 - 36x + 18y + 45 = 0$
6. $3x^2 + 4xy - 18x - 2y - 4 = 0$
7. $144x^2 + 432xy + 324y^2 + 984x - 1\,332y - 1\,127 = 0$
8. $2xy + a^2 = 0$
9. $7y^2 - 24xy - 6y + 144x - 225 = 0$
10. $x^2 + 4y^2 - 6\sqrt{3}\,ax + 11a^2 = 0$

Ejercicio 51

1. $x = \pm\dfrac{25}{3}$
2. $y = \pm\dfrac{16}{\sqrt{7}}$
3. $x = \pm\dfrac{9}{\sqrt{5}}$
4. $x = \pm\dfrac{4}{\sqrt{29}}$
5. $y = \pm\dfrac{16}{5}$
6. $y = \pm\dfrac{25}{\sqrt{34}}$
7. $y = -2 \pm \dfrac{9}{\sqrt{5}}$
8. $x = -3 \pm \dfrac{25}{\sqrt{41}}$
9. $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
10. $y = 1 \pm \dfrac{16}{\sqrt{7}}$

Ejercicio 52

1. $3x + 4y - 25 = 0$
2. $9x + 4y - 31 = 0$
3. $5x - 4y - 21 = 0$
4. $6x - 5y + 31 = 0$
5. $12x - 5y - 38 = 0$
6. $x - 4y + 17 = 0$
7. $3x - 5y + 18 = 0$
8. $y - 2 = 0$
9. $x - y - 7 = 0$
10. $16x + 25y + 41 = 0$

Ejercicio 53

1. $3x - 2y + 13 = 0$; $3x - 2y - 13 = 0$
2. $2x - 3y + 3\sqrt{5} = 0$; $2x - 3y - 3\sqrt{5} = 0$
3. $x - 6y + 14 = 0$
4. $x + 2y + 1 = 0$
5. $x + 4y - 3 = 0$, $x + 4y + 9 = 0$

Ejercicio 54

1. $x - y + 2 = 0$; $x + 2y + 8 = 0$
2. $y = 0$, $2x + y + 8 = 0$
3. $\sqrt{3}x - 3y + 6 = 0$; $\sqrt{3}x + 3y - 6 = 0$
4. $3x - 5y + 18 = 0$; $5x + 3y - 38 = 0$
5. $2x - y + 1 = 0$; $x + y - 4 = 0$

Capítulo 29

Ejercicio 55

1. $A\left(3\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$
2. $R\left(2,-2\sqrt{3}\right)$
3. $P\left(-4,4\right)$
4. $A\left(4\sqrt{3},4\right)$
5. $B\left(5,-5\sqrt{3}\right)$
6. $C\left(0,-4\right)$
7. $Q\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$
8. $M\left(-\frac{7}{2}\sqrt{2},\frac{7}{2}\sqrt{2}\right)$
9. $N\left(5\sqrt{2},5\sqrt{2}\right)$
10. $S\left(-\frac{15}{2}\sqrt{3},\frac{15}{2}\right)$
11. $T\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$
12. $A\left(-1,\sqrt{3}\right)$
13. $S\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}\right)$
14. $C\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
15. $B\left(-\frac{3}{8}\sqrt{2+\sqrt{3}},-\frac{3}{8}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$
16. $A(13, 67°22'48") = (-13, 247°22'48")$
17. $P\left(2\sqrt{13}, 213°41'24"\right) = \left(-2\sqrt{13}, 33°41'24"\right)$
18. $C(5, 323°7'48") = (-5, 143°7'48")$
19. $B(15, 306°52'11") = (-15, 126°52'11")$
20. $C(4, 0°) = (-4, 180°)$
21. $W(6, 270°) = (-6, 90°)$
22. $M(5, 306°52'11") = (-5, 126°52'11")$
23. $Q(13, 157°22'48") = (-13, 337°22'48")$
24. $D(-1, 135°) = (1, 315°)$
25. $F(25, 16°15'36") = (-25, 196°15'36")$
26. $Z(1, 150°) = (-1, 330°)$
27. $Q(\sqrt{34}, 329°2'10") = (-\sqrt{34}, 149°2'10")$
28. $L(3, 180°) = (-3, 0°)$
29. $J\left(\frac{\sqrt{17}}{2}, 284°2'10"\right) = \left(-\frac{\sqrt{17}}{2}, 104°2'10"\right)$
30. $K(5, 90°) = (-5, 270°)$

Ejercicio 56

1. $d_{AB}=\sqrt{5}\ u$
2. $d_{CD}=3\sqrt{5}\ u$
3. $d_{EF}=17\ u$
4. $d_{GH}=2\sqrt{7}\ u$
5. $d_{IJ}=\sqrt{89-40\sqrt{3}}\ u$
6. $A=36u^2$
7. $A=6u^2$
8. $A=32u^2$

Ejercicio 57

1. $r\ sen\ \theta+3=0$
2. $r\cos\theta-5=0$
3. $\theta=60°$
4. $r=\dfrac{6}{2\cos\theta-3sen\ \theta}$
5. $r=\dfrac{2}{sen\ \theta+\cos\theta}$
6. $r=\dfrac{p}{\cos\left(\theta-w\right)}$
7. $r=\pm 4$
8. $r+4\cos\theta=0$
9. $r-2\ sen\ \theta=0$
10. $r^2-4r\cos\theta-6r\ sen\ \theta-12=0$
11. $r=\dfrac{-8\cos\theta}{sen^2\theta}=-8\cot\theta\csc\theta$
12. $r^2 sen^2\theta-12r\cos\theta-36=0$
13. $r=sen 2\theta$
14. $r^2\cos^2\theta-2r\cos\theta-4r\ sen\ \theta-3=0$
15. $r=\dfrac{\pm 6}{\sqrt{5\cos^2\theta+4}}$
16. $r=\dfrac{\pm 20}{\sqrt{16+9sen^2\theta}}$
17. $9r^2\cos^2\theta+25r^2 sen^2\theta-72r\ sen\ \theta-81=0$
18. $r=\dfrac{-36sen\ \theta}{4+5sen^2\theta}$
19. $r=\dfrac{\pm 3}{\sqrt{\cos 2\theta}}$
20. $r=\dfrac{\pm 12}{\sqrt{25\cos^2\theta-9}}$
21. $9r^2\cos^2\theta-4r^2 sen^2\theta+8r\ sen\ \theta-40=0$
22. $r=\cos\theta\pm 1$
23. $r=\pm\sqrt{\dfrac{-8}{sen\ 2\theta}}$
24. $r=\pm\sqrt{\cos 2\theta}$
25. $r=\dfrac{1}{2}sen\ 2\theta$
26. $r\cos^2\theta\,(r\ sen\ \theta-2)=16sen\ \theta$
27. $r=12\ ctg\ \theta\csc\theta$
28. $r=\dfrac{12}{3sen\ \theta-4\cos\theta}$
29. $r=\dfrac{\pm 4}{\sqrt{\cos^2\theta-4sen^2\theta}}$

30. $r^2 \cos^2 \theta + 4r \operatorname{sen} \theta - 8 = 0$

31. $r = -3 \operatorname{sen} \theta \pm 2$

32. $r = \dfrac{\pm 6}{\sqrt{4 + 5\operatorname{sen}^2 \theta}}$

33. $r^2 - 2r \cos \theta = 8$

34. $r^2 (3 + \operatorname{sen}^2 \theta) - 6r \cos \theta - 9 = 0$

35. $r^2 (4 - 9 \cos^2 \theta) - 8r \operatorname{sen} \theta - 6 = 0$

36. $r^2 \cos^2 \theta - 5r \operatorname{sen} \theta + 15 = 0$

37. $r = \dfrac{2 - 4\operatorname{ctg} \theta}{3\operatorname{sen} \theta}$

38. $r = \dfrac{\pm 2\sqrt{2}}{\sqrt{2\cos 2\theta + 3\operatorname{sen} 2\theta}}$

39. $r = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + \tan \theta}}{\cos \theta}$

40. $\dfrac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} 2\theta - r \operatorname{sen} \theta - 3r \cos \theta + 2 = 0$

EJERCICIO 58

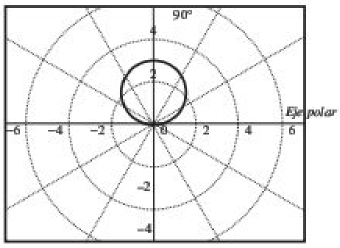
1. $y - 5 = 0$
2. $x + 8 = 0$
3. $x^2 + 2y^2 - 4x = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4y = 0$
5. $9x^2 + 5y^2 + 20y - 25 = 0$
6. $\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2xy = 0$
7. $x^2 + 2y^2 - 256 = 0$
8. $y^2 - 10x - 25 = 0$
9. $4(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + x)^2$
10. $x^4 + y^4 - 15x^2 - 16y^2 + 2x^2y^2 - 2x^3 - 2xy^2 = 0$
11. $16(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + 4x)^2$
12. $2xy - 9 = 0$
13. $x^2 - 6y - 9 = 0$
14. $y^2 + 8x - 16 = 0$
15. $\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} = 4\left(x^2 - y^2\right)$
16. $\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} = y$
17. $9x^2 + 8y^2 + 12y - 36 = 0$
18. $3x^2 + 4y^2 - 4x - 4 = 0$
19. $3x^2 - y^2 + 12x + 9 = 0$
20. $3x^2 + 4y^2 + 2x - 1 = 0$
21. $3x^2 + 4y^2 - 8x - 16 = 0$
22. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 16\left(x^2 - y^2\right)$
23. $5x^2 - 4y^2 - 36x + 36 = 0$
24. $x^2 + 4y - 4 = 0$
25. $4x^3 - y^2 = 0$
26. $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 8 = 0$
27. $x^2 + 3x - 2y + 4 = 0$
28. $y^2 - 12x = 0$
29. $x^2 - y^2 = 1$
30. $x + \sqrt{3}\, y + 8 = 0$
31. $x - \sqrt{3}\, y = 0$
32. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^3 - 3xy^2$
33. $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3 - 6xy^2$
34. $\left(x^2 + y^2\right)^2 \left[\sqrt{x^2 + y^2} - 5\right] = -40x^2y^2$
35. $x \tan \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3} - y = 0$
36. $2\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} - 9\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} + 9x = 0$
37. $2\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} - 4\left(x^2 + y^2\right) + \sqrt{x^2 + y^2} - x = 0$

EJERCICIO 59

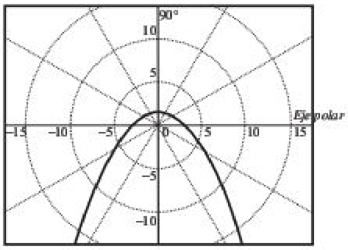
1. Parábola horizontal	11. Hipérbola vertical
2. Parábola horizontal	12. Parábola vertical
3. Parábola vertical	13. Hipérbola horizontal
4. Parábola vertical	14. Elipse horizontal
5. Elipse vertical	15. Parábola horizontal
6. Hipérbola vertical	16. Elipse horizontal
7. Elipse horizontal	17. Elipse horizontal
8. Elipse horizontal	18. Elipse vertical
9. Hipérbola horizontal	19. Parábola vertical
10. Hipérbola horizontal	20. Elipse vertical

EJERCICIO 60

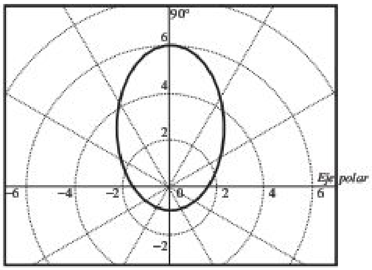
1. $r = 3 \operatorname{sen} \theta$



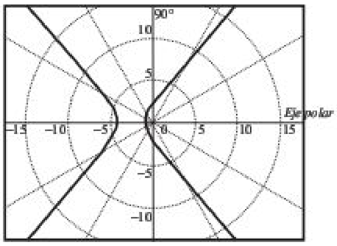
2. $r = \dfrac{3}{1 + sen\, \theta}$



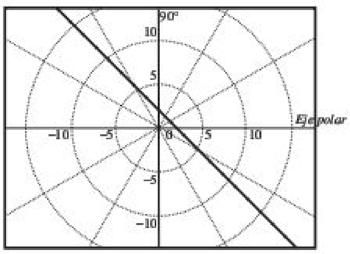
3. Elipse



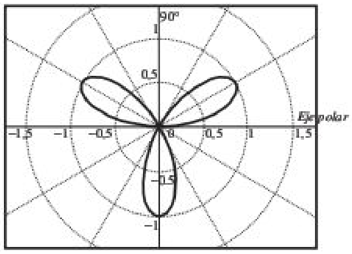
4. $\dfrac{4}{2 - 3cos\, \theta}$



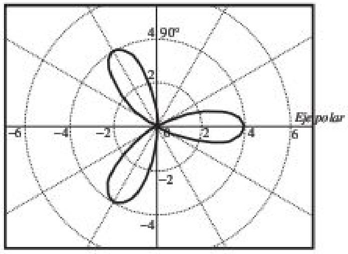
5. $r = \dfrac{2}{sen\, \theta + cos\, \theta}$



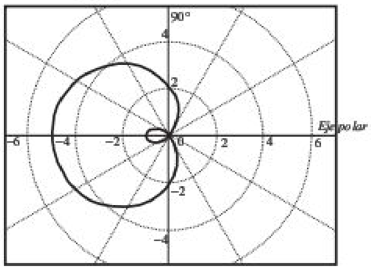
6. $r = sen\, 3\theta$



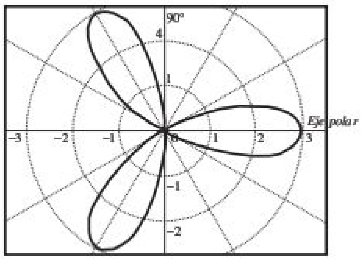
7. $r = 4cos\, 3\theta$



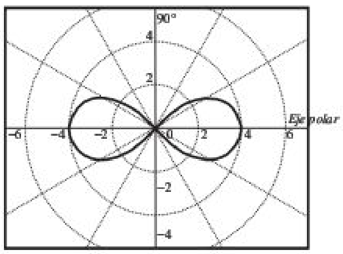
8. $r = 2 - 3cos\, \theta$



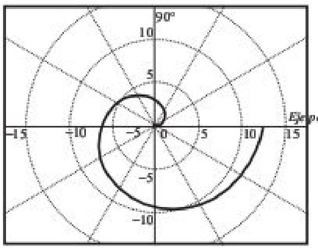
9. $r = 3cos\, 3\theta$



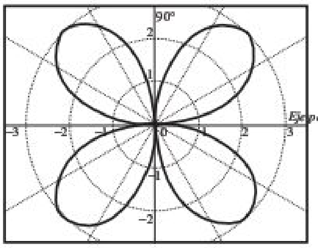
10. $r^2 = 16cos\, 2\theta$



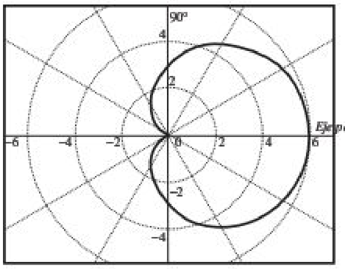
11. $r = 2\theta$



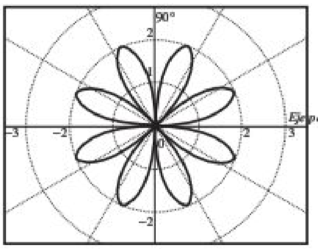
12. $r = 3sen\ 2\theta$



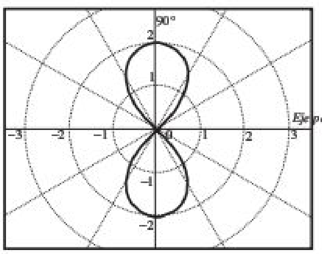
13. $r = 3(1 + cos\ \theta)$



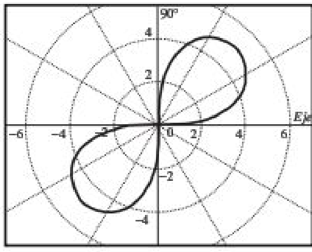
14. $r = 2sen\ 4\theta$



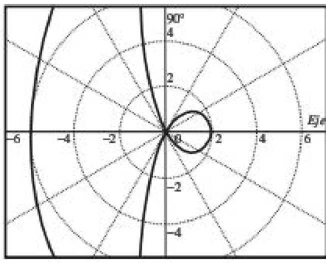
15. $r^2 = -4cos\ 2\theta$



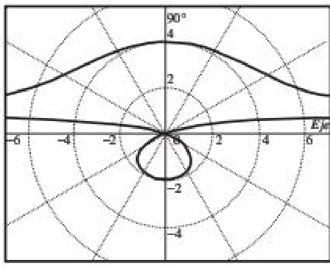
16. $r^2 = 25sen\ 2\theta$



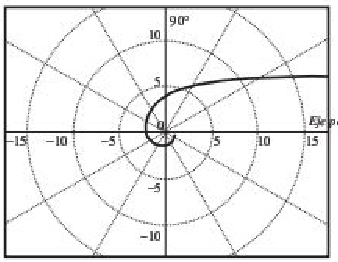
17. $r = 4 - 2sec\ \theta$



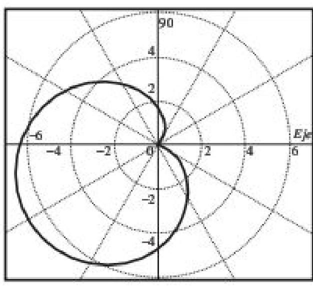
18. $r = 3 + csc\ \theta$



19. $r = \dfrac{2\pi}{\theta}$



20. $r = \theta(1 - cos\ \theta)$



Ejercicio 61

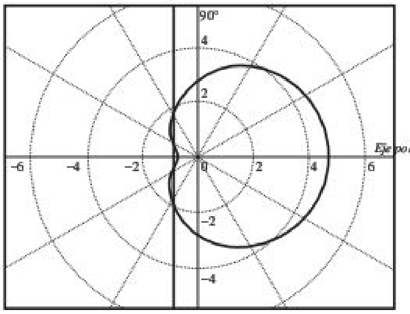
1. $r \cos \theta - 5 = 0$
2. $r \operatorname{sen} \theta + 7 = 0$
3. $r \operatorname{sen} \theta - 5 = 0$
4. $r \cos \theta + 1 = 0$
5. $r \cos(\theta - 60°) = 5\sqrt{3}$
6. $r \cos(\theta - 75°) = 4\sqrt{2}$
7. $r \cos(\theta - 150°) = 2$
8. $r \cos(\theta - 135°) = 5$

Ejercicio 62

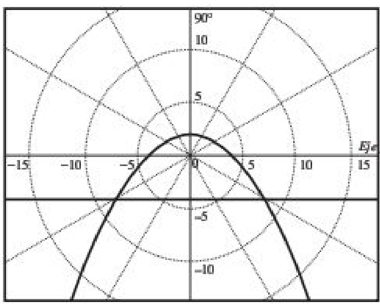
1. $r^2 - 6r \cos(\theta - 30°) - 72 = 0$
2. $r^2 - 10r \cos(\theta - 120°) + 24 = 0$
3. $r^2 - 20r \cos(\theta - 45°) + 84 = 0$
4. $r - 14 \operatorname{sen} \theta = 0$
5. $r - 6 = 0$

Ejercicio 63

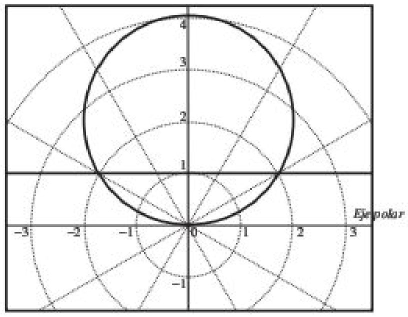
1. $(1, 30°)$, $\left(-\sqrt{3}, 60°\right)$, $\left(\sqrt{3}, 300°\right)$, $(-1, 330°)$



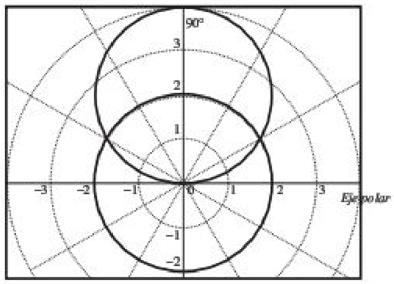
2. $(8, 210°)$, $(8, 330°)$



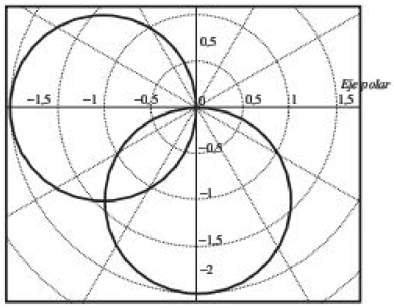
3. $(2, 30°)$, $(2, 150°)$



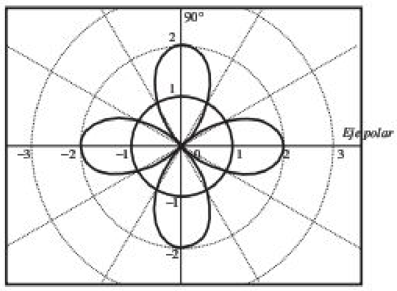
4. $(2, 30°)$, $(2, 150°)$



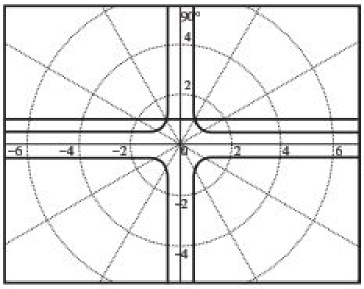
5. $(-\sqrt{2}, 45°)$, $(\sqrt{2}, 225°)$



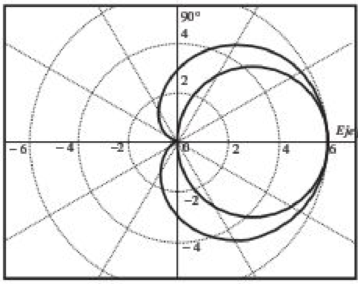
6. $(1, 30°)$, $(1, 330°)$, $(1, 150°)$, $(1, 210°)$



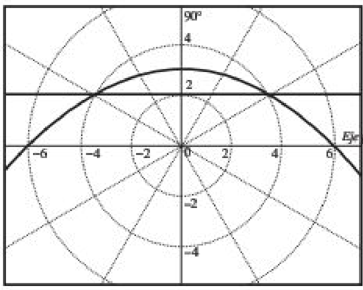
7. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},60^\circ\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},300^\circ\right)$



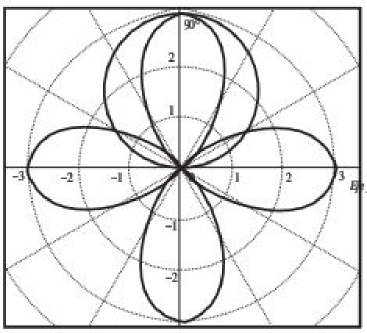
8. $(6, 0^\circ)$



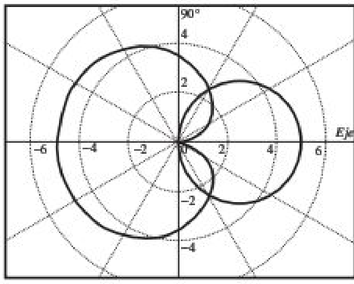
9. $(4, 30^\circ), (4, 150^\circ)$



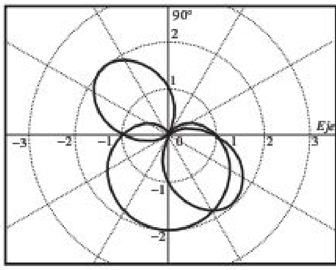
10. $\left(\frac{3}{2},30^\circ\right),\left(\frac{3}{2},150^\circ\right)$



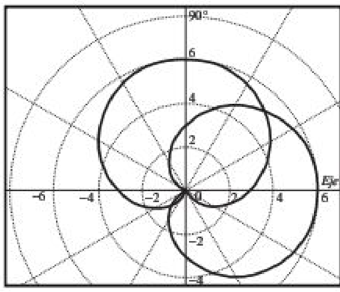
11. $\left(\frac{5}{2},60^\circ\right),\left(\frac{5}{2},300^\circ\right)$



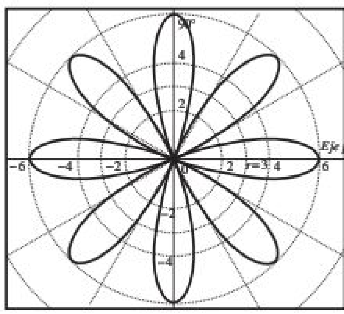
12. $(1, 0^\circ), (1, 180^\circ), (1.8, 300^\circ), (0.13, 60^\circ)$



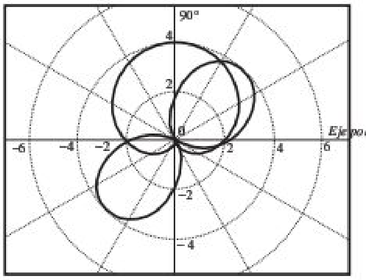
13. $\left(\frac{3}{2}\left(2+\sqrt{2}\right),45^\circ\right),\left(\frac{3}{2}\left(2-\sqrt{2}\right),225^\circ\right)$



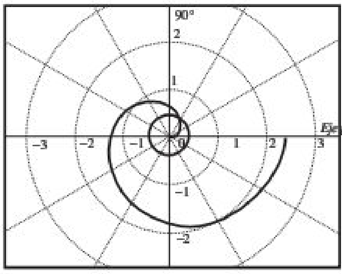
14. $(3, 15^\circ), (3, 75^\circ), (3, 105^\circ), (3, 165^\circ), (3, 195^\circ), (3, 255^\circ), (3, 285^\circ), (3, 345^\circ)$



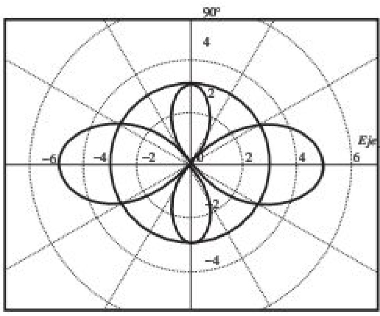
15. $(2, 0°), (2, 180°), (3.7, 60°), (0.26, 300°)$



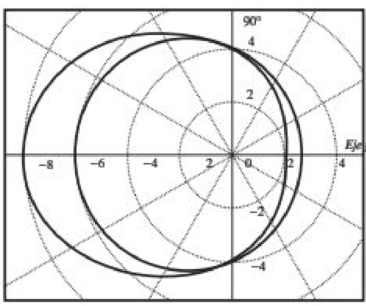
16. $(2, 60°)$



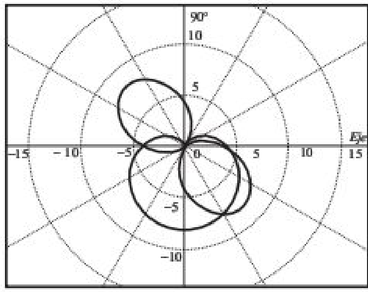
17. $(3, 30°), (3, 150°), (3, 210°), (3, 330°)$



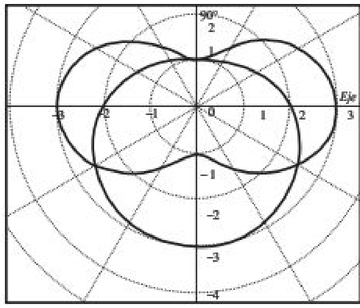
18. $(4, 90°), (4, 270°)$



19. $(4, 0°), (4, 180°), (4-2\sqrt{3}, 60°), (4+2\sqrt{3}, 300°)$



20. $(1, 90°), (2.5, 210°), (2.5, 330°)$



Capítulo 30

Ejercicio 64

1. $x - 4y = 0$
2. $\dfrac{x-b}{a} = \dfrac{y+d}{c}$
3. $2bx - ay - 2ab = 0$
4. $3x + 4y - 2 = 0$
5. $2x - y - 2 = 0$
6. $y^2 - x + 4y + 3 = 0$
7. $x^2 - 4x - y + 8 = 0$
8. $2x - y - 1 = 0$
9. $2x^3 - y + 20 = 0$
10. $y^2 - x - 1 = 0$
11. $y^2 - 16x - 2y - 31 = 0$
12. $xy^2 - 2xy + x - y = 0$
13. $x^3 - 2y - 2 = 0$
14. $3x^2 - 21xy + 18y^2 - 25 = 0$
15. $4x^2 + y^2 + x = 0$
16. $y^2 - x^2 - 4y = 0$
17. $x^2 + y^2 = 16$
18. $x^2y + x^2 - y - 4 = 0$
19. $xy = 1, xy = -1$
20. $\left(3y^2+2\right)^2\left(2-x\right) = 1$
21. $y = \dfrac{1}{1-3x}$
22. $y = \left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}$
23. $xy = 1$

Ejercicio 65

1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1$

2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$

3. $x^2+y^2=4$

4. $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

5. $xy=128$

6. $x^2-y^2+1=0$

7. $4x-y+4=0$

8. $2y^2+x-1=0$

9. $x^4-4x^2+y^2=0$

10. $y=3x-4x^3$

11. $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

12. $x^2+y^2-6x-6y+17=0$

13. $4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$

14. $4x^2+y^2-32x-6y+69=0$

15. $x=(y-1)(xy-x+2)$

16. $(x-1)^2-y^2=4$

17. $5x^2+4xy+8y^2-36=0$

18. $x^2-8xy+17y^2-2=0$

19. $x-y+5=0$

20. $9x^2-4y^2+16y-52=0$

21. $y^2-2xy=8$

Solución a los ejercicios del anexo A Relaciones y funciones

ANEXO A

EJERCICIO 1

1. Función
2. Relación
3. Función
4. Relación
5. Función
6. Relación
7. Función
8. Relación
9. Función
10. Relación
11. Función
12. Relación
13. Función
14. Función
15. Relación

EJERCICIO 2

1. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$ $f(3) = 15, f(0) = -3$
2. $f(a) = a^2 - 5a + 6,$
   $f(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 - 5a - 5b + 6$
   $f(x + h) = 3x^2 + 6hx + 3h^2 + 4x + 4h - 2$
3. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 6x + 3h + 4$
4. $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{5}, f\left(-\frac{1}{2}\right)$ = No existe
   $f(x + h) - f(x) = \frac{4h}{(2x+2h+1)(2x+1)}$
5. $f(5) = 3, f(4) = 0, f(6) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$,
   $f(3)$ = No está definida
6. $f(x + h) = \sqrt{x^2+2xh+h^2-3}$
   $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2-3}+\sqrt{x^2-3}}$
7. $\frac{f(x+b)-f(x)}{b} = -\frac{1}{(x+b+1)(x+1)}$
8. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{1}{\sqrt{1-(x+h)}+\sqrt{1-x}}$
9. $f(1) = \frac{4}{3}, f(0) = \frac{5}{2}, f(x + 5) = \frac{|x|}{x+7}$
10. $f(-1) = 2, f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x^2} + 2x^2 - 3x$

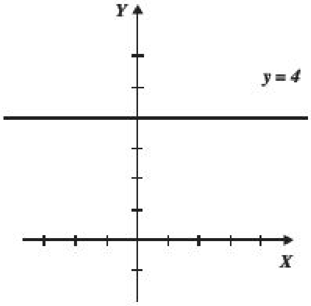
Las demostraciones de los ejercicios 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18, se dejan al estudiante.

EJERCICIO 3

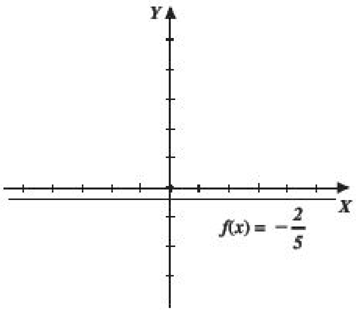
1. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
2. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
3. $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty) = \{x \in R | x \neq -3\}$
4. $(-\infty, 5) \cup (5, \infty) = \{x \in R | x \neq 5\}$
5. $(-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty) = \{x \in R | x \neq -4, x \neq 4\}$
6. $(-\infty, 0) \cup (0, 5) \cup (5, \infty) = \{x \in R | x \neq 0, x \neq 5\}$
7. $(-\infty, 2) \cup (2, 5) \cup (5, \infty) = \{x \in R | x \neq 2, x \neq 5\}$
8. $(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty) = \{x \in R | x \neq -5, x \neq 5\}$
9. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
10. $(-\infty, -5) \cup (-5, 0) \cup (0, \infty) = \{x \in R | x \neq -5, x \neq 0\}$
11. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty) = \{x \in R | x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1\}$
12. $[-1, \infty) = \{x \geq -1\}$
13. $[6, \infty) = \{x \geq 6\}$
14. $(-\infty, 2] = \{x \leq 2\}$
15. $(-\infty, 4] = \{x \leq 4\}$
16. $(-\infty, -5] \cup [5, \infty) = \{x \in R | x \leq -5 \text{ o } x \geq 5\}$
17. $(-\infty, -1] \cup [6, \infty) = \{x \in R | x \leq -1 \text{ o } x \geq 6\}$
18. $[-6, 6] = \{x \in R | -6 \leq x \leq 6\}$
19. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
20. $(-\infty, \infty) = \{x \in R\}$
21. $[5, \infty) = \{x \in R | x \geq 5\}$
22. $(2, \infty) = \{x \in R | x > 2\}$
23. $(-\infty, 3) = \{x \in R | x < 3\}$
24. $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty) = \{x \in R | x \neq -2\}$
25. $(-\infty, -4] \cup (3, \infty) = \{x \in R | x \leq -4 \text{ o } x > 3\}$
26. $\left[1, \frac{3}{2}\right) = \left\{x \in R | 1 \leq x < \frac{3}{2}\right\}$
27. $(-2, \infty) = \{x \in R | x \geq -2\}$
28. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right) = \left\{x \in R | x < \frac{5}{2}\right\}$
29. $(0, \infty) = \{x \in R | x > 0\}$
30. $(-1, 3) = \{x \in R | -1 < x < 3\}$
31. $[1, \infty) = \{y \in R | y \geq 1\}$
32. $[-4, \infty) = \{y \in R | y \geq -4\}$
33. $(-\infty, 9] = \{y \in R | y \leq 9\}$
34. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right] = \left\{y \in R | y \leq \frac{9}{4}\right\}$
35. $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty) = \{y \in R | y \neq -2\}$
36. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right) = \left\{y \in R | y \neq \frac{1}{2}\right\}$
37. $[1, \infty) = \{y \in R | y \geq 1\}$
38. $(-\infty, 0] = \{y \in R | y \leq 0\}$
39. $[0, 2] = \{y \in R | 0 \leq y \leq 2\}$
40. $(0, 1] = \{y \in R | 0 < y \leq 1\}$
41. $[0, 1) \cup (1, \infty) = \{x \in R | 0 \leq y < 1 \text{ o } y > 1\}$
42. $[0, \infty) = \{y \in R | y \geq 0\}$

Ejercicio 4

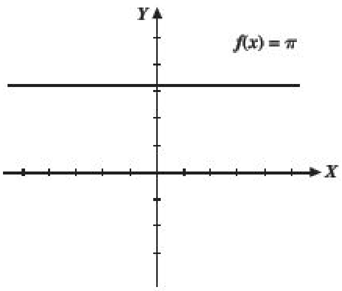
1.



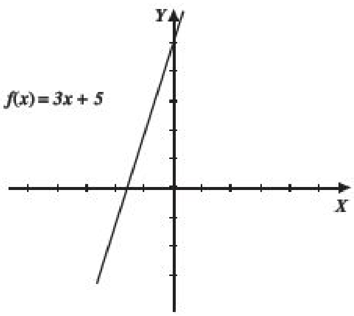
2.



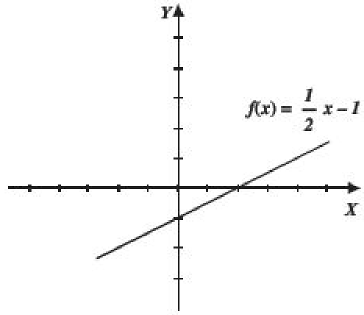
3.



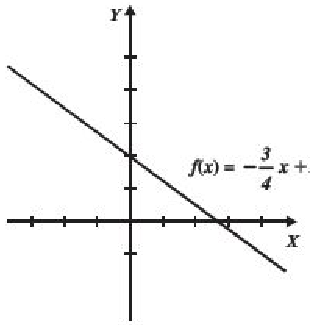
4.



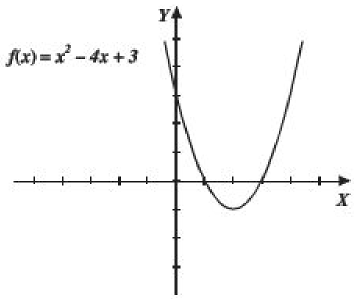
5.



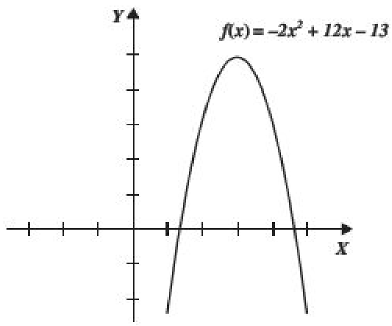
6.



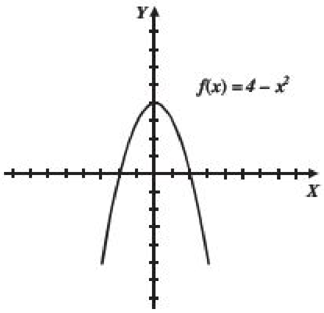
7.



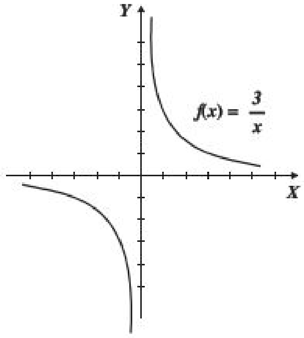
8.



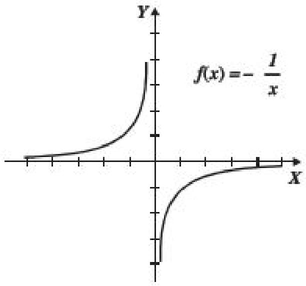
9.



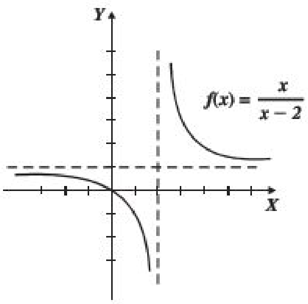
10.



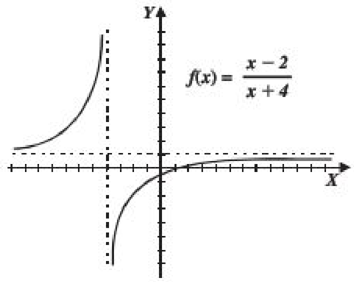
11.



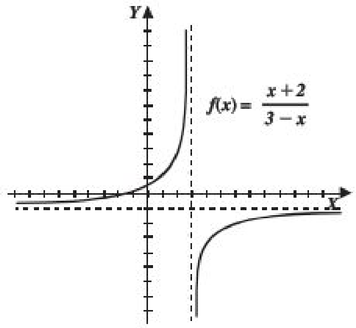
12.



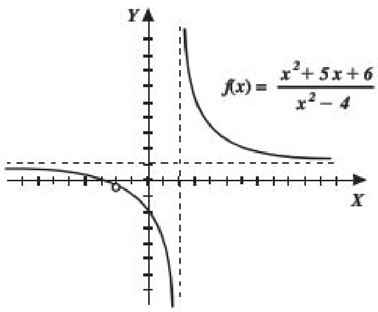
13.



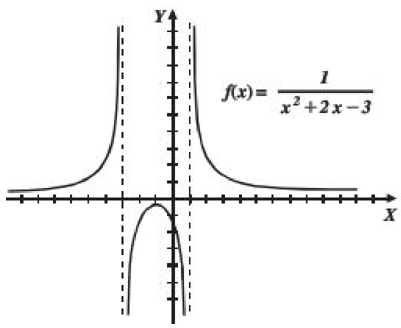
14.



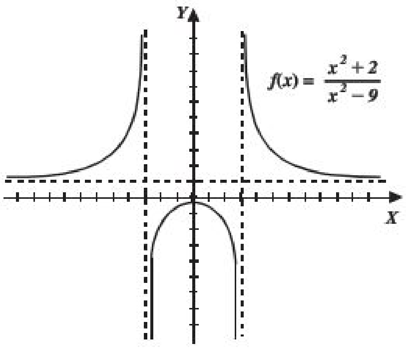
15.



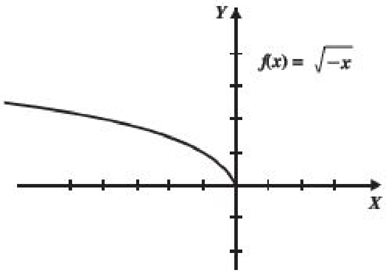
16.



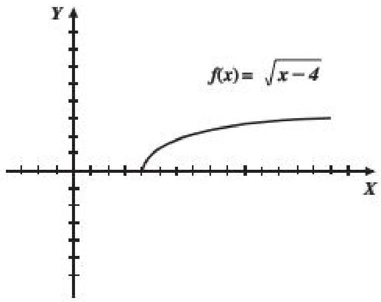
17.



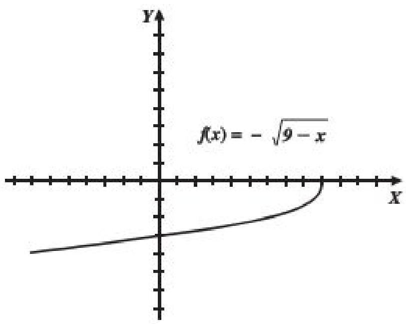
18.



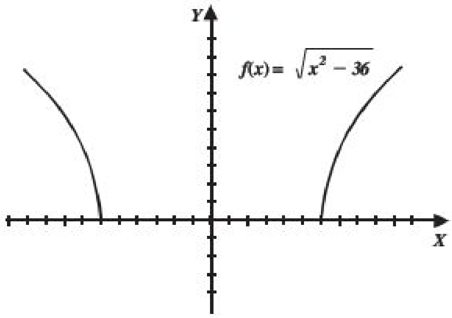
19.



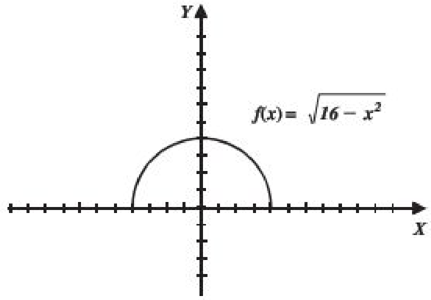
20.



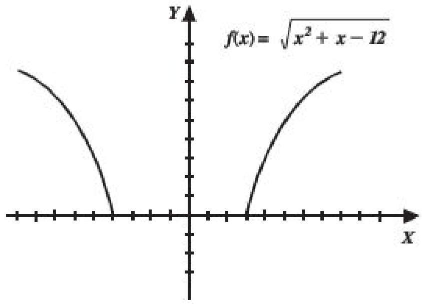
21.



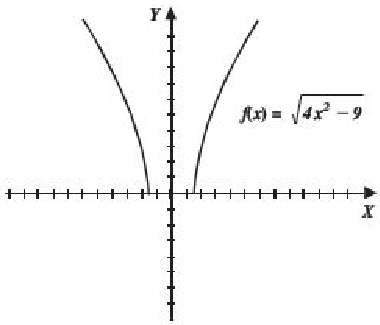
22.



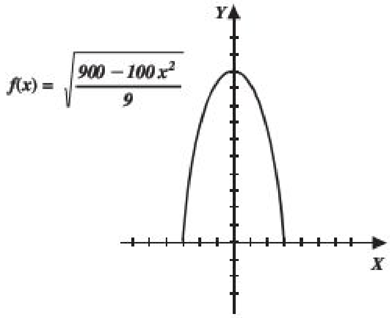
23.



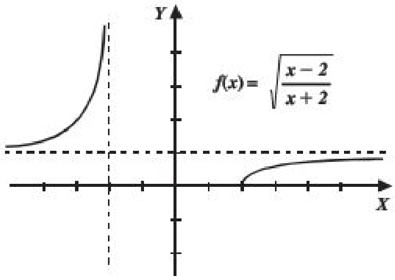
24.



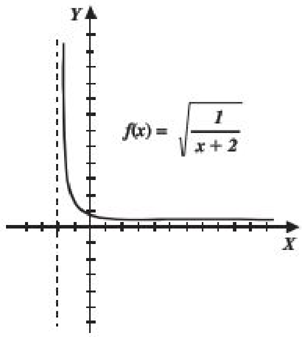
25.



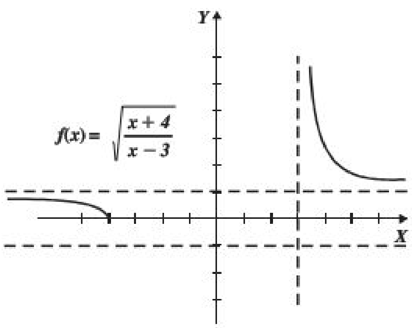
26.



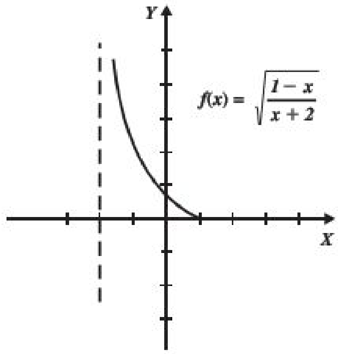
27.



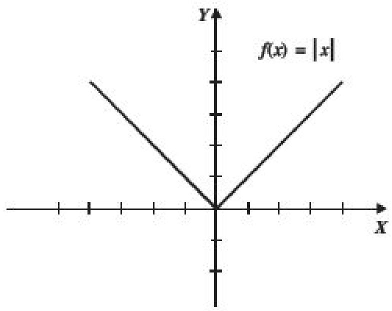
28.



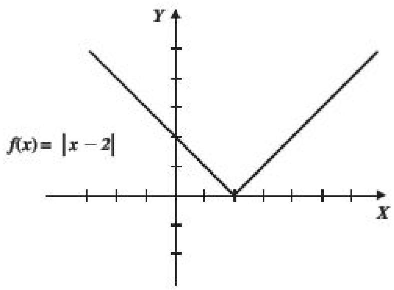
29.



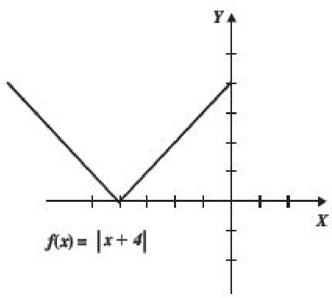
30.



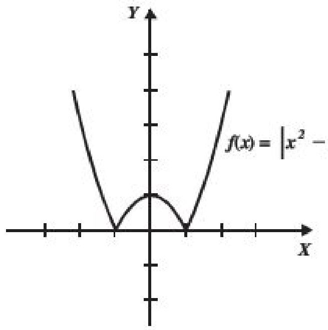
31.



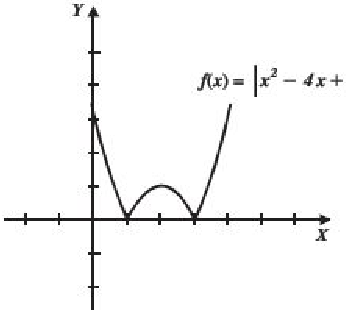
32.



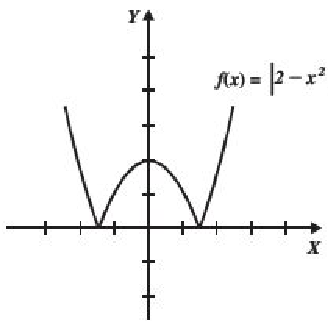
33.



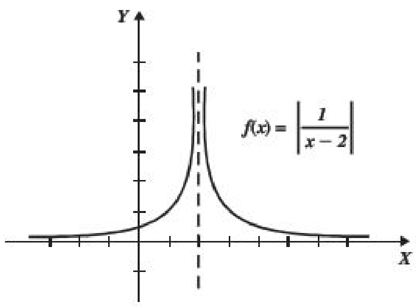
34.



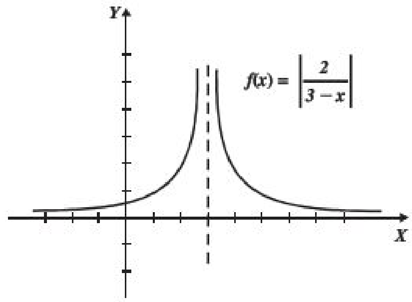
35.



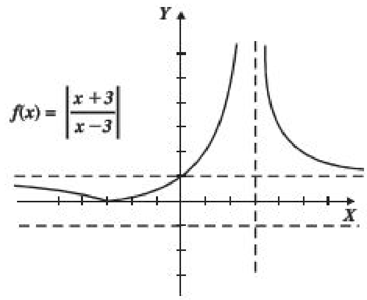
36.



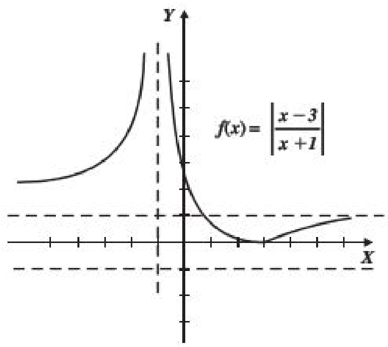
37.



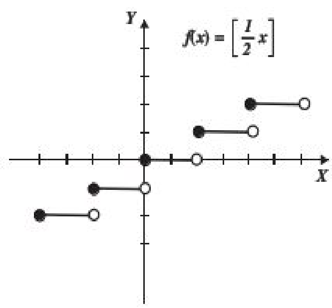
38.



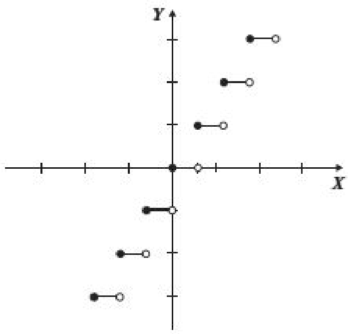
39.



40.

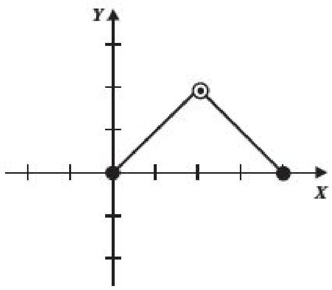


41.

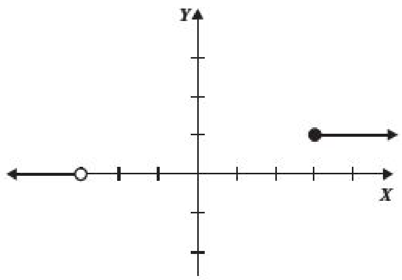


EJERCICIO 5

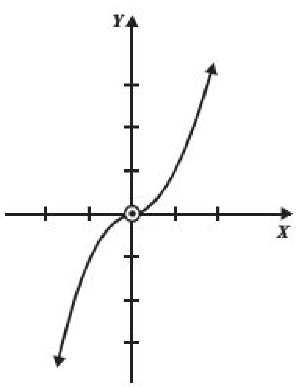
1.



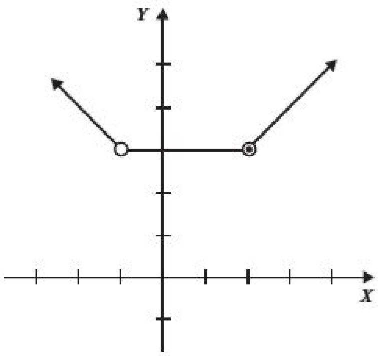
2.



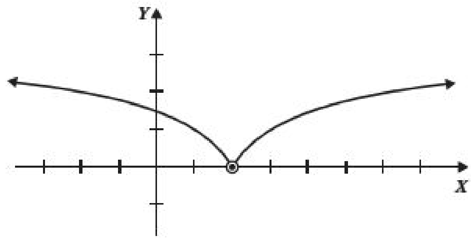
3.



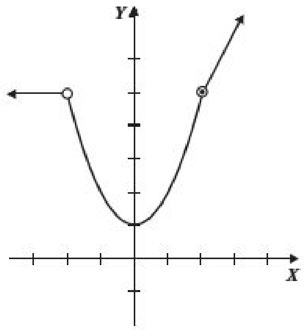
4.



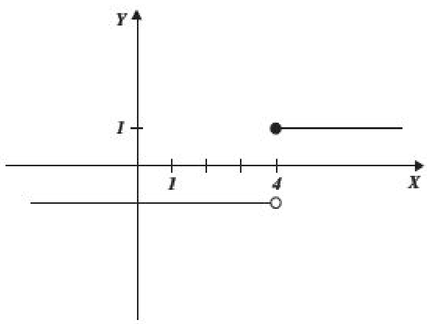
5.



6.

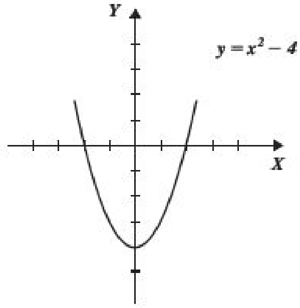


7.

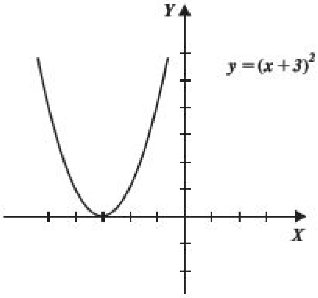


Ejercicio 6

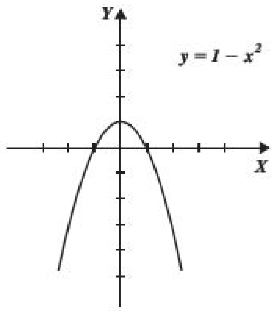
1.



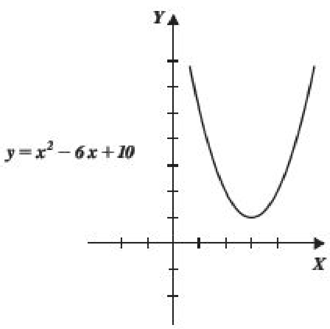
2.



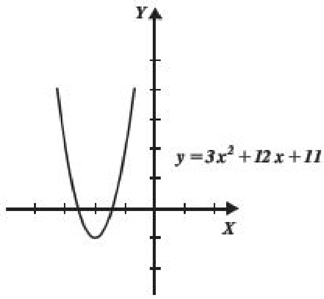
3.



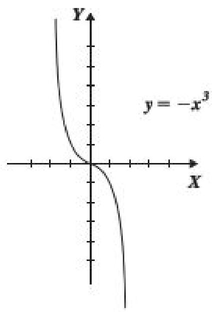
4.



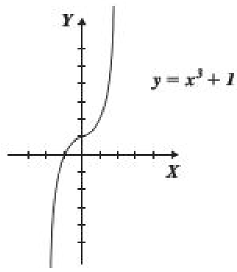
5.



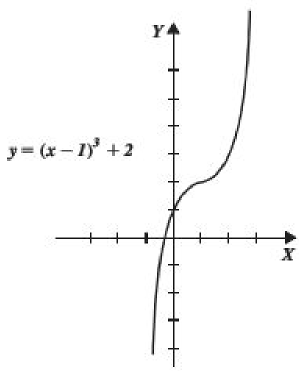
6.



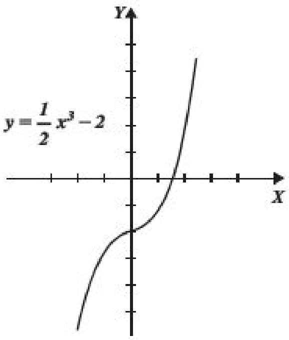
7.



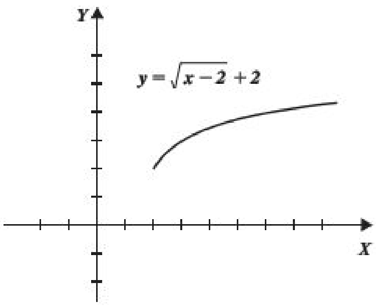
8.



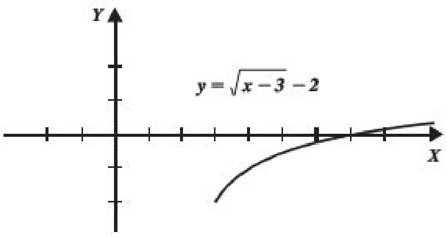
9.



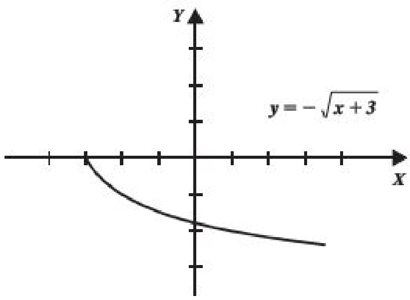
10.



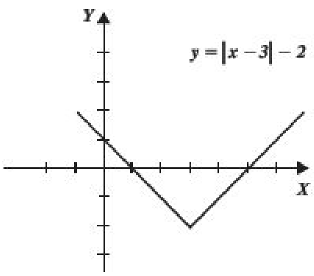
11.



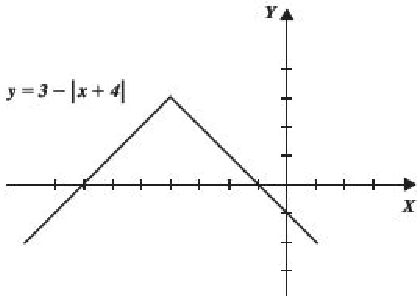
12.



13.



14.



EJERCICIO 7

1. Crece: $(0, \infty)$
2. Decrece: $(-\infty, 0)$
   Crece: $(0, \infty)$
3. Crece: $(-\infty, +\infty)$
4. Decrece: $(-\infty, 0)$
   Crece: $(0, \infty)$
5. Crece: $(2, \infty)$
6. Decrece: $(-\infty, -3)$
7. Decrece: $(0, \infty)$
   Crece: $(-\infty, 0)$
8. Decrece: $(-\infty, 3)$
   Crece: $(3, \infty)$
9. Decrece: $(0, 3)$
   Crece: $(-3, 0)$
10. No crece ni decrece, permanece constante

EJERCICIO 8

1. Biyectiva
2. Ninguna
3. Ninguna
4. Biyectiva
5. Inyectiva
6. Ninguna
7. Biyectiva
8. Inyectiva
9. Suprayectiva
10. Biyectiva

EJERCICIO 9

1. $f(x) + g(x) = 3$
   $f(x) - g(x) = 7$
   $f(x) \cdot g(x) = -10$
   $\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{5}{2}$
2. $f(x) + g(x) = 4x$
   $f(x) - g(x) = -10$
   $f(x) \cdot g(x) = 4x^2 - 25$
   $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-5}{2x+5}$

3. $f(x) + g(x) = 2x^2 - x - 3$

$f(x) - g(x) = -7(x + 1)$

$f(x) \cdot g(x) = x^4 - x^3 - 15x^2 - 23x - 10$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x-5}{x+2}$

4. $f(x) + g(x) = \dfrac{8x+1}{6}$

$f(x) - g(x) = \dfrac{4x-7}{6}$

$f(x) \cdot g(x) = \dfrac{2x^2+3x-2}{6}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{6x-3}{2x+4}$

5. $f(x) + g(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{x+4}$

$f(x) - g(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{x+4}$

$f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x^2+x-12}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+4}} = \dfrac{\sqrt{x^2+x-12}}{x+4}$

6. $f(x) + g(x) = x + 2\sqrt{x}$

$f(x) - g(x) = x$

$f(x) \cdot g(x) = x + x\sqrt{x}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{x} + 1$

7. $f(x) + g(x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$f(x) - g(x) = \text{sen}^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$

$f(x) \cdot g(x) = \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = \dfrac{1}{4}\ \text{sen}^2 2x$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

8. $D_f \cap D_g = \{-1, 3, 5\}$

$f + g = \{(-1, 12), (3, 20), (5, 23)\}$

$f - g = \{(-1, -8), (3, -8), (5, -9)\}$

$f \cdot g = \{(-1, 20), (3, 84), (5, 112)\}$

$\dfrac{f}{g} = \left\{\left(-1, \dfrac{1}{5}\right), \left(3, \dfrac{3}{7}\right), \left(5, \dfrac{7}{16}\right)\right\}$

9. $D_f \cap Dg = \{-2, -1, 0\}$

$f + g = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2)\}$

$f - g = \{(-2, -10), (-1, -7), (0, -4)\}$

$f \cdot g = \{(-2, -25), (-1, -12), (0, -3)\}$

$\dfrac{f}{g} = \left\{(-2, -1), \left(-1, -\dfrac{3}{4}\right), \left(0, -\dfrac{1}{3}\right)\right\}$

10. $D_f \cap D_g = \{-1, 1, 2\}$

$f + g = \{(-1, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

$f - g = \{(-1, -3), (1, 1), (2, 0)\}$

$f \cdot g = \left\{(-1, -2), (1, 0), \left(2, \dfrac{1}{4}\right)\right\}$

$\dfrac{f}{g} = \left\{\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right), (2, 1)\right\}$

11. $f(x) + r(x) = 2x + 5$

12. $f(x) - s(x) = -x^2 + 4x + 13$

13. $g(x) \cdot s(x) = x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 68x - 60$

14. $\dfrac{g(x)}{r(x)} = x + 3$

15. $\dfrac{s(x)}{r(x)} = x - 5$

16. $g(x) - s(x) = 8(x + 2)$

17. $f(x) \cdot r(x) = x^2 + 5x + 6$

18. $\dfrac{f(x)}{r(x)} = \dfrac{x+3}{x+2}$

19. $\dfrac{g(x)}{s(x)} = \dfrac{x+3}{x-5}$

20. $\dfrac{g(x)}{f(x)} + \dfrac{s(x)}{r(x)} = 2x - 3$

21. $f(x) + g(x) = \dfrac{x^2+2}{x(x+2)}$

22. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2-x}{x+2}$

23. $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x}$

24. $f(x) - h(x) = \dfrac{5-5x}{(x+2)(x-3)}$

25. $g(x) \cdot h(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3x}$

26. $\dfrac{f(x)}{g(x)} + h(x) = \dfrac{x^3-3x^2+4x-2}{(x+2)(x-3)}$

27. $\dfrac{h(x)}{f(x)} - g(x) = \dfrac{x^2+x+3}{x(x-3)}$

28. $\dfrac{h(2)-f(1)}{g(3)} = -3$

29. $f(x+1) \cdot \dfrac{1}{h(x+1)} = \dfrac{x-2}{x+3}$

30. $h(x) - g(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x(x-3)}$

31. $\dfrac{h(x)}{g(x)}-\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^4-2x^3+x+6}{x(x-1)(x-3)}$

32. $f(x)\cdot h(x)-g(x)=\dfrac{x^3-3x^2+2x+6}{x(x+2)(x-3)}$

33. $\dfrac{f(x)+h(x)}{g(x)}=\dfrac{x(x-1)(2x-1)}{(x+2)(x-3)}$

34. $\dfrac{1}{g(x)+h(x)}=\dfrac{x(x-3)}{x^2-3}$

35. $\dfrac{1}{1-h(x)}=\dfrac{3-x}{2}$

EJERCICIO 10

1. $(f\circ g)(x)=12x^2-46x+40$, $(g\circ f)(x)=6x^2-10x-7$,
   $(f\circ f)(x)=27x^4-90x^3+24x^2+85x+20$,
   $(g\circ g)(x)=4x-9$
2. $(f\circ g)(x)=x$, $(g\circ f)(x)=x$, $(f\circ f)(x)=\sqrt[4]{x}$, $(g\circ g)(x)=x^4$
3. $(f\circ g)(x)=4$, $(g\circ f)(x)=2$, $(f\circ f)(x)=4$, $(g\circ g)(x)=2$
4. $(f\circ g)(x)=x$, $(g\circ f)(x)=x$, $(f\circ f)(x)=\sqrt{x^2-10}$
   $(g\circ g)(x)=\sqrt{x^2+10}$
5. $(f\circ g)(x)=x+2\sqrt{x-1}$, $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2+2x}$
   $(f\circ f)(x)=(x^2+2x+2)^2$, $(g\circ g)(x)=\sqrt{\sqrt{x-1}-1}$
6. $(f\circ g)(x)=\dfrac{1-x}{1+3x}$, $(g\circ f)(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$
   $(f\circ f)(x)=-\dfrac{1}{2x+1}$, $(g\circ g)(x)=x$
7. $(f\circ g)(x)=\log(x-4)$, $(g\circ f)(x)=\log(x-2)-2$
   $(f\circ f)(x)=\log[\log(x-2)-2]$, $(g\circ g)(x)=x-4$
8. $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $(g\circ f)(x)=\sqrt{-x^2-\sqrt{x^4-1}}$
   $(f\circ f)(x)=\sqrt{-\dfrac{1}{x^2}}$ no está definida
   $(g\circ g)(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$
9. $(f\circ g)(x)=\{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8)\}$
   $(g\circ f)(x)=$ No está definida, $(f\circ f)(x)=\{(2,8)\}$
   $(g\circ g)(x)=\{(1,3),(2,4),(3,5)\}$
10. $(f\circ g)(x)=\{(-2,1),(-1,4),(0,9),(1,16)\}$
   $(g\circ f)(x)=(1,4)$, $(f\circ f)(x)=\{(1,1),(2,16)\}$
   $(g\circ g)(x)=\{(-2,4)\}$
11. $(f\circ g)(x)=\{(3,1),(-2,-3),(1,-1)\}$
   $(g\circ f)(x)=\{(0,-1),(1,0)\}$, $(f\circ f)(x)=\{(0,3),(-1,-1)\}$
   $(g\circ g)(x)=\{(-2,-2)\}$
12. $f(x)=\dfrac{1}{x}$
13. $f(x)=\sqrt{x}$
14. $f(x)=mx+b$
15. $f(x)=x^2$
16. $f(x)=\sqrt{x-2}$
17. $f\circ g\circ h=81x^2-54x+9$
18. $f\circ g\circ h=1-12x^2+48x^4+64x^6$
19. $f\circ g\circ h=\sqrt{2x-9}$
20. $f\circ g\circ h=\operatorname{sen}^2(x-2)$
21. $f\circ g\circ h=\sec^2 x$
22. $f\circ g\circ h=\operatorname{sen} x$

EJERCICIO 11

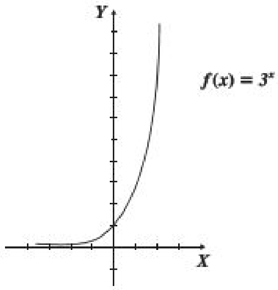
1. Ninguna	6. Ninguna	11. Par
2. Par	7. Par	12. Par
3. Impar	8. Par	13. Impar
4. Ninguna	9. Ninguna	14. Par
5. Ninguna	10. Impar	15. Par

EJERCICIO 12

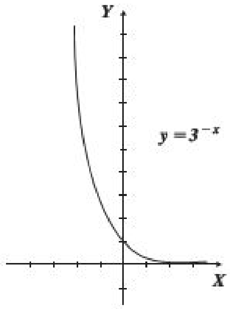
1. $f^{-1}(x)=x$
2. $f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{2}$
3. $f^{-1}(x)=\sqrt{x+9}$
4. No tiene inversa
5. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$
6. $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{x}$
7. $f^{-1}(x)=\sqrt[4]{x}$
8. $f^{-1}(x)=3-x^2$
9. No tiene inversa
10. $f^{-1}(x)=\sqrt{4-x^2}$
11. $f^{-1}(x)=x^3-9$
12. $f^{-1}(x)=\dfrac{1-3x}{2x}$
13. $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+1}$
14. $f^{-1}(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$
15. $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

Ejercicio 13

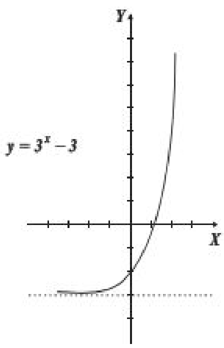
1.



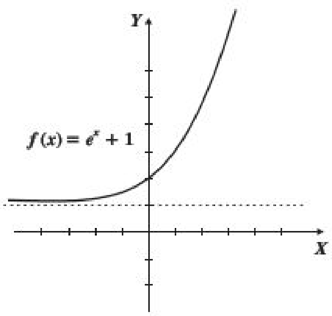
2.



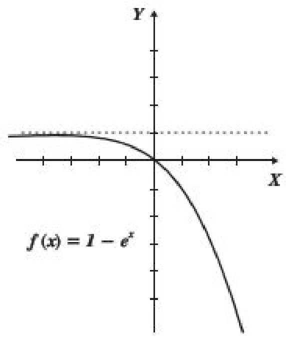
3.



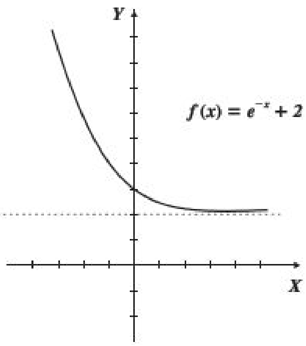
4.



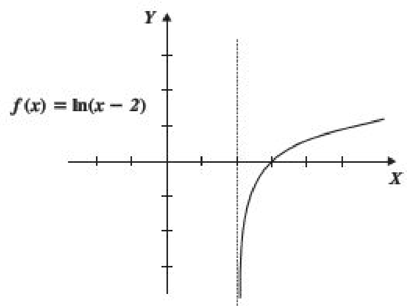
5.



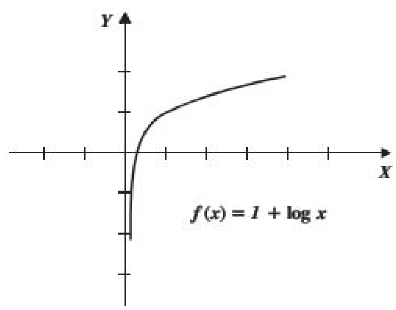
6.



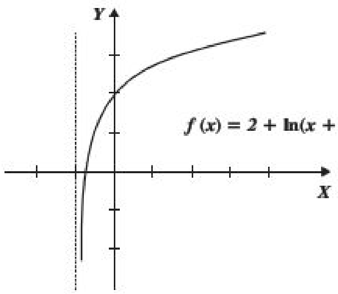
7.



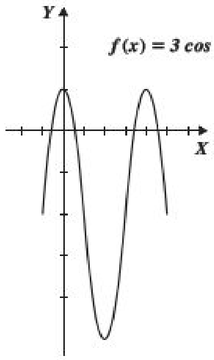
8.



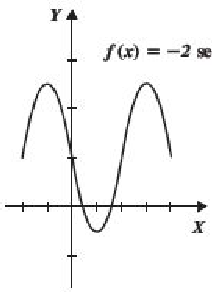
9.



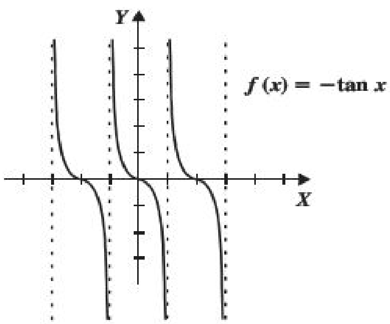
10.



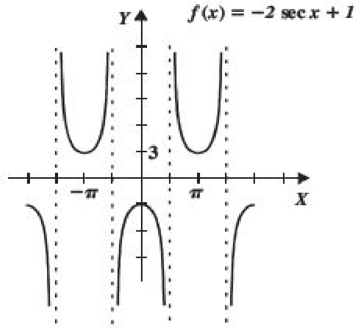
11.



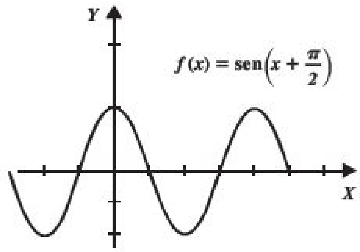
12.



13.



14.



EJERCICIO 14

1. $V(h) = 40h$
2. $V(h) = \dfrac{4}{75}\pi h^3$
3. $P(A) = \dfrac{12\sqrt{5A}}{5}$
4. $A(d) = \dfrac{\pi d^2}{4}$
5. $V(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi x^3$
6. $A(x) = \dfrac{3}{4}(x + 2)^2$
7. $V(x) = \dfrac{\pi r^2}{6}(8r + 15)$
8. $A(x) = \dfrac{\pi x^2}{3}$
9. $A(x) = 3x\sqrt{16 - x^2}$
10. $A(x) = (x - 4)\left(\dfrac{540}{x} - 3\right)$
11. $d(t) = \dfrac{9}{2}\sqrt{16t^2 + 1}$
12. $d(t) = \dfrac{1}{2}\sqrt{t^2 - 16}$

Anexo B: Ejercicios preliminares

Operaciones con números enteros:

1. $6-4$
2. $-8+6$
3. $3+7$
4. $-5-7$
5. $-2-5+6+4$
6. $-3-6-8+5+4+7$
7. $8+6+3-5-9-2$
8. $4+5-1+2-7-3$
9. $-2+6-8-12+10-3-7$
10. $1-5+9-3+16-8+13$
11. $3(-2)$
12. $(-5)(-4)$
13. $-6(5)$
14. $(4)(3)(5)$
15. $2(-4)(-3)$
16. $3-(-4)$
17. $\frac{-12}{3}$
18. $\frac{15}{-5}$
19. $\frac{-28}{-14}$
20. $-(-3)+(5)-2(-1)+(-4)+7$
21. $(-2)+(+5)$
22. $-4-(6+8-2)$
23. $7-(5+3)-(-1-9+4)+(-8)$
24. $5-(-4-3)-(7+2-1)$
25. $6-2(1-3-4)+(5-2+7)$
26. $\frac{13+15}{7}$
27. $\frac{-3-12-5}{10}$
28. $\frac{30+6}{9+3}$
29. $\frac{14-2}{2+4}$
30. $\frac{8+5+7}{6-3-7}$
31. $\frac{2(5-7)+20}{5+3}$
32. $\frac{(4-3)+3(2+4-1)}{5(4)-6(3)}$

Descompón en factores primos los siguientes números:

33. 6
34. 8
35. 20
36. 50
37. 72
38. 120
39. 225
40. 460
41. 325
42. 576
43. 980
44. 1000
45. 1120
46. 1800

Determina el *MCD* de los siguientes números:

47. 24, 36 y 42
48. 20, 35 y 70
49. 32, 28 y 72
50. 18, 24, 72 y 144
51. 12, 28, 44 y 120

Determina el *mcm* de los siguientes números:

52. 3, 10, 12
53. 8, 9, 12 y 18
54. 2, 3, 6 y 12
55. 8, 12, 16 y 24
56. 4, 6, 15 y 18

Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

57. $\frac{3}{2}+\frac{7}{2}$

58. $\frac{4}{5}+\frac{8}{5}$

59. $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{1}{7}$

60. $\frac{9}{4}+\frac{3}{4}+\frac{7}{4}$

61. $\frac{5}{11}+\frac{6}{11}+\frac{15}{11}+\frac{8}{11}$

62. $2\frac{1}{3}+5\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$

63. $\frac{17}{5}-\frac{9}{5}$

64. $\frac{13}{6}-\frac{7}{6}$

65. $2\frac{1}{4}-\frac{7}{4}$

66. $1\frac{3}{8}-3\frac{1}{8}+2\frac{7}{8}$

67. $3\frac{2}{7}-\frac{12}{7}-\frac{18}{7}$

68. $1\frac{3}{4}+3\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}$

69. $\frac{1}{6}+\frac{3}{2}$

70. $\frac{7}{4}+\frac{1}{8}$

71. $\frac{7}{12}+\frac{5}{3}$

72. $1+\frac{2}{3}$

73. $2+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$

74. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$

75. $\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$

76. $\frac{5}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{24}$

77. $\frac{8}{5}+\frac{4}{15}-\frac{2}{9}$

78. $1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$

79. $1\frac{3}{4}+2\frac{2}{6}+3\frac{1}{2}$

80. $5\frac{1}{3}-2\frac{5}{7}+4$

81. $\frac{6}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{15}-\frac{7}{20}$

82. $2-1\frac{1}{3}-\frac{5}{12}$

83. $4\frac{1}{4}-\frac{13}{6}$

84. $\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-3\frac{5}{6}$

85. $\frac{1}{4}\times\frac{9}{7}$

86. $\frac{7}{6}\times\frac{5}{8}$

87. $\frac{4}{3}\times\frac{3}{8}$

88. $\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}$

89. $2\frac{3}{5}\times\frac{9}{8}$

90. $\frac{3}{5}\times 3\frac{1}{4}$

91. $1\frac{1}{3}\times 2\frac{3}{8}$

92. $\frac{1}{3}\times\frac{13}{6}\times\frac{10}{78}$

93. $\frac{4}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{8}$

94. $\frac{4}{3}\times\frac{1}{20}\times\frac{5}{16}\times 15$

95. $\frac{1}{5}\div\frac{2}{15}$

96. $\frac{5}{4}\div\frac{1}{2}$

97. $\frac{5}{6}\div\frac{4}{3}$

98. $\frac{4}{15}\div\frac{1}{6}$

99. $2\frac{1}{4} \div \frac{9}{8}$

100. $\frac{1}{6} \div 2\frac{1}{4}$

101. $\frac{4}{3} \div 5$

102. $4 \div \frac{12}{5}$

Efectúa las siguientes operaciones:

103. 6^2

104. 4^3

105. $(-2)^4$

106. $(-3)^3$

107. -5^2

108. $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$

109. $-\left(\frac{3}{2}\right)^4$

110. $\sqrt{4}$

111. $\sqrt{25}$

112. $\sqrt{81}$

113. $\sqrt{64}$

114. $\sqrt[3]{8}$

115. $\sqrt[3]{27}$

116. $\sqrt[4]{16}$

117. $\sqrt[5]{32}$

118. $\sqrt[5]{243}$

119. $\sqrt{\frac{18}{2}}$

120. $\sqrt{\frac{75}{3}}$

121. $\sqrt{\frac{80}{5}}$

122. $\sqrt{\frac{1}{9}}$

123. $\sqrt{\frac{64}{25}}$

124. $\sqrt{\frac{36}{49}}$

125. $\sqrt{\frac{9}{121}}$

Racionaliza las siguientes expresiones:

126. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

127. $\frac{1}{\sqrt{7}}$

128. $\frac{2}{\sqrt{2}}$

129. $\frac{4}{\sqrt{6}}$

130. $\frac{6}{\sqrt{5}}$

131. $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

132. $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

133. $\frac{6}{4\sqrt{3}}$

134. $\frac{2}{5\sqrt{5}}$

135. $\frac{14}{2\sqrt{7}}$

136. $\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

137. $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$

138. $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$

139. $\frac{6}{3-\sqrt{7}}$

140. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

141. $\frac{3-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

142. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

143. $\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Expresa en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

144. Un número aumentado en 6.
145. El triple de un número
146. El doble de un número disminuido en 5.
147. El producto de dos números.
148. Un número excedido en 8.
149. Las tres cuartas partes de un número.
150. La diferencia de dos cantidades.
151. El cociente de dos números.
152. Dos números cuya suma es 45.
153. El cuadrado de una cantidad.
154. La diferencia de los cuadrados de dos números.
155. El cuadrado de la diferencia de dos cantidades.
156. La mitad de la suma de dos números.
157. Las dos terceras partes de la diferencia de dos números.
158. La raíz cuadrada de la suma de dos cantidades.
159. Dos números enteros consecutivos.
160. Dos números enteros pares consecutivos.
161. El quíntuple de un número aumentado en 3 unidades equivale a 18.
162. Las dos terceras partes de un número disminuidas en 4 equivalen a 6.

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones, si $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$, $w = -4$

163. $4x-2$
164. $6y+8$
165. $4z-3w$
166. $3x-2y$
167. $y+3z$
168. $2x+3y-z$
169. $4x+y+2w$
170. $5x-3y+2w$
171. $2(x-y)$
172. $5x-3(2z-w)$
173. $4(x-y)-3(z-w)$
174. $1-3(x-y)+2(3w-z)$
175. $x^2+3xz-w^2$
176. $\frac{x^2+z}{y-w}$
177. $\frac{x}{y}-\frac{1}{w}+\frac{1}{6}$
178. $(x+y)^2-(3z+w)^2$
179. $\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{4}+z^3-\frac{w^3}{4}$
180. $\sqrt{x^2+w^2}$
181. y^x-w^z
182. $\frac{2xyz}{w}$
183. $\frac{3x-y+2z}{w-1}$

Reduce las siguientes expresiones:

184. $4x - 7x + 2x$

185. $9y + 3y - y$

186. $5ab^2 + 7ab^2 - 16ab^2$

187. $4x^4yz^3 - 6x^4yz^3 + 7x^4yz^3$

188. $5x - 3y + 2z - 7x + 8y - 5z$

189. $14a - 8b + 9a + 2b - 6a + b$

190. $7m^2 - 10m^2 + 8m^2 - m^2$

191. $4x^2 - 5xy + 3y^2 - 3x^2 + 4xy + 3y^2$

192. $-3a^2 + 5b^2 + 8c^2 + 4a^2 - 3b^2 - 7c^2$

193. $ab^2 + 2bc^2 + 3ab^2 - 2bc^2 - 4ab^2$

194. $5x^2y^3 + 2xy^2 - 3y^4 + 4xy^2 - 2x^2y^3 - 2xy^2$

195. $-m^2 + 7n^3 - 9m^2 - 13n^3 + 5m^2 - n^3$

196. $8a^2 - 15ab + 12b^2 + 2a^2 + 6ab - 14b^2 + 5a^2 + 8ab + 17b^2$

197. $\frac{1}{4}ab^3c^4 - \frac{3}{4}ab^3c^4 - ab^3c^4$

198. $\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}y - z - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{9}z$

199. $-\frac{5}{3}a^2b - \frac{7}{2}ab^2 + \frac{1}{4}a^2b + 5ab^2 - 6a^2b - \frac{1}{3}ab^2$

200. $\frac{x^2}{8} + \frac{4xy}{9} - \frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} - \frac{2xy}{3} + \frac{6y^2}{5}$

Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

201. $(5x - 7y - 2z) + (x - y + 7z)$

202. $(3x^2 + 2xy - 5y^2) + (-2x^2 + 3xy - y^2)$

203. $(x^2 + 2x - 1) + (3x^2 - 2x + 3)$

204. $(x^3 - 3x - 4) + (x^2 + 2x + 3)$

205. $(3x^3 + 2x^2 - 5x + 6) + (-2x^3 - x^2 + 7x + 1)$

206. $(x^2 + 6xy + 4y^2) + (5x^2 - 3xy - 4y^2)$

207. $(x^3 + x^2y + 5xy^2 - 2y^3) + (-3x^2y - 6xy^2 + 8y^3)$

208. $\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{6}x - 3\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right)$

209. $\left(\frac{1}{6}x^3 - 1\right) + \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + x - \frac{3}{4}\right)$

210. $\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 1\right) + \left(\frac{1}{7}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{3}x^4 + 3x^3 - 2x^2 - \frac{1}{5}x - 5\right)$

211. $(2x - 8y - 5z) - (x - 6y - 4z)$

212. $(6x^2 + x - 5) - (3x^2 - x - 5)$

213. $(4x^3 - 5x^2 + 6x + 7) - (2x^3 - 6x^2 + 4x + 4)$

214. $\left(x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{6} - 1\right) - \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x}{6} + \frac{3x^2}{8} - \frac{4}{5}\right)$

215. $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{3}{7}\right) - \left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{5}{8}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{14}\right)$

216. $(3xy)(-5xy)$

217. $(6x^2y^5z^3)(-3x^5y^4z^2)$

218. $(a^5c^2)(4a^4bc^6)$

219. $(3x^2y^3)(-2x^5y^4)$

220. $-6xy^3(4x^2y)$

221. $(2a^3b^4c)(-5a^2bc^3)$

222. $\left(\frac{2}{5}x^2yz\right)\left(-\frac{15}{4}yz^3\right)$

223. $(12a^4b^9c^3)\left(-\frac{2}{3}a^5b^3c\right)$

224. $\left(\frac{1}{5}a^3b^2c\right)\left(\frac{2}{3}a^4bc^2\right)\left(\frac{1}{2}ac\right)\left(\frac{3}{2}a^4b^2\right)$

225. $\left(\frac{3}{4}a^2b^3c\right)\left(-\frac{2}{6}a^5c^2\right)$

226. $(3m^3n)(5m^2 - 9mn)$

227. $(4a^2b^5)(-3ab^2 + 2a^3b^4)$

228. $(2a^2b)(5a^2 - 7ab + 3b^2)$

229. $(-a)(7a^4 - a^3 + 7a - 5)$

230. $-3a^4b^5(a^3 + 4a^2b - ab^2 - 5b^3)$

231. $(4xy)(5x^3 - 6x^2 - 7x)$

232. $(-5a^2b)(a^2 - 3ab + 9b^2)$

233. $(4x^5y^2)(6x^3y^2 - 7x^2y^3 + 4xy^5)$

234. $(3x-5)(x+7)$

235. $(a+6)(a-9)$

236. $(-2x+7)(4-3x)$

237. $\left(\frac{1}{3}m-4\right)\left(2m+\frac{5}{2}\right)$

238. $\left(y-\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}y^2+\frac{2}{3}xy\right)$

239. $(x^2-6x-8)(3x^2-8x+1)$

240. $(7x^3 - 4x^2y + xy^2)(2x^2y - 4xy^2 + 4y^3)$

241. $\dfrac{6a^4b^7}{2a^2b^5}$

242. $\dfrac{18x^6y^3}{-3x^5y^3}$

243. $\dfrac{18a^3b^2c^4}{12ab^2c^3}$

244. $-\frac{2}{5}x^3y \div -\frac{3}{5}x^2y$

245. $\dfrac{3x^2+6x}{2x}$

246. $\dfrac{9a^2b-6a^3}{2a^2}$

247. $\dfrac{x^3-2x^2+5x}{x}$

248. $\left(\frac{1}{3}a^5b^8-\frac{1}{2}a^3b^5-4a^3b^4\right)\div 3a^3b$

Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

249. $(x+3)^2$

250. $(a-4)^2$

251. $(2m-5)^2$

252. $(3x+4)^2$

253. $(3-2x)^2$

254. $(5x+4y^3)^2$

255. $(9x^3-x^2y)^2$

256. $\left(\frac{5}{3}x^3+\frac{2}{5}y\right)^2$

257. $\left(\frac{x}{2}-3y^2\right)^2$

258. $\left(\frac{2}{a}-\frac{b^2}{3}\right)^2$

Obtén el resultado del producto de binomios conjugados:

259. $(x+5)(x-5)$

260. $(m-3)(m+3)$

261. $(7-x)(7+x)$

262. $(3x+5y)(3x-5y)$

263. $(a-4b)(a+4b)$

264. $(3xy-2z)(3xy+2z)$

265. $(m-5n)(m+5n)$

266. $(3p+5q)(3p-5q)$

267. $\left(\frac{5}{3}x-\frac{2}{5}y\right)\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{5}y\right)$

268. $\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{3}\right)\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{3}\right)$

Factoriza las siguientes expresiones empleando el factor común:

269. $3x^2 - 6x$

270. $y^3 + y^2$

271. $m^5 + m^4 - m^2$

272. $8x^3 - 24x^2 + 16x$

273. $15a^2 + 25a^3 - 35a^4$

274. $6a^2b - 3ab$

275. $12x^2y - 18xy^2$

276. $4x^2y^3 - 8x^3y^4 + 5x^4y^5$

277. $18a^5b - 9a^3b^2 - 6a^2b^3 + 12ab^4$

278. $33x^2y^3z^4 + 66x^2y^3z^3 - 22x^2y^3z^2$

Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados:

279. $x^2 - 16$
280. $4x^2 - 25$
281. $16x^2 - 9$
282. $81 - 4y^2$
283. $100 - x^2$
284. $25m^4 - 81n^2$
285. $9x^4 - y^4$
286. $\frac{1}{4}z^4 - \frac{9}{25}w^4$
287. $y^2 - \frac{36}{25}z^6$
288. $\frac{x^2}{9} - \frac{16}{25y^2}$

Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

289. $a^2 - 10a + 25$
290. $a^2 - 2ab + b^2$
291. $y^2 + 12y + 36$
292. $m^2 + 2mn^2 + n^4$
293. $16x^2 + 8x + 1$
294. $9y^2 - 24y + 16$
295. $\frac{x^2}{4} + 4x + 16$
296. $\frac{m^2}{9} - \frac{2m}{n} + \frac{9}{n^2}$
297. $x^2 - x + \frac{1}{4}$
298. $144x^2 + 120xy + 25y^2$

Factoriza los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

299. $x^2 + 9x + 20$
300. $x^2 - 14x + 24$
301. $m^2 + 7m + 12$
302. $x^2 - 9x + 18$
303. $a^2 + 4a - 12$
304. $y^2 + y - 20$
305. $n^2 - 2n - 63$
306. $z^2 - 18 - 7z$
307. $x^2 - 8x - 48$
308. $x^2 + x - 132$
309. $a^2 - 2ab - 35b^2$
310. $y^2 + 2y - 168$

Factoriza los trinomios $ax^2 + bx + c$

311. $3x^2 - 14x + 8$
312. $6a^2 + 7a + 2$
313. $4x^2 - 13x + 3$
314. $5x^2 - 7x + 2$
315. $2x^2 - 5x - 12$
316. $6m^2 + 11m + 3$
317. $6b^2 + 5b - 25$
318. $2x^2 - 3x - 2$
319. $5y^2 - 12y + 4$
320. $4x^2 - 11x + 6$
321. $7y^2 + 16y - 15$
322. $20x^2 - x - 1$

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

323. $x + 6 = 4$
324. $y - 2 = 0$
325. $3x = 15$
326. $4x - 5 = 3$
327. $2x + 5 = 6x$
328. $6x - 2 = 2x - 12$
329. $4 + 9x - 11x = 6x + 8$
330. $8x = -3 + 5x$
331. $9 - 10x = 7x + 8x$
332. $3(x - 5) + 3 = 10$
333. $5 + 2(4x - 1) = 0$
334. $6(1 - x) - 2(x - 2) = 10$
335. $3(9 + 4x) - 9 = 18$
336. $3(4x + 9) = 6 + 5(2 - x)$

337. $\frac{2}{5}=\frac{3}{5}x-1$

338. $\frac{x}{12}-\frac{x}{3}=\frac{1}{3}-\frac{x}{4}$

339. $\frac{1}{4}-\frac{7x}{8}=3-\frac{x}{4}$

340. $\frac{1}{4}-\frac{2x}{7}=-\frac{1}{5}-\frac{3x}{8}$

341. $-\frac{13}{3}-\frac{17x}{12}=x-1\frac{2}{3}$

342. $\frac{3}{2}(2x-1)-\frac{4}{5}(x+2)=\frac{3}{4}(x+1)$

343. $\frac{x+4}{4}-\frac{x}{2}=5$

344. $\frac{2x-3}{6}+\frac{x}{4}=2$

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

345. $x^2+7x+12=0$

346. $x^2-14x+24=0$

347. $x^2+9x+20=0$

348. $x^2+4x-12=0$

349. $x^2-9x+18=0$

350. $x^2-2x-63=0$

351. $y^2+y-20=0$

352. $a^2+2a=48$

353. $5x^2-7x+2=0$

354. $2x^2-5x-12=0$

355. $7x^2+16x=15$

356. $6x^2+7x=-2$

Resuelve los siguientes sistemas:

357. $\begin{cases}x+y=4\\x-y=2\end{cases}$

358. $\begin{cases}x+2y=5\\x+y=4\end{cases}$

359. $\begin{cases}3x-y=4\\x+3y=-2\end{cases}$

360. $\begin{cases}3x-2y=4\\x+6y=-2\end{cases}$

361. $\begin{cases}4x-26=y\\3x+5y-31=0\end{cases}$

362. $\begin{cases}2x=y\\x=y+2\end{cases}$

363. $\begin{cases}x+y=7\\x-y=3\end{cases}$

364. $\begin{cases}4x+5y=2\\5x+3y=21\end{cases}$

365. $\begin{cases}6x+2y=-3\\5x-3y=-6\end{cases}$

366. $\begin{cases}5x+8y=-1\\6y-x=4y-7\end{cases}$

Operaciones con números enteros:

1. 2
2. –2
3. 10
4. –12
5. 3
6. –1
7. 1
8. 0
9. –16
10. 23
11. –6
12. 20
13. –30
14. 60
15. 24
16. 7
17. –4
18. –3
19. 2
20. 13
21. 3
22. –16
23. –3
24. 4
25. 28
26. 4
27. –2
28. 3
29. 2
30. –5
31. 2
32. 8

Descompón en factores primos los siguientes números:

33. 2×3
34. 2^3
35. $2^2 \times 5$
36. 2×5^2
37. $2^3 \times 3^2$
38. $2^3 \times 3 \times 5$
39. $3^2 \times 5^2$
40. $2^2 \times 5 \times 23$
41. $5^2 \times 13$
42. $2^6 \times 3^2$
43. $2^2 \times 5 \times 7^2$
44. $2^3 \times 5^3$
45. $2^5 \times 5 \times 7$
46. $2^3 \times 3^2 \times 5^2$

Determina el *MCD* de los siguientes números:

47. $2 \times 3 = 6$
48. 5
49. $2^2 = 4$
50. $2 \times 3 = 6$
51. $2^2 = 4$

Determina el *mcm* de los siguientes números:

52. $2^2 \times 3 \times 5 = 60$
53. $2^3 \times 3^2 = 72$
54. $2^2 \times 3 = 12$
55. $2^4 \times 3 = 48$
56. $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

57. 5
58. $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$
59. $\frac{6}{7}$
60. $\frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$
61. $\frac{34}{11} = 3\frac{1}{11}$
62. $\frac{29}{3} = 9\frac{2}{3}$
63. $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$
64. 1
65. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
66. $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$
67. –1
68. $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
69. $\frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$
70. $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$
71. $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$
72. $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$
73. $\frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}$
74. 1
75. $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$
76. $\frac{31}{8} = 3\frac{7}{8}$
77. $\frac{74}{45} = 1\frac{29}{45}$
78. $\frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$
79. $\frac{91}{12} = 7\frac{7}{12}$
80. $\frac{139}{21} = 6\frac{13}{21}$
81. $\frac{32}{60} = \frac{8}{15}$
82. $\frac{1}{4}$
83. $\frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$
84. $-\frac{44}{12} = -\frac{11}{3} = -3\frac{2}{3}$
85. $\frac{9}{28}$
86. $\frac{35}{48}$
87. $\frac{1}{2}$
88. $\frac{1}{9}$
89. $\frac{117}{40} = 2\frac{37}{40}$
90. $\frac{39}{20} = 1\frac{19}{20}$
91. $\frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$
92. $\frac{5}{54}$
93. $\frac{1}{18}$
94. $\frac{5}{16}$
95. $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
96. $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$
97. $\frac{5}{8}$
98. $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$
99. 2
100. $\frac{2}{27}$
101. $\frac{4}{15}$
102. $\frac{20}{12} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{5}$

Efectúa las siguientes operaciones:

103. 36
104. 64
105. 16
106. – 27
107. – 25
108. $\frac{81}{16}$
109. $-\frac{81}{16}$
110. 2
111. 5
112. 9
113. 8
114. 2
115. 3
116. 2
117. 2
118. 3
119. 3
120. 5
121. 4
122. $\frac{1}{3}$
123. $\frac{8}{5}$
124. $\frac{6}{7}$
125. $\frac{3}{11}$

Racionaliza las siguientes expresiones:

126. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
127. $\frac{\sqrt{7}}{7}$
128. $\sqrt{2}$
129. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
130. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$
131. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
132. $\frac{\sqrt{2}}{6}$
133. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
134. $\frac{2\sqrt{5}}{25}$
135. $\sqrt{7}$
136. $\sqrt{5} - 1$
137. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
138. $\sqrt{3} - 1$
139. $9 + 3\sqrt{7}$
140. $\sqrt{3} - 2$
141. $-1 - 2\sqrt{2}$
142. $5 - 2\sqrt{6}$
143. $\frac{13 + 4\sqrt{10}}{9}$

Expresa en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

144. $x+6$
145. $3x$
146. $2x-5$
147. xy
148. $x+8$
149. $\frac{3x}{4}$
150. $x-y$
151. $\frac{x}{y}$
152. $x, 45-x$
153. x^2
154. x^2-y^2
155. $(x-y)^2$
156. $\frac{x+y}{2}$
157. $\frac{2(x-y)}{3}$
158. $\sqrt{x+y}$
159. $x, x+1$
160. $2x, 2x+2$
161. $5x+3=18$
162. $\frac{2}{3}x-4=6$

Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones, si $x=3$, $y=-2$, $z=1$, $w=-4$

163. 10
164. –4
165. 16
166. 13
167. 1
168. –1
169. 2
170. 13
171. 10
172. –3
173. 5
174. –40
175. 2
176. 5
177. $-\frac{13}{12}$
178. 0
179. 24
180. 5
181. –4
182. 3
183. $-\frac{13}{5}$

Reduce las siguientes expresiones:

184. $-x$
185. $11y$
186. $-4ab^2$
187. $5x^4yz^3$
188. $-2x+5y-3z$
189. $17a-5b$
190. $4m^2$
191. $x^2-xy+6y^2$
192. $a^2+2b^2+c^2$
193. 0
194. $3x^2y^3+4xy^2-3y^4$
195. $-5m^2-7n^3$
196. $15a^2-ab+15b^2$
197. $-\frac{3}{2}ab^3c^4$
198. $\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}y-\frac{4}{9}z$
199. $-\frac{89}{12}a^2b+\frac{7}{6}ab^2$
200. $-\frac{x^2}{8}-\frac{2xy}{9}+y^2$

Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

201. $6x-8y+5z$
202. $x^2+5xy-6y^2$
203. $4x^2+2$
204. x^3+x^2-x-1
205. x^3+x^2+2x+7
206. $6x^2+3xy$
207. $x^3-2x^2y-xy^2+6y^3$
208. $\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{5}{2}$
209. $-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{9}{8}$
210. $\frac{11}{12}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{13}{7}x^2+\frac{13}{10}x-\frac{19}{4}$
211. $x-2y-z$
212. $3x^2+2x$
213. $2x^3+x^2+2x+3$
214. $\frac{3}{4}x^3-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{5}$
215. $-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{24}x+\frac{5}{14}$
216. $-15x^2y^2$
217. $-18x^7y^9z^5$
218. $4a^9bc^8$
219. $-6x^7y^7$
220. $-24x^3y^4$
221. $-10a^5b^5c^4$
222. $-\frac{3}{2}x^2y^2z^4$
223. $-8a^9b^{12}c^4$
224. $\frac{1}{10}a^{12}b^5c^4$
225. $-\frac{1}{4}a^7b^3c^3$
226. $15m^5n-27m^4n^2$
227. $-12a^3b^7+8a^5b^9$
228. $10a^4b-14a^3b^2+6a^2b^3$
229. $-7a^5+a^4-7a^2+5a$
230. $-3a^7b^5-12a^6b^6+3a^5b^7+15a^4b^8$
231. $20x^4y-24x^3y-28x^2y$
232. $-5a^4b+15a^3b^2-45a^2b^3$
233. $24x^8y^4-28x^7y^5+16x^6y^7$
234. $3x^2+16x-35$
235. $a^2-3a-54$
236. $6x^2-29x+28$
237. $\frac{2}{3}m^2-\frac{43}{6}m-10$
238. $-\frac{1}{6}x^3+\frac{11}{12}xy^2-\frac{1}{2}y^3$
239. $3x^4-26x^3+25x^2+58x-8$
240. $14x^5y-36x^4y^2+46x^3y^3-20x^2y^4+4xy^5$
241. $3a^2b^2$
242. $-6x$
243. $\frac{3}{2}a^2c$
244. $\frac{2}{3}x$
245. $\frac{2}{3}x+3$
246. $\frac{9}{2}b-3a$
247. x^2-2x+5
248. $\frac{1}{9}a^2b^7-\frac{1}{6}b^4-\frac{4}{3}b^3$

Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

249. x^2+6x+9
250. $a^2-8a+16$
251. $4m^2-20m+25$
252. $9x^2+24x+16$
253. $9-12x+4x^2$
254. $25x^2+40xy^3+16y^6$
255. $81x^6-18x^5y+x^4y^2$
256. $\frac{25}{9}x^6+\frac{4}{3}x^3y+\frac{4}{25}y^2$
257. $\frac{x^2}{4}-3xy^2+9y^4$
258. $\frac{4}{a^2}-\frac{4b^2}{3a}+\frac{b^4}{9}$

Obtén el resultado del producto de binomios conjugados:

259. x^2-25
260. m^2-9
261. $49-x^2$
262. $9x^2-25y^2$
263. a^2-16b^2
264. $9x^2y^2-4z^2$
265. m^2-25n^2
266. $9p^2-25q^2$
267. $\frac{25}{9}x^2-\frac{4}{25}y^2$
268. $\frac{m^2}{4}-\frac{n^2}{9}$

Factoriza las siguientes expresiones empleando el factor común:

269. $3x(x-2)$
270. $y^2(y-1)$
271. $m^2(m^3+m^2-1)$
272. $8x(x-2)(x+1)$
273. $5a^2(3+5a-7a^2)$
274. $3ab(2a-1)$
275. $6xy(2x-3y)$
276. $x^2y^3(4-8xy+5x^2y^2)$
277. $3ab(6a^4-3a^2b-2ab^2+4b^3)$
278. $11a^2y^3z^2(3z^2+6z-2)$

Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados:

279. $(x-4)(x+4)$
280. $(2x-5)(2x+5)$
281. $(4x-3)(4x+3)$
282. $(9-2y)(9+2y)$
283. $(10-x)(10+x)$
284. $(5m^2-9n)(5m^2+9n)$
285. $(3x^2-y^2)(3x^2+y^2)$
286. $\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{3}{5}w^2\right)\left(\frac{1}{2}z^2+\frac{3}{5}w^2\right)$
287. $\left(y-\frac{6}{5}z^3\right)\left(y+\frac{6}{5}z^3\right)$
288. $\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{5y}\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{5y}\right)$

Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

289. $(a-5)^2$
290. $(a-b)^2$
291. $(y+6)^2$
292. $(m+n^2)^2$
293. $(4x+1)^2$
294. $(3y-4)^2$
295. $\left(\frac{x}{2}+4\right)^2$
296. $\left(\frac{m}{3}-\frac{3}{n}\right)^2$
297. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
298. $(12x+5y)^2$

Factoriza los trinomios de la forma x^2+bx+c

299. $(x+5)(x+4)$
300. $(x-12)(x-2)$
301. $(m+4)(m+3)$
302. $(x-6)(x-3)$
303. $(a+6)(a-2)$
304. $(y+5)(y-4)$
305. $(n-9)(n+7)$
306. $(z-9)(z+2)$
307. $(x-12)(x+4)$
308. $(x+12)(x-11)$
309. $(a-7b)(a+5b)$
310. $(y+14)(y-12)$

Factoriza los trinomios ax^2+bx+c

311. $(3x-2)(x-4)$
312. $(3a+2)(2a+1)$
313. $(x-3)(4x+1)$
314. $(x-1)(5x-2)$
315. $(x-4)(2x+3)$
316. $(2m+3)(3m+1)$
317. $(2b+5)(3b-5)$
318. $(x-2)(2x+1)$
319. $(y-2)(5y-2)$
320. $(x-2)(4x-3)$
321. $(y+3)(7y-5)$
322. $(4x-1)(5x+1)$

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

323. $x=-2$
324. $y=2$
325. $x=5$
326. $x=2$
327. $x=\frac{5}{4}$
328. $x=-\frac{5}{2}$
329. $x=-\frac{1}{2}$
330. $x=-1$
331. $x=\frac{9}{25}$
332. $x=\frac{22}{3}$
333. $x=-\frac{3}{8}$
334. $x=0$
335. $x=0$
336. $x=-\frac{11}{17}$
337. $x=\frac{7}{3}$
338. No hay solución
339. $x=-\frac{22}{5}$
340. $x=-\frac{126}{25}$
341. $x=-\frac{32}{29}$
342. $x=\frac{77}{29}$
343. $x=-16$
344. $x=\frac{30}{7}$

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

345. $x=-4, x=-3$
346. $x=12, x=2$
347. $x=-5, x=-4$
348. $x=-6, x=2$
349. $x=6, x=3$
350. $x=9, x=-7$
351. $y=-5, y=4$
352. $a=-8, a=6$
353. $x=\frac{2}{5}, x=1$
354. $x=-\frac{3}{2}, x=4$
355. $x=\frac{5}{7}, x=-3$
356. $-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}$

Resuelve los siguientes sistemas:

357. $x=3, y=1$
358. $x=3, y=1$
359. $x=1, y=-1$
360. $x=1, y=-\frac{1}{2}$
361. $x=7, y=2$
362. $x=-2, y=-4$
363. $x=5, y=2$
364. $x=\frac{99}{13}, y=-\frac{74}{13}$
365. $x=-\frac{3}{4}, y=\frac{3}{4}$
366. $x=3, y=-2$

Tabla de valores de las funciones trigonométricas

Grados	Radianes	Sen	tan	Ctg	Cos		
0° 00'	.0000	.0000	.0000		1.0000	1.5708	90° 00'
10'	.0029	.0029	.0029	343.77	1.0000	1.5679	50'
20'	.0058	.0058	.0058	171.89	1.0000	1.5650	40'
30'	.0087	.0087	.0087	114.59	1.0000	1.5621	30'
40'	.0116	.0116	.0116	85.940	.9999	1.5592	20'
50'	.0145	.0145	.0145	68.750	.9999	1.5563	10'
1° 00'	.0175	.0175	.0175	57.290	.9998	1.5533	89° 00'
10'	.0204	.0204	.0204	49.104	.9998	1.5504	50'
20'	.0233	.0233	.0233	42.964	.9997	1.5475	40'
30'	.0262	.0262	.0262	38.188	.9997	1.5446	30'
40'	.0291	.0291	.0291	34.368	.9996	1.5417	20'
50'	.0320	.0320	.0320	31.242	.9995	1.5388	10'
2° 00'	.0349	.0349	.0349	28.636	.9994	1.5359	88° 00'
10'	.0378	.0378	.0378	26.432	.9993	1.5330	50'
20'	.0407	.0407	.0407	24.542	.9992	1.5301	40'
30'	.0436	.0436	.0437	22.904	.9990	1.5272	30'
40'	.0465	.0465	.0466	21.470	.9989	1.5243	20'
50'	.0495	.0494	.0495	20.206	.9988	1.5213	10'
3° 00'	.0524	.0523	.0524	19.081	.9986	1.5184	87° 00'
10'	.0553	.0552	.0553	18.075	.9985	1.5155	50'
20'	.0582	.0581	.0582	17.169	.9983	1.5126	40'
30'	.0611	.0610	.0612	16.350	.9981	1.5097	30'
40'	.0640	.0640	.0641	15.605	.9980	1.5068	20'
50'	.0669	.0669	.0670	14.924	.9978	1.5039	10'
4° 00'	.0698	.0698	.0699	14.301	.9976	1.501	86° 00'
10'	.0727	.0727	.0729	13.727	.9974	1.4981	50'
20'	.0756	.0756	.0758	13.197	.9971	1.4952	40'
30'	.0785	.0785	.0787	12.706	.9969	1.4923	30'
20'	.0814	.0814	.0816	12.251	.9967	1.4893	20'
50'	.0844	.0843	.0846	11.826	.9964	1.4864	10'
5° 00'	.0873	.0872	.0875	11.430	.9962	1.4835	85° 00'
10'	.0902	.0901	.0904	11.059	.9959	1.4806	50'
20'	.0931	.0929	.0934	10.712	.9957	1.4777	40'
30'	.0960	.0958	.0963	10.385	.9954	1.4748	30'
40'	.0989	.0987	.0992	10.078	.9951	1.4719	20'
50'	.1018	.1016	.1022	9.7882	.9948	1.4690	10'
6° 00'	.1047	.1045	.1051	9.5144	.9945	1.4661	84° 00'
10'	.1076	.1074	.1080	9.2553	.9942	1.4632	50'
20'	.1105	.1103	.1110	9.0098	.9939	1.4603	40'
30'	.1134	.1132	.1139	8.7769	.9936	1.4573	30'
40'	.1164	.1161	.1169	8.5555	.9932	1.4544	20'
50'	.1193	.1190	.1198	8.3450	.9929	1.4515	10'
7° 00'	.1222	.1219	.1228	8.1443	.9925	1.4486	83° 00'
10'	.1251	.1248	.1257	7.9530	.9922	1.4457	50'
20'	.1280	.1276	.1287	7.7704	.9918	1.4428	40'
30'	.1309	.1305	.1317	7.5958	.9914	1.4399	30'
40'	.1338	.1334	.1346	7.4287	.9911	1.4370	20'
50'	.1367	.1363	.1376	7.2687	.9907	1.4341	10'
8° 00'	.1396	.1392	.1405	7.1154	.9903	1.4312	82° 00'
10'	.1425	.1421	.1435	6.9682	.9899	1.4283	50'
20'	.1454	.1449	.1465	6.8269	.9894	1.4254	40'
30'	.1484	.1478	.1495	6.6912	.9890	1.4224	30'
40'	.1513	.1507	.1524	6.5606	.9886	1.4195	20'
50'	.1542	.1536	.1554	6.4348	.9881	1.4166	10'
9° 00'	.1571	.1564	.1584	6.3138	.9877	1.4137	81° 00'
		Cos	Ctg	tan	Sen	Radianes	Grados

Tabla de valores de las funciones trigonométricas (*cont...*)

Grados	Radianes	Sen	tan	Ctg	Cos		
9° 00'	.1571	.1564	.1584	6.3138	.9877	1.4137	81° 00'
10'	.1600	.1593	.1614	6.1970	.9872	1.4108	50'
20'	.1629	.1622	.1644	6.0844	.9868	1.4079	40'
30'	.1658	.1650	.1673	5.9758	.9863	1.4050	30'
40'	.1687	.1679	.1703	5.8708	.9858	1.4021	20'
50'	.1716	.1708	.1733	5.7694	.9853	1.3992	10'
10° 00'	.1745	.1736	.1763	5.6713	.9848	1.3963	80° 00'
10'	.1774	.1765	.1793	5.5764	.9843	1.3934	50'
20'	.1804	.1794	.1823	5.4845	.9838	1.3904	40'
30'	.1833	.1822	.1853	5.3955	.9833	1.3875	30'
40'	.1862	.1851	.1883	5.3093	.9827	1.3846	20'
50'	.1891	.1880	.1914	5.2257	.9822	1.3817	10'
11° 00'	.1920	.1908	.1944	5.1446	.9816	1.3788	79° 00'
10'	.1949	.1937	.1974	5.0658	.9811	1.3759	50'
20'	.1978	.1965	.2004	4.9894	.9805	1.3730	40'
30'	.2007	.1994	.2035	4.9152	.9799	1.3701	30'
40'	.2036	.2022	.2065	4.8430	.9793	1.3672	20'
50'	.2065	.2051	.2095	4.7729	.9787	1.3643	10'
12° 00'	.2094	.2079	.2126	4.7046	.9781	1.3614	78° 00'
10'	.2123	.2108	.2156	4.6382	.9775	1.3584	50'
20'	.2153	.2136	.2186	4.5736	.9769	1.3555	40'
30'	.2182	.2164	.2217	4.5107	.9763	1.3526	30'
40'	.2211	.2193	.2247	4.4494	.9757	1.3497	20'
50'	,2240	,2221	,2278	4,3897	,9750	1,3468	10'
13° 00'	,2269	,2250	,2309	4.3315	,9744	1.3439	77° 00'
10'	,2298	,2278	,2339	4,2747	,9737	1,3410	50'
20'	.2327	.2306	.2370	4.2193	.9730	1.3381	40'
30'	.2356	.2334	.2401	4.1653	.9724	1.3352	30'
40'	.2385	.2363	.2432	4.1126	.9717	1.3323	20'
50'	.2414	.2391	.2462	4.0611	.9710	1.3294	10'
14° 00'	.2443	.2419	.2493	4.0108	.9703	1.3265	76° 00'
10'	.2473	.2447	.2424	3.9617	.9696	1.3235	50'
20'	.2502	.2476	.2555	3.9136	.9689	1.3206	40'
30'	.2531	.2504	.2586	3.8667	.9681	1.3177	30'
40'	.2560	.2532	.2617	3.8208	.9674	1.3148	20'
50'	.2589	.2560	.2648	3.7760	.9667	1.3119	10'
15° 00'	.2618	.2588	.2679	3.7321	.9659	1.3090	75° 00'
10'	.2647	.2616	.2711	3.6891	.9652	1.3061	50'
20'	.2676	.2644	.2742	3.6470	.9644	1.3032	40'
30'	.2705	.2672	.2773	3.6059	.9636	1.3003	30'
40'	.2734	.2700	.2805	3.5656	.9628	1.2974	20'
50'	.2763	.2728	.2836	3.5261	.9621	1.2945	10'
16° 00'	.2793	.2756	.2867	3.4874	.9613	1.2915	74° 00'
10'	.2822	.2784	.2899	3.4495	.9605	1.2886	50'
20'	.2851	.2812	.2931	3.4124	.9596	1.2857	40'
30'	.2880	.2840	.2962	3.3759	.9588	1.2828	30'
40'	.2909	.2868	.2994	3.3402	.9580	1.2799	20'
50'	.2938	.2896	.3026	3.3052	.9572	1.2770	10'
17° 00'	.2967	.2924	.3057	3.2709	.9563	1.2741	73° 00'
10'	.2996	.2952	.3089	3.2371	.9555	1.2712	50'
20'	.3025	.2979	.3121	3.2041	.9546	1.2683	40'
30'	,3054	,3007	,3153	3,1716	,9537	1,2654	30'
40'	.3083	.3035	.3185	3.1397	.9528	1.2625	20'
50'	.3113	.3062	.3217	3.1084	.9520	1.2595	10'
18° 00'	.3142	.3090	.3249	3.0777	.9511	1.2566	72° 00'
		Cos	Ctg	tan	Sen	Radianes	Grados

Tabla de valores de las funciones trigonométricas (*cont*…)

Grados	Radianes	Sen	tan	Ctg	Cos		
18° 00'	,3142	,3090	,3249	3,0777	,9511	1,2566	72° 00'
10'	.3171	.3118	.3281	3.0475	.9502	1.2537	50'
20'	.3200	.3145	.3314	3.0178	.9492	1.2508	40'
30'	.3229	.3173	.3346	2.9887	.9483	1.2479	30'
40'	.3258	.3201	.3378	2.9600	.9474	1.2450	20'
50'	.3287	.3228	.3411	2.9319	.9465	1.2421	10'
19° 00'	.3316	.3256	.3443	2.9042	.9455	1.2392	71° 00'
10'	.3345	.3283	.3476	2.8770	.9446	1.2363	50'
20'	.3374	.3311	.3508	2.8502	.9436	1.2334	40'
30'	.3403	.3338	.3541	2.8239	.9426	1.2305	30'
40'	.3432	.3365	.3574	2.7980	.9417	1.2275	20'
50'	.3462	.3393	.3607	2.7725	.9407	1.2246	10'
20° 00'	.3491	.3420	.3640	2.7475	.9397	1.2217	70° 00'
10'	.3520	.3448	.3673	2.7228	.9387	1.2188	50'
20'	.3549	.3475	.3706	2.6985	.9377	1.2159	40'
30'	.3578	.3502	.3739	2.6746	.9367	1.2130	30'
40'	.3607	.3529	.3772	2.6511	.9356	1.2101	20'
50'	.3636	.3557	.3805	2.6279	.9346	1.2072	10'
21° 00'	.3665	.3584	.3839	2.6051	.9336	1.2043	69° 00'
10'	.3694	.3611	.3872	2.5826	.9325	1.2014	50'
20'	.3723	.3638	.3906	2.5605	.9315	1.1985	40'
30'	.3752	.3665	.3939	2.5386	.9304	1.1956	30'
40'	.3782	.3692	.3973	2.5172	.9293	1.1926	20'
50'	.3811	.3719	.4006	2.4960	.9283	1.1897	10'
22° 00'	.3840	.3746	.4040	2.4751	.9272	1.1868	68° 00'
10'	.3869	.3773	.4074	2.4545	.9261	1.1839	50'
20'	.3898	.3800	.4108	2.4342	.9250	1.1810	40'
30'	.3927	.3827	.4142	2.4142	.9239	1.1781	30'
40'	.3956	.3854	.4176	2.3945	.9228	1.1752	20'
50'	.3985	.3881	.4210	2.3750	.9216	1.1723	10'
23° 00'	.4014	.3907	.4245	2.3559	.9205	1.1694	67° 00'
10'	.4043	.3934	.4279	2.3369	.9194	1.1665	50'
20'	.4072	.3961	.4314	2.3183	.9182	1.1636	40'
30'	,4102	,3987	,4348	2,2998	,9171	1,1606	30'
40'	.4131	.4014	.4383	2.2817	.9159	1.1577	20'
50'	.4160	.4041	.4417	2.2637	.9147	1.1548	10'
24° 00'	.4189	.4067	.4452	2.2460	.9135	1.1519	66° 00'
10'	,4218	,4094	,4487	2,2286	,9124	1,149	50'
20'	.4247	.4120	.4522	2.2113	.9112	1.1461	40'
30'	.4276	.4147	.4557	2.1943	.9100	1.1432	30'
40'	.4305	.4173	.4592	2.1775	.9088	1.1403	20'
50'	.4334	.4200	.4628	2.1609	.9075	1.1374	10'
25° 00'	.4363	.4226	.4663	2.1445	.9063	1.1345	65° 00'
10'	.4392	.4253	.4699	2.1283	.9051	1.1316	50'
20'	.4422	.4279	.4734	2.1123	.9038	1.1286	40'
30'	.4451	.4305	.4770	2.0965	.9026	1.1257	30'
40'	.4480	.4331	.4806	2.0809	.9013	1.1228	20'
50'	.4509	.4358	.4841	2.0655	.9001	1.1199	10'
26° 00'	.4538	.4384	.4877	2.0503	.8988	1.117	64° 00'
10'	.4567	.4410	.4913	2.0353	.8975	1.1141	50'
20'	.4596	.4436	.4950	2.0204	.8962	1.1112	40'
30'	.4625	.4462	.4986	2.0057	.8949	1.1083	30'
40'	.4654	.4488	.5022	1.9912	.8936	1.1054	20'
50'	.4683	.4514	.5059	1.9768	.8923	1.1025	10'
27° 00'	.4712	.4540	.5095	1.9626	.8910	1.0996	63° 00'
		Cos	Ctg	tan	Sen	Radianes	Grados

Tabla de valores de las funciones trigonométricas (*cont...*)

Grados	Radianes	Sen	tan	Ctg	Cos		
27° 00'	,4712	,4540	,5095	1,9626	,8910	1,0996	63° 00'
10'	.4741	.4566	.5132	1.9486	.8897	1.0966	50'
20'	4771	.4592	.5169	1.9347	.8884	1.0937	40'
30'	.4800	.4617	.5206	1.9210	.8870	1.0908	30'
40'	.4829	.4643	.5243	1.9074	.8857	1.0879	20'
50'	.4858	.4669	.5280	1.8940	.8843	1.0850	10'
28° 00'	.4887	.4695	.5317	1.8807	.8829	1.0821	62° 00'
10'	.4916	.4720	.5354	1.8676	.8816	1.0792	50'
20'	.4945	.4746	.5392	1.8546	.8802	1.0763	40'
30'	.4974	.4772	.5430	1.8418	.8788	1.0734	30'
40'	.5003	.4797	.5467	1.8291	.8774	1.0705	20'
50'	.5032	.4823	.5505	1.8165	.8760	1.0676	10'
29° 00'	.5061	.4848	.5543	1.8040	.8746	1.0647	61° 00'
10'	.5091	.4874	.5581	1.7917	.8732	1.0617	50'
20'	.5120	.4899	.5619	1.7796	.8718	1.0588	40'
30'	.5149	.4924	.5658	1.7675	.8704	1.0559	30'
40'	.5178	.4950	.5696	1.7556	.8689	1.0530	20'
50'	.5207	.4975	.5735	1.7437	.8675	1.0501	10'
30° 00'	.5236	.5000	.5774	1.7321	.8660	1.0472	60° 00'
10'	.5265	.5025	.5812	1.7205	.8646	1.0443	50'
20'	.5294	.5050	.5851	1.7090	.8631	1.0414	40'
30'	.5323	.5075	.5890	1.6977	.8616	1.0385	30'
40'	.5352	.5100	.5930	1.6864	.8601	1.0356	20'
50'	.5381	.5125	.5969	1.6753	.8587	1.0327	10'
31° 00'	.5411	.5150	.6009	1.6643	.8572	1.0297	59° 00'
10'	.5440	.5175	.6048	1.6534	.8557	1.0268	50'
20'	.5469	.5200	.6088	1.6426	.8542	1.0239	40'
30'	.5498	.5225	.6128	1.6319	.8526	1.0210	30'
40'	.5527	.5250	.6168	1.6212	.8511	1.0181	20'
50'	.5556	.5275	.6208	1.6107	.8496	1.0152	10'
32° 00'	.5585	.5299	.6249	1.6003	.8480	1.0123	58° 00'
10'	.5614	.5324	.6289	1.5900	.8465	1.0094	50'
20'	.5643	.5348	.6330	1.5798	.8450	1.0065	40'
30'	.5672	,5373	,6371	1,5697	,8434	1,0036	30'
40'	.5701	.5398	.6412	1.5597	.8418	1.0007	20'
50'	.5730	.5422	.6453	1.5497	.8403	.9977	10'
33° 00'	.5760	.5446	.6494	1.5399	.8387	.9948	57° 00'
10'	.5789	,5471	,6536	1,5301	,8371	,9919	50'
20'	.5818	.5459	.6577	1.5204	.8355	.9890	40'
30'	.5847	.5519	.6619	1.5108	.8339	.9861	30'
40'	.5876	.5544	.6661	1.5013	.8323	.9832	20'
50'	.5905	.5568	.6703	1.4919	.8307	.9803	10'
34° 00'	.5934	.5592	.6745	1.4826	.8290	.9774	56° 00'
10'	.5963	.5616	.6787	1.4733	.8274	.9745	50'
20'	.5992	.5640	.6830	1.4641	.8258	.9716	40'
30'	.6021	.5664	.6873	1.4550	.8241	.9687	30'
40'	.6050	.5688	.6916	1.4460	.8225	.9657	20'
50'	.6080	.5712	.6959	1.4370	.8208	.9628	10'
35° 00'	.6109	.5736	.7002	1.4281	.8192	.9599	55° 00'
10'	.6138	.5760	.7046	1.4193	.8175	.9570	50'
20'	.6167	.5783	.7089	1.4106	.8158	.9541	40'
30'	.6196	.5807	.7133	1.4019	.8141	.9512	30'
40'	.6225	.5831	.7177	1.3934	.8124	.9483	20'
50'	.6254	.5854	.7221	1.3848	.8107	.9454	10'
36° 00'	.6283	.5878	.7265	1.3764	.8090	.9425	54° 00'
		Cos	Ctg	tan	Sen	Radianes	Grados

Tabla de valores de las funciones trigonométricas (*cont...*)

Grados	Radianes	Sen	tan	Ctg	Cos		
36° 00'	,6283	,5378	,7265	1,3764	,8090	,9425	54° 00'
10'	.6312	.5901	.7310	1.3680	.8073	.9396	50'
20'	.6341	.5925	.7355	1.3597	.8056	.9367	40'
30'	.6370	.5948	.7400	1.3514	.8039	.9338	30'
40'	.6400	.5972	.7445	1.3432	.8021	.9308	20'
50'	.6429	.5995	.7490	1.3351	.8004	.9279	10'
37° 00'	.6458	.6018	.7536	1.3270	.7986	.9250	53° 00'
10'	.6487	.6041	.7581	1.3190	.7969	.9221	50'
20'	.6516	.6065	.7627	1.3111	.7951	.9192	40'
30'	.6545	.6088	.7673	1.3032	.7934	.9163	30'
40'	.6574	.6111	.7720	1.2954	.7916	.9134	20'
50'	.6603	.6134	.7766	1.2876	.7898	.9105	10'
38° 00'	.6632	.6157	.7813	1.2799	.7880	.9076	52° 00'
10'	.6661	.6180	.7860	1.2723	.7862	.9047	50'
20'	.6690	.6202	.7907	1.2647	.7844	.9018	40'
30'	.6720	.6225	.7954	1.2572	.7826	.8988	30'
40'	.6749	.6248	.8002	1.2497	.7808	.8959	20'
50'	.6778	.6271	.8050	1.2423	.7790	.8930	10'
39° 00'	.6807	.6293	.8098	1.2349	.7771	.8901	51° 00'
10'	.6836	.6316	.8146	1.2276	.7753	.8872	50'
20'	.6865	.6338	.8195	1.2203	.7735	.8843	40'
30'	.6894	.6361	.8243	1.2131	.7716	.8814	30'
40'	.6923	.6383	.8292	1.2059	.7698	.8785	20'
50'	.6952	.6406	.8342	1.1988	.7679	.8756	10'
40° 00'	.6981	.6428	.8391	1.1918	.7660	.8727	50° 00'
10'	.7010	.6450	.8441	1.1847	.7642	.8698	50'
20'	.7039	.6472	.8491	1.1778	.7623	.8668	40'
30'	.7069	.6494	.8541	1.1708	.7604	.8639	30'
40'	.7098	.6517	.8591	1.1640	.7585	.8610	20'
50'	.7127	.6539	.8642	1.1571	.7566	.8581	10'
41° 00'	.7156	.6561	.8693	1.1504	.7547	.8552	49° 00'
10'	.7185	.6583	.8744	1.1436	.7528	.8523	50'
20'	.7214	.6604	.8796	1.1369	.7509	.8494	40'
30'	,7243	,6626	,8847	1,1303	,7490	,8465	30'
40'	.7272	.6648	.8899	1.1237	.7470	.8436	20'
50'	.7301	.6670	.8952	1.1171	.7451	.8407	10'
42° 00'	.7330	.6691	.9004	1.1106	.7431	.8378	48° 00'
10'	,7359	,6713	,9057	1,1041	,7412	,8348	50'
20'	.7289	.6734	.9110	1.0977	.7392	.8319	40'
30'	.7418	.6756	.9163	1.0913	.7373	.8290	30'
40'	.7447	.6777	.9217	1.0850	.7353	.8261	20'
50'	.7476	.6799	.9271	1.0786	.7333	.8232	10'
43° 00'	.7505	.6820	.9325	1.0724	.7314	.8203	47° 00'
10'	.7534	.6841	.9380	1.0661	.7294	.8174	50'
20'	.7536	.6862	.9435	1.0599	.7274	.8145	40'
30'	.7592	.6884	.9490	1.0538	.7254	.8116	30'
40'	.7621	.6905	.9545	1.0477	.7234	.8087	20'
50'	.7650	.6926	.9601	1.0416	.7214	.8058	10'
44° 00'	.7679	.6947	.9657	1.0355	.7193	.8029	46° 00'
10'	.7709	.6967	.9713	1.0295	.7173	.7999	50'
20'	.7738	.6988	.9770	1.0235	.7153	.7970	40'
30'	.7767	.7009	.9827	1.0176	.7133	.7941	30'
40'	.7796	.7030	.9884	1.0117	.7112	.7912	20'
50'	.7825	.7050	.9942	1.0058	.7092	.7883	10'
45° 00'	.7854	.7071	1.0000	1.0000	.7071	.7854	45° 00'
		Cos	Ctg	tan	Sen	Radianes	Grados

La geometría euclidiana, es una de las ramas más visuales que tiene las matemáticas, a partir de definiciones de cosas simples y teoremas se construye una disciplina que desde Euclides –en los seis libros de la geometría– hasta nuestros días sigue siendo una referencia para el aprendizaje de las matemáticas.

La trigonometría, por su parte, es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo, lo cual tiene muchas aplicaciones dentro de las mismas matemáticas y otras ramas del conocimiento, como son la astronomía y la geografía, donde se necesitan técnicas de triangulación para resolver algún problema o hacer ciertas mediciones.

La geometría analítica, es una rama que nos permite juntar dos mundos, la geometría y el álgebra, a través de sus dos problemas fundamentales, los cuales plantean que a partir de los elementos de un lugar geométrico se puede encontrar la ecuación que lo representa y viceversa (dada la ecuación se puede graficar el lugar geométrico).

Esta obra es la referencia inmediata para entender, aprender y visualizar a la geometría, la trigonometría y la geometría analítica como herramientas fundamentales en el estudio de las matemáticas. Ésta se divide en tres partes, las dos primeras corresponden a la geometría euclidiana y la trigonometría, la última, aborda a la geometría analítica.

Cada tema se desarrolla con la teoría justa y mantiene la idea de brindar al lector un gran número de ejemplos para facilitar el aprendizaje de esta materia.

Para obtener más información acerca del Colegio Nacional de Matemáticas visite:
www.conamat.com

Prentice Hall
es una marca de

PEARSON

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net

ISBN 978-607-442-543-7

90000

9786074425437