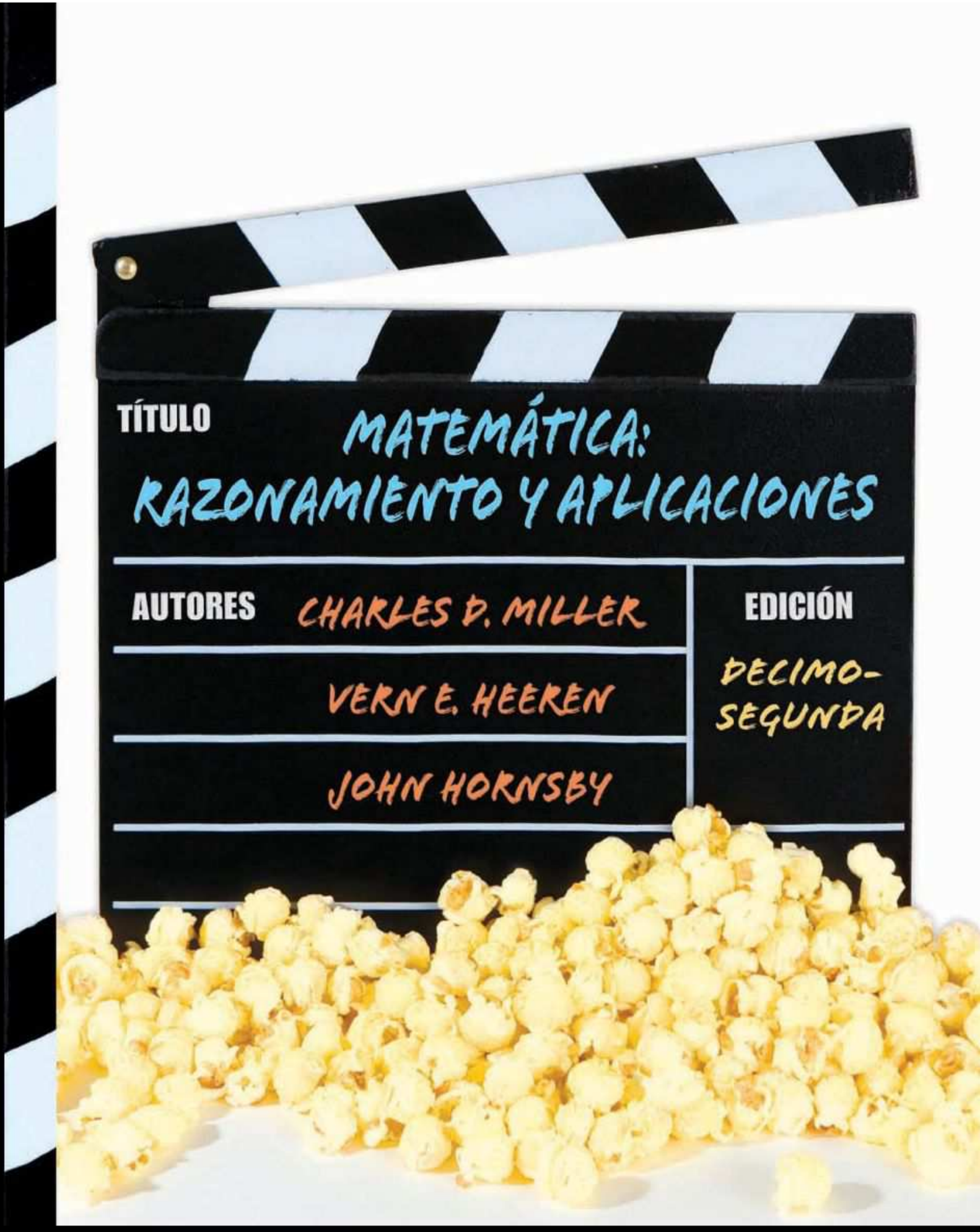


ALWAYS LEARNING

PEARSON

Charles D. MILLER

Vern E. HEEREN
American River College

John HORNSBY
University of New Orleans

MATEMÁTICA: RAZONAMIENTO Y APLICACIONES

Decimosegunda edición

Traducción
Antonio Enríquez Brito
Traductor especialista en matemáticas

Revisión técnica
Vinicio Pérez Fonseca
María de Guadalupe Arroyo Santisteban
Iren Castillo Saldaña
Ignacio García Juárez
José Cruz Ramos Báez
Academia de Matemáticas
Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales (ECEE)
Universidad Panamericana

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

MILLER, CHARLES D.; HEEREN, VERN E. y HORNSBY, JOHN

Matemática: razonamiento y aplicaciones.
Decimosegunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2013

ISBN: 978-607-32-1632-6
Área: Matemáticas

Formato: 21.5 × 27.5 cm Páginas: 696

Authorized translation from the English language edition, entitled *MATHEMATICAL IDEAS* 12th Edition, by CHARLES MILLER, VERN HEEREN and JOHN HORNSBY, published by Pearson Education, Inc., publishing as Pearson, Copyright © 2012. All rights reserved.
ISBN 9780321693815

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *MATHEMATICAL IDEAS* 12ª edición por CHARLES MILLER, VERN HEEREN y JOHN HORNSBY, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Pearson, Copyright © 2012. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español

Dirección general:	Philip de la Vega
Dirección Educación Superior:	Mario Contreras
Editora sponsor:	Gabriela López Ballesteros e-mail: gabriela.lopezballesteros@pearson.com
Editor de desarrollo:	Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de Producción:	Rodrigo Romero Villalobos
Gerencia Editorial Educación Superior Latinoamérica:	Marisa de Anta

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN, 2013

D.R. © 2013 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5º Piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-1632-6
ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-1633-3
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-1634-0

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 15 14 13 12

PEARSON

www.pearsonenespañol.com

A mi hijo especial, Christopher Michael Hornsby. PAPÁ

A mi amada esposa, Carole, mi inspiración. VERN

CONTENIDO

PREFACIO xi
COMPLEMENTOS xv
AGRADECIMIENTOS xviii

1 EL ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS 1

1.1 Solución de problemas por razonamiento inductivo 2
Características de los razonamientos inductivo y deductivo • Riesgos del razonamiento inductivo

1.2 Una aplicación del razonamiento inductivo: patrones numéricos 9
Secuencias numéricas • Diferencias sucesivas • Patrones numéricos y fórmulas de sumas • Números figurados

1.3 Estrategias para la solución de problemas 18
Método general para la solución de problemas • Uso de una tabla o un diagrama • Trabajar hacia atrás • Uso de ensayo y error • Suposición y verificación • Consideración de un problema similar más sencillo • Elaboración de un boceto • Uso del sentido común

1.4 Cálculo, estimación y lectura de gráficas 29
Cálculo • Estimación • Interpretación de gráficas

EXTENSIÓN Uso de la escritura para aprender matemáticas **36**
INVESTIGACIÓN COLABORATIVA Descubrimiento de patrones en el triángulo de Pascal **40**
EXAMEN DEL CAPÍTULO 1 41

2 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS 43

2.1 Símbolos y terminología 44
Definiciones de conjuntos • Conjuntos de números y cardinalidad • Conjuntos finitos e infinitos • Igualdad de conjuntos

2.2 Diagramas de Venn y subconjuntos 50
Diagramas de Venn • Complemento de un conjunto • Subconjuntos de un conjunto • Subconjuntos propios • Conteo de subconjuntos

2.3 Operaciones con conjuntos y productos cartesianos 56
Intersección de conjuntos • Unión de conjuntos • Diferencia de conjuntos • Pares ordenados • Producto cartesiano de conjuntos • Diagramas de Venn • Leyes de De Morgan

2.4 Encuestas y números cardinales 68
Encuestas • Fórmula para obtener números cardinales • Tablas

EXTENSIÓN Conjuntos infinitos y sus cardinalidades **74**
INVESTIGACIÓN COLABORATIVA Determinación de los alumnos de su clase **81**
EXAMEN DEL CAPÍTULO 2 81

3 INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA 83

3.1 Enunciados y cuantificadores 84
Enunciados • Negaciones • Símbolos • Cuantificadores • Cuantificadores y conjuntos de números

3.2 Tablas de verdad y enunciados equivalentes 90
Conjunciones • Disyunciones • Negaciones • Enunciados matemáticos • Tablas de verdad • Método alternativo de construcción de tablas de verdad • Enunciados equivalentes y leyes de De Morgan

3.3 El condicional y los circuitos 101
Condicionales • Negación de un condicional • Circuitos

3.4 El condicional y los enunciados relacionados 110
Converso, inverso y contrapositivo • Formas alternativas de "si p, entonces q" • Bicondicionales • Resumen de tablas de verdad

3.5 Análisis de argumentos con diagramas de Euler 115
Argumentos lógicos • Argumentos con cuantificadores universales • Argumentos con cuantificadores existenciales

EXTENSIÓN Problemas lógicos y sudokus **120**

3.6 Análisis de argumentos con tablas de verdad 125
Tablas de verdad (dos premisas) • Formas de argumentos válidos e inválidos • Tablas de verdad (más de dos premisas) • Argumentos de Lewis Carroll

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA Problemas lógicos y sudokus **134**

EXAMEN DEL CAPÍTULO 3 135

4 TEORÍA DE NÚMEROS 137

4.1 Números primos y compuestos 138
Primos, compuestos y divisibilidad • Teorema fundamental de la aritmética

4.2 Números primos grandes 143
La infinitud de los números primos • Búsqueda de números primos más grandes

4.3 Temas selectos de la teoría de números 149
Números perfectos • Números deficientes y números abundantes • Números amigables (amigos) • Conjetura de Goldbach • Primos gemelos • Último teorema de Fermat

4.4 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo 155
Máximo común divisor • Mínimo común múltiplo

EXTENSIÓN Criptografía moderna **163**

4.5 La secuencia de Fibonacci y la razón áurea 170
La secuencia de Fibonacci • La razón áurea

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA Investigación de una propiedad interesante de cuadros con números **176**

EXAMEN DEL CAPÍTULO 4 177

5 LOS NÚMEROS REALES Y SUS REPRESENTACIONES ... 179

5.1 Números reales, orden y valor absoluto 180
Conjuntos de números reales • Orden en los números reales • Inversos aditivos y valor absoluto • Aplicaciones

5.2 Operaciones, propiedades y aplicaciones de los números reales 188
Operaciones • Orden (prioridad) de las operaciones • Propiedades de la suma y la multiplicación de números reales • Aplicaciones de los números reales

5.3 Números racionales y representación decimal 200
Definición y propiedad fundamental • Operaciones con números racionales • Densidad y media aritmética • Forma decimal de los números racionales

5.4 Números irracionales y representación decimal 212
Definición y conceptos básicos • Irracionalidad de $\sqrt{2}$ y demostración por contradicción • Operaciones con raíces cuadradas • Los números irracionales π, ϕ y e

5.5 Aplicaciones de decimales y porcentajes 222
Operaciones con decimales • Redondeo de decimales • Porcentaje • Aplicaciones

EXTENSIÓN Números complejos **234**
INVESTIGACIÓN COLABORATIVA Presupuesto para la compra de un automóvil **237**
EXAMEN DEL CAPÍTULO 5 238

6 CONCEPTOS BÁSICOS DE ÁLGEBRA 241

6.1 Ecuaciones lineales 242
Solución de ecuaciones lineales • Clases especiales de ecuaciones lineales • Ecuaciones con literales y fórmulas • Modelos

6.2 Aplicaciones de las ecuaciones lineales 251
Traducción de palabras a símbolos • Criterios para aplicaciones • Cálculo de cantidades desconocidas • Problemas de mezcla e interés • Problemas de denominación monetaria • Problemas de movimiento

6.3 Razón, proporción y variación 264
Escritura de razones • Precio unitario • Solución de proporciones • Variación directa • Variación inversa • Variación conjunta y combinada

6.4 Desigualdades lineales 276
Rectas numéricas y notación de intervalos • Propiedad aditiva de la desigualdad • Propiedad multiplicativa de la desigualdad • Solución de desigualdades lineales • Aplicaciones • Desigualdades de tres partes

6.5 Propiedades de los exponentes y notación científica 286
Exponentes y expresiones exponenciales • Regla del producto • Exponente cero y exponentes negativos • Regla del cociente • Reglas de potencias • Resumen de reglas de los exponentes • Notación científica

6.6 Polinomios y factorización 298
Terminología básica • Adición y sustracción • Multiplicación • Productos notables • Factorización • Factorización con el máximo común divisor • Factorización por agrupamiento • Factorización de trinomios • Factorización de binomios notables

EXTENSIÓN Soluciones con números complejos de ecuaciones cuadráticas **314**
INVESTIGACIÓN COLABORATIVA ¿Cómo se compara su velocidad al caminar con la de los atletas olímpicos de caminata? **316**
EXAMEN DEL CAPÍTULO 6 317

7 GRÁFICAS, FUNCIONES, SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES 319

7.1 Sistema de coordenadas rectangulares y círculos 320
Coordenadas rectangulares • Fórmula de la distancia • Fórmula del punto medio • Círculos • Una aplicación

7.2 Rectas, pendiente y tasa de cambio promedio 328
Ecuaciones lineales con dos variables • Intersecciones con los ejes • Pendiente • Rectas paralelas y perpendiculares • Tasa de cambio promedio

7.3 Ecuaciones de la recta y modelos lineales 338
Forma punto-pendiente • Forma pendiente-intersección • Resumen de las formas de ecuaciones lineales • Modelos lineales

7.4 Introducción a las funciones: funciones lineales, aplicaciones y modelos 346
Relaciones y funciones • Dominio y rango • Gráficas de relaciones • Gráficas de funciones • Notación de funciones • Funciones lineales • Análisis del punto de equilibrio

7.5 Funciones cuadráticas, gráficas y modelos 357
Funciones cuadráticas y parábolas • Gráficas de funciones cuadráticas • Vértice de una parábola • Criterios generales para elaborar gráficas • Modelo de optimización

7.6 Funciones exponenciales y logarítmicas, aplicaciones y modelos 367
Funciones exponenciales y aplicaciones • Funciones logarítmicas y aplicaciones • Modelos exponenciales en la naturaleza

7.7 Sistemas de ecuaciones 376
Sistemas lineales con dos variables • Método de eliminación • Método de sustitución • Sistemas lineales con tres variables

7.8 Aplicaciones de sistemas 385
Introducción • Aplicaciones con dos variables • Una aplicación con tres variables

EXTENSIÓN Uso de las operaciones de renglón en las matrices para resolver sistemas de ecuaciones **394**

7.9 Desigualdades lineales, sistemas de desigualdades y programación lineal 398
Desigualdades lineales con dos variables • Sistemas de desigualdades • Programación lineal

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA Rastreo epidemiológico **404**

EXAMEN DEL CAPÍTULO 7 405

8 MÉTODOS DE CONTEO 407

8.1 Conteo mediante una lista sistemática 408
Conteo • Tareas de una etapa • Tablas de resultados para tareas de dos etapas • Diagramas de árbol para tareas con varias etapas • Otros métodos de listas sistemáticas

8.2 Uso del principio fundamental de conteo 415
Uniformidad y el principio fundamental de conteo • Factoriales • Arreglos de objetos

8.3 Uso de permutaciones y combinaciones 426
Permutaciones • Combinaciones • Criterios sobre cuál método usar

8.4 Uso del triángulo de Pascal 439
Triángulo de Pascal • Aplicaciones

EXTENSIÓN Cuadrados mágicos **445**

8.5 Problemas de conteo que implican "no" y "o" 449
Problemas que implican "no" • Problemas que implican "o"

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA Solución del problema del viajero **456**

EXAMEN DEL CAPÍTULO 8 457

9 PROBABILIDAD 459

9.1 Conceptos básicos 460
Antecedentes históricos • Probabilidad • Ley de los grandes números • Probabilidad en genética • Momios

9.2 Eventos que implican "no" y "o" 470
Propiedades de la probabilidad • Eventos que implican "no" • Eventos que implican "o"

9.3 Probabilidad condicional; eventos que implican "y" 478
Probabilidad condicional • Eventos que implican "y"

9.4 Probabilidad binomial 489
Distribución de la probabilidad binomial • Fórmula de la probabilidad binomial

9.5 Valor esperado 494
Valor esperado • Juegos y apuestas • Inversiones • Negocios y seguros

EXTENSIÓN Estimación de probabilidades por simulación **504**
INVESTIGACIÓN COLABORATIVA Obtención de valores empíricos de π **508**
EXAMEN DEL CAPÍTULO 9 509

10 ESTADÍSTICA 511

10.1 Representaciones visuales de datos 512
Conceptos básicos • Distribuciones de frecuencias • Distribuciones de frecuencias agrupadas • Diagramas de tallo y hoja • Gráficas de barras, circulares y lineales

10.2 Medidas de tendencia central 523
Media • Mediana • Moda • Tendencia central de diagramas de tallo y hoja • Simetría en conjuntos de datos • Resumen

10.3 Medidas de dispersión 535
Rango • Desviación estándar • Interpretación de las medidas de dispersión • Coeficiente de variación

10.4 Medidas de posición 544
El valor z • Percentiles • Deciles y cuartiles • Diagrama de caja

10.5 La distribución normal 550
Variables aleatorias discretas y continuas • Definición y propiedades de una curva normal • Tabla de áreas de curvas normales estándar • Interpretación de áreas de una curva normal

EXTENSIÓN Regresión y correlación **559**
INVESTIGACIÓN COLABORATIVA Combinación de conjuntos de datos **565**
EXAMEN DEL CAPÍTULO 10 566

11 ADMINISTRACIÓN DE FINANZAS PERSONALES 569

11.1 Valor del dinero en el tiempo 570
Interés • Interés simple • Valor futuro y valor presente • Interés compuesto • Rendimiento anual efectivo • Inflación

11.2 Crédito al consumo 583
Tipos de créditos al consumo • Préstamos a plazos • Préstamos revolventes

11.3 Transparencia en el crédito 588
Tasa de porcentaje anual (TPA) • Interés no devengado

11.4 Costos y ventajas de poseer una casa 595
Préstamos hipotecarios con tasa fija • Préstamos hipotecarios con tasa ajustable • Costos de cierre • Impuestos, seguro y mantenimiento

11.5 Inversiones financieras 607
Acciones • Bonos • Fondos de inversión • Evaluación de los rendimientos de una inversión • Construcción de un fondo de reserva

EXTENSIÓN Esquemas de Ponzi y otros fraudes de inversión **622**
INVESTIGACIÓN COLABORATIVA ¿Comprar o rentar? **629**
EXAMEN DEL CAPÍTULO 11 630

APÉNDICE El sistema métrico A-1

Respuestas a ejercicios seleccionados A-9

Créditos C-1

Índice analítico I-1

PREFACIO

Después de once ediciones y más de cuatro décadas, *Matemática: razonamiento y aplicaciones* es uno de los libros de texto más utilizados para enseñar matemáticas. Estamos orgullosos de presentar la decimosegunda edición de un texto que ofrece a los estudiantes, de áreas diferentes a la física, una cobertura práctica que vincula las matemáticas con el entorno. Es un libro flexible que ha evolucionado junto con las tendencias cambiantes, pero que sigue firme en sus objetivos originales.

Esta edición conserva un tema que se introdujo en la edición anterior. El cine y la televisión se han arraigado en nuestra sociedad y resultan atractivos para una gama amplia de intereses. Cada capítulo inicia con una referencia a una película, un programa de televisión o un acontecimiento notable, los cuales se relacionan de manera estrecha con las matemáticas que se estudiarán en las siguientes páginas. Las notas al margen han sido por largo tiempo un sello característico del libro, e incluyen referencias similares a las descripciones de inicio de capítulo. Tales referencias se identifican mediante el ícono de una claqueta  . Para la presente edición, se revisaron muchas de las notas al margen y de las secciones de inicio de capítulo. Esperamos que los lectores disfruten su visita a Hollywood mientras aprenden matemáticas.

Matemática: razonamiento y aplicaciones se escribió tomando en cuenta a diferentes tipos de estudiantes. El texto se adapta a una diversidad de cursos, incluyendo aquellos de las áreas no especializadas en la materia y cursos breves de matemáticas para profesores, ya sea en funciones o en formación, de niveles medio y básico. Se incluyen temas suficientes para cursos de dos periodos, aunque la variedad de temas y la flexibilidad en la secuencia hacen el texto adaptable también para cursos más cortos. Nuestros objetivos principales incluyen brindar cobertura amplia, organización adecuada, exposición clara, ejemplos abundantes y conjuntos de ejercicios bien planeados con diversas aplicaciones.

NOVEDADES EN ESTA EDICIÓN

- Se actualizaron las referencias de películas y programas de televisión a lo largo del libro.
- Se agregaron señaladores en los ejemplos con la finalidad de guiar a los estudiantes, y brindar recordatorios y advertencias importantes para eliminar dificultades frecuentes.
- Cada capítulo incluye ahora una Extensión, esto es, una sección breve que profundiza en un tema relacionado con el capítulo.
- Se mejoraron los conjuntos de ejercicios; aproximadamente 1000 ejercicios son nuevos o se modificaron.
- Se rediseñaron las pantallas de las calculadoras graficadoras, las cuales ahora muestran las salidas en formato MathPrint (disponible en algunas calculadoras TI-84).
- Las referencias a figuras y tablas dentro del texto están ecritas con el mismo tipo de letra que el de la figura o la tabla, lo que facilita su identificación y localización.
- El texto está organizado para facilitar a los estudiantes el reconocimiento del contenido esencial.
- Se desarrolló un conjunto completamente nuevo de videos para apoyar el aprendizaje del estudiante fuera del salón de clases. Los videos son útiles para cursos en línea o cursos híbridos, así como para el estudio por cuenta del estudiante; el material está disponible en inglés en MyMathLab.

PANORAMA DE LOS CAPÍTULOS

- El **capítulo 1 (El arte de resolver problemas)** introduce al estudiante al razonamiento inductivo, el reconocimiento de patrones y las técnicas de solución de problemas. Al igual que en ediciones anteriores, se presentan ejercicios basados en el calendario mensual de *Mathematics Teacher*, además de nuevos ejercicios a lo largo de esta edición, iniciando en la sección 1.4. A petición de los revisores, la sección 1.2 incluye ahora la cobertura de secuencias aritméticas y geométricas.

- El **capítulo 2 (Conceptos básicos de la teoría de conjuntos)** incluye ejercicios actualizados de investigaciones y un análisis revisado del trabajo de Georg Cantor. (*Nota:* Los profesores tienen libertad para presentar el capítulo 3 antes que el 2, si así lo desean).

- El **capítulo 3 (Introducción a la lógica)** examina los conceptos fundamentales de lógica inductiva y deductiva. El inicio del capítulo corresponde a una escena de *Shrek Tercero*. Se incluyeron ejercicios adicionales para los trabajos de Raymond Smullyan y se amplió la cobertura de las falacias lógicas. Los problemas de lógica y los sudokus de ediciones anteriores se sustituyeron por otros nuevos.

- El **capítulo 4 (Teoría de números)** presenta una introducción a temas de números primos y compuestos y la secuencia de Fibonacci. Aparece una nueva sección de inicio del capítulo en esta edición. La sección de ediciones anteriores dedicada a los números primos se amplió dividiéndola en dos apartados. La nueva sección 4.2 (*Números primos grandes*) incluye un análisis de la búsqueda siempre inestable de números primos grandes.

- El **capítulo 5 (Los números reales y sus representaciones)** expone algunos de los conceptos básicos de los números reales, sus diferentes formas de representación y las operaciones aritméticas donde participan. La sección de inicio del capítulo es nueva. La mayoría de los ejercicios que utilizan datos de la vida real se actualizaron, y se incluyeron varios ejercicios nuevos.

- El **capítulo 6 (Conceptos básicos de álgebra)** resulta de gran utilidad para presentar a los estudiantes los fundamentos del álgebra (ecuaciones lineales y cuadráticas, aplicaciones, exponentes, polinomios y factorización) por primera vez, o bien, para repasar cursos anteriores. La sección de inicio del capítulo es nueva, y también se actualizaron las aplicaciones de todo el capítulo.

- El **capítulo 7 (Gráficas, funciones, sistemas de ecuaciones y desigualdades)** es el segundo de los dos capítulos de álgebra, y se ocupa del estudio de gráficas, ecuaciones y aplicaciones de modelos y funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. En esta edición la sección referente a sistemas de ecuaciones se dividió en dos secciones, la segunda de las cuales cubre las aplicaciones de sistemas de ecuaciones. Muchos ejercicios de este capítulo incluyen datos actualizados.

- El **capítulo 8 (Métodos de conteo)** se enfoca en las técnicas de conteo elementales, como preparación para el capítulo siguiente. La sección de inicio del capítulo es completamente nueva y se refiere al lanzamiento de una moneda en el XLIV Súper Bowl. También se incluyeron problemas adicionales de *Mathematics Teacher* y un análisis de "ordenamientos indeseables". La Extensión sobre cuadrados mágicos, que en ediciones anteriores se incluía en el capítulo de teoría de números, ahora forma parte de este capítulo.

- El **capítulo 9 (Probabilidad)** cubre los fundamentos de probabilidad, así como los temas de momios y valor esperado. En este capítulo se incluyen por primera vez problemas de *Mathematics Teacher*.

- El **capítulo 10 (Estadística)** es una introducción a la estadística y se enfoca en temas como las medidas de tendencia central, dispersión, posición y análisis de la distribución normal, regresión y correlación. La nueva sección de inicio del capítulo brinda un ejemplo de la vida real de la paradoja de Simpson; también se incluyeron ejemplos y ejercicios con datos actualizados.

- El **capítulo 11 (Administración de finanzas personales)** brinda al estudiante los fundamentos de las matemáticas financieras aplicadas a la inflación, el crédito al consumidor y las operaciones de compra de vivienda. Se incluye una sección sobre inversiones, con énfasis en el manejo de acciones, bonos y fondos de inversión. Se actualizaron los ejemplos y ejercicios para reflejar las tasas de interés actuales y los rendimientos de las inversiones. Este capítulo cuenta con una nueva Extensión: *Esquemas de Ponzi y otros fraudes de inversión*.

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL CURSO

Los capítulos del texto son, en la mayoría de los casos, independientes y se pueden cubrir en el orden que elija el profesor. Algunas excepciones son las siguientes:

- El capítulo 5 incluye un poco de material que depende de las ideas presentadas en el capítulo 4.
- Se debe estudiar el capítulo 5 antes del capítulo 6, si los antecedentes académicos de los estudiantes así lo exigen.
- Los capítulos 6 y 7 forman el "paquete" de álgebra y se deben cubrir en orden secuencial.
- La cobertura total del capítulo 9 depende del conocimiento del material del capítulo 8, aunque el tema de probabilidad se puede enseñar sin cubrir exhaustivamente los métodos de conteo, eliminando los ejercicios con mayor grado de dificultad.
- La parte final del capítulo 10, acerca de estadística inferencial, depende del conocimiento que se tenga de probabilidad (capítulo 9).

CARACTERÍSTICAS DE LA DECIMOSEGUNDA EDICIÓN

MEJORA **Secciones de inicio de capítulo** Para continuar con el tema de Hollywood, las secciones de inicio de capítulo se refieren a escenas de una película o de una serie de televisión, o bien, comentan algún suceso notable. Muchas de esas referencias son nuevas en esta edición. Algunas muestran el uso correcto de las matemáticas, mientras que otras revelan cómo se usan incorrectamente. En este último caso, nos adherimos a la premisa de que podemos aprender de los errores de otros. Algunas secciones de inicio incluyen el enunciado de un problema que deberá resolver el lector. Esperamos que usted disfrute la lectura de estas secciones de inicio de capítulo tanto como nosotros disfrutamos con su preparación.

MEJORA **Conjuntos de ejercicios variados** Continuamos presentando una variedad de ejercicios que integran problemas didácticos, conceptuales y de aplicación. En la presente edición se incluyen cerca de 1000 ejercicios nuevos o modificados. Esta variedad de ejercicios brinda a los estudiantes la oportunidad de practicar, aplicar, relacionar y ampliar las habilidades matemáticas que vayan aprendiendo. Se actualizaron los ejercicios que incluyen datos de la vida real, aunque se conservaron sus títulos para identificarlos fácilmente. Se enriquecieron varios capítulos con aplicaciones nuevas, especialmente los capítulos 5, 6, 7, 9, 10 y 11. Siempre que es necesario, se utilizan gráficas, tablas y diagramas. Muchas de las gráficas tienen una presentación similar a la que ven los estudiantes en los medios actuales impresos y electrónicos.

MEJORA **Notas al margen** Esta conocida característica es un sello distintivo del presente texto; las notas se conservaron y actualizaron cuando fue necesario. Estas notas van intercaladas a lo largo del texto y tratan una diversidad de temas, como vidas de matemáticos, hechos históricos, reproducciones filatélicas y numismáticas, anécdotas sobre libros de texto del pasado, artículos periodísticos y de revistas e investigaciones actuales en matemáticas. También se agregaron varias notas al margen relacionadas con Hollywood.

MEJORA **Extensiones** Estas secciones breves profundizan en temas relacionados con el capítulo e incluyen sus propios conjuntos de ejercicios. Se escribieron extensiones nuevas para los capítulos que anteriormente no incluían esta característica.

Investigaciones colaborativas En esta sección, incluida al final de cada capítulo, se aprecia la importancia del aprendizaje en grupo.

Sugerencias para la solución de problemas Los recuadros especiales identificados como "Sugerencias para la solución de problemas" relacionan el análisis de las estrategias de solución de problemas con las técnicas que se presentaron anteriormente.

MEJORA **Tecnología gráfica opcional** En el libro se reproducen pantallas de graficadoras, con la finalidad de mostrar cómo se puede usar la tecnología para apoyar los resultados obtenidos analíticamente. Estas pantallas se rediseñaron y ahora muestran la salida en formato MathPrint. Sin embargo, no es indispensable que un estudiante posea una graficadora para estudiar este texto. *El componente tecnológico es opcional*.

Diseño El texto continúa con la característica de presentar un diseño atractivo, lo que ayuda a enfatizar didácticamente los análisis del texto, los ejemplos, las gráficas y las figuras. Se incorporaron muchas fotografías nuevas para ofrecer atractivo visual.

Para reflexionar Estos recuadros animan a los estudiantes a compartir entre sí su proceso de razonamiento, con la finalidad de obtener un conocimiento más profundo de conceptos matemáticos fundamentales.

Ejemplos titulados Los numerosos ejemplos cuidadosamente seleccionados, y que ilustran los conceptos y las habilidades matemáticas, incluyen un título, de modo que los estudiantes pueden enterarse rápidamente de cuál es el tema que se trata en cada uno.

ACTUALIZACIÓN **Énfasis sobre datos reales en forma de gráficas, diagramas y tablas** Continuamos usando información actualizada hasta la fecha, proveniente de revistas, diarios e Internet, con la finalidad de crear aplicaciones reales que sean relevantes y significativas.

Exámenes de los capítulos Cada capítulo concluye con un examen, de modo que los estudiantes puedan comprobar su dominio del tema.

COMPLEMENTOS

COMPLEMENTOS PARA EL PROFESOR

Edición glosada para el profesor
ISBN-10: 0-321-69406-6; ISBN-13: 978-0-321-69406-5

- Esta edición especial del texto presenta las respuestas al lado de los ejercicios, para consulta rápida, cuando hay espacio disponible. Las respuestas más largas, identificadas por el ícono ▣ después del ejercicio, se pueden encontrar al final del libro.

Manual de soluciones del profesor
ISBN-10: 0-321-69405-8; ISBN-13: 978-0-321-69405-8

- Este manual de Carrie Green contiene las soluciones de todos los ejercicios incluidos al final de cada sección, de las extensiones, los exámenes del capítulo y el apéndice.

MEJORA **Guía con notas didácticas de Math goes to Hollywood**
ISBN-10: 0-321-71643-4; ISBN-13: 978-0-321-71643-9

- Esta guía actualizada incluye notas didácticas detalladas de *Math goes to Hollywood* para ayudar a los profesores a integrar a sus cursos las películas mencionadas en el texto. Las notas nuevas de las películas incluyen el nombre de la película, extractos del argumento, temas relacionados de matemáticas, correlación con el texto, resumen del contenido matemático y temas de análisis.
- Esta *guía* incluye recursos para ayudar a los profesores en la preparación del curso y la administración de la clase. Ofrece sugerencias útiles de enseñanza relacionadas con cada sección del texto, así como asesoría didáctica en general.

Manual de exámenes del profesor
- Este manual incluye cuatro exámenes para cada capítulo del texto. Se presentan las respuestas clave.

TestGen®
- TestGen (generador de exámenes) facilita a los profesores elaborar, editar, imprimir y administrar exámenes, usando un banco computarizado de preguntas desarrolladas para cubrir todos los objetivos del texto.

Presentaciones en PowerPoint
- Estas transparencias editables incluyen definiciones, conceptos clave y ejemplos para usar en las exposiciones del profesor; este recurso está disponible para cada sección del texto.

Los complementos se pueden obtener en MyMathLab o descargarse de www.pearsonhighered.com/irc.

COMPLEMENTOS DIGITALES

Curso en línea MyMathLab®
MyMathLab® es un curso en línea fácilmente personalizable que integra instrucción interactiva multimedia con el contenido del libro. MyMathLab ofrece a los profesores las herramientas que necesitan para desarrollar la totalidad o parte de su curso en línea, ya sea que sus alumnos estén en un ambiente de laboratorio o estudien en casa.

- **Ejercicios interactivos para realizar tareas**, correlacionados con el libro de texto al nivel de objetivos, se generan de manera algorítmica para practicar y adquirir dominio de los temas. La mayoría de los ejercicios son de respuesta libre y ofrecen soluciones guiadas, problemas de ejemplo y ayudas de aprendizaje tutorial como apoyo adicional.
- **Plan de estudios personalizado**, el cual se genera cuando los estudiantes concluyen un examen o un cuestionario, para indicar los temas que se aprendieron con éxito y señalar los ejercicios tutoriales de temas que los estudiantes aún no dominan. El plan de estudios se puede personalizar de modo que los temas disponibles se ajusten al contenido del curso, o de forma que los resultados de las tareas del alumno determinen el dominio del tema.

- **Ayudas multimedia de aprendizaje**, tales como videoconferencias y podcasts, animaciones y un libro de texto multimedia completo, permiten a los estudiantes mejorar su comprensión y desempeño de forma independiente. Los profesores pueden asignar estos recursos multimedia de aprendizaje como tarea para ayudar a los estudiantes a comprender los conceptos.
- **Administrador de tareas y exámenes**, el cual permite a los profesores asignar tareas, cuestionarios y exámenes que se califican de forma automática. Es posible seleccionar la mezcla correcta de preguntas del banco de ejercicios de MyMathLab, ejercicios personalizados creados por el profesor y/o reactivos de prueba para TestGen®.
- **Libro de calificaciones**, el cual está diseñado específicamente para matemáticas y estadística; este recurso registra automáticamente los resultados, permite a los profesores conocer el desempeño de los estudiantes, y les da control para calcular las calificaciones finales. También es posible agregar calificaciones fuera de línea (registradas con lápiz y en papel) al libro de calificaciones.
- **Generador de ejercicios MathXL** permite a los profesores crear ejercicios algorítmicos para sus tareas asignadas en línea. Podrán usar la biblioteca de ejercicios muestra como punto inicial, o bien, editar cualquier ejercicio relacionado con el curso.
- **Las características especiales de *Matemática: razonamiento y aplicaciones*** incluyen
  - Videos para repasar conceptos nuevos
  - Matemáticas interactivas y líneas de tiempo

Los estudiantes que usan MyMathLab® realizan sus tareas en Flash®, basado en MathXL Player, el cual es compatible con casi cualquier navegador (Firefox®, Safari™ o Internet Explorer®), en casi cualquier plataforma (Macintosh® o Windows®). MyMathLab funciona con CourseCompass™, el ambiente de enseñanza y aprendizaje en línea de Pearson Education, y con MathXL®, nuestro sistema de tareas en línea, tutorial y de evaluación. MyMathLab está disponible para usuarios calificados. Para mayor información, visite www.mymathlab.com o póngase en contacto con su representante de Pearson.

Curso en línea MathXL®

MathXL® es un sistema en línea de tareas, tutorial y de evaluación que acompaña los libros de texto de matemáticas y estadística de Pearson.

- **Ejercicios interactivos para realizar tareas**, correlacionados con el libro de texto a nivel de objetivos, se generan de manera algorítmica para practicar y adquirir dominio de los temas. La mayoría de los ejercicios son de respuesta libre y ofrecen soluciones guiadas, problemas muestra y ayudas de aprendizaje como apoyo adicional.
- **Plan de estudios personalizado,** el cual se genera cuando los estudiantes concluyen un examen o un cuestionario, para indicar los temas que se aprendieron con éxito y señalar los ejercicios tutoriales de temas que los estudiantes aún no dominan. El plan de estudios se puede personalizar de modo que los temas disponibles se ajusten al contenido del curso, o de forma que los resultados de las tareas del alumno determinen el dominio del tema.
- **Ayudas multimedia de aprendizaje**, tales como videoconferencias y animaciones, ayudan a los estudiantes a mejorar su comprensión y desempeño de forma independiente. Estos recursos se pueden asignar como tareas, para estimular más su uso.
- **Libro de calificaciones**, diseñado específicamente para matemáticas y estadística, registra automáticamente los resultados de los estudiantes, permite a los profesores conocer el desempeño de los estudiantes, y les da control para calcular las calificaciones finales.
- **Generador de ejercicios MathXL** permite a los profesores crear ejercicios algorítmicos para sus tareas asignadas en línea. Podrán usar la biblioteca de ejercicios muestra como punto inicial, o bien, editar cualquier ejercicio relacionado con el curso.

- **Administrador de tareas y exámenes**, el cual permite a los profesores asignar en línea tareas, cuestionarios y exámenes que se califican de forma automática. Es posible seleccionar la mezcla correcta de preguntas del banco de ejercicios de MathXL, ejercicios personalizados creados por el profesor y/o reactivos de prueba para TestGen.

El nuevo Flash®, basado en MathXL Player, es compatible con casi cualquier navegador (Firefox®, Safari™ o Internet Explorer®) en casi cualquier plataforma (Macintosh® o Windows®). MathXL está disponible para usuarios calificados. Para mayor información, visite www.mathxl.com, o póngase en contacto con su representante de Pearson.

AGRADECIMIENTOS

Deseamos agradecer a los siguientes revisores por sus valiosos comentarios y sugerencias para esta y las ediciones anteriores del texto. (Los revisores de la decimosegunda edición están identificados con un asterisco).

H. Achepohl, *College of DuPage*
Shahrokh Ahmadi, *Northern Virginia Community College*
Richard Andrews, *Florida A&M University*
Cindy Anfinson, *Palomar College*
*Erika Asano, *University of South Florida, St. Petersburg*
Elaine Barber, *Germanna Community College*
Anna Baumgartner, *Carthage College*
James E. Beamer, *Northeastern State University*
Elliot Benjamin, *Unity College*
Jaime Bestard, *Barry University*
Joyce Blair, *Belmont University*
Gus Brar, *Delaware County Community College*
Roger L. Brown, *Davenport College*
Douglas Burke, *Malcolm X College*
John Busovicki, *Indiana University of Pennsylvania*
Ann Cascarelle, *St. Petersburg Junior College*
Kenneth Chapman, *St. Petersburg Junior College*
Gordon M. Clarke, *University of the Incarnate Word*
M. Marsha Cupitt, *Durham Technical Community College*
James Curry, *American River College*
Rosemary Danaher, *Sacred Heart University*
Ken Davis, *Mesa State College*
Nancy Davis, *Brunswick Community College*
George DeRise, *Thomas Nelson Community College*
Catherine Dermott, *Hudson Valley Community College*
Greg Dietrich, *Florida Community College at Jacksonville*
*Vincent Dimiceli, *Oral Roberts University*
Diana C. Dwan, *Yavapai College*
Laura Dyer, *Belleville Area College*
Jan Eardley, *Barat College*
Joe Eitel, *Folsom College*
Azin Enshai, *American River College*
Gayle Farmer, *Northeastern State University*
Michael Farndale, *Waldorf College*
Gordon Feathers, *Passaic County Community College*
Thomas Flohr, *New River Community College*
Bill Fulton, *Black Hawk College—East*
Anne Gardner, *Wenatchee Valley College*
*Justin M. Gash, *Franklin College*
Donald Goral, *Northern Virginia Community College*
Glen Granzow, *Idaho State University*
Larry Green, *Lake Tahoe Community College*
Arthur D. Grissinger, *Lock Haven University*
Don Hancock, *Pepperdine University*
Denis Hanson, *University of Regina*
Marilyn Hasty, *Southern Illinois University*
Shelby L. Hawthorne, *Thomas Nelson Community College*
Jeff Heiking, *St. Petersburg Junior College*
Laura Hillerbrand, *Broward Community College*
*Corinne Irwin, *University of Texas at Austin*
Jacqueline Jensen, *Sam Houston State University*
Emanuel Jinich, *Endicott College*
Frank Juric, *Brevard Community College-Palm Bay*
Karla Karstens, *University of Vermont*
*Najam Khaja, *Centennial College*
Hilary Kight, *Wesleyan College*
Barbara J. Kniepkamp, *Southern Illinois University at Edwardsville*
Suda Kunyosying, *Shepherd College*
Yu-Ju Kuo, *Indiana University of Pennsylvania*
*Stephane Lafortune, *College of Charleston*
Pam Lamb, *J. Sargeant Reynolds Community College*
John Lattanzio, *Indiana University of Pennsylvania*
John W. Legge, *Pikeville College*
*Dawn Locklear, *Crown College*
*Bin Lu, *California State University, Sacramento*
Leo Lusk, *Gulf Coast Community College*
Sherrie Lutsch, *Northwest Indian College*
Rhonda Macleod, *Florida State University*
Andrew Markoe, *Rider University*
Darlene Marnich, *Point Park College*
Victoria Martinez, *Okaloosa Walton Community College*
Chris Mason, *Community College of Vermont*
Mark Maxwell, *Maryville University*
Carol McCarron, *Harrisburg Area Community College*
Delois McCormick, *Germanna Community College*
Daisy McCoy, *Lyndon State College*
Cynthia McGinnis, *Okaloosa Walton Community College*
Vena McGrath, *Davenport College*
Robert Moyer, *Fort Valley State University*
Shai Neumann, *Brevard Community College*
Barbara Nienstedt, *Gloucester County College*
Chaitanya Nigam, *Gateway Community-Technical College*
Vladimir Nikiforov, *University of Memphis*
*Vicky Ohlson, *Trenholm State Technical College*
Jean Okumura, *Windward Community College*

*Stan Perrine, *Charleston Southern University*
Bob Phillips, *Mesabi Range Community College*
Kathy Pinchback, *University of Memphis*
Priscilla Putman, *New Jersey City University*
Scott C. Radtke, *Davenport College*
*Doraiswamy Ramachandran, *California State University, Sacramento*
John Reily, *Montclair State University*
Beth Reynolds, *Mater Dei College*
Shirley I. Robertson, *High Point University*
Andrew M. Rockett, *CW Post Campus of Long Island University*
Kathleen Rodak, *St. Mary's College of Ave Maria University*
*Cynthia Roemer, *Union County College*
*Lisa Rombes, *Washtenaw Community College*
Abby Roscum, *Marshalltown Community College*
D. Schraeder, *McLennan Community College*
Wilfred Schulte, *Cosumnes River College*
Melinda Schulteis, *Concordia University*
Gary D. Shaffer, *Allegany College of Maryland*
Doug Shaw, *University of North Iowa*
Jane Sinibaldi, *York College of Pennsylvania*
*Nancy Skocik, *California University of Pennsylvania*
Larry Smith, *Peninsula College*
Marguerite Smith, *Merced College*
Charlene D. Snow, *Lower Columbia College*
H. Jeannette Stephens, *Whatcom Community College*
Suzanne J. Stock, *Oakton Community College*
*Dawn M. Strickland, *Winthrop University*
Dian Thom, *McKendree College*
Claude C. Thompson, *Hollins University*
Mark Tom, *College of the Sequoias*
Ida Umphers, *University of Arkansas at Little Rock*
Karen Villarreal, *University of New Orleans*
*Dr. Karen Walters, *Northern Virginia Community College*
Wayne Wanamaker, *Central Florida Community College*
David Wasilewski, *Luzerne County Community College*
William Watkins, *California State University, Northridge*
*Alice Williamson, *Sussex County Community College*
Susan Williford, *Columbia State Community College*
Tom Witten, *Southwest Virginia Community College*
Fred Worth, *Henderson State University*
Rob Wylie, *Carl Albert State College*
Henry Wyzinski, *Indiana University Northwest*

Sería imposible realizar un proyecto de esta magnitud sin la ayuda de muchas personas. Marnie Greenhut trabajó como editor de adquisiciones en esta edición. Carol Merrigan realizó una excelente supervisión de producción. Anne Kelly, Greg Tobin, Tracy Patruno, Roxanne McCarley, Elle Driska y Christine O'Brien de Pearson Addison-Wesley nos dieron un apoyo a toda prueba.

Beth Anderson realizó un trabajo sobresaliente de recopilación de fotografías. Terry McGinnis brindó una excelente asesoría "detrás de las cámaras". Chris Heeren y Paul Lorczak realizaron un trabajo extraordinario de verificación de la exactitud de las respuestas. Mike McCraith, de Cuyahoga Community College, se unió al equipo para incorporar nuevas referencias filmográficas. Y, finalmente, agradecemos a nuestros leales usuarios de tantas ediciones, por hacer de este libro uno de los más exitosos en el mercado.

Vern E. Heeren
John Hornsby

1 EL ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS



Esta es una escena de la película de 1995 *Die Hard: With a Vengeance* (*Duro de matar*), estelarizada por Bruce Willis como el detective John McClane de Nueva York. En la película, McClane es abrumado por el villano Simon Gruber (Jeremy Irons), quien coloca bombas por toda la ciudad y plantea adivinanzas y acertijos para desactivarlas. En una ocasión, Simon habla por teléfono a McClane y al dueño de una tienda, Zeus Carver (Samuel L. Jackson), y les plantea el siguiente acertijo para resolver en 5 minutos.

> *En la fuente hay dos jarras. ¿Las ven? Una es de 5 galones y la otra de 3 galones. Llenen una de las jarras exactamente con 4 galones de agua, colóquenla en la balanza, y el reloj se detendrá. Deben ser precisos. Una onza más o una onza menos provocarán una detonación.*

McClane y Carver lograron resolver el acertijo y desactivar la bomba. ¿Puede hacerlo usted? La respuesta se encuentra en la página 2.

1.1 Solución de problemas por razonamiento inductivo

1.2 Una aplicación del razonamiento inductivo: Patrones numéricos

1.3 Estrategias para la solución de problemas

1.4 Cálculo, estimación y lectura de gráficas

Extensión Uso de la escritura para aprender matemáticas

Investigación colaborativa Descubrimiento de patrones en el triángulo de Pascal

Examen del capítulo 1

1.1 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Características de los razonamientos inductivo y deductivo • Riesgos del razonamiento inductivo



Solución al problema de inicio del capítulo Esta es una manera de hacerlo: Con ambas jarras vacías, llene la jarra de tres galones y vierta su contenido en la jarra de 5 galones. Luego llene otra vez la jarra de 3 galones, y vierta el contenido en la jarra de 5 galones hasta que esta se llene. Ahora queda un galón en la jarra de 3 galones: $(3+3)-5=1$. Vacíe la jarra de 5 galones y vierta en ella el galón de agua de la jarra de 3 galones. Finalmente, llene la jarra de tres galones y viértala en la jarra de 5 galones. De esta manera, tendrá $1+3=4$ galones en la jarra de cinco galones.

(*Nota*: Existe otra manera de resolver este problema. Intente descubrir la solución alternativa).

Características de los razonamientos inductivo y deductivo

El desarrollo de las matemáticas se remonta a las culturas egipcia y babilónica (3,000 a. C. – 260 d. C.) ante la necesidad de resolver problemas. Para resolver un problema o efectuar una operación se obtuvo algo semejante a una receta de cocina, y se aplicó una y otra vez para resolver problemas similares.

Al observar que un método específico funcionaba para cierto tipo de problemas, los babilonios y los egipcios concluyeron que el mismo método funcionaría para cualquier problema del mismo tipo. Una conclusión de este tipo se llama *conjetura*. Una **conjetura** es una hipótesis fundamentada en observaciones repetidas de un proceso o patrón determinado. El método de razonamiento que acabamos de describir se conoce como *razonamiento inductivo*.

Razonamiento inductivo

El **razonamiento inductivo** se caracteriza por la obtención de una conclusión general (haciendo una conjetura) a partir de observaciones repetidas en ejemplos específicos. La conjetura puede ser verdadera o no.

Al someter a prueba una conjetura obtenida por razonamiento inductivo, basta con encontrar un ejemplo que no funcione para probar que la conjetura es falsa. Tal ejemplo se conoce como **contraejemplo**.

El razonamiento inductivo ofrece un método poderoso para obtener conclusiones, pero no existe la seguridad de que la conjetura obtenida siempre sea verdadera. Por esta razón, los matemáticos se muestran renuentes a aceptar una conjetura como una verdad absoluta mientras no se pruebe formalmente usando métodos de *razonamiento deductivo*. El razonamiento deductivo es una característica del desarrollo y enfoque de los matemáticos griegos, como revelan los trabajos de Euclides, Pitágoras, Arquímedes y otros. Durante el periodo clásico griego (600 a. C. – 450 d. C.), se aplicaron conceptos generales a problemas específicos, lo que dio como resultado un desarrollo lógico y estructurado de las matemáticas.

Razonamiento deductivo

El **razonamiento deductivo** se caracteriza por la aplicación de principios generales a ejemplos específicos.

Ahora veremos ejemplos de estos dos tipos de razonamiento. En este capítulo nos referiremos con frecuencia a los **números naturales** o **números cardinales**:

$$1, 2, 3, \ldots$$ Números naturales (cardinales)

↑ Puntos suspensivos

Los tres puntos (*suspensivos*) indican que los números continúan indefinidamente en el patrón establecido. La regla más probable para continuar este patrón es "sumar 1 al número anterior"; desde luego, esta es la regla que seguimos.

Ahora considere la siguiente lista de números naturales:

$$2, 9, 16, 23, 30.$$

¿Cuál es el número que sigue en esta lista? ¿Cuál es el patrón? Después de analizar los números, vemos que $2+7=9$, y $9+7=16$. ¿Sumamos 16 y 7 para obtener 23? ¿Sumamos



Figura 1

23 y 7 para obtener 30? Sí. Parece que cualquier número en la lista se obtiene sumando 7 al número precedente, de modo que el siguiente número de la lista sería $30 + 7 = 37$.

Para encontrar el "siguiente número" realizamos un razonamiento a partir de la observación de los números de la lista. Pudimos haber pasado de estas observaciones al enunciado general de que cualquier número en la lista es 7 más el número precedente. Este es un ejemplo de *razonamiento inductivo*.

Usando razonamiento inductivo concluimos que 37 era el número siguiente. Suponga que la persona que está haciendo la lista tiene otra respuesta en mente. La lista de números

$$2, 9, 16, 23, 30$$

en realidad representa las fechas de los lunes de junio si el 1 de junio cae en domingo. El siguiente lunes después del 30 de junio es el 7 de julio. Con este patrón, la lista continúa como

$$2, 9, 16, 23, 30, 7, 14, 21, 28, \ldots$$

Vea el calendario de la **figura 1**. La respuesta correcta sería entonces 7. El proceso usado para obtener la regla "sumar 7" en la lista anterior revela una falla importante del razonamiento inductivo. ***Nunca podemos estar seguros de que la verdad en un caso específico será verdad en lo general. El razonamiento inductivo no garantiza un resultado verdadero, pero ofrece los medios para hacer una conjetura.***

Revisaremos ahora la notación básica. A lo largo del libro, usaremos *exponentes* para representar la multiplicación repetida.

$$\underset{\text{Base}}{4}\overset{\text{Exponente}}{\uparrow}{}^{3} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$ El 4 se usa como factor tres veces.

Expresión exponencial

Si a es un número y n es un número natural $(1, 2, 3, \ldots)$, entonces la expresión exponencial a^n se define como sigue.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}$$

El número a es la **base** y el número n es el **exponente**.

En el razonamiento deductivo usamos enunciados generales y los aplicamos a situaciones específicas. Por ejemplo, considere el **teorema de Pitágoras**:

> *En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos (los lados más cortos) es igual al cuadrado de la hipotenusa (el lado más largo).*

De modo que, si sabemos que las longitudes de los lados más cortos son de 3 y 4 pulgadas, podemos calcular la longitud del lado más largo, representada por h.

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= h^2 && \text{Teorema de Pitágoras} \\ 9 + 16 &= h^2 && 3^2 = 3 \cdot 3 = 9;\ 4^2 = 4 \cdot 4 = 16 \\ 25 &= h^2 && \text{Se suma.} \\ 5 &= h && \text{La raíz cuadrada positiva de 25 es 5.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el lado más largo mide 5 pulgadas. Usamos la regla general (el teorema de Pitágoras) y la aplicamos a una situación específica.

El razonamiento de un problema normalmente requiere algunas *premisas*. Una **premisa** puede ser un supuesto, una ley, una regla, una idea ampliamente aceptada o una observación. Luego se razona deductiva o inductivamente a partir de las premisas para obtener una **conclusión**. Las premisas y la conclusión integran un **argumento lógico**.

EJEMPLO 1 Identificación de premisas y conclusiones

Identifique cada premisa y la conclusión de cada uno de los siguientes argumentos. Luego indique si cada argumento es un ejemplo de razonamiento inductivo o deductivo.

a) Nuestra casa está hecha de adobe. Mis vecinos a ambos lados tienen casas de adobe. Por lo tanto, todas las casas del rumbo están hechas de adobe.

b) Todos los teclados tienen el símbolo @. Yo tengo un teclado. Yo puedo teclear el símbolo @.

c) Hoy es martes. Mañana será miércoles.

SOLUCIÓN

a) Las premisas son "nuestra casa está hecha de adobe" y "mis vecinos a ambos lados tienen casas de adobe". La conclusión es: "por lo tanto, todas las casas del rumbo están hechas de adobe". Como el razonamiento va de los ejemplos específicos al enunciado general, el argumento es un ejemplo de razonamiento inductivo (no obstante, podría tener una conclusión falsa).

b) Aquí, las premisas son "todos los teclados tienen el símbolo @" y "yo tengo un teclado". La conclusión es "yo puedo teclear el símbolo @". Este razonamiento va de lo general a lo específico, de modo que se usa un razonamiento deductivo.

c) Aquí solo hay una premisa: "Hoy es martes". La conclusión es "mañana será miércoles". Se considera el hecho de que el miércoles sigue inmediatamente al martes, aun cuando este hecho no se establece de manera explícita. Como la conclusión surge de hechos generales que se aplican a este caso especial, se usó el razonamiento deductivo. ■■■

El ejemplo anterior del calendario muestra cómo el razonamiento inductivo, en ocasiones, conduce a conclusiones falsas. Sin embargo, en la mayoría de los casos, el razonamiento inductivo permite obtener resultados correctos si buscamos la respuesta más *probable*.

EJEMPLO 2 Predicción del siguiente número en una secuencia

Use el razonamiento inductivo para determinar el siguiente número *probable* en cada una de las siguientes listas.

a) 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29 ***b)*** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ***c)*** 2, 4, 8, 16, 32

SOLUCIÓN

a) Cada número de la lista se obtiene sumando 4 al número anterior. El siguiente número probable es $29 + 4 = 33$. (Este es un ejemplo de una *secuencia aritmética*).

b) Iniciando con el tercer número de la lista, el 2, cada número se obtiene sumando los dos números anteriores de la lista. Es decir,

$$1 + 1 = 2, \qquad 1 + 2 = 3, \qquad 2 + 3 = 5,$$

y así sucesivamente. El siguiente número probable en la lista es $13 + 21 = 34$. (Estos son los términos iniciales de la famosa *secuencia de Fibonacci*).

c) Aquí parece que para obtener cada número después del primero, debemos duplicar el número anterior. Por lo tanto, el número siguiente más probable es $32 \times 2 = 64$. (Este es un ejemplo de *secuencia geométrica*). ■■■



En la película de 2003 *A Wrinkle in Time*, el joven Charles Wallace, interpretado por David Dorfman, enfrenta el desafío de identificar una secuencia específica de números. Él la identifica correctamente como la **secuencia de Fibonacci**.

El razonamiento inductivo se usa con frecuencia de manera similar para predecir la respuesta en una lista de ejercicios de cálculo, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Predicción del producto de dos números

Considere la siguiente lista de ecuaciones. Prediga la multiplicación y el producto que sigue en la lista.

$$37 \times 3 = 111$$
$$37 \times 6 = 222$$
$$37 \times 9 = 333$$
$$37 \times 12 = 444$$

SOLUCIÓN

El lado izquierdo de cada ecuación tiene dos factores, el primero es 37 y el segundo un múltiplo de 3, iniciando con 3. Cada producto (respuesta) está integrado por tres dígitos, todos iguales, iniciando con 111 para 37×3. Por lo tanto, la siguiente multiplicación sería:

$37 \times 15 = 555$ lo cual, por supuesto, es verdadero. ■■■

Tabla 1

Número de puntos	Número de regiones
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

Riesgos del razonamiento inductivo

Existen riesgos asociados al razonamiento inductivo. Un ejemplo clásico implica el número máximo de regiones que se forman cuando se dibujan cuerdas en un círculo. Una *cuerda* se forma cuando se unen dos puntos de una circunferencia mediante una línea.

Ubique un punto sobre una circunferencia. Como no se ha formado una cuerda, se crea una sola región interior. Véase la **figura 2a)**. Ubique dos puntos y trace una cuerda. Se forman dos regiones interiores, como se observa en la **figura 2b)**. Continúe este patrón. Ubique tres puntos y dibuje todas las cuerdas posibles. Se forman cuatro regiones interiores, como se muestra en la **figura 2c)**. Cuatro puntos producen 8 regiones, y cinco puntos 16 regiones. Véase las **figuras 2d) y 2e)**.

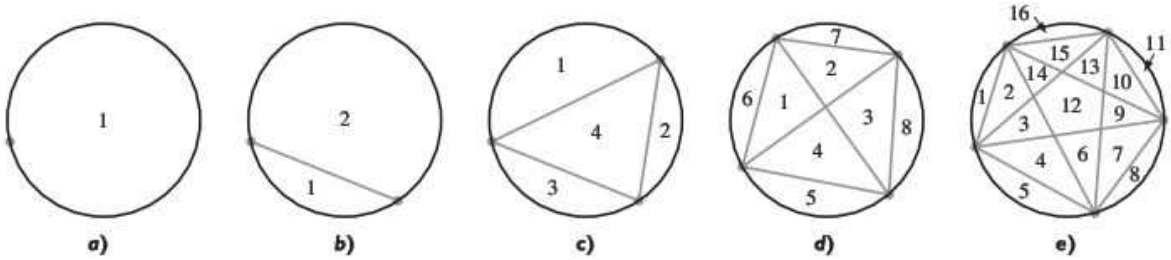


Figura 2

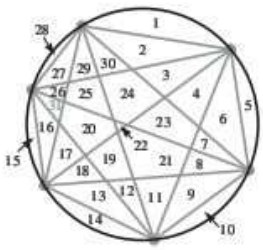


Figura 3

Los resultados de las observaciones anteriores se resumen en la **tabla 1** del margen. El patrón formado en la columna "Número de regiones" es el mismo que observamos en el **ejemplo 2c)**, donde se predijo que el número siguiente sería 64. Aquí parece que para cada punto adicional sobre la circunferencia, el número de regiones se duplica. Una conjetura inductiva razonable sería que para seis puntos, se formarían 32 regiones. Sin embargo, como indica la **figura 3**, existen *solo 31 regiones*. El patrón de duplicación termina cuando se considera un sexto punto. Al agregar un séptimo punto se producirían 57 regiones. Los números que se obtienen aquí son:

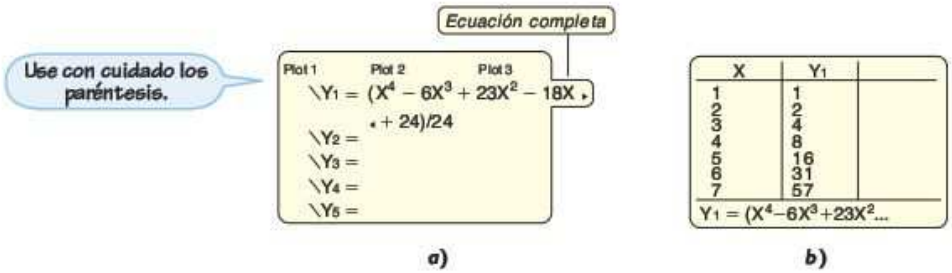
$$1, 2, 4, 8, 16, 31, 57.$$

Para n puntos sobre el círculo, el número de regiones está dado por la fórmula:

$$\frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}.$$ *

*Para mayor información sobre este y otros patrones similares, consulte "Counting Pizza Pieces and Other Combinatorial Problems", de Eugene Maier, en *Mathematics Teacher*, enero de 1988, pp. 22-26.

Se puede usar una calculadora graficadora para construir una tabla de valores que indique el número de regiones para diversos números de puntos. Usando X en lugar de n, podemos definir Y_1 mediante la expresión de la página anterior [véase la **figura 4*a***]. Luego, creando la tabla de valores, como en la **figura 4*b***), se verá cuántas regiones existen (indicadas por Y_1) para el número de puntos propuestos (X).



a) *b)*

Figura 4

Para reflexionar

Anécdota de razonamiento inductivo

La siguiente anécdota acerca del razonamiento inductivo se encuentra en el primer volumen de la serie *In Mathematical Circles*, de Howard Eves.



Un científico tenía dos frascos grandes frente a él sobre la mesa del laboratorio. El frasco de la izquierda contenía 100 pulgas; el frasco de la derecha estaba vacío. El científico sacó con cuidado una pulga del frasco de la izquierda, la colocó sobre la mesa en medio de los dos frascos, dio un paso hacia atrás, y con voz fuerte dijo: "Salta". La pulga saltó y luego la colocó en el frasco de la derecha. El científico sacó cuidadosamente una segunda pulga del frasco de la izquierda y la colocó sobre la mesa entre los dos frascos. De nuevo, dio un paso hacia atrás y con voz fuerte dijo: "Salta". La pulga saltó y fue colocada en el frasco de la derecha. El científico trató del mismo modo a cada una de las 100 pulgas del frasco de la izquierda, y cada pulga saltó como se le ordenó.

Luego, los dos frascos se intercambiaron y el experimento continuó con una pequeña diferencia. Esta vez el científico levantó cuidadosamente una pulga del frasco de la izquierda, le arrancó las patas traseras, colocó la pulga sobre la mesa entre los frascos, dio un paso hacia atrás, y dijo con voz fuerte: "Salta". La pulga no saltó y fue colocada en el frasco de la derecha. El científico sacó una segunda pulga del frasco de la izquierda, le arrancó las patas traseras y luego la colocó sobre la mesa entre los dos frascos. Nuevamente, el científico dio un paso atrás y dijo con voz fuerte: "Salta". La pulga no saltó y fue colocada en el frasco de la derecha. El científico hizo lo mismo con las 100 pulgas del frasco de la izquierda y en ningún caso las pulgas saltaron cuando se les ordenó. El científico apuntó la siguiente inducción:

"Cuando se arrancan las patas traseras a una pulga, se vuelve sorda".

Para investigación individual o en grupo

Comente o investigue ejemplos de publicidad que llevan a los consumidores a obtener conclusiones incorrectas.

1.1 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 12, determine si el razonamiento es un ejemplo de razonamiento inductivo o deductivo.

1. Si el mecánico dice que tardará siete días en reparar el automóvil de usted, entonces en realidad tardará 10 días. El mecánico dice: "Calculo que tardaré una semana en arreglarlo". Entonces usted espera que esté listo en 10 días a partir de ahora.

2. Si usted toma sus vitaminas se sentirá mucho mejor. Usted toma sus vitaminas. Por lo tanto, se sentirá mucho mejor.

3. Ha llovido todos los días durante los últimos seis días y también está lloviendo ahora. Entonces también lloverá mañana.

4. Los primeros tres hijos de Carrie fueron varones. Si tiene otro bebé será varón.

5. Finley tiene 85 tarjetas coleccionables de béisbol. Su mamá le regaló 20 más en su cumpleaños. Por lo tanto, ahora tiene 105 tarjetas.

6. Si se resta el mismo número de ambos lados de una ecuación verdadera, la nueva ecuación también es verdadera. Yo sé que $9 + 18 = 27$. Por lo tanto, $(9 + 18) - 13 = 27 - 13$.

7. Si lo construye, ellos vendrán. Usted lo construye. Por lo tanto, ellos vendrán.

8. Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto, Sócrates es mortal.

9. Es un hecho que todos los estudiantes que asistieron a Delgado University fueron aceptados en el posgrado. Como estudio en Delgado, puedo esperar que me acepten en el posgrado.

10. En los últimos 97 años ha florecido una planta exótica en Columbia cada verano, alternando flores amarillas con flores verdes. En el último verano las plantas dieron flores verdes, de modo que en este verano habrá flores amarillas.

11. En la secuencia 5, 10, 15, 20, 25,..., el siguiente número más probable es 30.

12. Los últimos cuatro discos sencillos de Lady Gaga han llegado a la lista de los 10 mayores éxitos musicales, entonces su disco actual también entrará a la lista.



13. Analice las diferencias entre los razonamientos inductivo y deductivo. Dé un ejemplo de cada uno.

14. Mencione un ejemplo de un razonamiento inductivo incorrecto.

Determine el siguiente término más probable en cada una de las listas de números.

15. 6, 9, 12, 15, 18

16. 13, 18, 23, 28, 33

17. 3, 12, 48, 192, 768

18. 32, 16, 8, 4, 2

19. 3, 6, 9, 15, 24, 39

20. $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}$

21. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}$

22. 1, 4, 9, 16, 25

23. 1, 8, 27, 64, 125

24. 2, 6, 12, 20, 30, 42

25. 4, 7, 12, 19, 28, 39

26. $-1, 2, -3, 4, -5, 6$

27. 5, 3, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5

28. 8, 2, 8, 2, 2, 8, 2, 2, 2, 8, 2, 2, 2, 2, 8, 2, 2, 2, 2

29. Elabore una lista de números similar a la del **ejercicio 15** de modo que el siguiente número más probable en la lista sea 60.

30. Elabore una lista de números similar a la del **ejercicio 26** de modo que el siguiente número más probable en la lista sea 9.

Use la siguiente lista de ecuaciones y razonamiento inductivo para predecir la siguiente ecuación, y luego verifique su conjetura.

31.
$$(9 \times 9) + 7 = 88$$
$$(98 \times 9) + 6 = 888$$
$$(987 \times 9) + 5 = 8888$$
$$(9876 \times 9) + 4 = 88{,}888$$

32.
$$(1 \times 9) + 2 = 11$$
$$(12 \times 9) + 3 = 111$$
$$(123 \times 9) + 4 = 1111$$
$$(1234 \times 9) + 5 = 11{,}111$$

33.
$$3367 \times 3 = 10{,}101$$
$$3367 \times 6 = 20{,}202$$
$$3367 \times 9 = 30{,}303$$
$$3367 \times 12 = 40{,}404$$

34.
$$15873 \times 7 = 111{,}111$$
$$15873 \times 14 = 222{,}222$$
$$15873 \times 21 = 333{,}333$$
$$15873 \times 28 = 444{,}444$$

35.
$$34 \times 34 = 1156$$
$$334 \times 334 = 111{,}556$$
$$3334 \times 3334 = 11{,}115{,}556$$

36.
$$11 \times 11 = 121$$
$$111 \times 111 = 12{,}321$$
$$1111 \times 1111 = 1{,}234{,}321$$

37.
$$3 = \frac{3(2)}{2}$$
$$3 + 6 = \frac{6(3)}{2}$$
$$3 + 6 + 9 = \frac{9(4)}{2}$$
$$3 + 6 + 9 + 12 = \frac{12(5)}{2}$$

38.
$$2 = 4 - 2$$
$$2 + 4 = 8 - 2$$
$$2 + 4 + 8 = 16 - 2$$
$$2 + 4 + 8 + 16 = 32 - 2$$

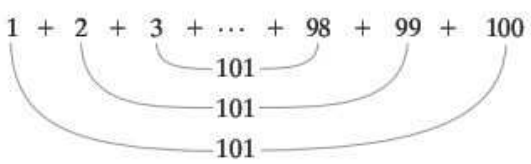
39.
$$5(6) = 6(6 - 1)$$
$$5(6) + 5(36) = 6(36 - 1)$$
$$5(6) + 5(36) + 5(216) = 6(216 - 1)$$
$$5(6) + 5(36) + 5(216) + 5(1296) = 6(1296 - 1)$$

40.
$$3 = \frac{3(3-1)}{2}$$
$$3+9 = \frac{3(9-1)}{2}$$
$$3+9+27 = \frac{3(27-1)}{2}$$
$$3+9+27+81 = \frac{3(81-1)}{2}$$

41.
$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$$

42.
$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Con frecuencia se cuenta la siguiente historia del gran matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Cuando era muy joven, su maestro pidió a sus alumnos que calcularan la suma de los primeros 100 *números naturales. Mientras sus compañeros de clase trabajaban arduamente en el problema, Carl simplemente escribió un solo número y entregó el resultado a su maestro. Su respuesta era correcta. Cuando le preguntó cómo lo hizo, el joven Carl le dijo que observó que había* 50 *pares de números que sumaban* 101 *(véase el siguiente diagrama). De modo que la suma de todos los números es* $50 \times 101 = 5050$.



50 sumas de $101 = 50 \times 101 = 5050$

Use el método de Gauss para calcular cada suma.

43. $1 + 2 + 3 + \cdots + 200$ **44.** $1 + 2 + 3 + \cdots + 400$

45. $1 + 2 + 3 + \cdots + 800$ **46.** $1 + 2 + 3 + \cdots + 2000$

47. Modifique el procedimiento de Gauss para calcular la suma $1+2+3+\cdots+175$.

48. Explique con sus propias palabras cómo se puede modificar el procedimiento de Gauss para calcular la suma $1+2+3+\cdots+n$, donde n es un número natural impar. (Cuando un número natural impar se divide entre 2, se obtiene un residuo igual a 1).

49. Modifique el procedimiento de Gauss para calcular la suma $2+4+6+\cdots+100$.

50. Use el resultado del **ejercicio 49** para calcular la suma $4+8+12+\cdots+200$.

51. ¿Cuál es el siguiente número más probable de esta lista?

12, 1, 1, 1, 2, 1, 3

(*Sugerencia:* Piense en los repiques de un reloj).

52. ¿Cuál es el siguiente término de esta lista?

O, T, T, F, F, S, S, E, N, T

(*Sugerencia:* Piense en palabras y su relación con los números).

53. ***a)*** Seleccione un número de tres dígitos, con todos los dígitos diferentes. Ahora invierta los dígitos para obtener otro número, y reste el más pequeño del más grande. Escriba el resultado. Seleccione otro número de tres dígitos y repita el proceso. Haga esto tantas veces hasta que descubra el patrón en los diferentes resultados que obtenga. (*Sugerencia:* ¿Cuál es el dígito de en medio? ¿Cuál es la suma del primer dígito y el último?).

b) Escriba una explicación del patrón.

54. Seleccione un número y siga estos pasos:

a) Multiplique por 2.
b) Sume 6.
c) Divida entre 2.
d) Reste el número con el que inició.
e) Escriba el resultado.

Repita el proceso, solo que ahora, en el **paso *b)***, sume 8. Escriba el resultado final. Repita el proceso una vez más, pero ahora sume 10 en el **paso *b)***. Escriba el resultado final.

f) Observe lo que hizo. Luego use razonamiento inductivo para explicar cómo predecir el resultado final.

55. Complete lo siguiente.

$142{,}857 \times 1 =$ _____
$142{,}857 \times 2 =$ _____
$142{,}857 \times 3 =$ _____
$142{,}857 \times 4 =$ _____
$142{,}857 \times 5 =$ _____
$142{,}857 \times 6 =$ _____

¿Qué patrón existe en las respuestas sucesivas? Ahora multiplique 142,857 por 7 para obtener un resultado interesante.

56. Observe las **figuras 2*b)*, *c)*, *d)*** y ***e)***, y la **figura 3**. En vez de contar las regiones interiores del círculo, cuente las cuerdas formadas. Use razonamiento inductivo para predecir el número de cuerdas que se formarían si se usaran siete puntos.

1.2 UNA APLICACIÓN DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO: PATRONES NUMÉRICOS

Secuencias numéricas • Diferencias sucesivas • Patrones numéricos y fórmulas de sumas • Números figurados

Secuencias numéricas

Una lista de números ordenados como

$$3, 9, 15, 21, 27, \ldots$$

se llama *secuencia*. Una **secuencia numérica** es una lista de números que tiene un primer número, un segundo número, un tercer número, y así sucesivamente, llamados **términos** de la secuencia.

La secuencia que inicia con

$$5, 9, 13, 17, 21, \ldots$$

es una *secuencia aritmética* o *progresión aritmética*. En una **secuencia aritmética**, cada término después del primero se obtiene sumando el mismo número, llamado la **diferencia común**. Para calcular la diferencia común, se elige cualquier número después del primero y se le resta el término anterior. Si elegimos $9 - 5$ (el segundo término menos el primero), por ejemplo, vemos que la diferencia común es 4. Para obtener el término que sigue al 21, le sumamos 4 para obtener $21 + 4 = 25$.

De manera similar, la secuencia que inicia con

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

es una *secuencia geométrica* o *progresión geométrica*. En una **secuencia geométrica**, cada término después del primero se obtiene multiplicando por el mismo número, llamado **razón común**. Para calcular la razón común, se elige un término después del primero y se divide entre el término anterior. Si elegimos $\frac{4}{2}$ (el segundo término dividido entre el primero), por ejemplo, vemos que la razón común es 2. Para calcular el término que sigue al 32, lo multiplicamos por 2 para obtener $32 \cdot 2 = 64$.

EJEMPLO 1 Identificación de secuencias aritméticas y geométricas

En cada secuencia, determine si se trata de una *secuencia aritmética* o de una *secuencia geométrica*. Ya sea aritmética o geométrica, dé el siguiente término de la secuencia.

a) $5, 10, 15, 20, 25, \ldots$ ***b)*** $3, 12, 48, 192, 768, \ldots$ ***c)*** $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

SOLUCIÓN

a) Si seleccionamos *cualquier* término después del primero y le restamos el término anterior, obtenemos la diferencia común de 5.

$$10 - 5 = 5 \quad 15 - 10 = 5 \quad 20 - 15 = 5 \quad 25 - 20 = 5$$

Por lo tanto, esta es una secuencia aritmética. El siguiente término en la secuencia es:

$$25 + 5 = 30.$$

b) Si cualquier término después del primero se multiplica por 4, se obtiene el término siguiente.

$$\frac{12}{3} = 4 \quad \frac{48}{12} = 4 \quad \frac{192}{48} = 4 \quad \frac{768}{192} = 4$$

Por lo tanto, esta es una secuencia geométrica. El siguiente término de la secuencia es:

$$768 \cdot 4 = 3072.$$

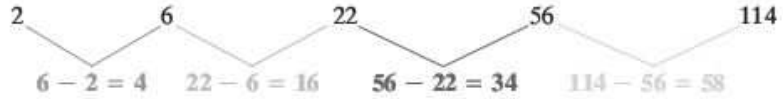
c) Mientras que aquí existe un patrón (los términos son los cuadrados de los primeros cinco números naturales), no existe una diferencia común ni una razón común. (Verifíquelo). Esta no es una secuencia aritmética ni una secuencia geométrica.

Diferencias sucesivas

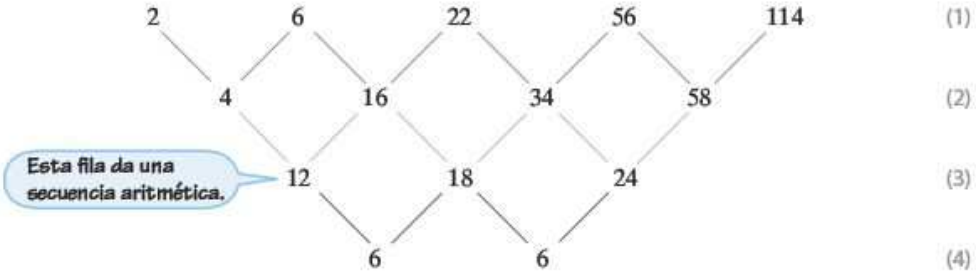
Algunas secuencias presentan mayor dificultad para hacer una conjetura acerca del término que sigue. Con frecuencia se debe aplicar el **método de diferencias sucesivas** en estos casos. Considere la secuencia

$$2, 6, 22, 56, 114, \ldots$$

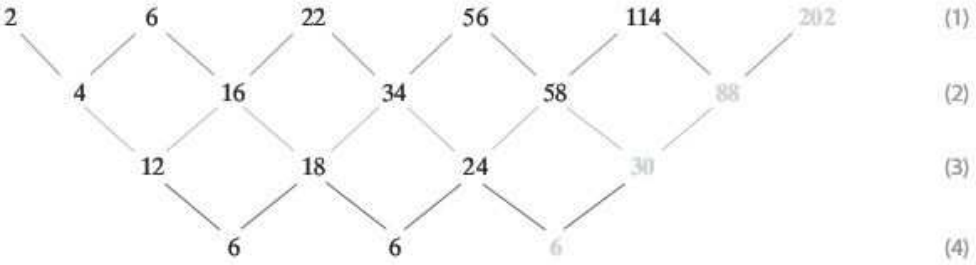
Como no es evidente cuál es el término que sigue, se resta el primer término del segundo, el segundo del tercero, el tercero del cuarto, y así sucesivamente.



Ahora se repite el proceso con la secuencia 4, 16, 34, 58 y se continúa así hasta que la diferencia sea un valor constante, como muestra la línea 4.



Una vez que se obtiene una línea con valores constantes, simplemente se trabaja "hacia atrás" sumando hasta que se obtiene el número deseado de la secuencia específica. Así, para continuar con este patrón, debería aparecer otro 6 en la línea (4), lo cual significa que el término siguiente en la línea (3) tendría que ser $24 + 6 = 30$. El siguiente término en la línea (2) sería $58 + 30 = 88$. Finalmente, el término que sigue en la secuencia sería $114 + 88 = 202$.



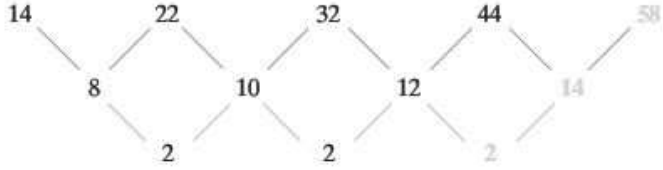
EJEMPLO 2 Uso de diferencias sucesivas

Determine el número que sigue en cada secuencia.

a) 14, 22, 32, 44, . . . ***b)*** 5, 15, 37, 77, 141, . . .

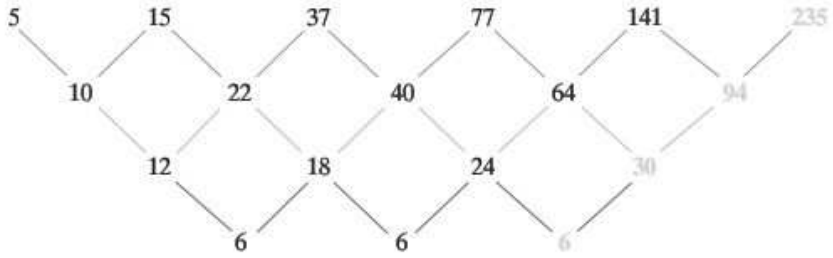
SOLUCIÓN

a) Use el método de diferencias sucesivas para obtener lo siguiente.



Una vez que se obtiene y extiende la fila de los 2, podemos obtener $12 + 2 = 14$, y $44 + 14 = 58$, como se mostró antes. El número que sigue en la secuencia es 58.

b) Procediendo como antes, se obtiene el siguiente diagrama.



Los números en la "diagonal" del extremo derecho se obtuvieron sumando: $24+6=30$, $64+30=94$, y $141+94=235$. El número que sigue en la secuencia es 235. ■■■

El método de las diferencias sucesivas no siempre funciona. Por ejemplo, inténtelo con la secuencia de Fibonacci del **ejemplo 2 *b)*** de la **sección 1.1** y vea qué sucede.

Patrones numéricos y fórmulas de sumas

Las matemáticas tienen aparentemente una variedad infinita de patrones numéricos. Observe el siguiente patrón.

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1+3 &= 2^2 \\ 1+3+5 &= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 5^2 \end{aligned}$$

En cada caso, el lado izquierdo de la ecuación es la suma indicada de números naturales impares o nones consecutivos comenzando por el 1, y el lado derecho de la ecuación es el cuadrado del número de términos en el lado izquierdo. El razonamiento inductivo sugeriría que la siguiente línea de este patrón es:

$$1+3+5+7+9+11=6^2.$$

Al evaluar cada lado se observa que cada uno es igual a 36.

No podemos concluir que este patrón continuará indefinidamente, porque la observación de un número finito de ejemplos *no* garantiza que el patrón continuará. Sin embargo, usando un método de prueba llamado **inducción matemática**, los matemáticos han probado que este patrón, de hecho, continúa indefinidamente. (Consulte cualquier texto de álgebra universitaria).

Cualquier número natural par se puede escribir como $2k$, donde k es un número natural. De aquí se deduce que el *k-ésimo* número natural impar se escribe como $2k-1$. Por ejemplo, el tercer número natural impar, el 5, se puede escribir como

$$2(3)-1.$$

Con base en estas ideas, podemos escribir el resultado obtenido anteriormente como sigue:

Suma de los primeros *n* números naturales impares

Si n es cualquier número natural, entonces lo siguiente es verdadero.

$$\mathbf{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$$

EJEMPLO 3 Predicción de la ecuación que sigue en una lista

A continuación se presentan varias ecuaciones que ilustran posibles patrones numéricos. Determine cuál sería la siguiente ecuación, y verifique que se trata de un enunciado verdadero.

a)
$$1^2 = 1^3$$
$$(1 + 2)^2 = 1^3 + 2^3$$
$$(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$
$$(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$$

b)
$$1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$$

c)
$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$
$$1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$$
$$1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

d)
$$12{,}345{,}679 \times 9 = 111{,}111{,}111$$
$$12{,}345{,}679 \times 18 = 222{,}222{,}222$$
$$12{,}345{,}679 \times 27 = 333{,}333{,}333$$
$$12{,}345{,}679 \times 36 = 444{,}444{,}444$$

SOLUCIÓN

a) El lado izquierdo de todas las ecuaciones es el cuadrado de la suma de los primeros n números naturales, mientras que el lado derecho es la suma de sus cubos. La siguiente ecuación en el patrón sería:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3.$$

Cada lado da como resultado 225, de modo que el patrón es verdadero para esta ecuación.

b) El lado izquierdo de las ecuaciones contiene la suma de números naturales impares, iniciando con el primero (1) en la primera ecuación, el segundo y tercero (3 y 5) en la segunda ecuación, el cuarto, quinto y sexto (7, 9 y 11) en la tercera ecuación, y así sucesivamente. El lado derecho contiene el cubo (tercera potencia) del número de términos del lado izquierdo en cada caso. De acuerdo con este patrón, la siguiente ecuación sería

$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 5^3,$$

que se puede verificar haciendo el cálculo.

c) El lado izquierdo de cada ecuación tiene la suma indicada de los primeros n números naturales, y el lado derecho es de la forma:

$$\frac{n(n + 1)}{2}.$$

Para que el patrón continúe, la siguiente ecuación sería:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2}.$$

Como cada lado es igual a 15, el patrón para esta ecuación es verdadero.

d) En todos los casos, el primer factor de la izquierda es 12,345,679 y el segundo factor es un múltiplo de 9 (es decir, 9, 18, 27, 36). El lado derecho es un número de nueve dígitos iguales (es decir, 1, 2, 3, 4). Para que el patrón continúe, la ecuación siguiente debe ser:

$$12{,}345{,}679 \times 45 = 555{,}555{,}555.$$

Verifique que este sea un enunciado verdadero. ■■■

Los patrones de los **ejemplos 3*a*) y 3*c*)** se pueden escribir como se indica a continuación.

Fórmulas especiales de sumas

Para cualquier número natural n, lo siguiente es verdadero.

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

y

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Se puede dar un argumento deductivo general que indique cómo se obtiene la segunda ecuación.

Hagamos que S represente la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Esta suma también se puede escribir como $S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$. Se escriben estas dos ecuaciones como sigue.

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ S = & n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\ \hline 2S = & (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \end{array}$$

Se suman los lados correspondientes.

$2S = n(n+1)$ Existen n términos de $n+1$.

$S = \dfrac{n(n+1)}{2}$ Se dividen ambos lados entre 2.

Números figurados



En la película animada de 1959 de Disney, *Donald in Mathmagic Land* (*Donald en el país de las matemáticas*), el pato Donald viaja hacia atrás en el tiempo para visitar al matemático griego **Pitágoras** (alrededor de 540 a. C.), quien junto con sus amigos formó la hermandad pitagórica. La hermandad dedicaba su tiempo al estudio de las matemáticas y la música. © Disney Enterprises, Inc.

Pitágoras y su hermandad pitagórica estudiaban números relacionados con arreglos geométricos de puntos, como los **números triangulares, números cuadrados** y **números pentagonales**. La **figura 5** ilustra algunos de los primeros números de estos tipos.

Los **números figurados** poseen muchos patrones interesantes. Todos los números cuadrados mayores que 1 son la suma de dos números consecutivos triangulares. (Por ejemplo, $9 = 3 + 6$, y $25 = 10 + 15$).

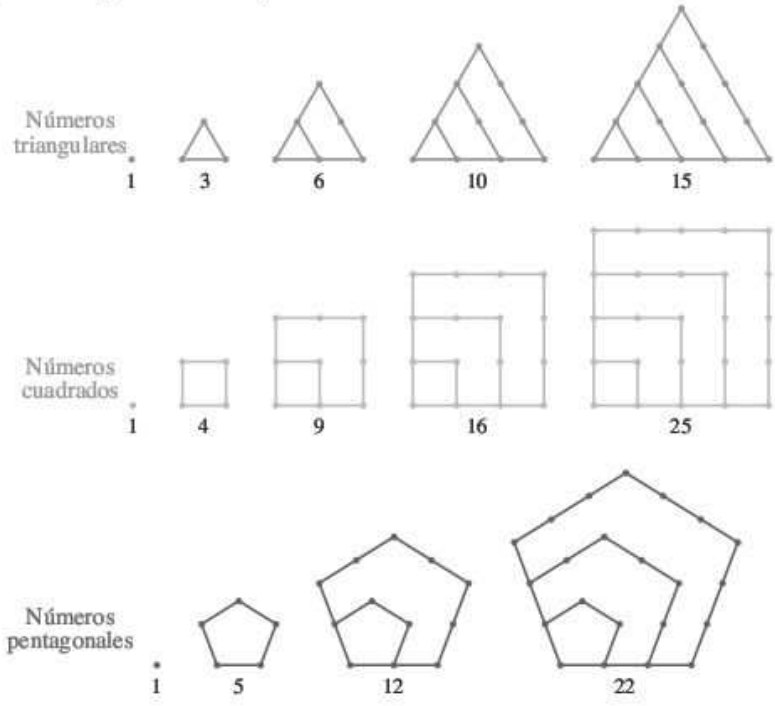


Figura 5

Cada número pentagonal se puede representar como la suma de un número cuadrado y un número triangular. (Por ejemplo, $5 = 4 + 1$ y $12 = 9 + 3$). Existen muchas más relaciones como estas.

En la expresión T_n, n se llama **subíndice**. T_n se lee como **"T subíndice n"**, y representa el número triangular en la n-ésima posición de la secuencia. Por ejemplo,

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 3, \quad T_3 = 6, \quad \text{y} \quad T_4 = 10.$$

S_n y P_n representan los n-ésimos números cuadrados y pentagonales, respectivamente.

Fórmulas para números triangulares, cuadrados y pentagonales

Para cualquier número natural n, lo siguiente es verdadero.

El n-ésimo número triangular está dado por $\mathbf{T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

El n-ésimo número cuadrado está dado por $\mathbf{S_n = n^2}$.

El n-ésimo número pentagonal está dado por $\mathbf{P_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}}$.

EJEMPLO 4 Uso de las fórmulas de números figurados

Use las fórmulas para calcular lo siguiente.

a) El séptimo número triangular.

b) El duodécimo número cuadrado.

c) El sexto número pentagonal.

SOLUCIÓN

a) $T_7 = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{7(7+1)}{2} = \dfrac{7(8)}{2} = \dfrac{56}{2} = 28$ Fórmula para un número triangular, $n = 7$

b) $S_{12} = n^2 = 12^2 = 144$ Fórmula para un número cuadrado, $n = 12$

$12^2 = 12 \cdot 12$

c) $P_6 = \dfrac{n(3n-1)}{2} = \dfrac{6[3(6)-1]}{2} = \dfrac{6(18-1)}{2} = \dfrac{6(17)}{2} = 51$

Dentro de los corchetes primero multiplique y luego reste.

EJEMPLO 5 Ilustración de la relación entre números figurados

Muestre que el sexto número pentagonal es igual a la suma de 6 más 3 veces el quinto número triangular.

SOLUCIÓN

A partir del **ejemplo 4*c)***, $P_6 = 51$. El quinto número triangular es 15. Por lo tanto,

$$51 = 6 + 3(15) = 6 + 45 = 51.$$

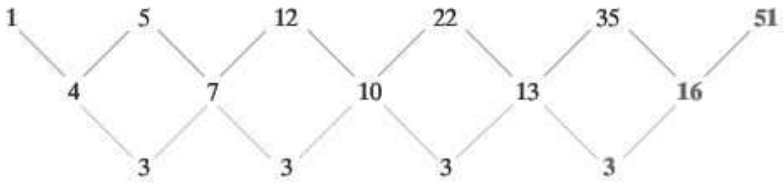
La relación general que se examina en el **ejemplo 5** se escribe como sigue.

$$P_n = n + 3 \cdot T_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

EJEMPLO 6 Predicción del valor de un número pentagonal

Los primeros 5 números pentagonales son 1, 5, 12, 22, 35. Use el método de diferencias sucesivas para predecir el sexto número pentagonal.

SOLUCIÓN



Después de obtener la segunda línea de diferencias sucesivas, trabajamos hacia atrás para encontrar que el sexto número pentagonal es 51, lo que coincide con el valor encontrado en el **ejemplo 4*c*)**.

Para reflexionar

Constantes de Kaprekar

Seleccione un número de tres dígitos diferentes. Clasifique los dígitos en orden decreciente para obtener otro número, y luego clasifíquelos en orden ascendente. Ahora réstelos. Repita el proceso con el resultado, usando un 0 en el caso de que la diferencia tenga solo dos dígitos. Por ejemplo, suponga que seleccionamos un número cuyos dígitos son 1, 4 y 8, de modo que en primera instancia obtenemos 841.

$$\begin{array}{rrr} 841 & 963 & 954 \\ -148 & -369 & -459 \\ \hline 693 & 594 & 495 \end{array}$$

Observe que obtuvimos el número 495, y la repetición del proceso nos dará nuevamente 495.

El número 495 se conoce como **constante de Kaprekar**. Siempre se obtendrá el número 495 si el proceso se aplica a este número de tres dígitos.

Para investigación individual o en grupo

1. Aplique el proceso de Kaprekar a un número con dos dígitos diferentes. (Interprete 9 como 09 si es necesario). Compare los resultados. ¿Qué parece ser verdad?
2. Repita el proceso para cuatro dígitos, comparando los resultados después de varios pasos. ¿Qué conjetura se puede hacer respecto de esta situación?

1.2 EJERCICIOS

En cada secuencia determine si se trata de una secuencia aritmética, *una secuencia* geométrica, *o* ninguna de las dos. *Si es aritmética o geométrica, indique cuál es el siguiente término de la secuencia.*

1. 6, 16, 26, 36, 46, . . .

2. 8, 16, 24, 32, 40, . . .

3. 5, 15, 45, 135, 405, . . .

4. 2, 12, 72, 432, 2592, . . .

5. 1, 8, 27, 81, 243, . . .

6. 2, 8, 18, 32, 50, . . .

7. 256, 128, 64, 32, 16, . . .

8. 4096, 1024, 256, 64, 16, . . .

9. 1, 3, 4, 7, 11, . . .

10. 0, 1, 1, 2, 3, . . .

11. 12, 14, 16, 18, 20, . . .

12. 10, 50, 90, 130, 170, . . .

Use el método de diferencias sucesivas para determinar el número que sigue en cada secuencia.

13. 1, 4, 11, 22, 37, 56, . . .

14. 3, 14, 31, 54, 83, 118, . . .

15. 6, 20, 50, 102, 182, 296, . . .

16. 1, 11, 35, 79, 149, 251, . . .

17. 0, 12, 72, 240, 600, 1260, 2352, . . .

18. 2, 57, 220, 575, 1230, 2317, . . .

19. 5, 34, 243, 1022, 3121, 7770, 16799, . . .

20. 3, 19, 165, 771, 2503, 6483, 14409, . . .

21. Observe las **figuras 2 y 3** de la **sección 1.1**. El método de diferencias sucesivas se puede aplicar a la secuencia de regiones interiores

$$1, 2, 4, 8, 16, 31,$$

para calcular el número de regiones determinadas por siete puntos sobre la circunferencia. ¿Cuál es el siguiente término en esta secuencia? ¿Cuántas regiones se determinarían con ochos puntos? Compruebe esto usando la fórmula que se presenta al final de dicha sección.

22. Suponga que la expresión $n^2 + 3n + 1$ determina el n-ésimo término de una secuencia. Es decir, para calcular el primer término, se considera $n = 1$. Para calcular el segundo término, se considera $n = 2$, y así sucesivamente.

a) Calcule los primeros cuatro términos de la secuencia.

b) Use el método de diferencias sucesivas para predecir el quinto término de la secuencia.

c) Calcule el quinto término considerando $n = 5$ en la expresión $n^2 + 3n + 1$. ¿Su resultado concuerda con el que calculó en el **inciso *b)***?

En los ejercicios 23 a 32 se presentan varias ecuaciones con un presunto patrón numérico. Determine cuál sería la siguiente ecuación y verifique que esta sea un enunciado realmente verdadero.

23. $(1 \times 9) - 1 = 8$
$(21 \times 9) - 1 = 188$
$(321 \times 9) - 1 = 2888$

24. $(1 \times 8) + 1 = 9$
$(12 \times 8) + 2 = 98$
$(123 \times 8) + 3 = 987$

25. $999{,}999 \times 2 = 1{,}999{,}998$
$999{,}999 \times 3 = 2{,}999{,}997$

26. $101 \times 101 = 10{,}201$
$10{,}101 \times 10{,}101 = 102{,}030{,}201$

27. $3^2 - 1^2 = 2^3$
$6^2 - 3^2 = 3^3$
$10^2 - 6^2 = 4^3$
$15^2 - 10^2 = 5^3$

28. $1 = 1^2$
$1 + 2 + 1 = 2^2$
$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$
$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$

29. $2^2 - 1^2 = 2 + 1$
$3^2 - 2^2 = 3 + 2$
$4^2 - 3^2 = 4 + 3$

30. $1^2 + 1 = 2^2 - 2$
$2^2 + 2 = 3^2 - 3$
$3^2 + 3 = 4^2 - 4$

31. $1 = 1 \times 1$
$1 + 5 = 2 \times 3$
$1 + 5 + 9 = 3 \times 5$

32. $1 + 2 = 3$
$4 + 5 + 6 = 7 + 8$
$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$

Use la fórmula $S = \frac{n(n+1)}{2}$ *para calcular cada suma.*

33. $1 + 2 + 3 + \cdots + 300$

34. $1 + 2 + 3 + \cdots + 500$

35. $1 + 2 + 3 + \cdots + 675$

36. $1 + 2 + 3 + \cdots + 825$

Use la fórmula $S = n^2$ *para calcular cada suma. (Sugerencia: Para calcular n, sume 1 al último término y divida entre 2).*

37. $1 + 3 + 5 + \cdots + 101$

38. $1 + 3 + 5 + \cdots + 49$

39. $1 + 3 + 5 + \cdots + 999$

40. $1 + 3 + 5 + \cdots + 301$

41. Use la fórmula para encontrar la suma

$$1+2+3+\cdots+n$$

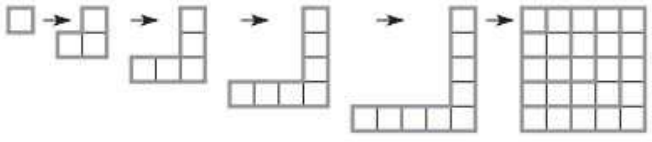
para obtener una fórmula que permita calcular la suma

$$2+4+6+\cdots+2n$$

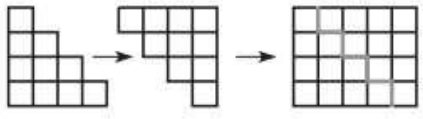
42. Comente con sus palabras la siguiente fórmula analizada en esta sección.

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

43. Explique cómo el siguiente diagrama ilustra geométricamente la fórmula $1+3+5+7+9=5^2$.



44. Explique cómo el siguiente diagrama ilustra geométricamente la fórmula $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \times 5}{2}$.



45. Use patrones para completar la tabla que se presenta a continuación.

Número figurado	1o.	2o.	3o.	4o.	5o.	6o.	7o.	8o.
Triangular	1	3	6	10	15	21		
Cuadrado	1	4	9	16	25			
Pentagonal	1	5	12	22				
Hexagonal	1	6	15					
Heptagonal	1	7						
Octagonal	1							

46. Los cinco primeros números triangulares, cuadrados y pentagonales se pueden obtener sumando los términos de las secuencias, como se muestra a continuación.

Triangular	Cuadrado	Pentagonal
$1 = 1$	$1 = 1$	$1 = 1$
$3 = 1 + 2$	$4 = 1 + 3$	$5 = 1 + 4$
$6 = 1 + 2 + 3$	$9 = 1 + 3 + 5$	$12 = 1 + 4 + 7$
$10 = 1 + 2 + 3 + 4$	$16 = 1 + 3 + 5 + 7$	$22 = 1 + 4 + 7 + 10$
$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$	$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$	$35 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$

Observe las diferencias sucesivas de los términos sumados en los lados derechos de las ecuaciones. El siguiente tipo de números figurados es el **hexagonal**. (Un hexágono tiene seis lados). Use los patrones anteriores para predecir los primeros cinco números hexagonales.

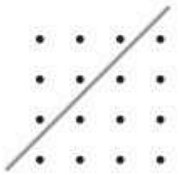
47. Ocho veces un número triangular cualquiera, más 1, es un número cuadrado. Muestre que esto es verdadero con los primeros cuatro números triangulares.

48. Divida el primer número triangular entre 3 y escriba el residuo. Divida el segundo número triangular entre 3 y escriba el residuo. Repita este procedimiento varias veces. ¿Nota algún patrón?

49. Repita el **ejercicio 48**, pero en lugar de usar números triangulares, utilice números cuadrados y divida entre 4. ¿Qué patrón se manifiesta?

50. Los **ejercicios 48 y 49** son casos específicos de lo siguiente. Cuando los números de una secuencia n-agonal se dividen entre n, la secuencia de residuos que se obtiene es una secuencia repetitiva. Verifique esto para $n = 5$ y $n = 6$.

51. Todos los números cuadrados se pueden escribir como la suma de dos números triangulares. Por ejemplo, $16 = 6 + 10$. Esto se representa geométricamente dividiendo un arreglo cuadrado de puntos con una línea como la mostrada.



La configuración triangular arriba de la línea representa un 6, la de abajo de la línea representa un 10, y el arreglo total representa 16. Muestre cómo los números cuadrados 25 y 36 pueden, asimismo, representarse geométricamente como la suma de dos números triangulares.

52. Una fracción está **reducida** si el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1. Por ejemplo, $\frac{3}{8}$ está reducida, pero $\frac{4}{12}$ no.

a) De $n = 2$ a $n = 8$, obtenga las fracciones

$$\frac{n\text{-ésimo número cuadrado}}{(n+1)\text{-ésimo número cuadrado}}.$$

b) Repita el **inciso *a)*** con números triangulares.

c) Use razonamiento inductivo para hacer una conjetura con base en los resultados de los **incisos *a)*** y ***b)***, observando si las fracciones se encuentran reducidas.

Además de las fórmulas para T_n, S_n y P_n, las siguientes fórmulas son ciertas para los números ***hexagonales*** (H), ***heptagonales*** (Hp) *y* ***octagonales*** (O):

$$\mathbf{H}_n = \frac{n(4n-2)}{2}, \quad \mathbf{Hp}_n = \frac{n(5n-3)}{2}, \quad \mathbf{O}_n = \frac{n(6n-4)}{2}.$$

Use estas fórmulas para calcular lo siguiente.

53. El decimosexto número cuadrado.

54. El undécimo número triangular.

55. El noveno número pentagonal.

56. El séptimo número hexagonal.

57. El décimo número heptagonal.

58. El duodécimo número octagonal.

59. Observe las fórmulas proporcionadas para H_n, Hp_n y O_n, y use patrones y razonamiento inductivo para predecir la fórmula de N_n, el n-ésimo número **nonagonal**. (Un nonágono tiene nueve lados). Luego considere el hecho de que el sexto número nonagonal es el 111, para ratificar su conjetura.

60. Use el resultado del **ejercicio 59** para obtener el décimo número nonagonal.

Use razonamiento inductivo para contestar cada pregunta.

61. Si se suman dos números triangulares consecutivos, ¿qué clase de número figurado se obtiene?

62. Si se suman los cuadrados de dos números triangulares consecutivos, ¿qué clase de número figurado se obtiene?

63. Eleve al cuadrado un número triangular. Eleve al cuadrado el siguiente número triangular. Reste el resultado más pequeño del resultado más grande. ¿Qué clase de número se obtiene?

64. Seleccione el valor de n mayor o igual que 2. Obtenga T_{n-1}, multiplíquelo por 3, y sume n. ¿Qué clase de número figurado se obtiene?

En una secuencia aritmética, el enésimo término a_n está dado por la fórmula

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

donde a_1 es el primer término y d es la diferencia común. De manera similar, en una secuencia geométrica, el n-ésimo término está dado por

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}.$$

Aquí, r es la razón común. Use estas fórmulas para determinar el término indicado en cada secuencia.

65. El undécimo término de $2, 6, 10, 14, \ldots$

66. El decimosexto término de $5, 15, 25, 35, \ldots$

67. El vigésimo primer término de $19, 39, 59, 79, \ldots$

68. El trigésimo sexto término de $8, 38, 68, 98, \ldots$

69. El centésimo primer término de $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

70. El centésimo quincuagésimo primer término de $0.75, 1.50, 2.25, 3.00, \ldots$

71. El undécimo término de $2, 4, 8, 16, \ldots$

72. El noveno término de $1, 4, 16, 64, \ldots$

73. El duodécimo término de $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$

74. El décimo término de $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

75. El octavo término de $40, 10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \ldots$

76. El noveno término de $10, 2, \frac{2}{5}, \frac{2}{25}, \ldots$

1.3 ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Método general para la solución de problemas • Uso de una tabla o un diagrama • Trabajar hacia atrás • Uso de ensayo y error • Suposición y verificación • Consideración de un problema similar más sencillo • Elaboración de un boceto • Uso del sentido común



George Polya, autor del clásico *How to solve it,* murió el 7 de septiembre de 1985 a la edad de 97 años. Nació en Budapest, Hungría. Una vez le preguntaron por qué había tantos buenos matemáticos húngaros al final del siglo. Especuló diciendo que era porque las matemáticas eran la ciencia más barata. No requieren un equipo costoso, solo lápiz y papel. Escribió o coescribió más de 250 documentos en muchos idiomas, escribió varios libros, y fue un conferencista y profesor brillante. Sin embargo, algo más interesante: nunca aprendió a conducir un automóvil.

Método general para la solución de problemas

En las primeras dos secciones de este capítulo destacamos la importancia de reconocer un patrón y el uso del razonamiento inductivo en la solución de problemas. Quizás el estudio más conocido de técnicas para la solución de problemas fue el que desarrolló George Polya (1888-1985), entre cuyas numerosas publicaciones se encuentra el clásico moderno *How to solve it.* En ese libro, Polya propuso un método de cuatro pasos para la solución de problemas.

Método de cuatro pasos de Polya para la solución de problemas

Paso 1 **Comprenda el problema.** Usted no puede resolver un problema si no entiende qué le pidieron calcular. Se debe leer y analizar el problema cuidadosamente. Tal vez sea necesario leerlo varias veces. Después de ello, pregúntese: "¿Qué debo calcular?".

Paso 2 **Elabore un plan.** Existen muchas maneras de enfrentar un problema. Elija un plan adecuado para el problema específico que está resolviendo.

Paso 3 **Aplique el plan.** Una vez que sabe cómo enfocar el problema, ponga en práctica ese plan. Tal vez llegue a "un callejón sin salida" y encuentre obstáculos imprevistos, pero debe ser persistente.

Paso 4 **Revise y verifique.** Revise su respuesta para ver que sea razonable. ¿Satisface las condiciones del problema? ¿Se han contestado todas las preguntas que plantea el problema? ¿Es posible resolver el problema de manera diferente y llegar a la misma respuesta?



Fibonacci (1170–1250) descubrió la secuencia que lleva su nombre en un problema de conejos. Fibonacci (hijo de Bonnaccio) es uno de varios nombres de Leonardo de Pisa. Su padre administraba un almacén en la actual Bougie (o Bejaia), en Argelia. Allí, Leonardo Pisano estudió con un maestro árabe y aprendió la numeración concebida en la India, que los árabes y otros musulmanes llevaron a Occidente.

Fibonacci escribió libros de álgebra, geometría y trigonometría.

El paso 2 del método para la solución de problemas de Polya aconseja elaborar un plan. Aquí se presentan algunas sugerencias y estrategias que han demostrado ser útiles.

SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Elabore una tabla o un diagrama.
Busque un patrón.
Resuelva un problema similar más sencillo.
Elabore un bosquejo.
Use el razonamiento inductivo.
Escriba una ecuación y resuélvala.
Si una fórmula se aplica, úsela.
Trabaje hacia atrás.
Suponga y verifique.
Use ensayo y error.
Use el sentido común.
Busque la "trampa" que se le tiende en el caso de que una respuesta parezca demasiado evidente o imposible.

Uso de una tabla o un diagrama

EJEMPLO 1 Solución del problema de los conejos de Fibonacci

Un hombre colocó una pareja de conejos en una jaula. Durante el primer mes los conejos no se reprodujeron, pero cada mes a partir de entonces tuvieron una nueva pareja de conejos. Si cada nueva pareja se reproducía de la misma manera, ¿cuántas parejas de conejos habría al cabo de un año? [Este problema es famoso en la historia de las matemáticas y apareció por primera vez en *Liber Abaci*, un libro del matemático italiano Leonardo Pisano (también conocido como Fibonacci) en el año 1202].

SOLUCIÓN

Paso 1 **Comprenda el problema.** Podemos formular de otra manera el problema:

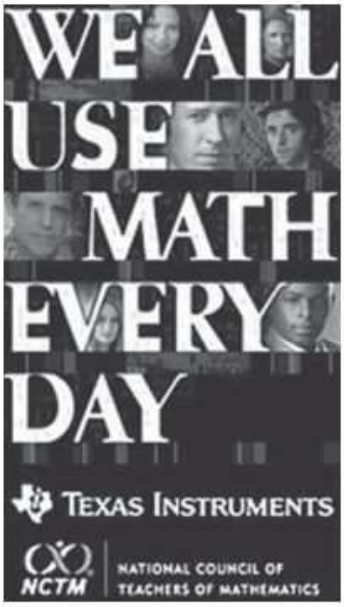
> *¿Cuántas parejas de conejos tendrá el hombre al final de un año si inicia con una pareja de conejos que se reproducen de esta manera: durante el primer mes de vida, la pareja no procrea, pero cada mes a partir de entonces cada pareja procrea un nuevo par?*

Paso 2 **Elabore un plan.** Puesto que existe un patrón definido de cómo se reproducen los conejos, podemos construir la **tabla 2**.

Tabla 2

Mes	Número de parejas al inicio	Número de nuevas parejas procreadas	Número de parejas al final del mes
1o.			
2o.			
3o.			
4o.			
5o.			
6o.			
7o.			
8o.			
9o.			
10o.			
11o.			
12o.			

La respuesta estará aquí.



El 23 de enero de 2005, la cadena de televisión CBS presentó el primer episodio de *NUMB3RS*, un programa enfocado en cómo se usan las matemáticas para resolver crímenes. David Krumholtz interpreta a Charlie Eppes, un matemático brillante que ayuda a un agente del FBI que es su hermano (Rob Morrow).

En el episodio "Sabotage" de la primera temporada (25/02/2005), uno de los agentes admite que "jamás vio cómo se relacionan las matemáticas con el mundo real", y Charlie usa la **secuencia de Fibonacci** y su relación con la naturaleza para demostrarle que estaba en un error.

La secuencia mostrada en la tabla del **ejemplo 1** es la secuencia de Fibonacci, mencionada en el **ejemplo 2 *b*)** de la **sección 1.1.**

Paso 3 **Aplique el plan.** Al inicio del primer mes, solo hay una pareja de conejos. No se reproducen durante el primer mes, de modo que hay $1+0=1$ pareja al final del primer mes. Este patrón continúa. En la tabla sumamos el número de la primera columna de números al número de la segunda columna para obtener el número de la tercera.

Mes	Número de parejas al inicio	+	Número de nuevas parejas procreadas	=	Número de parejas al final del mes	
1o.	1		0		1	1 + 0 = 1
2o.	1		1		2	1 + 1 = 2
3o.	2		1		3	2 + 1 = 3
4o.	3		2		5	•
5o.	5		3		8	•
6o.	8		5		13	•
7o.	13		8		21	•
8o.	21		13		34	•
9o.	34		21		55	•
10o.	55		34		89	•
11o.	89		55		144	•
12o.	144		89		233	144 + 89 = 233

La respuesta está en la última entrada

Habrá 233 parejas de conejos al final del año.

Paso 4 **Revise y verifique.** Regrese y asegúrese de que interpretó el problema correctamente. Verifique dos veces la aritmética. Se contestó la pregunta que planteaba el problema, de modo que este queda resuelto. ■■■

Trabajar hacia atrás

EJEMPLO 2 Cálculo de una apuesta en las carreras

Ronnie Virgets asiste cada semana a las carreras de autos con sus amigos. Una semana, Ronnie triplicó su dinero, pero luego perdió \$12.* Regresó con su dinero la siguiente semana, lo duplicó, y luego perdió \$40. La siguiente semana volvió a llevar su dinero y lo intentó nuevamente. En esta ocasión cuadruplicó su dinero, y luego jugó lo suficientemente bien para llevarse a su casa un total de \$224. ¿Con cuánto inició la primera semana?

SOLUCIÓN

Este problema requiere determinar la cantidad de dinero con que inició Ronnie. Puesto que conocemos la cifra final, se puede aplicar el método de trabajar hacia atrás.

Como la cantidad final es de \$224 y representa cuatro veces la cantidad con la que inició la tercera semana, *dividimos* \$224 entre 4 para saber que inició la tercera semana con \$56. Antes de perder \$40 la segunda semana, tenía los \$56 más los \$40 que perdió, es decir, \$96. Esto representa el doble de la cifra con la que inició, de modo que la segunda semana inició con \$96 *divididos* entre 2, es decir, \$48. Al repetir este proceso una vez más para la primera semana, antes de perder \$12, él tenía

$$\$48 + 12 = \$60,$$

lo cual representa el triple de la cifra con la que inició. Por lo tanto, Ronnie inició con

$$\$60 \div 3 = \$20.$$ Respuesta

Para verificar, observe las siguientes ecuaciones, las cuales describen las pérdidas y ganancias.

Primera semana: $(3 \times \$20) - \$12 = \$60 - \$12 = \$48$
Segunda semana: $(2 \times \$48) - \$40 = \$96 - \$40 = \$56$
Tercera semana: $(4 \times \$56) = \$224$ La cantidad final ■■■

**Nota:* En esta obra el signo \$ representa dólares estadounidenses, a menos que se especifique otra unidad monetaria.



Augustus De Morgan fue un matemático y filósofo inglés, que trabajó como profesor en la Universidad de Londres. Escribió numerosos libros, uno de los cuales fue *A Budget of Paradoxes*. Su trabajo en teoría de conjuntos y lógica permitió descubrir las leyes que llevan su nombre y se presentan en otros capítulos. Murió en el mismo año que Charles Babbage.

Uso de ensayo y error

Recuerde que $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$. Es decir, 5 al cuadrado es 25. Por lo tanto, el 25 es un **cuadrado perfecto**.

1, 4, 9, 16, 25, 36, etcétera, son cuadrados perfectos

EJEMPLO 3 Cálculo de la fecha de nacimiento de Augustus De Morgan

El matemático Augustus De Morgan vivió en el siglo XIX. Él estableció el siguiente enunciado: "En el año x^2, yo tenía x años de edad". ¿En qué año nació De Morgan?

SOLUCIÓN

Debemos obtener el año de nacimiento de De Morgan. El planteamiento del problema nos dice que vivió durante el siglo XIX. Un año de su vida fue un cuadrado perfecto, de modo que debemos encontrar un número entre 1800 y 1900 que sea un cuadrado perfecto. Usando ensayo y error:

$$42^2 = 42 \cdot 42 = 1764$$
$$43^2 = 43 \cdot 43 = 1849$$
$$44^2 = 44 \cdot 44 = 1936$$

1849 está entre 1800 y 1900.

El único número natural cuyo cuadrado está entre 1800 y 1900 es 43, puesto que $43^2 = 1849$. Por lo tanto, De Morgan tenía 43 años en 1849. El paso final en la solución del problema implica restar 43 de 1849 para obtener el año de su nacimiento.

$$1849 - 43 = 1806$$

Nació en 1806.

Aun cuando la siguiente verificación parezca poco ortodoxa, funciona: busque la fecha de nacimiento de De Morgan en un libro de historia de las matemáticas, como *An Introduction to the History of Mathematics*, sexta edición, de Howard W. Eves. ■■■

Suposición y verificación

Como se mencionó antes, $5^2 = 25$. La operación inversa (opuesta) de elevar un número al cuadrado se conoce como obtener la **raíz cuadrada**. La raíz cuadrada positiva se identifica con el **símbolo de radical** $\sqrt{\ }$. De modo que, $\sqrt{25} = 5$. También,

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{16} = 4, \quad \text{y así sucesivamente.}$$ Raíces cuadradas

El siguiente problema implica la raíz cuadrada y nos remite a las matemáticas que se practicaban en India alrededor del año 850.

EJEMPLO 4 Cálculo del número de camellos

Se vio a la cuarta parte de una manada de camellos en el bosque; el doble de la raíz cuadrada de esa manada se fue a las laderas de la montaña; y 3 por 5 camellos permanecieron en la orilla del río. ¿Cuál es el número de camellos en esa manada?



SOLUCIÓN

El número de camellos en una manada debe ser un número natural. Como en el planteamiento del problema se menciona "un cuarto de la manada" y "la raíz cuadrada de esa manada", el número de camellos debe ser tanto un múltiplo de 4 como un cuadrado perfecto, de modo que solo se utilizan números enteros. El número natural más pequeño que satisface ambas condiciones es 4. Se escribe una ecuación donde x representa el número de camellos en la manada, y luego sustituimos x por 4 para ver si es la solución.

$$\underbrace{\frac{1}{4}x}_{\text{Un cuarto de la manada}} + \underbrace{2\sqrt{x}}_{\text{El doble de la raíz cuadrada de la manada}} + \underbrace{3 \cdot 5}_{\text{3 veces 5 camellos}} = \underbrace{x}_{\text{Número de camellos en la manada}}$$

$$\frac{1}{4}(4) + 2\sqrt{4} + 3 \cdot 5 = 4 \qquad \text{Sea } x = 4.$$

$$1 + 4 + 15 \stackrel{?}{=} 4 \qquad \sqrt{4} = 2$$

$$20 \neq 4$$

Como 4 no es la solución, se intenta con 16, el siguiente cuadrado perfecto que es múltiplo de cuatro.

$$\frac{1}{4}(16) + 2\sqrt{16} + 3 \cdot 5 = 16 \qquad \text{Sea } x = 16.$$

$$4 + 8 + 15 \stackrel{?}{=} 16 \qquad \sqrt{16} = 4$$

$$27 \neq 16$$

Como 16 no es la solución, se intenta con 36.

$$\frac{1}{4}(36) + 2\sqrt{36} + 3 \cdot 5 = 36 \qquad \text{Sea } x = 36.$$

$$9 + 12 + 15 \stackrel{?}{=} 36 \qquad \sqrt{36} = 6$$

$$36 = 36$$

De modo que 36 es el número de camellos en la manada. *Verifique:* "Un cuarto de 36, más el doble de la raíz cuadrada de 36, más 3 por 5" nos da 9 más 12 más 15, lo cual es igual a 36. ■■■

Consideración de un problema similar más sencillo

EJEMPLO 5 Cálculo del dígito de las unidades de una potencia

El dígito del extremo derecho en un número natural se llama dígito de las *unidades*, debido a que este indica cuántos unos o cuántas unidades están contenidos en el número cuando se considera la agrupación en decenas. ¿Cuál es el dígito de las unidades (o unos) en 2^{4000}?



La película de 1952 titulada *Hans Christian Andersen* fue interpretada por Danny Kaye como el escritor danés de cuentos de hadas. En una escena afuera de la escuela, canta una canción a una oruga medidora. "Oruga medidora, oruga medidora, que mides la caléndula, tú y tu aritmética, probablemente llegarán lejos". En la escena siguiente, se oye cantar a los estudiantes de la escuela sumas aritméticas:

Dos y dos son cuatro,
Cuatro y cuatro son ocho,
Ocho y ocho son dieciséis,
Dieciséis y dieciséis son treinta y dos.

Las respuestas son **potencias de 2**.

SOLUCIÓN

Recuerde que 2^{4000} significa que 2 se usa como factor 4000 veces.

$$2^{4000} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{\text{4000 factores}}$$

Para contestar la pregunta, examinamos algunas potencias de 2 más pequeñas y luego buscamos un patrón. Iniciamos con el exponente 1 y examinamos las primeras 12 potencias de 2.

$2^1 = 2$	$2^5 = 32$	$2^9 = 512$
$2^2 = 4$	$2^6 = 64$	$2^{10} = 1024$
$2^3 = 8$	$2^7 = 128$	$2^{11} = 2048$
$2^4 = 16$	$2^8 = 256$	$2^{12} = 4096$

Observe que en cualquiera de las cuatro filas de arriba, el dígito de las unidades es el mismo a lo largo de la fila. La última fila, que contiene los exponentes 4, 8 y 12, tiene a 6 en el lugar de las unidades. Cada uno de estos exponentes es divisible entre 4, y como 4000 es divisible entre 4, usamos razonamiento inductivo para predecir que el dígito de las unidades en 2^{4000} es 6.

(*Nota:* El dígito de las unidades para cualquier otra potencia se puede calcular si dividimos el exponente entre 4 y consideramos el residuo. Luego comparamos el resultado con la lista de potencias de arriba. Por ejemplo, para obtener el dígito de las unidades de 2^{543}, dividimos 543 entre 4 para obtener un cociente de 135 y un residuo de 3. El dígito de las unidades es lo mismo que 2^3, que es igual a 8). ■■■

Elaboración de un boceto

EJEMPLO 6 Conexión de puntos



Figura 6

Un arreglo de nueve puntos se acomoda formando un cuadrado de 3×3, como se muestra en la **figura 6**. ¿Es posible unir los puntos con exactamente cuatro líneas rectas si no se permite levantar el lápiz del papel y no se puede volver a pasar el lápiz sobre una línea que ya se haya dibujado? Si es así, muestre cómo.

SOLUCIÓN

La **figura 7** muestra tres intentos. En cada caso, algo está mal. En el primer dibujo, un punto queda sin unir. En el segundo, no es posible dibujar la figura sin levantar el lápiz del papel o sin volver a pasar el lápiz sobre una línea que ya se haya dibujado. En la tercera figura se unieron todos los puntos, pero se utilizaron cinco rectas y se hizo un doble trazo sobre la figura.



Figura 7

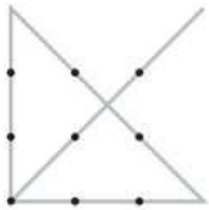


Figura 8

Las condiciones del problema se satisfacen en la **figura 8**. Nos "salimos del cuadro", lo cual no está prohibido por las condiciones del problema. Este es un ejemplo de pensamiento creativo: usamos una estrategia que con frecuencia no se considera en primera instancia. ■■■

Uso del sentido común

SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Algunos problemas suponen una trampa. Parecen demasiado fáciles o quizás imposibles al principio porque tendemos a pasar por alto una situación evidente. Examine con cuidado el lenguaje en estos problemas. Y, por supuesto, nunca olvide usar el sentido común.



En *Die Hard: With a Vengeance* (véase el **inicio del capítulo**), Simon provoca burlonamente a McClane con un acertijo que tiene su origen en las matemáticas egipcias.

Cuando iba a Saint Ives,
Me encontré a un hombre con siete esposas.
Cada esposa tenía siete sacos,
Cada saco tenía siete gatos,
Cada gato tenía siete gatitos.
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
¿Cuántos iban a Saint Ives?

"Mi teléfono es 555 y la respuesta.
Llámame en 30 segundos o morirás".

Al llamar al 555-0001, pudo hablar con Simon. ¿Puede decir por qué el 1 es la respuesta de este acertijo? (Utilice el **sentido común**).

EJEMPLO 7 Obtención de las denominaciones de monedas

Dos monedas actuales de los Estados Unidos tienen un valor total de $1.05. Una de ellas no es un dólar. ¿Cuáles son estas monedas?

SOLUCIÓN

Nuestra reacción inicial podría ser: "La única manera de tener dos monedas que totalicen $1.05 es tener una moneda de cinco centavos y un dólar, pero el problema dice que una de ellas no es un dólar". Desde luego, este enunciado es verdadero. De lo que debemos darnos cuenta aquí es que la moneda que no es un dólar es la moneda de cinco centavos, y ¡la *otra* moneda es el dólar! De modo que las dos monedas son un dólar y una de cinco centavos. ■■■

1.3 EJERCICIOS

Una de las secciones más populares de la revista Mathematics Teacher, *que edita el* National Council of Teachers of Mathematics, *es el calendario mensual, ya que plantea un problema interesante, inusual o desafiante para cada día del mes. Los problemas son contribuciones de los editores, maestros y estudiantes, y sus nombres se mencionan en cada número. Algunos de los siguientes ejercicios son problemas seleccionados de estos calendarios de años pasados; en cada uno se indica la fecha de publicación del problema. Los autores agradecen a todos los colaboradores por permitir la reproducción de estos problemas.*

Use las diferentes estrategias de solución de problemas para resolver cada ejercicio. En muchos casos existe más de un enfoque, así que sea creativo.

1. ***Alumnos en clase*** En un salón existe el mismo número de varones y niñas. Si se retiran 8 niñas, el número de varones es el doble que el de niñas. ¿Cuál es el número original de estudiantes presentes? (24 de mayo de 2008).

2. ***Dame un dígito*** A partir de un número de dos dígitos, genere un número de tres dígitos colocando un 6 en el dígito del extremo derecho. Luego sume 6 al número de tres dígitos resultante y elimine el dígito del extremo derecho para obtener otro número de dos dígitos. Si el resultado es 76, ¿cuál es el número de dos dígitos original? (18 de octubre de 2009).

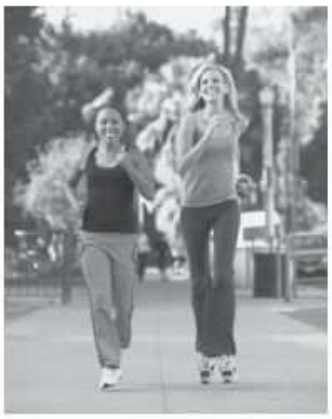
3. ***Dígito faltante*** Busque un patrón y obtenga el dígito x que falta.

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & x & 5 \\ 4 & 3 & 6 & 9 \end{array}$$

(14 de febrero de 2009).

4. ***Abundancia*** Un entero $n > 1$ es **abundante** si la suma de sus divisores propios (divisores enteros positivos más pequeños que n) es mayor que n. Calcule el entero abundante más pequeño. (27 de noviembre de 2009).

5. ***Competencia a campo traviesa*** Las escuelas de una agrupación atlética compiten en un encuentro a campo traviesa para el que cada escuela envía tres participantes. Erin, Katelyn e Iliana son las tres representantes de una escuela. Erin terminó la competencia en la posición media; Katelyn terminó después que Erin, en la decimonovena posición; e Iliana terminó en la vigesimoctava posición. ¿Cuántas escuelas participaron en la carrera? (27 de mayo de 2008).



6. ***Salir a pescar*** Cuatro amigos salieron a pescar un día y trajeron a casa un total de 11 pescados. Si cada uno capturó por lo menos un pez, ¿cuál de los siguientes enunciados *debe* ser verdadero?

   A. Una persona capturó 2 peces.
   B. Una persona capturó 3 peces.
   C. Una persona capturó menos de 3 peces.
   D. Una persona capturó más de 3 peces.
   E. Dos personas capturaron cada una más de 1 pez.

   (24 de mayo de 2008).



7. ***Corte de un cuadrado por la mitad*** ¿De cuántas maneras puede cortarse un cuadrado a la mitad con una línea recta? (2 de octubre de 2008).

8. ***¡Mientes!*** Max, Sam y Brett estaban jugando basquetbol. Uno de ellos rompió una ventana, y los otros dos lo vieron romperla. Max dijo: "Soy inocente". Sam dijo: "Max y yo somos inocentes". Brett dijo: "Max y Sam son inocentes". Si solamente uno de ellos dice la verdad, ¿quién rompió la ventana? (21 de septiembre de 2008).

9. ***Refrigerio para una polilla de biblioteca*** Una enciclopedia de 26 volúmenes (uno por cada letra del abecedario del inglés) se coloca en un estante en orden alfabético de izquierda a derecha. Cada volumen tiene 2 pulgadas de espesor, incluyendo las cubiertas anterior y posterior. Cada cubierta tiene $\frac{1}{4}$ de pulgada de espesor. Una polilla come en línea recta a través de la enciclopedia, iniciando en el interior de la cubierta frontal del volumen A y terminando después de comerse la cubierta posterior del volumen Z. ¿Cuántas pulgadas de libro se comió la polilla? (12 de noviembre de 2008).

10. ***Saque cualquier carta*** Tres cartas de figuras de un mazo normal de naipes permanecen boca abajo en una fila horizontal y están colocadas de tal manera que inmediatamente a la derecha de un rey se encuentra una o dos reinas, inmediatamente a la izquierda de una reina se encuentra una o dos reinas, inmediatamente a la izquierda de un corazón se encuentra una o dos espadas, e inmediatamente a la derecha de una espada se encuentra una o dos espadas. Nombre en orden las tres cartas. (23 de abril de 2008).

11. ***Gatos de Gatúbela*** Si usted pregunta al personaje Gatúbela cuántos gatos tiene, ella contesta con un acertijo: "Cinco sextos de mis gatos más siete". ¿Cuántos gatos tiene Gatúbela? (20 de abril de 2003).

12. ***Colección de lápices*** Bob dio cuatro quintos de sus lápices a Bárbara, luego dio dos tercios de los lápices restantes a Bonnie. Si terminó con 10 lápices para él, ¿cuántos lápices tenía al principio? (12 de octubre de 2003).

13. ***Cargar gasolina*** En el marcador de gasolina de una camioneta se lee inicialmente $\frac{1}{8}$ de tanque. Cuando se agregan 15 galones al tanque, en el marcador se lee $\frac{3}{4}$ de tanque. ¿Cuántos galones más son necesarios para llenar el tanque? (25 de noviembre de 2004).

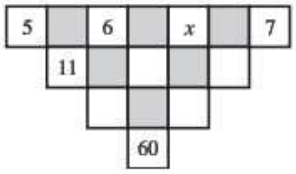
14. ***Capacidad del tanque de gasolina*** Cuando se surten 6 galones de gasolina al tanque de un vehículo, la aguja del medidor va de $\frac{1}{4}$ a $\frac{5}{8}$ del tanque. ¿Cuál es la capacidad total del tanque de gasolina? (21 de febrero de 2004).

15. ***Patrón numérico*** ¿Cuál es la relación entre las filas de números?

18,	38,	24,	46,	42
8,	24,	8,	24,	8

(26 de mayo de 2005).

16. ***Número desconocido*** El número de un cuadrado no sombreado se obtiene sumando los números conectados con él en la fila superior. (El 11 es un número como este). ¿Cuál es el valor de x? (22 de diciembre de 2008).



17. ***Cierre de cajas*** Usted y yo tenemos, cada quien, un candado y la llave correspondiente. Yo quiero enviar a usted una caja con un anillo en ella, pero cualquier caja que no tenga candado será vaciada antes de llegar al destinatario. ¿Cómo puedo enviar con seguridad el anillo? (Observe que usted y yo tenemos llaves de nuestro propio candado, pero no del otro candado). (4 de mayo de 2004).

18. ***Marmota que roe madera*** Nueve marmotas roen ocho piezas de madera en 3 horas. ¿Cuánta madera roe una marmota en una hora? (24 de mayo de 2004).

19. ***Número en una secuencia*** En la secuencia 16, 80, 48, 64, A, B, C, D, cada término después del segundo término es la media aritmética (promedio) de los dos términos anteriores. ¿Cuál es el valor de D? (26 de abril de 2004).

20. ***Número desconocido*** El maestro de Cindy le pidió restar 3 de cierto número y luego dividir el resultado entre 9. En vez de ello, Cindy restó 9, luego dividió el resultado entre 3, y obtuvo una respuesta de 43. ¿Qué debería haber contestado si hubiera trabajado el problema correctamente? (3 de septiembre de 2004).

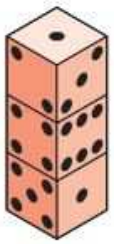
21. ***Etiquetado de cajas*** Usted trabaja en una tienda que es descuidada con el inventario. Tres cajas de calcetines están etiquetadas incorrectamente. Las etiquetas dicen *calcetines rojos*, *calcetines verdes*, *y calcetines rojos y verdes*. ¿Cómo puede usted volver a etiquetar correctamente las cajas sacando solo un calcetín de una de las cajas, sin mirar dentro de ellas? (22 de octubre de 2001).

22. ***Simetría vertical en los nombres de los estados*** (Si se dibuja una línea vertical que pasa por el centro de una figura, y el lado izquierdo y el derecho son reflejos uno del otro, se dice que esa figura tiene simetría vertical). Cuando escribimos el nombre HAWAI con letras mayúsculas, cada letra tiene simetría vertical. Encuentre el nombre de un estado de EUA que tiene simetría vertical y horizontal en todas sus letras. (11 de septiembre de 2001).

23. ***Suma de los puntos ocultos en un dado*** Tres dados con caras numeradas del 1 al 6 están apilados como se muestra. Siete de las 18 caras son visibles, dejando 11 caras ocultas en la parte posterior, en la parte inferior y entre los dados. El número total de puntos invisibles en esta vista es de _____.

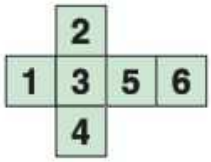
A. 21
B. 22
C. 31
D. 41
E. 53

(17 de septiembre de 2001).

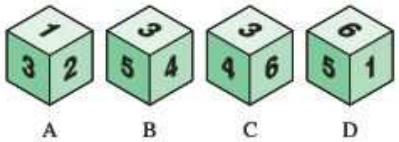


24. ***La edad del señor Green*** En su fiesta de cumpleaños, el señor Green no dijo directamente su edad, sino que planteó lo siguiente: "Si usted suma el año de mi nacimiento a este año, resta el año de mi cumpleaños número 10 y el año de mi cumpleaños número 15, y luego suma mi edad actual, el resultado es 80". ¿Qué edad tiene el señor Green? (14 de diciembre de 1997).

25. ***Doblar y desdoblar una caja*** En la siguiente figura se ilustra una caja desdoblada.

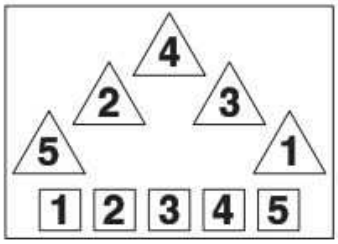


¿Qué figura corresponde a la caja doblada? (7 de noviembre de 2001).

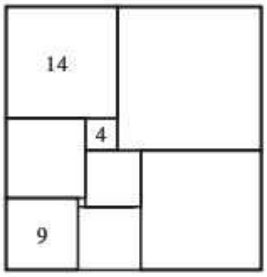


26. ***Edad del conductor del autobús*** Hoy es su primer día al volante de un camión urbano. Cuando usted pasa el centro, tiene 23 pasajeros. En la primera parada, bajan 3 personas del autobús y suben 5. En la segunda parada, bajan 11 personas y suben 8. En la tercera parada, bajan 5 personas y suben 10. ¿Qué edad tiene el conductor del autobús? (1 de abril de 2002).

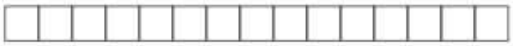
27. ***Asociación de triángulos y cuadrados*** ¿Cómo puede usted asociar cada cuadrado con el triángulo que tiene el mismo número? Las líneas no pueden cruzarse, ni entrar a un cuadrado o a un triángulo, ni tampoco salirse del diagrama. (15 de octubre de 1999).



28. ***Rectángulo cuadrado*** El rectángulo mostrado aquí es un **rectángulo cuadrado** cuyo interior se puede dividir totalmente en dos o más cuadrados. El número escrito dentro de un cuadrado es la longitud del lado de ese cuadrado. Calcule el área de este rectángulo cuadrado. (22 de septiembre de 2009).

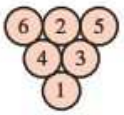


29. ***Sumas de cuadrados perfectos*** ¿Cómo puede uno colocar enteros del 1 al 15 en cada uno de los espacios de abajo de modo que no se repita un número, y la suma de los números en dos espacios consecutivos cualesquiera sea un cuadrado perfecto? (11 de noviembre de 2001).



30. ***¿Qué edad?*** Pat y Chris tienen la misma fecha de cumpleaños. Pat tiene el doble de edad que tenía Chris cuando Pat tenía la edad actual de Chris. Si Pat ahora tiene 24 años, ¿qué edad tiene Chris? (3 de diciembre de 2001).

31. ***Triángulo diferencial*** Los círculos numerados del 1 al 6 están acomodados en un **triángulo diferencial**. Observe que en cualquier fila la diferencia entre el más grande y el más pequeño de dos círculos sucesivos es el número del círculo que se encuentra debajo de ellos. Acomode 10 círculos numerados del 1 al 10 en un triángulo diferencial. (6 de mayo de 1998).



32. ***Carátula de un reloj*** Dibujando dos líneas rectas, divida la carátula de un reloj en tres regiones tales que los números en las regiones tengan el mismo total. (28 de octubre de 1998).



33. ***Medición de letras*** Si a, b y c son dígitos para los cuales

$$\begin{array}{r} 7\ a\ 2 \\ -4\ 8\ b \\ \hline c\ 7\ 3, \end{array}$$

entonces, $a + b + c =$ ____.

A. 14 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17 **E.** 18

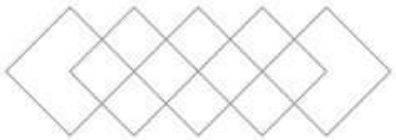
(22 de septiembre de 1999).

34. ***Cuadrado perfecto*** Solo uno de estos números es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es? (8 de octubre de 1997).

329476 389372 964328
326047 724203

35. ***Durmiendo rumbo a casa de la abuela*** Mientras se dirigía a la casa de su abuela para pasar la Navidad, George se durmió a la mitad del viaje. Cuando despertó, todavía tenía que recorrer la mitad de la distancia que había viajado mientras dormía. ¿Qué parte del viaje completo se durmió? (25 de diciembre de 1998).

36. ***Conteo de rompecabezas (rectángulos)*** ¿Cuántos rectángulos de cualquier tamaño se encuentran en la figura mostrada? (10 de septiembre de 2001).



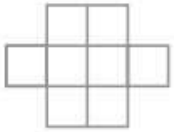
37. ***Baldes de agua*** Usted trajo dos baldes sin marcas a la corriente de agua. Los baldes tienen capacidad de 7 y 3 galones de agua, respectivamente. ¿Cómo puede obtener exactamente 5 galones de agua para llevar a casa? (19 de octubre de 1997).

38. ***Múltiplos de 9*** Los primeros dos de tres múltiplos consecutivos de 9 suman 2511. ¿Cuáles son esos números? (4 de enero de 2010).

39. ***Conteo de rompecabezas (rectángulos)*** ¿Cuántos rectángulos hay en la figura? (27 de marzo de 1997).



40. ***Rompecabezas con dígitos*** Coloque cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en cuadros separados, de modo que los cuadros que compartan esquinas no contengan dígitos sucesivos. (29 de noviembre de 1997).



41. ***Número capicúa*** (*Nota*: Un **número capicúa** o palíndromo es un número cuyos dígitos son los mismos de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, 383, 12321 y 9876789 son números capicúa). El odómetro del auto de la familia marca 15951 cuando el conductor nota que el número es capicúa. "Curioso", dice el conductor para sí mismo. "Pasará mucho tiempo antes de que suceda de nuevo". Pero dos horas después, el odómetro marca un nuevo número capicúa. (*Nota del autor:* Suponga que era el próximo posible). ¿Con qué rapidez iba el auto en esas dos horas? (26 de diciembre de 1998).

42. ***¿Cuánto cuesta ese perrito de la ventana?*** Un hombre desea vender un perrito en \$11. Un cliente que quiere comprarlo solamente tiene monedas extranjeras. La tasa de cambio de las monedas es como sigue: 11 monedas redondas = \$15, 11 monedas cuadradas = \$16, 11 monedas triangulares = \$17. ¿Cuántas monedas de cada denominación debe pagar el cliente? (20 de abril de 2008).



43. ***Dígitos finales de una potencia de 7*** ¿Cuáles son los dos dígitos finales de 7^{1997}? (29 de noviembre de 1997).

44. ***Números enteros consecutivos*** La suma de nueve números enteros consecutivos es 123,456,789,987,654,321. ¿Cuál es la diferencia entre el más grande y el más pequeño de estos números? (4 de octubre de 2008).

45. ***Suma de números*** Cuando $10^{50} - 50$ se expresa como un número entero, ¿cuál es la suma de sus dígitos? (7 de abril de 2008).

46. ***Dígito de las unidades de una potencia de 3*** Si usted eleva 3 a la potencia 324, ¿cuál es el dígito de las unidades del resultado?

47. ***Dígito de las unidades de una potencia de 7*** ¿Cuál es el dígito de las unidades en 7^{491}?

48. ***Rana que trepa un muro*** Una rana se encuentra en la parte inferior de un pozo de 20 pies. Cada día se arrastra hacia arriba 4 pies, pero cada noche se desliza hacia abajo 3 pies. ¿Cuántos días le llevará a la rana alcanzar la parte superior del pozo?

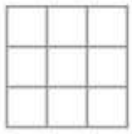


49. ***Visita al correo*** Joanie quiere enviar por correo un paquete que requiere \$1.53 de estampillas. Si ella solo tiene estampillas de 5 y 8 centavos, ¿cuál es el menor número de estampillas que debe usar para totalizar exactamente \$1.53? (20 de agosto de 2008).

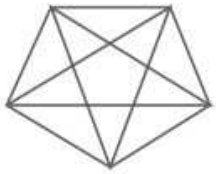
50. ***Dinero gastado en un bazar*** Christine O'Brien compró un libro en \$10 y luego gastó la mitad de su dinero restante en un boleto de tren. Luego, ella pagó \$4 de almuerzo y gastó la mitad de su dinero restante en un bazar. Abandonó el bazar con \$8. ¿Con cuánto dinero inició?

51. ***Pares de calcetines*** Un cajón contiene 20 calcetines negros y 20 calcetines blancos. Si la luz está apagada y usted se estira hacia el cajón para tomar los calcetines, ¿cuál es el número mínimo de calcetines que debe sacar para garantizar que tiene un juego del mismo color?

52. ***Conteo de cuadrados*** ¿Cuántos cuadrados hay en la figura?



53. ***Conteo de triángulos*** ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



54. ***Diversión con fracciones*** Una tira de papel mide $\frac{2}{3}$ m de longitud. ¿Se puede hacer una tira de exactamente $\frac{1}{2}$ m de largo sin usar una regla? Si es así, ¿cómo? (8 de septiembre de 2008).

55. ***Número perfecto*** Un **número perfecto** es un número natural igual a la suma de todos sus divisores excepto él mismo. Por ejemplo, 28 es un número perfecto porque sus divisores diferentes de él mismo son 1, 2, 4, 7 y 14, y $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. ¿Cuál es el menor número perfecto?

56. ***Nombres de niñas*** La mamá de Becky tiene tres hijas. La primera se llama Penny y la segunda Nichole. ¿Cuál es el nombre de su tercera hija?

57. ***Crecimiento de una hoja de lirio*** Una hoja de lirio crece de tal manera que cada día duplica su tamaño. Al vigésimo día de vida, cubre completamente el estanque. ¿En qué día se cubre la mitad del estanque?

58. ***Propiedad interesante de un enunciado*** Comente sobre una propiedad interesante de esta oración: "Anita lava la tina". (*Sugerencia:* Véase el **ejercicio 41**).

59. ***Graduación de bachillerato del autor*** Uno de los autores de este libro se graduó del bachillerato en el año en que satisfizo estas condiciones: **1.** La suma de los dígitos es 23; **2.** el dígito de las centenas es 3 veces mayor que el dígito de las decenas; **3.** no existe el dígito 8. ¿En qué año se graduó?

60. ***Análisis de unidades*** Un día se divide en 24 horas. Cada hora tiene 60 minutos, y cada minuto tiene 60 segundos. En otro sistema de medición, cada día tiene 20 siestas y cada siesta tiene 40 guiños. ¿Cuántos segundos tiene un guiño? (10 de noviembre de 2008).

61. ***Activos de Adán y Eva*** Eva dijo a Adán: "Si me das un dólar, entonces tendremos la misma cantidad de dinero". Adán le replicó: "Eva, si me das un dólar, tendré el doble de dinero que con el que te quedas". ¿Cuánto tiene cada uno?

62. ***Dígitos faltantes en el rompecabezas*** En el problema de suma que se presenta a continuación, faltan algunos dígitos en los espacios. Si el problema se resuelve correctamente, ¿cuál es la suma de los dígitos que faltan?.

$$\begin{array}{r} _\ 3\ 5 \\ 8\ _\ 6 \\ +\ 1\ 4\ _ \\ \hline _\ 4\ 0\ 8 \end{array}$$

63. ***Dígitos faltantes en el rompecabezas*** Llene los espacios de manera que el problema de multiplicación use todos los dígitos 0, 1, 2, 3,..., 9 exactamente una vez, y esté correcto.

$$\begin{array}{r} _\ 0\ 2 \\ \times\ \ \ 3\ _ \\ \hline _\ 5,\ _\ _\ _ \end{array}$$

64. ***Cuadrado mágico*** Un **cuadrado mágico** es una configuración en un cuadro de números que tiene la propiedad de que la suma de los números de cualquier fila, columna o diagonal es la misma. Complete el siguiente cuadrado, de modo que se convierta en un cuadrado mágico, y se usen todos los dígitos 1, 2, 3,..., 9 solamente una vez.

6		8
	5	
		4

65. ***Cuadrado mágico*** Remítase al **ejercicio 64**. Complete el cuadrado mágico que se presenta a continuación de forma que todos los números naturales 1, 2, 3,..., 16 se usen solamente una vez, y la suma de cada fila, columna o diagonal sea 34.

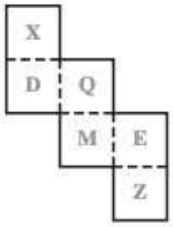
6			9
	15		14
11		10	
16		13	

66. ***Decimal*** ¿Cuál es el centésimo dígito en la representación decimal de $\frac{1}{7}$?

67. ***Lanzamientos en un juego de béisbol*** ¿Cuál es el número mínimo de lanzamientos que puede hacer un jugador de béisbol que lanza un juego completo en un partido reglamentario de 9 entradas?

68. ***Peso de monedas*** Usted tiene ocho monedas. Siete son auténticas y una es falsa (pesa un poco menos que las otras siete). Usted tiene una báscula, la cual solo puede usar tres veces. Diga cómo localizar la moneda falsa en tres pesajes. (Luego muestre cómo detectar la moneda falsa en solo *dos* pesajes).

69. ***Rompecabezas geométrico*** Cuando el diagrama mostrado se dobla en forma de un cubo, ¿cuál es la letra opuesta a la cara marcada con la Z?



70. ***Patrón numérico*** Si el siguiente patrón continúa, ¿dónde aparecerá el número 289?

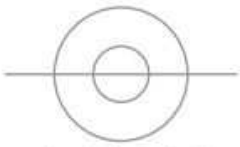
$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 3 & & 5 & \\ 7 & & 9 & & 11 \end{array}$$

(11 de noviembre de 2008).

71. ***Rompecabezas geométrico*** Dibuje la siguiente figura sin separar su lápiz del papel y sin volver a trazar una línea que ya se haya dibujado.



72. ***Rompecabezas geométrico*** Repita el **ejercicio 71** con esta figura.



73. ***Pago de una menta*** Brian Altobello tiene un número ilimitado de monedas de 1 centavo, de 5 y de 10 centavos. ¿De cuántas maneras diferentes puede pagar 15 centavos por un chocolate de menta? (Por ejemplo, una manera es 1 moneda de 10 centavos y 5 monedas de 1 centavo).

74. ***Libros en un estante*** Los volúmenes 1 y 2 de *Las obras completas de Wally Smart* se encuentran en orden numérico de izquierda a derecha en su librero. El volumen 1 tiene 450 páginas y el volumen 2 tiene 475 páginas. Excluyendo las cubiertas, ¿cuántas páginas hay entre la página 1 del volumen 1 y la página 475 del volumen 2?

75. ***Área y perímetro*** El triángulo ABC tiene lados de 10, 24 y 26 cm de largo. Un rectángulo que tiene área igual a la del triángulo mide 3 cm de ancho. Calcule el perímetro del rectángulo. (13 de noviembre de 2008).

76. ***Adolescencia*** La edad de una adolescente con un incremento de 2, genera un cuadrado perfecto. Su edad con una disminución de 10 da la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto. Ella es 5 años mayor que su hermano. ¿Qué edad tiene su hermano?

77. ***Edades*** James, Dan, Jessica y Cathy forman un par de parejas casadas. Sus edades son 36, 31, 30 y 29. Jessica está casada con la persona de mayor edad del grupo. James es mayor que Jessica, pero menor que Cathy. ¿Quién está casado con quién, y cuáles son sus edades?

78. ***Cambio de dinero*** ¿De cuántas maneras diferentes puede usted cambiar medio dólar usando monedas estadounidenses actuales, si no se permiten las monedas de 1 centavo?

79. ***Días en un mes*** Algunos meses tienen 30 días y otros 31. ¿Cuántos meses tienen 28 días?

80. ***Tierra en un hoyo*** ¿Cuánta tierra hay en un hoyo cúbico de 6 pies por lado?

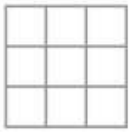
81. ***Dígito final*** ¿Cuál es el último dígito de $49{,}327^{1783}$? (11 de abril de 2009).

82. ***Dígito faltante*** Obtenga el dígito faltante, x, en el producto de

$$(172195)(572167) = 985242x6565.$$

(3 de mayo de 2009).

83. ***Rompecabezas geométrico*** ¿Cuál es el número máximo de cuadrados pequeños en los cuales podemos colocar cruces (×) y no tener ninguna fila, columna o diagonal completamente llena de cruces? Ilustre su respuesta.



84. ***Cambio de dinero*** Webster tiene algunas monedas de 1 centavo, de 10 y de 25 centavos en su bolsillo. Cuando Josefa le pide cambio de un dólar, Webster descubre que no le puede dar el cambio exacto. ¿Cuál es el valor total máximo posible de las monedas en su bolsillo? (5 de octubre de 2009).

85. ***Propiedad de Fibonacci*** Remítase al **ejemplo 1**, y observe la secuencia de números de parejas iniciales. Seleccione cuatro términos sucesivos cualesquiera. Multiplique el primero por el cuarto. Luego multiplique los dos términos de en medio. Repita este proceso. ¿Qué nota usted al comparar los dos productos?

1.4 CÁLCULO, ESTIMACIÓN Y LECTURA DE GRÁFICAS

Cálculo • Estimación • Interpretación de gráficas



La fotografía muestra una calculadora común de cuatro funciones **Sharp EL-2139 HB**.

Desde la aparición de las calculadoras manuales a principios de la década de 1970, los métodos aritméticos cotidianos se han modificado drásticamente. Uno de los primeros modelos disponibles para el consumidor fue la SR-10 de Texas Instruments, la cual se vendió en aproximadamente $150 en 1973. Podía ejecutar las cuatro operaciones aritméticas y obtener raíces cuadradas, y apenas un poco más.

Cálculo

La búsqueda de caminos más fáciles para calcular y contar desembocó en el desarrollo de calculadoras manuales y computadoras. Para la gente común, una calculadora que ejecuta las operaciones aritméticas y otras cuantas funciones es suficiente. Estas se conocen como **calculadoras de cuatro funciones**. Los estudiantes que toman cursos de matemáticas avanzadas (los ingenieros, por ejemplo) necesitan generalmente la potencia de las **calculadoras científicas**. Existen también las **calculadoras graficadoras**, las cuales son capaces de trazar gráficas en pequeñas pantallas. ***Consulte siempre su manual del usuario si necesita ayuda en la ejecución de una operación con su calculadora. Si requiere ayuda adicional, pregunte a su profesor o a otro estudiante que utilice el mismo modelo.***

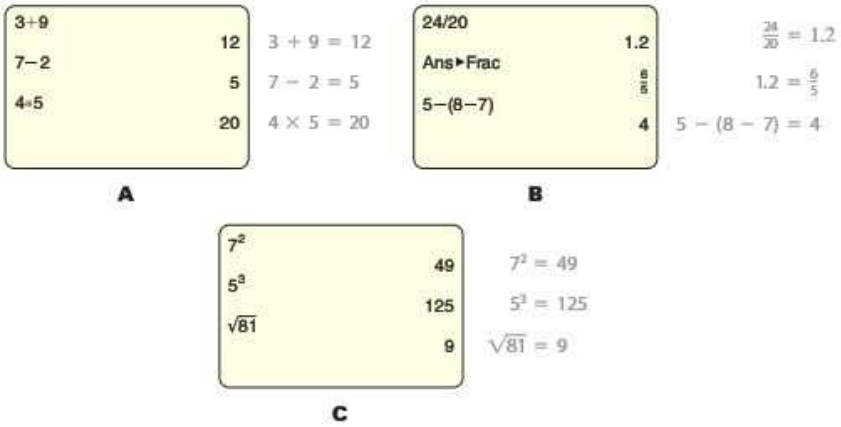
Los modelos actuales de calculadoras difieren de las primeras versiones en que pueden desplegar, en la misma pantalla, tanto la información que introduce el usuario como el resultado que se obtiene. De esta manera, el usuario puede verificar que la información introducida en la calculadora es correcta. Aun cuando no es necesario tener una calculadora graficadora para estudiar el material de este texto, ocasionalmente incluiremos pantallas de una calculadora graficadora para dar apoyo a los resultados obtenidos o para brindar información complementaria.*

*Como TI-83 Plus y TI-84 Plus de Texas Instruments son los modelos más conocidos de calculadoras graficadoras, incluimos pantallas similares a las de estos modelos.

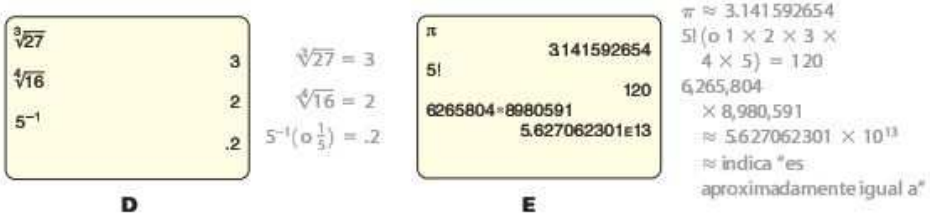


Aquí se muestra la conocida calculadora graficadora **TI-84 Plus**.

Las pantallas que siguen ilustran algunas entradas y operaciones comunes.



La pantalla A muestra cómo se realiza la suma, resta o multiplicación de dos números. La pantalla B muestra cómo se efectúa una división de dos números, cómo el cociente decimal (almacenado en la celda de memoria Ans) se puede convertir en una fracción, y cómo se usan los paréntesis en un cálculo. La pantalla C muestra cómo se eleva un número al cuadrado, al cubo, y cómo se puede obtener la raíz cuadrada.



La pantalla D ilustra cómo se calculan otras raíces (raíz cúbica y raíz cuarta), y cómo se obtiene el recíproco de un número usando −1 como exponente. La pantalla E muestra cómo se tiene acceso a π con una tecla especial, cómo se obtiene un **factorial** (simbolizado por !) y cómo se podría desplegar un resultado en **notación científica**. ("E13" en seguida de 5.627062301 significa que este número se multiplica por 10^{13}. Esta respuesta todavía es una aproximación, porque el producto 6,265,804 × 8,980,591 contiene más dígitos de los que la calculadora puede desplegar).

Estimación



Si bien las calculadoras nos facilitan la realización de cálculos, muchas veces solo necesitamos la respuesta aproximada de un problema; en tales casos quizá no sea necesaria una calculadora.

EJEMPLO 1 Estimación del número adecuado de pajareras

Una pajarera de golondrinas puede alojar hasta 8 nidos. ¿Cuántas pajareras se necesitarían para albergar 58 nidos?

SOLUCIÓN

Si dividimos 58 entre 8, ya sea a mano o con una calculadora, obtenemos 7.25. ¿Es este el número deseado? Desde luego que no, porque no podemos considerar fracciones de pajarera. ¿Necesitamos 7 pajareras u 8? Para dar espacio de anidamiento a los nidos por arriba de las 7 que indica la fracción decimal, debemos planear el uso de 8 pajareras. En este problema, debemos redondear nuestra respuesta *hacia arriba* hasta el siguiente número natural. ■■■

EJEMPLO 2 Aproximación al número promedio de yardas por avance

En la temporada 2009 de futbol americano, Cedric Benson realizó 301 avances por tierra para completar 1251 yardas (*Fuente:* www.nfl.com). Aproxime su promedio de yardas por corrida (acarreo) en ese año.

SOLUCIÓN

Como solo necesitamos el promedio aproximado de Cedric, se puede decir que corrió 300 veces para totalizar alrededor de 1200 yardas, y su promedio fue $\frac{1200}{300} = 4$ yardas por corrida, aproximadamente. (Una calculadora indica que su promedio, con una aproximación a la décima más cercana, es de 4.2 yardas por corrida. Compruebe esto). ■■■

EJEMPLO 3 Comparación de proporciones de trabajadores por grupos de edad

En un año reciente, había aproximadamente 127,000 hombres, dentro del intervalo de edad comprendido entre 25 y 29 años, que trabajaban en el campo. Esto representa parte del total de 238,000 trabajadores agrícolas en ese rango de edad. De los 331,000 trabajadores agrícolas entre 40 y 44 años de edad, 160,000 eran hombres. Sin usar calculadora, determine qué intervalo de edad tenía una mayor proporción de hombres.

SOLUCIÓN

Piense en términos de miles en lugar de manejar todos los ceros. Primero analizamos el intervalo de edad de 25 a 29 años. Como había un total de 238 mil trabajadores, de los cuales 127 mil eran hombres, había

$$238 - 127 = 111 \text{ mil mujeres trabajadoras.}$$ Más de la mitad eran hombres.

En el rango de edad de 40 a 44 años, de los 331 mil trabajadores, 160 mil eran hombres, lo que da

$$331 - 160 = 171 \text{ mil mujeres trabajadoras.}$$ Menos de la mitad eran hombres.

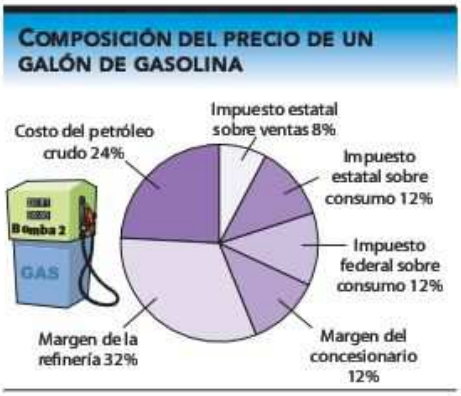
El intervalo de edad de 25 a 29 años tenía la proporción más grande de hombres. ■■■

Interpretación de gráficas

En una **gráfica circular** o **gráfica de pastel**, se usa un círculo para indicar el total de todos los grupos de datos representados. El círculo se divide en sectores o trozos (como si se tratara de rebanadas de un pastel), cuyos tamaños muestran las magnitudes relativas de los grupos. La suma de todas las partes fraccionarias debe ser 1 (para dar el círculo completo).

EJEMPLO 4 Interpretación de la información de una gráfica circular

Use la gráfica circular de la **figura 9** para determinar cuánto de los $3.50 gastados en un galón de gasolina en California corresponde a la refinería y cuánto al costo del petróleo crudo.



Fuente: California Energy Commission.

Figura 9

SOLUCIÓN

Los sectores en la gráfica circular de la **figura 9** tienen una dimensión que corresponde a la división del precio. Por ejemplo, la mayor parte del precio (32%) corresponde a la refinería, mientras que la parte más pequeña (8%) corresponde al impuesto estatal sobre ventas. Como se esperaba, el porcentaje totaliza el 100%. El precio de la gasolina es de $3.50 por galón.

$$\text{Margen de la refinería: } \$3.50 \times \underbrace{0.32}_{\text{El 32\% convertido a decimal}} = \$1.12$$

$$\text{Costo del petróleo crudo: } \$3.50 \times \underbrace{0.24}_{\text{El 24\% convertido a decimal}} = \$0.84$$

■■■

Una **gráfica de barras** se usa para hacer comparaciones. Consiste en una serie de barras (reales o simuladas) configuradas en forma vertical u horizontal. En una gráfica de barras, con los valores de dos grupos se forman parejas (por ejemplo, años con ventas).

EJEMPLO 5 Interpretación de la información de una gráfica de barras

La gráfica de barras de la **figura 10** muestra las ventas de motonetas en Estados Unidos, las cuales han aumentado su popularidad debido a su ahorro de combustible. La gráfica compara las ventas en miles.



Fuente: Motorcycle Industry Council.



Figura 10

a) Estime las ventas en 2000 y 2004.

b) ¿En qué años las ventas rebasaron la cifra de 50 mil?

c) Describa el cambio en las ventas conforme transcurrieron los años.

SOLUCIÓN

a) Localice la parte superior de la barra del 2000, y desplácese en forma horizontal a través de la escala vertical para ver que es de aproximadamente 40. De modo que las ventas en el 2000 fueron de 40 mil aproximadamente. Siga la parte superior de la barra para 2004 a través de la escala vertical para ver que se encuentra aproximadamente a la mitad entre 80 y 90 mil, de modo que las ventas en 2004 fueron de 85 mil aproximadamente.

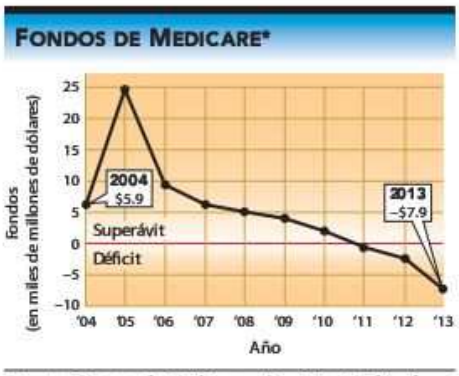
b) Localice 50 en la escala vertical y siga la línea hacia la derecha. Hay tres años (2002, 2003 y 2004) con barras que se extienden por encima de la línea de 50, de modo que las ventas fueron mayores de 50 mil en esos años.

c) Conforme transcurrieron los años, las ventas se incrementaron de manera constante, de aproximadamente 15 mil en 1998 a alrededor de 85 mil en 2004. ■■■

Una **gráfica lineal** se usa para mostrar cambios o tendencias en los datos a lo largo del tiempo. Para crear una gráfica lineal, unimos una serie de puntos, los cuales representan datos, con segmentos de recta.

EJEMPLO 6 Interpretación de información de una gráfica lineal

Las proyecciones actuales indican que los recursos de Medicare no cubrirán sus costos a menos que el programa se modifique. La gráfica lineal de la **figura 11** muestra los fondos de Medicare en miles de millones de dólares de los años 2004 a 2013.



Fuente: Centros de Medicare y Servicios Medicaid.
*Proyección



Figura 11

a) Estime los fondos de los años 2005 y 2006. ¿Aproximadamente cuánto disminuyeron de 2005 a 2006?

b) ¿Cuál es el único periodo en el cual aumentaron los fondos de Medicare? ¿Cuál es la tendencia proyectada de 2005 a 2013?

c) De acuerdo con las proyecciones, ¿en qué año se ve que los fondos tendrán el primer déficit?

SOLUCIÓN

a) En la parte inferior de la gráfica, localice el 2005 y lea hacia arriba hasta encontrar el punto que tiene una altura de aproximadamente 25 (miles de millones de dólares). De manera similar, el punto para 2006 tiene una altura de aproximadamente 10 (miles de millones de dólares). Los fondos *disminuyeron* aproximadamente

$$25 - 10 = 15 \text{ mil millones de dólares.}$$ Cantidad de 2005 − cantidad de 2006

b) La gráfica se *eleva* de 2004 a 2005, de modo que los fondos se incrementaron entre estos dos años. La gráfica *desciende* de 2005 a 2013, de manera que los fondos disminuyeron.

c) De 2004 a 2010, la gráfica siempre está arriba de cero, pero en 2011 desciende ligeramente por debajo de cero por primera vez, lo que indica un déficit. ■■■

1.4 EJERCICIOS

Realice las operaciones indicadas e incluya tantos dígitos en su respuesta como muestre la pantalla de su calculadora. (El número de dígitos desplegados puede variar dependiendo del modelo utilizado).

1. $39.7 + (8.2 - 4.1)$

2. $2.8 \times (3.2 - 1.1)$

3. $\sqrt{5.56440921}$

4. $\sqrt{37.38711025}$

5. $\sqrt[3]{418.508992}$

6. $\sqrt[3]{700.227072}$

7. 2.67^2

8. 3.49^3

9. 5.76^5

10. 1.48^6

11. $\dfrac{14.32 - 8.1}{2 \times 3.11}$

12. $\dfrac{12.3 + 18.276}{3 \times 1.04}$

13. $\sqrt[5]{1.35}$

14. $\sqrt[6]{3.21}$

15. $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

16. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$

17. $\sqrt[4]{\dfrac{2143}{22}}$

18. $\dfrac{12{,}345{,}679 \times 72}{\sqrt[3]{27}}$

19. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{6}}$

20. $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt{3}}$

21. Elija cualquier número de cinco dígitos. Multiplíquelo por 9 en su calculadora. Ahora sume los dígitos de la respuesta. Si la suma es mayor que 9, sume los dígitos de esta suma, y repita el proceso hasta que la suma sea menor que 10. Su respuesta siempre será 9. Repita el ejercicio con un número de seis dígitos. ¿Se mantiene el mismo resultado?

22. Use su calculadora para *elevar al cuadrado* los siguientes números de dos dígitos que terminan en 5: 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85. Escriba los resultados y examine el patrón que se desarrolla. Luego use razonamiento inductivo para predecir el valor de 95^2. Escriba una explicación de cómo se puede elevar al cuadrado mentalmente un número de dos dígitos terminado en 5.

Realice todos los cálculos y observe las respuestas. Luego llene el espacio con la respuesta adecuada.

23. $\frac{-3}{-6}$; $\frac{-5}{-4}$; $\frac{-27}{-43}$

Al dividir un número negativo entre otro número negativo se obtiene un resultado _____.
(negativo/positivo)

24. $5 \cdot -4$; $-3 \cdot 8$; $27 \cdot -43$

Al multiplicar un número negativo por un número positivo se obtiene un resultado _____.
(negativo/positivo)

25. 56^0; π^0; 2^0; 120^0

Al elevar un número diferente de cero a la potencia 0 se obtiene un resultado igual a _____.

26. 1^2; 1^3; 1^{-3}; 1^0

Al elevar 1 a cualquier potencia se obtiene un resultado igual a _____.

27. $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{-9}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{-8}$

El signo del recíproco de un número es _____ el signo del número.
(igual que/diferente de)

28. $5 \div 0$; $9 \div 0$; $0 \div 0$

Al dividir un número entre cero resulta _____ en una calculadora.

29. $0 \div 8$; $0 \div -2$; $0 \div \pi$

Cero dividido entre un número diferente de cero nos da un cociente igual a _____.

30. $\sqrt{-3}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-10}$

Al obtener la raíz cuadrada de un número negativo nos da _____ en la calculadora.

31. $-3 \cdot -4 \cdot -5$; $-3 \cdot -4 \cdot -5 \cdot -6 \cdot -7$;

$-3 \cdot -4 \cdot -5 \cdot -6 \cdot -7 \cdot -8 \cdot -9$

Al multiplicar un número *impar* de números negativos se obtiene un número _____.
(positivo/negativo)

32. $-3 \cdot -4$; $-3 \cdot -4 \cdot -5 \cdot -6$;

$-3 \cdot -4 \cdot -5 \cdot -6 \cdot -7 \cdot -8$

Al multiplicar un número *par* de números negativos se obtiene un número _____.
(positivo/negativo)

33. Obtenga la representación decimal de $\frac{1}{6}$ en su calculadora. En seguida del punto decimal habrá un 1 y una cadena de seises. El dígito final será un 7 si su calculadora *redondea*, o bien, un 6 si *trunca*. ¿Qué clase de calculadora tiene?

34. Elija un número de tres dígitos e introdúzcalo en su calculadora. Luego introdúzcalo nuevamente para obtener un número de seis dígitos. Divida este número de seis dígitos entre 7. Divida el resultado entre 13. Divida el resultado entre 11. ¿Qué es lo interesante del resultado? Explique por qué sucede esto.

35. Elija un dígito diferente de 0. Multiplíquelo por 429. Ahora multiplique el resultado por 259. ¿Qué es lo interesante del resultado? Explique por qué sucede esto.

36. Elija dos números naturales. Sume 1 al segundo y divídalo entre el primero para obtener un tercero. Sume 1 al tercero y divídalo entre el segundo para obtener un cuarto. Sume 1 al cuarto y divídalo entre el tercero para obtener un quinto. Continúe este proceso hasta que descubra un patrón. ¿Cuál es ese patrón?

En las respuestas de cada pregunta de los ejercicios 37 a 40 dé el número natural adecuado. (Obtenga el número natural más pequeño).

37. ***Hojas para almacenar tarjetas de presentación*** Una hoja de plástico, diseñada para guardar tarjetas de presentación, contiene hasta 9 tarjetas. ¿Cuántas hojas serán necesarias para almacenar 563 tarjetas?

38. ***Gavetas para DVD*** Una gaveta con corredera diseñada para guardar cajas de DVD tiene 20 compartimentos. Si Chris quiere guardar su colección de 408 DVD de Disney, ¿cuántas gavetas como esta necesitará?

39. ***Contenedores de violetas africanas*** Un jardinero desea fertilizar 800 violetas africanas. Cada contenedor de fertilizante alcanza para 60 plantas. ¿Cuántos contenedores necesita para hacer el trabajo?



40. ***Se solicitan maestros de quinto grado*** La Academia False River tiene 155 alumnos de quinto grado. El director, Butch LeBeu, determinó que cada maestro de quinto grado debe tener un máximo de 24 alumnos. ¿Cuántos maestros de quinto grado necesita?

En los ejercicios 41 a 46, use estimaciones para determinar la elección más cercana a la respuesta correcta.

41. ***Precio por acre de tierra*** La fundación no lucrativa Long Now compró 80 acres de tierra por $140,000, para construir el "reloj del milenio" en Mount Washington, Nevada, el cual dará un tictac al año, repicará una vez al siglo, y durará por lo menos 10,000 años. ¿Cuál de las siguientes estimaciones es la más cercana al precio por acre?

A. $1000 **B.** $2000 **C.** $4000 **D.** $11,200

42. ***Duración de un viaje redondo*** La distancia de Seattle, Washington, a Springfield, Missouri, es de 2009 millas. ¿Aproximadamente cuántas horas tardará en hacer un viaje redondo de Seattle a Springfield un autobús que promedia 50 millas por hora?

A. 60 **B.** 70 **C.** 80 **D.** 90

43. ***Densidad de población por milla cuadrada*** El condado de Buffalo en Nebraska tiene una población de 40,249 habitantes y cubre 968 millas cuadradas. ¿Aproximadamente cuántas personas por milla cuadrada viven en el condado de Buffalo?

A. 40 **B.** 400 **C.** 4000 **D.** 40,000

44. ***Revoluciones de Mercurio*** El planeta Mercurio tarda 88.0 días terrestres en dar una vuelta al Sol. Plutón tarda 90,824.2 días en hacer lo mismo. Cuando Plutón da una vuelta alrededor del Sol, ¿aproximadamente cuántas vueltas habrá dado Mercurio alrededor del Sol?

A. 100,000 **B.** 10,000 **C.** 1000 **D.** 100

45. ***Recepciones promedio*** En 2009 Brandon Marshall, de los Broncos de Denver, completó 101 pases para 1120 yardas. Su número aproximado de yardas ganadas por pase completo fue de _____.

A. $\frac{1}{11}$ **B.** 110 **C.** 1.1 **D.** 11

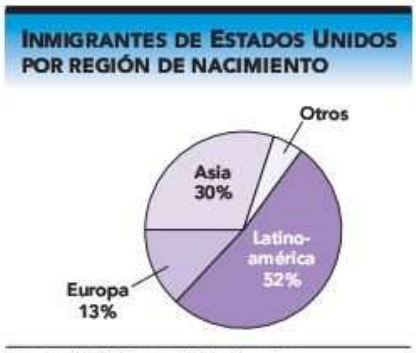
46. ***Área de la Capilla Sixtina*** La Capilla Sixtina del Vaticano mide 40.5 metros por 13.5 metros.



¿Cuál es la aproximación más cercana de su área?

A. 110 metros **B.** 55 metros
C. 110 metros cuadrados **D.** 600 metros cuadrados

Inmigración *La gráfica circular que se presenta a continuación muestra el porcentaje aproximado de inmigrantes admitidos en Estados Unidos durante la década de 1990. Use la gráfica para contestar las preguntas de los ejercicios 47 a 50.*



Fuente: U.S. Bureau of the Census.

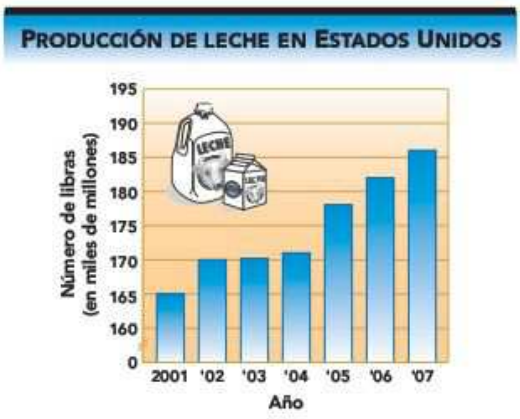
47. ¿Qué porcentaje de inmigrantes son del grupo de "otros" países?

48. ¿Qué porcentaje de inmigrantes no son de Asia?

49. En un grupo de 2,000,000 de inmigrantes, ¿cuántos esperaría que fueran de Europa?

50. En un grupo de 4,000,000 de inmigrantes, ¿con cuántos rebasaría Latinoamérica a las demás regiones combinadas?

Producción de leche *La gráfica de barras muestra la producción total de leche en Estados Unidos en miles de millones de libras de los años 2001 a 2007. Use la gráfica de barras para trabajar los ejercicios 51 a 54.*



Fuente: Departamento de Agricultura de Estados Unidos.

51. ¿En qué años la producción de leche en Estados Unidos fue mayor a 175 miles de millones de libras?

52. ¿En qué par de años la producción de leche en Estados Unidos fue más o menos la misma?

53. Estime la producción de leche en Estados Unidos en 2001 y 2007.

54. Describa el cambio en la producción de leche en Estados Unidos de 2001 a 2007.

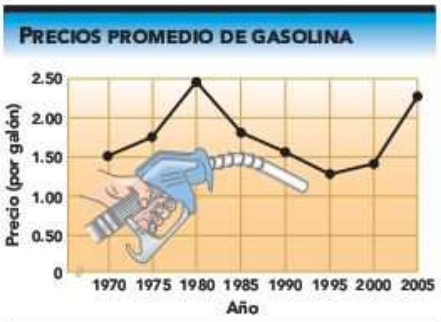
Precios de gasolina *La gráfica lineal muestra el precio promedio, ajustado por la inflación, que los estadounidenses han pagado por un galón de gasolina durante los años seleccionados a partir de 1970. Use la gráfica lineal para trabajar los ejercicios 55 a 58.*

55. ¿En qué periodo de 5 años se registró el mayor incremento en el precio de un galón de gasolina? ¿Aproximadamente de cuánto fue el incremento?

56. Estime el precio de un galón de gasolina durante 1985, 1990, 1995 y 2000.

57. Describa la tendencia en los precios de gasolina de 1980 a 1995.

58. ¿Durante qué año(s) un galón de gasolina costó aproximadamente $1.50?



Fuente: Energy Information Administration.

EXTENSIÓN Uso de la escritura para aprender matemáticas

Diarios • Bitácoras de aprendizaje • Informes sobre artículos • Ensayos



La escritura matemática adopta muchas formas. Uno de los más famosos escritores y matemático fue **Charles Dogson** (1832-1898), quien usó el seudónimo de **Lewis Carroll**.

Dodgson fue profesor de matemáticas en la Universidad de Oxford en Inglaterra. La reina Victoria comunicó a Dodgson cuánto disfrutó las Aventuras de Alicia en el País de las Maravillas y cuánto deseaba leer su nuevo libro. Él le envió su *Lógica simbólica*, su trabajo matemático más famoso.

Los libros de Alicia hicieron famoso a Carroll. Sin embargo, al final de su vida, Dogson rechazó la fama y negó que él y Carroll fueran la misma persona, aun cuando firmó cientos de ejemplares a los niños en hospitales infantiles.

La investigación ha mostrado que la habilidad para expresar observaciones matemáticas en documentos es un estímulo que favorece el desarrollo continuo de un estudiante de matemáticas. La implementación de la escritura en la clase de matemáticas puede tener varios enfoques.

Diarios Una manera de practicar la escritura en relación con las matemáticas es llevar un diario al que le dedique unos cuantos minutos explicando lo que pasó en la clase ese día. Las actualizaciones del diario pueden ser generales o específicas, dependiendo del tema de que se trate, el nivel de su comprensión del tema, el grado de interés en ese momento, etcétera. Las actualizaciones del diario normalmente se escriben en lenguaje informal y con frecuencia son un medio de comunicación eficaz con uno mismo, con los compañeros de clase y el profesor, acerca de las opiniones, las percepciones y los intereses personales en ese momento.

Bitácoras de aprendizaje Si bien las actualizaciones al diario son las partes menos estructuradas de los documentos, en las cuales se permite que los pensamientos de los estudiantes fluyan con libertad, las actualizaciones a una bitácora de aprendizaje normalmente son más estructuradas. Un profesor puede hacer una pregunta específica a un estudiante para que la conteste en su bitácora de aprendizaje. En este texto intercalamos ejercicios de escritura en cada conjunto de problemas, que son adecuados para incluir en la bitácora de aprendizaje. Por ejemplo, considere el **ejercicio 13** del grupo de ejercicios de la sección de inicio de este capítulo.

Analice las diferencias entre los razonamientos inductivo y deductivo. Dé un ejemplo de cada uno.

Esta es una posible respuesta a ese ejercicio.

El razonamiento deductivo ocurre cuando uno parte de ideas generales a ideas específicas. Por ejemplo, sé que puedo multiplicar ambos lados de $\frac{1}{2}x = 6$ por 2 para obtener $x = 12$, porque sé que puedo multiplicar ambos lados de cualquier ecuación por lo que yo quiera (excepto por 0). El razonamiento inductivo va en sentido contrario. Si yo obtengo una conclusión general a partir de observaciones específicas, ese es un razonamiento inductivo. Por ejemplo: a partir de la lista de números 4, 8, 12, 16, etcétera, puedo concluir que el siguiente número es 20, puesto que siempre se suma 4 al número anterior para obtener el siguiente número.

Informes sobre artículos El aforismo "Publicar o morir" es muy viejo, y quiere decir que un especialista en búsqueda de posición académica debe publicar en una revista relacionada con su campo. Existen numerosas revistas que publican documentos de investigación de matemáticas y/o de enseñanza de matemáticas. En la actividad 3 sugerimos algunos artículos que se han publicado en los últimos años. Redactar un informe sobre un artículo como estos puede ayudarle a entender lo que hacen los matemáticos y las ideas que usan los maestros para transmitir conceptos a los estudiantes.

Ensayos Los profesores de cursos breves de matemáticas, cada vez con mayor frecuencia, solicitan a sus alumnos que redacten ensayos. De esta forma, uno toma conciencia de la plétora de matemáticos que existen, y de libros y artículos sobre matemáticas, muchos de los cuales están escritos específicamente para legos. En las actividades 5 y 6 se presenta una lista de posibles temas de ensayos.

ACTIVIDADES DE LA EXTENSIÓN

En vez de incluir un grupo típico de ejercicios, listamos algunas actividades que se sugieren para practicar la escritura y así enriquecer el conocimiento y el aprendizaje de las matemáticas.

Actividad 1 Lleve un diario. Después de cada clase, escriba durante unos cuantos minutos acerca de sus percepciones y los temas cubiertos, o sobre cualquier asunto que considere importante.

Actividad 2 Lleve una bitácora de aprendizaje, contestando por escrito por lo menos uno de los ejercicios de cada uno de los grupos de ejercicios de su programa de estudio. Pida sugerencias a su profesor acerca de otros tipos específicos de tareas de escritura.

Actividad 3 El National Council of Teachers of Mathematics publica revistas sobre enseñanza de matemáticas: *Teaching Children Mathematics* y *Mathematics Teacher* son dos que se pueden encontrar en línea o en la sección de publicaciones periódicas en la mayoría de las bibliotecas universitarias. Hemos seleccionado varios artículos recientes de cada una de estas publicaciones. Escriba un informe breve acerca de estos artículos de acuerdo con la guía específica de su profesor.

De *Mathematics Teacher*

2004

Devaney, Robert L. "Fractal Patterns and Chaos Games", noviembre de 2004, p. 228.

Francis, Richard L. "New Worlds to Conquer", octubre de 2004, p. 166.

Hansen, Will. "War and Pieces", septiembre de 2004, p. 70.

Mahoney, John F. "How Many Votes Are Needed to Be Elected President?", octubre de 2004, p. 154.

2005

Clausen, Mary C. "Did You 'Code'?", noviembre de 2005, p. 260.

Comstock, Jocelyne M., Sean P. Madden y James P. Downing. "Paper Moon: Simulating a Total Solar Eclipse", diciembre de 2005/enero de 2006, p. 312.

Parker, Dennis. "Partitioning the Interior of a Circle with Chords", septiembre de 2005, p. 120.

Quinn, Jennifer J. y Arthur T. Benjamin. "Revisiting Fibonacci and Related Sequences", diciembre de 2005/enero de 2006, p. 357.

2006

Cline, Kelly S. "Classroom Voting in Mathematics", septiembre de 2006, p. 100.

Gordon, Sheldon P. "Placement Tests: The Shaky Bridge Connecting School and College Mathematics", octubre de 2006, p. 174.

Johnson, Iris DeLoach. "Grandfather Tang Goes to High School", marzo de 2006, p. 522.

Wong, Michael. "The Human Body's Built-In Range Finder: The Thumb Method of Indirect Distance Measurement", mayo de 2006, p. 622.

De *Teaching Children Mathematics*

2004

Anthony, Glenda J. y Margaret A. Walshaw. "Zero: A 'None' Number?", agosto de 2004, p. 38.

Buschman, Larry. "Teaching Problem Solving in Mathematics", febrero de 2004, p. 302.

Joram, Elana, Christina Hartman y Paul R. Trafton. " 'As People Get Older, They Get Taller': An Integrated Unit on Measurement, Linear Relationships, and Data Analysis", marzo de 2004, p. 344.

Mann, Rebecca L. "Balancing Act: The Truth Behind the Equals Sign", septiembre de 2004, p. 65.

2005

Flores, Alfinio, Erin E. Turner y Renee C. Bachman. "Posing Problems to Develop Conceptual Understanding: Two Teachers Make Sense of Division of Fractions", octubre de 2005, p. 17.

Hansen, Laurie E. "ABCs of Early Mathematics Experiences", noviembre de 2005, p. 208.

Sherrill, Carl M. "Math Riddles: Helping Children Connect Words and Numbers", marzo de 2005, p. 368.

Thompson, Tony, y Stephen Sproule. "Calculators for Students with Special Needs", marzo de 2005, p. 391.

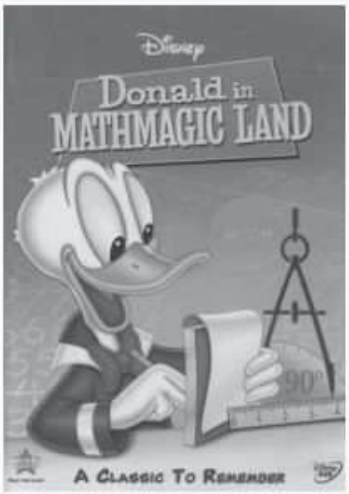
2006

Barnes, Mary Kathleen. "How Many Days 'til My Birthday? Helping Kindergarten Students Understand Calendar Connections and Concepts", febrero de 2006, p. 290.

Cassel, Darlinda, Anne Reynolds y Eileen Lillard. "A Mathematical Exploration of Grandpa's Quilt", marzo de 2006, p. 340.

de Groot, Cornelis y Timothy Whalen. "Longing for Division", abril de 2006, p. 410.

Nugent, Christina M. "How Many Blades of Grass Are on a Football Field?", febrero de 2006, p. 282.



© Disney Enterprises, Inc.

Actividad 4 Una de las películas de matemáticas más famosas de todos los tiempos es el corto de 1959 de Disney *Donald in Mathmagic Land*, disponible en DVD. Pase media hora de entretenimiento viendo esta película, y escriba un informe sobre ella, de acuerdo con las instrucciones de su profesor.

Actividad 5 Escriba un informe de acuerdo con las instrucciones de su profesor sobre uno de los siguientes matemáticos, filósofos y científicos.

Abel, N.	Cardano, G.	Gauss, C.	Noether, E.
Agnesi, M. G.	Copérnico, N.	Hilbert, D.	Pascal, B.
Agnesi, M. T.	De Morgan, A.	Kepler, J.	Pitágoras
Al-Khowârizmi	Descartes, R.	Kronecker, L.	Platón
Apolonio	Euler, L.	Lagrange, J.	Polya, G.
Aristóteles	Fermat, P.	Leibniz, G.	Ramanujan, S.
Arquímedes	Fibonacci (Leonardo de Pisa)	L'Hôspital, G.	Riemann, G.
Babbage, C.		Lobachevsky, N.	Russell, B.
Bernoulli, Jakob		Mandelbrot, B.	Somerville, M.
Bernoulli, Johann	Galileo (Galileo Galilei)	Napier, J.	Tartaglia, N.
Cantor, G.	Galois, E.	Nash, J.	Whitehead, A.
		Newton, I.	Wiles, A.

Actividad 6 Escriba un ensayo sobre alguno de los siguientes temas de matemáticas, de acuerdo con las instrucciones de su profesor.

- Matemáticas en Babilonia
- Matemáticas egipcias
- El origen del cero
- Plimpton 322
- El papiro Rhind
- Orígenes del teorema de Pitágoras
- Los sólidos regulares (platónicos)
- La hermandad pitagórica
- La proporción áurea
- Los tres famosos problemas de construcción de los griegos
- La historia de las aproximaciones de π
- Euclides y sus "elementos"
- Albores de las matemáticas en China
- Albores de las matemáticas en India
- Origen de la palabra *álgebra*
- Cuadrados mágicos
- Números figurados
- La secuencia de Fibonacci
- La controversia Cardano/Tartaglia
- Métodos históricos de cálculo (logaritmos, el ábaco, varillas de Napier, la regla de cálculo, etcétera)
- El triángulo de Pascal
- Orígenes de la teoría de la probabilidad
- Mujeres matemáticas
- Paradojas matemáticas
- Problemas sin resolver en matemáticas
- Teorema de los cuatro colores
- La demostración del último teorema de Fermat
- La búsqueda de números primos grandes
- Geometría de fractales
- Los coinventores del cálculo
- El papel de la computadora en el estudio de las matemáticas
- Matemáticas y música
- Matemática policial
- Orígenes de los números complejos
- Conjetura de Goldbach
- Uso de Internet en la enseñanza de las matemáticas
- Desarrollo de calculadoras graficadoras
- Movimiento de reforma de la enseñanza de matemáticas
- Matemáticas multiculturales
- La hipótesis de Riemann

Actividad 7 Investigue un programa de computadora enfocado en la enseñanza de las matemáticas elementales a los niños, y redacte un estudio crítico como si usted escribiera para una revista especializada en material de software didáctico. Asegúrese de referirse a las habilidades racionales de alto nivel, además de los ejercicios y la práctica.

Actividad 8 Los siguientes sitios Web ofrecen una lista fascinante de temas matemáticos. Visite uno de ellos, seleccione un tema que le interese y redacte un informe de acuerdo con las instrucciones de su profesor.

- www.mathworld.wolfram.com
- www.world.std.com/~reinhold/mathmovies.html
- www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/
- http://dir.yahoo.com/Science/Mathematics/
- www.cut-the-knot.com/
- www.ics.uci.edu/~eppstein/recmath.html

Actividad 9 A lo largo de este libro nos referiremos a escenas de películas y televisión relacionadas con las matemáticas. Elabore un informe sobre una o más de estas escenas, y determine si las matemáticas implicadas son correctas o incorrectas. Si son correctas, indique por qué. Si son incorrectas, obtenga la respuesta correcta. Visite los sitios www.math.harvard.edu/~knill/mathmovies/ y www.mathclassgoestohollywood.com.

Actividad 10 La serie animada de televisión de mayor duración es la de *Los Simpson*, que inició en 1989. El sitio Web www.simpsonsmath.com explora la presencia de las matemáticas en los episodios de diferentes temporadas. Vea varios episodios y explique con detalle las matemáticas que encuentra en ellos.

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

Descubrimiento de patrones en el triángulo de Pascal

El **triángulo de Pascal** es una configuración fascinante que consiste en filas de números, cada una de las cuales contiene un número más que la anterior. Las primeras seis filas se muestran aquí.

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5   10  10  5   1
```

Para descubrir algunos de sus patrones, divídase la clase en grupos de cuatro estudiantes cada uno. Dentro de cada grupo se designa un estudiante como A, otro como B, otro como C y otro como D. Luego se realizan en orden las siguientes actividades.

1. Comenten entre los miembros del grupo algunas de las propiedades del triángulo que son evidentes al observar las primeras seis filas mostradas.

2. Es bastante evidente que cada fila inicia y termina con 1. Encuentren un método por medio del cual se puedan determinar las otras entradas de la fila a partir de las entradas de la fila inmediata superior. (*Sugerencia:* En la quinta fila, $6 = 3 + 3$). Luego, el grupo debe obtener las siguientes tres filas del triángulo, y cada miembro tiene que preparar su propia copia de las primeras nueve entradas para consulta posterior.

3. Ahora, cada estudiante del grupo investigará una propiedad particular del triángulo. En algunos casos, será de ayuda una calculadora. Todos los estudiantes deben iniciar el trabajo al mismo tiempo. (Después, siguen los comentarios).

Estudiante A: Obtenga la suma de las entradas de cada fila. Observe el patrón que surge. Ahora escriba la décima fila del triángulo.

Estudiante B: Investigue las diferencias sucesivas en las diagonales partiendo de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha. Por ejemplo, en la diagonal que inicia con 1, 2, 3, 4, ..., todas las diferencias sucesivas son iguales a 1; en la diagonal que inicia con 1, 3, 6, ..., las diferencias sucesivas son 2, 3, 4, etcétera. Haga esto en la diagonal que inicia con 1, 6, 21, ...

Estudiante C: Obtenga los valores de las primeras cinco potencias del número 11, iniciando con 11^0 (recuerde que $11^0 = 1$).

Estudiante D: Configure nueve filas del triángulo con todas las filas "alineadas a la izquierda", y luego dibuje flechas punteadas como se muestra a continuación:

```
1
1  1
1  2  1
1  3  3  1
1  4  6  4  1
1  5  10 10 5  1
.
.
.
```

y así sucesivamente. Luego sume a lo largo de las diagonales. Escriba estas sumas de izquierda a derecha.

4. Después de que todos los estudiantes hayan concluido las investigaciones individuales del punto 3, se hacen los comentarios de grupo.

a) El estudiante A tiene que informar el resultado obtenido en el punto 3, y luego hacer un pronóstico en relación con la suma de las entradas de la décima fila.

b) El estudiante B tiene que informar las diferencias sucesivas obtenidas en las diagonales. Luego, todos los estudiantes del grupo tienen que investigar las diferencias sucesivas en la diagonal que inicia con 1, 7, 28, ... (tal vez sea necesario escribir unas cuantas filas más del triángulo).

c) El estudiante C tiene que informar la relación entre las potencias de 11, y luego determinar el valor de 11^5. ¿Por qué el patrón no continúa aquí?

d) El estudiante D tiene que informar la secuencia de números obtenida. Luego, como grupo, deberán predecir cuál será la siguiente suma observando el patrón de la secuencia. Comparen su predicción con el cálculo real.

5. Se elige un representante de cada grupo para informar a toda la clase las observaciones realizadas en esta investigación.

6. Encuentre en Internet un artículo del triángulo de Pascal y elabore un informe.

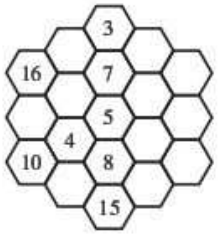
EXAMEN DEL CAPÍTULO 1

En los ejercicios 1 y 2, identifique si el razonamiento implicado es un ejemplo de razonamiento inductivo o deductivo.

1. Carol Britz es representante de ventas de una compañía editorial. Durante los últimos 16 años ha excedido su meta de ventas anual, vendiendo principalmente libros de texto de matemáticas. Por lo tanto, ella también excederá este año su meta anual de ventas.

2. Para los números naturales n, n^2 también es un número natural. 176 es un número natural. Por lo tanto, 176^2 es un número natural.

3. ***Hexágono mágico*** (En un **hexágono mágico** todas las entradas de las columnas y diagonales suman lo mismo). Obtenga la suma constante del hexágono mágico y llene los espacios con números de modo que todas las columnas o diagonales tengan esa suma. (Del calendario mensual de *Mathematics Teacher*, 20 de noviembre de 2007).



4. Use la lista de ecuaciones y el razonamiento inductivo para predecir la siguiente ecuación, y luego verifique su conjetura.

$$65{,}359{,}477{,}124{,}183 \times 17 = 1{,}111{,}111{,}111{,}111{,}111$$
$$65{,}359{,}477{,}124{,}183 \times 34 = 2{,}222{,}222{,}222{,}222{,}222$$
$$65{,}359{,}477{,}124{,}183 \times 51 = 3{,}333{,}333{,}333{,}333{,}333$$

5. Use el método de diferencias sucesivas para obtener el término siguiente de la secuencia:

$$3, 11, 31. 69, 131, 223, \ldots$$

6. Obtenga la suma de $1 + 2 + 3 + \cdots + 250$.

7. Considere las siguientes ecuaciones, donde el lado izquierdo de cada una es un número octagonal.

$$1 = 1$$
$$8 = 1 + 7$$
$$21 = 1 + 7 + 13$$
$$40 = 1 + 7 + 13 + 19$$

Use el patrón establecido en los lados derechos para predecir el siguiente número octagonal. ¿Cuál es la siguiente ecuación de la lista?

8. Use el resultado del **ejercicio 7** y el método de las diferencias sucesivas para obtener los primeros ocho números octagonales. Luego divida cada uno entre 4 y registre el residuo. ¿Qué patrón se obtiene?

9. Describa el patrón usado para obtener los términos de la secuencia de Fibonacci.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

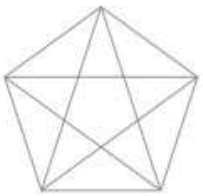
Use estrategias para la solución de problemas para resolver todos los problemas, tomados del calendario mensual de Mathematics Teacher *en la fecha indicada.*

10. ***Construcción de una fracción*** Cada uno de los cuatro dígitos 2, 4, 6 y 9 se coloca en uno de los espacios para formar una fracción. El numerador y el denominador son números enteros de dos dígitos. ¿Cuál es el valor más pequeño de todas las fracciones comunes que se pueden formar? Exprese su respuesta como una fracción. (17 de noviembre de 2004).



11. ***Dígito de las unidades de una potencia de 9*** ¿Cuál es el dígito de las unidades en la representación decimal de 9^{1997}? (27 de enero de 1997).

12. ***Conteo de los triángulos del rompecabezas*** ¿Cuántos triángulos hay en esta figura? (6 de enero de 2000).



13. ***Haga una igualdad*** Considere lo siguiente:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 0 = 100.$$

Dejando todos los números en el orden que se presentan, inserte signos de suma y resta en la expresión para obtener una ecuación verdadera. (23 de marzo de 2008).

14. ***Pérdida de estatura*** El doctor Small mide 36 pulgadas de estatura, y la señora Tall mide 96 pulgadas de estatura. Si el doctor Small pierde 2 pulgadas de estatura por año, y la señora Tall crece $\frac{2}{3}$ de pulgada por año, ¿cuánto medirá esta última cuando el doctor Small desaparezca por completo? (2 de noviembre de 2007).

15. ***Dígito de las unidades en una suma*** Obtenga el dígito de las unidades del número decimal que representa el número $11^{11} + 14^{14} + 16^{16}$. (14 de febrero de 1994).

16. Con base en sus conocimientos básicos de aritmética, describa el patrón que se observa cuando se efectúan las siguientes operaciones:

$$9 \times 1, \quad 9 \times 2, \quad 9 \times 3, \ldots, 9 \times 9.$$

(*Sugerencia:* Sume los dígitos de las respuestas. ¿Qué observa?).

Use su calculadora para resolver cada una de las siguientes expresiones. Incluya todos los decimales que despliegue la calculadora.

17. $\sqrt{98.16}$

18. 3.25^3

19. ***Canastas en basquetbol*** Durante la temporada 2008-2009 de la NCAA femenil de basquetbol, Destini Hughes de LSU anotó 28 de sus 96 intentos de tiro de campo. Esto significa que por cada 10 intentos, encestó aproximadamente _____.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

20. ***Tasa de desempleo*** La gráfica lineal muestra la tasa total de desempleo en Estados Unidos de la fuerza de trabajo civil de 1998 a 2005.



Fuente: Departamento del Trabajo de Estados Unidos.

a) ¿Entre qué pares de años consecutivos disminuyó la tasa de desempleo?

b) ¿Cuál fue la tendencia general en la tasa de desempleo entre 2000 y 2003?

c) Estime la tasa total de desempleo en 2003 y 2004. ¿Aproximadamente cuánto disminuyó la tasa de desempleo entre 2003 y 2004?

CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

2



En la película *I.Q.*, Meg Ryan interpreta a Catherine Boyd, la sobrina brillante de Albert Einstein, quien se siente atraída por el obrero Ed Walters (Tim Robbins). Ed simula ser un físico.

ED: Creo que tu tío quiere que bailemos.

CATHERINE: Oh, no, no seas trivial, Ed. No puedes llegar de ahí hasta aquí.

ED: ¿Por qué no?

CATHERINE: No me digas que un famoso y brillante científico como tú no conoce la paradoja de Zenón.

ED: Recuérdamela.

CATHERINE: No puedes llegar aquí porque siempre tienes que cubrir la mitad de la distancia restante entre tú y yo. Yo tengo que cubrir la mitad también. Entonces, mira, yo todavía tengo otra mitad de ese recorrido, así que cubro esa mitad… y como existen mitades infinitas restantes, nunca puedo llegar allí.

ED (tomándola en sus brazos, comienzan a bailar): Entonces, ¿qué pasó?

CATHERINE: No lo sé.

2.1 Símbolos y terminología

2.2 Diagramas de Venn y subconjuntos

2.3 Operaciones con conjuntos y productos cartesianos

2.4 Encuestas y números cardinales

Extensión Conjuntos infinitos y sus cardinalidades

Investigación colaborativa Determinación del número de estudiantes en su clase

Examen del capítulo 2

Antes del siglo xx, algunas ideas de la *teoría de conjuntos* se consideraban *paradojas* (opiniones equivocadas). La *paradoja de Zenón*, como la describió Catherine y que se presenta en los **ejercicios 51 y 52** de la **Extensión**, ha estado presente de varias formas por miles de años.

2.1 SÍMBOLOS Y TERMINOLOGÍA

Definiciones de conjuntos • Conjuntos de números y cardinalidad • Conjuntos finitos e infinitos • Igualdad de conjuntos



Las ideas básicas de la teoría de conjuntos fueron desarrolladas por el matemático alemán **Georg Cantor** (1845-1918) en el año 1875 aproximadamente. Cantor creó un nuevo campo teórico y, al mismo tiempo, continuó el largo debate sobre el infinito, que inició en tiempos antiguos. Desarrolló el conteo de correspondencia uno a uno para determinar cuántos objetos están contenidos en un conjunto. Los conjuntos infinitos se diferencian de los conjuntos finitos porque no siguen la conocida ley de que un entero es mayor que cualquiera de sus partes.

Definiciones de conjuntos

Un **conjunto** es una colección de objetos. Los objetos que pertenecen al conjunto se llaman **elementos**, o **miembros**, del conjunto. Los conjuntos se definen usando cualquiera de los tres métodos siguientes: 1. *descripción con palabras*, 2. *método de listado*, y 3. *notación de comprensión*.

El conjunto de números naturales pares menores que 10 — Descripción con palabras

$\{2, 4, 6, 8\}$ — Método de listado

$\{x | x \text{ es un número natural par menor que } 10\}$ — Notación de comprensión

La notación de comprensión de arriba se lee como "el conjunto de todas las x donde x es un número natural par menor que 10". La notación de comprensión utiliza la idea algebraica de *variable*. (Se podría utilizar cualquier símbolo, pero, al igual que en otras aplicaciones algebraicas, la letra x es una selección común).

Variable que representa un elemento en general

$$\{x | x \text{ es un número natural par menor que } 10\}$$

Criterio por el cual un elemento se considera como miembro del conjunto

A los conjuntos normalmente se les asigna un nombre (usualmente con letras mayúsculas), como E para el conjunto de todas las letras del abecedario inglés.

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

La notación de listado con frecuencia se abrevia estableciendo el patrón de elementos incluidos y utilizando puntos suspensivos para indicar la continuación del patrón.

$$E = \{a, b, c, d, \ldots, x, y, z\} \quad \text{o} \quad E = \{a, b, c, d, e, \ldots, z\}.$$

Un conjunto que no contiene elementos se llama **conjunto vacío**, o **conjunto nulo**. El símbolo $\emptyset$ se usa para denotar un conjunto vacío, de modo que $\emptyset$ y $\{\}$ tienen el mismo significado. *No* identificamos el conjunto vacío como $\{\emptyset\}$ porque esta notación representaría a un conjunto con un elemento (ese elemento es el conjunto vacío).

EJEMPLO 1 Lista de los elementos de conjuntos

Proporcione una lista completa de los elementos de cada conjunto.

a) El conjunto de números naturales entre 6 y 13

b) $\{5, 6, 7, \ldots, 13\}$

c) $\{x | x \text{ es un número cardinal entre 6 y 7}\}$

SOLUCIÓN

a) El conjunto se denota como $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. (Observe que la palabra *entre* excluye los valores de los extremos).

b) Este conjunto inicia con el elemento 5, luego 6, luego 7, etcétera; cada elemento se obtiene sumando 1 al elemento anterior de la lista. Este patrón se detiene en 13, de manera que la lista completa es $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

c) No hay números naturales entre 6 y 7, de modo que este es un conjunto vacío $\{\}$ o $\emptyset$.

Para que un conjunto sea útil, debe estar bien definido. Por ejemplo, el conjunto anterior E, que incluye las letras del abecedario inglés, está bien definido. Si consideramos la letra q, sabemos que q es un elemento de E. Si consideramos la letra griega θ (theta), sabemos que no es un elemento del conjunto E.

Por otro lado, si consideramos el conjunto C de todos los buenos cantantes, y a una cantante en particular, Raeanna, no es posible decir si

Raeanna es un elemento de C o Raeanna *no* es un elemento de C.

El problema es la palabra "buenos"; ¿qué significa exactamente bueno? Como no podemos determinar si un cantante determinado pertenece al conjunto C, el conjunto C no está bien definido.

La letra q es un elemento del conjunto E, donde E es el conjunto de todas las letras del abecedario inglés. Para indicar esto, se usa el símbolo $\in$.

$q \in E$ Esto se lee como "q pertenece al conjunto E".

La letra θ no es un elemento del conjunto E. Para indicar esto, se usa $\in$ con una marca diagonal.

$\theta \notin E$ Esto se lee como "u no pertenece al conjunto E".

EJEMPLO 2 Uso del símbolo $\in$

Determine si cada enunciado es *verdadero* o *falso*.

a) $3 \in \{1, 2, 5, 9, 13\}$ ***b)*** $0 \in \{0, 1, 2, 3\}$ ***c)*** $\frac{1}{5} \notin \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right\}$

SOLUCIÓN

a) Como 3 *no* es un elemento del conjunto $\{1, 2, 5, 9, 13\}$, el enunciado es *falso*.

b) Como 0 es claramente un elemento del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, el enunciado es *verdadero*.

c) Este enunciado dice que $\frac{1}{5}$ no es un elemento del conjunto $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right\}$, lo cual es *verdadero*.

Conjuntos de números y cardinalidad

A continuación se resumen categorías importantes de números.

Conjuntos de números

Números naturales o cardinales $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Números enteros no negativos $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Números racionales $\left\{\frac{p}{q} \middle| p \text{ y } q \text{ son enteros, y } q \neq 0\right\}$

(*Ejemplos*: $\frac{3}{5}$, $-\frac{7}{9}$, 5, 0. Todos los números racionales se pueden escribir con un número decimal exacto, como 0.25 o un número decimal periódico, como 0.666...).

Números reales $\{x | x$ es un número que se puede expresar como un decimal$\}$.

Números irracionales $\{x | x$ es un número real y x no se puede expresar como un cociente de números enteros$\}$.

(*Ejemplos*: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, π. Las representaciones decimales de los números irracionales no tienen terminaciones decimales exactas ni periódicas).

El número de elementos en un conjunto se conoce como **número cardinal**, o **cardinalidad**, del conjunto. El símbolo

$$n(A), \text{ que se lee "}n \text{ de } A\text{"},$$

representa el número cardinal del conjunto A. Si hay elementos repetidos en la lista de un conjunto, no se deben contar más de una vez cuando se determina el número cardinal de un conjunto.

EJEMPLO 3 Obtención de números cardinales

Obtenga el número cardinal de todos los conjuntos.

a) $K = \{2, 4, 8, 16\}$ ***b)*** $M = \{0\}$ ***c)*** $B = \{1, 1, 2, 2, 3\}$

d) $R = \{4, 5, \ldots, 12, 13\}$ ***e)*** $\emptyset$

SOLUCIÓN

a) El conjunto K contiene cuatro elementos, de manera que el número cardinal del conjunto K es igual a 4, y $n(K) = 4$.

b) El conjunto M contiene solo un elemento, el 0, de manera que $n(M) = 1$.

c) Si hay elementos repetidos en la lista de un conjunto, no se deben contar más de una vez cuando se determina el número cardinal del conjunto. El conjunto B solo tiene tres elementos *diferentes*, entonces $n(B) = 3$.

d) Aun cuando solo se listan cuatro elementos, los puntos suspensivos indican que existen otros elementos en el conjunto. Si los contamos todos, vemos que existen 10 elementos, de modo que $n(R) = 10$.

e) El conjunto vacío, $\emptyset$, no contiene elementos, entonces $n(\emptyset) = 0$. ▮▮▮



En los lentes de acercamiento de una cámara fotográfica se muestra el **símbolo de infinito**, ∞, definido en este caso como cualquier distancia mayor de 1000 veces el alcance de enfoque de los lentes.

El símbolo fue inventado por el matemático John Wallis en 1655. Wallis usó $1/\infty$ para representar una cantidad infinitamente pequeña.

Conjuntos finitos e infinitos

Si el número cardinal de un conjunto es un número entero no negativo particular (0 o un número cardinal), como en los incisos del **ejemplo 3**, decimos que se trata de un **conjunto finito**. Con tiempo suficiente, podemos terminar de contar todos los elementos de cualquier conjunto finito y obtener su número cardinal.

Algunos conjuntos, sin embargo, son tan largos que nunca se puede terminar el proceso de conteo. Los números cardinales en sí mismos forman este tipo de conjunto. Siempre que un conjunto es tan grande que no se puede obtener su número cardinal entre los números enteros no negativos, decimos que se trata de un **conjunto infinito**.

EJEMPLO 4 Identificación de un conjunto infinito

Identifique todos los números cardinales nones mediante los tres métodos comunes de la notación de conjuntos.

SOLUCIÓN

El conjunto de todos los números cardinales nones — Descripción con palabras

$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ — Método de listado

$\{x \mid x \text{ es un número cardinal non}\}$ — Notación de comprensión ▮▮▮

Igualdad de conjuntos

Igualación de conjuntos

Al hacer el conjunto A **igual** al conjunto B se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. Cada elemento de A es un elemento de B, y
2. Cada elemento de B es un elemento de A.

Dos conjuntos son iguales si contienen exactamente los mismos elementos, sin importar el orden.

$\{a, b, c, d\} = \{a, c, d, b\}$ Ambos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos.

La repetición de elementos en la lista de un conjunto no agrega nuevos elementos.

$\{1, 0, 1, 2, 3, 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$ Ambos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos.

EJEMPLO 5 Identificación de la igualdad de dos conjuntos

¿Son iguales los conjuntos $\{-4, 3, 2, 5\}$ y $\{-4, 0, 3, 2, 5\}$?

SOLUCIÓN

Cada elemento del primer conjunto es un elemento del segundo conjunto. Sin embargo, 0 es un elemento del segundo conjunto, pero no del primero. Los conjuntos no contienen exactamente los mismos elementos, de modo que no son iguales.

$$\{-4, 3, 2, 5\} \neq \{-4, 0, 3, 2, 5\}$$

EJEMPLO 6 Identificación de la igualdad de dos conjuntos

Determine si cada enunciado es *verdadero* o *falso*.

a) $\{3\} = \{x \mid x \text{ es un número cardinal entre 1 y 5}\}$

b) $\{x \mid x \text{ es un número natural negativo}\} = \{y \mid y \text{ es un número racional e irracional a la vez}\}$

SOLUCIÓN

a) El conjunto de la derecha contiene *todos* los números cardinales entre 1 y 5, a saber, 2, 3 y 4, mientras que el conjunto de la izquierda *solo* contiene el número 3. Como los conjuntos no contienen exactamente los mismos elementos, no son iguales. El enunciado es *falso*.

b) Todos los números naturales son positivos, de modo que el conjunto del lado izquierdo es un conjunto vacío. Por definición, si un número es racional, no puede ser irracional, de manera que el conjunto de la derecha también es un conjunto vacío. Como cada conjunto es un conjunto vacío, los conjuntos son iguales. El enunciado es *verdadero*.

2.1 EJERCICIOS

Asocie cada conjunto de la columna I con la descripción apropiada de la columna II.

I

1. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

2. $\{x \mid x \text{ es un número entero par mayor que 4 y menor que 6}\}$

3. $\{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$

4. $\{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

5. $\{2, 4, 8, 16, 32\}$

6. $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$

7. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

8. $\{2, 4, 6, 8\}$

II

A. El conjunto de todos los números enteros pares.

B. El conjunto de las cinco potencias menores positivas enteras de 2.

C. El conjunto de números enteros positivos pares menores que 10.

D. El conjunto de todos los números enteros nones.

E. El conjunto de todos los números enteros negativos.

F. El conjunto de números enteros positivos nones menores que 10.

G. $\emptyset$

H. El conjunto de los cinco múltiplos mínimos de 2 que sean números enteros positivos.

Liste todos los elementos de cada conjunto. Use el método de notación de conjuntos (comprensión) y el método de listado para describir el conjunto.

9. El conjunto de todos los números cardinales menores o iguales que 6.

10. El conjunto de todos los números enteros no negativos mayores que 8 y menores que 18.

11. El conjunto de todos los números enteros no negativos no mayores que 4.

12. El conjunto de todos los números cardinales entre 4 y 14.

13. $\{6, 7, 8, \ldots, 14\}$

14. $\{3, 6, 9, 12, \ldots, 30\}$

15. $\{-15, -13, -11, \ldots, -1\}$

16. $\{-4, -3, -2, \ldots, 4\}$

17. $\{2, 4, 8, \ldots, 256\}$

18. $\{90, 87, 84, \ldots, 69\}$

19. $\{x|x$ es un número entero no negativo par menor que $11\}$

20. $\{x|x$ es un número entero non entre -8 y $7\}$

Identifique cada conjunto por el método de listado. Puede haber más de una respuesta correcta.

21. El conjunto de todos los números cardinales mayores que 20.

22. El conjunto de todos los números enteros entre -200 y 500.

23. El conjunto de los Grandes Lagos.

24. El conjunto de los presidentes estadounidenses después de Richard Nixon y antes de Barack Obama.

25. $\{x|x$ es un múltiplo positivo de $5\}$

26. $\{x|x$ es un múltiplo negativo de $6\}$

27. $\{x|x$ es el recíproco de un número natural$\}$

28. $\{x|x$ es un número entero positivo potencia de $4\}$

Identifique cada conjunto con la notación de comprensión, usando x *como la variable. Puede haber más de una respuesta correcta.*

29. El conjunto de los números racionales.

30. El conjunto de los números naturales pares.

31. $\{1, 3, 5, \ldots, 75\}$

32. $\{35, 40, 45, \ldots, 95\}$

Describa con palabras cada conjunto. Puede haber más de una respuesta.

33. $\{-9, -8, -7, \ldots, 7, 8, 9\}$

34. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$

35. {Alabama, Alaska, Arizona, . . . , Wisconsin, Wyoming}

36. {Alaska, California, Hawaii, Oregon, Washington}

Identifique cada conjunto como finito *o* infinito.

37. $\{2, 4, 6, \ldots, 932\}$

38. $\{6, 12, 18\}$

39. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$

40. $\{\ldots, -100, -80, -60, -40, \ldots\}$

41. $\{x|x$ es un número natural mayor que $50\}$

42. $\{x|x$ es un número natural menor que $50\}$

43. $\{x|x$ es un número racional$\}$

44. $\{x|x$ es un número racional entre 0 y $1\}$

Obtenga n(A) para cada conjunto.

45. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

46. $A = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$

47. $A = \{2, 4, 6, \ldots, 1000\}$

48. $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 3000\}$

49. $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$

50. $A = \{x|x$ es una vocal en el abecedario inglés$\}$

51. $A =$ el conjunto de números enteros entre -20 y 20.

52. $A =$ el conjunto de escaños autorizados en el Senado estadounidense.

53. $A = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots, \frac{27}{29}, \frac{28}{30}\right\}$

54. $A = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{10}, -\frac{1}{10}\right\}$

55. Aun cuando x es una consonante, ¿por qué se dice "x es una vocal en el abecedario inglés" en el **ejercicio 50**?

56. Explique cómo se puede resolver el **ejercicio 53** sin listar y contar todos los elementos.

Identifique cada conjunto como bien definido *o* no bien definido.

57. $\{x|x$ es un número real$\}$

58. $\{x|x$ es un buen atleta$\}$

59. $\{x|x$ es un curso difícil$\}$

60. $\{x|x$ es un número cardinal menor que $2\}$

Llene cada espacio con $\in$ *o* $\notin$ para hacer verdadero cada enunciado.

61. 5 ____ $\{2, 4, 5, 7\}$ **62.** -4 ____ $\{4, 7, 8, 12\}$

63. -12 ____ $\{3, 8, 12, 18\}$ **64.** 0 ____ $\{-2, 0, 5, 9\}$

65. $\{3\}$ ____ $\{2, 3, 4, 6\}$ **66.** $\{6\}$ ____ $\{5 + 1, 6 + 1\}$

67. 8 ____ $\{11 - 2, 10 - 2, 9 - 2, 8 - 2\}$

68. El enunciado $3 \in \{9 - 6, 8 - 6, 7 - 6\}$ es verdadero aun cuando el número 3 no aparece en el conjunto. Explique por qué.

Indique si es verdadero *o* falso *cada uno de los siguientes enunciados.*

69. $3 \in \{2, 5, 6, 8\}$ **70.** $6 \in \{-2, 5, 8, 9\}$

71. $b \in \{h, c, d, a, b\}$ **72.** $m \in \{l, m, n, o, p\}$

73. $9 \notin \{6, 3, 4, 8\}$ **74.** $2 \notin \{7, 6, 5, 4\}$

75. $\{k, c, r, a\} = \{k, c, a, r\}$

76. $\{e, h, a, n\} = \{a, h, e, n\}$ **77.** $\{5, 8, 9\} = \{5, 8, 9, 0\}$

78. $\{3, 7, 12, 14\} = \{3, 7, 12, 14, 0\}$

79. $\{4\} \in \{\{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ **80.** $4 \in \{\{3\}, \{4\}, \{5\}\}$

81. $\{x | x$ es un número natural menor que $3\} = \{1, 2\}$

82. $\{x | x$ es un número natural mayor que $10\} = \{11, 12, 13, \ldots\}$

Indique si es verdadero *o* falso *cada uno de los siguientes enunciados.*

Sea $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{2, 4, 8, 10\}$, y $C = \{4, 10, 12\}$.

83. $4 \in A$ **84.** $8 \in B$

85. $4 \notin C$ **86.** $8 \notin B$

87. Cada elemento de C también es un elemento de A.

88. Cada elemento de C también es un elemento de B.

89. A la mente humana le gusta crear colecciones. ¿Por qué supone que es así? En su explicación considere una o más "colecciones" particulares, ya sean matemáticas o de cualquier otra índole.

90. Explique la diferencia entre un conjunto bien definido y uno que no está bien definido. Dé ejemplos y use los términos presentados en esta sección.

Dos conjuntos son ***iguales*** *si contienen elementos idénticos. Sin embargo, dos conjuntos son* ***equivalentes*** *si contienen el mismo número de elementos (pero no necesariamente los mismos elementos). Dé un ejemplo para cada condición o explique por qué no es posible.*

91. Dos conjuntos que no son iguales ni equivalentes.

92. Dos conjuntos que son iguales, pero no equivalentes.

93. Dos conjuntos que son equivalentes, pero no iguales.

94. Dos conjuntos que son iguales y equivalentes.

95. ***Actores sobrevaluados*** Una investigación de la revista *Forbes* de un periodo reciente de cinco años consideraba a 100 actores de Hollywood. La tabla muestra los 10 "peores actores", en términos de ganancias generadas por sus películas, por cada dólar que el actor ganó.

ACTORES MÁS SOBREVALUADOS

Lugar	Actor	Ganancias por dólar que ganó el actor
1.	Will Ferrell	$3.29
2.	Ewan McGregor	$3.75
3.	Billy Bob Thornton	$4.00
4.	Eddie Murphy	$4.43
5.	Ice Cube	$4.77
6.	Tom Cruise	$7.18
7.	Drew Barrymore	$7.43
8.	Leonardo DiCaprio	$7.52
9.	Samuel L. Jackson	$8.59
10.	Jim Carrey	$8.62

Fuente: Forbes.com

a) Liste el conjunto de actores con una ganancia de por lo menos $7.40.

b) Liste el conjunto de actores con una ganancia de cuando mucho $3.75.

96. ***Quema de calorías*** A Candice Cotton le gustan los algodones azucarados, cada uno de los cuales contiene 220 calorías. Para quemar las calorías no deseadas, Candice participa en las actividades indicadas abajo, en intervalos de 1 hora, y nunca repite la misma actividad en un día.

Actividad	Símbolo	Calorías quemadas por hora
Voleibol	v	160
Golf	g	260
Canotaje	c	340
Natación	s	410
Correr	r	680

a) Los lunes, Candice solo tiene tiempo para dos horas de actividades. Liste todos los posibles conjuntos de actividades que le ayudarían a quemar, por lo menos, el número de calorías de tres algodones de azúcar.

b) Suponga que Candice tiene tres horas para las actividades del miércoles. Liste todos los posibles conjuntos de actividades que le ayudarían a quemar, por lo menos, el número de calorías de cinco algodones de azúcar.

c) Candice tiene cuatro horas para las actividades del sábado. Liste todos los posibles conjuntos de actividades que le ayudarían a quemar, por lo menos, el número de calorías de siete algodones de azúcar.

2.2 DIAGRAMAS DE VENN Y SUBCONJUNTOS

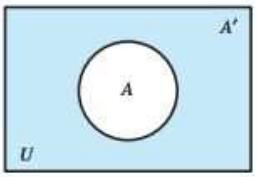
Diagramas de Venn • Complemento de un conjunto • Subconjuntos de un conjunto • Subconjuntos propios • Conteo de subconjuntos

Diagramas de Venn

En el enunciado de un problema existe un **universo de discurso** implícito o explícito. El universo de discurso incluye todos los objetos que se someten a análisis en un momento determinado. Por ejemplo, en el estudio de las reacciones a la propuesta de que en cierto plantel se eleva la edad mínima de los individuos a quienes se les puede vender cerveza, el universo de discurso podrían ser todos los estudiantes de la escuela, los miembros cercanos del público, los miembros del consejo de administración de la escuela, o quizá todos estos grupos de personas.

En teoría de conjuntos, el universo de discurso se llama **conjunto universal**, y se representa normalmente con la letra U. El conjunto universal puede cambiar de un problema a otro.

En teoría de conjuntos también se usan comúnmente los **diagramas de Venn**, desarrollados por el estudioso de la lógica John Venn (1834-1923). En estos diagramas, el conjunto universal se representa con un rectángulo, y los conjuntos de interés dentro del conjunto universal se representan con regiones circulares (algunas veces con óvalos u otras formas). Véase la **figura 1**.



La región total limitada por el rectángulo representa el conjunto universal U, mientras que la parte limitada por el círculo representa el conjunto A.

Figura 1

Complemento de un conjunto

La región sombreada dentro de U y fuera del círculo en la **figura 1** se identifica como A' (se lee "**A prima**"). Este conjunto, llamado el complemento de A, tiene todos los elementos contenidos en U, pero que no están contenidos en A.

Complemento de un conjunto

Para cualquier conjunto A dentro del conjunto universal U, el **complemento** de A, identificado como A', es el conjunto de elementos de U que no son elementos de A. Es decir,

$$A' = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\}.$$

EJEMPLO 1 Obtención de complementos

Obtenga el complemento de cada conjunto.

Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $M = \{a, b, e, f\}$ y $N = \{b, d, e, g, h\}$.

a) M' ***b)*** N'

SOLUCIÓN

a) Hagamos que el conjunto M' contenga los elementos del conjunto U que *no* están en el conjunto M. Como el conjunto M contiene los elementos a, b, e y f, estos elementos se excluyen del conjunto M'.

$$M' = \{c, d, g, h\}$$

b) Hagamos que el conjunto N' contenga los elementos del conjunto U que *no* están en el conjunto N, de manera que $N' = \{a, c, f\}$. ■■■

Considere el complemento U' del conjunto universal. El conjunto U' se obtiene seleccionando todos los elementos de U que no pertenecen a U. No existen tales elementos, de modo que no puede haber elementos en U'. Esto significa que, para cualquier conjunto universal U,

$$U' = \emptyset.$$

Ahora considere el complemento $\emptyset'$ del conjunto vacío. Como $\emptyset' = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin \emptyset\}$ y el conjunto $\emptyset$ no contiene elementos, todos los miembros del conjunto universal U satisfacen esta descripción. Por lo tanto, para cualquier conjunto universal U,

$$\emptyset' = U.$$

Subconjuntos de un conjunto

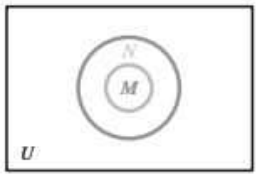


Figura 2

Suponga que tenemos el conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, mientras que $A = \{1, 2, 3\}$. Cada elemento del conjunto A también es un elemento del conjunto U. Debido a esto, el conjunto A se conoce como *subconjunto* del conjunto U, y se escribe como

$$A \subseteq U.$$

("A no es un subconjunto del conjunto U" se representaría como $A \not\subseteq U$).

Un diagrama de Venn que muestra que el conjunto M es un subconjunto del conjunto N se presenta en la **figura 2**.

Subconjunto de un conjunto

El conjunto A es un **subconjunto** del conjunto B si cada elemento de A también es un elemento de B. En símbolos, esto se escribe como $\boldsymbol{A \subseteq B}$.

EJEMPLO 2 Determinación de que un conjunto es subconjunto de otro

Escriba $\subseteq$ o $\not\subseteq$ en cada espacio para que el enunciado sea verdadero.

a) $\{3, 4, 5, 6\}$ ____ $\{3, 4, 5, 6, 8\}$ ***b)*** $\{1, 2, 6\}$ ____ $\{2, 4, 6, 8\}$

c) $\{5, 6, 7, 8\}$ ____ $\{5, 6, 7, 8\}$

SOLUCIÓN

a) Como cada elemento de $\{3, 4, 5, 6\}$ también es un elemento de $\{3, 4, 5, 6, 8\}$, el primer conjunto es un subconjunto del segundo, de modo que se anota $\subseteq$ en el espacio.

$$\{3, 4, 5, 6\} \subseteq \{3, 4, 5, 6, 8\}$$

b) $\{1, 2, 6\} \not\subseteq \{2, 4, 6, 8\}$ 1 no pertenece a $\{2, 4, 6, 8\}$.

c) $\{5, 6, 7, 8\} \subseteq \{5, 6, 7, 8\}$ ■■■

Como sugiere el **ejemplo 2 *c)***, cada conjunto es un subconjunto de sí mismo.

$$\boldsymbol{B \subseteq B,} \quad \textbf{para cualquier conjunto } \boldsymbol{B}.$$

Ahora se puede formalizar el enunciado de igualdad de conjuntos de la **sección 2.1**.

Igualdad de conjuntos (definición alternativa)

Suponga que tenemos los conjuntos A y B. Entonces $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ son verdaderos.

Subconjuntos propios

Suponga que tenemos los siguientes conjuntos:

$$B = \{5, 6, 7, 8\} \text{ y } A = \{6, 7\}$$

A es un subconjunto de B, pero A no es todo B. Hay por lo menos un elemento en B que no está en A. (En realidad, existen en este caso dos elementos, 5 y 8). En esta situación, A se conoce como *subconjunto propio* de B. Para indicar que A es un subconjunto propio de B, se escribe:

$$A \subset B.$$

Observe la similitud de los símbolos de subconjuntos, $\subset$ y $\subseteq$, con los símbolos de desigualdad del álgebra, $<$ y $\leq$.

Subconjunto propio de un conjunto

El conjunto A es un **subconjunto propio** del conjunto B si $A \subseteq B$ y $A \neq B$. En símbolos, esto se escribe como $\boldsymbol{A \subset B}$.

EJEMPLO 3 Identificación de las relaciones entre un subconjunto y el subconjunto propio

Determine si se pueden colocar $\subset$, $\subseteq$ o ambos en cada espacio en blanco para hacer verdadero el enunciado.

a) $\{5,6,7\}$____$\{5,6,7,8\}$ ***b)*** $\{a,b,c\}$____$\{a,b,c\}$

SOLUCIÓN

a) Cada elemento de $\{5,6,7\}$ está contenido en $\{5,6,7,8\}$, de modo que se puede colocar $\subseteq$ en el espacio. Por otro lado, el elemento 8 pertenece a $\{5,6,7,8\}$, pero no a $\{5,6,7\}$, por lo que $\{5,6,7\}$ es un subconjunto propio de $\{5,6,7,8\}$. Coloque $\subset$ en el espacio.

b) El conjunto $\{a,b,c\}$ es un subconjunto de $\{a,b,c\}$. Como los dos conjuntos son iguales, $\{a,b,c\}$ no es un subconjunto propio de $\{a,b,c\}$. Solo se puede colocar $\subseteq$ en el espacio. ■■■

El conjunto A es un subconjunto del conjunto B si cada elemento del conjunto A también es un elemento del conjunto B. Esta definición se puede formular de otra manera diciendo que el conjunto A es un subconjunto del conjunto B si no hay elementos de A que no sean elementos de B. Esta segunda definición muestra que el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.

$$\emptyset \subseteq B, \quad \textbf{para cualquier conjunto } B.$$

Esto es verdadero porque no es posible obtener algún elemento de $\emptyset$ que no esté en B. (No hay elementos en $\emptyset$). El conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto propio de todos los conjuntos, excepto de sí mismo.

$$\emptyset \subset B \quad \textbf{si } B \textbf{ es cualquier conjunto diferente de } \emptyset.$$

Todos los conjuntos (excepto $\emptyset$) tienen por lo menos dos subconjuntos, $\emptyset$ y el conjunto mismo.

EJEMPLO 4 Lista de todos los subconjuntos de un conjunto

Obtenga todos los subconjuntos posibles de cada conjunto.

a) $\{7,8\}$ ***b)*** $\{a,b,c\}$

SOLUCIÓN

a) Por ensayo y error vemos que el conjunto $\{7,8\}$ tiene cuatro subconjuntos: $\emptyset$, $\{7\}$, $\{8\}$, $\{7,8\}$.

b) Aquí, el ensayo y error nos muestra ocho subconjuntos para $\{a,b,c\}$:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}.$$ ■■■

Conteo de subconjuntos

En el **ejemplo 4**, los subconjuntos de $\{7,8\}$ y los subconjuntos de $\{a,b,c\}$ se obtuvieron por ensayo y error. Un método alternativo implica el dibujo de un **diagrama de árbol**, una manera sistemática de listar todos los subconjuntos de un conjunto determinado. Véase la **figura 3**.

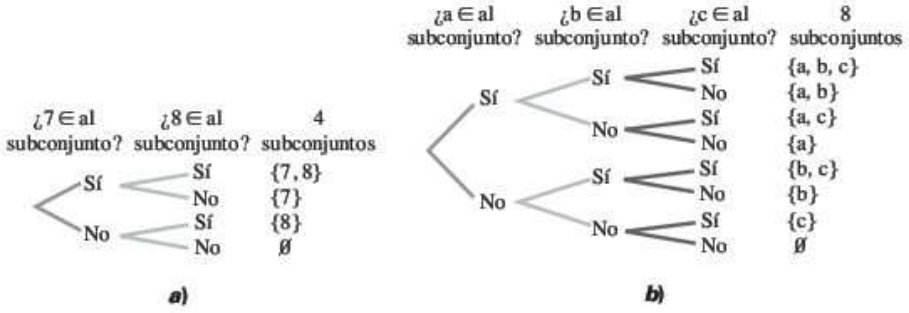


Figura 3

Potencias de 2

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$
$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$
$2^{11} = 2048$
$2^{12} = 4096$
$2^{15} = 32{,}768$
$2^{20} = 1{,}048{,}576$
$2^{25} = 33{,}554{,}432$
$2^{30} = 1{,}073{,}741{,}824$

En el **ejemplo 4** determinamos el número de subconjuntos de un conjunto particular haciendo una lista de todos los subconjuntos y contándolos. El método del diagrama de árbol también produce una lista de todos los subconjuntos posibles. Para obtener una fórmula que permita calcular el número de subconjuntos, usamos razonamiento inductivo. Es decir, observamos casos particulares para intentar descubrir un patrón general.

Se inicia con el conjunto que contiene el número mínimo posible de elementos: el conjunto vacío. Este conjunto, $\emptyset$, solo tiene un subconjunto, $\emptyset$ mismo. En seguida, el conjunto con un elemento tiene solo dos subconjuntos, él mismo y $\emptyset$. Estos hechos, junto con los obtenidos en el **ejemplo 4** para conjuntos con dos y tres elementos, se resumen como sigue:

Número de elementos	0	1	2	3
Número de subconjuntos	1	2	4	8

Esta tabla sugiere que conforme el número de elementos del conjunto se incrementa en uno, el número de subconjuntos se duplica. Si es así, entonces el número de subconjuntos en cada caso podría ser una potencia de 2. Como cada número de la segunda fila de la tabla es claramente una potencia de 2, se agrega esta información a la tabla.

Número de elementos	0	1	2	3
Número de subconjuntos	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$

Esta tabla indica que el número de elementos en cada caso es el mismo que el exponente de la base 2. El razonamiento inductivo proporciona la siguiente generalización.

Número de subconjuntos

El número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es $\mathbf{2^n}$.

Como el valor 2^n incluye al conjunto mismo, debemos restar 1 de este valor para obtener el número de subconjuntos propios de un conjunto que contiene n elementos.

Número de subconjuntos propios

El número de subconjuntos propios de un conjunto con n elementos es $\mathbf{2^n - 1}$.

Como se vio en el **capítulo 1**, aun cuando el razonamiento inductivo es una buena manera de *descubrir* principios o hacer *conjeturas*, no ofrece una prueba de que la conjetura es verdadera en general. Las dos fórmulas anteriores son verdaderas, por observación, para $n = 0, 1, 2$ o 3. (Para una prueba general, véase el **ejercicio 69** al final de esta sección).

EJEMPLO 5 Obtención del número de subconjuntos y de subconjuntos propios

Obtenga los números de subconjuntos y los subconjuntos propios de cada conjunto.

a) $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ ***b)*** $\{1, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 14\}$

SOLUCIÓN

a) Este conjunto tiene 5 elementos y $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ subconjuntos. De estos, $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$ son subconjuntos propios.

b) Este conjunto tiene 8 elementos. Hay $2^8 = 256$ subconjuntos y 255 subconjuntos propios.

2.2 EJERCICIOS

Asocie cada conjunto o conjuntos de la columna I con la descripción adecuada de la columna II.

I	II
1. $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \emptyset$	**A.** Los subconjuntos propios de $\{p, q\}$
2. $\{p\}, \{q\}, \emptyset$	**B.** El complemento de $\{c, d\}$, si $U = \{a, b, c, d\}$
3. $\{a, b\}$	**C.** El complemento de U
4. $\emptyset$	**D.** Los subconjuntos de $\{p, q\}$

Inserte $\subseteq$ o $\not\subseteq$ en los espacios, de modo que el enunciado resultante sea verdadero.

5. $\{-2, 0, 2\}$ ____ $\{-2, -1, 1, 2\}$

6. $\{M, W, F\}$ ____ $\{S, M, T, W, Th\}$

7. $\{2, 5\}$ ____ $\{0, 1, 5, 3, 7, 2\}$

8. $\{a, n, d\}$ ____ $\{r, a, n, d, y\}$

9. $\emptyset$ ____ $\{a, b, c, d, e\}$

10. $\emptyset$ ____ $\emptyset$

11. $\{-5, 2, 9\}$ ____ $\{x | x$ es un número entero impar$\}$

12. $\left\{1, 2, \frac{9}{3}\right\}$ ____ el conjunto de números racionales

Determine si es posible colocar $\subset, \subseteq$, ambos o ninguno de esos símbolos en los espacios para hacer verdadero el enunciado.

13. $\{P, Q, R\}$ ____ $\{P, Q, R, S\}$

14. {rojo, azul, amarillo} ____ {amarillo, azul, rojo}

15. $\{9, 1, 7, 3, 5\}$ ____ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

16. $\{S, M, T, W, Th\}$ ____ $\{W, E, E, K\}$

17. $\emptyset$ ____ $\{0\}$

18. $\emptyset$ ____ $\emptyset$

19. $\{0, 1, 2, 3\}$ ____ $\{1, 2, 3, 4\}$

20. $\left\{\frac{5}{6}, \frac{9}{8}\right\}$ ____ $\left\{\frac{6}{5}, \frac{8}{9}\right\}$

En los ejercicios 21 a 40, indique si cada enunciado es verdadero *o* falso. *U es el conjunto universal.*

Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, e\}$,

$B = \{a, b, e, f, g\}$, $C = \{b, f, g\}$, *y* $D = \{d, e\}$.

21. $A \subset U$

22. $C \not\subset U$

23. $D \subseteq B$

24. $D \not\subseteq A$

25. $A \subset B$

26. $B \subseteq C$

27. $\emptyset \not\subset A$

28. $\emptyset \subseteq D$

29. $\emptyset \subseteq \emptyset$

30. $D \subset B$

31. $D \not\subseteq B$

32. $A \not\subseteq B$

33. Hay exactamente 6 subconjuntos de C.

34. Hay exactamente 31 subconjuntos de B.

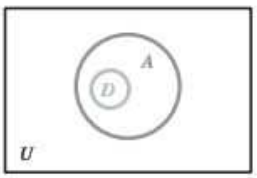
35. Hay exactamente 3 subconjuntos propios de A.

36. Hay exactamente 4 subconjuntos de D.

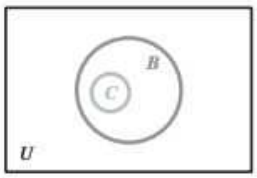
37. Hay exactamente 1 subconjunto de $\emptyset$.

38. Hay exactamente 128 subconjuntos propios de U.

39. El siguiente diagrama de Venn representa correctamente la relación entre los conjuntos A, D y U.



40. El siguiente diagrama de Venn representa correctamente la relación entre los conjuntos B, C y U.



Obtenga **a)** *el número de subconjuntos y* **b)** *el número de subconjuntos propios de cada conjunto.*

41. $\{a, b, c, d, e, f\}$

42. El conjunto de días de la semana

43. $\{x | x$ es un número entero impar entre -4 y $6\}$

44. $\{x | x$ es un número entero no negativo impar menor que $4\}$

Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *y obtenga el complemento de cada conjunto.*

45. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

46. $\{2, 5, 9, 10\}$

47. $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

48. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

49. U

50. $\emptyset$

Vacaciones en California *Terry McGinnis está planeando un viaje con sus dos hijos a California. Al evaluar sus opciones en relación con viajar en avión o conducir de su casa en Iowa, incluyó las siguientes características.*

Volar a California	Conducir a California
Costo más alto	Costo más bajo
Didáctico	Didáctico
Más tiempo para ver el panorama de California	Menos tiempo para ver el panorama de California
No se puede visitar a los familiares a lo largo del camino	Se puede visitar a los familiares a lo largo del camino

Refiérase a estas características en los ejercicios 51 a 56.

51. Obtenga el conjunto universal U más pequeño que contenga todas las características listadas de ambas opciones.

Considere que F representa el conjunto de características de la opción de volar, y que D representa el conjunto de características de la opción de conducir. Use el conjunto universal del ***ejercicio 51****.*

52. Obtenga el conjunto F' **53.** Obtenga el conjunto D'

Obtenga el conjunto de elementos comunes a ambos conjuntos en los ejercicios 54 a 56.

54. F y D **55.** F' y D'

56. F y D'

Encuentro en la suite Hospitalidad *Amie Carobrese, Bruce Collin, Corey Chapman, Dwayne Coy y Eric Cobbe planean encontrarse en la suite Hospitalidad después de que el director general termine su discurso en la junta de ventas de enero de su compañía de publicidad. Identifique a estas cinco personas por A, B, C, D y E, liste todos los conjuntos posibles de este grupo en los cuales se pueda reunir el siguiente número de personas.*

57. Cinco personas **58.** Cuatro personas

59. Tres personas **60.** Dos personas

61. Una persona **62.** Ninguna persona

63. Obtenga el número total de maneras en que los miembros de este grupo se pueden reunir en la suite. (*Sugerencia:* Obtenga el número total de conjuntos en sus respuestas de los **ejercicios 57 a 62**).

64. ¿Cómo se compara la respuesta del **ejercicio 63** con el número de subconjuntos de un conjunto de cinco elementos? Interprete la respuesta del **ejercicio 63** en términos de subconjuntos.

65. Los 25 miembros del club de matemáticas deben enviar una delegación a la junta de grupos de estudiantes en su escuela. La delegación puede incluir tantos miembros del club como se desee, pero al menos debe asistir un miembro. ¿Cuántas delegaciones diferentes son posibles? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

66. En el **ejercicio 65**, suponga que 10 de los miembros del club dicen que no desean participar en la delegación. Ahora, ¿cuántas delegaciones son posibles?

67. ***Selección de billetes*** Suponga que usted tiene los billetes mostrados.



a) Si usted debe seleccionar al menos un billete, y puede seleccionar todos los billetes, ¿cuántas sumas de dinero puede obtener?

b) En el inciso ***a)***, elimine la condición "debe seleccionar al menos un billete". ¿Cuántas sumas son posibles?

68. ***Selección de monedas*** La fotografía muestra un grupo de monedas estadounidenses obsoletas, integradas por una moneda de un centavo, una de cinco centavos, una de 10 centavos, una de 25 centavos, y una de 50 centavos. Repita el **ejercicio 67** sustituyendo "billete(s) por "moneda(s)".



69. En la deducción de la expresión (2^n) para obtener el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos, observamos que para unos cuantos primeros valores de n, el incremento en uno del número de elementos duplica el número de subconjuntos. Aquí, usted puede someter a prueba la fórmula en general demostrando que lo mismo es verdadero para cualquier valor de n. Suponga que el conjunto A tiene n elementos y s subconjuntos. Ahora sume un elemento adicional, digamos e, al conjunto A. (Ahora tenemos un nuevo conjunto, digamos B, con $n+1$ elementos). Divida los subconjuntos de B en los que contienen e y los que no contienen e.

a) ¿Cuántos subconjuntos de B no contienen e? (*Sugerencia:* Considere que cada uno de estos es un subconjunto del conjunto original A).

b) ¿Cuántos subconjuntos de B contienen e? (*Sugerencia:* Considere que cada uno de estos es un subconjunto del conjunto original A, con el elemento e insertado).

c) ¿Cuál es el número total de subconjuntos de B?

d) ¿Qué concluye usted?

70. Esplique por qué $\emptyset$ es tanto un subconjunto como un elemento de $\{\emptyset\}$.

2.3 OPERACIONES CON CONJUNTOS Y PRODUCTOS CARTESIANOS

Intersección de conjuntos • Unión de conjuntos • Diferencia de conjuntos • Pares ordenados • Producto cartesiano de conjuntos • Diagramas de Venn • Leyes de De Morgan

Intersección de conjuntos

Dos candidatos, Aimee Berger y Darien Estes, están compitiendo por una curul en el Congreso de la ciudad. Un votante trata de decidir por quién votar recordando las promesas de campaña hechas por los candidatos; cada promesa se identifica con una letra.

Aimee Berger	**Darien Estes**
Gastar menos dinero, m	Gastar menos dinero, m
Reforzar el cumplimiento de las leyes de tránsito, t	Tomar medidas enérgicas contra políticos deshonestos, p
Incrementar los servicios en áreas suburbanas, s	Incrementar los servicios en la ciudad, c

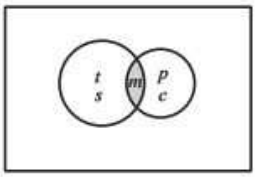


Figura 4

La única promesa común de ambos candidatos es la promesa m: gastar menos dinero. Supongamos que tomamos las promesas de cada candidato como un conjunto. Con las promesas de Berger se obtiene el conjunto $\{m, t, s\}$, mientras que con las promesas de Estes tenemos $\{m, p, c\}$. El elemento común m pertenece a la *intersección* de los dos conjuntos, como lo muestra la zona sombreada del diagrama de Venn de la **figura 4**.

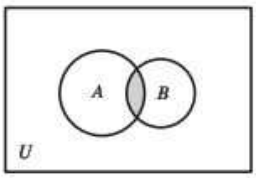
$$\{m, t, s\} \cap \{m, p, c\} = \{m\}$$ $\cap$ representa la intersección de conjuntos.

La intersección de dos conjuntos es por sí misma un conjunto.

Intersección de conjuntos

La **intersección** de los conjuntos A y B, representada por $A \cap B$, es el conjunto de elementos comunes para A y B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$



$A \cap B$

Figura 5

La intersección de los conjuntos A y B se forma tomando todos los elementos incluidos en ambos conjuntos, como muestra el área sombreada de la **figura 5**.



La luz blanca se puede ver como la intersección de los tres colores primarios.

EJEMPLO 1 Obtención de intersecciones

Obtenga cada intersección.

a) $\{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{4, 6, 8, 10\}$ ***b)*** $\{9, 14, 25, 30\} \cap \{10, 17, 19, 38, 52\}$

c) $\{5, 9, 11\} \cap \emptyset$

SOLUCIÓN

a) Los elementos comunes a ambos conjuntos son 4 y 6.

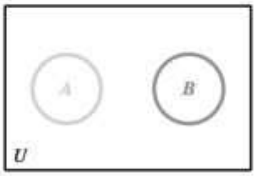
$$\{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{4, 6, 8, 10\} = \{4, 6\}$$

b) Estos dos conjuntos no tienen elementos comunes.

$$\{9, 14, 25, 30\} \cap \{10, 17, 19, 38, 52\} = \emptyset$$

c) No hay elementos en $\emptyset$, de modo que no hay elementos que pertenezcan a $\{5, 9, 11\}$ y $\emptyset$.

$$\{5, 9, 11\} \cap \emptyset = \emptyset$$



Conjuntos disjuntos

Figura 6

Los **ejemplos 1 *b*) y 1 *c*)** muestran dos conjuntos que no tienen elementos en común. Los conjuntos sin elementos comunes se llaman conjuntos disjuntos (véase la **figura 6**). Un conjunto de perros y un conjunto de gatos son conjuntos disjuntos.

Los conjuntos A y B son disjuntos si $A \cap B = \emptyset$.

Unión de conjuntos

Una vez más en relación con las listas de promesas de campaña, suponga que un encuestador quiere resumir los tipos de promesas hechas por los candidatos. El encuestador necesitaría estudiar *todas* las promesas de *cada* candidato, es decir, el conjunto $\{m, t, s, p, c\}$. Este conjunto es la *unión* de los conjuntos de promesas, como muestra el área sombreada del diagrama de Venn en la **figura 7**.

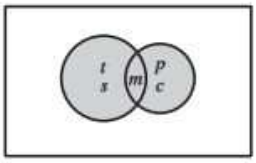


Figura 7

Tenga cuidado de no confundir este símbolo con el conjunto universal U.

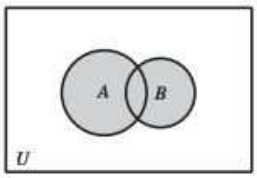
$\{m, t, s\} \cup \{m, p, c\} = \{m, t, s, p, c\}$ $\cup$ denota unión de conjuntos.

Nuevamente, la unión de dos conjuntos es un conjunto.

Unión de conjuntos

La **unión** de los conjuntos A y B, representada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$



$A \cup B$

Figura 8

***La unión de los conjuntos A y B se forma tomando todos los elementos del conjunto A e incluyendo los elementos del conjunto B que no están en la lista. Véase la* figura 8.**

EJEMPLO 2 Obtención de uniones

Obtenga cada unión.

a) $\{2, 4, 6\} \cup \{4, 6, 8, 10, 12\}$

b) $\{a, b, d, f, g, h\} \cup \{c, f, g, h, k\}$

c) $\{3, 4, 5\} \cup \emptyset$

SOLUCIÓN

a) Inicie listando todos los elementos del primer conjunto, 2, 4 y 6. Luego liste todos los elementos del segundo conjunto, que no están en el primer conjunto, 8, 10 y 12. La unión se forma con *todos* estos elementos.

$$\{2, 4, 6\} \cup \{4, 6, 8, 10, 12\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

b) $\{a, b, d, f, g, h\} \cup \{c, f, g, h, k\} = \{a, b, c, d, f, g, h, k\}$

c) Como no hay elementos en $\emptyset$, la unión de $\{3, 4, 5\}$ y $\emptyset$ solo contiene los elementos 3, 4 y 5.

$$\{3, 4, 5\} \cup \emptyset = \{3, 4, 5\}$$

Recuerde de la sección anterior que A' representa el *complemento* del conjunto A. ***El conjunto A' se forma tomando todos los elementos del conjunto universal U que no están en el conjunto A.***

EJEMPLO 3 Obtención de intersecciones y uniones de complementos

Obtenga cada conjunto. Sea

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\},\ A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{2, 4, 6\},\ \text{y}\ C = \{1, 3, 6, 9\}.$$

a) $A' \cap B$ ***b)*** $B' \cup C'$ ***c)*** $A \cap (B \cup C')$ ***d)*** $(A' \cup C') \cap B'$

SOLUCIÓN

a) Primero se identifican los elementos del conjunto A', esto es, los elementos de U que no están en el conjunto A.

$$A' = \{5, 6, 9\}$$

Ahora, obtenga $A' \cap B$, el conjunto con los elementos que pertenecen tanto a A' como a B.

$$A' \cap B = \{5, 6, 9\} \cap \{2, 4, 6\} = \{6\}$$

b) $B' \cup C' = \{1, 3, 5, 9\} \cup \{2, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$

c) Primero obtenga el conjunto dentro del paréntesis.

$$B \cup C' = \{2, 4, 6\} \cup \{2, 4, 5\} = \{2, 4, 5, 6\}$$

Ahora, obtenga la intersección de este conjunto con A.

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C') &= A \cap \{2, 4, 5, 6\} \\ &= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5, 6\} \\ &= \{2, 4\} \end{aligned}$$

d) $A' = \{5, 6, 9\}$ y $C' = \{2, 4, 5\}$, de manera que

$$A' \cup C' = \{5, 6, 9\} \cup \{2, 4, 5\} = \{2, 4, 5, 6, 9\}.$$

$B' = \{1, 3, 5, 9\}$, de manera que

$$(A' \cup C') \cap B' = \{2, 4, 5, 6, 9\} \cap \{1, 3, 5, 9\} = \{5, 9\}.$$

Para reflexionar

Comparación de propiedades

Las operaciones aritméticas de suma y multiplicación, cuando se aplican a números, tienen algunas propiedades conocidas. Si a, b y c son *números reales*, entonces la **propiedad conmutativa de la suma** dice que el orden de los números que se suman no importa:

$$a + b = b + a.$$

(¿Existe la **propiedad conmutativa en la multiplicación?**). **La propiedad asociativa de la suma** dice que cuando se suman tres números, no importa la agrupación de los mismos:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

(¿Existe la **propiedad asociativa en la multiplicación?**). El número 0 se conoce como el **elemento de identidad de la adición**, puesto que cuando se suma a cualquier número, este último no cambia.

$$a + 0 = a.$$

(¿Cuál es el **elemento de identidad de la multiplicación?**). Finalmente, la **propiedad distributiva de la multiplicación** sobre la suma dice que

$$a(b + c) = ab + ac.$$

(¿Existe una propiedad distributiva de la suma sobre la multiplicación?).

Para investigación individual o en grupo

Ahora considere las operaciones de unión e intersección, aplicadas a los conjuntos. Considerando definiciones o ejemplos, conteste las siguientes preguntas.

1. ¿La unión de conjuntos es conmutativa? ¿Y la intersección de conjuntos?
2. ¿La unión de conjuntos es asociativa? ¿Y la intersección de conjuntos?
3. ¿Existe un elemento de identidad para la unión de conjuntos? Si es así, ¿cuál es? ¿Y en la intersección de conjuntos?
4. ¿La intersección de conjuntos es distributiva sobre la unión de conjuntos? ¿La unión de conjuntos es distributiva sobre la intersección de conjuntos?

EJEMPLO 4 Descripción de conjuntos con palabras

Describa con palabras cada conjunto

a) $A \cap (B \cup C')$ ***b)*** $(A' \cup C') \cap B'$

SOLUCIÓN

a) Este conjunto se podría describir como "el conjunto que contiene todos los elementos de A y que también están en B o no están en C".

b) Una posibilidad es "el conjunto de todos los elementos que no están en A o no están en C, y tampoco están en B". ■■■

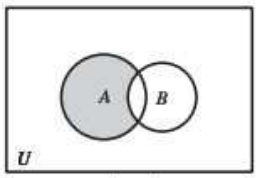
Diferencia de conjuntos

Suponga que $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Si se excluyen los elementos de B (o se separan) de A, se obtiene el conjunto $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. C se conoce como la *diferencia* de los conjuntos A y B.

Diferencia de conjuntos

La **diferencia** de los conjuntos A y B, representada como $A - B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto A, pero que no pertenecen al conjunto B.

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$$



$A - B$

Figura 9

Como $x \notin B$ tiene el mismo significado que $x \in B'$, la diferencia de los conjuntos $A - B$ también se puede describir como

$$\{x | x \in A \text{ y } x \in B'\}, \quad \text{o} \quad A \cap B'.$$

La **figura 9** ilustra la idea de la diferencia de conjuntos. La región sombreada representa $A - B$.

EJEMPLO 5 Cálculo de diferencias de conjuntos

Obtenga cada conjunto.

$$\text{Sea } U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$B = \{2, 3, 6\}, \quad \text{y} \quad C = \{3, 5, 7\}.$$

a) $A - B$ ***b)*** $B - A$ ***c)*** $(A - B) \cup C'$

SOLUCIÓN

a) Inicie con el conjunto A y excluya todos los elementos que también se encuentran en el conjunto B.

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 3, 6\} = \{1, 4, 5\}$$

b) Para estar en $B - A$, un elemento debe estar en el conjunto B y no en el conjunto A. Pero todos los elementos de B también están en A. Por lo tanto, $B - A = \emptyset$.

c) Partiendo del inciso *a)*, $A - B = \{1, 4, 5\}$. También, $C' = \{1, 2, 4, 6\}$. ■■■

$$(A - B) \cup C' = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

Los resultados de los **ejemplos 5 *a)* y 5 *b)*** ilustran que, en general,

$$A - B \neq B - A.$$

Pares ordenados

Cuando se escribe un conjunto que contiene varios elementos, el orden en el cual aparecen los elementos no es relevante. Por ejemplo,

$$\{1, 5\} = \{5, 1\}.$$

Sin embargo, existen muchas situaciones en matemáticas en que, cuando dos objetos están aparejados, el orden en el cual se escriben los objetos es importante. Esto trae consigo la idea del *par ordenado*. Cuando se escriben pares ordenados, se usan paréntesis en lugar de llaves, las cuales se reservan para la escritura de conjuntos.

Pares ordenados

En el **par ordenado** (a, b), a se llama **primer componente** y b es el **segundo componente**. En general, $(a, b) \neq (b, a)$.

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son **iguales** siempre y cuando sus primeros componentes sean iguales, y sus segundos componentes sean iguales.

$$(a, b) = (c, d) \quad \textit{si y sólo si} \quad a = c \text{ y } b = d.$$

EJEMPLO 6 Determinación de la igualdad de conjuntos y de pares ordenados

Identifique si cada enunciado es *falso* o *verdadero*.

a) $(3, 4) = (5 - 2, 1 + 3)$ **b)** $\{3, 4\} \neq \{4, 3\}$ **c)** $(7, 4) = (4, 7)$

SOLUCIÓN

a) Como $3 = 5 - 2$ y $4 = 1 + 3$, los primeros componentes son iguales y los segundos componentes también son iguales. El enunciado es *verdadero*.

b) Como estos son conjuntos y no pares ordenados, el orden en el cual se listan los elementos no importa. Como estos conjuntos son iguales, el enunciado es *falso*.

c) Los pares ordenados $(7, 4)$ y $(4, 7)$ no son iguales porque no satisfacen los requerimientos de igualdad de los pares ordenados. El enunciado es *falso*. ■■■

Producto cartesiano de conjuntos

Un conjunto puede contener pares ordenados como elementos. Si A y B son conjuntos, entonces cada elemento de A se puede aparejar con cada elemento de B, y los resultados se pueden escribir como pares ordenados. El conjunto de todos estos pares ordenados se llama *producto cartesiano* de A y B, y se representa como $A \times B$ y se lee "A por B". El nombre del producto se debe al matemático francés René Descartes.

Producto cartesiano de conjuntos

El producto cartesiano de los conjuntos A y B se define como sigue.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

EJEMPLO 7 Cálculo de productos cartesianos

Sea $A = \{1, 5, 9\}$ y $B = \{6, 7\}$. Obtenga cada conjunto siguiente.

a) $A \times B$ **b)** $B \times A$

SOLUCIÓN

a) Se apareja cada elemento de A con cada elemento de B. Se escriben los resultados como pares ordenados, con el elemento de A escrito primero y el elemento de B en segundo lugar. Se escribe el conjunto.

$$A \times B = \{(1, 6), (1, 7), (5, 6), (5, 7), (9, 6), (9, 7)\}$$

b) Como B está primero, este conjunto consiste en pares ordenados que tienen sus componentes intercambiados cuando se comparan con los del inciso ***a)***.

$$B \times A = \{(6, 1), (7, 1), (6, 5), (7, 5), (6, 9), (7, 9)\}$$

El orden en el cual se listan los pares ordenados no es importante. Por ejemplo, otro modo de escribir $B \times A$ en el **ejemplo 7*b)*** sería:

$$\{(6, 1), (6, 5), (6, 9), (7, 1), (7, 5), (7, 9)\}.$$

EJEMPLO 8 Obtención del producto cartesiano de un conjunto multiplicado por sí mismo

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Calcule $A \times A$.

SOLUCIÓN

Se apareja el 1 con cada elemento del conjunto, el 2 con cada elemento del conjunto, y así sucesivamente.

$$\begin{aligned} A \times A = \{&(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),\\ &(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),\\ &(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),\\ &(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),\\ &(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),\\ &(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \end{aligned}$$



El **producto cartesiano** del **ejemplo 8** representa todos los resultados posibles que se obtienen cuando se lanzan dos dados. Este producto cartesiano es importante cuando se estudian ciertos problemas en técnicas de conteo y probabilidad.

A partir del **ejemplo 7** se observa que, en general,

$$\boldsymbol{A \times B \neq B \times A},$$

porque no contienen exactamente los mismos pares ordenados. Sin embargo, cada conjunto posee el mismo número de elementos, seis. Además, $n(A) = 3$, $n(B) = 2$, y $n(A \times B) = n(B \times A) = 6$. Como $3 \cdot 2 = 6$, uno podría concluir que el número cardinal del producto cartesiano de dos conjuntos es igual al producto de los dos números cardinales de los conjuntos. En general, esta conclusión es correcta.

Número cardinal de un producto cartesiano

Si $n(A) = a$ y $n(B) = b$, entonces, lo siguiente es verdadero.

$$\boldsymbol{n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \cdot n(B) = n(B) \cdot n(A) = ab = ba}$$

EJEMPLO 9 Obtención de números cardinales de productos cartesianos

Obtenga $n(A \times B)$ y $n(B \times A)$ a partir de la información proporcionada.

a) $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$ ***b)*** $n(A) = 24$ y $n(B) = 5$

SOLUCIÓN

a) Como $n(A) = 7$ y $n(B) = 3$, $n(A \times B)$ y $n(B \times A)$ son iguales a $7 \cdot 3$, es decir, 21.

b) $n(A \times B) = n(B \times A) = 24 \cdot 5 = 5 \cdot 24 = 120$

Una **operación** es una regla o un procedimiento por medio del cual se usa uno o más objetos para obtener otro objeto. Las operaciones más comunes sobre conjuntos se resumen en el cuadro de la página siguiente.

Operaciones de conjuntos

Sean A y B conjuntos cualesquiera, y U el conjunto universal.

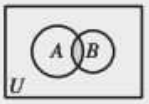
El **complemento** de A, representado por A' es:

$$A' = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\}.$$



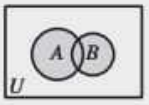
La **intersección** de A y B es:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



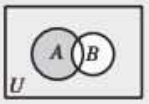
La **unión** de A y B es:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$



La **diferencia** de A y B es:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$



El **producto cartesiano** de A y B es:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ y } y \in B\}.$$

Diagramas de Venn

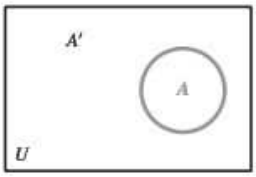
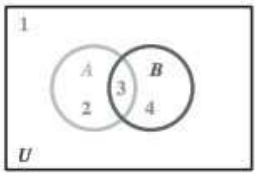


Figura 10

Se puede usar el diagrama de Venn con un solo conjunto como en la **figura 10**. El conjunto universal U se divide en dos regiones: una representa el conjunto A y la otra representa el conjunto A'.

Dos conjuntos A y B dentro del conjunto universal sugieren un diagrama de Venn como el de la **figura 11**. La región 1 incluye aquellos elementos fuera de ambos conjuntos A y B. La región 2 incluye los elementos que pertenecen a A, pero no a B. La región 3 incluye aquellos elementos que pertenecen tanto a A como a B. ¿Cómo describiría los elementos de la región 4?

EJEMPLO 10 Sombreado de diagramas de Venn para representar conjuntos



La numeración es arbitraria. Los números señalan cuatro regiones, no números cardinales ni elementos.

Figura 11

Dibuje un diagrama de Venn similar al de la **figura 11** y sombree la región o regiones que representan cada conjunto.

a) $A' \cap B$ ***b)*** $A' \cup B'$

SOLUCIÓN

a) Observe la **figura 11**. El conjunto A' contiene todos los elementos fuera del conjunto A; en otras palabras, los elementos en las regiones 1 y 4. El conjunto B está conformado por los elementos en las regiones 3 y 4. La intersección de los conjuntos A' y B está formada por los elementos en la región común (1 y 4) y (3 y 4), que corresponde a la región 4. Por lo tanto, $A' \cap B$ está representada por la región 4, sombreada en la **figura 12**. Esta región también se puede describir como $B - A$.

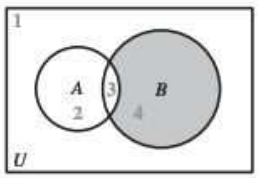


Figura 12

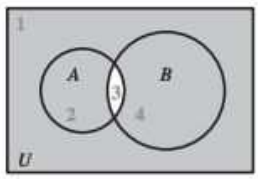


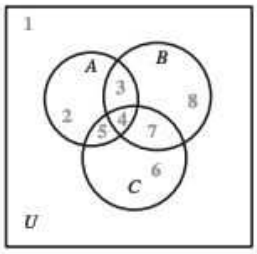
Figura 13

b) Nuevamente, el conjunto A' está representado por las regiones 1 y 4, mientras que B' está formado por las regiones 1 y 2. La unión de A' y B', el conjunto $A' \cup B'$, está integrada por los elementos que pertenecen a la unión de las regiones 1, 2 y 4, la cual está sombreada en la **figura 13**.

EJEMPLO 11 Localización de elementos en un diagrama de Venn

Coloque los elementos de los conjuntos en sus ubicaciones correctas en un diagrama de Venn.

Sean $U = \{q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$, $A = \{r, s, t, u, v\}$, y $B = \{t, v, x\}$.



La numeración es arbitraria. Los números indican regiones, no números cardinales o elementos.

Figura 15

SOLUCIÓN

Como $A \cap B = \{t, v\}$, los elementos t y v se colocan en la región 3 de la **figura 14**. Los elementos restantes de A, es decir, r, s y u van en la región 2. La figura muestra la ubicación correcta de los demás elementos.

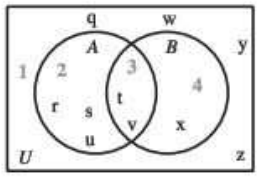
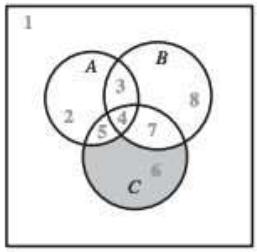


Figura 14

Para incluir tres conjuntos A, B y C, dentro de un conjunto universal, se dibuja un diagrama de Venn como el de la **figura 15**, donde nuevamente se muestra la numeración arbitraria de las regiones.

EJEMPLO 12 Sombreado de un conjunto en un diagrama de Venn

Sombree el conjunto $(A' \cap B') \cap C$ en un diagrama de Venn, similar al de la **figura 15**.



$(A' \cap B') \cap C$

Figura 16

SOLUCIÓN

Primero trabaje dentro del paréntesis. Como se muestra en la **figura 16**, el conjunto A' está formado por las regiones fuera del conjunto A, es decir, las regiones 1, 6, 7 y 8. El conjunto B' está integrado por las regiones 1, 2, 5 y 6. La intersección de estos conjuntos está dada por el traslape de las regiones 1, 6, 7 y 8, y las regiones 1, 2, 5 y 6, es decir, las regiones 1 y 6.

Para el diagrama de Venn final se obtiene la intersección de las regiones 1 y 6 con el conjunto C. Como se observa en la **figura 16**, el conjunto C está formado por las regiones 4, 5, 6 y 7. El traslape de las regiones 1, 6 y 4, 5, 6, 7 es la región 6, la región sombreada de la **figura 16**.

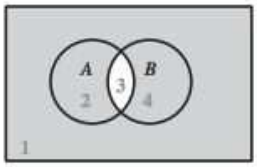
EJEMPLO 13 Verificación de un enunciado mediante un diagrama de Venn

El enunciado $(A \cap B)' = A' \cup B'$, ¿es verdadero para todos los conjuntos A y B?

SOLUCIÓN

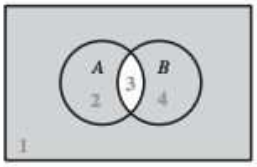
Para facilitar la solución, use las regiones identificadas en la **figura 11**. El conjunto $A \cap B$ está formado por la región 3, de modo que $(A \cap B)'$ está integrado por las regiones 1, 2 y 4. Estas regiones están sombreadas en la **figura 17*a***).

Para obtener el diagrama de Venn del conjunto $A' \cup B'$, se verifica primero que A' está formada por las regiones 1 y 4, mientras que el conjunto B' incluye las regiones 1 y 2. Finalmente, $A' \cup B'$ se integra con las regiones 1 y 4, o 1 y 2, es decir, las regiones 1, 2 y 4. Estas regiones están sombreadas en la **figura 17*b***).



$(A \cap B)'$ está sombreada.

a)



$A' \cup B'$ está sombreada.

b)

Figura 17

El hecho de que las mismas regiones estén sombreadas en ambos diagramas de Venn sugiere que

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Leyes de De Morgan

El resultado del **ejemplo 13** se puede expresar con palabras.

El complemento de la intersección de dos conjuntos es igual a la unión de los complementos de los dos conjuntos.

Como consecuencia, es natural preguntarnos si también es verdad que el complemento de la *unión* de dos conjuntos es igual a la *intersección* de los complementos de los dos conjuntos (donde las palabras "intersección" y "unión" se sustituyen entre sí). El especialista en lógica, el británico Augustus de Morgan (1806-1871), investigó este asunto y encontró que es verdadero. (Véase la nota al margen de la **página 21**). A continuación se presentan las dos leyes de De Morgan para conjuntos.

Leyes de De Morgan para conjuntos

Para dos conjuntos A y B,

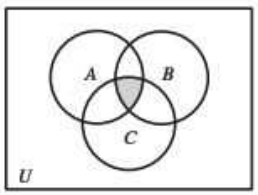
$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{y} \quad (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Los diagramas de Venn de la **figura 17** demuestran de forma contundente el carácter verdadero de la primera de las leyes de De Morgan. Proporcionan una *conjetura*. Las pruebas reales de las leyes de De Morgan requerirían métodos utilizados en cursos más avanzados de teoría de conjuntos.

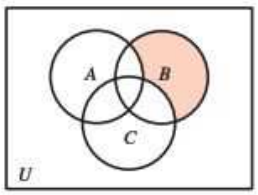
EJEMPLO 14 Descripción de regiones en diagramas de Venn utilizando símbolos

En los siguientes diagramas de Venn, haga una descripción simbólica de la región sombreada, usando A, B, $\cap$, $\cup$, $-$ y $'$ las veces que sea necesario.

a)



b)



c) Remítase a la figura del inciso ***b)*** y encuentre dos maneras más para describir la región sombreada.

SOLUCIÓN

a) La región sombreada pertenece a los tres conjuntos, A, B y C. Por lo tanto, la región corresponde a

$$A \cap B \cap C.$$

b) La región sombreada se encuentra en el conjunto B, y no pertenece a A ni a C. Como no pertenece a A, se encuentra en A'; lo mismo ocurre con C'. Por lo tanto, la región se encuentra en B, A' y C', y es igual a:

$$B \cap A' \cap C'.$$

c) La región sombreada ocupa totalmente B con excepción de las regiones que pertenecen tanto a A como a C. Esto sugiere la idea de la diferencia de conjuntos. La región se puede describir como:

$$B - (A \cup C), \quad \text{o de manera equivalente,} \quad B \cap (A \cup C)'.$$

2.3 EJERCICIOS

Asocie cada término del grupo I con la descripción apropiada (A a F) del grupo II. Suponga que A y B son conjuntos.

I

1. La intersección de A y B.
2. La unión de A y B.
3. La diferencia de A y B.
4. El complemento de A.
5. El producto cartesiano de A y B.
6. La diferencia de B y A.

II

A. El conjunto de elementos de A que no están en B.

B. El conjunto de elementos comunes a A y B.

C. El conjunto de elementos en el conjunto universal que no están en A.

D. El conjunto de elementos en B que no están en A.

E. El conjunto de pares ordenados tal que cada primer elemento pertenece a A y cada segundo elemento pertenece a B, con cada elemento de A aparejado con cada elemento de B.

F. El conjunto de elementos que se encuentran en A o en B o en A y B.

Realice las operaciones indicadas, y designe cada respuesta usando el método de listado.

$$\text{Sea } U=\{a, b, c, d, e, f, g\}, X=\{a, c, e, g\},$$
$$Y=\{a, b, c\} \text{ y } Z=\{b, c, d, e, f\}.$$

7. $X \cap Y$
8. $X \cup Y$
9. $Y \cup Z$
10. $Y \cap Z$
11. $X \cup U$
12. $Y \cap U$
13. X'
14. Y'
15. $X' \cap Y'$
16. $X' \cap Z$
17. $X \cup (Y \cap Z)$
18. $Y \cap (X \cup Z)$
19. $(Y \cap Z') \cup X$
20. $(X' \cup Y') \cup Z$
21. $(Z \cup X')' \cap Y$
22. $(Y \cap X')' \cup Z'$
23. $X - Y$
24. $Y - X$
25. $X \cap (X - Y)$
26. $Y \cup (Y - X)$
27. $X' - Y$
28. $Y' - X$
29. $(X \cap Y') \cup (Y \cap X')$
30. $(X \cap Y') \cap (Y \cap X')$

Describa cada conjunto con palabras.

31. $A \cup (B' \cap C')$
32. $(A \cap B') \cup (B \cap A')$
33. $(C - B) \cup A$
34. $B \cap (A' - C)$
35. $(A - C) \cup (B - C)$
36. $(A' \cap B') \cup C'$

Efectos nocivos del alcohol y el tabaco *La siguiente tabla lista algunos efectos nocivos comunes del consumo prolongado de tabaco y alcohol.*

Tabaco	Alcohol
Daño al hígado, e	Daño al hígado, l
Daño al cerebro, h	Daño al cerebro, b
Cáncer, c	Daño al corazón, h

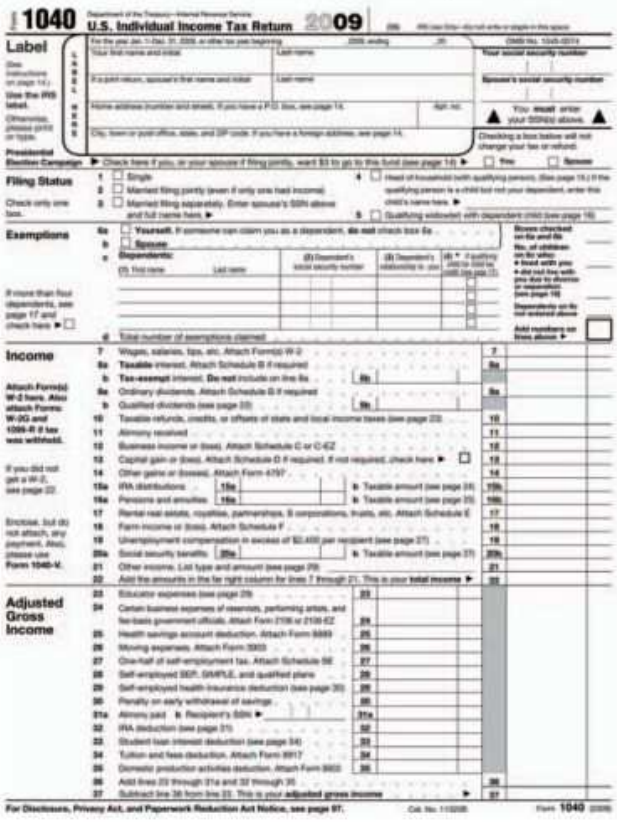
Sea T el conjunto de los efectos listados del consumo de tabaco y A el conjunto de los efectos listados del consumo de alcohol. Obtenga cada conjunto.

37. El conjunto universal U más pequeño posible que incluya todos los efectos listados.
38. A'
39. T'
40. $T \cap A$
41. $T \cup A$
42. $T \cap A'$

Describa con palabras cada conjunto de los ejercicios 43 a 48.

Sean U = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos,
A = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos con las deducciones desglosadas,
B = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos mostrando los ingresos de negocios,
C = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos presentadas en 2009,
D = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos seleccionadas para auditoría.

43. $B \cup C$
44. $A \cap D$
45. $C - A$
46. $D \cup A'$
47. $(A \cup B) - D$
48. $(C \cap A) \cap B'$


1040 U.S. Individual Income Tax Return 2009
Label
Filing Status
Exemptions
Income
Adjusted Gross Income

Suponiendo que A y B representan dos conjuntos cualesquiera, identifique cada enunciado como siempre verdadero *o* no siempre verdadero.

49. $A \subseteq (A \cup B)$

50. $A \subseteq (A \cap B)$

51. $(A \cap B) \subseteq A$

52. $(A \cup B) \subseteq A$

53. $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

54. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

En los ejercicios 55 a 60, use los resultados de los incisos ***a)*** *y* ***b)*** *para contestar el inciso* ***c)****.*

Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X = \{1, 3, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ y $Z = \{3, 4, 5\}$.

55. ***a)*** Obtenga $X \cup Y$.
b) Obtenga $Y \cup X$.
c) Enuncie una conjetura.

56. ***a)*** Obtenga $X \cap Y$.
b) Obtenga $Y \cap X$.
c) Enuncie una conjetura.

57. ***a)*** Obtenga $X \cup (Y \cup Z)$.
b) Obtenga $(X \cup Y) \cup Z$.
c) Enuncie una conjetura.

58. ***a)*** Obtenga $X \cap (Y \cap Z)$.
b) Obtenga $(X \cap Y) \cap Z$.
c) Enuncie una conjetura.

59. ***a)*** Obtenga $(X \cup Y)'$.
b) Obtenga $X' \cap Y'$.
c) Enuncie una conjetura.

60. ***a)*** Obtenga $(X \cap Y)'$.
b) Obtenga $X' \cup Y'$.
c) Enuncie una conjetura.

En los ejercicios 61 y 62, sea X el conjunto integrado por las diferentes letras de su apellido.

61. Obtenga $X \cup \emptyset$ y enuncie una conjetura.

62. Obtenga $X \cap \emptyset$ y enuncie una conjetura.

Indique si cada enunciado es verdadero o falso.

63. $(3, 2) = (5 - 2, 1 + 1)$

64. $(10, 4) = (7 + 3, 5 - 1)$

65. $(6, 3) = (3, 6)$

66. $(2, 13) = (13, 2)$

67. $\{6, 3\} = \{3, 6\}$

68. $\{2, 13\} = \{13, 2\}$

69. $\{(1, 2), (3, 4)\} = \{(3, 4), (1, 2)\}$

70. $\{(5, 9), (4, 8), (4, 2)\} = \{(4, 8), (5, 9), (4, 2)\}$

Obtenga $A \times B$ *y* $B \times A$ *para A y B definidos como sigue.*

71. $A = \{2, 8, 12\}$, $B = \{4, 9\}$

72. $A = \{3, 6, 9, 12\}$, $B = \{6, 8\}$

73. $A = \{d, o, g\}$, $B = \{p, i, g\}$

74. $A = \{b, l, u, e\}$, $B = \{r, e, d\}$

En los conjuntos especificados en los ejercicios 75 a 78, use la información proporcionada para obtener $n(A \times B)$ *y* $n(B \times A)$.

75. Los conjuntos del **ejercicio 71**.

76. Los conjuntos del **ejercicio 73**.

77. $n(A) = 35$ y $n(B) = 6$.

78. $n(A) = 13$ y $n(B) = 5$.

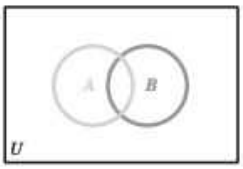
Obtenga el número cardinal especificado.

79. Si $n(A \times B) = 72$ y $n(A) = 12$, obtenga $n(B)$.

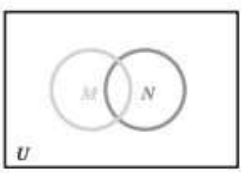
80. Si $n(A \times B) = 300$ y $n(B) = 30$, obtenga $n(A)$.

Coloque los elementos de estos conjuntos en las ubicaciones correctas en el diagrama de Venn proporcionado.

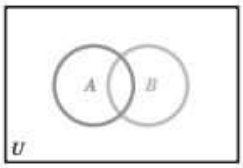
81. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
$A = \{b, d, f, g\}$,
$B = \{a, b, d, e, g\}$.



82. Sean $U = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
$M = \{5, 8, 10, 11\}$,
$N = \{5, 6, 7, 9, 10\}$.



Use un diagrama de Venn similar al mostrado a continuación para sombrear cada conjunto.



83. $B \cap A'$

84. $A \cup B$

85. $A' \cup B$

86. $A' \cap B'$

87. $B' \cup A$

88. $A' \cup A$

89. $B' \cap B$

90. $A \cap B'$

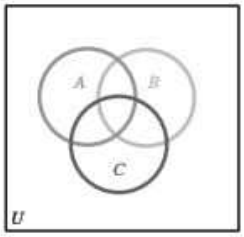
91. $B' \cup (A' \cap B')$

92. $(A \cap B) \cup B$

93. U'

94. $\emptyset'$

En los ejercicios 95 y 96, coloque los elementos de estos conjuntos en la ubicación correcta en un diagrama de Venn similar al mostrado a continuación.



95. Sean $U = \{m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w\}$,
$A = \{m, n, p, q, r, t\}$,
$B = \{m, o, p, q, s, u\}$,
$C = \{m, o, p, r, s, t, u, v\}$.

96. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$A = \{1, 3, 5, 7\}$,
$B = \{1, 3, 4, 6, 8\}$,
$C = \{1, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Use un diagrama de Venn para sombrear cada conjunto.

97. $(A \cap B) \cap C$

98. $(A \cap C') \cup B$

99. $(A \cap B) \cup C'$

100. $(A' \cap B) \cap C$

101. $(A' \cap B') \cap C$

102. $(A \cup B) \cup C$

103. $(A \cap B') \cup C$

104. $(A \cap C') \cap B$

105. $(A \cap B') \cap C'$

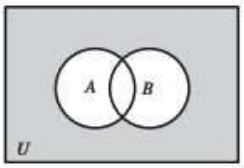
106. $(A' \cap B') \cup C$

107. $(A' \cap B') \cup C'$

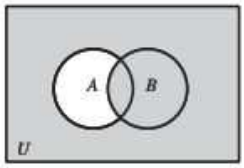
108. $(A \cap B)' \cup C$

Escriba una descripción simbólica de cada área sombreada. Use los símbolos A, B, C, ∩, ∪, − y ′ tantas veces como sea necesario. Puede haber más de una respuesta.

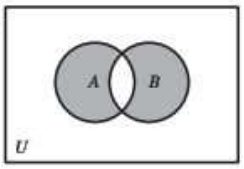
109.



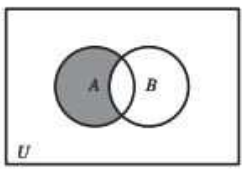
110.



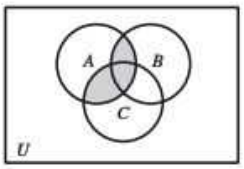
111.



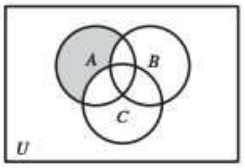
112.



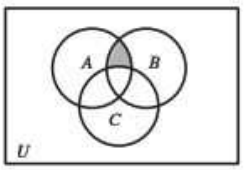
113.



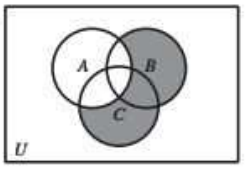
114.



115.



116.



Suponga que A y B son conjuntos. Describa las condiciones en las cuales cada enunciado sería verdadero.

117. $A = A - B$

118. $A = B - A$

119. $A = A - \emptyset$

120. $A = \emptyset - A$

121. $A \cup \emptyset = \emptyset$

122. $A \cap \emptyset = \emptyset$

123. $A \cap \emptyset = A$

124. $A \cup \emptyset = A$

125. $A \cup A = \emptyset$

126. $A \cap A = \emptyset$

127. $A \cup B = A$

128. $A \cap B = B$

En los ejercicios 129 a 135, dibuje dos diagramas de Venn adecuados para identificar si el enunciado es siempre verdadero o no siempre verdadero.

129. $A \cap A' = \emptyset$

130. $A \cup A' = U$

131. $(A \cap B) \subseteq A$

132. $(A \cup B) \subseteq A$

133. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = A$.

134. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = B$.

135. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
(Segunda ley de De Morgan).

136. Si A y B son conjuntos, ¿necesariamente es verdad que $n(A - B) = n(A) - n(B)$?

137. Si $Q = \{x|x$ es un número racional$\}$ y $H = \{x|x$ es un número irracional$\}$, describa cada conjunto.

a) $Q \cup H$

b) $Q \cap H$

2.4 ENCUESTAS Y NÚMEROS CARDINALES

Encuestas • Fórmula para obtener números cardinales • Tablas



Encuestas

Los problemas que implican a conjuntos de personas (u objetos) en ocasiones requieren el análisis de información conocida acerca de ciertos subconjuntos, para así obtener números cardinales de otros subconjuntos. En esta sección aplicaremos tres técnicas para solucionar este tipo de problemas: diagramas de Venn, fórmulas para números cardinales y tablas. Es bastante frecuente (aunque no siempre) obtener la "información conocida" a través de una investigación.

Suponga que en una universidad se pide a un grupo de estudiantes comparar algunas películas de dibujos animados, y se genera la siguiente información.

A 34 les gusta *Up*	A 12 les gustan *Up* y *Mr. Fox*
A 29 les gusta *The Princess and the Frog*	A 10 les gustan *Princess* y *Mr. Fox*
A 26 les gusta *Fantastic Mr. Fox*	A 4 les gustan las tres películas
A 16 les gustan *Up* y *Princess*	A 5 no les gusta ninguna de estas películas

Para determinar el número total de estudiantes investigados, no podemos sumar los 8 números citados anteriormente, porque existen superposiciones. Por ejemplo, en la **figura 18**, los 34 estudiantes a quienes les gusta *Up* no deben estar ubicados en la región b, sino distribuirse entre las regiones b, c, d y e, de una manera que sea congruente con el total de datos proporcionados. (La región b en realidad incluye a los estudiantes a quienes les gusta *Up*, pero no les gusta *The Princess and the Frog* y no les gusta *Fantastic Mr. Fox*).

Debido a que, al principio, no sabemos cómo distribuir a los 34 que les gusta *Up*, buscamos primero datos más manejables. La lista total más pequeña, los 4 estudiantes a quienes les gustan las tres películas, se puede colocar en la región d (la intersección de los tres conjuntos). Los 5 a los que no les gusta ninguna de las tres películas deben ubicarse en la región a. Luego, los 16 a quienes les gusta *Up* y *Princess* deben ir en las regiones d y e. Como la región d ya contiene 4 estudiantes, debemos colocar:

$$16 - 4 = 12 \text{ en la región } e.$$

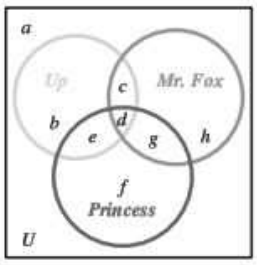


Figura 18

Como a 12 estudiantes les gustan *Up* y *Mr. Fox* (regiones c y d), colocamos:

$$12 - 4 = 8 \text{ en la región } c.$$

Ahora que las regiones c, d y e incluyen a 8, 4 y 12 estudiantes, respectivamente, debemos colocar:

$$34 - 8 - 4 - 12 = 10 \text{ en la región } b.$$

Mediante un razonamiento similar, a todas las regiones se les asignan los números correctos. Véase la **figura 19** de la siguiente página.

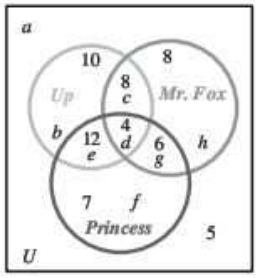


Figura 19

EJEMPLO 1 Análisis de una encuesta

Use los datos de la encuesta de preferencias de los estudiantes por las películas de dibujos animados, como se resumen en la **figura 19**, para contestar las siguientes preguntas:

a) ¿A cuántos estudiantes les gusta solo *Fantastic Mr. Fox*?

b) ¿A cuántos estudiantes les gustan exactamente dos películas?

c) ¿Cuántos estudiantes fueron encuestados?

SOLUCIÓN

a) El estudiante al que solo le gusta *Mr. Fox* no le gusta *Up* y no le gusta *Princess*. Estos estudiantes están dentro de las regiones de *Mr. Fox* y fuera de las regiones de *Up* y *Princess*. La región h es la adecuada en la **figura 19**, y vemos que a 8 estudiantes les gusta solo *Fantastic Mr. Fox*.

b) A los estudiantes de las regiones c, e y g les gustan exactamente dos películas. El número total de estos estudiantes es:

$$8 + 12 + 6 = 26.$$

c) Cada estudiante encuestado se ha colocado exactamente en una región de la **figura 19**, de modo que el número total de encuestados es la suma de los números de las ocho regiones:

$$5 + 10 + 8 + 4 + 12 + 7 + 6 + 8 = 60.$$

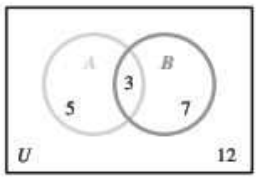


Figura 20

Fórmula para obtener números cardinales

Si los números mostrados en la **figura 20** son los números cardinales de las regiones individuales, entonces:

$$n(A) = 5 + 3 = 8, \quad n(B) = 3 + 7 = 10, \quad n(A \cap B) = 3,$$

y

$$n(A \cup B) = 5 + 3 + 7 = 15.$$

Observe que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ porque $15 = 8 + 10 - 3$. Esta relación es verdadera para dos conjuntos A y B cualesquiera.

Fórmula para números cardinales

Para dos conjuntos A y B cualesquiera, lo siguiente es verdadero:

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

Esta fórmula se puede replantear para obtener cualquiera de sus cuatro términos cuando se conocen los demás.

EJEMPLO 2 Aplicación de la fórmula para obtener números cardinales

Obtenga $n(A)$ si $n(A \cup B) = 22$, $n(A \cap B) = 8$, y $n(B) = 12$.

SOLUCIÓN

Aplicamos la fórmula cardinal para obtener $n(A)$.

$$\begin{aligned} n(A) &= n(A \cup B) - n(B) + n(A \cap B) \\ &= 22 - 12 + 8 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Algunas veces, incluso cuando la información se presenta como en el **ejemplo 2**, es más conveniente ajustar esa información a un diagrama de Venn como en el **ejemplo 1**.

EJEMPLO 3 Análisis de los datos de un informe

Scott Heeren, quien lidera un grupo de ingenieros de software que investigan actividades ilegales en redes sociales, reportó la siguiente información:

T = el conjunto de los miembros del grupo que siguen patrones en Twitter.

F = el conjunto de los miembros del grupo que siguen patrones en Facebook.

L = el conjunto de los miembros del grupo que siguen patrones en LinkedIn.

$$n(T) = 13 \qquad n(T \cap F) = 9 \qquad n(T \cap F \cap L) = 5$$
$$n(F) = 16 \qquad n(F \cap L) = 10 \qquad n(T' \cap F' \cap L') = 3$$
$$n(L) = 13 \qquad n(T \cap L) = 6$$

¿Cuántos ingenieros hay en el grupo de Scott?

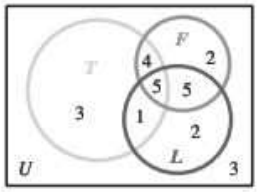


Figura 21

SOLUCIÓN

Los datos de Scott se representan en la **figura 21**. La suma de los números del diagrama proporciona el número total de ingenieros en el grupo.

$$3 + 3 + 1 + 2 + 5 + 5 + 4 + 2 = 25$$ ■■■

Tablas

Algunas veces la información aparece en una tabla en lugar de un diagrama de Venn, pero las ideas básicas de unión e intersección son las mismas.

EJEMPLO 4 Análisis de los datos de una tabla

Melanie Cutler, la oficial encargada de la cafetería en una base militar, quería saber si la bebida preferida en el almuerzo por los hombres y las mujeres enlistados dependía de la edad. Un día determinado, Melanie clasificó los patrones del almuerzo de acuerdo con la edad y la bebida preferida, y registró los resultados en una tabla.

		Bebida			
		Bebida de cola (C)	**Té frío (I)**	**Té dulce (S)**	**Totales**
Edad	**18–25 (Y)**	45	10	35	90
	26–33 (M)	20	25	30	75
	Mayor de 33 (O)	5	30	20	55
	Totales	70	65	85	220

Usando las letras de la tabla, obtenga el número de personas en cada conjunto.

a) $Y \cap C$ ***b)*** $O' \cup I$

SOLUCIÓN

a) El conjunto Y incluye a todo el personal representado a lo largo de la fila superior de la tabla (90 en total), mientras que C incluye a los 70 de la columna izquierda. La intersección de estos dos conjuntos es exactamente la entrada superior izquierda, es decir, 45 personas.

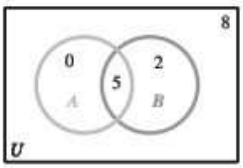
b) El conjunto O' excluye la fila inferior, de modo que incluye la primera y segunda filas. El conjunto I incluye solamente la columna de en medio. La unión de los dos conjuntos representa:

$$45 + 10 + 35 + 20 + 25 + 30 + 30 = 195 \text{ personas.}$$ ■■■

2.4 EJERCICIOS

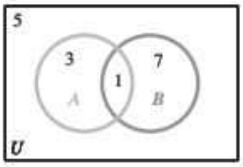
Use los números que representan cardinalidades en los diagramas de Venn para indicar la cardinalidad de cada conjunto especificado.

1.



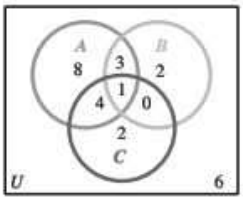
a) $A \cap B$ ***b)*** $A \cup B$
c) $A \cap B'$ ***d)*** $A' \cap B$
e) $A' \cap B'$

2.



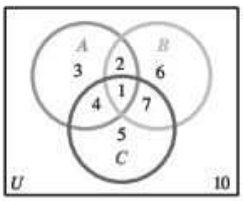
a) $A \cap B$ ***b)*** $A \cup B$
c) $A \cap B'$ ***d)*** $A' \cap B$
e) $A' \cap B'$

3.



a) $A \cap B \cap C$ ***b)*** $A \cap B \cap C'$
c) $A \cap B' \cap C$ ***d)*** $A' \cap B \cap C$
e) $A' \cap B' \cap C$ ***f)*** $A \cap B' \cap C'$
g) $A' \cap B \cap C'$ ***h)*** $A' \cap B' \cap C'$

4.



a) $A \cap B \cap C$ ***b)*** $A \cap B \cap C'$
c) $A \cap B' \cap C$ ***d)*** $A' \cap B \cap C$
e) $A' \cap B' \cap C$ ***f)*** $A \cap B' \cap C'$
g) $A' \cap B \cap C'$ ***h)*** $A' \cap B' \cap C'$

En los ejercicios 5 a 10, utilice la fórmula adecuada.

5. Obtenga el valor de $n(A \cup B)$ si $n(A) = 12$, $n(B) = 14$, y $n(A \cap B) = 5$.

6. Obtenga el valor de $n(A \cup B)$ si $n(A) = 16$, $n(B) = 28$, y $n(A \cap B) = 5$.

7. Obtenga el valor de $n(A \cap B)$ si $n(A) = 20$, $n(B) = 12$, y $n(A \cup B) = 25$.

8. Obtenga el valor de $n(A \cap B)$ si $n(A) = 20$, $n(B) = 24$, y $n(A \cup B) = 30$.

9. Obtenga el valor de $n(A)$ si $n(B) = 35$, $n(A \cap B) = 15$, y $n(A \cup B) = 55$.

10. Obtenga el valor de $n(B)$ si $n(A) = 20$, $n(A \cap B) = 6$, y $n(A \cup B) = 30$.

Dibuje el diagrama de Venn adecuado y use la información proporcionada para completar el número de elementos en cada región.

11. $n(A) = 19$, $n(B) = 13$, $n(A \cup B) = 25$, $n(A') = 11$

12. $n(U) = 43$, $n(A) = 25$, $n(A \cap B) = 5$, $n(B') = 30$

13. $n(A') = 25$, $n(B) = 28$, $n(A' \cup B') = 40$, $n(A \cap B) = 10$

14. $n(A \cup B) = 15$, $n(A \cap B) = 8$, $n(A) = 13$, $n(A' \cup B') = 11$

15. $n(A) = 57$, $n(A \cap B) = 35$, $n(A \cup B) = 81$, $n(A \cap B \cap C) = 15$, $n(A \cap C) = 21$, $n(B \cap C) = 25$, $n(C) = 49$, $n(B') = 52$

16. $n(A) = 24$, $n(B) = 24$, $n(C) = 26$, $n(A \cap B) = 10$, $n(B \cap C) = 8$, $n(A \cap C) = 15$, $n(A \cap B \cap C) = 6$, $n(U) = 50$

17. $n(A) = 15$, $n(A \cap B \cap C) = 5$, $n(A \cap C) = 13$, $n(A \cap B') = 9$, $n(B \cap C) = 8$, $n(A' \cap B' \cap C') = 21$, $n(B \cap C') = 3$, $n(B \cup C) = 32$

18. $n(A \cap B) = 21$, $n(A \cap B \cap C) = 6$, $n(A \cap C) = 26$, $n(B \cap C) = 7$, $n(A \cap C') = 20$, $n(B \cap C') = 25$, $n(C) = 40$, $n(A' \cap B' \cap C') = 2$

Use diagramas de Venn para resolver cada problema.

19. ***Escritura y producción de música*** Joe Long trabajó en nueve proyectos musicales el año pasado.



Joe Long, Bob Gaudio, Tommy DeVito y Frankie Valli
Las cuatro estaciones

Escribió y produjo 3 proyectos.
Escribió un total de 5 proyectos.
Produjo un total de 7 proyectos.

a) ¿Cuántos proyectos escribió, pero no produjo?
b) ¿Cuántos proyectos produjo, pero no escribió?

20. ***Colección de discos compactos*** Gitti Lindner es admirador de la música de Paul Simon y Art Garfunkel. En su colección de 25 discos compactos, tiene los siguientes:

5 en los que cantan tanto Simon como Garfunkel
7 en los que canta Simon
8 en los que canta Garfunkel
15 en los que no canta Simon ni Garfunkel.

a) ¿En cuántos de sus discos aparece solo Paul Simon?
b) ¿En cuántos de sus discos aparece solo Art Garfunkel?
c) ¿En cuántos discos aparece al menos uno de estos dos artistas?
d) ¿En cuántos discos aparece cuando mucho uno de estos dos artistas?

21. ***Respuesta de admiradores a cantantes*** Julie Davies, un analista de la cultura pop, quería evaluar el atractivo de diferentes cantantes. Ella entrevistó a 65 admiradores de cantantes y determinó lo siguiente:

A 37 les gusta Jazmine Sullivan
A 36 les gusta Carrie Underwood
A 31 les gusta Brad Paisley
A 14 les gustan Jazmine y Carrie
A 21 les gustan Jazmine y Brad
A 14 les gustan Carrie y Brad
A 8 les gustan todos los cantantes

¿A cuántos de estos admiradores:

a) les gustan exactamente dos de estos cantantes?
b) les gusta exactamente uno de estos cantantes?
c) no les gusta ninguno de estos cantantes?
d) les gusta Jazmine, pero no Carrie ni Brad?
e) les gusta Brad y exactamente uno de los otros dos?

22. ***Ayuda financiera a estudiantes*** En la universidad de Louisiana, la mitad de los 48 estudiantes de matemáticas recibieron ayuda financiera federal como sigue:

5 tenían financiamiento Pell Grant
14 participaban en el College Work Study Program
4 tenían becas TOPS
2 tenían becas TOPS y participaban en el Work Study.

Aquellos con financiamiento Pell Grant no recibían otro tipo de ayuda federal.

¿Cuántos de los 48 estudiantes de matemáticas:

a) no tenían ayuda federal?
b) recibían más de una de estas tres formas de ayuda?
c) recibían ayuda federal diferente de estas tres formas de ayuda?
d) tenían una beca TOPS o Work Study?
e) recibían exactamente una de estas tres formas de ayuda?

23. ***Hábitos al cocinar*** Eric Dangerfield entrevistó a 140 personas en un centro comercial suburbano para averiguar algunos de sus hábitos al cocinar. Obtuvo los resultados que se muestran en la siguiente columna.

58 usan hornos de microondas
63 usan estufas eléctricas
58 usan estufas de gas
19 usan hornos de microondas y estufas eléctricas
17 usan hornos de microondas y estufas de gas
4 usan tanto estufas de gas como eléctricas
1 usa los tres tipos

a) ¿Cuántos usan exactamente dos de estas clases de aparatos domésticos?
b) ¿Cuántos usan al menos dos de estas clases de aparatos domésticos?

24. ***Creencias religiosas de minorías*** Se encuestó a 140 adultos estadounidenses.

Sean A = el conjunto de encuestados que creen en la astrología,
R = el conjunto de encuestados que creen en la reencarnación,
Y = el conjunto de encuestados que creen en la espiritualidad del yoga.

La investigación arrojó la siguiente información:

$$n(A) = 35 \qquad n(R \cap Y) = 8$$
$$n(R) = 36 \qquad n(A \cap Y) = 10$$
$$n(Y) = 32 \qquad n(A \cap R \cap Y) = 6$$
$$n(A \cap R) = 19$$

¿Cuántos de los encuestados:

a) creen en la astrología, pero no en la reencarnación?
b) creen al menos en una de estas tres corrientes?
c) creen en la reencarnación, pero en ninguna de las otras?
d) creen exactamente en dos de estas tres corrientes?
e) no creen en ninguna de las tres corrientes?

25. ***Encuesta sobre actitudes hacia la religión*** Investigadores encuestaron a varias personas y registraron los siguientes datos. De todos los entrevistados:

240 piensan que Hollywood es hostil con las religiones
160 piensan que los medios son hostiles con la religión
181 piensan que los científicos son hostiles con la religión
145 piensan que Hollywood y los medios son hostiles con la religión
122 piensan que los científicos y los medios son hostiles con la religión
80 piensan que exactamente dos de estos grupos son hostiles con la religión
110 piensan que los tres grupos son hostiles con la religión
219 piensan que ninguno de estos tres grupos es hostil con la religión.

¿Cuántos sujetos:

a) fueron encuestados?
b) piensan que exactamente uno de estos tres grupos es hostil con la religión?

26. ***Metas de los estudiantes*** Carol Britz, quien vende libros de texto, entrevistó a estudiantes de primer año en el plantel de una universidad para averiguar las metas principales de los estudiantes en la actualidad.

Sean W = el conjunto de aquellos que quieren estar saludables,
F = el conjunto de aquellos que quieren formar una familia,
E = el conjunto de aquellos que quieren ser expertos en sus campos de estudio.

Los descubrimientos de Carol se resumen aquí.

$$n(W) = 160 \qquad n(E \cap F) = 90$$
$$n(F) = 140 \qquad n(W \cap F \cap E) = 80$$
$$n(E) = 130 \qquad n(E') = 95$$
$$n(W \cap F) = 95 \qquad n[(W \cup F \cup E)'] = 10$$

Obtenga el número total de estudiantes entrevistados.

27. ***Síntomas de pacientes en un hospital*** Jesse Fisher realizó una investigación entre 75 pacientes de la unidad de cardiología del hospital Santa Fe durante un periodo de dos semanas.

Sean B = el conjunto de pacientes con presión sanguínea alta,
C = el conjunto de pacientes con niveles altos de colesterol,
S = el conjunto de pacientes que fuman.

Los datos de Jesse son los siguientes:

$$n(B) = 47 \qquad n(B \cap S) = 33$$
$$n(C) = 46 \qquad n(B \cap C) = 31$$
$$n(S) = 52 \qquad n(B \cap C \cap S) = 21$$
$$n[(B \cap C) \cup (B \cap S) \cup (C \cap S)] = 51$$

Obtenga el número de estos pacientes que:

a) tienen niveles de presión o colesterol altos, pero no ambos

b) tienen menos de dos de las indicaciones listadas

c) son fumadores, pero no tienen niveles altos de colesterol ni presión alta

d) no tienen exactamente dos de las indicaciones listadas.

28. ***Temas de canciones*** Alguna vez se dijo que las canciones del estilo *country* se refieren a tres temas básicos: amor, cárcel y camiones de carga. Una investigación de la radio local produjo los siguientes datos.

12 canciones acerca de conductores de camiones que están enamorados mientras se encuentran en prisión
13 acerca de un prisionero enamorado
28 acerca de una persona enamorada
18 acerca de un conductor de camión enamorado
3 acerca de un conductor de camión en prisión que no está enamorado
2 acerca de personas en prisión que no están enamoradas y no conducen camiones
8 acerca de personas que están fuera de prisión, que no están enamoradas y no conducen camiones
16 acerca de conductores de camiones que no están en prisión

a) ¿Cuántas canciones se analizaron?

Obtenga el número de canciones acerca de:

b) conductores de camiones ***c)*** prisioneros

d) conductores de camiones en prisión

e) personas que no están en prisión

f) personas que no están enamoradas.



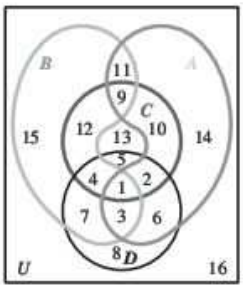
29. Use la siguiente figura para obtener los números de regiones que pertenecen a cada conjunto.

a) $A \cap B \cap C \cap D$

b) $A \cup B \cup C \cup D$

c) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$

d) $(A' \cap B') \cap (C \cup D)$



30. ***Espectadores de deportes*** Una investigación de 130 televidentes dice que:

52 ven futbol
56 ven basquetbol
62 ven tenis
60 ven golf
21 ven futbol y basquetbol
19 ven futbol y tenis
22 ven basquetbol y tenis
27 ven futbol y golf
30 ven basquetbol y golf
21 ven tenis y golf
3 ven futbol, basquetbol y tenis
15 ven futbol, basquetbol y golf
10 ven futbol, tenis y golf
10 ven basquetbol, tenis y golf
3 ven estos cuatro deportes
5 no ven ninguno de estos cuatro deportes

Use un diagrama de Venn para contestar cada pregunta.

a) ¿Cuántos de estos televidentes ven futbol, basquetbol y tenis, pero no golf?

b) ¿Cuántos ven exactamente uno de estos cuatro deportes?

c) ¿Cuántos ven exactamente dos de estos cuatro deportes?

Resuelva cada problema.

31. ***Posiciones en el basquetbol*** Donna DePaulis tiene un programa de basquetbol en California. En el primer día de la temporada, se presentaron 60 mujeres jóvenes y fueron clasificadas por edad y por su posición preferida, como se muestra en la siguiente tabla.

		Posición			
		Escolta (*G*)	Alero (*F*)	Base (*N*)	Totales
Edad	Junior (*preparatoria*) (*J*)	9	6	4	19
	Senior (*preparatoria*) (*S*)	12	5	9	26
	Universidad (*C*)	5	8	2	15
	Totales	26	19	15	60

Usando los conjuntos de la tabla identificados con letras, obtenga el número de jugadoras en cada uno de los siguientes conjuntos.

a) $J \cap G$ ***b)*** $S \cap N$ ***c)*** $N \cup (S \cap F)$
d) $S' \cap (G \cup N)$ ***e)*** $(S \cap N') \cup (C \cap G')$
f) $N' \cap (S' \cap C')$



32. ***Alojamiento del ejército*** Un estudio de las tendencias de alojamiento del ejército estadounidense clasifica al personal como oficiales comisionados (C), oficiales de planta (W) o enlistados (E), y sus instalaciones de vivienda como la base (B), renta fuera de base (R) o propiedad fuera de base (O). Un estudio arrojó los siguientes datos.

		Viviendas			
		B	*R*	*O*	Totales
Personal	*C*	12	29	54	95
	W	4	5	6	15
	E	374	71	285	730
	Totales	390	105	345	840

Obtenga la cantidad de personal en cada uno de los siguientes conjuntos.

a) $W \cap O$ ***b)*** $C \cup B$
c) $R' \cup W'$ ***d)*** $(C \cup W) \cap (B \cup R)$
e) $(C \cap B) \cup (E \cap O)$ ***f)*** $B \cap (W \cup R)'$

33. ¿Podría presentarse la información del **ejemplo 4** en un diagrama de Venn similar al de los **ejemplos 1 y 3**? Si es así, construya el diagrama. De lo contrario, explique la diferencia principal del **ejemplo 4**.

34. Explique cómo se puede deducir una fórmula para números cardinales en el caso donde se presentan *tres* conjuntos. Específicamente, proporcione una fórmula que relacione $n(A \cup B \cup C)$ con

$$n(A),\ n(B),\ n(C),\ n(A \cap B),\ n(A \cap C),\ n(B \cap C),\ \text{y}\ n(A \cap B \cap C).$$

Ilustre con un diagrama de Venn.

EXTENSIÓN Conjuntos infinitos y sus cardinalidades

Correspondencia uno a uno y conjuntos equivalentes • El número cardinal $\aleph_0$ • Conjuntos infinitos • Conjuntos que no son numerables

Correspondencia uno a uno y conjuntos equivalentes Georg Cantor, cuyo perfil se presentó en la **página 44**, encontró mucha resistencia a finales del siglo XIX cuando desarrolló la teoría de conjuntos moderna, debido a sus ideas sobre conjuntos infinitos. Sin embargo, los resultados que aquí se discuten se aceptan comúnmente en la actualidad. Recuerde lo siguiente de la **sección 2.1**.

1. El número cardinal de un conjunto es el número de elementos que contiene.
2. Dos conjuntos son *equivalentes* si sus números cardinales son iguales.
3. Un conjunto es *infinito* si sus números cardinales son "demasiado grandes" para ubicarse entre los números enteros no negativos.



En griego, la palabra **paradoja** significaba originalmente "opinión incorrecta", y era lo contrario de ortodoxia, que significaba "opinión correcta". Con el correr de los años, el significado de la palabra cambió a contradicción.

Antes del siglo XX se consideraba una paradoja que cualquier conjunto pudiera colocarse en correspondencia uno a uno con un subconjunto propio de sí mismo. Esta paradoja, llamada **paradoja de Galileo**, en honor del matemático y científico del siglo XVI, **Galileo** (véase la fotografía), se explica ahora diciendo que la habilidad para hacer tal correspondencia es la manera como distinguimos los conjuntos finitos de los conjuntos infinitos. Lo que es verdad para conjuntos finitos, no necesariamente es verdad para conjuntos infinitos.

Podemos establecer fácilmente la equivalencia de dos conjuntos finitos si contamos sus elementos y comparamos sus números cardinales. Pero los elementos de un conjunto infinito no se pueden contar de la misma manera. Cantor enfrentó esta dificultad usando la idea de **correspondencia uno a uno** (o correspondencia biunívoca) entre conjuntos. Los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 6, 9\}$, por ejemplo, se pueden colocar en esta correspondencia de la siguiente manera (entre otras):

$$\begin{array}{ccccc} \{1, & & 2, & & 3\} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \{3, & & 6, & & 9\}. \end{array}$$

Esta correspondencia es "uno a uno" porque cada elemento de cada conjunto está aparejado con exactamente un elemento del otro conjunto. La equivalencia entre A y B se denota como $A \sim B$.

Por otro lado, los conjuntos $C = \{1, 8, 12\}$ y $D = \{6, 11\}$ *no* son equivalentes. Cualquier correspondencia entre ellos, como

$$\begin{array}{ccccc} \{1, & & 8, & & 12\} \\ \updownarrow & & \searrow & \nearrow & \\ \{6, & & & & 11\} \end{array}$$

no es uno a uno. (Se deben aparejar dos elementos diferentes de C con un solo elemento de D).

Cantor amplió la idea de correspondencia uno a uno, que establece la equivalencia, a su estudio de conjuntos infinitos.

El número cardinal $\aleph_0$ El conjunto infinito más básico de números cardinales es $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Se dice que los números cardinales tienen el número cardinal infinito $\aleph_0$ (la primera letra del alfabeto hebreo, álef, con un subíndice igual a cero; se lee "álef nulo"). Piense en $\aleph_0$ como el número cardinal infinito "más pequeño". A la pregunta "¿cuántos números infinitos hay aquí?", respondemos "Hay $\aleph_0$ de ellos".

Ahora, cualquier conjunto que se pueda colocar en correspondencia uno a uno con los números cardinales tendrá el mismo número cardinal, es decir, $\aleph_0$. Existen muchos conjuntos como estos.

EJEMPLO 1 Demostración de que $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tiene el número cardinal $\aleph_0$

Verifique que el conjunto de números enteros $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tiene el número cardinal $\aleph_0$.

SOLUCIÓN

Sabemos que $\aleph_0$ es un número cardinal del conjunto de números cardinales (por definición). Para demostrar que otro conjunto, como el de los números enteros no negativos, también tiene a $\aleph_0$ como su número cardinal, debemos demostrar que el conjunto es equivalente al conjunto de números cardinales. La equivalencia se establece por la correspondencia uno a uno entre dos conjuntos.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \ldots, & & n, & & \ldots\} & \text{Números cardinales} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots, & n-1, & & & \ldots\} & \text{Números enteros no negativos} \end{array}$$

El aparejamiento de los números cardinales n con los números enteros no negativos $n - 1$ continúa indefinidamente, sin que haya un elemento en los dos conjuntos que no se use en el proceso de aparejamiento. Aun cuando el conjunto de números enteros no negativos tiene un elemento adicional (el número 0) comparado con el conjunto de números cardinales, la correspondencia prueba que ambos conjuntos tienen el mismo número cardinal, $\aleph_0$. ■■■

El resultado del **ejemplo 1** muestra que la intuición es una guía deficiente para tratar con conjuntos infinitos. Como los conjuntos de números cardinales y números enteros no negativos se pueden colocar en correspondencia uno a uno, los dos conjuntos tienen el mismo número cardinal.



La letra **álef** y otras letras del **alfabeto hebreo** se muestran sobre el diagrama cabalístico que representa una de las diez emanaciones de Dios durante la Creación. La cábala, la tradición ultramística dentro del judaísmo, surgió en el siglo V y alcanzó su máxima aceptación en el siglo XVI tanto en Palestina como en Polonia.

Los creyentes en la cábala creían que la Biblia ocultaba misterios que podían descubrirse con permutaciones, combinaciones y anagramas de sus propias letras. Cada letra en el alfabeto tiene un valor numérico (álef = 1) y, por lo tanto, se forma un sistema de numeración. La letra Y es igual a 10, de modo que 15 es igual a YH (10 + 5). Sin embargo, YH es una forma del Santo Nombre, de modo que, en vez de ello, TW (9 + 6) es el símbolo.

Conjuntos infinitos El conjunto $\{5, 6, 7\}$ es un subconjunto propio del conjunto $\{5, 6, 7, 8\}$, y no hay manera de colocar estos dos conjuntos en una correspondencia uno a uno. Sin embargo, el conjunto de números cardinales es un subconjunto propio del conjunto de números enteros no negativos, y el **ejemplo 1** demostró que estos dos conjuntos *se pueden* colocar en correspondencia uno a uno. Esta propiedad tan importante se usa en la definición formal de un conjunto infinito.

Conjunto infinito

Un conjunto es **infinito** si se puede colocar en correspondencia uno a uno con un subconjunto propio de sí mismo.

EJEMPLO 2 Demostración de que $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tiene el número cardinal $\aleph_0$

Compruebe que el conjunto de números enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tiene el número cardinal $\aleph_0$.

SOLUCIÓN

Se puede establecer una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números enteros y el conjunto de números cardinales.

$$\begin{array}{cccccccccccc} \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots, & 2n, & 2n+1, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ \{0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots, & n, & -n, & \ldots\} \end{array}$$

Debido a esta correspondencia uno a uno, el número cardinal de este conjunto de números enteros es el mismo que el número cardinal del conjunto de números cardinales, $\aleph_0$. ■■■

La correspondencia uno a uno del **ejemplo 2** prueba que el conjunto de números enteros es infinito: se colocó en correspondencia uno a uno con un subconjunto propio de sí mismo.

Como se muestra en el **ejemplo 2**, hay exactamente tantos números enteros como números cardinales. Este resultado no es intuitivo en absoluto, y el siguiente resultado lo es incluso menos. Existe un número infinito de fracciones entre dos números cardinales cualesquiera. Por ejemplo, hay un conjunto infinito de fracciones $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \ldots\right\}$ entre los números cardinales 0 y 1. Esto implicaría que existen "más" fracciones que números cardinales. Sin embargo, solo existen tantas fracciones como números cardinales.

EJEMPLO 3 Demostración de que el conjunto de números racionales tiene el número cardinal $\aleph_0$

Compruebe que el número cardinal del conjunto de números racionales es $\aleph_0$.

SOLUCIÓN

Primero demostraremos que se puede establecer la correspondencia uno a uno entre el conjunto de números racionales no negativos y los números cardinales. Esto se logra con el ingenioso esquema que se presenta a continuación, ideado por Georg Cantor.

Observe la **figura 22** de la siguiente página. Los números racionales no negativos cuyos denominadores son iguales a 1 se encuentran en la primera fila. Aquellos cuyos denominadores son 2, se encuentran en la segunda fila, y así sucesivamente. Cada número racional no negativo aparece en esta lista más tarde o más temprano. Por ejemplo, $\frac{327}{189}$ se encuentra en la fila 189 y en la columna 327.

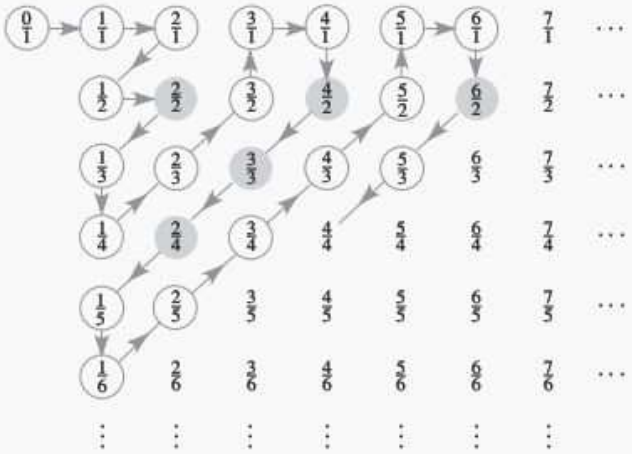


Figura 22

Para establecer la correspondencia uno a uno entre el conjunto de racionales no negativos y el conjunto de números cardinales, se sigue la trayectoria dibujada en la **figura 22**. Hagamos que $\frac{0}{1}$ corresponda al 1, que $\frac{1}{1}$ corresponda al 2, $\frac{2}{1}$ al 3, $\frac{1}{2}$ al 4, (nos saltamos $\frac{2}{2}$, puesto que $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$), $\frac{1}{3}$ al 5, $\frac{1}{4}$ al 6, y así sucesivamente. Los números de los círculos sombreados se omiten porque se pueden reducir a términos menores que ya se incluyeron anteriormente en la lista.

Este procedimiento establece una correspondencia uno a uno entre el conjunto de racionales no negativos y los números cardinales, lo que demuestra que ambos conjuntos tienen el mismo número cardinal, $\aleph_0$. Ahora, usando el método del **ejemplo 2** (por ejemplo, haciendo que cada número negativo siga a su correspondiente número positivo), podemos ampliar esta correspondencia para incluir también los números racionales negativos. Por lo tanto, el conjunto de todos los números racionales tiene el número cardinal $\aleph_0$. ■■■

Un conjunto es **numerable** si es finito o si tiene el número cardinal $\aleph_0$. Todos los conjuntos infinitos de números analizados hasta ahora (los números cardinales, los números enteros no negativos, los números enteros y los números racionales) son numerables.



La paradoja del barbero es una versión de la paradoja de la teoría de conjuntos que Bertrand Rusell propuso a principios del siglo xx.

1. Los hombres de un pueblo son de dos tipos: hombres que no se rasuran a sí mismos y hombres que sí lo hacen.
2. El barbero del pueblo rasura a todos los hombres que no se rasuran ellos mismos y solo rasura a esos hombres.

¿Pero quién rasura al barbero?

El barbero no se puede rasurar él mismo. Si lo hiciera, caería en la categoría de los hombres que se rasuran a sí mismos. Sin embargo, el inciso 2) de arriba establece que el barbero no rasura a estos hombres.

Entonces, el barbero no se rasura él mismo. Pero entonces cae en la categoría de los hombres que no se rasuran a sí mismos. De acuerdo con el inciso 2), el barbero rasura a todos estos hombres; por lo tanto, el barbero también se rasura a sí mismo.

Vemos que el barbero no puede rasurarse a sí mismo; sin embargo, sí se rasura a sí mismo. He ahí la paradoja.

Conjuntos que no son numerables

EJEMPLO 4 Demostración de que el conjunto de números reales no tiene el número cardinal $\aleph_0$

Compruebe que el conjunto de todos los números reales no tiene el número cardinal $\aleph_0$.

SOLUCIÓN

Existen dos posibilidades:

1. El conjunto de números reales tiene el número cardinal $\aleph_0$.
2. El conjunto de números reales no tiene el número cardinal $\aleph_0$.

Si suponemos que el primer enunciado es verdadero, entonces se puede establecer la correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales y el conjunto de números cardinales.

En un capítulo posterior, demostraremos que cada número real se puede escribir como un número decimal (o simplemente "decimal"). Por lo tanto, en la correspondencia uno a uno que estamos suponiendo, algún decimal corresponde al número cardinal 1, algún decimal corresponde al 2, y así sucesivamente. Suponga que la correspondencia inicia como sigue:

$$1 \leftrightarrow 0.68458429006\ldots$$
$$2 \leftrightarrow 0.13479201038\ldots$$
$$3 \leftrightarrow 0.37291568341\ldots$$
$$4 \leftrightarrow 0.93523671611\ldots$$

y así sucesivamente.



La **paradoja de Zenón** de la tortuga y Aquiles fue presentada en su forma original por Zenón de Elea.

En la historia original, la tortuga pudo convencer a Aquiles (el héroe griego de *La Ilíada* de Homero) de que en una carrera, considerando una pequeña ventaja, la tortuga siempre podrá derrotar a Aquiles. (Véase el **inicio del capítulo** y **los ejercicios 51 y 52** de esta **Extensión**). La solución de esta paradoja se analiza en el sitio Web www.mathacademy.com.

Suponer la existencia de la correspondencia uno a uno entre los números cardinales y los números reales significa que todos los decimales se encuentran en la lista anterior. Construyamos un nuevo decimal K como sigue. El primer decimal en la lista anterior tiene al 6 como primer dígito. Hagamos que K inicie como $K = 0.4\ldots$ Seleccionamos 4 porque $4 \neq 6$. (Pudimos haber elegido cualquier otro dígito menos 6). Como el segundo dígito del segundo decimal en la lista es igual a 3, hagamos a $K = 0.45\ldots$ (porque $5 \neq 3$). El tercer dígito del tercer decimal es 2, entonces hagamos a $K = 0.457\ldots$ (porque $7 \neq 2$). El cuarto dígito del cuarto decimal es 2, entonces hagamos a $K = 0.4573\ldots$ (porque $3 \neq 2$). Se continúa definiendo K de esta manera.

¿Está K en la lista que supusimos que tiene todos los decimales? El primer decimal de la lista difiere de K al menos en la primera posición. (K inicia con 4, y el primer decimal en la lista inicia con 6). El segundo decimal en la lista difiere de K en al menos la segunda posición, y el n-ésimo decimal en la lista difiere de K en al menos una posición, de modo que K podría no estar en la lista. En resumen:

> Supusimos que todos los decimales están en la lista anterior.
> El decimal K no está en la lista.

Como estos enunciados no pueden ser ambos verdaderos, el supuesto original nos lleva a una contradicción. Esto obliga a la aceptación de la única alternativa posible con el supuesto original: no es posible establecer una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales y el conjunto de números cardinales. El número cardinal del conjunto de reales no es igual a $\aleph_0$. ■■■

El conjunto de números cardinales es un subconjunto propio del conjunto de números reales. Debido a esto, parecería razonable decir que el número cardinal del conjunto de números reales, identificado comúnmente como c, es mayor que $\aleph_0$. (La letra c aquí representa un *continuo*). Se pueden construir otros números cardinales infinitos, inclusive más grandes. Por ejemplo, el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de números reales tiene un número cardinal más grande que c. Continuando este proceso de obtención de los números cardinales de conjuntos de subconjuntos, cada vez se producen números cardinales infinitos más y más grandes.

Los seis conjuntos infinitos más importantes de números se listaron en la **sección 2.1**. Todos ellos se han tratado en esta **Extensión**, excepto los números irracionales. Los números irracionales tienen representaciones decimales, de modo que todos están incluidos entre los números reales. Como los números irracionales son un subconjunto de los números reales, usted podría suponer que los números irracionales tienen el número cardinal $\aleph_0$, exactamente como los racionales. Sin embargo, como la unión de los racionales y los irracionales es igual a todos los reales, eso implicaría que la cardinalidad de la unión de dos conjuntos numerables disjuntos es c. Pero el **ejemplo 2** mostró que este no es el caso. Una percepción más razonable es que el número cardinal de los irracionales es c (el mismo que el de los reales). Esto, de hecho, es verdad.

Números cardinales de conjuntos de números infinitos

Conjunto infinito	Número cardinal
Números naturales o cardinales	$\aleph_0$
Números enteros no negativos	$\aleph_0$
Números enteros	$\aleph_0$
Números racionales	$\aleph_0$
Números irracionales	c
Números reales	c

EJERCICIOS DE LA EXTENSIÓN

Asocie cada conjunto de la columna I con el conjunto de la columna II que tiene la misma cardinalidad. Indique cuál es el número cardinal.

I	II
1. $\{6\}$	**A.** $\{x \mid x$ es un número racional$\}$
2. $\{-16, 14, 3\}$	**B.** $\{26\}$
3. $\{x \mid x$ es un número natural$\}$	**C.** $\{x \mid x$ es un número irracional$\}$
4. $\{x \mid x$ es un número real$\}$	**D.** $\{x, y, z\}$
5. $\{x \mid x$ es un número entero entre 5 y 6$\}$	**E.** $\{x \mid x$ es un número real que satisface $x^2 = 25\}$
6. $\{x \mid x$ es un número entero que satisface $x^2 = 100\}$	**F.** $\{x \mid x$ es un número entero par e impar a la vez$\}$

Coloque cada par de conjuntos en correspondencia uno a uno, si es posible.

7. $\{\text{I}, \text{II}, \text{III}\}$ y $(x, y, z\}$

8. $\{a, b, c, d\}$ y $\{2, 4, 6\}$

9. $\{a, d, d, i, t, i, o, n\}$ y $\{a, n, s, w, e, r\}$

10. {Obama, Clinton, Bush} y {Michelle, Hillary, Laura}

Indique el número cardinal de cada conjunto.

11. $\{a, b, c, d, \ldots, k\}$

12. $\{9, 12, 15, \ldots, 36\}$

13. $\emptyset$

14. $\{0\}$

15. $\{300, 400, 500, \ldots\}$

16. $\{-35, -28, -21, \ldots, 56\}$

17. $\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{12}, \cdots\right\}$

18. $\{x \mid x$ es un número entero par$\}$

19. $\{x \mid x$ es un número cardinal impar$\}$

20. $\{b, a, 1, 1, a, d\}$

21. {ene, feb, mar,..., dic}

22. {Alabama, Alaska, Arizona,..., Wisconsin, Wyoming}

23. Lew Lefton analizó la antigua canción *100 botellas de cerveza en la pared* para ilustrar una propiedad de los números cardinales infinitos.

Llene los espacios del primer verso de la composición de Lefton:

> $\aleph_0$ botellas de cerveza en la pared, $\aleph_0$ botellas de cerveza, toma una y pásala alrededor, _____ botellas de cerveza en la pared.
> (*Fuente:* http://people.math.gatech.edu/~llefton).



$\aleph_0 - 1 = ?$

24. Dos correspondencias uno a uno se consideran "diferentes" si algunos elementos se aparejan en una de manera diferente que en otra.

$$\begin{matrix}\{a, & b, & c\} & & \{a, & b, & c\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \text{y} & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{a, & b, & c\} & & \{c, & b, & a\}\end{matrix} \quad \text{son diferentes,}$$

$$\text{mientras que} \quad \begin{matrix}\{a, & b, & c\} & & \{b, & c, & a\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \text{y} & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{c, & a, & b\} & & \{a, & b, & c\}\end{matrix} \quad \text{no lo son.}$$

a) ¿Cuántas correspondencias *diferentes* se pueden establecer entre los conjuntos {Jamie Foxx, Mike Myers, Madonna} y {Austin Powers, Ray Charles, Eva Perón}?

b) ¿Cuál de estas correspondencias apareja cada persona con el famoso papel de cine apropiado?

Determine si cada par de conjuntos es igual, equivalente, ambas cosas, *o* ninguna.

25. $\{u, v, w\}$, $\{v, u, w\}$

26. $\{48, 6\}$, $\{4, 86\}$

27. $\{X, Y, Z\}$, $\{x, y, z\}$

28. {los}, {sol}

29. $\{x \mid x$ es un número real positivo$\}$
$\{x \mid x$ es un número real negativo$\}$

30. $\{x \mid x$ es un número racional positivo$\}$
$\{x \mid x$ es un número real negativo$\}$

Demuestre que cada conjunto tiene el número cardinal $\aleph_0$ estableciendo una correspondencia uno a uno entre el conjunto dado y el conjunto de números cardinales.

31. El conjunto de números enteros pares positivos.

32. $\{-10, -20, -30, -40, \ldots\}$

33. $\{1{,}000{,}000, 2{,}000{,}000, 3{,}000{,}000, \ldots\}$

34. El conjunto de números enteros impares.

35. $\{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$
(*Sugerencia:* Considere que $4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4$, y así sucesivamente.)

36. $\{-17, -22, -27, -32, \ldots\}$

En los ejercicios 37 a 40, identifique el enunciado proporcionado como siempre verdadero *o* no siempre verdadero. *Si no siempre es verdadero, dé un contraejemplo.*

37. Si A y B son conjuntos infinitos, entonces A es equivalente a B.

38. Si el conjunto A es un conjunto infinito y el conjunto B se puede poner en correspondencia uno a uno con un subconjunto propio de A, entonces B debe ser infinito.

39. Si A es un conjunto infinito y no es equivalente al conjunto de números cardinales, entonces $n(A) = c$.

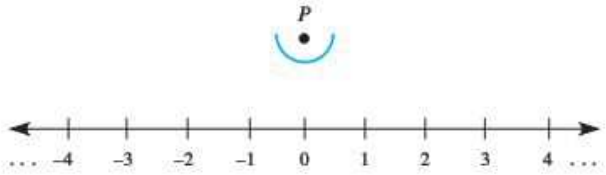
40. Si A y B son conjuntos infinitos numerables, entonces $n(A \cup B) = \aleph_0$.

Los ejercicios 41 y 42 son aplicaciones geométricas del concepto de infinito.

41. El conjunto de números reales se puede representar por una línea infinita, que se extiende indefinidamente en ambas direcciones. Cada punto sobre la línea corresponde a un número real único, y cada número real corresponde a un punto único sobre esa línea.

a) Use la siguiente figura, donde la línea recta entre 0 y 1 se ha curvado en un semicírculo y posicionado arriba de la línea, para demostrar que

$\{x | x \text{ es un número real entre 0 y 1}\}$
es equivalente a $\{x | x \text{ es un número real}\}$.



b) ¿Qué hecho establece el inciso ***a)*** acerca del conjunto de números reales?

42. Demuestre que las dos rectas verticales mostradas aquí tienen el mismo número de puntos.



Demuestre que cada conjunto se puede colocar en correspondencia uno a uno con un subconjunto propio de sí mismo para probar que el conjunto es infinito.

43. $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$

44. $\{4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}$

45. $\left\{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{12}, \frac{3}{16}, \ldots\right\}$

46. $\left\{1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \ldots\right\}$

47. $\left\{\frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \frac{1}{27}, \frac{1}{36}, \ldots\right\}$

48. $\{-3, -5, -9, -17, \ldots\}$

49. Describa la diferencia entre conjuntos *iguales* y conjuntos *equivalentes*.

50. Explique cómo la correspondencia sugerida en el **ejemplo 4** demuestra que el conjunto de números reales entre 0 y 1 no es numerable.

La paradoja de Zenón *En el* ***inicio del capítulo*** *se comentó la escena de la película I.Q., que trata de la paradoja de Zenón. Zenón nació aproximadamente en el 496 a. C. en el sur de Italia. A continuación se presentan dos formas de su paradoja. ¿Cuál es su explicación para los dos ejemplos siguientes de la paradoja de Zenón?*

51. Si Aquiles sale detrás de la tortuga, nunca puede rebasarla, inclusive si corre más rápido.

Suponga que la tortuga tiene un metro de ventaja y va a un décimo de la velocidad de Aquiles. Cuando Aquiles llega al punto donde inició la tortuga, la tortuga está un décimo de metro adelante. Cuando Aquiles llega a *ese* punto, la tortuga está a un centésimo de metro adelante. Y así sucesivamente. Aquiles cada vez está más cerca, pero nunca puede alcanzarla.

52. El movimiento en sí mismo no existe.

Usted no puede recorrer un metro antes de recorrer medio metro. Pero tampoco puede recorrer medio metro antes de recorrer un cuarto de metro. Y así sucesivamente. Inclusive el movimiento más pequeño no puede existir porque primero tendría que ocurrir un movimiento aún menor.

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

Determinación de los alumnos de su clase

Esta actividad en grupo se diseñó para determinar el número de estudiantes presentes en su clase sin contarlos uno por uno. Esto se lleva a cabo conociendo un conjunto particular al que pertenece cada miembro de la clase, y luego calculando la suma del número cardinal de cada subconjunto.

Para esta actividad, designamos tres conjuntos: X, Y y Z.

$X = \{$estudiantes de la clase registrados en el Partido Republicano$\}$

$Y = \{$estudiantes de la clase de 24 años de edad o menos$\}$

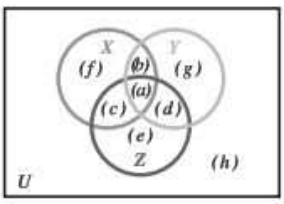
$Z = \{$estudiantes que nunca se han casado$\}$

Cada estudiante de la clase pertenece a uno de los conjuntos X, X', a uno de los conjuntos Y, Y', y a uno de los conjuntos Y, Y', y a uno de los conjuntos Z, Z'. [El complemento de un conjunto está formado por todos los elementos del universo (en este caso, de la clase) que no pertenecen al conjunto].

Como ejemplo, suponga que un estudiante tiene 23 años y es un demócrata divorciado. El estudiante pertenece a los conjuntos X', Y y Z'. El conjunto al que pertenece el estudiante es

$$X' \cap Y \cap Z'.$$

En el siguiente diagrama de Venn, los ocho subconjuntos se identifican con las letras (a) a (h).



La columna final de la siguiente tabla se completará cuando se termine la investigación. Ahora cada estudiante debe determinar a qué conjunto pertenece. [El estudiante descrito anteriormente pertenece al (g)].

Región	Descripción en términos de notación de conjuntos (comprensión)	Número de alumnos en el conjunto
(a)	$X \cap Y \cap Z$	
(b)	$X \cap Y \cap Z'$	
(c)	$X \cap Y' \cap Z$	
(d)	$X' \cap Y \cap Z$	
(e)	$X' \cap Y' \cap Z$	
(f)	$X \cap Y' \cap Z'$	
(g)	$X' \cap Y \cap Z'$	
(h)	$X' \cap Y' \cap Z'$	

Ahora el profesor entrevistará a los alumnos para ver cuántos miembros hay en cada conjunto. *Recuerde que cada miembro de la clase pertenece a un conjunto y solo a uno.*

Después de que se ha hecho la encuesta, se obtiene la suma de los números en la columna final. La suma debe ser *exactamente* igual al número de estudiantes presentes. Para comprobar el resultado cuente individualmente a todos los miembros de la clase.

Temas de análisis

1. Suponga que las entradas de la columna final no suman el número total de alumnos de la clase. ¿Qué podría haber llevado al error?
2. ¿Por qué un alumno no puede ser miembro de más de uno de los ocho subconjuntos listados?

EXAMEN DEL CAPÍTULO 2

En los ejercicios 1 a 14, sean

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \quad A = \{a, b, c, d\},$$

$$B = \{h, e, a, d\} \quad y \quad C = \{a, e\}.$$

Obtenga cada conjunto.

1. $A \cup C$

2. $B \cap A$

3. B'

4. $A - (B \cap C')$

Identifique cada enunciado como verdadero *o* falso.

5. $b \in A$

6. $C \subseteq A$

7. $B \subset (A \cup C)$

8. $c \notin C$

9. $n[(A \cup B) - C] = 4$

10. $\emptyset \subset C$

11. $A \cap B'$ es equivalente a $B \cap A'$

12. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Obtenga lo siguiente.

13. $n(A \times C)$

14. El número de subconjuntos propios de A.

Describa con palabras cada conjunto.

15. $\{-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$

16. {enero, febrero, marzo,..., diciembre}

Exprese cada conjunto en notación de comprensión.

17. $\{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$

18. $\{24, 32, 40, 48, \ldots, 88\}$

En cada espacio coloque $\subset, \subseteq$, ambos *o* ningún símbolo *para que el enunciado sea verdadero.*

19. $\emptyset$ ____ $\{x | x$ es un número cardinal entre 20 y 21$\}$

20. $\{4, 9, 16\}$ ____ $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Sombree cada conjunto en el diagrama de Venn apropiado.

21. $X \cup Y'$ **22.** $X' \cap Y'$

23. $(X \cup Y) - Z$

24. $[(X \cap Y) \cup (Y \cap Z) \cup (X \cap Z)] - (X \cap Y \cap Z)$

Hechos relacionados con inventos *La tabla lista 10 inventos, junto con otros datos pertinentes.*

Invento	Fecha	Inventor	País
Máquina sumadora	1642	Pascal	Francia
Barómetro	1643	Torricelli	Italia
Rasuradora eléctrica	1917	Schick	Estados Unidos
Fibra óptica	1955	Kapany	Inglaterra
Contador Geiger	1913	Geiger	Alemania
Reloj de péndulo	1657	Huygens	Holanda
Radar	1940	Watson-Watt	Escocia
Telégrafo	1837	Morse	Estados Unidos
Termómetro	1593	Galileo	Italia
Cremallera	1891	Judson	Estados Unidos

Sean $U =$ el conjunto de los 10 inventos,
$A =$ el conjunto de artículos inventados en Estados Unidos,
y $T =$ el conjunto de artículos inventados en el siglo xx.

Liste los elementos de cada conjunto.

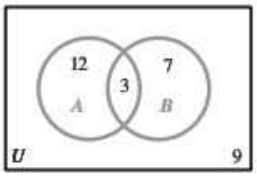
25. $A \cap T$

26. $(A \cup T)'$

27. $A - T'$

28. Defina las leyes de De Morgan con palabras en vez de símbolos.

29. Los números en el diagrama de Venn indican el número de elementos en cada subconjunto particular.



Determine el número de elementos en cada conjunto.

a) $A \cup B$ ***b)*** $A \cap B'$ ***c)*** $(A \cap B)'$

30. ***Ayuda financiera a estudiantes universitarios*** Las tres fuentes principales de ayuda financiera para los estudiantes son los subsidios gubernamentales, las becas privadas y las universidades mismas. Susan Brilling, directora de Apoyo Financiero de una pequeña universidad privada del sur, revisó los registros de 100 estudiantes de segundo año y encontró lo siguiente:

49 reciben subsidios gubernamentales
55 reciben becas privadas
43 reciben apoyo de la universidad
23 reciben subsidios gubernamentales y becas privadas
18 reciben subsidios gubernamentales y apoyo de la universidad
28 reciben becas privadas y apoyo de la universidad
8 reciben ayuda de las tres fuentes.

¿Cuántos estudiantes:

a) reciben solo subsidios gubernamentales?
b) tienen becas privadas, pero no reciben subsidios gubernamentales?
c) reciben ayuda financiera de una sola de estas fuentes?
d) reciben ayuda de exactamente dos de estas fuentes?
e) no reciben ayuda financiera de ninguna de estas fuentes?
f) no reciben ayuda de la universidad ni del gobierno?

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

3



En la película *Shrek Tercero*, producida en 2007, Shrek busca al legítimo heredero del trono del Reino de Muy, Muy Lejano; mientras tanto, el Príncipe Encantador planea usurpar el trono. El príncipe, sabiendo que la nariz de Pinocho crece si este miente, pregunta a Pinocho.

PRÍNCIPE ENCANTADOR: Dime, marioneta, ¿dónde está Shrek?
PINOCHO: Bueno, yo no sé dónde no está.
PRÍNCIPE ENCANTADOR: ¿Me estás diciendo que no sabes dónde está Shrek?
PINOCHO: No sería inexacto suponer que no podría dejar de decirte que es o no es casi parcialmente incorrecto.
PRÍNCIPE ENCANTADOR: ¡Entonces, sabes dónde está!
PINOCHO: Al contrario, definitivamente diría que rechazo la idea de que sea posible, con cierta falta de incertidumbre, que yo innegablemente sepa o no sepa dónde podría estar, y si en verdad no estuviera donde no está. Incluso si no estuviera donde yo no sabía que estaba, eso podría significar. . .

3.1 Enunciados y cuantificadores

3.2 Tablas de verdad y enunciados equivalentes

3.3 El condicional y los circuitos

3.4 El condicional y los enunciados relacionados

3.5 Análisis de argumentos con diagramas de Euler

Extensión Problemas lógicos y sudokus

3.6 Análisis de argumentos con tablas de verdad

Investigación colaborativa Problemas lógicos y sudokus

Examen del capítulo 3

Sin poder contener su frustración por las respuestas enredadas de Pinocho, uno de los tres pequeños cerdos dejó escapar la información de que Shrek había ido a buscar al legítimo heredero. El cerdo no pudo seguir la lógica de Pinocho, o la falta de lógica. En este capítulo, examinaremos los fundamentos del estudio de la lógica.

3.1 ENUNCIADOS Y CUANTIFICADORES

Enunciados • Negaciones • Símbolos • Cuantificadores • Cuantificadores y conjuntos de números



Gottfried Leibniz (1646-1716) fue un filósofo con intereses muy diversos y un universalista que intentó arreglar los conflictos católico-protestantes. Promovió el intercambio cultural entre Europa y el Este. Los ideogramas chinos lo impulsaron a buscar un simbolismo universal. Fue de los primeros creadores de la **lógica simbólica.**

Enunciados

Esta sección nos introduce al estudio de la **lógica simbólica**, la cual utiliza letras para representar enunciados, y símbolos para palabras tales como *y*, *o*, *no*. La lógica se utiliza en el estudio de los **valores de verdad** (es decir, la verdad o falsedad) de enunciados con muchos componentes (premisas). El valor de verdad de estos enunciados depende de sus componentes.

En el lenguaje ordinario se presentan muchas clases de oraciones, incluyendo enunciados objetivos, opiniones, comandos y preguntas. La lógica simbólica solo analiza el tipo de oraciones que implican hechos. Por **enunciado** se entiende una oración declarativa que es falsa o verdadera, pero no ambas cosas a la vez.

El correo electrónico proporciona un medio de comunicación
$12 + 6 = 13$

} Enunciados. Cada uno de ellos es verdadero o falso.

Revise el archivo
¿Ganaron los Santos el Súper Bowl?
Tim Lincecum es mejor jugador de béisbol que Cliff Lee.
Esta oración es falsa

} No son enunciados. No se puede identificar alguno como verdadero o falso

De las oraciones que no son enunciados, la primera es un comando, y la segunda es una pregunta. La tercera es una opinión. "Esta oración es falsa" es una paradoja: si suponemos que es verdadera, entonces la oración es falsa, y si suponemos que es falsa, entonces es verdadera.

Es posible formar un **enunciado compuesto** combinando dos o más enunciados. Los enunciados que forman un enunciado compuesto se llaman **enunciados componentes**. Se pueden usar varios **conectores lógicos**, o simplemente **conectores**, como ***y***, ***o***, ***no*** y ***si... entonces*** para formar enunciados compuestos. (Aunque un enunciado como "hoy no es martes" no contiene dos enunciados componentes, por conveniencia se considera compuesto, porque su valor de verdad se determina observando el valor de verdad de un enunciado diferente: "hoy es martes").

EJEMPLO 1 Determine si un enunciado es compuesto o no

Determine si cada enunciado es compuesto. Si es así, identifique el conector.

a) Lord Byron escribió sonetos, y el poema tiene pentámetro yámbico.

b) Usted puede pagarme ahora o puede pagarme después.

c) Si él lo dijo, entonces debe ser verdad.

d) Mi pistola es de la marca Smith y Wesson.

SOLUCIÓN

a) Este enunciado es compuesto porque está formado por dos enunciados componentes, "Lord Byron escribió sonetos" y "el poema tiene pentámetro yámbico". El conector es *y*.

b) Aquí el conector es *o*. El enunciado es compuesto.

c) El conector aquí es *si. . . entonces*, que se analiza con más detalle en la **sección 3.3**. El enunciado es compuesto.

d) Aunque la palabra "y" se usa en este enunciado, no se utiliza como un conector *lógico*. Es parte del nombre del fabricante. El enunciado no es compuesto. ■■■

Negaciones

La oración "Antonio Mansella tiene un camión rojo" es un enunciado. La **negación** de este enunciado es "Antonio Mansella no tiene un camión rojo". ***La negación de un enunciado verdadero lo vuelve falso, y la negación de un enunciado falso lo vuelve verdadero.***

EJEMPLO 2 Formación de negaciones

Realice la negación de cada enunciado.

a) Esa ciudad tiene un alcalde. ***b)*** La Luna no es un planeta.

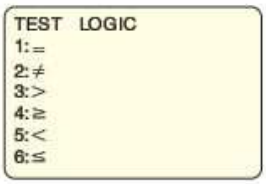
SOLUCIÓN

a) Para negar este enunciado, introducimos *no* en la oración: "Esa ciudad no tiene un alcalde".

b) La negación es: "La Luna es un planeta". ■■■

Una manera de identificar negaciones incorrectas es revisar los valores de verdad. ***Una negación debe tener el valor de verdad opuesto al del enunciado original.***

El siguiente ejemplo usa algunos símbolos de desigualdad en la **tabla 1**. En el caso de una desigualdad que implica una variable, la negación debe tener el valor de verdad opuesto de *cualquier* sustitución de la variable.



El menú TEST de la calculadora TI-83/84 Plus permite al usuario someter a prueba la falsedad o verdad de enunciados que implican los símbolos $=, \neq, >, \geq, <$ y $\leq$. Si un enunciado es verdadero, despliega un 1. Si es falso, un 0.

Tabla 1

Simbolismo	Significado	Ejemplos
$a < b$	a es menor que b	$4 < 9$ $\quad \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$
$a > b$	a es mayor que b	$6 > 2$ $\quad -5 > -11$
$a \leq b$	a es menor que o igual a b	$8 \leq 10$ $\quad 3 \leq 3$
$a \geq b$	a es mayor que o igual a b	$-2 \geq -3$ $\quad -5 \geq -5$

EJEMPLO 3 Negación de desigualdades

Obtenga la negación de cada desigualdad. *No* use el símbolo con la diagonal.

a) $x < 9$ ***b)*** $7x + 11y \geq 77$

SOLUCIÓN

a) La negación de "x es menor que 9" es "x *no* es menor que 9". Como no podemos usar "no", lo cual requeriría que escribiéramos $x \not< 9$, la oración de negación queda como "x es mayor que o igual a 9", es decir,

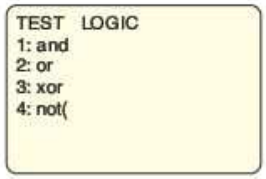
$$x \geq 9.$$

b) La negación, sin usar el símbolo con la diagonal, es:

$$7x + 11y < 77.$$ ■■■



$4 < 9$ es verdad, como lo indica el 1.
$4 > 9$ es falso, como lo indica el 0.



El menú LOGIC de la calculadora TI-83/84 Plus permite al usuario probar la falsedad o verdad de enunciados que implican *y*, *o*, *o exclusivo* (véase el **ejercicio 77** de la **sección 3.2**) y *no*.

Símbolos

En el estudio de la lógica se usan símbolos. Los enunciados se representan con letras, como p, q o r. En la **tabla 2** se muestran varios símbolos conectores.

Tabla 2

Conector	Símbolo	Tipo de enunciado
y	$\wedge$	Conjunción
o	$\vee$	Disyunción
no	$\sim$	Negación

El símbolo $\sim$ representa el conector *no*. Si p representa el enunciado "Barack Obama fue presidente en 2009" entonces $\sim p$ representa "Barack Obama no fue presidente en 2009".

EJEMPLO 4 Conversión de símbolos a palabras

Considere que p representa "hoy estamos a 70° F", y q representa "hoy es martes". Escriba los siguientes enunciados simbólicos con palabras.

a) $p \vee q$ ***b)*** $\sim p \wedge q$ ***c)*** $\sim(p \vee q)$ ***d)*** $\sim(p \wedge q)$

SOLUCIÓN

a) De acuerdo con la tabla, $\vee$ simboliza *o*. Por lo tanto, $p \vee q$ representa

Hoy estamos a 70° F o es martes.

b) Hoy no estamos a 70° F y es martes.

c) No es el caso que hoy estamos a 70° F o es martes.

d) No es el caso que hoy estamos a 70° F y es martes. ■■■

El enunciado del **ejemplo 4 *c)*** generalmente se expresa como "**Ni *p* ni *q***".



Aristóteles, el primero en sistematizar la lógica que usamos en la vida diaria, aparece aquí en un detalle de la pintura *La escuela de Atenas*, de Rafael. En la escena, debate un asunto con su maestro **Platón**.

Cuantificadores

Los cuantificadores se usan para indicar *cuántos* casos existen de una situación particular. Las palabras ***todo, toda, todos, todas, cada*** y ***ninguno*** se llaman **cuantificadores universales**, en tanto que palabras y oraciones como ***algunos, existen*** y ***al menos uno*** son cuantificadores existenciales. ***Hay que tener cuidado al formar una negación que implica cuantificadores.***

La negación de un enunciado debe ser falsa si el enunciado es verdadero, y debe ser verdadera si el enunciado es falso, en todos los casos posibles. Considere el siguiente enunciado:

Todas las mujeres en el grupo se llaman Mary.

Mucha gente escribiría la negación de este enunciado como "En el grupo no hay mujeres llamadas Mary" o "Todas las mujeres en el grupo no se llaman Mary". Pero ninguno de estos enunciados es correcto. Para ver por qué, observe los tres grupos siguientes.

Grupo I: Mary Jane Payne, Mary Meyer, Mary O'Hara
Grupo II: Mary Johnson, Lisa Pollak, Margaret Watson
Grupo III: Donna Garbarino, Paula Story, Rhonda Alessi, Kim Falgout

Estos grupos contienen todas las posibilidades que se deben considerar. En el grupo I, *todas* las mujeres se llaman Mary. En el grupo II, *algunas* mujeres se llaman Mary. En el grupo III, *ninguna* mujer se llama Mary. Observe los valores de verdad en la **tabla 3** de la página siguiente, y tenga en mente que "alguno" significa "al menos uno (y posiblemente todos)".

Tabla 3 **Valores de verdad aplicados a:**

	Grupo I	Grupo II	Grupo III
(1) Todas las mujeres en el grupo se llaman Mary. (Enunciado inicial)	V	F	F
(2) En el grupo no hay mujeres llamadas Mary. (Posible negación)	F	F	V
(3) Todas las mujeres en el grupo no se llaman Mary. (Posible negación)	F	F	V
(4) Algunas mujeres en el grupo no se llaman Mary. (Posible negación)	F	V	V

Negación

La negación del enunciado inicial (1) debe tener valores de verdad opuestos en *todos* los casos. Se puede ver que los enunciados (2) y (3) no satisfacen esta condición (para el grupo II), pero sí el enunciado (4). Se puede concluir que la negación correcta para: "Todas las mujeres en el grupo se llaman Mary" es: "Algunas mujeres en el grupo no se llaman Mary". Otras maneras de establecer la negación incluyen lo siguiente.

No todas las mujeres en el grupo se llaman Mary.

No es el caso que todas las mujeres en el grupo se llaman Mary.

Al menos una mujer en el grupo no se llama Mary.

La **tabla 4** muestra cómo obtener la negación de un enunciado que implica cuantificadores.

Tabla 4 **Negaciones de enunciados con cuantificadores**

Enunciado	Negación
Todos lo hacen.	Alguno no lo hace. (Equivalente: No todos lo hacen).
Alguno lo hace.	Ninguno lo hace. (Equivalente: Todos no lo hacen).

La negación de la negación de un enunciado es simplemente el enunciado mismo. Por ejemplo, las negaciones de los enunciados en la columna Negación son simplemente los enunciados originales de la columna Enunciado. Por ejemplo, la negación de "alguno no lo hace" es "todos lo hacen".

EJEMPLO 5 Formación de negaciones de enunciados cuantificados

Obtenga la negación de cada enunciado.

a) Algunos gatos tienen pulgas. ***b)*** Algunos gatos no tienen pulgas.

c) Ningún gato tiene pulgas.

SOLUCIÓN

a) Como *algunos* significa "al menos uno", el enunciado "Algunos gatos tienen pulgas" es realmente lo mismo que "Al menos un gato tiene pulgas". La negación de esto es

"Ningún gato tiene pulgas".

b) El enunciado "Algunos gatos no tienen pulgas" dice que al menos un gato, en algún sitio, no tiene pulgas. La negación de esto es

"Todos los gatos tienen pulgas".

c) La negación es "Algunos gatos tienen pulgas". Evite la respuesta incorrecta "Todos los gatos tienen pulgas".

Cuantificadores y conjuntos de números

Con anterioridad se presentaron los conjuntos de números.

Conjuntos de números

Números naturales o cardinales $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Números enteros no negativos $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Números racionales $\left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p \text{ y } q \text{ son enteros y } q \neq 0\right\}$

(*Ejemplos*: $\frac{3}{5}$, $-\frac{7}{9}$, 5, 0. Cualquier número racional se puede expresar como un número con terminación decimal exacta, como 0.25, o como un número decimal periódico, como 0.666 . . .)

Números reales $\{x \mid x \text{ es un número que se puede expresar como un decimal}\}$

Números irracionales $\{x \mid x \text{ es un número real y no se puede expresar como un cociente de números enteros}\}$

(*Ejemplos*: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, π. Las representaciones decimales de los números irracionales no tienen terminaciones decimales exactas ni periódicas).

EJEMPLO 6 Determine si los enunciados con cuantificadores son verdaderos o falsos

Determine si cada enunciado que implica un cuantificador es *verdadero* o *falso*.

a) Existe un número entero no negativo que no es un número natural.

b) Todo entero es un número natural.

c) Todo número natural es un número racional.

d) Existe un número irracional que no es real.

SOLUCIÓN

a) Como existe este número entero no negativo (es 0), el enunciado es verdadero.

b) Este enunciado es falso, debido a que podemos obtener al menos un número entero que no sea un número natural. Por ejemplo, -1 es un número entero, pero no es un número natural.

c) Como todo número natural se puede escribir como una fracción con denominador igual a 1, este enunciado es verdadero.

d) Para ser un número irracional, un número primero debe ser real. Como no podemos obtener un número irracional que no sea real, este enunciado es falso. (Si pudiéramos obtener al menos uno, el enunciado sería verdadero). ■■■

3.1 EJERCICIOS

Determine si se trata de un enunciado o no.

1. El 2 de febrero de 2009 fue lunes.

2. El código postal de Óscar, en Los Ángeles, es 70762.

3. Escuchen, mis niños, y oirán la cabalgata de medianoche de Paul Revere.

4. Ceda el paso al tráfico en sentido contrario.

5. $5 + 9 \neq 14$ y $4 - 1 = 12$

6. $5 + 9 \neq 12$ o $4 - 2 = 5$

7. Algunos números son positivos.

8. Millard Fillmore fue presidente de Estados Unidos en 1851.

9. Los accidentes son la principal causa de muerte de niños menores de 7 años.

10. *The Dark Knight (El caballero de la noche)* fue la película que logró mayor recaudación en 2008.



11. ¿A dónde vas a ir mañana?

12. Compórtate y siéntate.

13. Kevin "Catfish" McCarthy una vez tomó una ducha continua que duró 340 horas, 40 minutos.

14. Un galón de leche pesa más de tres libras.

Indique si cada enunciado es compuesto o no.

15. Leo *Detroit Free Press* y *Sacramento Bee*.

16. Mi hermano se casó en Copenhague.

17. Mañana es sábado.

18. Mamie Zwettler es menor de 18 años, al igual que su amiga Emma Lister.

19. La esposa de Jay Beckenstein adora los helados Ben and Jerry.

20. En la leyenda de la parte trasera del automóvil se lee: "¡Canadá o nada!".

21. Si Lorri Morgan vende su cuota, entonces Michele Cook será feliz.

22. Si Bobby es un político, entonces Mitch es un pillo.

Escriba una negación para cada enunciado.

23. El nombre de su tía es Hermione.

24. Las flores se van a regar.

25. Todos los perros tienen su día.

26. Hoy no llovió en el sur de California.

27. Algunos libros son más grandes que este.

28. Todos los estudiantes presentes tendrán otra oportunidad.

29. Ningún técnico de computadoras puede jugar blackjack.

30. Algunas personas tienen mucha suerte.

31. Todo el mundo ama a alguien alguna vez.

32. Todo mundo ama a un ganador.

Dé una negación para cada desigualdad. No use el símbolo con la diagonal.

33. $x > 12$

34. $x < -6$

35. $x \geq 5$

36. $x \leq 19$

37. Intente negar el enunciado "El número exacto de palabras en esta oración es diez" y vea qué pasa. Explique el problema que se presenta.

38. Explique por qué la negación de "$x > 5$" no es "$x < 5$".

Considere que p representa el enunciado "Ella tiene ojos verdes", *mientras que q representa el enunciado* "Ella tiene 60 años". *Convierta a palabras cada enunciado simbólico compuesto.*

39. $\sim p$

40. $\sim q$

41. $p \wedge q$

42. $p \vee q$

43. $\sim p \vee q$

44. $p \wedge \sim q$

45. $\sim p \vee \sim q$

46. $\sim p \wedge \sim q$

47. $\sim(\sim p \wedge q)$

48. $\sim(p \vee \sim q)$

Considere que p representa el enunciado "Chris colecciona DVD", *y q representa* "Josh es un especialista en arte". *Convierta a símbolos cada enunciado compuesto.*

49. Chris colecciona DVD y Josh no es un especialista en arte.

50. Chris no colecciona DVD o Josh no es un especialista en arte.

51. Chris no colecciona DVD o Josh es un especialista en arte.

52. Josh es un especialista en arte y Chris no colecciona DVD.

53. Ni Chris colecciona DVD ni Josh es un especialista en arte.

54. Josh es un especialista en arte o Chris colecciona DVD, y no es el caso que Josh sea un especialista en arte y Chris coleccione DVD.

55. Con frecuencia los cuantificadores se utilizan de forma inadecuada en el lenguaje cotidiano. Suponga que usted oye que una cadena de artículos electrónicos está ofreciendo un 40% de descuento, y la publicidad en radio dice: "Todos los artículos no están disponibles en todas las tiendas". ¿Usted cree que, traducido literalmente, el comercial realmente significa lo que dice? ¿Cuál cree usted que es el significado real? Explique su respuesta.

56. Repita el **ejercicio 55** con lo siguiente: "Todas las personas no tienen tiempo para dedicarse a dar mantenimiento adecuado a su vehículo".

Remítase a los grupos de ilustraciones identificados como A, B *y* C, *e identifique con una letra el grupo o grupos que satisfacen los enunciados que se presentan más adelante y que implican cuantificadores.*



A



B



C

57. Todas las pinturas tienen marcos.

58. Ninguna pintura tiene marco.

59. Al menos una pintura no tiene marco.

60. No todas las pinturas tienen marco.

61. Al menos una pintura tiene marco.

62. Ninguna pintura no tiene marco.

63. Todas las pinturas no tienen marco.

64. No todas las pinturas no tienen marco.

Determine si cada enunciado de los ejercicios 65 a 74 que implica un cuantificador es verdadero *o* falso.

65. Todos los números enteros no negativos son enteros.

66. Todos los números naturales son enteros.

67. Existe un número racional que no es un número entero.

68. Existe un número entero que no es un número natural.

69. Todos los números racionales son números reales.

70. Todos los números irracionales son números reales.

71. Algunos números racionales no son enteros.

72. Algunos números enteros no negativos no son números racionales.

73. Todo número entero no negativo es un número positivo.

74. Todo número racional es un número positivo.

75. Explique la diferencia entre los siguientes enunciados.

Todos los estudiantes no pasaron el examen.

No todos los estudiantes pasaron el examen.

76. El enunciado "Para algún número real $x, x^2 \geq 0$" es verdadero. Sin embargo, uno de sus amigos no entiende por qué, pues afirma que $x^2 \geq 0$ es verdadero para *todos* los números reales x (y no solamente para *alguno*). ¿Cómo le explicaría que esa idea es errónea?

77. Escriba el siguiente enunciado usando "todos": No hay nadie aquí que no lo haya hecho en un momento o en otro.

78. Sólo uno de estos enunciados es verdadero. ¿Cuál es?

A. Para algún número real $x, x \not< 0$.

B. Para todos los números reales $x, x^3 > 0$.

C. Para todos los números reales x menores que $0, x^2$ también es menor que 0.

D. Para algún número real $x, x^2 < 0$.

3.2 TABLAS DE VERDAD Y ENUNCIADOS EQUIVALENTES

Conjunciones • Disyunciones • Negaciones • Enunciados matemáticos • Tablas de verdad • Método alternativo de construcción de tablas de verdad • Enunciados equivalentes y leyes de De Morgan

Conjunciones

Los valores de verdad de los enunciados componentes se utilizan para obtener los valores de verdad de los enunciados compuestos. Para comenzar, debemos identificar los valores de verdad de la **conjunción p y q,** representada por $p \wedge q$. Aquí, el conector *y* implica la idea de "ambos". El siguiente enunciado es verdadero, porque cada enunciado componente es verdadero.

El lunes sigue inmediatamente al domingo, y marzo sigue inmediatamente a febrero.

Verdadero

Por otro lado, el siguiente enunciado es falso, aun cuando una parte del enunciado (el lunes sigue inmediatamente al domingo) es verdadero.

El lunes sigue inmediatamente al domingo, y marzo sigue inmediatamente a enero.
Falso

Para que la conjunción $p \wedge q$ sea verdadera, tanto p como q deben ser verdaderos. Este resultado se resume en una tabla, llamada **tabla de verdad**, la cual muestra las cuatro combinaciones posibles de valores de verdad para la conjunción p y q.

Tabla de verdad de la conjunción p y q

p y q		
p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO 1 Obtención del valor de verdad de una conjunción

Considere que p representa "$5 > 3$", en tanto que q representa "$6 < 0$". Obtenga el valor de verdad de $p \wedge q$.

SOLUCIÓN

Aquí p es verdadero y q es falso. Observando la segunda fila de la tabla de verdad de la conjunción vemos que $p \wedge q$ es falso. ■■■



La calculadora despliega un "0" para indicar que $5 > 3$ y $6 < 0$ es un enunciado falso.

En algunos casos, se usa el conector lógico *pero* en enunciados compuestos.

Él quiere ir a las montañas, pero ella quiere ir a la playa.

Aquí, *pero* se usa en lugar de *y* para dar un énfasis diferente al enunciado. Consideramos este enunciado de la misma forma como consideraríamos la conjunción usando la palabra *y*. Entonces, se aplicaría la tabla de verdad de la conjunción presentada antes.

Disyunciones

En el lenguaje común, el vocablo *o* puede ser ambiguo. La expresión "esto o aquello" puede significar "esto o aquello o ambos", o "esto o aquello, pero no ambos". Por ejemplo, considere el siguiente enunciado.

Pintaré la pared o pintaré el techo.

Este enunciado significa probablemente: "Pintaré la pared o pintaré el techo o pintaré ambos". Por otro lado, considere el siguiente enunciado.

Conduciré el Lexus o el BMW para ir a la tienda.

Esto probablemente significa "Conduciré el Lexus o el BMW para ir a la tienda, pero no conduciré ambos".

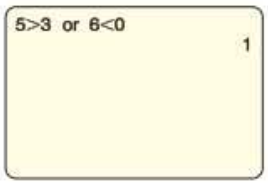
El símbolo $\vee$ representa el primer *o* descrito. Es decir,

$p \vee q$ **significa** **"p o q o ambos"**. Disyunción

Con este significado de *o*, $p \vee q$ se conoce como **disyunción inclusiva**, o simplemente **disyunción** de p y q. En el leguaje cotidiano, la disyunción implica la idea de "cualquiera". Por ejemplo, considere la siguiente disyunción.

Tengo veinticinco centavos o tengo diez centavos.

Esto es verdad siempre que tenga una moneda de 25 centavos o una de diez centavos o ambas. La única manera en que esta disyunción pudiera ser falsa sería si yo no tengo ninguna moneda. ***La disyunción $p \vee q$ es falsa solo si ambos enunciados componentes son falsos.***



La calculadora despliega un "1" si $5 > 3$ o $6 < 0$, para indicar que el enunciado es verdadero.

Tabla de verdad de una disyunción p o q

p o q		
p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 5

Enunciado	Razón por la que es verdadero
$8 \geq 8$	$8 = 8$
$3 \geq 1$	$3 > 1$
$-5 \leq -3$	$-5 < -3$
$-4 \leq -4$	$-4 = -4$

EJEMPLO 2 Obtención del valor de verdad de una disyunción

Considere que p representa "$5 > 3$", mientras que q representa "$6 < 0$". Obtenga la tabla de verdad de $p \vee q$.

SOLUCIÓN

Aquí, como en el **ejemplo 1**, p es verdadero y q es falso. La segunda fila de la tabla de verdad de la disyunción indica que $p \vee q$ es verdad. ■■■

El símbolo $\geq$ se lee como "**es mayor que o igual a**", mientras que $\leq$ se lee como "**es menor que o igual a**". Si a y b son números reales, entonces $a \leq b$ es verdadero si $a < b$ o $a = b$. La **tabla 5**, que aparece en el margen, muestra varios enunciados y las razones por las que son verdaderos.

Negaciones

La **negación** de un enunciado p, simbolizada como $\sim p$, debe tener el valor de verdad opuesto al del enunciado p mismo. Esto genera la tabla de verdad de la negación.

Tabla de verdad de la negación "no p"

no p	
p	$\sim p$
V	F
F	V

EJEMPLO 3 Obtención del valor de verdad de un enunciado compuesto

Suponga que p es falso, q verdadero, y r falso. ¿Cuál es el valor de verdad del enunciado compuesto $\sim p \wedge (q \vee \sim r)$?

SOLUCIÓN

Aquí el paréntesis se usa para agrupar q y $\sim r$. Se trabaja primero dentro del paréntesis. Como r es falso, $\sim r$ es verdadero. Como $\sim r$ es verdadero y q es verdadero, se obtiene el valor de verdad de $q \vee \sim r$ observando la primera fila de la tabla de verdad de o. Esta fila da como resultado V.

Como p es falso, $\sim p$ es verdadero y el valor de verdad final de $\sim p \wedge (q \vee \sim r)$ se obtiene en la fila superior de la tabla de verdad de y. A partir de la tabla de verdad de y, cuando $\sim p$ es verdadero, y $q \vee \sim r$ es verdadero, el enunciado

$$\sim p \wedge (q \vee \sim r) \qquad \text{es verdadero.}$$

Podemos usar como atajo un método simbólico que implica la sustitución de enunciados con sus valores de verdad, haciendo que V represente un enunciado verdadero y F un enunciado falso.

$$\sim p \wedge (q \vee \sim r)$$
$$\sim \mathrm{F} \wedge (\mathrm{V} \vee \sim \mathrm{F}) \quad \text{Primero se trabaja dentro del paréntesis.}$$
$$\mathrm{V} \wedge (\mathrm{V} \vee \mathrm{V}) \quad \sim \mathrm{F} \text{ da T.}$$
$$\mathrm{V} \wedge \mathrm{V} \quad \mathrm{T} \vee \mathrm{T} \text{ da T.}$$
El enunciado compuesto es verdadero. $\rightarrow \mathrm{T}$ $\quad \mathrm{T} \wedge \mathrm{T}$ da T.

Enunciados matemáticos

Se pueden usar tablas de verdad para determinar los valores de verdad de enunciados matemáticos compuestos.

EJEMPLO 4 Determine si un enunciado matemático compuesto es verdadero o falso

Considere que p representa el enunciado $3 > 2$, mientras que q representa $5 < 4$, y r representa $3 < 8$. Indique si cada enunciado es *verdadero* o *falso*.

a) $\sim p \wedge \sim q$ ***b)*** $\sim(p \wedge q)$ ***c)*** $(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim p)$

SOLUCIÓN

a) Como p es verdadero, $\sim p$ es falso. En la tabla de verdad de y, si una parte de un enunciado "y" es falsa, el enunciado completo es falso.

$\sim p \wedge \sim q$ es falso.

b) Para $\sim(p \wedge q)$ se trabaja primero dentro del paréntesis. Como p es verdadero y q es falso, $p \wedge q$ es falso, como se ve en la tabla de verdad de y. Luego, aplicamos la negación. La negación de un enunciado falso es verdadera.

$\sim(p \wedge q)$ es verdadero.

c) Aquí, p es verdadero, q es falso, y r es verdadero. Esto hace a $\sim p$ falso y a $\sim q$ verdadero. De acuerdo con la tabla de verdad de y, $\sim p \wedge r$ es falso, y $\sim q \wedge \sim p$ también es falso. De acuerdo con la tabla de verdad de o,

$(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim p)$ es falso.
$\mathrm{F} \quad \vee \quad \mathrm{F}$ (Alternativamente, véase el **ejemplo 8b**).

not(3>2) and not (5<4)
0
not((3>2) and (5<4))
1

El **ejemplo 4a)** explica por qué

$$\sim(3 > 2) \wedge [\sim(5 < 4)]$$

es falso. La calculadora despliega un 0. Para un enunciado verdadero como

$$\sim[(3 > 2) \wedge (5 < 4)],$$

despliega un 1.



George Boole (1815-1864) creció en la pobreza. Su padre, un comerciante londinense, le dio sus primeras clases de matemáticas y le enseñó cómo fabricar instrumentos ópticos. Boole fue fundamentalmente autodidacta. A los 16 años trabajó en una escuela primaria y a los 20 años abrió su propia escuela. Estudió matemáticas en su tiempo libre. Murió de una enfermedad pulmonar a los 49 años.

Las ideas de Boole se han utilizado en el diseño de sistemas de computadoras y teléfonos.

Cuando un cuantificador se utiliza con una conjunción o una disyunción, debemos tener cuidado al determinar el valor de verdad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Determine si un enunciado matemático cuantificado es falso o verdadero

Determine si cada enunciado es *verdadero* o *falso*.

a) Para algún número real x, $x < 5$ y $x > 2$.

b) Para todos los números reales x, $x > 0$ o $x < 1$.

c) Para todos los números reales x, $x^2 > 0$.

SOLUCIÓN

a) Sustituyendo x por 3 (por ejemplo), se obtiene $3 < 5$ y $3 > 2$. Como ambos son enunciados verdaderos, el enunciado inicial es verdadero de acuerdo con la tabla de verdad de y. (Recuerde: *Alguno* significa "al menos uno").

b) Sin importar con cuál número se intente sustituir a x, al menos uno de los dos enunciados

$$x > 0, \quad x < 1$$

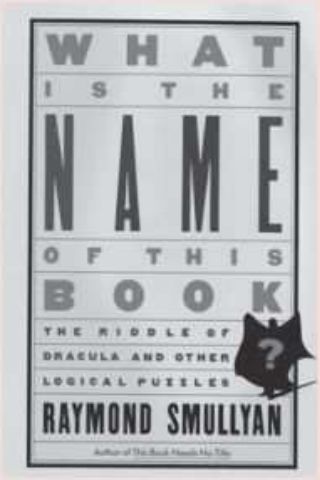
es verdadero. Como un enunciado "o" es verdadero si uno o ambos enunciados componentes son verdaderos, el enunciado inicial completo es verdadero.

c) Como el cuantificador es universal, solo necesitamos encontrar un caso en el cual la desigualdad sea falsa para hacer falso el enunciado completo. ¿Podemos obtener un número real cuyo cuadrado no sea positivo (es decir, no mayor que 0)? Sí, claro: el 0 es el *único* número real cuyo cuadrado no es positivo. Este enunciado es falso. ■■■

Para reflexionar

¿De quién es la fotografía que estoy mirando?

Raymond Smullyan es uno de los escritores más destacados de acertijos lógicos. Actualmente este profesor de matemáticas y filosofía está retirado de la Universidad de Indiana y ha escrito varios libros de lógica recreativa, incluyendo, *What Is the Name of This Book?*, *The Lady or the Tiger?* y *Alice in Puzzleland*. El primero de estos libros incluye el siguiente acertijo, el cual ha circulado por muchos años.



Para investigación individual o en grupo

Un hombre está mirando una fotografía. Alguien le pregunta: "¿De quién es la fotografía que está mirando?". Él contesta: "No tengo hermanos ni hermanas, pero el padre de este hombre es el padre de mi hijo. ("El padre de este hombre" significa, desde luego, el padre del hombre de la fotografía).

¿De quién es la fotografía que estaba mirando el hombre? (La respuesta se encuentra en la **página 96**.)

p	q	**Enunciado compuesto**
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Tablas de verdad

En los ejemplos anteriores, el valor de verdad de un enunciado determinado se obtenía consultando las tablas de verdad básicas. A la larga, es más fácil crear primero una tabla de verdad completa para el enunciado inicial. Luego, los valores de verdad finales se pueden leer directamente en esta tabla.

En este libro, usaremos el formato estándar mostrado en el margen para listar los valores de verdad posibles en enunciados compuestos que impliquen dos enunciados componentes.

EJEMPLO 6 Construcción de tablas de verdad

Considere el enunciado $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$.

a) Elabore una tabla de verdad.

b) Suponga que tanto p como q son verdaderos. Obtenga el valor de verdad del enunciado compuesto.

SOLUCIÓN

a) Se inicia listando todas las combinaciones posibles de valores de verdad para p y q, como antes. Luego liste los valores de verdad de $\sim p$, los cuales son opuestos a los de p, como se muestra en la tabla que aparece en el margen.

p	q	$\sim p$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Use solo la columna "$\sim p$" y la columna "q", junto con la tabla de verdad de y, para obtener los valores de verdad de $\sim p \wedge q$. Lístelos en una columna separada.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Luego incluya una columna para $\sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Finalmente, incluya una columna para el enunciado compuesto completo. Para obtener los valores de verdad, use o para combinar $\sim p \wedge q$ con $\sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$	$(\sim p \wedge q) \vee \sim q$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	V

b) Observe la primera fila de la tabla de verdad anterior, donde tanto p como q tienen valores de verdad T (verdadero). Lea a lo largo de la fila para ver que el enunciado compuesto es falso. ■■■

EJEMPLO 7 Elaboración de una tabla de verdad

Elabore la tabla de verdad para $p \wedge (\sim p \vee \sim q)$.

SOLUCIÓN

Proceda como se muestra.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F



Émilie, Marquesa de Châtelet (1706-1749) participó en actividades científicas después de la generación de Newton y Leibniz. Educada en ciencias, música y literatura, fue estudiante de matemáticas en la época (1733) en que inició una larga relación intelectual con el filósofo **François Voltaire** (1694-1778). Voltaire y ella compitieron independientemente en 1738 por el premio ofrecido por la Academia Francesa sobre el tema del fuego. Aun cuando Du Châtelet no ganó, su disertación fue publicada por la Academia en 1744.

Si un enunciado compuesto implica tres enunciados componentes, p, q y r, usaremos el siguiente formato estándar en la construcción de la tabla de verdad.

p	q	r	**Enunciado compuesto**
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

■■■

EJEMPLO 8 Elaboración de una tabla de verdad

Considere el enunciado $(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim p)$.

a) Elabore una tabla de verdad.

b) Suponga que p es verdadero, q es falso, y r es verdadero. Obtenga el valor de verdad de este enunciado.

SOLUCIÓN

a) Existen tres enunciados componentes: p, q y r. Por lo tanto, la tabla de verdad requiere ocho filas para listar todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de p, q y r. La tabla de verdad final se puede obtener de manera muy similar a las obtenidas anteriormente.

p	q	r	$\sim p$	$\sim p \wedge r$	$\sim q$	$\sim q \wedge \sim p$	$(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim p)$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V

b) En la tercera fila de la tabla de verdad, en el inciso ***a)***, vemos que el enunciado compuesto es falso. (Este es un método alternativo para trabajar el inciso ***c)*** del **ejemplo 4**. ■■■

Respuesta al problema de *¿De quién es la fotografía que estoy mirando?*

La mayoría de la gente contesta incorrectamente diciendo que el hombre está mirando su propia fotografía. La respuesta correcta es que el hombre mira la fotografía de su hijo.

Smullyan ayuda al lector a entender por qué ésta es la respuesta correcta: como no tiene hermanos, "el padre de mi hijo" se refiere a él mismo, de modo que la segunda parte del problema se puede redactar de otra manera: "Por lo tanto, el padre de este hombre soy yo mismo". Por consiguiente, el hombre de la fotografía debe ser su propio hijo.

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Una estrategia para la solución de problemas es identificar un patrón y usar razonamiento inductivo. Esta estrategia se aplica en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 Uso del razonamiento inductivo

Si n es un número cardinal, y un enunciado lógico está compuesto por n enunciados componentes, ¿cuántas filas aparecerán en la tabla de verdad del enunciado compuesto?

SOLUCIÓN

Para contestar esta pregunta, examinamos algunas de las tablas de verdad de esta sección. La tabla de verdad de la negación tiene un enunciado y dos filas. Las tablas de verdad de la conjunción y la disyunción tienen dos enunciados componentes, y cada una tiene cuatro filas. La tabla de verdad del **ejemplo 8*a)*** incluye tres enunciados componentes y ocho filas.

El resumen de la **tabla 6** (que aparece en el margen) revela el patrón obtenido anteriormente. El razonamiento inductivo nos lleva a la conjetura de que si un enunciado lógico tiene n componentes, tendrá 2^n filas. Esto se demuestra usando conceptos más avanzados. ■■■

Tabla 6

Número de enunciados	Número de filas
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$

El resultado del **ejemplo 9** nos recuerda la fórmula del número de subconjuntos de un conjunto que incluye n elementos.

Número de filas en una tabla de verdad

Un enunciado lógico con n enunciados componentes tiene 2^n filas en su tabla de verdad.

Método alternativo de construcción de tablas de verdad

Después de elaborar un número razonable de tablas de verdad, algunas personas prefieren el método corto mostrado en el **ejemplo 10**, el cual se utilizó también en los **ejemplos 6 y 8**.

EJEMPLO 10 Elaboración de tablas de verdad

Elabore la tabla de verdad de cada enunciado compuesto.

a) $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$ ***b)*** $(\sim p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim p)$

SOLUCIÓN

a) Se inicia insertando valores de verdad para $\sim p$ y q. Luego, use la tabla de verdad de y para obtener los valores de verdad de $\sim p \wedge q$.

p	q	$(\sim p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$\sim q$
V	V	F		V		
V	F	F		F		
F	V	V		V		
F	F	V		F		

p	q	$(\sim p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$\sim q$
V	V	F	F	V		
V	F	F	F	F		
F	V	V	V	V		
F	F	V	F	F		

Ahora ignore las dos columnas preliminares de los valores de verdad para $\sim p$ y q, e inserte valores de verdad para $\sim q$. Finalmente, use la tabla de verdad de o.

p	q	$(\sim p \wedge q)$	$\vee$	$\sim q$
V	V	F		F
V	F	F		V
F	V	V		F
F	F	F		V

p	q	$(\sim p \wedge q)$	$\vee$	$\sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	V	F
F	F	F	V	V

Estos pasos se pueden resumir como sigue.

p	q	$(\sim p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$\sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V
		①	②	①	④	③

Los números dentro de los círculos indican el orden en el cual se obtuvieron las diferentes columnas de la tabla de verdad.

b) Trabaje como sigue.

p	q	r	$(\sim p$	$\wedge$	$r)$	$\vee$	$(\sim q$	$\wedge$	$\sim p)$
V	V	V	F	F	V	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V	V	V
			①	②	①	⑤	③	④	③

Los números denVro del círculo indican el orden.

Enunciados equivalentes y leyes de De Morgan

Dos enunciados son **equivalentes** si tienen el mismo valor de verdad en *todas* las situaciones posibles. Las columnas de las dos tablas de verdad que fueron las últimas en completarse, serán las mismas para enunciados equivalentes.

EJEMPLO 11 Identificación de dos enunciados equivalentes

¿Son equivalentes los dos enunciados siguientes?

$$\sim p \wedge \sim q \quad \text{y} \quad \sim(p \vee q)$$

SOLUCIÓN

Elabore una tabla de verdad para cada enunciado.

p	q	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$\sim(p \vee q)$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Puesto que los valores de verdad son los mismos en todos los casos, como se muestra en las columnas grises, los enunciados $\sim p \wedge \sim q$ y $\sim(p \vee q)$ son equivalentes. La equivalencia se representa con el símbolo de tres barras ≡.

$$\sim p \wedge \sim q \equiv \sim(p \vee q)$$ ▮▮▮

De la misma manera, los enunciados $\sim p \vee \sim q$ y $\sim(p \wedge q)$ son equivalentes. Estas equivalencias se llaman *leyes de De Morgan.*

Leyes de De Morgan para enunciados lógicos

Para enunciados p y q cualesquiera, las siguientes equivalencias son válidas.

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad \text{y} \quad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

(Compare los enunciados lógicos de las leyes de De Morgan con las versiones de conjuntos de la **página 64**). Las leyes de De Morgan se usan para obtener la negación de ciertos enunciados compuestos.

EJEMPLO 12 Aplicación de las leyes de De Morgan

Obtenga la negación de cada enunciado aplicando las leyes de De Morgan.

a) Obtuve una A o una B. ***b)*** Ella no lo intentará y él ganará.

c) $\sim p \vee (q \wedge \sim p)$

SOLUCIÓN

a) Si p representa "obtuve una A" y q representa "obtuve una B", entonces el enunciado compuesto se representa como $p \vee q$. La negación de $p \vee q$ es $\sim(p \vee q)$. De acuerdo con una de las leyes de De Morgan, esto es equivalente a

$$\sim p \wedge \sim q,$$

o, en palabras, No obtuve una A y no obtuve una B.

Esta negación es razonable (el enunciado original dice que obtuve una A o una B). La negación dice que no obtuve *ni una A ni una B.*

b) A partir de una de las leyes de De Morgan, $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$, de modo que la negación se convierte en

Ella lo intentará o él no ganará.

c) Se niegan ambos enunciados componentes y se cambia $\vee$ por $\wedge$.

$$\sim[\sim p \vee (q \wedge \sim p)] \equiv p \wedge \sim(q \wedge \sim p)$$

Ahora se aplica nuevamente la ley de De Morgan.

$$\begin{aligned} p \wedge \sim(q \wedge \sim p) &\equiv p \wedge (\sim q \vee \sim(\sim p)) \\ &\equiv p \wedge (\sim q \vee p) \end{aligned}$$

Una tabla de verdad mostrará que los enunciados

$\sim p \vee (q \wedge \sim p)$ y $p \wedge (\sim q \vee p)$ son negaciones uno del otro. ■■■

3.2 EJERCICIOS

Con base en los conceptos presentados en esta sección, resuelva los ejercicios 1 a 6.

1. Si q es falso, ¿cuál es el valor de verdad del enunciado $(p \wedge \sim q) \wedge q$?

2. Si q es verdadero, ¿cuál es el valor de verdad del enunciado $q \vee (q \wedge \sim p)$?

3. Si el enunciado $p \wedge q$ es verdadero y p es verdadero, entonces q debe ser _____.

4. Si el enunciado $p \vee q$ es falso y p es falso, entonces q debe ser _____.

5. Si $\sim(p \vee q)$ es verdadero, ¿cuáles deben ser los valores de verdad de los enunciados componentes?

6. Si $\sim(p \wedge q)$ es falso, ¿cuáles deben ser los valores de verdad de los enunciados componentes?

Considere que p representa un enunciado falso y q representa un enunciado verdadero. Obtenga el valor verdadero del enunciado compuesto dado.

7. $\sim p$

8. $\sim q$

9. $p \vee q$

10. $p \wedge q$

11. $p \vee \sim q$

12. $\sim p \wedge q$

13. $\sim p \vee \sim q$

14. $p \wedge \sim q$

15. $\sim(p \wedge \sim q)$

16. $\sim(\sim p \vee \sim q)$

17. $\sim[\sim p \wedge (\sim q \vee p)]$

18. $\sim[(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q]$

19. El enunciado $6 \geq 2$, ¿es una conjunción o una disyunción? ¿Por qué?

20. ¿Por qué el enunciado $8 \geq 3$ es verdadero? ¿Por qué $5 \geq 5$ es verdadero?

Considere que p representa un enunciado verdadero, en tanto que q y r representan enunciados falsos. Obtenga el valor de verdad del enunciado compuesto proporcionado.

21. $(p \wedge r) \vee \sim q$

22. $(q \vee \sim r) \wedge p$

23. $p \wedge (q \vee r)$

24. $(\sim p \wedge q) \vee \sim r$

25. $\sim(p \wedge q) \wedge (r \vee \sim q)$

26. $(\sim r \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge q)$

27. $\sim[(\sim p \wedge q) \vee r]$

28. $\sim[r \vee (\sim q \wedge \sim p)]$

29. $\sim[\sim q \vee (r \wedge \sim p)]$

30. ¿Cuál es el único caso posible en el cual el enunciado $(p \wedge \sim q) \wedge \sim r$ es verdadero?

Considere que p representa el enunciado $16 < 8$, en tanto que q representa el enunciado $5 \not> 4$, y r representa el enunciado $17 \leq 17$. Obtenga el valor de verdad del enunciado compuesto proporcionado.

31. $p \wedge r$

32. $p \vee \sim q$

33. $\sim q \vee \sim r$

34. $\sim p \wedge \sim r$

35. $(p \wedge q) \vee r$

36. $\sim p \vee (\sim r \vee \sim q)$

37. $(\sim r \wedge q) \vee \sim p$

38. $\sim(p \vee \sim q) \vee \sim r$

Indique cuál es el número de filas en la tabla de verdad de cada enunciado compuesto.

39. $p \vee \sim r$

40. $p \wedge (r \wedge \sim s)$

41. $(\sim p \wedge q) \vee (\sim r \vee \sim s) \wedge r$

42. $[(p \vee q) \wedge (r \wedge s)] \wedge (t \vee \sim p)$

43. $[(\sim p \wedge \sim q) \wedge (\sim r \wedge s \wedge \sim t)] \wedge (\sim u \vee \sim v)$

44. $[\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim r \vee \sim s)] \vee [(\sim m \wedge \sim n) \wedge (u \wedge \sim v)]$

45. Si la tabla de verdad de cierto enunciado compuesto tiene 128 filas, ¿cuántos enunciados componentes distintos tiene?

46. ¿Es posible que la tabla de verdad de un enunciado compuesto tenga exactamente 54 filas? ¿Por qué?

Elabore una tabla de verdad para cada enunciado compuesto.

47. $\sim p \wedge q$

48. $\sim p \vee \sim q$

49. $\sim(p \wedge q)$

50. $p \vee \sim q$

51. $(q \vee \sim p) \vee \sim q$

52. $(p \wedge \sim q) \wedge p$

53. $\sim q \wedge (\sim p \vee q)$ **54.** $\sim p \vee (\sim q \wedge \sim p)$

55. $(p \vee \sim q) \wedge (p \wedge q)$

56. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)$

57. $(\sim p \wedge q) \wedge r$

58. $r \vee (p \wedge \sim q)$

59. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim r \vee \sim p)$

60. $(\sim r \vee \sim p) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

61. $\sim(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim r \vee \sim s)$

62. $(\sim r \vee s) \wedge (\sim p \wedge q)$

Use una de las leyes de De Morgan para escribir la negación de cada enunciado.

63. Me puede pagar ahora o me puede pagar después.

64. No voy o va ella.

65. Es verano y no hay nieve.

66. $\frac{1}{2}$ es un número positivo y -9 es menor que cero.

67. Dije sí, pero ella dijo no.

68. Dan La Chapelle intentó vender el software, pero no lo logró.

69. $6 - 1 = 5$ y $9 + 13 \neq 7$

70. $8 < 10$ o $5 \neq 2$

71. Prancer o Vixen traerán el trineo de renos de Santa la próxima Navidad.

72. El abogado y el cliente comparecieron en la corte.

Identifique cada enunciado como verdadero o falso.

73. Para todos los números reales x, $x < 14$ o $x > 6$.

74. Para todos los números reales x, $x > 9$ o $x < 9$.

75. Existe un número entero n tal que $n > 0$ y $n < 0$.

76. Para algún número entero n, $n \geq 3$ y $n \leq 3$.

77. Complete la tabla de verdad *para la disyunción exclusiva*. El símbolo $\veebar$ representa "uno u otro es verdadero, pero no ambos".

p	q	$p \veebar q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

Disyunción exclusiva

78. Los abogados algunas veces usan la frase "y/o". ¿A qué acepción de la palabra "*o*" es equivalente esta frase: disyunción inclusiva o exclusiva?



Identifique si cada enunciado compuesto es verdadero *o* falso. *Recuerde que* $\veebar$ *es la* disyunción exclusiva del **ejercicio 77**.

79. $3 + 1 = 4 \veebar 2 + 5 = 7$

80. $3 + 1 = 4 \veebar 2 + 5 = 10$

81. $3 + 1 = 6 \veebar 2 + 5 = 7$

82. $3 + 1 = 12 \veebar 2 + 5 = 10$

83. En su libro *The Lady or the Tiger and Other Logic Puzzles*, Raymond Smullyan plantea el siguiente problema, que surge de la breve historia clásica de Frank Stockton, en la cual un prisionero debe elegir entre dos puertas: atrás de una hay una hermosa dama, y detrás de la otra un tigre hambriento.

¿Cuál debe elegir si cada puerta tiene un letrero, y el hombre sabe que solo uno de los letreros es verdadero?

El letrero de la puerta 1 dice:

EN ESTE CUARTO HAY UNA DAMA Y EN EL OTRO CUARTO HAY UN TIGRE.

El letrero de la puerta 2 dice:

EN UNO DE ESTOS CUARTOS HAY UNA DAMA Y EN UNO DE ESTOS CUARTOS HAY UN TIGRE.

Con esta información, el hombre podrá elegir la puerta correcta. ¿Usted podría?

84. En los libros de Raymond Smullyan, se narran historias acerca de una isla en la cual ciertos habitantes se llaman caballeros y otros se llaman truhanes. Los caballeros siempre dicen la verdad y los truhanes siempre mienten. Cada habitante es un caballero o un truhan.

Tres habitantes (A, B y C) están juntos en un jardín. Pasa un extranjero por ahí y pregunta al habitante A: "¿Es usted caballero o truhan?". A contestó, pero su respuesta fue muy confusa, de modo que el extranjero no pudo saber lo que dijo. Entonces el extranjero preguntó a B: "¿Qué dijo A?". B contestó: "A dijo que es un truhan". En ese momento, el tercer habitante, C, dijo: "No le creas a B; ¡está mintiendo!".

La pregunta es: ¿Qué son B y C?

3.3 EL CONDICIONAL Y LOS CIRCUITOS

Condicionales • Negación de un condicional • Circuitos



En su reseña de cinco estrellas de *Field of Dreams*, publicada en el *Chicago Sun-Times (Campos de sueños)* del 21 de abril de 1989, el crítico de cine, Roger Ebert, dio una explicación de por qué la película se ha vuelto un clásico estadounidense.

Hay un discurso en esta película acerca del béisbol que es tan sencillo y real que rompe el corazón. Y la actitud hacia todos los jugadores refleja esa postura. ¿Por qué regresan de más allá de la grandeza y juegan en este maizal? No para hacer un gran anuncio que cause conmoción, sino simplemente para batear y jugar un poco, y recordamos que hay una época de bondad e inocencia.

La fotografía de arriba fue tomada en 2007 en Dyersville, Iowa, en el lugar real de filmación. La leyenda "Ray ama a Annie" en un asiento de la tribuna se puede ver en una toma rápida de la película. Se ha erosionado con el tiempo.

Condicionales

"Si lo construyes, él vendrá".
(La voz en la película *Field of Dreams*).

Ray Kinsella, un granjero de Iowa en la película *Field of Dreams (Campo de sueños)*, escucha una voz proveniente del cielo. Nadie más, ni siquiera su esposa Annie, la puede oír. Ray la interpreta como una promesa de que si él construye un campo de béisbol en este maizal, entonces el fantasma de Shoeless Joe Jackson (una estrella del béisbol de principios del siglo xx) vendría a jugar en él.

Esta promesa se presenta en forma de un enunciado condicional. Un enunciado **condicional** es un enunciado compuesto que usa el conector *si . . . entonces.*

Si leo mucho tiempo, *entonces* me cansaré.
Si la mirada matara, *entonces* estaría muerto.
Si él no regresa pronto, *entonces* debes ir a buscarlo.

} Enunciados condicionales

En cada uno de estos enunciados condicionales, el componente que viene después de la palabra *si* establece una condición (aunque no necesariamente la única) para que el enunciado que viene después de *entonces* sea verdadero. Por ejemplo, "Si la temperatura rebasa los 90° F, entonces iré a las montañas" establece una posible condición para ir a las montañas: si la temperatura rebasa los 90° F.

El condicional se escribe con una flecha, de modo que "si p, entonces q" se simboliza como sigue.

$p \rightarrow q$ si p, entonces q.

$p \rightarrow q$ se lee como **"p implica q"** o **"si p, entonces q"**. En el condicional $p \rightarrow q$, el enunciado p es el **antecedente**, mientras que q es el **consecuente**.

El conector condicional no siempre se establece explícitamente. Es decir, en una expresión cotidiana podría estar "escondido". Por ejemplo, considere el siguiente enunciado.

Las muchachas grandes no lloran.

Esto se puede escribir en la forma *si . . . entonces*, como

Si eres una muchacha grande, *entonces* no lloras.

Como otro ejemplo, considere este enunciado.

Es difícil estudiar cuando estás distraído.

Esto se puede escribir como

Si estás distraído, *entonces* es difícil estudiar.

En la frase citada "Si lo construyes, él vendrá", de la película *Field of Dreams*, la palabra "*entonces*" no se menciona, pero se sobreentiende a partir del contexto del enunciado. "Tú constrúyelo" es el antecedente, y "él vendrá" es el consecuente.

La tabla de verdad condicional es un poco más difícil de definir que las tablas de la sección anterior. Para ver cómo se define la tabla de verdad condicional, analizaremos un enunciado pronunciado por un político, la senadora Laura Kennedy.

Si resulto electa, entonces los impuestos bajarán.

Existen cuatro combinaciones posibles de valores de verdad para los dos enunciados componentes. Hagamos que p represente "resulto electa" y que q represente "los impuestos bajarán".

$\sqrt[3]{250}$ 90° $(0, -3)$
θ $45.5 + 2^{-1}$ ∞
$x = (4+8)-3$ $|a|$
$y = -x + 2$ $\frac{1}{4}$
10^2 $\geq$ $f(x) =$

La importancia de los **símbolos** fue enfatizada por el filósofo especialista en lógica, **Charles Sanders Peirce** (1839-1914), quien afirmó que la naturaleza humana corresponde a la de organismos que usan símbolos y signos. "La notación simbólica es la mitad de las matemáticas", dijo alguna vez Bertrand Rusell.

Al analizar las cuatro posibilidades, es conveniente pensar en términos de lo siguiente: "¿La senadora Laura Kennedy mintió?". Si mintió, entonces el enunciado condicional se considera falso. Si no mintió, entonces el enunciado condicional se considera verdadero.

Posibilidad	¿Electa?	¿Disminución de impuestos?	
1	Sí	Sí	*p* es T, *q* es T.
2	Sí	No	*p* es T, *q* es F.
3	No	Sí	*p* es F, *q* es T.
4	No	No	*p* es F, *q* es F.

Las cuatro posibilidades son como sigue:

1. En el primer caso se supone que la senadora fue electa y los impuestos disminuyeron (*p es* V, *q* es V). La senadora dijo la verdad, de manera que se coloca V en la primera fila de la tabla de verdad. (No estamos diciendo que los impuestos disminuyeron *porque* fue electa. Es posible que ella no haya tenido nada que ver en el asunto).
2. En el segundo caso se supone que la senadora resultó electa y los impuestos no disminuyeron (*p* es V, *q* es F). Entonces la senadora no dijo la verdad (es decir, mintió). Entonces colocamos una F en la segunda fila de la tabla de verdad.
3. En el tercer caso se supone que la senadora fue derrotada, pero los impuestos bajaron de todos modos (*p* es F, *q* es V). La senadora no mintió. Ella prometió una reducción de impuestos solo si resultaba electa. No dijo nada acerca de lo que sucedería si no resultaba electa. De hecho, su promesa de campaña no da información acerca de lo que sucedería si perdía. Como no podemos decir que la senadora mintió, colocamos una V en la tercera fila de la tabla de verdad. (Véase la nota al margen).
4. En el último caso se supone que la senadora fue derrotada y los impuestos no bajaron (*p* es F, *q* es F). No podemos culparla, porque ella prometió reducir impuestos solo si resultaba electa. Por lo tanto, se coloca una V en la última fila de la tabla de verdad.

¡Usted miente! (o ¿usted miente?) Concedido, la V del caso 3 es menos evidente que la F del caso 2. Sin embargo, las leyes de la lógica simbólica permiten solo uno de dos valores de verdad. Puesto que no se puede establecer que miente en el caso 3, otorgamos a la senadora el beneficio de la duda. Asimismo, cualquier enunciado condicional se declara verdadero siempre que su antecedente sea falso.

La tabla de verdad completa del condicional es como sigue.

Tabla de verdad del condicional Si *p*, entonces *q*

Si *p*, entonces *q*		
p	***q***	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El uso del conector condicional no implica de ninguna manera una relación de causa y efecto. Dos enunciados cualesquiera pueden tener una flecha colocada entre ellos para formar un enunciado compuesto. Considere este ejemplo.

Si apruebo matemáticas, entonces saldrá el sol al día siguiente.

El enunciado es verdadero, porque el consecuente es verdadero. (Véase el recuadro de características especiales que aparece después del **ejemplo 1** de la siguiente página). Sin embargo, no existe conexión de causa y efecto entre mi aprobación de matemáticas y la salida del sol. El sol saldrá sin importar la calificación que obtenga.

EJEMPLO 1 Obtención del valor de verdad de un condicional

Considerando que p, q y r son falsos, obtenga el valor de verdad del enunciado.

$$(p \to \sim q) \to (\sim r \to q)$$

SOLUCIÓN

Usando el método corto explicado en el **ejemplo 3** de la sección anterior, podemos sustituir p, q y r por una F (puesto que todos son falsos) y proceder como antes, usando las tablas de verdad de la negación y el condicional cuando sea necesario.

$$\begin{array}{rcll} (p \to \sim q) & \to & (\sim r \to q) & \\ (\mathrm{F} \to \sim \mathrm{F}) & \to & (\sim \mathrm{F} \to \mathrm{F}) & \\ (\mathrm{F} \to \mathrm{V}) & \to & (\mathrm{V} \to \mathrm{F}) & \text{Usando la tabla de verdad de la negación.} \\ \mathrm{V} & \to & \mathrm{F} & \text{Usando la tabla de verdad del condicional.} \\ & & \mathrm{F} & \end{array}$$

El enunciado $(p \to \sim q) \to (\sim r \to q)$ es falso cuando p, q y r son falsos. ■■■

```
PROGRAM:SIGN
: Input A
: If A>0
: Then
: Disp  "POSITIVE"

:
:
```

```
PROGRAM:SIGN

:
: Else
: Disp  "NOT POSITIVE"
: End
:
```

```
prgmSIGN
?3
POSITIVE
                Done
```

```
prgmSIGN
?-5
NOT POSITIVE
                Done
```

Los enunciados **condicionales** son útiles en la elaboración de programas. El breve programa de las primeras dos pantallas determina si un número es positivo. Observe las líneas que inician con *if* (si) y *then* (entonces).

Características especiales de enunciados condicionales

1. $p \to q$ es falso solo cuando el antecedente es *verdadero* y el consecuente es *falso*.
2. Si el antecedente es *falso*, entonces $p \to q$ automáticamente es *verdadero*.
3. Si el consecuente es *verdadero*, entonces $p \to q$ automáticamente es *verdadero*.

EJEMPLO 2 Determine si un condicional es verdadero o falso

Escriba *verdadero* o *falso* junto a cada enunciado, según considere pertinente. Aquí V representa un enunciado verdadero, y F representa un enunciado falso.

a) $\mathrm{V} \to (7 = 3)$ ***b)*** $(8 < 2) \to \mathrm{F}$ ***c)*** $(4 \neq 3 + 1) \to \mathrm{V}$

SOLUCIÓN

a) Como el antecedente es verdadero, mientras que el consecuente $7 = 3$ es falso, el enunciado en cuestión es falso debido a la primera característica mencionada en el recuadro anterior.

b) El antecedente es falso, de modo que el enunciado en cuestión es verdadero debido a la segunda característica.

c) El consecuente es verdadero, por lo que el enunciado es verdadero de acuerdo con la tercera característica de los enunciados condicionales. ■■■

EJEMPLO 3 Elaboración de tablas de verdad

Elabore una tabla de verdad para cada enunciado.

a) $(\sim p \to \sim q) \to (\sim p \wedge q)$ ***b)*** $(p \to q) \to (\sim p \vee q)$

SOLUCIÓN

a) Inserte los valores de verdad de $\sim p$ y $\sim q$. Obtenga los valores de verdad de $\sim p \to \sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \to \sim q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Luego, use $\sim p$ y q para obtener los valores de verdad de $\sim p \wedge q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

Ahora obtenga los valores de verdad de $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F

b) Para $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$, ejecute los pasos de forma similar a como procedió anteriormente.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

▮▮▮

Como muestra la tabla de verdad del **ejemplo 3*b)***, el enunciado

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$$

siempre es verdadero, sin importar los valores de verdad de los componentes. Un enunciado como este se conoce como **tautología**. Otros ejemplos de tautologías (como se puede comprobar elaborando sus tablas de verdad) son

$$p \vee \sim p, \quad p \rightarrow p, \quad \text{y} \quad (\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim (p \wedge q). \qquad \text{Tautologías}$$

Las tablas de verdad del **ejemplo 3** también se pueden obtener por el método alternativo descrito en la **sección 3.2.**



En el cortometraje de Disney de 1959 *Donald in Mathmagicland (Donald en el país de las matemáticas)*, el pato Donald, vestido como Alicia en *A través del espejo*, de Lewis Carroll, es atacado por "un grupo de piezas de ajedrez nada amistosas". La lógica y el **ajedrez** han estado asociados durante siglos. La mayoría de los investigadores están de acuerdo en que el ajedrez data de 1500 años atrás, y que proviene del norte de la India y Afganistán, siguiendo rutas a través de Persia.

Los buenos jugadores de ajedrez confían en la memoria, la imaginación, la determinación y la inspiración. Son pensadores de patrones que usan conjuntos tradicionales de consecuencias y probabilidades.

Finalmente, la lógica no necesariamente determina el resultado final de un juego de ajedrez; si así fuera, los humanos no tendrían oportunidad cuando enfrentan a computadoras impersonales devoradoras de números.
© Disney Enterprises, Inc.

Fuentes: www.imdb.com, Walter A. Smart.

Negación de un condicional

Suponga que alguien menciona el siguiente enunciado condicional.

"Si llueve, entonces llevaré mi paraguas".

¿Cuándo le estará mintiendo esta persona? El único caso en el cual usted es engañado es cuando llueve *y* esa persona *no* lleva el paraguas. Haciendo que p represente "llueve" y q represente "llevo mi paraguas", se puede suponer que el enunciado simbólico

$$p \wedge \sim q$$

es una opción para la negación de $p \rightarrow q$. Esto implicaría que

$$\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q.$$

Este es claramente el caso, como lo indica la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim (p \rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

$\uparrow \quad \uparrow$

$=$

Negación de $p \rightarrow q$

La negación de $p \rightarrow q$ es $p \wedge \sim q$.

Puesto que

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q,$$

al negar cada expresión obtenemos

$$\sim[\sim(p \rightarrow q)] \equiv \sim(p \wedge \sim q).$$

El lado izquierdo de la equivalencia anterior es $p \rightarrow q$, y se puede aplicar una de las leyes de De Morgan al lado derecho.

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee \sim(\sim q)$$
$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Este resultado final indica que se puede escribir un condicional como disyunción.

Expresión de un condicional como disyunción

$p \rightarrow q$ es equivalente a $\sim p \vee q$.

EJEMPLO 4 Obtención de negaciones

Determine la negación de cada enunciado.

a) Si lo construyes, él vendrá. ***b)*** Todos los perros tienen pulgas.

No intente negar un condicional con otro condicional

SOLUCIÓN

a) Si b representa "lo construyes" y q representa "él vendrá", entonces el enunciado en cuestión se puede simbolizar como $b \rightarrow q$. La negación de $b \rightarrow q$, como se mostró anteriormente, es $b \wedge \sim q$, de modo que la negación del enunciado es

Constrúyelo y él no vendrá.

b) Primero, debemos restablecer el enunciado inicial a la forma *si . . . entonces*.

Si es un perro, entonces tiene pulgas.

Con base en nuestro análisis anterior, la negación es

Es un perro y no tiene pulgas. ■■■

Como se vio en el **ejemplo 4**, la negación de un enunciado condicional se escribe como una conjunción.

EJEMPLO 5 Obtención de enunciados equivalentes a partir de enunciados condicionales

Escriba cada enunciado condicional como un enunciado equivalente sin usar *si . . . entonces*.

a) Si los Indios de Cleveland ganan el campeonato, entonces Johnny irá a la Serie Mundial.

b) Si es Borden's, tiene que ser bueno.

SOLUCIÓN

a) Como el condicional $p \rightarrow q$ es equivalente a $\sim p \vee q$, hagamos que p represente "Los Indios de Cleveland ganan el campeonato" y q represente "Johnny irá a la Serie Mundial". Se reformula el condicional como

Los Indios de Cleveland no ganan el campeonato o Johnny irá a la Serie Mundial.

b) Si p representa "es Borden's" y q representa "tiene que ser bueno", el condicional se puede reformular como

No es Borden's o tiene que ser bueno. ▮▮▮



Figura 1

Circuitos

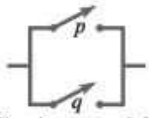
Una de las primeras aplicaciones no matemáticas de la lógica simbólica se trató en la tesis de maestría de Claude Shannon en 1937. Shannon mostró cómo podía usarse la lógica para diseñar circuitos eléctricos. Su trabajo lo aplicaron inmediatamente los diseñadores de computadoras. Luego, en la etapa de desarrollo, fue posible simplificar las computadoras y construirlas a menor costo usando las ideas de Shannon.

Para ver cómo funcionan las ideas de Shannon, observemos el interruptor mostrado en la **figura 1**. Supongamos que la corriente fluye a través de este interruptor cuando está cerrado y se interrumpe cuando está abierto.



Figura 2

La **figura 2** muestra dos interruptores conectados en *serie*. En un circuito como este, la corriente fluye solo cuando los dos interruptores están cerrados. Observe qué tan cerca está un circuito en serie de la conjunción $p \wedge q$. Sabemos que $p \wedge q$ es verdadero solo cuando tanto p como q son verdaderos.



Circuito en paralelo

Figura 3

Un circuito que corresponda a la disyunción $p \vee q$ se obtiene dibujando un circuito en *paralelo*, como el de la **figura 3**. Aquí, la corriente fluye si p o q está cerrado o si p y q están cerrados.

El circuito de la **figura 4** corresponde al enunciado $(p \vee q) \wedge \sim q$, el cual es un enunciado compuesto que implica tanto una conjunción como una disyunción.

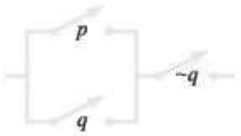


Figura 4

La simplificación de un circuito eléctrico depende de la idea de enunciados equivalentes de la **sección 3.2.** Recuerde que dos enunciados son equivalentes si tienen la misma columna final en la tabla de verdad. El símbolo ≡ se usa para indicar que los dos enunciados son equivalentes. En el siguiente recuadro se presentan algunos enunciados equivalentes.

Enunciados equivalentes usados para simplificar circuitos

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \qquad p \vee p \equiv p$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \wedge p \equiv p$$
$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \qquad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$
$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \qquad \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

Si V representa los enunciados verdaderos y F representa los enunciados falsos, entonces

$$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V} \quad p \vee \sim p \equiv \mathbf{V}$$
$$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} \quad p \wedge \sim p \equiv \mathbf{F}.$$

Los circuitos se pueden usar como modelos de enunciados compuestos, con un interruptor cerrado que corresponde a V, mientras que un interruptor abierto corresponde a F.

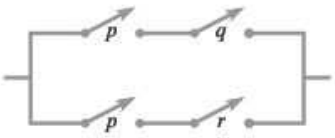


Figura 5

EJEMPLO 6 Simplificación de un circuito

Simplifique el circuito de la **figura 5.**

SOLUCIÓN

En la parte superior de la **figura 5**, p y q están conectados en serie, y en la parte inferior p y r también están conectados en serie. Estos se interpretan como los enunciados compuestos $p \wedge q$ y $p \wedge r$, respectivamente. Estas dos conjunciones están conectadas en paralelo, como lo indica la figura considerada como un todo.

Se escribe la disyunción de las dos conjunciones.

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$



Figura 6

(Piense que los dos interruptores identificados como "p" están controlados por la misma palanca). De acuerdo con uno de los pares de enunciados equivalentes del recuadro anterior,

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r),$$

el cual corresponde al circuito de la **figura 6**. Este circuito es lógicamente equivalente al de la **figura 5**, pero contiene solo tres interruptores en vez de cuatro (lo cual trae consigo un gran ahorro en costos de manufactura). ■■■

EJEMPLO 7 Dibujo de un circuito para un enunciado condicional

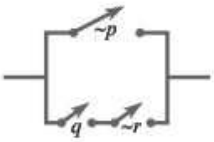


Figura 7

Dibuje un circuito para $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$.

SOLUCIÓN

A partir de la lista de enunciados equivalentes del recuadro, $p \rightarrow q$ es equivalente a $\sim p \vee q$. Esta equivalencia nos da $p \rightarrow (q \wedge \sim r) \equiv \sim p \vee (q \wedge \sim r)$, el cual corresponde al circuito de la **figura 7**. ■■■

3.3 EJERCICIOS

Escriba cada enunciado usando el conector si . . . entonces. *Reordene las palabras o agregue términos cuando sea necesario.*

1. Usted puede creerlo si lo ve en Internet.

2. Debe estar vivo si está respirando.

3. Todos los números enteros divisibles entre 10 son divisibles entre 5.

4. Todos los números enteros con cuadrados perfectos tienen el dígito de las unidades igual a 0, 1, 4, 5, 6 o 9.

5. Todos los marinos aman el campo de entrenamiento.

6. Todas las películas cuentan una historia.

7. No hay pandas en Idaho.



8. Los conejillos de indias no son estudiantes.



9. Un consumidor de opio no puede tener autocontrol.

10. Oso Corredor ama a Palomita Blanca.

Indique si cada enunciado es verdadero *o* falso.

11. Si el antecedente de un enunciado condicional es falso, el enunciado condicional es verdadero.

12. Si el consecuente de un enunciado condicional es verdadero, el enunciado condicional es verdadero.

13. Si q es verdadero, entonces $(p \wedge q) \rightarrow q$ es verdadero.

14. Si p es verdadero, entonces $\sim p \rightarrow (q \vee r)$ es verdadero.

15. La negación de "Si los cerdos vuelan, lo creeré" es "Si los cerdos no vuelan, no lo creeré".

16. Los enunciados "Si vuela, entonces es un pájaro" y "No vuela o es un pájaro" son lógicamente equivalentes.

17. Considerando que $\sim p$ es verdadero y q es falso, el condicional $p \rightarrow q$ es verdadero.

18. Considerando que $\sim p$ es falso y q es falso, el condicional $p \rightarrow q$ es verdadero.

19. Explique por qué el enunciado "Si $3 = 5$, entonces $4 = 6$" es verdadero.

20. Con unas cuantas frases, explique cómo determinar el valor de verdad de un enunciado condicional.

Diga si cada condicional es verdadero (V) *o* falso (F).

21. $T \rightarrow (7 < 3)$

22. $F \rightarrow (4 \neq 8)$

23. $F \rightarrow (5 \neq 5)$

24. $(8 \geq 8) \rightarrow F$

25. $(5^2 \neq 25) \rightarrow (8 - 8 = 16)$

26. $(5 = 12 - 7) \rightarrow (9 > 0)$

Considere que s representa a "Ella tiene un pájaro como mascota", *p representa a* "él entrena perros", *y m representa a* "ellos crían alpacas". *Exprese cada enunciado en palabras.*

27. $\sim m \rightarrow p$

28. $p \rightarrow \sim m$

29. $s \rightarrow (m \wedge p)$

30. $(s \wedge p) \rightarrow m$

31. $\sim p \rightarrow (\sim m \vee s)$

32. $(\sim s \vee \sim m) \rightarrow \sim p$

Considere que b representa a "Yo manejo mi bicicleta", *s representa a* "está nevando" y *p representa a* "el juego se canceló". *Escriba cada enunciado con símbolos.*

33. Si manejo mi bicicleta, entonces el juego se cancela.

34. Si nieva, entonces manejo mi bicicleta.

35. Si el juego se cancela, entonces no nieva.

36. Si no manejo mi bicicleta, entonces no nieva.

37. El juego se canceló, y si nieva entonces no manejo mi bicicleta.

38. Manejo mi bicicleta o si el juego se cancela, entonces nieva.

39. Nieva si el juego se cancela.

40. Manejaré mi bicicleta si no nieva.

Obtenga el valor de verdad de cada enunciado. Suponga que p y r son falsos, y que q es verdadero.

41. $\sim r \rightarrow q$

42. $\sim p \rightarrow \sim r$

43. $q \rightarrow p$

44. $\sim r \rightarrow p$

45. $p \rightarrow q$

46. $\sim q \rightarrow r$

47. $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$

48. $(\sim r \vee p) \rightarrow p$

49. $\sim q \rightarrow (p \wedge r)$

50. $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (p \wedge \sim r)$

51. $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$

52. $(p \rightarrow \sim q) \wedge (p \rightarrow r)$

53. Explique por qué, si sabemos que p es verdadero, también sabemos que

$$[r \vee (p \vee s)] \rightarrow (p \vee q)$$

es verdadero, incluso si no tenemos los valores de verdad de q, r y s.

54. Elabore un enunciado verdadero que implique un condicional, una conjunción, una disyunción y una negación (no necesariamente en ese orden), que contenga los enunciados componentes p, q y r, todos ellos falsos.

Elabore una tabla de verdad para cada enunciado. Identifique las tautologías.

55. $\sim q \rightarrow p$

56. $p \rightarrow \sim q$

57. $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow p$

58. $(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim q$

59. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

60. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

61. $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$

62. $r \rightarrow (p \wedge \sim q)$

63. $[(r \vee p) \wedge \sim q] \rightarrow p$

64. $[(r \wedge p) \wedge (p \wedge q)] \rightarrow p$

65. $(\sim r \rightarrow s) \vee (p \rightarrow \sim q)$

66. $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (s \rightarrow r)$

67. ¿Cuál es el número mínimo de "efes" que deben aparecer en la columna final de una tabla de verdad para que podamos estar seguros de que el enunciado no es una tautología?

68. Si todos los valores de verdad en la columna final de una tabla de verdad son F, ¿cómo se puede transformar fácilmente el enunciado en una tautología?

Escriba la negación de cada enunciado. Recuerde que la negación de $p \rightarrow q$ *es* $p \wedge \sim q$.

69. Si ese es un reloj Rólex auténtico, me sorprendería.



70. Si Minnie Ripperton alcanza esa nota, romperá la copa.



71. Si las unidades inglesas no se convierten a unidades métricas, entonces la nave espacial se estrellará en la superficie de Saturno.

72. Si usted dice "sí", entonces usted estará feliz por el resto de su vida.

73. "Si usted quiere ser feliz por el resto de su vida, nunca se case con una mujer hermosa". *Jimmy Soul.*

74. "Si amarte es un error, no quiero tener la razón". *Luther Ingram.*

Escriba cada enunciado como un enunciado equivalente que no use el conector si . . . entonces. Recuerde que

$$p \rightarrow q \quad \textit{es equivalente a} \quad \sim p \vee q.$$

75. Si usted da a sus plantas ternura y amor, florecerán.

76. Si el cheque está en el buzón, compraré el almuerzo.

77. Si ella no lo hace, él lo hará.

78. Si yo digo "negro", ella dice "blanco".

79. Todos los residentes de Pensacola son residentes de Florida.

80. Todas las mujeres fueron niñas.

Use tablas de verdad para identificar cuáles de los pares de enunciados son equivalentes.

81. $p \rightarrow q$; $\sim p \vee q$

82. $\sim(p \rightarrow q)$; $p \wedge \sim q$

83. $p \rightarrow q$; $\sim q \rightarrow \sim p$

84. $q \rightarrow p$; $\sim p \rightarrow \sim q$

85. $p \wedge \sim q$; $\sim q \rightarrow \sim p$

86. $p \rightarrow q$; $q \rightarrow p$

87. $p \rightarrow \sim q$; $\sim p \vee \sim q$

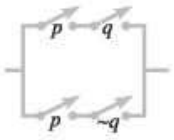
88. $\sim p \wedge q$; $\sim p \rightarrow q$

89. $q \rightarrow \sim p$; $p \rightarrow \sim q$

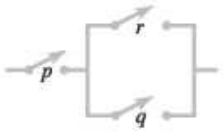
90. $\sim p \rightarrow q$; $p \vee q$

Escriba un enunciado lógico que represente cada uno de los siguientes circuitos. Simplifique cada circuito cuando sea posible.

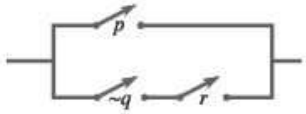
91.



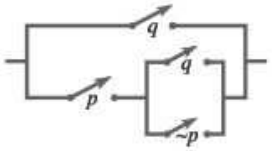
92.



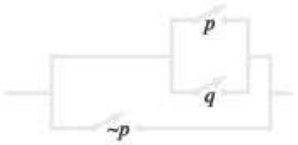
93.



94.



95.



96.



Dibuje los circuitos que representen los siguientes enunciados tal como se presentan. Simplifique si es posible.

97. $p \wedge (q \vee \sim p)$

98. $(\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim r$

99. $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$

100. $(\sim q \wedge \sim p) \vee (\sim p \vee q)$

101. $[(p \vee q) \wedge r] \wedge \sim p$

102. $[(\sim p \wedge \sim r) \vee \sim q] \wedge (\sim p \wedge r)$

103. $\sim q \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

104. $\sim p \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

105. Remítase a las **figuras 5 y 6** del **ejemplo 6**. Suponga que el costo de una hora por el uso de un interruptor es de \$0.06. Al usar el circuito de la **figura 6** en lugar del circuito de la **figura 5**, ¿cuál es el ahorro por un año de 365 días, suponiendo que el circuito se usa de manera continua?

106. Explique por qué el circuito ilustrado siempre tendrá un interruptor abierto. ¿Cómo se simplifica este circuito?



3.4 EL CONDICIONAL Y LOS ENUNCIADOS RELACIONADOS

Converso, inverso y contrapositivo • Formas alternativas de "si p, entonces q" • Bicondicionales • Resumen de tablas de verdad



Alfred North Whitehead (1861-1947) y Bertrand Russell trabajaron juntos en los *Principia Mathematica*. En ese tiempo, Whitehead era profesor de matemáticas en la Universidad de Cambridge y había escrito *Álgebra Universal*. En 1910 se fue a la Universidad de Londres, para explorar no solo las bases filosóficas de la ciencia, sino también los "objetivos de la educación" (como tituló uno de sus libros). Fue filósofo invitado por la Universidad de Harvard en 1924. Whitehead murió a la edad de 86 años en Cambridge, Massachusetts.

Converso, inverso y contrapositivo

Muchas propiedades y teoremas matemáticos se definen en la forma *si... entonces*. Cualquier enunciado condicional $p \rightarrow q$ consiste en un antecedente p y un consecuente q. Si se intercambian, se niegan, o ambas cosas, se forma un nuevo enunciado condicional. Suponga que iniciamos con el enunciado condicional:

Si usted está, entonces yo voy. Enunciado condicional

Al intercambiar el antecedente ("usted está") y el consecuente ("yo voy"), obtenemos un nuevo enunciado condicional.

Si yo voy, entonces usted está. Enunciado converso

Este nuevo condicional se llama **converso** del enunciado condicional original.

Al negar tanto el antecedente como el consecuente, obtenemos el **inverso** de un enunciado condicional determinado.

Si usted no está, entonces yo no voy. Enunciado inverso

Si tanto el antecedente como el consecuente se intercambian *y* se niegan, se forma el **contrapositivo** del enunciado condicional original.

Si yo no voy, entonces usted no está. Enunciado contrapositivo

Estos tres enunciados relacionados del condicional $p \rightarrow q$ se resumen a continuación. (***El inverso es el contrapositivo del converso***).

Enunciados condicionales relacionados

Enunciado condicional	$p \rightarrow q$	(Si p, entonces q).
Converso	$q \rightarrow p$	(Si q, entonces p).
Inverso	$\sim p \rightarrow \sim q$	(Si no p, entonces no q).
Contrapositivo	$\sim q \rightarrow \sim p$	(Si no q, entonces no p).

EJEMPLO 1 Determinación de enunciados condicionales relacionados

Determine lo siguiente, a partir del enunciado condicional:

Si vivo en Orlando, entonces vivo en Florida.

a) el converso ***b)*** el inverso ***c)*** el contrapositivo

SOLUCIÓN

a) Considere que p representa "vivo en Orlando" y q representa "vivo en Florida". Entonces el enunciado en cuestión se puede escribir como $p \rightarrow q$. Y el converso, $q \rightarrow p$, es:

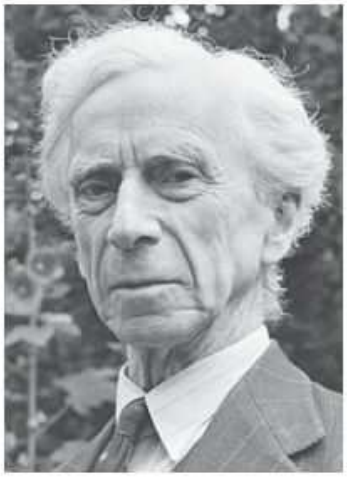
Si vivo en Florida, entonces vivo en Orlando.

Observe que para este enunciado, el converso no es necesariamente verdadero, aun cuando el enunciado original sea verdadero.

b) El inverso de $p \rightarrow q$ es $\sim p \rightarrow \sim q$. Por lo tanto, el inverso es:

Si no vivo en Orlando, entonces no vivo en Florida.

Una vez más, esto no es necesariamente verdadero.



Bertrand Russell (1872-1970) fue discípulo de Whitehead antes de que escribieran los *Principia*. Al igual que su maestro, Russell se dedicó a la filosofía. Sus trabajos incluyen una crítica a Leibniz, análisis del pensamiento y de la materia, y la historia del pensamiento occidental.

Russell se convirtió en una figura pública a causa de su participación en causas sociales. Consciente de la soledad humana, fue "apasionadamente deseoso de encontrar maneras de aliviar esta trágica soledad". Durante la Primera Guerra Mundial fue un pacifista, y estuvo en prisión durante un breve lapso. En la década de 1960 abogó nuevamente por la paz. Escribió muchos libros sobre temas sociales y ganó el Premio Nobel de Literatura en 1950.

c) El contrapositivo, $\sim q \rightarrow \sim p$, es:

Si no vivo en Florida, entonces no vivo en Orlando.

El contrapositivo, al igual que el enunciado condicional original, es verdadero. ■■■

El **ejemplo 1** muestra que el converso y el inverso de un enunciado verdadero no necesariamente son verdaderos. *Pueden* ser verdaderos, pero no necesariamente. Las relaciones entre los condicionales relacionados se presentan en la siguiente tabla de verdad.

		Condicional	Converso	Inverso	Contrapositivo
		Equivalente			Equivalente
			Equivalente		
p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Como se observa en esta tabla de verdad,

1. ***Un enunciado condicional y su contrapositivo siempre tienen los mismos valores de verdad***, lo que posibilita la sustitución de cualquier enunciado con su contrapositivo sin alterar el significado lógico.
2. ***El converso y el inverso siempre tienen los mismos valores de verdad.***

Equivalencias

Un enunciado condicional y su contrapositivo son equivalentes. También el converso y el inverso son equivalentes.

EJEMPLO 2 Determinación de enunciados condicionales relacionados

Para el enunciado condicional $\sim p \rightarrow q$ obtenga lo siguiente:

a) el converso ***b)*** el inverso ***c)*** el contrapositivo

SOLUCIÓN

a) El converso de $\sim p \rightarrow q$ es $q \rightarrow \sim p$.

b) El inverso es $\sim(\sim p) \rightarrow \sim q$, lo cual se simplifica a $p \rightarrow \sim q$.

c) El contrapositivo es $\sim q \rightarrow \sim(\sim p)$, lo cual se simplifica a $\sim q \rightarrow p$. ■■■

Formas alternativas de "si p, entonces q"

El enunciado condicional "si p, entonces q" se puede expresar de varias maneras. Considere este enunciado:

Si usted va al centro comercial, entonces encontrará dónde estacionarse.

Esto también se puede escribir como sigue:

Ir al centro comercial es *suficiente* para encontrar un lugar de estacionamiento.

De acuerdo con este enunciado, ir al centro comercial es suficiente para encontrar con seguridad un lugar de estacionamiento. Ir a otros lugares, como escuelas u oficinas, *podría* garantizar también un lugar para estacionarse, pero al menos *sabemos* que ir al centro comercial sí lo garantiza. Entonces, $p \rightarrow q$ se puede escribir como "p es suficiente para q". Saber que ocurre p es suficiente para garantizar que q también ocurra.

Por otro lado, considere este enunciado, el cual tiene un significado diferente.

Es necesario encender el aparato para ver televisión. (*)

Aquí, estamos hablando de que una condición necesaria para ver televisión es que el aparato esté encendido. Esto puede no ser suficiente. El aparato podría estar descompuesto, por ejemplo. El enunciado identificado con (*) se puede escribir como:

Si usted ve televisión, entonces el aparato debe estar encendido.

Como sugiere este ejemplo, $p \rightarrow q$ es lo mismo que "q es necesario para p". En otras palabras, si q no sucede, entonces tampoco sucederá p. Observe cómo esta idea está estrechamente relacionada con la idea de equivalencia entre un enunciado condicional y su contrapositivo.

Conversiones comunes de $p \rightarrow q$

El condicional $p \rightarrow q$ se puede interpretar de las siguientes maneras, ninguna de las cuales depende de la verdad o falsedad de $p \rightarrow q$.

Si *p*, then *q*.	**p es suficiente para q.**
Si *p*, *q*.	**q es necesario para p.**
p implica q.	**Todas las p son q.**
p solo si q.	**q si p.**

Ejemplo: Si usted vive en Dubuque, entonces vive en Iowa. Enunciado

Usted vive en Iowa si vive en Dubuque.
Usted vive en Dubuque solo si vive en Iowa.
Es necesario vivir en Iowa para vivir en Dubuque.
Vivir en Dubuque es suficiente para vivir en Iowa.
Todos los residentes de Dubuque son residentes de Iowa.
Ser residente en Dubuque implica radicar en Iowa.

} Conversiones comunes

EJEMPLO 3 Reformulación de enunciados condicionales

Escriba cada enunciado en la forma "si p, entonces q".

a) Lo lamentará si yo voy. ***b)*** Hoy es martes solo si ayer fue lunes.

c) Todas las enfermeras usan zapatos blancos.

SOLUCIÓN

a) Si yo voy, entonces lo lamentará.

b) Si hoy es martes, entonces ayer fue lunes.

c) Si usted es enfermera, entones usa zapatos blancos. ■■■

EJEMPLO 4 Conversión de palabras a símbolos

Considere que p representa a "Un triángulo es equilátero", y q representa "Un triángulo tiene tres lados de igual longitud". Escriba lo siguiente en símbolos:

a) Un triángulo es equilátero si tiene tres lados de igual longitud.

b) Un triángulo es equilátero solo si tiene tres lados de igual longitud.

SOLUCIÓN

a) $q \rightarrow p$ ***b)*** $p \rightarrow q$ ■■■



Principia Mathematica, el título elegido por Whitehead y Russell, es una referencia deliberada a los *Philosophiae naturalis principia mathematica*, o "principios matemáticos de la filosofía de la naturaleza", el trabajo de Isaac Newton que marcó un hito en 1687. Los Principia de Newton describían un tipo de "universo mecánico" que funcionaba de acuerdo con su ley de la gravitación. Newton inventó de manera independiente el cálculo, sin saber que Leibniz había publicado su propia versión con anterioridad.

Bicondicionales

El enunciado compuesto ***p* si y solo si *q*** (con frecuencia abreviado como ***p* sii *q***) se conoce como un **enunciado bicondicional**. Se simboliza como $p \leftrightarrow q$, y se interpreta como la conjunción de los dos condicionales $p \rightarrow q$, y $q \rightarrow p$. Usando símbolos, esta conjunción se escribe $(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$ de modo que, por definición:

$$p \leftrightarrow q \equiv (q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q). \quad \text{Bicondicional}$$

La tabla de verdad para el bicondicional $p \leftrightarrow q$ se determina usando esta definición.

Tabla de verdad del bicondicional p si y solo si q

		p si y solo si *q*
p	*q*	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Un bicondicional es verdadero cuando ambos enunciados componentes tienen el mismo valor de verdad. Es falso cuando tienen diferentes valores de verdad.

EJEMPLO 5 Determine si un bicondicional es verdadero o falso

Determine si cada enunciado bicondicional es *verdadero* o *falso*.

a) $6 + 8 = 14$ si y solo si $11 + 5 = 16$.

b) $6 = 5$ si y solo si $12 \neq 12$.

c) $5 + 2 = 10$ si y solo si $17 + 19 = 36$.

SOLUCIÓN

a) Tanto $6 + 8 = 14$ como $11 + 5 = 16$ son verdaderos. Examinando la tabla de verdad del bicondicional, se sabe que este bicondicional es verdadero.

b) Ambos enunciados componentes son falsos, entonces, de acuerdo con el último renglón de la tabla de verdad bicondicional, este enunciado bicondicional es verdadero.

c) Como el primer componente $(5 + 2 = 10)$ es falso, y el segundo es verdadero, este enunciado bicondicional es falso. ■■■

Resumen de tablas de verdad

Se han definido las tablas de verdad de varios tipos importantes de enunciados compuestos.

Resumen de las tablas de verdad básicas

1. $\sim p$, la **negación** de p, tiene un valor de verdad opuesto al de p.
2. $p \wedge q$, la **conjunción**, es verdadera solo cuando tanto p como q son verdaderos.
3. $p \vee q$, la **disyunción**, es falsa solo cuando tanto p como q son falsos.
4. $p \rightarrow q$, el **condicional**, es falso solo cuando p es verdadero y q es falso.
5. $p \leftrightarrow q$, el **bicondicional**, es verdadero solo cuando tanto p como q tienen el mismo valor de verdad.

3.4 EJERCICIOS

Para cada enunciado condicional que se presenta (o para cada enunciado que se pueda expresar como condicional), escriba ***a****) el converso,* ***b****) el inverso y* ***c****) el contrapositivo en la forma* si... entonces. *En algunos ejercicios tal vez sea conveniente escribir primero el enunciado inicial en la forma* si . . . entonces.

1. Si un minuto fuera hermoso, entonces tú serías una hora.

2. Si me guías, te sigo.

3. Si no se descompone, no se repara.

4. Si ganara cinco centavos por cada vez que pasa, sería rico.

5. Caminar delante de un automóvil en movimiento es peligroso para tu salud.

6. La leche contiene calcio.

7. Los pájaros de la misma parvada vuelan juntos.

8. Piedra que rueda no hace musgo.

9. Si lo construyes, él vendrá.

10. Donde se fuma, hay fuego.

11. $p \rightarrow \sim q$ **12.** $\sim p \rightarrow q$

13. $\sim p \rightarrow \sim q$ **14.** $\sim q \rightarrow \sim p$

15. $p \rightarrow (q \vee r)$ (*Sugerencia:* Use una de las leyes de De Morgan cuando sea necesario).

16. $(r \vee \sim q) \rightarrow p$ (*Sugerencia:* Use una de las leyes de De Morgan cuando sea necesario).

17. Comente las equivalencias que existen entre un enunciado condicional determinado y su converso, su inverso y su contrapositivo.

18. Enuncie el contrapositivo de "Si el cuadrado de un número natural es par, entonces el número natural es par". Los dos enunciados deben tener el mismo valor de verdad. Use varios ejemplos y el razonamiento inductivo para determinar si ambos son verdaderos o falsos.

Escriba cada enunciado en la forma "si p, entonces q".

19. Si está lodoso, usaré mis botas de hule.

20. Si termino de estudiar, iré a la fiesta.

21. "19 es positivo" implica que 19 + 1 es positivo.

22. "Hoy es miércoles" implica que ayer fue martes.

23. Todos los números enteros son números racionales.

24. Todos los números enteros no negativos son números enteros.

25. Resolver acertijos lógicos es suficiente para volverme loco.

26. Estar en Kalamazoo es suficiente para estar en Michigan.

27. Un día sin rasurarse es necesario para que Jeff Marsalis se rasure.

28. Ser un ambientalista es necesario para resultar electo.

29. Puedo ir de Boardwalk a Baltic Avenue en el juego del Monopolio solo si paso por la esquina del tablero llamada "Salida".

30. El director contratará más maestros solo si lo aprueba el consejo de la escuela.

31. No hay números enteros no negativos que no sean enteros.

32. Ningún entero es un número irracional.

33. Los Nacionales ganarán el trofeo cuando mejore su técnica de lanzamiento.

34. Sara será liberal cuando los cerdos vuelen.

35. Un rectángulo es un paralelogramo con un ángulo recto.

36. Un paralelogramo es una figura de cuatro lados con lados opuestos paralelos.

37. Un triángulo con dos lados perpendiculares es un triángulo rectángulo.

38. Un cuadrado es un rectángulo con dos lados adyacentes iguales.

39. El cuadrado de un número de dos dígitos cuyo dígito de las unidades es 5 termina en 25.

40. Un número entero cuyo dígito de las unidades es 0 o 5 es divisible entre 5.

41. Uno de los siguientes enunciados no es equivalente a todos los demás. ¿Cuál es?

A. r solo si s. **B.** r implica s.

C. Si r, entonces s. **D.** r es necesario para s.

42. Muchos estudiantes tienen dificultades para interpretar *necesario* y *suficiente*. Use el enunciado "Estar en Vancouver es suficiente para encontrarse en Norteamérica" para explicar por qué "p es suficiente para q" se convierte en "si p, entonces q".

43. Use el enunciado "Para ser un número entero, es necesario que un número sea racional" para explicar por qué "p es necesario para q" se convierte en "si q, entonces p".

44. Explique por qué el enunciado "Una semana tiene ocho días si y solo si octubre tiene cuarenta días" es verdadero.

Identifique cada enunciado como verdadero *o* falso.

45. $6 = 9 - 3$ si y solo si $8 + 2 = 10$.

46. $3 + 1 \neq 7$ si y solo si $8 \neq 8$.

47. $8 + 7 \neq 15$ si y solo si $3 \times 5 \neq 8$.

48. $6 \times 2 = 18$ si y solo si $9 + 17 \neq 16$.

49. George H. W. Bush fue presidente si y solo si George W. Bush no era presidente.

50. Burger King vende Big Macs si y solo si Apple fabrica Ipods.

Dos enunciados que son verdaderos en relación con el mismo objeto son **consistentes**. *Por ejemplo*, "Es verde" *y* "Pesa 60 libras" *son enunciados consistentes. Los enunciados que no son verdaderos en relación con el mismo objeto se conocen como* **contrarios**. "Es un Nissan" *y* "Es un Mazda" *son contrarios. En los ejercicios 51 a 56 identifique cada par de enunciados como* contrarios *o* consistentes.

51. Michael Jackson está vivo. Michael Jackson está muerto.

52. Barack Obama es demócrata. Barack Obama es republicano.

53. Ese animal tiene cuatro patas. Ese animal es un gato.

54. Ese libro no es de ficción. Ese libro cuesta más de $150.

55. Este número es un número entero no negativo. Este mismo número es irracional.

56. Este número es positivo. Este mismo número es un número natural.

57. Este número es un número entero. Este mismo número es un número racional.

58. Este número es un número entero no negativo. Este mismo número es un número negativo.

59. Elabore dos enunciados que sean consistentes.

60. Elabore dos enunciados que sean contrarios.

3.5 ANÁLISIS DE ARGUMENTOS CON DIAGRAMAS DE EULER

Argumentos lógicos • Argumentos con cuantificadores universales • Argumentos con cuantificadores existenciales



Leonhard Euler (1707-1783) ganó el premio de la Academia superando a Du Châtelet y Voltaire. Ese fue un logro menor, como la invención de los "círculos de Euler" (los cuales antecedieron a los diagramas de Venn). Euler fue el matemático más prolífico de su generación, a pesar de su ceguera, que lo obligó a dictar de memoria.

Argumentos lógicos

En el razonamiento inductivo observamos patrones para resolver problemas. Ahora estudiaremos cómo se puede usar el razonamiento deductivo para determinar si un argumento lógico es válido o inválido.

Un argumento lógico está formado por **premisas** (suposiciones, leyes, reglas, ideas generalmente aceptadas u observaciones) y una **conclusión**. Recuerde que el razonamiento *deductivo* implica obtener conclusiones específicas a partir de premisas generales. Cuando razonamos partiendo de las premisas de un argumento para obtener una conclusión, deseamos que el argumento sea válido.

Argumentos válidos e inválidos

Un argumento es **válido** si el hecho de que todas las premisas son válidas provoca que la conclusión sea verdadera. Un argumento que no es válido es **inválido** y se conoce como **falacia**.

"Válido" y "verdadero" no tienen el mismo significado: un argumento puede ser válido aun cuando la conclusión sea falsa. **(Véase el ejemplo 4).**

Argumentos con cuantificadores universales

Se pueden aplicar varias técnicas para verificar si un argumento es válido. Una de estas técnicas se basa en los **diagramas de Euler**.

Leonhard Euler (se pronuncia "Oiler") fue uno de los más grandes matemáticos que han existido. Se inmortalizó en la historia de las matemáticas con el importante número irracional e, nombrado así en su honor. Este número aparece a lo largo de las matemáticas y se analiza en los **capítulos 5 y 7**.



Figura 8

EJEMPLO 1 Uso de un diagrama de Euler para determinar la validez

¿Es válido el siguiente argumento?

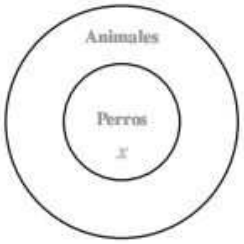
Todos los perros son animales.
Dotty es un perro.

Dotty es un animal.

SOLUCIÓN

Para empezar, dibuje regiones para representar la primera premisa. Como todos los perros son animales, la región para los "perros" va dentro de la región de "animales" como en la **figura 8**.

La segunda premisa, "Dotty es un perro", sugiere que "Dotty" va dentro de la región que representa a los "perros". Hagamos que x represente a "Dotty". La **figura 9** muestra que "Dotty" también está dentro de la región de los "animales". Si ambas premisas son verdaderas, la conclusión de que Dotty es un animal también es verdadera. El argumento es válido. ▮▮▮



x representa a Dotty.

Figura 9

EJEMPLO 2 Uso de un diagrama de Euler para determinar la validez

¿Es válido el siguiente argumento?

Todos los días lluviosos están nublados.
Hoy no está nublado.

Hoy no llueve.

SOLUCIÓN

En la **figura 10**, la región para los "días lluviosos" está comprendida totalmente dentro de la región de los "días nublados". Como "hoy *no* está nublado", se coloca una x para "hoy" *fuera* de la región de "días nublados". Observe la **figura 11**. Al colocar la x fuera de la región de "días nublados", la obliga también a estar fuera de la región de "días lluviosos". Por lo tanto, si las dos premisas son verdaderas, entonces también es verdadero que hoy no es un día lluvioso. El argumento es válido.

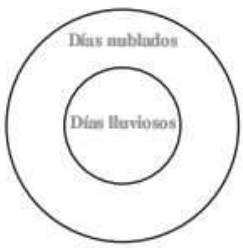


Figura 10



x representa hoy.

Figura 11

▮▮▮

EJEMPLO 3 Uso de un diagrama de Euler para determinar la validez

¿Es válido el siguiente argumento?

Todos los árboles de magnolias tienen hojas verdes.
Esa planta tiene hojas verdes.

Esa planta es un árbol de magnolias.



Figura 12

SOLUCIÓN

La región de "árboles de magnolias" va completamente dentro de la región de "seres que tienen hojas verdes". Observe la **figura 12**. La x que representa "esa planta" debe ir dentro de la región de "seres que tienen hojas verdes", pero puede ir dentro o fuera de la región de "árboles de magnolias". Incluso si las premisas son verdaderas, no estamos obligados a aceptar la conclusión como verdadera. Este argumento es inválido. Es una falacia. ▮▮▮

EJEMPLO 4 Uso de un diagrama de Euler para determinar la validez

¿Es válido el siguiente argumento?

Todos los objetos costosos son deseables.
Todos los objetos deseables hacen que usted se sienta bien.
Todos los objetos que lo hacen sentir bien ocasionan que usted viva más.

Todos los objetos costosos ocasionan que usted viva más.

SOLUCIÓN

En la **figura 13** se presenta el diagrama del argumento.

Si cada premisa es verdadera, entonces la conclusión debe ser verdadera porque la región de "objetos costosos" se encuentra completamente dentro de la región de "objetos que ocasionan que usted viva más". Por lo tanto, el argumento es válido. (Este argumento es un ejemplo del hecho de que un argumento *válido no* necesariamente tiene una conclusión verdadera).



Figura 13



Figura 14

Argumentos con cuantificadores existenciales

EJEMPLO 5 Uso de un diagrama de Euler para determinar la validez

¿Es válido el siguiente argumento?

Algunos estudiantes van a la playa en primavera.
Yo soy estudiante.

Voy a la playa en primavera.



Figura 15

SOLUCIÓN

La primera premisa está dibujada en la **figura 14**, donde algunos estudiantes (pero no necesariamente *todos*) van a la playa. Existen dos posibilidades para *yo*, como se muestra en la **figura 15**. Una posibilidad es que *yo* vaya a la playa. La otra es que no vaya. Como la verdad de las premisas no fuerza que la conclusión sea verdadera, el argumento es inválido.

Para reflexionar

Nuestras conversaciones diarias, los discursos políticos y los mensajes publicitarios ofrecen una cadena interminable de ejemplos de **falacias** (argumentos que presentan un razonamiento ilógico). Existen muchas formas generales de falacias, y ahora presentaremos descripciones y ejemplos de algunas de las más comunes. (Gran parte de esta lista es una adaptación del excelente sitio Web Mission: Critical, A Project of the Institute of Teaching and Learning, San Jose State University, www.sjsu.edu/depts/itl/graphics).

1. **Razonamiento circular** (llamado también *petición de principio*) En el razonamiento circular, la persona que expresa el argumento supone que es verdadero lo que está tratando de probar.

   Esposa: ¿Qué te hace decir que esta ropa te hace ver gorda?

   Esposa: Porque así es.

   Aquí la esposa argumenta lo que quiere probar.

2. **Falso dilema** (llamado también *falacia en blanco y negro*) Consiste en presentar dos opciones que se suponen contradictorias (es decir, la verdad de una implica la falsedad de la otra) cuando, de hecho, no lo son. Esta es la base de una falacia común.

   Político: Estados Unidos: Ámalo o déjalo.

   Este argumento implica solo dos opciones. Es posible que alguien ame a Estados Unidos y aun así abandone el país, mientras que alguien más puede no amar a Estados Unidos y permanecer allí.

(*continúa*)

Para reflexionar (*continuación*)

3. **Pregunta sesgada y argumentos complejos** En esta falacia una persona hace una pregunta o elabora un enunciado de tal manera que obtiene una respuesta en la cual el interlocutor manifiesta estar de acuerdo en algo, aunque en realidad no lo esté.

   La adolescente Beth a su padre: Espero que hayas disfrutado avergonzarme delante de mis amigos.

   Si Beth obtiene la respuesta adecuada "No, no lo disfruté", la respuesta permite a Beth interpretar que aunque su padre no lo disfrutó, él admite claramente haberla avergonzado.

4. **Razonamiento *post hoc*** Este es un argumento que se basa en la falsa creencia de que si el suceso A precede al suceso B, entonces A debe haber causado B.

   Johnny: Tenía puesta mi camisa hawaiana mientras miraba los tres juegos de playoff, y mi equipo ganó los tres juegos. Por lo tanto, voy a usar esa camisa cada vez que vea jugar a mi equipo.

   El hecho de que Johnny se ponga la misma camisa antes de cada juego, no tiene nada que ver con el resultado de los partidos.

5. **Arenque rojo** (llamada también *pantalla de humo* o *caza del ganso salvaje*) Esta falacia implica la introducción de un tema irrelevante para desviar la atención del tema original, permitiendo que el individuo que expresa el argumento imponga su opinión.

   (En la película *Field of Dreams*, en la escena donde Annie y Beulah discuten en una reunión del pueblo acerca de libros prohibidos).

   Beulah: Yo digo que una indecencia y obscenidad como esta no tiene lugar en nuestras escuelas… Las llamadas novelas de Terence Mann promueven la promiscuidad, el ateísmo, la mezcla de razas y la falta de respeto hacia los oficiales de alto rango del ejército de Estados Unidos. Por eso, los comités escolares de todo el país han prohibido los libros de Mann desde 1969.
   Annie: Discúlpeme, señora. Terence Mann era la voz cálida y amable de la razón en una época de gran locura. Él acuñó la oración "Haz el amor, no la guerra"… Hablaba de la paz, del amor y de la comprensión…
   Beulah: Oh sí, bueno, el esposo de usted acabó con el maizal para hacer un campo de béisbol… el muy excéntrico…
   Annie: Bueno, esa es una respuesta inteligente.

   Aunque la mayoría de las personas de la audiencia estaban de acuerdo en que el esposo de Annie, Ray, estaba realizando actividades extrañas, eso no tenía nada que ver con los libros prohibidos.

6. **Eludir la carga de la prueba** Una persona que hace una acusación, por lo general, debe ofrecer pruebas. En esta falacia, si la acusación es difícil de probar, el acusador deposita la carga de la prueba sobre alguien más.

   Empleado: ¿Me acusa de malversación de fondos? Eso es ridículo.
   Empleador: Bueno, hasta que usted pruebe lo contrario, tiene que aceptar que es verdad.

   Si el dinero ha desaparecido, es el empleador quien debe demostrar que su empleado es culpable. La carga de la prueba recae en el empleador, pero él está insinuando que el empleado debe demostrar que no fue él quien sustrajo el dinero.

7. **El hombre de paja** Esta falacia supone la creación de una imagen falsa (como un espantapájaros u hombre de paja) de la posición de alguien en un argumento.



   Dan Quayle: Tengo tanta experiencia en el Congreso como la que tenía Jack Kennedy cuando buscó la presidencia.
   Lloyd Bentsen: Senador, yo trabajé con Jack Kennedy. Yo conocí a Jack Kennedy. Jack Kennedy fue mi amigo. Y senador, usted no es Jack Kennedy.
   Dan Quayle: No fue eso lo que dije, senador.
   Lloyd Bensten: Usted fue quien hizo la comparación, senador.

   Mientras que este fue el momento definitorio del debate vicepresidencial de 1988, Bentsen usó con pericia la falacia del hombre de paja. Quayle no se comparó con Kennedy, ni tampoco comparó sus logros con los del ex presidente, sino que estableció simplemente que había pasado tanto tiempo en el Congreso como Kennedy cuando compitió por la presidencia.

Para investigación individual o en grupo

Use Internet para investigar las siguientes falacias lógicas adicionales.

Apelar a la autoridad	Apelar a creencias populares	Costumbres aceptadas
Dos errores	Consecuencias indirectas	Expresión de deseos
Apelar al miedo		Apelar a la compasión
Apelar al prejuicio	Apelar a la lealtad	Apelar a la vanidad
Culpabilidad por asociación	Apelar al resentimiento	Generalización apresurada
	Pendiente resbaladiza	

3.5 EJERCICIOS

Indique si es válido *o* inválido *cada uno de los siguientes argumentos.*

1. Todos los parques de diversiones tienen recorridos emocionantes.
Universal Orlando es un parque de diversiones.

Universal Orlando tiene recorridos emocionantes.

2. Todos los disc jockeys tocan música.
Phlash Phelps es disc jockey.

Phlash Phelps toca música.

3. Todos los políticos mienten, engañan y roban.
Ese hombre miente, engaña y roba.

Ese hombre es un político.

4. Todos los sureños hablan con acento.
Bill Leonard habla con acento.

Bill Leonard es sureño.

5. A todos los perros les gusta enterrar huesos.
A Puddles no le gusta enterrar huesos.

Puddles no es un perro.

6. Todos los vicepresidentes usan teléfonos celulares.
Bob DeBiasio no usa teléfono celular.

Bob DeBiaso no es vicepresidente.

7. Todos los residentes de Minnesota saben cómo vivir en temperaturas gélidas.
Jessica Rockswold sabe cómo vivir en temperaturas gélidas.

Jessica Rockswold vive en Minnesota.

8. Todas las personas que reciben un préstamo deben pagar por el registro del título.
Kurt Massey pagó por el registro de un título.

Kurt Massey recibió un préstamo.

9. Algunos dinosaurios fueron herbívoros.
Danny fue herbívoro.

Danny fue un dinosaurio.

10. Algunos filósofos son distraídos.
Nicole Mallon es filósofa.

Nicole Mallon es distraída.

11. Algunas enfermeras usan uniformes azules.
Dee Boyle es enfermera.

Dee Boyle usa uniforme azul.

12. Algunos camiones tienen sistemas de sonido.
Algunos camiones tienen estantes con armamento.

Algunos camiones con sistemas de sonido tienen estantes con armamento.

13. Remítase al **ejemplo 3**. Si la segunda premisa y la conclusión se intercambiaran, entonces ¿el argumento sería válido?

14. Remítase al **ejemplo 4**. Dé una conclusión diferente de modo que el argumento siga siendo válido.

Redacte un argumento válido con base en el diagrama de Euler que se muestra.

15.



x representa a Natalie Graham

16.



x representa a Mark Robinson

Como ya se mencionó, un argumento puede tener una conclusión verdadera aun cuando sea inválida. En estos ejercicios, cada argumento tiene una conclusión verdadera. Identifique cada argumento como válido *o* inválido.

17. Todos los pájaros vuelan.
Todos los aeroplanos vuelan.

Un pájaro no es un aeroplano.

18. Todos los carros tienen neumáticos.
Todos los neumáticos son de caucho.

Todos los carros tienen caucho.

19. Todos los pollos tienen pico.
Todas las gallinas son pollos.

Todas las gallinas tienen picos.

20. Todos los pollos tienen pico.
Todos los pájaros tienen pico.

Todos los pollos son pájaros.

21. Little Rock está al noreste de Texarkana.
Little Rock está al noreste de Austin.

Texarkana está al noreste de Austin.

22. Veracruz está al sur de Tampico.
Tampico está al sur de Monterrey.

Veracruz está al sur de Monterrey.

23. Ningún entero no negativo es negativo.
-3 es negativo.

-3 es un número entero no negativo.

24. Un triángulo escaleno tiene un lado más largo.
Un triángulo escaleno tiene un ángulo más grande.

El ángulo más grande de un triángulo escaleno es opuesto al lado más largo.

En los ejercicios 25 a 30, las premisas marcadas con A, B y C *van seguidas de varias conclusiones posibles. Tome cada conclusión y verifique si el argumento resultante es* válido *o* inválido.

A. *Todas las personas que conducen un auto contribuyen a la contaminación del ambiente.*

B. *Todas las personas que contribuyen a la contaminación del ambiente empeoran un poco la vida.*

C. *Algunas personas que viven en los suburbios empeoran un poco la vida.*

25. Algunas personas que viven en los suburbios contribuyen a la contaminación del ambiente.

26. Algunas personas que viven en un suburbio conducen un auto.

27. Los residentes suburbanos nunca conducen un auto.

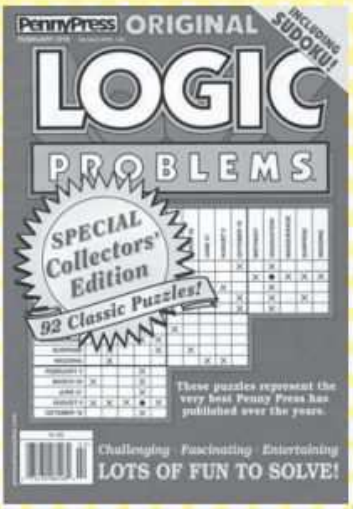
28. Algunas personas que contribuyen a la contaminación del ambiente viven en un suburbio.

29. Algunas personas que empeoran un poco la vida viven en un suburbio.

30. Todas las personas que conducen un auto empeoran un poco la vida.

EXTENSIÓN Problemas lógicos y sudokus

Cómo resolver problemas lógicos • Cómo resolver sudokus



Los problemas lógicos, que se basan en razonamiento deductivo, aparecen en publicaciones periódicas como *Original Logic Problems*, *World-Class Logic Problems* o *England's Best Logic Problems* (todos de PennyPress), y *Logic Puzzles* (Dell). La explicación siguiente acerca de la manera de resolver estos problemas apareció en el número de febrero de 2010 de *Original Logic Problems.*

Cómo resolver problemas lógicos La solución de problemas lógicos es entretenida y desafiante. Toda la información que usted necesita para resolver un problema lógico se presenta en la introducción y las pistas, y en ilustraciones, cuando están incluidas. Si usted no ha resuelto antes un problema lógico, nuestro ejemplo le ayudará para comenzar. Llene el diagrama de solución del ejemplo conforme sigue nuestras instrucciones. Use "•" para indicar "Sí" y una "X" para indicar "No".

Ejemplo de problema lógico
Cinco parejas se casaron la semana pasada, cada una en un día diferente de la semana. A partir de la información proporcionada, determine la mujer (una es Cathy) y el hombre (uno es Paul) que forman cada pareja, así como el día en que se casó cada pareja.

1. Anne se casó el lunes, pero no con Wally.
2. La boda de Stan se realizó el miércoles. Rob se casó el viernes, pero no con Ida.
3. Vern (quien se casó con Fran) se casó un día después de Eve.

Diagrama de solución del ejemplo:

	PAUL	ROB	STAN	VERN	WALLY	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
ANNE										
CATHY										
EVE										
FRAN										
IDA										
LUNES										
MARTES										
MIÉRCOLES										
JUEVES										
VIERNES										

1

	PAUL	ROB	STAN	VERN	WALLY	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
ANNE		X	X		X	•	X	X	X	X
CATHY						X				
EVE						X				
FRAN						X				
IDA		X				X				X
LUNES		X	X							
MARTES		X	X							
MIÉRCOLES	X	X	•	X	X					
JUEVES		X	X							
VIERNES	X	•	X	X	X					

Explicación

Anne se casó el lunes. (1), así que coloque "•" en la intersección de Anne y lunes. Coloque una "X" en todos los demás días de la fila de Anne y en todos los demás nombres de la columna del lunes. (Siempre que establezca una relación, como lo hicimos aquí, asegúrese de colocar "X" en las intersecciones de todas las relaciones que se vuelven imposibles como soluciones). Anne no se casó con Wally (1), entonces coloque una "X" en la intersección de Wally y Anne. La boda de Stan se realizó el miércoles (2), entonces coloque "•" en la intersección de Stan y miércoles. (No olvide las "X"). Stan no se casó con Anne, quien se casó el lunes, entonces coloque una "X" en la intersección de Anne y Stan. Rob se casó el viernes, pero no con Ida (2), así que coloque "•" en la intersección de Rob y el viernes, y "X" en las intersecciones de Rob e Ida, e Ida y el viernes. Rob tampoco se casó con Anne, quien se casó el lunes, entonces coloque una "X" en la intersección de Anne y Rob. Ahora su diagrama debe verse como el **diagrama 1**.

Vern se casó con Fran (3), así que coloque "•" en la intersección de Vern y Fran. Esto solamente deja la posibilidad de que el esposo de Anne sea Paul, entonces coloque "•" en la intersección de Anne y Paul, y Paul y el lunes. La boda de Vern y Fran fue un día después de la de Eve (3), que no fue el lunes [Anne], entonces la de Vern no fue el martes; debió haber sido el jueves [véase el diagrama], así que la de Eve fue el miércoles (3). Coloque "•" en las intersecciones de Vern y jueves, Fran y jueves, y Eve y miércoles. Ahora su diagrama debe verse como el **diagrama 2**.

2

	PAUL	ROB	STAN	VERN	WALLY	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
ANNE	•	×	×	×	×	•	×	×	×	×
CATHY	×			×		×		×	×	
EVE	×			×		×	×	•	×	×
FRAN	×	×	×	•	×	×	×	×	•	×
IDA	×	×		×		×		×	×	×
LUNES	•	×	×	×	×					
MARTES	×	×	×	×						
MIÉRCOLES	×	×	•	×	×					
JUEVES	×	×	×	•	×					
VIERNES	×	•	×	×	×					

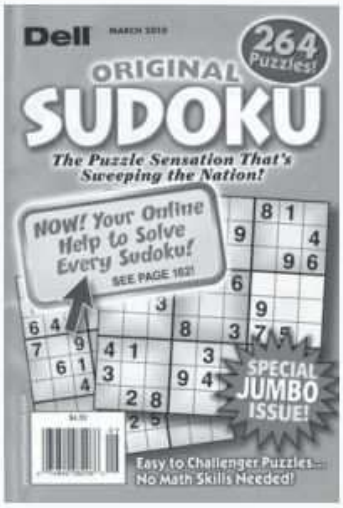
3

	PAUL	ROB	STAN	VERN	WALLY	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
ANNE	•	×	×	×	×	•	×	×	×	×
CATHY	×	•	×	×	×	×	×	×	×	•
EVE	×	×	•	×	×	×	×	•	×	×
FRAN	×	×	×	•	×	×	×	×	•	×
IDA	×	×	×	×	•	×	•	×	×	×
LUNES	•	×	×	×	×					
MARTES	×	×	×	×	•					
MIÉRCOLES	×	×	•	×	×					
JUEVES	×	×	×	•	×					
VIERNES	×	•	×	×	×					

El diagrama muestra que Cathy se casó el viernes, Ida se casó el martes, y Wally se casó el martes. Ida se casó con Wally, y la boda de Cathy fue el viernes, entonces ella se casó con Rob. Después de haber obtenido esta información, Eve solo pudo haberse casado con Stan. Usted ha resuelto el acertijo y su diagrama debe verse como el **diagrama 3**.

En resumen: Anne y Paul, lunes; Cathy y Rob, viernes; Eve y Stan, miércoles; Fran y Vern, jueves; Ida y Wally, martes.

En algunos problemas es necesario hacer una deducción lógica con base en hechos establecidos. Cuando lo haga, siempre busque pistas u otros indicios que la desmientan. Si usted encuentra que su deducción es incorrecta, elimínela como posibilidad.



Cómo resolver sudokus Un sudoku es un juego sencillo que ha ganado gran popularidad en Estados Unidos en unos cuantos años. Se cree que el juego tuvo su origen como "Number Place", en Estados Unidos, hace 25 años, pero su popularidad creció después de que se convirtió en una sensación en Japón, donde fue rebautizado como sudoku, que quiere decir "número único". (*Fuente: Sudoku #13*, 2005, Platinum Magazine Group).

En el sudoku solo existe una regla: **"Llene la cuadrícula de modo que cada fila, cada columna y cada cuadro de 3 × 3 contenga los dígitos del 1 al 9"**. Esto implica hacer la revisión de los números que se proporcionan, marcar la cuadrícula y analizar. Aquí se presenta un ejemplo de sudoku.

		7	3	2				
8	4		1				9	
						8	2	1
		9		8	7			5
2	8		4		1		6	3
1			5	6		9		
5	3	8						9
	9				2		1	4
				7	5	6		

Forma original

9	1	7	3	2	8	4	5	6
8	4	2	1	5	6	3	9	7
6	5	3	7	4	9	8	2	1
3	6	9	2	8	7	1	4	5
2	8	5	4	9	1	7	6	3
1	7	4	5	6	3	9	8	2
5	3	8	6	1	4	2	7	9
7	9	6	8	3	2	5	1	4
4	2	1	9	7	5	6	3	8

Forma resuelta

Puede encontrar sudokus y estrategias de solución en línea en www.sudoku.org.uk y en www.pennydellsudokusolver.com.

EJERCICIOS DE LA EXTENSIÓN

Siga las instrucciones para resolver los siguientes problemas lógicos, los cuales aparecieron en el número de febrero de 2010 de Original Logic Problems, *publicado por PennyPress.*

1. ***Refrescar el aliento*** Como parte de la rutina semanal, Drew y cuatro de sus amigos almorzaron en la Parrilla de Aristóteles. Cada quien disfrutó un almuerzo especial, pero cuando llegó el momento de la conversación de sobremesa, los cinco se percataron rápidamente de que necesitaban una o dos mentas para refrescar el aliento. Por suerte, cada uno tenía un contenedor de mentas. No había dos amigos que tuvieran la misma marca de mentas (una es Inti-mints), y tampoco había dos que tuvieran mentas con el mismo sabor. Segundos después estaban listos para conversar, pero estuvieron de acuerdo en que la siguiente semana serían un poco más cuidadosos acerca de qué ordenar para el almuerzo. A partir de la información que se presenta, ¿puede usted determinar el platillo que ordenó cada amigo, así como la marca y el sabor de la menta que cada uno probó posteriormente?

		PLATILLO					MARCA					SABOR				
		EMPAREDADO DE POLLO	SOPA DE CEBOLLA	CAMARONES AL MOJO DE AJO	TARTA DE ESPINACAS	EMPAREDADO DE ATÚN	DELTOIDS	FRESH AIR	INTI-MINTS	LIPLICKERS	TKO	CANELA	NARANJA	MENTA VERDE	VAINILLA	INVIERNO VERDE
AMIGO	DREW															
	ILSE															
	NASH															
	UMA															
	XERXES															
SABOR	CANELA															
	NARANJA															
	MENTA VERDE															
	VAINILLA															
	INVIERNO VERDE															
MARCA	DELTOIDS															
	FRESH AIR															
	INTI-MINTS															
	LIPLICKERS															
	TKO															

a) El amigo que pidió camarones al mojo de ajo consumió un par de mentas con sabor a naranja (las cuales no eran mentas Fresh Air). La persona que ordenó la tarta de espinacas no es la que tenía mentas TKO con sabor invierno verde.

b) El amigo que ordenó sopa de cebolla a la francesa consumió unas cuantas mentas Liplickers. Nash (quien no tenía las mentas con sabor a menta verde) no ordenó camarones al mojo de ajo.

c) Ni Nash ni Xerxes comieron emparedado de ensalada de atún. El amigo que pidió un emparedado de pollo no es el que refrescó su aliento con mentas sabor a menta verde.

d) Un amigo tenía un par de mentas Deltoids con sabor a canela. Las mentas Liplickers tenían sabor a vainilla.

e) Ilse (quien comió un emparedado de pollo) no tenía mentas con sabor a invierno verde. Ni Uma ni Xerxes son la persona que tenía un par de mentas Fresh Air.

2. ***Reyes de corazones*** Aun cuando el origen del día festivo no está claro, la tradición del día de los enamorados evoca la Edad Media, cuando era mejor conocida como la fiesta de San Valentín. Las parejas intercambiaban regalos en esta fiesta de febrero ya desde entonces, pero nadie daba regalos más costosos y sofisticados que la realeza de aquel tiempo. Había cuatro reyes; cada uno de ellos gobernaba un pequeño reino y daba a su reina un costoso regalo el día de San Valentín. Esto demuestra que ¡el amor resiste la prueba del tiempo! (o al menos esa idea de amor). A partir de la información que se presenta, ¿puede usted identificar al rey y la reina de cada reino, así como el regalo que cada rey dio a su esposa para celebrar la fiesta de San Valentín?

a) El rey Jacobo no regaló a su reina una corona de platino.

b) Ni el cetro enjoyado ni la corona de platino fueron el regalo obsequiado a la reina Meyla (que estaba casada con el rey Kevrick o con el rey Vermond).

c) La reina Dejah (que estaba casada con el rey Fedris o con el rey Jacobo) no era la soberana de Undervale.

d) El rey Kevrik no era el soberano de Dalelands.

e) Ni la corona de platino ni las vestiduras de terciopelo fueron el regalo obsequiado por el rey Vermond.

f) La reina de Undervale (quien estaba casada con el rey Fedris o con el rey Jacobo) recibió como regalo el trono dorado de su esposo.

g) La reina Tilnara no recibió como regalo de su esposo un cetro enjoyado. La reina Aasta era soberana de Hightop.

		REINA				REINO				REGALO			
		AASTA	DEJAH	MEYLA	TILNARA	DALELANDS	HIGHTOP	SHADOW COAST	UNDERVALE	TRONO DORADO	CETRO ENJOYADO	CORONA DE PLATINO	VESTIDURAS DE TERCIOPELO
REY	FEDRIS												
	JACOBO												
	KEVRICK												
	VERMOND												
REGALO	TRONO DORADO												
	CETRO ENJOYADO												
	CORONA DE PLATINO												
	VESTIDURAS DE TERCIOPELO												
REINO	DALELANDS												
	HIGHTOP												
	SHADOW COAST												
	UNDERVALE												

3. ***Revelaciones de Año Nuevo*** Lucy y cuatro de sus amigos fueron a comer al Golden Panda una tarde de enero. Para su sorpresa, llegaron al restaurante durante una celebración del Año Nuevo chino. Para fortuna de los cinco, esto significaba un descuento en la cena y una sesión adivinatoria gratuita con la misteriosa médium Madame Wau Pei. A los cinco amigos les dijeron la buenaventura, una persona a la vez. Todos dijeron a la psíquica la fecha de su nacimiento y se enteraron de que, de acuerdo con la astrología china, el año de nacimiento de cada amigo estaba representado por un animal. Cada uno de los cinco se enteró también de que tenía un elemento de la suerte diferente. Antes de abandonar el restaurante, los cinco amigos compararon sus predicciones, notando que todos ellos tenían un viaje largo en su futuro (¡el viaje de regreso a casa!). A partir de la información que se presenta, determine el orden en el cual la psíquica dijo a los cinco amigos su buenaventura, el año en el cual nació cada uno y su elemento de la suerte.

a) Toni fue la tercera persona a quien le dijeron su buenaventura. La persona cuyo elemento de la suerte es la madera fue la última persona en consultar a la médium.

b) A Earl (cuyo elemento de la suerte es el fuego) le dijeron la buenaventura inmediatamente antes que a la persona que nació en el año del gallo. La cuarta persona en visitar a la médium nació en el año del dragón.

c) A la persona que nació en el año del buey le dijeron su buenaventura en algún turno anterior al del amigo cuyo elemento de la suerte es el metal. Ivana nació en el año del caballo.

d) La persona cuyo elemento de la suerte es el agua (que nació en el año de la cabra) no fue la primera persona en oír su buenaventura.

e) La persona cuyo elemento de la suerte es la tierra oyó su buenaventura exactamente dos turnos después de Philip.

		AMIGO					AÑO					ELEMENTO				
		EARL	IVANA	LUCY	PHILIP	TONI	CABRA	DRAGÓN	CABALLO	BUEY	GALLO	TIERRA	FUEGO	METAL	AGUA	MADERA
ORDEN	PRIMERO															
	SEGUNDO															
	TERCERO															
	CUARTO															
	QUINTO															
ELEMENTO	TIERRA															
	FUEGO															
	METAL															
	AGUA															
	MADERA															
AÑO	CABRA															
	DRAGÓN															
	CABALLO															
	BUEY															
	GALLO															

4. ***Granero de nuevo*** Desde que tengo memoria, he soñado con tener mi propia posada, y ¡parece que mi sueño está a punto de volverse realidad! Nos gustaría que nuestra posada fuera diferente, de modo que mi esposo y yo hemos decidido comprar un granero y convertirlo en un alojamiento único. Vimos cinco graneros recientemente, cada uno de los cuales tenía un uso distinto. Mi esposo y yo visitamos cada granero con un contratista diferente, cada uno de los cuales nos dio una estimación diferente ($50,000, $60,000, $70,000, $80,000 o $100,000) para la remodelación. Cada granero tiene una característica distinta que lo hace atractivo (uno tiene un montacargas en servicio), pero aún no hemos decidido cuál comprar (¡estamos comenzando a enloquecer!). A partir de la información que se presenta, determine el contratista que visitó cada granero con nosotros y la característica especial de cada estructura, así como la estimación sobre los costos de remodelación de cada granero.

a) La remodelación del granero de manzanas (el cual tiene distintivas ventanas octagonales) costará exactamente $20,000 menos que el granero que visitamos con un representante del Bill's Building. La estimación de la remodelación del granero de heno es mayor que la estimación de la remodelación del granero de papas.

b) Remodelar el granero que visitamos con la persona de AB Contracting (que no es el granero que tiene vigas fabulosas) costará más que la remodelación del granero que vimos con el contratista de Pine Valley, pero exactamente $10,000 menos que la remodelación del granero que sirve de caballeriza.

c) La estimación de la remodelación del granero de manzanas y el adorable granero cercado con tablas y tablones son las estimaciones más baja y más alta, en algún orden.

d) Remodelar el granero que visitamos con el contratista de Dekker Ltd. costará exactamente $20,000 más que la remodelación del granero con excelente conservación aislante.

e) Remodelar el viejo granero que sirve como granja lechera costará más que el que visitamos con el representante de Vander Estates.

		GRANERO					CARACTERÍSTICA					ESTIMACIÓN				
		MANZANAS	GRANJA LECHERA	HENO	CABALLERIZA	PAPAS	VIGAS	MONTACARGAS	AISLAMIENTO	CERCA	VENTANAS	$50,000	$60,000	$70,000	$80,000	$100,000
CONTRATISTA	AB CONTRACTING															
	BILL'S BUILDING															
	DEKKER LTD.															
	PINE VALLEY															
	VANDER ESTATES															
ESTIMACIÓN	$50,000															
	$60,000															
	$70,000															
	$80,000															
	$100,000															
CARACTERÍSTICA	VIGAS															
	MONTACARGAS															
	AISLAMIENTO															
	CERCA															
	VENTANAS															

Resuelva todos los sudokus, los cuales aparecieron en Dell Original Sudoku, *en marzo del 2010, Penny Publications. (Están clasificados de acuerdo con su grado de dificultad).*

5. ***Fácil***

	4		1	6	8			5
		9		5			2	8
	6		9					4
		4	7		9			
	3	8		4		2	9	
			2		3	8		
2					1		6	
9	7			2		5		
4			6	9	5		7	

6. ***Fácil***

2		3			8	1	4	
	7		6	2	4			
	8			3				7
8	4	7	2				6	
			8		6			
	1				9	4	8	2
7				6			2	
			9	5	7		1	
	6	9	3			5		4

7. ***Mediana dificultad***

8	3		6					1
	1			4			5	6
		6			8			
		7	1				3	8
		1		2		4		
5	4				6	1		
			5			7		
9	8			7			1	
6					1		2	3

8. ***Mediana dificultad***

			4	5		6		
4	5					3		9
	6	1			3			8
5	8				1		6	
		9		3		2		
	4		9				1	7
8			1			7	3	
1		5					9	2
		6		7	2			

9. ***Difícil***

	1			2				4
4		9			1		7	
		8				9		
	3		6				2	
7				3				9
	9				8		5	
		2				4		
	8		2			6		5
9				8			3	

10. ***Difícil***

	2			9		6	7	
	5	6						
			6		4			5
	6	9						1
			3	6	9			
8						9	4	
1			4		7			
						4	2	
	4	8		2			3	

3.6 ANÁLISIS DE ARGUMENTOS CON TABLAS DE VERDAD

Tablas de verdad (dos premisas) • Formas de argumentos válidos e inválidos • Tablas de verdad (más de dos premisas) • Argumentos de Lewis Carroll



En la película española de 2007 ***La Habitacion de Fermat,*** cuatro matemáticos son invitados a cenar. Pronto descubren que la habitación en la cual se encuentran está diseñada para triturarlos conforme las paredes se acerquen cada vez más y más. La única manera de retardar lo inevitable es resolver enigmas, preguntas, acertijos, problemas y adivinanzas que alguien les comunica por un teléfono celular.

Uno de los enigmas se trata de un cuarto herméticamente sellado que solo contiene una bombilla eléctrica. Fuera de la habitación hay tres interruptores, y solamente uno de ellos controla la bombilla. Usted puede oprimir cualquiera de los botones o todos, las veces que quiera antes de entrar al cuarto, pero una vez que entre no tendrá acceso a los interruptores ubicados afuera de la habitación. ¿Cómo podría determinar cuál interruptor controla la bombilla? (La respuesta se encuentra en la **página 126**).

Tablas de verdad (dos premisas)

En la **sección 3.5** usamos diagramas de Euler para someter a prueba la validez de los argumentos. Mientras que los diagramas de Euler funcionan bien para argumentos sencillos, pueden surgir dificultades con los más complejos, porque los diagramas de Euler requieren de un bosquejo que muestre cada caso posible. Cuando se analizan argumentos complejos, resulta difícil estar seguro de que se consideren todos los casos.

Al decidir si se utilizan diagramas de Euler para probar la validez de un argumento, se buscan cuantificadores como "todo", "alguno" o "no". Estas palabras indican frecuentemente que los argumentos se prueban más eficientemente con diagramas de Euler. Si estas palabras están ausentes, tal vez sea mejor usar tablas de verdad para probar la validez de un argumento.

Como un ejemplo de este método, considere el siguiente argumento:

Si el piso está sucio, entonces debo limpiarlo.
El piso está sucio.

Debo limpiarlo.

Para probar la validez de este argumento, iniciamos con la identificación de los enunciados *componentes* que se encuentran en el argumento. Son: "el piso está sucio" y "debo limpiarlo". Usamos las letras p y q para representar estos enunciados:

p representa "el piso está sucio";
q representa "debo limpiarlo".

Ahora escriba en símbolos las dos premisas y la conclusión.

Premisa 1: $p \rightarrow q$
Premisa 2: p

Conclusión: q

Para determinar si este argumento es válido, debemos saber si la conjunción de ambas premisas implica la conclusión de todos los casos posibles de valores de verdad de p y q. Por lo tanto, se escribe la conjunción de las premisas como el antecedente de un enunciado condicional, y la conclusión como el consecuente.

$$\underbrace{[(p \rightarrow q)}_{\text{premisa}} \quad \underbrace{\wedge}_{\text{y}} \quad \underbrace{p]}_{\text{premisa}} \quad \underbrace{\rightarrow}_{\text{implica}} \quad \underbrace{q}_{\text{conclusión}}$$

Finalmente, se elabora la tabla de verdad para este enunciado condicional, como se muestra abajo.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Como la última columna indica que el enunciado condicional que representa el argumento es verdadero para todos los posibles valores de verdad de p y q, el argumento es una tautología. Por lo tanto, el argumento es válido.

Respuesta a la pregunta de la bombilla de la **página 125.**

Identifique los interruptores como 1, 2 y 3. Active el interruptor 1 y déjelo activado por varios minutos. Luego desactive el interruptor 1, active el interruptor 2 y entre inmediatamente al cuarto. Si la bombilla está encendida, entonces usted sabe que el interruptor 2 la controla. Si la bombilla está apagada, tóquela para ver si está caliente. Si lo está, entonces el interruptor 1 la controla. Si la bombilla no está caliente, entonces el interruptor 3 la controla.

El patrón del argumento en el ejemplo del piso limpio

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p} \\ q \end{array}$$

se conoce como **modus ponens** (que en latín significa *modo que afirmando afirma*), razonamiento directo o *ley de objetividad*.

Para probar la validez de un argumento usando una tabla de verdad, se siguen los pasos del recuadro que aparece a continuación.

Prueba de la validez de un argumento con una tabla de verdad

Paso 1 Asigne una letra para representar cada enunciado componente del argumento.

Paso 2 Exprese simbólicamente todas las premisas y la conclusión.

Paso 3 Elabore simbólicamente el enunciado del argumento total escribiendo la *conjunción* de *todas* las premisas como el antecedente de un enunciado condicional, y la conclusión del argumento como el consecuente.

Paso 4 Complete la tabla de verdad del enunciado condicional elaborado en el paso 3. Si es una tautología, entonces el argumento es válido; si no, es inválido.

EJEMPLO 1 Uso de una tabla de verdad para determinar la validez

Determine si el siguiente argumento es *válido* o *inválido*.

Si mi cheque llega a tiempo, me inscribiré al curso de verano.
Me inscribí en el curso de verano.

Mi cheque llegó a tiempo.

SOLUCIÓN

Considere que p representa "mi cheque llega (llegó) a tiempo" y q representa "me inscribiré (me inscribí) en el curso de verano". El argumento se puede escribir como sigue.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q} \\ p \end{array}$$

Con la finalidad de probar la validez, se elabora una tabla de verdad para el enunciado $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

La tercera fila de la columna final de la tabla de verdad muestra una F, y esto es suficiente para concluir que el argumento es inválido. ▮▮▮

Si un condicional y su converso fueran lógicamente equivalentes, entonces un argumento del tipo encontrado en el **ejemplo 1** sería válido. Como el condicional y su converso *no* son equivalentes, el argumento es un ejemplo de lo que algunas veces se conoce como **falacia del converso**.

EJEMPLO 2 Uso de una tabla de verdad para determinar la validez

Determine si el siguiente argumento es *válido* o *inválido*.

Si un hombre pudiera estar en dos lugares al mismo tiempo, yo estaría contigo.
No estoy contigo.

Un hombre no puede estar en dos lugares al mismo tiempo.

SOLUCIÓN

Si p representa "un hombre pudiera estar en dos lugares al mismo tiempo" y q representa "yo estaría contigo", el argumento se escribe como sigue.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim q} \\ \sim p \end{array}$$

El enunciado simbólico del argumento completo es el siguiente.

$$[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$$

La tabla de verdad de este argumento indica una tautología, y el argumento es válido.

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$(p \to q) \wedge \sim q$	$\sim p$	$[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

El patrón de razonamiento de este ejemplo se llama **modus tollens** (que en latín significa *modo que negando niega*), *razonamiento indirecto* o *ley de contraposición*. ■■■

Con un razonamiento similar al utilizado para dar nombre a la falacia del converso, la falacia

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim p} \\ \sim q \end{array}$$

se llama **falacia del inverso**. Un ejemplo de esta falacia es "si llueve, me mojo. No llueve. Por lo tanto, no me mojo".

EJEMPLO 3 Uso de una tabla de verdad para determinar la validez

Determine si el siguiente argumento es *válido* o *inválido*.

Compraré un automóvil o tomaré vacaciones.
No compraré un automóvil.
Tomaré vacaciones.

SOLUCIÓN

Si p representa "compraré un automóvil", y q representa "tomaré vacaciones", el argumento se simboliza como sigue.

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ q \end{array}$$

Debemos elaborar una tabla de verdad para el enunciado $[(p \vee q) \wedge \sim p] \to q$.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \to q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

El enunciado es una tautología y el argumento es válido. Cualquier argumento de esta forma es válido por la ley del **silogismo disyuntivo**. ■■■

EJEMPLO 4 Uso de una tabla de verdad para determinar la validez

Determine si el siguiente argumento es *válido* o *inválido*.

Si rechina, entonces uso el lubricante WD-40.
Si uso WD-40, entonces debo ir a la ferretería.
Si rechina, entonces debo ir a la ferretería.

SOLUCIÓN

Considere que p representa "rechina", q representa "uso WD-40", y r representa "debo ir a la ferretería". El argumento toma la forma general siguiente.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ p \rightarrow r \end{array}$$

Se elabora una tabla de verdad para este enunciado, el cual requiere ocho filas.

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Este argumento es válido porque el enunciado final es una tautología. Este patrón de argumento se llama **razonamiento transitivo** o *ley del silogismo hipotético*.



En una escena inicial de la película *Monty Python and the Holy Grail* (Los caballeros de la mesa cuadrada), producida en 1974, una aplicación sorprendente de **lógica deficiente** trae consigo la aparente desaparición de una presunta bruja. Algunos campesinos forzaron a una joven mujer a usar una nariz de madera. El intrincado argumento es el siguiente: las brujas y la madera se queman, y como las brujas están hechas de madera, la madera flota y los patos también flotan, si ella pesa lo mismo que un pato, entonces ella está hecha de madera y, por lo tanto, ¡es una bruja!

Formas de argumentos válidos e inválidos

A continuación se presenta un resumen de las formas de argumentos válidos e inválidos que hemos analizado hasta aquí en esta sección.

Formas de argumentos válidos

Modus Ponens	**Modus Tollens**	**Silogismo disyuntivo**	**Razonamiento transitivo**
$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
$\underline{p}$	$\underline{\sim q}$	$\underline{\sim p}$	$\underline{q \rightarrow r}$
q	$\sim p$	q	$p \rightarrow r$

Formas de argumentos inválidos (falacias)

Falacia del converso	**Falacia del inverso**
$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$
$\underline{q}$	$\underline{\sim p}$
p	$\sim q$

Tablas de verdad (más de dos premisas)

Cuando un argumento incluye más de dos premisas, es necesario determinar los valores de verdad de la conjunción de *todas* ellas. ***Si al menos una premisa de una conjunción de varias premisas es falsa, entonces la conjunción completa es falsa.***

EJEMPLO 5 Uso de una tabla de verdad para determinar la validez

Determine si el siguiente argumento es *válido* o *inválido*.

Si Eddy va al pueblo, entonces Mabel permanece en casa. Si Mabel no permanece en casa, entonces Rita cocinará. Rita no cocinará. Por lo tanto, Eddie no va al pueblo.

SOLUCIÓN

En un argumento escrito de esta manera, las premisas se enuncian primero, y la conclusión es el enunciado que sigue después de las palabras "por lo tanto". Considere que p representa "Eddie va al pueblo", q representa "Mabel permanece en casa", y r representa "Rita cocinará".

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \rightarrow r \\ \underline{\sim r} \\ \sim p \end{array}$$

Para probar la validez, se elabora la tabla de verdad para este enunciado.

$$[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \rightarrow r) \wedge \sim r] \rightarrow \sim p$$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow r$	$\sim r$	$(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \rightarrow r) \wedge \sim r$	$\sim p$	$[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \rightarrow r) \wedge \sim r] \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	F	V	V

Como la columna final no contiene solamente T (verdaderos), el enunciado no es una tautología. Este argumento es inválido. ■■■

Argumentos de Lewis Carroll

Considere la siguiente estrofa, que data de hace muchos años.

Por falta de un clavo, se perdió la herradura. Por falta de la herradura, se perdió el caballo. Por falta del caballo, se perdió al jinete. Por falta del jinete, se perdió la batalla. Por perder la batalla, se perdió la guerra.

Por lo tanto, por falta de un clavo, se perdió la guerra.

Cada línea de la estrofa se puede escribir como un enunciado de la forma *si... entonces*. Por ejemplo, la primera línea se puede expresar como "si se pierde un clavo, entonces se pierde la herradura". La conclusión "por falta de un clavo, se perdió la guerra" se deriva de las premisas, porque se aplica el uso repetitivo de la ley de transitividad. Argumentos como el utilizado por Lewis Carroll en el siguiente ejemplo con frecuencia toman una forma similar.



Alicia en el Jardín del Olvido

Cuando Alicia entró al Jardín del Olvido con frecuencia olvidaba el día de la semana que era. Encontró un león y un unicornio, dos criaturas extrañas. El león mentía los lunes, martes y miércoles, y decía la verdad los otros días de la semana. El unicornio, por otro lado, mentía los jueves viernes y sábados, pero decía la verdad los demás días de la semana.

Un día, Alicia se encuentra al león y al unicornio descansando debajo de un árbol. Ellos dijeron los siguientes enunciados:

León: Ayer fue uno de mis días de mentir.
Unicornio: Ayer también fue uno de mis días de mentir.

A partir de estos dos enunciados, Alicia pudo deducir el día de la semana. ¿Qué día era? (La respuesta se encuentra en la **página 133**).

(Adaptado de un problema de *What Is the Name of This Book?* De Raymond Smullyan).

EJEMPLO 6 Emita una conclusión para asegurar la validez

Dé una conclusión que genere un argumento válido para las siguientes premisas.

Los bebés son ilógicos.
Nadie menosprecia a quien puede manejar un cocodrilo.
Las personas ilógicas son menospreciadas.

SOLUCIÓN

Primero, se escribe cada premisa en la forma *si. . . entonces. . .*

Si usted es un bebé, entonces es ilógico.
Si usted puede manejar un cocodrilo, entonces usted no es menospreciado.
Si usted es ilógico, entonces usted es menospreciado.

Considere que p representa "usted es un bebé", q representa "usted es ilógico", r representa "usted puede manejar un cocodrilo", y s corresponde a "usted es menospreciado". Los enunciados se pueden escribir simbólicamente.

$$p \rightarrow \sim q$$
$$r \rightarrow \sim s$$
$$\sim q \rightarrow s$$

Se inicia con cualquier letra que aparezca solo una vez. Aquí p aparece solo una vez. Usando el contrapositivo de $r \rightarrow \sim s$, que es $s \rightarrow \sim r$, se reordenan los enunciados como sigue.

$$p \rightarrow \sim q$$
$$\sim q \rightarrow s$$
$$s \rightarrow \sim r$$

A partir de los tres enunciados, el uso repetitivo de razonamiento transitivo nos da la conclusión

$p \rightarrow \sim r$, lo que nos conduce a un argumento válido.

En palabras, la conclusión es: "Si usted es un bebé, entonces no puede manejar un cocodrilo", o como lo habría escrito Lewis Carroll: "Los bebés no pueden manejar cocodrilos". ▮▮▮

3.6 EJERCICIOS

Cada argumento es válido por una de las formas de argumentos válidos analizados en esta sección, o bien, es una falacia por una de las formas de argumentos inválidos analizados. (Véase los recuadros de resumen). Determine si el argumento es válido *o una* falacia, *e indique la forma en que se aplica.*

1. Si James Taylor va al pueblo, entonces yo iré al concierto.
Si voy al concierto, entonces me reportaré enfermo al trabajo.

Si James Taylor va al pueblo, me reportaré enfermo al trabajo.

2. Si usted usa binoculares, entonces alcanzará a ver el transbordador espacial.
Si usted alcanza a ver el transbordador espacial, entonces se sorprenderá.

Si usted usa binoculares, entonces se sorprenderá.

3. Si Julie Nhem trabaja arduamente, obtendrá una promoción.
Julie Nhem trabaja arduamente.

Ella obtiene una promoción.

4. Si Andrew Noble vende su cuota, obtendrá un bono.
Andrew Noble vende su cuota.

Él obtiene un bono.

5. Si él no tiene que levantarse a las 3:00 A.M., se pone eufórico.
Él se pone eufórico.

Él no tiene que levantarse a las 3:00 A.M.

6. Si ella compra otro par de zapatos, su clóset estará atiborrado.
Su clóset estará atiborrado.

Ella compra otro par de zapatos.

7. Si Mariano Rivera lanza, los Yankees ganan.
Los Yankees no ganan.

Mariano Rivera no lanza.

8. Si Nelson Dida juega, el contrario anota.
El contrario no anota.

Nelson Dida no juega.

9. "Si desarrolláramos una raza de hombres como Isaac Newton, no habría progreso". (Cita de Aldous Huxley).
No hemos desarrollado una raza de hombres como Isaac Newton.

Eso es progreso.

10. "Si he visto más lejos que otros, es porque voy sobre los hombros de gigantes". (Cita de Sir Isaac Newton).
No he visto más lejos que otros.

No voy sobre los hombros de gigantes.

11. Ella comercia en Internet o paga con tarjeta de crédito.
Ella no paga con tarjeta de crédito.

Ella comercia por Internet.

12. Mia patea el balón o Drew hace un pase.
Drew no hace un pase.

Mia patea el balón.

Use una tabla de verdad para determinar si cada uno de los siguientes argumentos es válido *o* inválido.

13. $p \vee q$
p

$\sim q$

14. $p \wedge \sim q$
p

$\sim q$

15. $\sim p \rightarrow \sim q$
q

p

16. $p \vee \sim q$
p

$\sim q$

17. $p \rightarrow q$
$q \rightarrow p$

$p \wedge q$

18. $\sim p \rightarrow q$
p

$\sim q$

19. $p \rightarrow \sim q$
q

$\sim p$

20. $p \rightarrow \sim q$
$\sim p$

$\sim q$

21. $(p \wedge q) \vee (p \vee q)$
q

p

22. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
p

$p \vee q$

23. $(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \rightarrow q)$
p

$\sim q$

24. $(r \wedge p) \rightarrow (r \vee q)$
$q \wedge p$

$r \vee p$

25. $(\sim p \wedge r) \rightarrow (p \vee q)$
$\sim r \rightarrow p$

$q \rightarrow r$

26. $(p \rightarrow \sim q) \vee (q \rightarrow \sim r)$
$p \vee \sim r$

$r \rightarrow p$

27. Anteriormente mostramos cómo analizar argumentos usando diagramas de Euler. Remítase al **ejemplo 4** de esta sección, reformule cada premisa y la conclusión usando un cuantificador, y luego dibuje un diagrama de Euler para ilustrar la relación.

28. Explique en unas cuantas oraciones cómo determinar el enunciado para el cual se construirá una tabla de verdad, de modo que los argumentos que siguen en los **ejercicios 29 a 38** se puedan analizar para ver si son válidos.

Determine si cada argumento es válido *o* inválido.

29. A Joey le gusta ver películas. Si a Terry le gusta trotar, entonces a Joey no le gusta ver películas. Si a Terry no le gusta trotar, entonces Carrie conduce un autobús escolar. Por lo tanto, Carrie conduce un autobús escolar.

30. Si el huracán Gustavo azota esa arboleda, entonces los árboles serán devastados. Las personas plantan árboles cuando hay desastres y los árboles no son devastados. Por lo tanto, si las personas plantan árboles cuando los desastres se presentan, entonces el huracán Gustavo no azotó la arboleda.



31. Si la locura de las redes sociales continúa, la descarga de música seguirá siendo común. Las muñecas del tipo "American Girl" son favoritas o la descarga de música seguirá siendo común. Las muñecas "American girl" no son favoritas. Por lo tanto, la locura de las redes sociales no continúa.

32. Carrie Underwood canta o Joe Jonas no es un ídolo adolescente. Si Joe Jonas no es un ídolo adolescente, entonces Jennifer Hudson no gana un Grammy. Jennifer Hudson gana un Grammy, por lo tanto, Carrie Underwood no canta.

33. Los Delfines estarán en los playoffs si y solo si Chad lidera la liga en pases. Tony entrena a los Delfines o Chad lidera la liga en pases. Tony no entrena a los Delfines. Por lo tanto, los Delfines no estarán en los playoffs.

34. Si te llevo en la piel, entonces tú estás en lo profundo de mi corazón. Si tú estás en lo profundo de mi corazón, entonces realmente no formas parte de mí. Tú estás en lo profundo de mi corazón o eres realmente parte de mí. Por lo tanto, si te llevo en la piel, entonces eres realmente una parte de mí.

35. Si el doctor Hardy es jefe de departamento, entonces vive en Atlanta. Él vive en Atlanta y su nombre de pila es Larry. Por lo tanto, si su nombre de pila no es Larry, entonces no es jefe de departamento.

36. Si yo fuera tu mujer y tú fueras mi hombre, entonces nunca dejaría de amarte. He dejado de amarte. Por lo tanto, no soy tu mujer o tú no eres mi hombre.

37. Todos los hombres fueron creados iguales. Todas las personas que son creadas iguales son mujeres. Por lo tanto, todos los hombres son mujeres.

38. Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto, Sócrates es mortal.

39. Suponga que usted pregunta a un extranjero la hora y obtiene la siguiente respuesta:

> "Si le informo la hora, entonces empezaremos a conversar. Si empezamos a conversar, entonces usted querrá verme en la parada del autobús. Si nos vemos en la parada del autobús, entonces hablaremos de mi familia. Si hablamos de mi familia, entonces usted descubrirá que mi hija es casadera. Si usted se entera de que ella es casadera, entonces usted querrá casarse con ella. Si usted se quiere casar con ella, entonces mi vida será miserable porque no quiero que mi hija se case con alguien tan tonto que no puede comprar un reloj de $10".

Use razonamiento transitivo para obtener una conclusión válida.

40. Molly Riggs hizo la siguiente observación: "Si quiero determinar si un argumento que conduce al enunciado

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$

es válido, solo necesito considerar las líneas de la tabla de verdad que conducen a una V en la columna encabezada por $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$". Molly fue muy perceptiva. ¿Usted puede explicar por qué su percepción es correcta?

En los argumentos utilizados por Lewis Carroll, es útil reformular una premisa en la forma si. . . entonces *para identificar más fácilmente una conclusión válida. Las siguientes premisas son de Lewis Carroll. Escriba cada premisa en la forma* si... entonces.

41. Todas mis aves de corral son patos.

42. Ninguno de sus hijos piensa de manera lógica.

43. Los conejillos de indias son completamente ignorantes de la música.

44. Ningún abstemio es prestamista.

45. Ningún gato que aprende tiene ojos verdes.

46. Los fumadores de opio no tienen autocontrol.

47. No tengo guardado uno que pueda leer.

48. Todos los escritos en papel azul están archivados.

Los ejercicios 49 a 54 incluyen premisas de Lewis Carroll. Escriba cada premisa con símbolos, y luego en la parte final, dé una conclusión que genere un argumento válido.

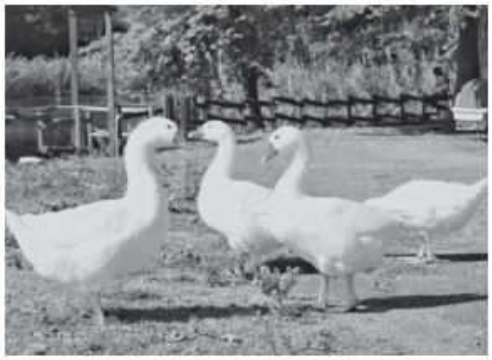
49. Considere que p representa "es un pato", q representa "es mi ave de corral", r corresponde a "uno es un oficial", y s representa "uno está dispuesto a bailar el vals".

a) Ningún pato está dispuesto a bailar el vals.

b) Ningún oficial declina bailar el vals.

c) Todas mis aves de corral son patos.

d) Dé una conclusión que genere un argumento válido.



50. Considere que p es "uno puede pensar con lógica", q corresponde a "uno es adecuado para ser jurado", r equivale a "uno es cuerdo", y s representa "él es tu hijo".

a) Todos los que son cuerdos pueden pensar con lógica.

b) Los lunáticos no son adecuados para estar en un jurado.

c) Ninguno de tus hijos puede pensar con lógica.

d) Dé una conclusión que genere un argumento válido.

51. Considere que p corresponde a "uno es honesto", q representa "uno es un prestamista", r equivale a "uno no cumple sus promesas", s representa "uno es digno de confianza", t significa "uno es muy comunicativo", y u corresponde a "uno es un bebedor de vino".

a) Los que no cumplen sus promesas no son dignos de confianza.

b) Los bebedores de vino son muy comunicativos.

c) Una persona que cumple su promesa es honesta.

d) Ningún abstemio es prestamista. (*Sugerencia:* Suponga que "abstemio" es el opuesto de "bebedor de vino").

e) Uno siempre puede confiar en una persona muy comunicativa.

f) Dé una conclusión que genere un argumento válido.

52. Considere que p equivale a "es un conejillo de indias", q significa "es totalmente ignorante de la música", r representa "guarda silencio mientras se toca *Claro de Luna*", y s significa "aprecia a Beethoven".

a) Nadie que realmente aprecie a Beethoven deja de guardar silencio mientras se toca *Claro de Luna.*

b) Los conejillos de indias son totalmente ignorantes de la música.

c) Nadie que sea totalmente ignorante de la música guardará siempre silencio mientras se toca *Claro de Luna*.

d) Dé una conclusión que genere un argumento válido.

53. Considere que p significa "inicia con 'Estimado señor'", q representa "es cruzada", r corresponde a "está fechada", s quiere decir "está archivada", t representa "está en tinta negra", u equivale a "está escrita en tercera persona", v significa "puedo leerla", w corresponde a "está en papel azul", x quiere decir "está escrita en una sola hoja", y y significa "está escrita por Brown".

a) Todas las cartas fechadas están escritas en papel azul.

b) Ninguna de ellas está en tinta negra, excepto aquellas que están escritas en tercera persona.

c) No he archivado ninguna de las que puedo leer.

d) Ninguna de las que están escritas en una sola hoja está sin fechar.

e) Todas las que no están cruzadas están en tinta negra.

f) Todas las escritas por Brown inician con "Estimado señor".

g) Todas las escritas en papel azul están archivadas.

h) Ninguna de las escritas en más de una hoja está cruzada.

i) Ninguna de las que inician con "Estimado señor" está escrita en tercera persona.

j) Dé una conclusión que genere un argumento válido.

54. Considere que p representa "él va a la fiesta", q significa "él peina su cabello", r equivale a "él tiene autocontrol", s corresponde a "él parece fascinante", t significa "él es un fumador de opio", u equivale a "él es pulcro", y v quiere decir "él usa guantes blancos de niño".

a) Ninguno que vaya a una fiesta deja de peinarse el cabello.

b) Nadie parece fascinante si no es pulcro.

c) Los fumadores de opio no tienen autocontrol.

d) Todos los que han peinado su cabello se ven fascinantes.

e) Nadie usa guantes blancos de niño a menos que vaya a una fiesta. (*Sugerencia:* Tome en cuenta que "a a menos que b" $\equiv \sim b \rightarrow a$).

f) Un hombre siempre está sucio si no tiene autocontrol.

g) Dé una conclusión que genere un argumento válido.

Respuesta al problema de Alicia en el Jardín del Olvido de la **página 130:**

Los únicos días en que el León puede decir: "Mentí ayer" son los lunes y jueves. Los únicos días que el unicornio puede decir: "Mentí ayer" son los jueves y los domingos. Por lo tanto, el único día en que ambos lo pueden decir es el jueves.

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

Problemas lógicos y sudokus

Los problemas lógicos y los sudokus se analizaron primero en la **Extensión** de las **páginas 120 a 124**. Aquí los problemas requieren más tiempo y mayores habilidades de razonamiento que los de la **Extensión**. Se tomaron de *Original Logic Problems*, de febrero de 2010, y de *Dell Original Sudoku*, de marzo de 2010.

Los alumnos se pueden dividir en grupos y ver cuál grupo puede resolver estos problemas más rápidamente.

EJERCICIOS

Nota: Como una excepción de nuestro estilo habitual, las respuestas a estos ejercicios de investigación en grupo se presentan en la parte posterior del libro.

1. ***Lanzamientos al espacio*** La Asociación Nacional del Espacio ha programado cinco cohetes para lanzarlos al principio del año próximo. Cada cohete (incluyendo el *Penchant*) despegará en un mes particular (de enero a mayo), que no coincidirá con los meses de lanzamiento de los otros, y en un día particular (del 1 al 5), que tampoco coincidirá con los días de lanzamiento de los otros. Cada cohete se lanzará desde sitios diferentes (incluyendo el San Simeon Launch Center) y tendrá una misión específica. Para los aficionados a los programas espaciales, ¡el próximo año será emocionante! Partiendo de la información que se presenta, determine el mes y el día de lanzamiento del cohete desde cada sitio de lanzamiento, así como la misión de cada uno.

		FECHA					SITIO DE LANZAMIENTO					COHETE					MISIÓN				
		1	2	3	4	5	CAPE CARNIVAL	EDDINGS A. F. B.	SAN SIMEON L. C.	VANDYKE FACILITY	WILLARD ISLAND	BRAVURA	FALCONER	LIBERTY	PENCHANT	TWILIGHT	INVESTIGACIÓN	ALUNIZAJE	MEDICIÓN	REPARACIÓN DE SATÉLITE	PRUEBA DE PROPULSIÓN
MES	ENERO																				
	FEBRERO																				
	MARZO																				
	ABRIL																				
	MAYO																				
MISIÓN	INVESTIGACIÓN																				
	ALUNIZAJE																				
	MEDICIÓN																				
	REPARACIÓN																				
	PRUEBA																				
COHETE	BRAVURA																				
	FALCONER																				
	LIBERTY																				
	PENCHANT																				
	TWILIGHT																				
SITIO DE LANZAMIENTO	CAPE CARNIVAL																				
	EDDINGS AIR																				
	SAN SIMEON																				
	VANDYKE																				
	WILLARD ISLAND																				

a) El día del lanzamiento en mayo corresponde a un número que es menor exactamente por dos números en comparación con el día del lanzamiento desde Willard Island. Ninguno de los cohetes se lanzará el 1 de febrero. La misión para someter a prueba un nuevo sistema de propulsión no iniciará en enero.

b) El *Liberty* y el cohete que saldrá en abril despegarán de Cape Carnival y Willard Island en algún orden. Ni el cohete con la misión de medir campos magnéticos (el cual no se lanzará el día 1 de un mes) ni el cohete de Willard Island despegarán el día 3 de algún mes.

c) El *Bravura* será lanzado un mes después del cohete que se lanzará el día 4 de un mes (el cual despegará después del cohete que alunizará). El *Liberty* no será lanzado el día 2 de algún mes.

d) El cohete que despegará de Cape Carnival no se encargará de someter a prueba el nuevo sistema de propulsión. La misión del *Twilight* (el cual no tiene la misión de reparar un satélite) no iniciará el día 5 de un mes.

e) El cohete con la misión de investigar radiación extraña será lanzado durante el año en algún momento antes que el *Liberty* (el cual no reparará un satélite), pero después que la nave que despegará de Vandyke Facility.

f) El cohete que saldrá desde la base Eddings Air Force despegará en una fecha indicada con un número menor que la fecha de lanzamiento de marzo (en la cual no se someterá a prueba un sistema de propulsión), y despegará en una fecha indicada con un número menor que la fecha de lanzamiento del *Falconer*.

2. ***Acertijo muy desafiante*** Para resolver el siguiente acertijo muy desafiante, coloque un número en cada cuadro de modo que a lo largo de cada fila, de cada columna hacia abajo, de cada cuadrado de 16 cuadros pequeños (existen 16 de estos) y de cada una de las dos diagonales haya números del 1 al 16. No debe aparecer un número más de una vez en ninguna fila o columna, en ninguna diagonal ni en ningún cuadro de 16 cuadros pequeños.

○	10		4		6	14		16			8				○
	○	7		8		9		2	11	5		16		○	6
13	8	○	14				7		15	3			○	12	
		2	○	5		12	15	6				○	4	7	8
	13		10	○			3	1		8	○				
		16	2		○	15	4		5	○	11	1	3		
1			12		8	○			○			9		10	13
	14			13	9		○	○	2	15	10		6		11
4		5		14	12	3	○	○		2	15			1	
15	16		9			○			○	13		14			4
		10	6	9	○	4		11	1	○		3	5		
				○	1		16	5			○	2		11	
10	9	14	○				12	15	13		3	○	11		
	2	○			11	5		7				10	○	3	16
16	○		13		7	1	6		10		2		14	○	
○				10			9		4	16		6		2	○

Ojo arreglar las indicaciones a 9.5 pts

EXAMEN DEL CAPÍTULO 3

Escriba la negación de cada enunciado.

1. $6 - 3 = 3$

2. Todos los hombres fueron creados iguales.

3. Algunos alumnos de la clase fueron a una práctica de campo.

4. Si eso es lo que sientes, entonces lo acepto.

5. Ella solicitó un crédito estudiantil y lo consiguió.

Considere que p representa "tú me amarás" y *q* representa "yo te amaré". *Escriba cada enunciado con símbolos.*

6. Si no me vas a amar, entonces yo te amaré.

7. Yo te amaré si tú me vas a amar.

8. Yo no te amaré si y solo si tú no me vas a amar.

Utilizando los mismos enunciados de los ejercicios 6 a 8, escriba lo siguiente con palabras.

9. $\sim p \wedge q$

10. $\sim(p \wedge \sim q)$

En cada uno de los siguientes enunciados, suponga que p es verdadero, y que q y r son falsos. Obtenga el valor de verdad de cada enunciado.

11. $\sim q \wedge r$

12. $r \vee (p \wedge \sim q)$

13. $r \rightarrow (s \vee r)$ (El valor de verdad del enunciado *s* es desconocido).

14. $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

15. Explique con sus propias palabras, por qué si *p* es un enunciado, el bicondicional $p \leftrightarrow \sim p$ debe ser falso.

16. Establezca las condiciones necesarias para que:

a) un enunciado condicional sea falso

b) una conjunción sea verdadera

c) una disyunción sea falsa

Construya una tabla de verdad para cada uno de los siguientes enunciados.

17. $p \wedge (\sim p \vee q)$

18. $\sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Indique si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero *o* falso.

19. Algunos números enteros negativos son números enteros no negativos.

20. Todos los números irracionales son números reales.

Escriba cada enunciado condicional en la forma si... entonces.

21. Todos los números enteros son números racionales.

22. Ser un rombo es suficiente para que un polígono sea un cuadrilátero.

23. Ser divisible entre 2 es necesario para que un número sea divisible entre 4.

24. Ella realiza excavaciones para encontrar huesos de dinosaurio solo si es paleontóloga.

Para cada enunciado, escriba **a)** *el converso,* **b)** *el inverso y* **c)** *el contrapositivo.*

25. Si una imagen dice más que mil palabras, la gráfica me ayudará a comprenderla.

26. $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$ (Use una de las leyes de De Morgan cuando sea necesario).

27. Use un diagrama de Euler para determinar si el argumento es *válido* o *inválido*.

Todos los miembros de ese club de atletismo ahorran dinero.
Don O'Neal es miembro de ese club de atletismo.

Don O'Neal ahorra dinero.

28. Asocie cada argumento de los incisos *a*) a *d*) de la siguiente columna con la ley que justifica su validez, o bien, con la falacia de la cual es un ejemplo (apartados A a F).

A. Modus ponens
B. Modus tollens
C. Razonamiento transitivo
D. Silogismo disyuntivo
E. Falacia del converso
F. Falacia del inverso

a) Si él come hígado, entonces come lo que sea.
Él come hígado.

Él comerá lo que sea.

b) Si usted usa su cinturón de seguridad, estará seguro.
Usted no usa su cinturón de seguridad.

Usted no estará seguro.

c) Si oigo *Mr. Bojangles*, pienso en ella.
Si pienso en ella, sonrío.

Si oigo *Mr. Bojangles*, sonrío.

d) Ella canta o baila.
Ella no canta.

Ella baila.

Use una tabla de verdad para determinar si el argumento es válido *o* inválido.

29. Si expido un cheque, este será rechazado. Si el banco lo garantiza, entonces no será rechazado. El banco lo garantiza. Por lo tanto, no expediré un cheque.

30. $\sim p \rightarrow \sim q$
$q \rightarrow p$
$p \vee q$

TEORÍA DE NÚMEROS

4



La película *Contacto* de 1997, basada en la novela de Carl Sagan del mismo nombre, presenta a Jodie Foster como la científica Ellie Arroway. Después de años de búsqueda, Ellie hace contacto con seres inteligentes del espacio exterior. Su contacto es verificado después de recibir señales de radio que indican **números primos:** 2, 3, 5, 7, 11, etcétera. Sus superiores no están convencidos y preguntan por qué los extraterrestres no hablan en inglés. Ellie responde:

> *Bueno, quizá porque en el 70% del planeta se hablan otros idiomas. Las matemáticas son el único lenguaje universal real, Senador. No es coincidencia que usen números primos . . . Números primos, que son enteros divisibles solo entre ellos mismos y 1.*

En este capítulo usted conocerá esos números primos, los cuales son los bloques sobre los que se construye la teoría de números y, por lo tanto, de las matemáticas.

4.1 Números primos y compuestos

4.2 Números primos grandes

4.3 Temas selectos de la teoría de números

4.4 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Extensión Criptografía moderna

4.5 La secuencia de Fibonacci y la razón áurea

Investigación colaborativa Investigación de una propiedad interesante de cuadros con números

Examen del capítulo 4

4.1 NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Primos, compuestos y divisibilidad • Teorema fundamental de la aritmética

Primos, compuestos y divisibilidad

El famoso matemático alemán Carl Friedrich Gauss dijo alguna vez: "Las matemáticas son la ciencia reina, y la teoría de números es la reina de las matemáticas". La **teoría de números** es la rama de las matemáticas encargada del estudio de las propiedades de los **números naturales**, también conocidos como **números cardinales**, es decir, los **números enteros positivos**.

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

No debe confundirse $b|a$ con b/a. La expresión $b|a$ representa el enunciado "b divide a a". Por ejemplo, $3|12$ es un enunciado verdadero, mientras que $5|14$ es un enunciado falso. Por otro lado, b/a representa la operación "b dividido entre a". Por ejemplo, $28/4$ da como resultado 7.

Un concepto clave de la teoría de números es la idea de *divisibilidad*. Un número cardinal es *divisible* entre otro si la operación de dividir el primero entre el segundo produce un residuo igual a 0.

Divisibilidad

El número natural a es **divisible** entre el número natural b si existe un número natural k tal que $a = bk$. Si b divide a a, entonces se escribe $b|a$.

Las ideas de **números pares** e **impares** se basan en el concepto de divisibilidad. Un número natural es par si es divisible entre 2, e impar si no lo es. Todos los números pares se escriben en la forma $2k$ (para un número natural k) mientras que todos los números impares se escriben en la forma $2k - 1$. Se puede decir lo mismo de otra manera: 2 divide a todos los números pares, pero no a los números impares. (Si a es par, entonces $2|a$, mientras que si a es impar, entonces $2 \nmid a$).

Observe que si b divide a a, entonces el cociente a/b o $\frac{a}{b}$ es un número natural. Por ejemplo, 4 divide a 20 porque existe un número natural k tal que

$$20 = 4k.$$

El valor de k es igual a 5 porque

$$20 = 4 \cdot 5.$$

El número natural 20 no es divisible entre 7, puesto que no existe un número natural k que satisfaga $20 = 7k$. De manera alternativa, "20 dividido entre 7 da un cociente igual a 2, con un residuo igual a 6"; como el residuo es diferente de cero, no existe divisibilidad. Se escribe $7 \nmid 20$ para indicar que 7 *no* divide a 20.

Si el número natural a es divisible entre el número natural b, entonces b es un **factor** (o **divisor**) de a, y a es un **múltiplo** de b. Por ejemplo, 5 es un factor de 30, y 30 es un múltiplo de 5. Asimismo, 6 es un factor de 30, y 30 es un múltiplo de 6. El número 30 es igual a $6 \cdot 5$. Este producto $6 \cdot 5$ se conoce como **factorización** de 30. Otras factorizaciones de 30 son:

$$3 \cdot 10, \quad 2 \cdot 15, \quad 1 \cdot 30 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

EJEMPLO 1 Verificación de la divisibilidad

Determine si el primer número es divisible entre el segundo.

a) 45; 9 ***b)*** 60; 7 ***c)*** 19; 19 ***d)*** 26; 1

SOLUCIÓN

a) ¿Existe un número natural k que satisfaga $45 = 9k$? La respuesta es sí, porque $45 = 9 \cdot 5$, y 5 es un número natural. Por lo tanto, 9 divide a 45, lo que se escribe como $9|45$.

b) Como el cociente $60 \div 7$ no es un número natural, 60 no es divisible entre 7, se escribe $7 \nmid 60$.

c) El cociente $19 \div 19$ es el número natural 1, de modo que 19 es divisible entre 19. (***De hecho, cualquier número natural es divisible entre sí mismo***).

Para cualquier número natural a, es verdadero que $a|a$ y también $1|a$.

d) El cociente $26 \div 1$ es el número natural 26, de modo que 26 es divisible entre 1. (***De hecho, cualquier número natural es divisible entre 1***). ■■■

Cómo ahorrar muchos gises En 1903, el matemático F. N. Cole presentó antes de una reunión de la Sociedad Estadounidense de Matemáticas su descubrimiento de la factorización del número

$$2^{67} - 1.$$

Caminó hasta el pizarrón, elevó 2 a la sexagésima séptima potencia, y restó 1. Luego fue al otro lado del pizarrón y multiplicó

$$193{,}707{,}721 \times 761{,}838{,}257{,}287.$$

Los dos cálculos coincidieron, y Cole recibió una ovación de pie por una presentación que no incluyó una sola palabra.

EJEMPLO 2 Obtención de factores

Obtenga todos los números naturales factores de cada número.

a) 36 ***b)*** 50 ***c)*** 11

SOLUCIÓN

a) Para obtener los factores de 36, intente dividir 36 entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, y así sucesivamente. Esto da los siguientes números naturales factores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.

b) Los factores de 50 son 1, 2, 5, 10, 25 y 50.

c) Los únicos números naturales factores de 11 son 11 y 1. ■■■

Números primos y números compuestos

Un número natural mayor que 1 cuyos únicos factores son el mismo número y el 1 se conoce como **número primo**. Un número natural mayor que 1 que no es primo se conoce como **compuesto**.

Los matemáticos están de acuerdo en que el número natural 1 no es primo ni compuesto.

Definición alternativa de número primo

Un **número primo** es un número natural que tiene como factores *exactamente* dos números naturales diferentes (lo cual clarifica por qué 1 no es primo).

Existe un método sistemático para identificar los números primos en una lista de números: $2, 3, \ldots, n$. El método se conoce como la **criba de Eratóstenes**, en honor del geógrafo, poeta, astrónomo y matemático griego (alrededor de 276-192 a. C.).

Para construir esta criba, se listan todos los números naturales partiendo de 2 hasta algún número natural determinado n, como 100. El número 2 es primo, pero todos los demás múltiplos de 2 (4, 6, 8, 10, etcétera) son compuestos. Se encierra en un círculo el número 2, y se cruzan con una diagonal todos los múltiplos de 2. El siguiente número sin diagonal y sin encerrar en un círculo es 3, el primo siguiente. Se encierra el 3 en un círculo y se cruzan con una diagonal todos los múltiplos de 3 (6, 9, 12, 15, etcétera) que todavía no estén cruzados. Circule el primo siguiente, es decir, el 5, y cruce todos sus múltiplos que aún no están cruzados. Continúe este proceso para todos los primos menores o iguales a la raíz cuadrada del último número de la lista. En nuestra lista, podemos detenernos en 7, porque el siguiente primo, el 11, es mayor que la raíz cuadrada de 100, la cual es 10. En este punto, simplemente encierre en un círculo todos los números restantes que no estén cruzados.

La **tabla 1** muestra la criba de Eratóstenes para $2, 3, 4, \ldots, 100$.

Tabla 1 Criba de Eratóstenes

	(2)	(3)	4	(5)	6	(7)	8	9	10	(11)	12	(13)	14
15	16	(17)	18	(19)	20	21	22	(23)	24	25	26	27	28
(29)	30	(31)	32	33	34	35	36	(37)	38	39	40	(41)	42
(43)	44	45	46	(47)	48	49	50	51	52	(53)	54	55	56
57	58	(59)	60	(61)	62	63	64	65	66	(67)	68	69	70
(71)	72	(73)	74	75	76	77	78	(79)	80	81	82	(83)	84
85	86	87	88	(89)	90	91	92	93	94	95	96	(97)	98
99	100												

Los 25 primos de 1 y 100 están encerrados en un círculo.

EJEMPLO 3 Identificación de números primos y compuestos

Determine si cada número es primo o compuesto.

a) 97 ***b)*** 59,872 ***c)*** 697

SOLUCIÓN

a) Como el 97 está encerrado en un círculo en la **tabla 1**, es primo. Si 97 tuviera un factor primo más pequeño, 97 tendría que estar cruzado al ser múltiplo de ese factor.

b) El número 59,872 es par, de modo que es divisible entre 2. Es compuesto.

Solo existe un número par primo, el número 2.

c) Para que 697 sea compuesto, debe haber un número diferente de 697 y 1 que pueda dividir 697 dejando un residuo igual a 0. Se inicia intentando con 2, y luego 3. Ninguno funciona. No es necesario intentar con 4. (Si cuatro divide a un número con residuo igual a 0, entonces 2 también lo hará). Se intenta con 5. No hay necesidad de intentar con 6 o cualquier número par sucesivo. (¿Por qué?). Se intenta con 7. Se intenta con 11. (¿Por qué no se intenta con 9?). Se intenta con 13. Se continúa intentando con otros números hasta que uno funciona, o hasta que el cuadrado del número con el que se intenta excede el número en cuestión, el 697. Se intenta con 17.

$$697 \div 17 = 41$$

El número 697 es compuesto, puesto que

$$697 = 17 \cdot 41.$$ ■■■



En el número de *Science News* del 1 de octubre de 1994, Ivars Peterson dio una explicación fascinante acerca de un descubrimiento de hace 75 años: la **máquina de factorización** ("Obtención mecánica de números primos: Reencuentro de una máquina de factorización perdida durante mucho tiempo"). En 1989 Jeffrey Shallit, de la Universidad de Waterloo en Ontario, se encontró con un artículo de un diario francés de 1920, en el cual el autor, Eugene Oliver Carissan, reportaba la invención de su máquina de factorización. Shallit y dos de sus colegas se embarcaron en la búsqueda de la máquina. Se pusieron en contacto con todos los suscriptores del diario en Francia llamados Carissan y recibieron respuesta de la hija de Eugène Carissan. La máquina todavía existía y estaba en condiciones de trabajar, almacenada en un cajón en el observatorio astronómico de Floirac, cerca de Bordeaux.

Peterson explicó en el artículo cómo funcionaba el aparato. Usando esta máquina, Carissan tardó exactamente 10 minutos para probar que 708,158,977 es un número primo, y podía factorizar un número de 13 dígitos. A pesar de que esto no se puede comparar con la tecnología que existe actualmente, fue un logro significativo de Carissan.

Una ayuda para determinar si un número natural es divisible entre otro número natural se conoce como **prueba de divisibilidad**. La **tabla 2** muestra pruebas de divisibilidad para los números naturales del 2 al 12 (con excepción del 7 y el 11, los cuales se prueban en los ejercicios).

Tabla 2 Pruebas de divisibilidad para números naturales

Divisibilidad entre	Prueba	Ejemplo
2	Números terminados en 0, 2, 4, 6 u 8. (El último dígito es par).	9,489,994 termina en 4; es divisible entre 2.
3	La suma de los dígitos es divisible entre 3.	897,432 es divisible entre 3, puesto que $8+9+7+4+3+2=33$ es divisible entre 3.
4	Los últimos dos dígitos forman un número divisible entre 4.	7,693,432 es divisible entre 4, puesto que 32 es divisible entre 4.
5	El número termina en 0 o 5.	890 y 7,635 son divisibles entre 5.
6	El número es divisible tanto entre 2 como entre 3.	27,342 es divisible entre 6 puesto que es divisible tanto entre 2 como entre 3.
8	Los últimos tres dígitos forman un número divisible entre 8.	1,437,816 es divisible entre 8, puesto que 816 es divisible entre 8.
9	La suma de los dígitos es divisible entre 9.	428,376,105 es divisible entre 9, puesto que la suma de los dígitos es 36, el cual es divisible entre 9.
10	El último dígito es 0.	897,463,940 es divisible entre 10.
12	El número es divisible tanto entre 4 como entre 3.	376,984,032 es divisible entre 12.

EJEMPLO 4 Aplicación de pruebas de divisibilidad

En cada caso, determine si el primer número es divisible entre el segundo.

a) 2,984,094; 4 ***b)*** 4,119,806,514; 9

SOLUCIÓN

a) Los últimos dos dígitos forman el número 94. Como 94 no es divisible entre 4, el número dado no es divisible entre 4.

b) La suma de los dígitos es:

$$4 + 1 + 1 + 9 + 8 + 0 + 6 + 5 + 1 + 4 = 39,$$

el cual no es divisible entre 9. Por lo tanto, el número en cuestión no es divisible entre 9. ■■■

El siguiente programa, escrito por Charles W. Gantner y suministrado por cortesía de Texas Instruments, se puede usar en la calculadora TI-83/84 Plus para listar todos los primos menores que o iguales a un número natural *N* determinado.

```
PROGRAM: PRIMES
: Disp "INPUT N ≥ 2"
: Disp "TO GET"
: Disp "PRIMES ≤ N"
: Input N
: 2→T
: Disp T
: 1→A
: Lbl 1
: A + 2→A
: 3→B
: If A > N
: Stop
: Lbl 2
: If B ≤ √(A)
: Goto 3
: Disp A
: Pause
: Goto 1
: Lbl 3
: If A/B ≤ int(A/B)
: Goto 1
: B + 2→B
: Goto 2
```

```
prgmPRIMES

INPUT N≥2
TO GET
PRIMES ≤ N
?6
```

```
TO GET
PRIMES ≤ N
?6
                2
                3
                5
             Done
```

La pantalla indica que los primos menores que o iguales a 6 son 2, 3 y 5.

Teorema fundamental de la aritmética

Un número *compuesto* se puede visualizar como "compuesto" de factores más pequeños. Por ejemplo, 42 es compuesto porque $42 = 6 \cdot 7$. Si todos los factores son números primos, entonces tenemos una *factorización con números primos*. Por ejemplo, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.

El teorema fundamental de la aritmética

Todos los números naturales se pueden expresar de una manera y solo una como un producto de primos (sin importar el orden de los factores). Este producto único de primos se conoce como **factorización con números primos** del número natural.

Como un número natural primo no está compuesto por factores más pequeños, su factorización con números primos es simplemente él mismo. Por ejemplo, $17 = 17$. (*Nota del RT*: En otros textos se maneja la factorización $17 = 17 \cdot 1$, y se le llama factorización trivial. De acuerdo con este criterio, un número primo solo tiene factorización trivial).

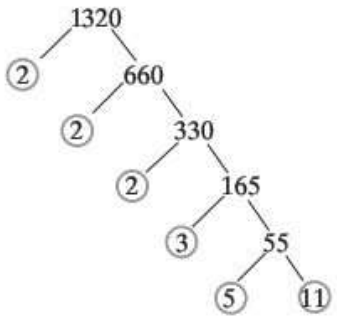
EJEMPLO 5 Obtención de la factorización con números primos de un número compuesto

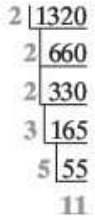
Obtenga la factorización con números primos del número 1320.

SOLUCIÓN

Se usa un "árbol de factores". El árbol de factores inicia con $1320 = 2 \cdot 660$, como se muestra en la parte de abajo a la izquierda. Luego, $660 = 2 \cdot 330$, y así sucesivamente, hasta que cada rama del árbol termine en un número primo. Todos los factores primos resultantes se muestran dentro de un círculo en el diagrama.

De manera alternativa, la misma factorización se puede obtener dividiendo repetitivamente entre primos, como se muestra en la parte derecha del diagrama. (En general, se divide entre los primos 2, 3, 5, 7, 11, etcétera, tantas veces como sea posible, hasta que la respuesta ya no sea un número compuesto).





Con cualquier método, la factorización con números primos, en forma exponencial, es:

$$1320 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11. \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

■■■

4.1 EJERCICIOS

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero *o* falso.

1. Todos los números naturales son divisibles entre 1.

2. No existen números primos pares.

3. Si n es un número natural y $9|n$, entonces $3|n$.

4. Si n es un número natural y $5|n$, entonces $10|n$.

5. 1 es el número primo más pequeño.

6. Todos los números naturales son tanto un factor como un múltiplo de sí mismos.

7. Si 16 divide a un número natural, entonces 2, 4 y 8 también deben dividir a ese número natural.

8. El número primo 53 tiene exactamente dos números naturales como factores.

Obtenga todos los números naturales que son factores de cada número.

9. 12 **10.** 20

11. 28 **12.** 172

Use pruebas de divisibilidad para determinar si el número proporcionado es divisible entre cada uno de los siguientes números.

a) 2 ***b)*** 3 ***c)*** 4 ***d)*** 5 ***e)*** 6 ***f)*** 8
g) 9 ***h)*** 10 ***i)*** 12

13. 321 **14.** 540

15. 36,360 **16.** 123,456,789

17. ***a)*** Al construir la criba de Eratóstenes del 2 al 100, se dijo que cualquier número compuesto del intervalo tiene que ser un múltiplo de algún primo menor que o igual a 7 (puesto que el primo siguiente, el 11, es mayor que la raíz cuadrada de 100). Explique.

b) Para ampliar la criba de Eratóstenes hasta 200, ¿cuál es el primo más grande cuyos múltiplos tendrían que considerarse?

c) Complete este enunciado: En la búsqueda de los factores primos de un número determinado, solo necesitamos considerar todos los primos hasta el(la) _____ _____ inclusive, puesto que un factor primo mayor que el(la) _____ _____ solo se puede presentar si existe al menos otro factor primo menor que el(la) _____ _____.

d) Complete este enunciado: Si ningún primo menor que o igual a $\sqrt{n}$ divide a n, entonces n es un número _____.

18. ***a)*** Continúe la criba de Eratóstenes de la **tabla 1** de 101 a 200 y liste los primos entre 100 y 200. ¿Cuántos hay?

b) A partir de la lista del inciso ***a)***, verifique que los números 197 y 199 son primos.

19. Liste dos primos que sean números naturales consecutivos. ¿Puede haber otros cualesquiera?

20. ¿Pueden existir tres primos que sean números naturales consecutivos? Explique.

21. Para que un número natural sea divisible tanto entre 2 como entre 5, ¿cuál es el requisito para su último dígito?

22. Considere las pruebas de divisibilidad para los números 2, 4 y 8 (todos potencias de 2). Use razonamiento inductivo para predecir la prueba de divisibilidad para 16. Luego, aplique la prueba para demostrar que 456,882,320 es divisible entre 16.

23. Rehaga el árbol de factores del **ejemplo 5**, suponiendo que primero observa que $1320 = 12 \cdot 110$, luego que $12 = 3 \cdot 4$ y $110 = 10 \cdot 11$. Complete el proceso y dé la factorización con números primos resultante.

24. Explique cómo su resultado del **ejercicio 23** ilustra el teorema fundamental de la aritmética.

Obtenga la factorización con números primos de cada número compuesto.

25. 168 **26.** 300

27. 468 **28.** 931

He aquí una prueba de divisibilidad entre 7.

a) *Duplique el último dígito del número proporcionado, y reste este valor del número dado omitiendo el último dígito.*

b) *Repita el proceso del inciso* ***a)*** *tantas veces como sea necesario hasta que se evidencie si el número obtenido es divisible o no entre 7.*

c) *Si el número final obtenido es divisible entre 7, entonces el número dado también es divisible entre 7. Si el número final no es divisible entre 7, entonces tampoco el número inicial.*

Use esta prueba de divisibilidad para determinar si cada uno de los siguientes números es divisible entre 7.

29. 214,256 **30.** 549,311

31. 584,854 **32.** 325,951

He aquí una prueba de divisibilidad entre 11.

a) *Iniciando por la izquierda del número proporcionado, obtenga una suma tomando los dígitos de manera alternada, es decir uno sí y otro no.*

b) *Sume los dígitos restantes.*

c) *Reste la más pequeña de las dos sumas de la más grande. (Si son iguales, la diferencia es 0).*

d) *Si el número final obtenido es divisible entre 11, entonces el número dado también es divisible entre 11. Si el número final no es divisible entre 11, entonces tampoco lo es el número inicial.*

Use esta prueba de divisibilidad para determinar si cada uno de los siguientes números es divisible entre 11.

33. 6,524,846 **34.** 108,410,313

35. 470,933,815 **36.** 819,224,306

37. Considere la prueba de divisibilidad para el número compuesto 6, y haga una conjetura de la prueba de divisibilidad para el número compuesto 15.

38. Dé dos factorizaciones del número 75 que no sean factorizaciones con números primos.

Determine todas las sustituciones posibles de dígitos para x de modo que el primer número sea divisible entre el segundo. Por ejemplo, 37, 58x es divisible entre 2 si

$$x = 0, 2, 4, 6 \text{ u } 8.$$

39. 398,87x; 2

40. 2,45x,765; 3

41. 64,537,84x; 4

42. 2,143,89x; 5

43. 985,23x; 6

44. 23,x54,470; 10

Existe un método para determinar el **número de divisores** *de un número compuesto. Para ello, escriba el número compuesto en su forma factorizada con números primos, usando exponentes. Sume 1 a cada exponente y multiplique estos exponentes. Su producto indica el número de divisores del número compuesto. Por ejemplo,*

$$24 = 2^3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1.$$

Ahora sume 1 *a cada exponente:*

$$3 + 1 = 4, 1 + 1 = 2.$$

Multiplique $4 \cdot 2$ *para obtener* 8. *Existen 8 divisores de* 24. *(Como* 24 *es un número pequeño, esto se puede verificar fácilmente. Los divisores son* 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24, *un total de* 8, *como se predijo).*

Obtenga el número de divisores de cada número compuesto.

45. 42

46. 308

47. $5^8 \cdot 29^2$

48. $2^4 \cdot 7^2 \cdot 13^3$

Cuando el número del año en el calendario es divisible entre cuatro, se trata de un año bisiesto. Se presenta una excepción cuando el número de años es divisible entre 100 *(es decir, termina en dos ceros). En este caso, el número debe ser divisible entre* 400 *para que el año sea bisiesto. Determine cuáles de los siguientes años son bisiestos.*

49. 1776

50. 1894

51. 2200

52. 2400

53. ¿Por qué el siguiente enunciado *no* es una prueba válida de divisibilidad para 8? "Un número es divisible entre 8 si es divisible tanto entre 4 como entre 2". Apoye su respuesta con un ejemplo.

54. Seleccione tres números naturales consecutivos cualesquiera, multiplíquelos entre sí y divida el producto entre 6. Repita esto varias veces, usando diferentes grupos de tres números consecutivos. Haga una conjetura en relación con los resultados.

55. Explique por qué el producto de tres números naturales consecutivos es divisible entre 6.

56. Elija cualquier número de 6 dígitos integrado por tres dígitos seguidos por los mismos tres dígitos en el mismo orden (por ejemplo, 467,467). Divida entre 13. Divida entre 11. Divida entre 7. ¿Qué observa? ¿Por qué cree que sucede esto?

4.2 NÚMEROS PRIMOS GRANDES

La infinitud de los números primos • Búsqueda de números primos más grandes

La infinitud de los números primos

Un resultado básico importante acerca de los números primos fue probado por Euclides alrededor del año 300 a. C., a saber, que existe una cantidad infinita de números primos. Esto significa que no importa qué tan grande sea un número primo, siempre existirán otros más grandes. La prueba de Euclides permanece todavía como una de las pruebas más elegantes de todas las matemáticas. (Una prueba matemática *elegante* es una que comprueba el resultado deseado de una manera directa y concisa. Los matemáticos se esfuerzan por alcanzar la elegancia en sus pruebas). Se conoce como **demostración por contradicción (o reducción al absurdo)**.

Un enunciado se puede demostrar por contradicción de la siguiente manera. Suponga que la negación de un enunciado es verdadera y utilice esa suposición para obtener alguna clase de contradicción o absurdo. Lógicamente, el hecho de que la negación del enunciado original conduzca a una contradicción significa que el enunciado original es verdadero.

Para entender mejor una parte particular de la prueba de que hay un número infinito de números primos, examinemos primero el siguiente argumento.

Suponga que $M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$. Ahora M es el producto de los primeros cuatro números primos, más 1. Si dividimos 211 entre cada uno de los primos 2, 3, 5 y 7, el residuo siempre es 1.

La hipótesis de Riemann es una conjetura intuitiva establecida a mediados del siglo XIX por Georg Friedrich Bernhard Riemann. Se refiere a cómo están distribuidos los números primos sobre la recta numérica y es, sin duda, la afirmación más importante sin probar de todas las matemáticas. Miles de "teoremas" se construyen sobre el supuesto de su veracidad. Si alguna vez se refutara, esos resultados se desmoronarían. Por otro lado, una comprobación permitiría la comprensión suficiente de los primos para echar abajo la clave pública de la criptografía, sobre la cual descansa la seguridad de todo el comercio en Internet (entre otras cosas).

$$\begin{array}{rrrr} 105 & 70 & 42 & 30 \\ 2\overline{)211} & 3\overline{)211} & 5\overline{)211} & 7\overline{)211} \\ 210 & 210 & 210 & 210 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Todos los residuos son iguales a 1.

Entonces, 211 no es divisible entre ninguno de los primos 2, 3, 5 y 7.

Ahora ya podemos presentar la prueba de Euclides de que existe un número infinito de números primos. Si *no existe el número primo más grande*, entonces debe haber un número infinito de números primos.

EJEMPLO 1 Prueba de la infinitud de los números primos

Pruebe por contradicción que existe una cantidad infinita de números primos.

SOLUCIÓN

Suponga que existe el número primo más grande, llamado P. Forme un número M tal que:

$$M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots \cdot P + 1,$$

donde $p_1, p_2, p_3, \ldots, P$ representan todos los primos menores que o iguales a P. Ahora, el número M debe ser primo o compuesto.

1. Suponga que M es primo.
   Como es evidente, M es más grande que P, de modo que si M es primo, es más grande que el número P considerado como el primo más grande. Hemos llegado a una *contradicción*.
2. Suponga que M es compuesto.
   Si M es compuesto, debe tener un factor primo. Pero ninguno de $p_1, p_2, p_3, \ldots, P$ son factores de M, porque la división entre cada uno de ellos produce un residuo igual a 1. (Recuerde el argumento anterior). De modo que si M tiene un factor primo, debe ser más grande que P. Pero esto es una *contradicción*, porque P se había considerado como el número primo más grande.

En cualquiera de los casos 1 o 2, llegamos a una contradicción. El argumento total se basa en el supuesto de que existe un primo más grande, pero como esto nos lleva a contradicciones, no debe existir un primo más grande o, de manera equivalente, ***existe una cantidad infinita de números primos.*** ▮▮▮

Nunca podríamos estudiar toda la cantidad infinita de números primos de manera directa. Así que, históricamente, se han investigado las propiedades de los más pequeños y conocidos, y luego se intentó "refutar" las propiedades (por lo general con contraejemplos) o probarlas (generalmente con algún argumento deductivo).

En seguida se presenta una manera de **clasificar** los números naturales (dividiéndolos en subconjuntos).

Conjunto A: todos los números naturales de la forma $4k$.
Conjunto B: todos los números naturales de la forma $4k+1$.
Conjunto C: todos los números naturales de la forma $4k+2$.
Conjunto D: todos los números naturales de la forma $4k+3$.

En cada caso, k es un número entero no negativo, excepto que para el conjunto A, k no puede ser 0. De este modo se toman en cuenta todos los números naturales. Cualquier número de la forma $4k+4$ estaría en el subconjunto A, porque:

$$4k + 4 = 4(k + 1).$$

Cualquier número de la forma $4k+5$ estaría en el subconjunto B, porque:

$$4k + 5 = 4(k + 1) + 1,$$

y así sucesivamente. El subconjunto A está formado por todos los múltiplos de 4. Cada uno de estos es divisible entre 4, por consiguiente, ninguno es primo. Ahora considere a C. Como

$$4k + 2 = 2(2k + 1),$$

cada miembro es divisible entre 2, de modo que no es primo (con excepción del 2 mismo).

Con esta división, todos los primos deben estar en B o en D.



Marin Mersenne (1588-1648), en su *Cogitata Physico-Mathematica* (1644), afirmó que M_n era primo para $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ y 257, y compuesto para todos los demás números primos n menores que 257. Otros matemáticos de la época sabían que Mersenne no podía haber probado realmente todos estos valores, pero ninguno pudo probarlos o desaprobarlos tampoco. Pasaron 300 años antes de que todos los primos hasta 257 se verificaran en realidad, y finalmente se reveló que Mersenne había cometido cinco errores:

M_{61} es primo.
M_{67} es compuesto.
M_{89} es primo.
M_{107} es primo.
M_{257} es compuesto.

EJEMPLO 2 División de los números naturales

Liste los primeros ocho miembros de cada uno de los conjuntos infinitos A, B, C y D.

SOLUCIÓN

$A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \dots\}$
$B = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \dots\}$
$C = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, \dots\}$
$D = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, \dots\}$ ■■■

Como se mencionó, los conjuntos A y C no contienen primos. Todos los primos están en los conjuntos B y D. (De hecho, existe una cantidad infinita de números primos en cada conjunto).

EJEMPLO 3 Identificación de primos de la forma $4k + 1$ y $4k + 3$

Identifique todos los primos *listados explícitamente* en los siguientes conjuntos infinitos del **ejemplo 2**.

a) conjunto B ***b)*** conjunto D

SOLUCIÓN

a) 5, 13, 17, 29 ***b)*** 3, 7, 11, 19, 23, 31 ■■■

Pierre de Fermat (cuyo perfil se encuentra en la **página 158**) probó que todos los números primos de la forma $4k + 1$ se pueden expresar como la suma de dos cuadrados.

EJEMPLO 4 Expresión de números primos como sumas de cuadrados

Exprese cada número primo de la solución del **ejemplo 3** ***a)*** como la suma de dos cuadrados.

SOLUCIÓN

$5 = 1^2 + 2^2$; $13 = 2^2 + 3^2$; $17 = 1^2 + 4^2$; $29 = 2^2 + 5^2$ ■■■

Búsqueda de números primos más grandes

En la actualidad, tanto la identificación de números primos más y más grandes como la factorización de números compuestos grandes en sus componentes primos son de gran importancia práctica, porque constituyen la base de los **sistemas de criptografía** modernos o códigos secretos. Durante siglos se han usado varios códigos en aplicaciones militares. Actualmente, la seguridad de grandes cantidades de datos industriales, de negocios y personales también depende de la teoría de los números primos. Véase la **Extensión** que sigue a la **sección 4.4**.

No se ha encontrado nunca una fórmula que genere de modo consistente números primos, mucho menos "todos los primos". El intento más útil, cuyo nombre hace honor al monje francés Marin Mersenne (1588-1648), se presenta a continuación.

Números de Mersenne y primos de Mersenne

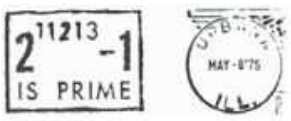
Para $n = 1, 2, 3, \dots$, los **números de Mersenne** son los generados por la fórmula

$$M_n = 2^n - 1.$$

(1) Si n es compuesto, entonces M_n también es compuesto.

(2) Si n es primo, entonces M_n puede ser primo o compuesto.

Los valores primos de M_n se conocen como los **primos de Mersenne**. Los primos grandes que actualmente están en proceso de verificación comúnmente son primos de Mersenne.



En un tiempo, $2^{11,213} - 1$ era el **primo de Mersenne** más grande conocido. En honor a su descubrimiento, la oficina de correos de Urbana, Illinois, usó el matasellos de arriba.

Mucho tiempo antes de Mersenne, hubo un acuerdo general sobre el enunciado (1) del recuadro. (Los **ejercicios 23 a 25** muestran cómo obtener un factor de $2^n - 1$ siempre que n sea compuesto). Sin embargo, algunos autores anteriores no estaban de acuerdo con el enunciado 2, creyendo (incorrectamente) que un primo n siempre produciría un primo M_n.

EJEMPLO 5 Obtención de números de Mersenne

Obtenga los números de Mersenne M_n para $n = 2, 3$ y 5.

SOLUCIÓN

$$M_2 = 2^2 - 1 = 3 \qquad 2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$M_3 = 2^3 - 1 = 7 \qquad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$
$$M_5 = 2^5 - 1 = 31 \qquad 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Observe que los tres valores, 3, 7 y 31, son números primos. ▮▮▮

Resulta que $M_7 = 2^7 - 1 = 127$ también es primo [véase el **ejercicio 18 *a*)** de la **sección 4.1**], pero en 1536 se descubrió que:

$$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 \text{ no es primo (puesto que es igual a } 23 \cdot 89).$$

***De modo que los valores primos de n* no *siempre producen un* M_n primo.** ¿Qué valores primos de n *producen* números primos de Mersenne (los llamados **primos de Mersenne**)? Nunca se ha encontrado una manera de identificar, en general, cuáles valores primos de n generan primos de Mersenne. Es cuestión de verificar cada valor primo de n de forma individual (no es una tarea fácil, ya que los números de Mersenne se vuelven muy grandes rápidamente).

La búsqueda de los primos de Mersenne ha producido resultados lentamente. En el año de 1600 aproximadamente, M_n se había verificado como primo para todos los primos n hasta 19 (excepto para 11, como se mencionó). El siguiente fue M_{31}, verificado por Euler en algún momento entre 1752 y 1772.

En 1876, el matemático francés Edouard Lucas usó una prueba inteligente que había desarrollado para demostrar que M_{127} (un número de 39 dígitos) es primo. En la década de 1930 D.H. Lehmer simplificó el método de Lucas, y desde entonces la prueba de los números de Mersenne para determinar si un número es primo se ha realizado con la prueba Lucas-Lehmer. En 1952 una de las primeras computadoras verificó que M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203} y M_{2281} son primos.

Durante el último medio siglo, la mayoría de los últimos nuevos primos se han identificado mediante algoritmos de computadora concebidos e implementados por matemáticos y programadores. En 1966 se inició la **Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS)** (Gran búsqueda de números primos de Mersenne por Internet), en la que ahora participan unas 50,000 computadoras personales alrededor del mundo. De los 47 números primos de Mersenne actualmente conocidos, el proyecto GIMPS ha descubierto los 13 más grandes. El último encontrado (en el verano de 2010),

$$M_{42,643,801} = 2^{42,643,801} - 1,$$

tiene 12,837,064 dígitos. Lea la nota del margen **Los primos son redituables** para saber acerca de uno más grande, descubierto anteriormente.

En la misma época en que Mersenne trabajaba en los números primos, Pierre de Fermat (1601-1665 aproximadamente) creía que la fórmula

$$2^{2^n} + 1$$

siempre produciría un primo, para cualquier valor entero no negativo de n. La **tabla 3** de la siguiente página muestra cómo esta fórmula genera los primeros cuatro números de Fermat, los cuales son todos primos. El quinto número de Fermat (para $n = 4$) es igualmente primo. Fermat había verificado estos primeros cinco números alrededor de 1630. Pero el sexto número de Fermat (para $n = 5$) resulta ser 4,294,967,297, el cual *no* es primo. (Véase **los ejercicios 15 y 16**). Desde el verano de 2010, no se han encontrado más primos entre los números de Fermat, y solo se han factorizado completamente de F_0 a F_{11}.

Los primos son redituables El 12 de abril de 2009 Odd Magnar Strindmo, de Melhus, Noruega, identificó el cuadragésimo séptimo primo de Mersenne conocido. El número

$2^{42,643,801} - 1$, que tiene 12,837,064 dígitos.

Excediendo los 10 millones de dígitos, habría calificado para un premio de $100,000 ofrecidos por la Electronic Frontier Foundation (no obstante, no era el primero con esa cantidad de dígitos). El premio fue para Edson Smith del Departamento de Matemáticas de la UCLA, quien descubrió el cuadragésimo quinto primo de Mersenne conocido el 23 de agosto de 2008. Este número

$2^{43,112,609} - 1$ tiene 12,978,189 dígitos

y todavía es el primo de Mersenne más grande conocido (en el verano de 2010).

La Fundación ofrece ahora $150,000 a la primera persona o grupo que descubra un primo de 100 millones de dígitos. Pero, a las tasas de participación actuales en Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS), ese descubrimiento podría tomar 10 años o más.

Si usted desea unirse al proyecto **Great Internet Mersenne Prime Search** (o simplemente aprender más acerca de él), visite el sitio www.mersenne.org.

La **computación distribuida** es una manera de incrementar la potencia de las computadoras utilizando muchas máquinas individuales que realizan partes de cálculos por separado. Un ejemplo es la **Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS)**, descrita en esta sección. Otro ejemplo es el proyecto **SETI@home (Search for Extraterrestrial Intelligence)**, el cual asigna el análisis de señales de datos de pequeñas partes del "cielo" a los participantes. (La película *Contacto* fue ficción, pero el programa todavía sigue adelante).

Un tercer ejemplo, **Folding@home**, ubicado en la Universidad de Stanford, investiga el plegamiento de las proteínas en formas complejas dentro de los organismos vivos y cómo interactúan con otras moléculas biológicas.

Tabla 3 Generación de números de Fermat

n	2^n	2^{2^n}	$2^{2^n}+1$
0	1	2	3
1	2	4	5
2	4	16	17
3	8	256	257

Como dato histórico existe un par de fórmulas de polinomios que producen primos. (Un *polinomio* en una variable que implica sumar o restar múltiplos enteros de potencias de números enteros no negativos de la variable. Analizados en la **sección 6.6**, los polinomios se encuentran entre las funciones matemáticas básicas). En 1732 Leonhard Euler presentó la fórmula

$$n^2-n+41, \quad \text{fórmula de Euler}$$

la cual genera primos para n hasta 40 y falla en $n=41$. En 1879 E. B. Escott produjo más primos con la fórmula

$$n^2-79n+1601, \quad \text{fórmula de Escott}$$

la cual tiene la primera falla en $n=80$.

EJEMPLO 6 Obtención de números usando las fórmulas de Euler y Escott

Obtenga los primeros cinco números generados por cada una de las fórmulas polinomiales de Euler y Escott.

SOLUCIÓN

La **tabla 4** muestra los números requeridos.

Tabla 4 Unos cuantos números primos generados por polinomios

n	Fórmula de Euler n^2-n+41	Fórmula de Escott $n^2-79n+1601$
1	41	1523
2	43	1447
3	47	1373
4	53	1301
5	61	1231

Todos los valores obtenidos aquí son primos. (Use la **tabla 1** para verificar los valores de Euler). ■■■

En realidad es fácil probar que no puede existir un polinomio que de manera consistente genere números primos. Existen fórmulas matemáticas más complicadas para generar primos, pero ninguna de las obtenidas hasta ahora se puede aplicar de manera práctica en un tiempo razonable, inclusive usando las computadoras más rápidas.

4.2 EJERCICIOS

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero *o* falso.

1. La prueba de Euclides de la infinitud de los primos es una demostración por contradicción.
2. En los antiguos tiempos de Euclides, los matemáticos no habían alcanzado la elegancia en sus pruebas.
3. Todos los números naturales de la forma $4k+1$ son primos.

4. Todos los números naturales de la forma $4k + 3$ son primos.

5. El número $2^{11} - 1$ es un ejemplo de un primo de Mersenne.

6. A principios de 2010, solo se habían encontrado cinco primos de Fermat.

7. Obtenga los siguientes dos primos, de la forma $4k + 1$, *no* listados explícitamente en el **ejemplo 3** ***a)***, y expréselos como sumas de cuadrados.

8. Recuerde unos cuantos de los primeros cuadrados perfectos: 1, 4, 9, 16, 25. Intente escribir como la suma de dos cuadrados los números de la forma $4k + 3$ listados en el **ejemplo 3** ***b)***. Luego complete este enunciado: Los primos probados, de la forma $4k + 3$, _____ se expresan como la suma de dos cuadrados. (Fermat afirmó, pero no demostró, que *ningún* primo de la forma $4k + 3$ era la suma de dos cuadrados. Euler lo demostró 100 años más tarde).

9. Explique cuál es el significado de "demostración por contradicción".

10. ¿Prueba el **ejemplo 4** que todos los primos de la forma $4k + 1$ se pueden expresar como la suma de dos cuadrados? Explique por qué.

11. Verifique que la fórmula polinomial de generación de primos de Euler $n^2 - n + 41$ falla al producir el número primo para $n = 41$.

12. Aplique la fórmula polinomial de Euler para: ***a)*** $n = 42$ y ***b)*** $n = 43$.

13. Elija el complemento correcto: Para $n > 41$, la fórmula de Euler _____ genera un primo.

A. nunca **B.** algunas veces **C.** siempre

(*Sugerencia:* Considere que si ningún primo menor que o igual a $\sqrt{n}$ divide a n, entonces n es primo).

14. Recuerde que la fórmula de Escott, $n^2 - 79n + 1601$, falla al generar un primo para $n = 80$. Aplique esta fórmula para $n = 81$ y $n = 82$. Luego complete el siguiente enunciado: Para $n > 80$, la fórmula de Escott _____ produce un primo.

A. nunca **B.** algunas veces **C.** siempre

15. ***a)*** Obtenga el número de Fermat F_4: $2^{2^n} + 1$ para $n = 4$. para $n = 4$.

b) En la búsqueda de los factores primos posibles del número de Fermat del inciso ***a)***, ¿cuál es el factor primo con la potencia más grande que se tendría que intentar? (Como se dijo en el texto, este "quinto" número de Fermat, de hecho, es primo).

16. ***a)*** Verifique el valor proporcionado en el texto para el "sexto" número de Fermat (es decir, $2^{2^5} + 1$).

b) Divida este número de Fermat entre 641. (Euler descubrió esta factorización en 1732, probando que el sexto número de Fermat no es primo).

17. Escriba un breve informe sobre el proyecto Gran búsqueda de números primos de Mersenne por Internet (Great Internet Mersenne Prime Search, GIMPS).

18. Escriba un breve informe identificando el cuadragésimo cuarto y cuadragésimo sexto números primos de Mersenne conocidos, y sobre cómo, cuándo y quién los descubrió.

19. La nota al margen de Mersenne en la **página 145** cita una propuesta de 1644 que no se resolvió totalmente durante 300 años aproximadamente. Averigüe quién y cuándo demostró los cinco errores de Mersenne. (*Sugerencia:* Recuerde que uno se mencionó en la nota al margen de la **página 139**).

20. En la prueba de Euclides de que no existe el primo más grande, formamos un número M tomando el producto de primos y sumando 1. Observe el siguiente patrón.

$M = 2 + 1 = 3$	(3 es primo)
$M = 2 \cdot 3 + 1 = 7$	(7 es primo)
$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$	(31 es primo)
$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$	(211 es primo)
$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$	(2311 es primo)

Parece que este patrón producirá siempre un número primo. Ahora evalúe:

$$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1.$$

21. El valor final de M calculado en el **ejercicio 20** ¿es primo o compuesto? Si es compuesto, dé su primera factorización.

22. Explique en sus propias palabras la demostración de Euclides de que no existe el primo más grande.

Se dijo en el texto que el número M_n de Mersenne es compuesto siempre que n sea compuesto. En los ejercicios 23 a 26 desarrolle una manera para encontrar siempre un factor de tal número de Mersenne.

23. Para el número compuesto $n = 6$, obtenga:

$$M_n = 2^n - 1.$$

24. Observe que $p = 3$ es un factor primo de $n = 6$. Obtenga $2^p - 1$ para $p = 3$. ¿Es $2^p - 1$ un factor de $2^n - 1$?

25. Complete este enunciado: Si p es un factor primo de n, entonces _____ es un factor del número de Mersenne $2^n - 1$.

26. Obtenga $M_n = 2^n - 1$ para $n = 10$.

27. Use el enunciado del **ejercicio 25** para obtener dos factores distintos de M_{10}.

28. ¿Cree usted que este procedimiento siempre producirá factores *primos* de M_n para el compuesto n? (*Sugerencia:* Considere $n = 22$ y su factor primo $p = 11$, y recuerde el enunciado del **ejemplo 5**). Explique.

4.3 TEMAS SELECTOS DE LA TEORÍA DE NÚMEROS

Números perfectos • Números deficientes y números abundantes • Números amigables (amigos) • Conjetura de Goldbach • Primos gemelos • Último teorema de Fermat

Números perfectos

En el **capítulo 1** se presentaron los números figurados, un tema investigado por los pitagóricos, un grupo de matemáticos y músicos griegos que se reunían en secreto. En esta sección examinaremos algunos de los otros números especiales que fascinaron a los pitagóricos y que aún estudian los matemáticos actuales.

Los divisores de un número natural se estudiaron en la **sección 4.1**. Los **divisores propios** de un número natural incluyen todos los divisores del número con excepción del número mismo. Por ejemplo, los divisores propios de 8 son 1, 2 y 4. (8 *no* es un divisor propio de 8).

Cuando el matemático **Albert Wilansky** telefoneó a su cuñado, el señor Smith, observó una propiedad interesante en relación con el número telefónico de este último (493-7775). El número 4,937,775 es compuesto, y su factorización con números primos es

$$3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 65{,}837.$$

Cuando se suman los dígitos del número telefónico, el resultado, 42, es igual a la suma de los dígitos de los factores primos: $3+5+5+6+5+8+3+7=42$. Wilansky llamó a esta cifra **número de Smith**. En 1985 se demostró que existe un número infinito de números de Smith, pero aún existen muchas preguntas sin respuesta acerca de ellos.

Números perfectos

Se dice que un número natural es **perfecto** si es igual a la suma de sus divisores propios.

¿8 es perfecto? No, porque $1+2+4=7$, y $7 \neq 8$. El número mínimo perfecto es 6, porque los divisores propios de 6 son 1, 2 y 3, y

$$1+2+3=6. \quad \text{6 es perfecto.}$$

EJEMPLO 1 Verificación de un número perfecto

Demuestre que 28 es un número perfecto.

SOLUCIÓN

Los divisores propios de 28 son 1, 2, 4, 7 y 14. La suma de estos es 28:

$$1+2+4+7+14=28.$$

Por definición, 28 es perfecto. ■■■

Los números 6 y 28 son los dos números perfectos más pequeños. Los siguientes dos son el 496 y el 8128. El patrón de estos primeros cuatro números perfectos llevó a los primeros autores a conjeturar que:

1. El n-ésimo número perfecto tiene exactamente n dígitos.
2. Los números perfectos pares terminan en los dígitos 6 u 8, de forma alternada.

} Conjeturas NO NECESARIAMENTE VERDADERAS

(Los **ejercicios 39 a 41** le ayudarán a evaluar estas conjeturas).

Aún existen muchas preguntas sin respuesta acerca de los números perfectos. Euclides demostró que lo siguiente es verdadero:

Si 2^n-1 es primo, entonces $2^{n-1}(2^n-1)$ es perfecto, y a la inversa.

Como los valores primos de 2^n-1 son los primos de Mersenne (analizados en la sección anterior), esto significa que para cada nuevo número de Mersenne descubierto, se descubre también otro número perfecto. (Por lo que, en el verano de 2010, también había 47 números perfectos conocidos). También se sabe que lo siguiente es verdadero:

Todos los números perfectos pares tienen la forma $2^{n-1}(2^n-1)$.

Hay razones para sospechar que no existen números perfectos impares. (Cualquier número impar tendría al menos ocho factores primos diferentes y tendría al menos 300 dígitos). Por lo tanto, lo más probable es que Euclides y los antiguos griegos identificaron la forma de todos los números perfectos.

Números deficientes y números abundantes

Vimos que 8 no es perfecto porque no es igual a la suma de sus divisores propios ($8 \neq 7$). Luego definimos dos categorías alternativas de números naturales que *no* son perfectos.

Números deficientes y números abundantes

Un número natural es **deficiente** si es mayor que la suma de sus divisores propios. Es **abundante** si es menor que la suma de sus divisores propios.

Con base en esta definición, un *número deficiente* es uno con divisores propios que suman menos que el número mismo, mientras que un *número abundante* es uno con divisores propios que suman más que el número mismo. Por ejemplo, como los divisores propios de 8 (1, 2 y 4) suman 7, el cual es menor que 8, el número 8 es deficiente.

Se dice que un número es un **número raro** si es abundante sin ser igual a la suma de cualquier conjunto de sus divisores propios. Por ejemplo, 70 es raro porque es abundante ($1+2+5+7+10+14+35=74>70$), pero el conjunto de divisores propios

{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35}

no contiene subconjuntos cuyos elementos sumen 70.

EJEMPLO 2 Identificación de números deficientes y números abundantes

Determine si cada número es deficiente o abundante.

a) 12 ***b)*** 10

SOLUCIÓN

a) Los divisores propios de 12 son 1, 2, 3, 4 y 6. La suma de estos divisores es 16. Como $16>12$, el número 12 es abundante.

b) Los divisores propios de 10 son 1, 2 y 5. Como $1+2+5=8$, y $8<10$, el número 10 es deficiente. ■■■

Números amigables (amigos)

Suponga que sumamos los divisores propios de 284.

$$1+2+4+71+142=220$$

Su suma es igual a 220. Ahora, sume los divisores propios de 220.

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$$

La suma de los divisores propios de 220 es 284, mientras que la suma de los divisores propios de 284 es 220. Se dice que los pares de números con esta propiedad son *amigables* o *amigos*.

Números amigables (amigos)

Los números naturales a y b son **amigables**, o **amigos**, si la suma de los divisores propios de a es igual a b, y la suma de los divisores propios de b es igual a a.

Una ampliación de la idea de números amigables da como resultado los **números sociables**. En una cadena de números sociables, la suma de los divisores propios de cada número es el número siguiente de la cadena, y la suma de los divisores propios del último número de la cadena es el primer número. Aquí se presenta una cadena de 5 eslabones de números sociables.

12,496
14,288
15,472
14,536
14,264.

El número 14,316 inicia una cadena de 28 eslabones de números sociables.

Los pitagóricos descubrieron el par de números amigables más pequeños, 220 y 284, pero no fue sino hasta 1636 que Fermat descubrió el siguiente par, 17,296 y 18,416. Muchos más pares fueron descubiertos durante unas cuantas décadas siguientes, pero fue un joven italiano de 16 años de edad, llamado Nicolo Paganini, quien descubrió en el año 1866 que el par de números amigables 1,184 y 1,210 ¡se había pasado por alto durante siglos!

En la actualidad, computadoras poderosas amplían continuamente las listas de pares amigables conocidos. La última vez que se verificó, se conocían aproximadamente doce millones de pares. Sin embargo, todavía se desconoce si existe una cantidad infinita de pares de estos números. Nadie ha encontrado un par amigable sin factores primos en común, pero no se descarta la posibilidad de encontrar ese par.



¿Un número aburrido? El matemático indio **Srinivasa Ramanujan** (1887-1920) desarrolló muchas ideas de la teoría de números. Su amigo y colaborador ocasional fue G. H. Hardy, también un teórico de los números y profesor de la Universidad de Cambridge en Inglaterra.

Se cuenta una historia acerca de Ramanujan que brinda evidencia de su genio. Hardy mencionó una vez a Ramanujan que acababa de tomar un taxi con un número bastante aburrido: el 1729. Ramanujan lo contradijo diciendo que este número no es aburrido en absoluto; es el número natural más pequeño que se puede expresar como la suma de dos cubos de dos modos diferentes:

$$1^3 + 12^3 = 1729$$

y

$$9^3 + 10^3 = 1729$$

Demuestre que 85 se puede escribir como la suma de dos *cuadrados* de dos maneras diferentes.

Conjetura de Goldbach

El matemático Christian Goldbach (1690-1764) hizo la siguiente conjetura (suposición), la cual constituye uno de los problemas sin resolver más famosos de las matemáticas.

Conjetura de Goldbach (no demostrada)

Todos los números mayores que 2 se pueden escribir como la suma de dos números primos.

Ejemplos: $8 = 5 + 3$

$10 = 5 + 5$ (o $7 + 3$)

Los matemáticos han intentado demostrar la conjetura, pero no han tenido éxito. Sin embargo, la conjetura se ha verificado (a finales de 2010) para números hasta 2×10^{18}.

EJEMPLO 3 Expresión de números como sumas de primos

Escriba cada número par como la suma de dos primos.

a) 18 ***b)*** 60

SOLUCIÓN

a) $18 = 5 + 13$. Otra manera de escribirlo es $7 + 11$. Observe que $1 + 17$ *no* es válido porque, por definición, 1 no es un número primo.

b) $60 = 7 + 53$. ¿Puede encontrar otras soluciones? ¿Por qué $3 + 57$ no es válida? ■■■

Primos gemelos

Los números primos que tienen una diferencia igual a 2 unidades se conocen como **primos gemelos**. Algunos pares de primos gemelos son 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, etcétera. Al igual que la conjetura de Goldbach, la siguiente conjetura acerca de los primos gemelos nunca se ha demostrado.

Conjetura de los primos gemelos (no demostrada)

Existe un número infinito de pares de primos gemelos.



El profesor de matemáticas Gregory Larkin, interpretado por Jeff Bridges, corteja a su colega Rose Morgan (Barbra Streisand) en la película de 1996 *El espejo tiene dos caras* (*The Mirror Has Two Faces*). La investigación y el libro de Larkin se enfocan en la conjetura de los **primos gemelos**, la cual mencionó correctamente en la escena de una comida. Él se sorprendió de que su amiga que no es matemática entienda realmente de lo que está hablando.

Tal vez usted desee verificar que existen ocho de estos pares menores que 100, usando la criba de Eratóstenes de la **tabla 1**. En el verano de 2010, los primos gemelos más grandes conocidos eran

$$65{,}516{,}468{,}355 \cdot 2^{333{,}333} \pm 1.$$ Cada uno tiene 100,355 dígitos.

Recuerde de la **sección 4.2** que la prueba de Euclides de la infinitud de los primos usaba números de la forma:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots \cdot p_n + 1,$$

donde todas las p son primos. Parecería que cualquiera de estos números debe ser primo, pero no es así. (Véase los **ejercicios 20 y 21** de la **sección 4.2**). No obstante, esta forma produce con frecuencia números primos (como lo hace la misma forma, con el signo + sustituido por un signo −). Cuando están incluidos *todos* los primos hasta llegar a p_n, los números resultantes, si son primos, se conocen como **primos primoriales**. Se denotan como:

$$p\# \pm 1.$$

Por ejemplo, $5\# + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ es un primo primorial. (A finales de 2010, el primo primorial más grande conocido era $392{,}113\# + 1$, un número con 169,966 dígitos). Los primos primoriales se usan comúnmente para buscar primos gemelos.



Sophie Germain (1776-1831) estudió en la Escuela Politécnica de París en una época en que no se admitía a mujeres como estudiantes. Un **primo de Sophie Germain** es un primo p para el cual $2p+1$ también es primo. Últimamente, se ha descubierto una gran cantidad de primos de Sophie Germain a razón de uno o más por año. A finales de 2010, el más grande conocido era $183{,}027 \cdot 2^{85{,}440} - 1$, el cual tiene 79,911 dígitos.

Fuente: www.utm.edu

EJEMPLO 4 Verificación de primos gemelos

Verifique que la fórmula primorial $p\# \pm 1$ produce pares de primos gemelos tanto para ***a)*** $p = 3$ como para ***b)*** $p = 5$.

SOLUCIÓN

a) $3\# \pm 1 = 2 \cdot 3 \pm 1 = 6 \pm 1 = 5$ y 7 Primos gemelos

Multiplique, luego sume y reste.

b) $5\# \pm 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \pm 1 = 30 \pm 1 = 29$ y 31 Primos gemelos ▮▮▮

Último teorema de Fermat

En cualquier triángulo rectángulo con los lados más cortos (catetos) identificados como a y b, y el lado más grande (hipotenusa) como c, la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ es verdadera. Este es el famoso teorema de Pitágoras. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 && a = 3, b = 4, c = 5 \\ 9 + 16 &= 25 && \text{Se aplican los exponentes} \\ 25 &= 25. && \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Se sabe que existe un número infinito de tripletas (a, b, c) que satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$. Pero, ¿sucede algo similar con la ecuación

$$a^n + b^n = c^n$$

para números naturales $n \geq 3$? Pierre de Fermat, cuyo perfil se encuentra en la nota al margen de la **página 158**, pensaba que no solo no existía un número infinito de estas tripletas, sino que, de hecho, no existía ninguna. Hizo la siguiente afirmación en el siglo XVII.

Último teorema de Fermat (demostrado en la década de 1990)

Para *cualquier* número natural $n \geq 3$, *no* existen tripletas (a, b, c) que satisfagan la ecuación

$$a^n + b^n = c^n.$$



La popular serie animada de televisión *Los Simpson* no solo incluye humor y comentarios sociales, sino también lecciones de matemáticas. Un episodio describe la ecuación

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12},$$

la cual, de acuerdo con el último **teorema de Fermat**, no puede ser verdadera. Su calculadora puede indicar que la ecuación es verdadera, pero esto se debe a que no puede desplegar con precisión las potencias de este tamaño. En realidad, 1782^{12} es un número *par*, porque *un número par elevado a cualquier potencia es par*. Por otro lado, 1841^{12} debe ser *impar* porque *un número impar elevado a cualquier potencia es impar*. De modo que la suma de la izquierda debe ser *impar*, porque

par + impar = impar.

De manera análoga, 1922^{12} debe ser *par*. Entonces la ecuación establece que un número impar es igual a un número par, lo cual es imposible.
(Véase www.simpsonsmath.com)

La aseveración de Fermat fue el foco de atención de los matemáticos durante unos 350 años para encontrar una demostración adecuada. Mientras que se verificó para muchos casos específicos (Fermat mismo lo hizo para $n = 3$), no se encontraría una demostración del caso general sino hasta que el matemático de Princeton, Andrew Wiles, hiciera el anuncio en la primavera de 1993. Aun cuando se descubrieron algunas fallas en su argumento, Wiles logró corregir e incluso mejorar la demostración en el verano de 1994.

Probablemente existían unos 100 matemáticos alrededor del mundo calificados para entender la demostración de Wiles. ***Actualmente el último teorema de Fermat es reconocido por la comunidad matemática como oficialmente demostrado.***

EJEMPLO 5 Aplicación de un teorema probado por Fermat

Uno de los teoremas probados legítimamente por Fermat es el siguiente:

Todos los primos impares se pueden expresar como la diferencia de dos cuadrados de una y solo una manera.

Exprese cada primo impar como la diferencia de dos cuadrados.

a) 3 ***b)*** 7

SOLUCIÓN

a) $3 = 4 - 1 = 2^2 - 1^2$ ***b)*** $7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$ ▮▮▮

Para reflexionar

Curioso e interesante

Uno de los libros más notables en teoría de números es *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* (1986) de David Wells. Este libro describe números fascinantes y sus propiedades, incluyendo lo siguiente.

- Existen solo tres conjuntos de tres dígitos que forman números primos en todos los arreglos posibles: {1, 1, 3}, {1, 9, 9}, {3, 3, 7}.
- Calcule la suma de los cubos de los dígitos de 136:

$$1^3 + 3^3 + 6^3 = 244.$$

Repita el proceso con los dígitos de 244:

$$2^3 + 4^3 + 2^3 = 136.$$

Volvimos al punto de inicio.

- 635,318,657 es el número más pequeño que se puede expresar como la suma de dos potencias a la cuarta de dos maneras:

$$635{,}318{,}657 = 59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4.$$

- El número 24,678,050 tiene una propiedad interesante:

$$24{,}678{,}050 = 2^8 + 4^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8 + 0^8 + 5^8 + 0^8.$$

- El número 54,748 tiene una propiedad similar interesante:

$$54{,}748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5.$$

- El número 3435 tiene esta propiedad:

$$3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5.$$

Este libro es para todo aquel cuya curiosidad se estimula con tales hechos.

Para investigación individual o en grupo

Cada estudiante de la clase tiene que seleccionar un número de tres dígitos que sea múltiplo de 3. Deberán sumar los cubos de los dígitos. Se repite el proceso hasta que se obtiene el mismo número una y otra vez. Luego, los estudiantes deben comparar sus resultados. ¿Qué es lo curioso e interesante de este proceso?

4.3 EJERCICIOS

Indique si cada enunciado de los ejercicios 1 a 10 es verdadero *o* falso.

1. Existe un número infinito de números primos.

2. Los números primos 2 y 3 son primos gemelos.

3. No existe un número perfecto entre 496 y 8128.

4. $2^n - 1$ es primo si y solo si $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto.

5. Cualquier número primo debe ser deficiente.

6. La ecuación $17 + 51 = 68$ verifica la conjetura de Goldbach para el número 68.

7. Existen más números primos de Mersenne conocidos que números perfectos conocidos.

8. El número 31 no se puede representar como la diferencia de dos cuadrados.

9. El número $2^6(2^7 - 1)$ es perfecto.

10. Cualquier número natural mayor que 1 tiene uno y solo uno de los siguientes atributos: perfecto, deficiente o abundante.

11. Los divisores propios de 496 son 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 y 248. Use esta información para verificar que 496 es perfecto.

12. Los divisores propios de 8128 son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032 y 4064. Use esta información para verificar que 8128 es perfecto.

13. Como se menciona en el texto, cuando $2^n - 1$ es primo,

$$2^{n-1}(2^n - 1)$$

es perfecto. Si $n = 2, 3, 5$ y 7, se obtienen los primeros cuatro números perfectos. Demuestre que $2^n - 1$ es primo para $n = 13$, y luego obtenga su representación decimal para el quinto número perfecto.

14. En el verano de 2010, el número primo conocido más grande era $2^{43{,}112{,}609} - 1$. Use la fórmula del **ejercicio 13** para escribir una expresión para el número perfecto generado por este número primo.

15. Se ha comprobado que los recíprocos de *todos* los divisores positivos de un número perfecto suman 2. Verifique esto para el número perfecto 6.

16. Considere las siguientes ecuaciones.

$$6 = 1 + 2 + 3$$
$$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

Demuestre que una ecuación similar es válida para el tercer número perfecto, el 496.

Determine si cada número es abundante *o* deficiente.

17. 45 **18.** 48

19. 88 **20.** 64

21. Existen cuatro números abundantes entre 1 y 25. Encuéntrelos. (*Sugerencia:* Considere que todos son pares, y ningún número primo es abundante).

22. Explique por qué un número primo debe ser deficiente.

23. El primer número abundante impar es 945. Sus divisores propios son 1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 27, 35, 45, 63, 105, 135, 189 y 315. Use esta información para verificar que 945 es abundante.

24. Explique con sus propias palabras los términos *número perfecto*, *número abundante* y *número deficiente*.

25. Los números de Nicolo Paganini 1184 y 1210 son amigables. Los divisores propios de 1184 son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296 y 592. Los divisores propios de 1210 son 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242 y 605. Use la definición de números amigables (amigos) para demostrar que son claramente amigables.

26. Un matemático árabe del siglo IX estableció lo siguiente.
Si los tres números

$$x = 3 \cdot 2^{n-1} - 1,$$

$$y = 3 \cdot 2^{n} - 1,$$

y

$$z = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1,$$

son primos y $n \geq 2$, entonces $2^n xy$ y $2^n z$ son números amigables.

a) Use $n = 2$, y demuestre que el resultado es el par más pequeño de los números amigables, es decir, 220 y 284.

b) Use $n = 4$ para obtener otro par de números amigables.

Escriba cada número par como la suma de dos primos. (Puede haber más de una manera de hacer esto).

27. 16 **28.** 20

29. 30 **30.** 34

31. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) conjeturó que todos los números naturales impares mayores que 5 se pueden escribir como la suma $a + 2b$, donde a y b son primos.

a) Verifique esto para el número natural impar 11.

b) Verifique que el número natural impar 17 se puede escribir en esta forma de cuatro diferentes maneras.

32. Otra conjetura sin demostrar en la teoría de números establece que todos los números naturales múltiplos de 6 se pueden escribir como la diferencia de dos primos. Verifique esto para 6, 12 y 18.

Obtenga un par de primos gemelos entre los dos números proporcionados.

33. 30, 50 **34.** 85, 105

Aun cuando Pierre de Fermat es probablemente más conocido por su ahora famoso "último teorema", efectuó demostraciones de otros muchos teoremas de la teoría de números. Los ejercicios 35 a 38 permiten indagar algunos de estos teoremas.

35. Si p es primo y los números naturales a y p no tienen un factor común con excepción de 1, entonces $a^{p-1} - 1$ es divisible entre p.

a) Verifique esto para $p = 5$ y $a = 3$.

b) Verifique esto para $p = 7$ y $a = 2$.

36. Todos los primos impares se pueden expresar como la diferencia de dos cuadrados de una y solo de una manera.

a) Encuentre esta manera para el número primo 5.

b) Encuentre esta manera para el número primo 11.

37. En números naturales solo existe una solución para $a^2 + 2 = b^3$, la cual es $a = 5, b = 3$. Verifique esta solución.

38. En enteros solo existen dos soluciones para $a^2 + 4 = b^3$. Una solución es $a = 2, b = 2$. Obtenga la otra solución.

En el texto se identificaron los primeros cuatro números perfectos: 6, 28, 496 y 8128. *Los dos siguientes son* 33,550,336 *y* 8,589,869,056. *Con base en esta información de los números perfectos, resuelva los ejercicios 39 a 41.*

39. Verifique que cada uno de estos seis números perfectos termina en 6 o en 28. (De hecho, esto es verdadero para todos los números perfectos pares).

40. ¿La conjetura (1) del texto (de que el n-ésimo número perfecto contiene exactamente n dígitos) es verdadera o falsa? Explique.

41. ¿La conjetura (2) del texto (de que los números perfectos pares terminan en los dígitos 6 y 8 de manera alternada) es verdadera o falsa? Explique.

De acuerdo con el sitio Web www.shyamsundergupta.com/amicable.htm, un número natural es ***feliz*** *si el proceso repetitivo de sumar los cuadrados de sus dígitos finalmente termina en* 1. *Por ejemplo, el número natural más pequeño (mayor que* 1*) que es feliz es* 7, *como se muestra aquí.*

$$7^2 = 49, \quad 4^2 + 9^2 = 97, \quad 9^2 + 7^2 = 130,$$

$$1^2 + 3^2 + 0^2 = 10, \quad 1^2 + 0^2 = 1.$$

Un par amigable es un ***par amigable feliz*** *si y solo si ambos miembros que integran el par son números felices. (Los primeros 5000 pares amigables incluyen solo* 111 *pares amigables felices). Para cada par amigable, determine si ninguno, uno o ambos de sus miembros son felices, y si el par es un par amigable feliz.*

42. 220 y 284 **43.** 1184 y 1210

44. 10,572,550 y 10,854,650

45. 35,361,326 y 40,117,714

46. Si los antiguos griegos conocían la forma de todos los números perfectos pares, $2^{n-1}(2^n-1)$, entonces ¿por qué no descubrieron todos los que se conocen en la actualidad?

47. Explique por qué la fórmula primorial $p\# \pm 1$ no produce un par de primos gemelos para el valor primo $p = 2$.

48. ***a)*** ¿Cuáles son los dos números que produce la fórmula primorial para $p = 7$?

b) ¿Cuál, si es el caso, de estos números es primo?

49. Elija el complemento correcto: La fórmula primorial _____ produce primos gemelos.

A. nunca **B.** algunas veces **C.** siempre

Vea la nota al margen (de la ***página 152****) que define un primo de Sophie Germain, y complete esta tabla.*

	p	$2p + 1$	¿Es p un primo de Sophie Germain?
50.	2	____	____
51.	3	____	____
52.	5	____	____
53.	7	____	____
54.	11	____	____
55.	13	____	____

Los ***primos factoriales*** *son de la forma $n! \pm 1$ para números naturales n. ($n!$ significa "n factorial", es decir, el producto de todos los números naturales hasta n, no solo los primos como en los primos primoriales. Por ejemplo, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$). A finales de 2010, el primo factorial más grande verificado era $34{,}790! - 1$, el cual tiene 142,891 dígitos. Obtenga los datos faltantes en esta tabla.*

	n	$n!$	$n! - 1$	$n! + 1$	¿Es $n! - 1$ un primo factorial?	¿Es $n! + 1$ un primo factorial?
	2	2	1	3	no	sí
56.	3	____	____	____	____	____
57.	4	____	____	____	____	____
58.	5	____	____	____	____	____

59. Explique por qué la fórmula del primo factorial no da primos gemelos para $n = 2$.

Con base en la tabla anterior, complete cada enunciado con una de las siguientes opciones:

A. *nunca* **B.** *algunas veces* **C.** *siempre*

Cuando se aplica a valores específicos de n, la fórmula del primo factorial $n! \pm 1$ produce

60. ningún primo _____ **61.** exactamente un primo _____

62. primos gemelos _____

4.4 MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Máximo común divisor • Mínimo común múltiplo

Máximo común divisor

El *máximo común divisor* se define como sigue.

Máximo común divisor

El **máximo común divisor (MCD)** de un grupo de números naturales es el número natural más grande que es factor de todos los números del grupo.

Ejemplos: 18 es el MCD de 36 y 54, porque 18 es el número natural más grande que divide tanto a 36 como a 54.

1 es el MCD de 7 y 16.

El máximo común divisor también se conoce como *máximo factor común*, y se simboliza como MCD o MFC.

El máxico común divisor se puede obtener usando factorizaciones con números primos. Para determinar el MCD de 36 y 54, se realiza primero la factorización con números primos de cada número (usando quizás árboles de factores o división repetitiva).

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$54 = 2^1 \cdot 3^3$$

El MCD es el producto de los primos comunes de las factorizaciones, con cada primo elevado a la potencia indicada por el exponente *mínimo* que tiene en cualquier factorización. Aquí, el primo 2 tiene 1 como exponente mínimo (en $54 = 2^1 \cdot 3^3$), mientras que el primo 3 tiene 2 como exponente mínimo (en $36 = 2^2 \cdot 3^2$).

$$\text{MCD} = 2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

Resumimos como sigue.

Obtención del máximo común divisor (método de factores primos)

Paso 1 Obtenga la factorización con números primos de cada número.

Paso 2 Elija todos los primos comunes de *todas* las factorizaciones, con cada primo elevado al exponente *mínimo* que tiene en cualquier factorización.

Paso 3 Realice el producto de todos los números del paso 2. Este producto es el máximo común divisor.

EJEMPLO 1 Obtención del máximo común divisor por el método de factores primos

Obtenga el máximo común divisor de 360 y 2700.

SOLUCIÓN

Se obtiene la factorización con números primos de cada número.

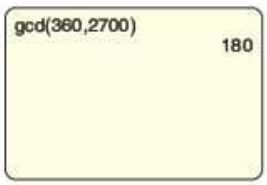
$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \qquad 2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

Se localizan los primos comunes de ambas factorizaciones, con cada primo teniendo como exponente el exponente *mínimo* de cada producto.

Use los exponentes mínimos.

$$\text{MCD} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

El máximo común divisor de 360 y 2700 es 180.



La calculadora muestra que el máximo común divisor (factor) de 360 y 2700 es 180. Compárelo con el resultado del **ejemplo 1.**

EJEMPLO 2 Obtención del máximo común divisor por el método de factores

Obtenga el máximo común divisor de 720, 1000 y 1800.

SOLUCIÓN

Se obtiene la factorización con números primos de cada número.

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$1000 = 2^3 \cdot 5^3$$
$$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

Se usa el exponente más pequeño de cada primo común de las factorizaciones.

$$\text{MCD} = 23 \cdot 5 = 40$$

(No se usa el primo 3 en el cálculo del máximo común divisor porque no aparece en la factorización con números primos de 1000).

EJEMPLO 3 Obtención del máximo común divisor por el método de factores

Obtenga el máximo común divisor de 80 y 63.

SOLUCIÓN

$$80 = 2^4 \cdot 5$$
$$63 = 3^2 \cdot 7$$

Aquí no hay primos comunes, de modo que el MCD es 1. El número 1 es el número más grande que divide tanto a 80 como a 63. ■■■

Dos números, como 80 y 63, con un máximo común divisor igual a 1 se conocen como **primos relativos**, es decir, son primos *relacionados* uno con otro. (No tienen más factores comunes que 1).

Otro método para obtener el máximo común divisor implica dividir los números entre los factores primos comunes.

Obtención del máximo común divisor (método de división entre los factores primos)

Paso 1 Escriba los números en una fila.

Paso 2 Divida cada uno de los números entre un factor primo común. Intente con 2, luego intente con 3, y así sucesivamente.

Paso 3 Divida los cocientes entre un factor primo común. Continúe hasta que ningún primo divida a todos los dígitos del cociente.

Paso 4 El producto de los primos de los pasos 2 y 3 es el máximo común divisor.

EJEMPLO 4 Obtención del máximo común divisor por división entre los factores primos

Obtenga el máximo común divisor de 12, 18 y 60.

SOLUCIÓN

Escriba los números en una fila y divídalos entre 2.

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 12 & 18 & 60 \\ \hline & 6 & 9 & 30 \end{array}$$

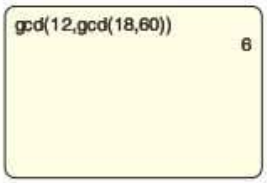
No todos los números considerados, 6, 9 y 30, son divisibles entre 2, pero son divisibles entre 3.

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 12 & 18 & 60 \\ 3 & 6 & 9 & 30 \\ \hline & 2 & 3 & 10 \end{array}$$

Ningún número primo divide los números 2, 3 y 10, de modo que el máximo común divisor de los números 12, 18 y 60 está dado por el producto de los primos de la izquierda, 2 y 3.

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 12 & 18 & 60 \\ 3 & 6 & 9 & 30 \\ \hline & 2 & 3 & 10 \end{array}$$
$$2 \cdot 3 = 6$$

El MCD de 12, 18 y 60 es 6. ■■■



Esta pantalla considera el hecho de que gcd(*a*, *b*, *c*) = gcd(*a*,gcd(*b*, *c*)). Compare con el **ejemplo 4**. *Nota:* En la calculadora, la función para obtener el MCD se denota por gcd (*greatest common divisor*).



Pierre de Fermat (alrededor de 1601-1665) fue un oficial gubernamental que no se interesó por las matemáticas sino hasta después de los 30 años de edad, cuando comenzó a dedicar su tiempo libre a su estudio. Fue un erudito, mejor conocido por su trabajo en la teoría de números. Otra contribución importante se relaciona con ciertas aplicaciones en geometría y su original trabajo en probabilidades.

La mayoría de los mejores trabajos de Fermat se conservaron en hojas separadas o en anotaciones, sin pruebas, en los márgenes de los libros que leía.

Otro método para obtener el máximo común divisor de dos números (pero no más de dos) se conoce como el **algoritmo euclidiano.***

EJEMPLO 5 Obtención del máximo común divisor usando el algoritmo euclidiano

Use el algoritmo euclidiano para obtener el máximo común divisor de 90 y 168.

SOLUCIÓN

Paso 1 Comience dividiendo el número más grande, el 168, entre el más pequeño, el 90. Se ignora el cociente, pero se anota el residuo.

Paso 2 Divida el número más pequeño de los dos entre el residuo obtenido en el paso 1. Una vez más, se anota el residuo.

Paso 3 Continúe dividiendo los residuos sucesivos tantas veces como sea necesario para obtener un residuo igual a 0.

Paso 4 El *último residuo positivo* de este proceso es el máximo común divisor de 90 y 168. Se puede ver que su MCD es 6.

$$
\begin{array}{r}
1 \\
90\overline{)168} \\
\underline{90} \\
78 \\
1 \\
78\overline{)90} \\
\underline{78} \\
12 \\
6 \\
12\overline{)78} \\
\underline{72} \\
6 \quad \text{Máximo común divisor} \\
2 \\
6\overline{)12} \\
\underline{12} \\
0
\end{array}
$$

El algoritmo de Euclides es particularmente útil si los dos números son difíciles de factorizar con números primos. Aquí se resume el algoritmo.

Obtención del máximo común divisor (algoritmo euclidiano)

Para obtener el máximo común divisor de dos números diferentes, se divide el más grande entre el más pequeño. Se anota el residuo y se divide el divisor anterior entre este residuo. Continúe el proceso hasta obtener un residuo igual a 0. El máximo común divisor es el último residuo positivo obtenido.

Mínimo común múltiplo

El concepto del *mínimo común múltiplo* está estrechamente relacionado con la idea del máximo común divisor.

Mínimo común múltiplo

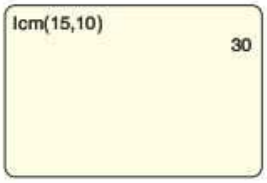
El **mínimo común múltiplo (MCM)** de un grupo de números naturales es el número natural más pequeño que es múltiplo de todos los números del grupo.

Ejemplo: 30 es el MCM de 15 y 10 porque 30 es el número más pequeño que aparece en ambos conjuntos de múltiplos.

Múltiplos de 15: {15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, . . .}

Múltiplos de 10: {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, . . .}

*Para conocer la demostración de que este proceso produce claramente el máximo común divisor, véase *Elementary Introduction to Number Theory*, 2a. edición, de Calvin T. Long, pp. 34-35.



El mínimo común múltiplo de 15 y 10 es 30. *Nota:* lcm significa mínimo común múltiplo (*least common multiple*).

El conjunto de números naturales que son múltiplos *tanto* de 15 *como* de 10 forma el conjunto de *múltiplos comunes*:

$$\{30, 60, 90, 120, \ldots\}.$$

Aunque existe un número infinito de múltiplos comunes, se observa que el *mínimo* común múltiplo es 30.

Para calcular el mínimo común múltiplo de un grupo de números, se puede usar un método similar al primero que se presentó para obtener el máximo común divisor.

Obtención del mínimo común múltiplo (método de factores primos)

Paso 1 Obtenga la factorización con números primos de cada número.

Paso 2 Elija todos los primos pertenecientes a *cualquiera* de las factorizaciones, con cada primo elevado a la potencia indicada por el exponente *más grande*.

Paso 3 Desarrolle el producto de todos los números del paso 2. Este producto es el mínimo común múltiplo.

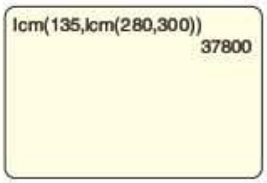
EJEMPLO 6 Obtención del mínimo común múltiplo por el método de factores primos

Obtenga el mínimo común múltiplo de 135, 280 y 300.

SOLUCIÓN

Se escriben las factorizaciones con números primos:

$$135 = 3^3 \cdot 5, \qquad 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \qquad \text{y} \qquad 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2.$$



El mínimo común múltiplo de 135, 280 y 300 es 37,800. Compare con el **ejemplo 6.**

Realice el producto de todos los primos que aparecen en *cualquiera* de las factorizaciones. Use el exponente *más grande* de cualquiera de las factorizaciones.

Use los exponentes más grandes.

$$\text{MCM} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 37{,}800$$

El número natural mínimo divisible entre 135, 280 y 300 es 37,800.

El mínimo común múltiplo de un grupo de números también se puede obtener dividiendo entre los factores primos. El proceso es ligeramente diferente del que se aplica para la obtención del MCD.

Obtención del mínimo común múltiplo (método de división entre factores primos)

Paso 1 Escriba los números en una fila.

Paso 2 Divida cada uno de los números entre un factor primo común. Intente con 2, luego con 3, y así sucesivamente.

Paso 3 Divida los cocientes entre un factor primo común. Cuando ningún primo divida a todos los cocientes, pero un primo divida a alguno de ellos, divida hasta donde sea posible y baje el cociente no divisible. Continúe hasta que ningún primo divida a ninguno de los dos cocientes.

Paso 4 El producto de todos los divisores primos de los pasos 2 y 3, así como de todos los cocientes remanentes, es el mínimo común múltiplo.

EJEMPLO 7 Obtención del mínimo común múltiplo mediante la división entre los factores primos

Obtenga el mínimo común múltiplo de 12, 18 y 60.

SOLUCIÓN

Proceda exactamente como en el **ejemplo 4** para obtener lo siguiente.

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 12 & 18 & 60 \\ \hline 3 & 6 & 9 & 30 \\ \hline & 2 & 3 & 10 \end{array}$$

Ahora, aun cuando ningún primo divide a 2, 3 y 10, el primo 2 divide a 2 y a 10. Se divide el 2 y el 10 y se baja el 3.

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 12 & 18 & 60 \\ \hline 3 & 6 & 9 & 30 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 10 \\ \hline & 1 & 3 & 5 \end{array} \qquad 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = 180$$

El MCM de 12, 18 y 60 es 180. ■■■

En cursos más avanzados se demuestra que el mínimo común múltiplo de dos números m y n se puede obtener dividiendo su producto entre su máximo común divisor.

Obtención del mínimo común múltiplo (fórmula)

El mínimo común múltiplo de m y n se puede calcular como sigue.

$$\textbf{MCM} = \frac{m \cdot n}{\textbf{MCD de } m \textbf{ y } n}$$

(Este método funciona solo para dos números, no para más de dos).

EJEMPLO 8 Obtención del mínimo común múltiplo por fórmula

Use la fórmula para obtener el mínimo común múltiplo de 90 y 168.

SOLUCIÓN

En el **ejemplo 5** se usó el algoritmo euclidiano para obtener el máximo común divisor de 90 y 168, esto es, 6. Por lo tanto, la fórmula nos da

$$\text{Mínimo común múltiplo de 90 y 168} = \frac{90 \cdot 168}{6} = 2520. \qquad \blacksquare\blacksquare\blacksquare$$

```
(90*168)/gcd(90,168)
                2520
```

Esto apoya el resultado del **ejemplo 8.**

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Los problemas que implican preguntas como "¿Cuántos objetos hay en cada grupo si cada grupo contiene el mismo número de objetos?" y "¿Cuándo ocurrirán al mismo tiempo dos sucesos?" pueden resolverse algunas veces usando las ideas del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

EJEMPLO 9 Obtención de tiempos de inicio comunes de ciclos de películas

El King Theatre y el Star Theatre proyectan películas continuamente, y cada uno inicia su primera presentación a la 1:00 P.M. Si la película proyectada en el King dura 80 minutos y la película proyectada en el Star dura 2 horas, ¿cuándo iniciarán nuevamente las dos películas al mismo tiempo?

SOLUCIÓN

Primero, se convierten las dos horas a 120 minutos. La pregunta se puede reformular como sigue: "¿Cuál es el menor número de minutos que pasarán para que las dos películas inicien nuevamente al mismo tiempo?". Esto es equivalente a preguntar "¿cuál es el mínimo común múltiplo de 80 y 120?".

Usando cualquiera de los métodos descritos en esta sección, se obtiene que el mínimo común múltiplo de 80 y 120 es 240. Por lo tanto, transcurrirán 240 minutos, o $\frac{240}{60} = 4$ horas para que las películas inicien nuevamente al mismo tiempo. Sumando 4 horas a 1:00 P.M., calculamos que iniciarán juntas nuevamente a las 5:00 P.M. ■■■

EJEMPLO 10 Obtención del tamaño común máximo de una pila de tarjetas



Joshua Hornsby tiene 450 tarjetas de futbol y 840 de béisbol. Él quiere colocarlas en pilas sobre una mesa de modo que cada pila de tarjetas tenga el mismo número, y que ninguna pila tenga diferentes tipos de tarjetas. ¿Cuál es el máximo número de tarjetas que puede tener en cada pila?

SOLUCIÓN

Aquí estamos buscando el número más grande que dividirá tanto a 450 como a 840. Este es, por supuesto, el máximo común divisor de 450 y 840. Usando cualquiera de los métodos descritos en esta sección, encontramos que

máximo común divisor de 450 y 840 = 30.

Por lo tanto, el máximo número de tarjetas que puede tener en cada pila es 30. ■■■

4.4 EJERCICIOS

Determine si cada enunciado es verdadero *o* falso.

1. Dos números naturales pares no pueden ser primos relativos.
2. Dos números primos diferentes son primos relativos.
3. Si p es un número primo, entonces el máximo común divisor de p y p^2 es p.
4. Si p es un número primo, entonces el mínimo común múltiplo de p y p^2 es p^3.
5. No existe un número primo p tal que el máximo común divisor de p y 2 sea 2.
6. El conjunto de todos los múltiplos comunes de dos números naturales determinados es finito.
7. Dos números naturales tienen al menos un factor común.
8. El mínimo común múltiplo de dos primos diferentes es su producto.
9. Dos números compuestos pueden ser primos relativos.
10. El conjunto de todos los factores comunes de dos números naturales determinados es finito.

Use el método de los factores primos para obtener el máximo común divisor de cada grupo de números.

11. 60 y 140
12. 400 y 110
13. 540 y 1200
14. 136 y 544
15. 52, 39 y 78
16. 138, 184 y 437

Use el método de división entre factores primos para obtener el máximo común divisor de cada grupo de números.

17. 72 y 90
18. 166 y 415
19. 410 y 360
20. 384 y 222
21. 12, 18 y 36
22. 450, 1155 y 630

Use el algoritmo euclidiano para obtener el máximo común divisor de cada grupo de números.

23. 32 y 56

24. 35 y 60

25. 24 y 108

26. 72 y 126

27. 480 y 400

28. 280 y 360

29. Explique, en sus propias palabras, cómo obtener el máximo común divisor de un grupo de números.

30. Explique, en sus propias palabras, cómo obtener el mínimo común múltiplo de un grupo de números.

Use el método de factores primos para obtener el mínimo común múltiplo de cada grupo de números.

31. 54 y 30

32. 12 y 32

33. 90 y 50

34. 28 y 70

35. 30, 40 y 70

36. 24, 36 y 48

Use el método de división entre factores primos para obtener el mínimo común múltiplo de cada grupo de números.

37. 24 y 32

38. 35 y 56

39. 45 y 75

40. 48, 54 y 60

41. 16, 120 y 216

42. 210, 385 y 2310

Use la fórmula proporcionada en la ***página 160*** *del texto y los resultados de los* ***ejercicios 23 a 28*** *para obtener el mínimo común múltiplo de cada grupo de números.*

43. 32 y 56

44. 35 y 60

45. 24 y 108

46. 72 y 126

47. 480 y 400

48. 280 y 360

49. Si p, q y r son primos diferentes, y a, b y c son números naturales tales que $a > b > c$,

a) ¿cuál es el máximo común divisor de $p^a q^c r^b$ y $p^b q^a r^c$?

b) ¿cuál es el mínimo común múltiplo de $p^b q^a$, $q^b r^c$ y $p^a r^b$?

50. Obtenga ***a)*** el máximo común divisor y ***b)*** el mínimo común múltiplo de $2^{31} \cdot 5^{17} \cdot 7^{21}$ y $2^{34} \cdot 5^{22} \cdot 7^{13}$. Obtenga sus respuestas en forma de primos factorizados.

Es posible ampliar el algoritmo euclidiano para obtener el máximo común divisor de más de dos números. Por ejemplo, si queremos obtener el máximo común divisor de 150, 210 *y* 240, *primero se usa el algoritmo para obtener el máximo común divisor de dos de estos (digamos, por ejemplo,* 150 *y* 210*). Luego obtenemos el máximo común divisor de ese resultado y el tercer número, el* 240. *El resultado final es el máximo común divisor del grupo original de números.*

Utilice el algoritmo euclidiano, tal como se acaba de describir, para obtener el máximo común divisor de cada grupo de números.

51. 150, 210 y 240

52. 12, 75 y 120

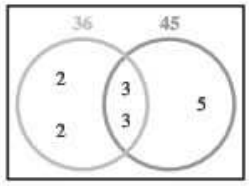
53. 90, 105 y 315

54. 48, 315 y 450

55. 144, 180 y 192

56. 180, 210 y 630

*Si permitimos repeticiones de factores primos, podemos usar diagramas de Venn (**capítulo 2**) para obtener el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números. Por ejemplo, considere* $36 = 2^2 \cdot 3^2$ *y* $45 = 3^2 \cdot 5$. *Su máximo común divisor es* $3^2 = 9$, *y su mínimo común múltiplo es* $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.



La intersección da 3, 3.
La unión da 2, 2, 3, 3, 5.

Use este método para obtener ***a)*** *el máximo común divisor y* ***b)*** *el mínimo común múltiplo de los dos números dados.*

57. 12 y 18

58. 27 y 36

59. 54 y 72

60. Suponga que el mínimo común múltiplo de p y q es q. ¿Qué puede decir acerca de p y q?

61. Suponga que el mínimo común múltiplo de p y q es pq. ¿Qué puede decir acerca de p y q?

62. Suponga que el máximo común divisor de p y q es p. ¿Qué puede decir acerca de p y q?

63. Recuerde alguna de sus primeras experiencias en matemáticas (por ejemplo, en el salón de clases de primaria). ¿Qué tema relacionado con fracciones requería el uso del mínimo común múltiplo? Dé un ejemplo.

64. Recuerde alguna de sus experiencias de álgebra elemental. ¿Qué temas requerían el uso del máximo común divisor? Dé un ejemplo.

Remítase a los ***ejemplos 9 y 10*** *para resolver cada problema.*

65. ***Inspección de calculadoras*** Karen Helfrich y Dorelle Less trabajan en una línea de ensamble, inspeccionando calculadoras electrónicas. Karen inspecciona la electrónica de cada decimosexta calculadora, mientras que Dorelle inspecciona el armado de cada trigésimo sexta calculadora. Si ambas inician el trabajo al mismo tiempo, ¿cuál calculadora será la primera que inspeccionen ambas?

66. ***Noche libre de guardias de seguridad*** Ross Craycraft y Jody Campbell trabajan como guardias de seguridad en una compañía de publicidad. Ross tiene libre cada sexta noche, y Jody descansa cada décima noche. Si ambos están libres el 1 de julio, ¿cuál es la siguiente noche que estarán libres al mismo tiempo?

67. ***Pilas de monedas*** Lucy Bannister tiene 240 monedas de un centavo y 288 monedas de 5 centavos. Ella quiere colocar todas las monedas en pilas de modo que cada pila tenga el mismo número de monedas, y solo monedas de una denominación. ¿Cuál es el número más grande de monedas que puede colocar en cada pila?

68. ***Carrera de bicicletas*** Whitney Baer y Kim Davison participan en una carrera de bicicletas, siguiendo una pista circular. Si inician en el mismo lugar y viajan en la misma dirección, y Whitney completa una vuelta cada 40 segundos, en tanto que Kim completa una vuelta cada 45 segundos, ¿cuánto tiempo transcurrirá antes de que alcancen el punto de partida de forma simultánea?

69. ***Venta de libros*** Scott Day vendió algunos libros en $24 cada uno, y usó el dinero para comprar boletos para un concierto a $50 cada uno. No le quedó dinero después de comprar los boletos. ¿Cuál es la mínima cantidad de dinero que ganó de la venta de libros? ¿Cuál es el mínimo número de libros que pudo haber vendido?

70. ***Corte de madera*** Terri Edwards tiene algunas piezas de madera de dos por cuatro pulgadas. Algunas tienen 60 pulgadas de largo y otras 72. Todas deben cortarse en piezas más pequeñas. Si todas las piezas cortadas deben tener la misma longitud, ¿cuál es la máxima longitud de estas piezas de modo que no sobre madera?

EXTENSIÓN Criptografía moderna

Fundamentos de criptografía • El esquema de cambio de clave de Diffie-Hellman-Merkle • Criptografía RSA con clave pública



John Forbes Nash, Jr., fue interpretado por Russell Crowe en la película de 2001 *A Beautiful Mind* (Una mente brillante). Como un joven matemático estadunidense, Nash realizó un trabajo notable en muchas áreas. Uno fue el descifrado de códigos del mundo real. En el sitio www.abeautifulmind.com/main.html está disponible una sesión interactiva basada en el descifrado de códigos, y más información de la película.

Fundamentos de criptografía

La **criptografía** implica códigos secretos, maneras de alterar información para que un "emisor" pueda transmitirla a un "destinatario" de modo que si un "adversario" logra interceptar la transmisión no pueda conocer su significado. Nos referiremos al emisor y al destinatario (en cualquier orden) como Alice y Bob (A y B) y al adversario como Eve (E). La conversión de un mensaje para alterar su forma se conoce como **codificación**, y la conversión de regreso a su forma original se conoce como **decodificación**.

La criptografía se volvió más crucial conforme se amplió el alcance de las aplicaciones militares, diplomáticas, industriales y ahora inclusive las personales. Conforme los "codificadores" se volvieron más expertos en el diseño de sus sistemas, los "descifradores de códigos" se volvieron más expertos en vulnerar esos sistemas.

La base de un sistema de criptografía es normalmente una función matemática, el "algoritmo de codificación" que codifica (altera) el mensaje. (Las *funciones* se estudian en el **capítulo 7**). Un ejemplo de un algoritmo de codificación sencillo (y muy inseguro) es el siguiente:

> Sustituya cada letra del alfabeto con la letra que le *sigue*.
> (Sustituya z con a).

Entonces, el mensaje "zebra" se codificaría como "afcsb". El análisis de uno o más mensajes interceptados, codificados usando esta función, e intentando varias posibilidades, permitiría a un adversario determinar rápidamente la función, y su inverso, el cual sería como sigue:

> Sustituya cada letra del alfabeto con la letra que le *precede*.
> (Sustituya a con z).

Los sistemas más avanzados también usan una **clave**, la cual es alguna información adicional necesaria para ejecutar el algoritmo correctamente. A mediados del siglo xx, los requerimientos de vanguardia para un sistema de codificación eficaz eran de la siguiente manera.

Requerimientos básicos de un sistema de criptografía

1. Un algoritmo *secreto* (o una función secreta) para codificar y decodificar datos.
2. Una clave *secreta* que proporcione información adicional necesaria para que un destinatario pueda llevar a cabo el proceso de decodificación.



Durante la primera temporada de la serie televisiva de la CBS *NUMB3RS*, el episodio *Prime Suspect* se basó en la premisa de que un matemático estaba muy cerca de probar la hipótesis de Riemann, descrita brevemente en la **página 144** (la cual se comprobó más tarde como errónea). Su hija fue secuestrada por individuos que esperaban intercambiarla por los resultados para desbloquear códigos de seguridad financiera.

La dificultad con el requerimiento 1 era que todas las funciones de codificación en ese tiempo eran funciones de dos vías. Una vez que un adversario obtenía el algoritmo de codificación, el inverso (es decir, el algoritmo de decodificación) se podía deducir matemáticamente.

La dificultad con el requerimiento 2 era que la seguridad de la clave con frecuencia caducaba después de un periodo de uso. Esto significaba que Bob y Alice debían cambiar de clave con bastante frecuencia para que sus comunicaciones continuaran siendo seguras. Pero esta medida puede ser contraproducente, porque cada intercambio de clave era susceptible de intercepción. Este dilema se conoce como **problema de cambio de clave** (o **problema de distribución de la clave** en el caso de múltiples destinatarios).

En la década de 1970, los investigadores descubrieron cómo construir una función de *una vía* que superaba estas dificultades. Se trata de una *función exponencial* (**sección 7.6**) y está dada por

$$C = M^k \pmod{n},$$

con el cálculo llevado a cabo para el módulo n. El logro de una función esencialmente de una vía, en vez de una de dos, fue posible gracias a la teoría de los números primos grandes, la naturaleza de la aritmética modular y el estado actual del hardware y los algoritmos de las computadoras.

El esquema de cambio de clave de Diffie-Hellman-Merkle El problema del cambio de clave fue resuelto por el esquema de cambio de clave de Diffie-Hellman-Merkle (anunciado en 1976 y nombrado así en honor del equipo integrado por Whitfield Diffie, Martin Hellman y Ralph Merkle de la Universidad de Stanford). Básicamente, funciona como sigue.

Esquema de cambio de clave de Diffie-Hellman-Merkle

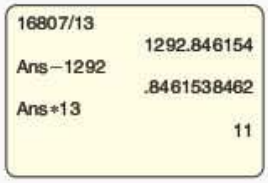
Alice y Bob establecen una clave (un número) que ambos conocen, pero que Eve no puede averiguar, ni siquiera analizando los mensajes entre Bob y Alice, ya que ellos establecieron su clave. Alice y Bob están de acuerdo en usar la función $C = M^k \pmod{n}$, con valores específicos para M y n. (Están de acuerdo en todo esto para utilizarlo en el correo convencional, teléfono, correo electrónico e inclusive la conversación casual. No importa si Eve lo averigua). Luego, realizan la siguiente secuencia de pasos individuales.

Acciones de Alice		*Acciones de Bob*	
Paso 1	Elige un valor de a. (Mantiene este valor en secreto).	***Paso 1***	Elige un valor de b. (Mantiene este valor en secreto).
Paso 2	Calcula $\alpha = M^a \pmod{n}$.	***Paso 2***	Calcula $\beta = M^b \pmod{n}$.
Paso 3	Envía el valor de α a Bob.	***Paso 3***	Envía el valor de β a Alice.
Paso 4	Recibe el valor de β de Bob.	***Paso 4***	Recibe el valor de α de Alice.
Paso 5	Calcula la clave: $K = \beta^a \pmod{n}$.	***Paso 5***	Calcula la clave: $K = \alpha^b \pmod{n}$.

Con este procedimiento, Alice y Bob obtendrán el mismo valor de la clave K porque

$$\begin{aligned} \beta^a &= (M^b)^a && \beta = M^b \\ &= M^{ba} && \text{Regla de los exponentes: } (a^m)^n = a^{mn} \\ &= M^{ab} && \text{Propiedad conmutativa: } ab = ba \\ &= (M^a)^b && \text{Regla de los exponentes: } (a^m)^n = a^{mn} \\ &= \alpha^b. && \alpha = M^a \end{aligned}$$

Se ilustran los procedimientos básicos usando números mucho menores que los que se usan en la práctica, de modo que nuestros cálculos se puedan efectuar en una calculadora manual.



La pantalla muestra que el residuo de 16,807, módulo 13, es 11.

Aquí es esencial la aritmética modular. Dado un módulo n, todos los números naturales a son "equivalentes" (realmente congruentes) al residuo obtenido cuando a se divide entre n. Este residuo se conoce como el **residuo** de a, módulo n. Para obtener el residuo se visualiza como "mod". En el **ejemplo 1** que sigue, por ejemplo, uno de los cálculos implica obtener el residuo de 16,807, módulo 13. La rutina de una calculadora funciona como sigue.

Paso 1 Se divide 16,807 entre 13, para obtener 1292.846154.

Paso 2 Se resta la parte entera del cociente, para obtener 0.846154. . .

Paso 3 Se multiplica por 13, para obtener 11. (Se redondea si es necesario).

De modo que $16{,}807 \equiv 11 \pmod{13}$. Se ha mostrado que $16{,}807 = 1292 \cdot 13 + 11$.

[*Nota*: En el trabajo que sigue, se realizan algunas secuencias largas de aritmética modular. Algunas veces se usa el símbolo de igual, $=$, en vez del símbolo de congruencia, $\equiv$, y cuando el módulo se sobreentiende, algunas veces omitimos la designación $(\text{mod } n)$].

Rutina de calculadora para la obtención del residuo de a, módulo n

En un sistema modular, el módulo residual n de un número a se puede obtener completando estos tres pasos, de uno en uno.

Paso 1 Se divide a entre el módulo n.

Paso 2 Se resta la parte entera del cociente para obtener solo la parte fraccionaria.

Paso 3 Se multiplica la parte fraccionaria del cociente por n.

El resultado final es el módulo residual n.

EJEMPLO 1 Uso del esquema de cambio de clave de Diffie-Hellman-Merkle

Establezca una clave común para Alice y Bob usando valores específicos de M, n, a y b, completando los pasos definidos antes para el esquema de cambio de clave de Diffie-Hellman-Merkle.

SOLUCIÓN

Suponga que Alice y Bob están de acuerdo en usar los valores $M = 7$ y $n = 13$.

Acciones de Alice

Paso 1 Elige un valor de a, digamos, 5. (Alice mantiene este valor en secreto).

Paso 2 $\alpha = M^a \pmod{n}$
$= 7^5 \pmod{13}$
$= 16{,}807 \pmod{13}$
$= 11$

Paso 3 Envía $\alpha = 11$ a Bob.

Paso 4 Recibe $\beta = 3$.

Paso 5 Calcula la clave:
$K = \beta^a \pmod{n}$.
$= 3^5 \pmod{13}$
$= 243 \pmod{13}$
$= 9$.

Acciones de Bob

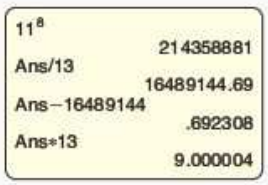
Paso 1 Elige un valor de b, digamos, 8. (Bob mantiene este valor en secreto).

Paso 2 $\beta = M^b \pmod{n}$
$= 7^8 \pmod{13}$
$= 5{,}764{,}801 \pmod{13}$
$= 3$

Paso 3 Envía $\beta = 3$ a Alice.

Paso 4 Recibe $\alpha = 11$.

Paso 5 Calcula la clave:
$K = \alpha^b \pmod{n}$
$= 11^8 \pmod{13}$
$= 214{,}358{,}881 \pmod{13}$
$= 9$.



La pantalla muestra el cálculo de K en la columna derecha. (Se ignora el pequeño error de redondeo).

Tanto Alice como Bob obtienen el mismo valor de la clave, $K = 9$, el cual usan para codificar las comunicaciones futuras entre uno y otro.

Cuando el **código RSA** se introdujo por primera vez en 1977, la columna "Mathematical Games" de Martin Gardner en *Scientific American* desafió a los investigadores a decodificar un mensaje usando una n con 129 dígitos. Con la ayuda de la teoría de números, 600 matemáticos de 25 países tardaron 17 años en factorizar n en factores primos de 64 y 65 dígitos, como se muestra aquí.

114,381,625,757,888,867,669,235,779,976,
146,612,010,218,296,721,242,362,562,561,
842,935,706,935,245,733,897,830,597,123,
563,958,705,058,989,075,147,599,290,026,
879,543,541 = 3,490,529,510,847,650,949,
147,849,619,903,898,133,417,764,638,493,
387,843,990,820,577 × 32,769,132,993,266,
709,549,961,988,190,834,461,413,177,642,
967,992,942,539,798,288,533

El mensaje decodificado decía: "Las palabras mágicas son quebrantahuesos delicados".

Actualmente, los usuarios RSA seleccionan valores mucho más grandes de p y q, dando como resultado una n muy por encima de 300 dígitos. Se cree que para descifrar tal codificación, todas las computadoras del mundo tendrían que trabajar en conjunto más tiempo que la edad del universo.

Suponga, en el paso 3 del **ejemplo 1,** que Eve intercepta la transmisión de Bob del valor $\beta = 3$ para Alice. Esto no le ayudará, porque no puede deducir el valor de b de Bob que generó β. De hecho, podría ser cualquiera de los valores

$$8, 20, 32, 44, 56, \ldots,$$

una lista infinita de posibilidades. (En la práctica, todos los números de esta lista serían enormemente grandes). Eve tampoco sabe qué exponente aplicará Alice a 3 para obtener la clave. El valor

$$a = 5$$

es el secreto de Alice, nunca revelado a alguien más, ni siquiera a Bob, de modo que Eve no puede conocer la clave que Alice obtendrá. El mismo argumento se aplica si Eve intercepta la transmisión de Alice a Bob del valor

$$\alpha = 11.$$

(Ella se topa con obstáculos infranqueables, aun en el caso de que logre interceptar ambas transmisiones).

Criptografía RSA con clave pública Prácticamente al mismo tiempo que Diffie, Hellman y Merkle resolvieron el problema de cambio de clave, otro equipo de investigadores, formado por Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman, del MIT, usaron el mismo tipo de función matemática para eliminar la necesidad del cambio de clave. Su esquema, conocido como RSA (por las iniciales de sus apellidos), se llama **criptografía con clave pública.** Cualquiera que desee recibir datos encriptados, simplemente da a conocer su clave pública, la cual puede usar quien así lo desee para codificar mensajes para ellos. La belleza del sistema reside en que el destinatario posee otra clave privada, necesaria para la decodificación, pero nunca asignada a nadie más.

El éxito del RSA se debe a que tenemos el conocimiento matemático para identificar números primos muy grandes, y multiplicarlos para obtener un producto. Pero si los factores primos son lo suficientemente grandes, es imposible, dado el estado actual de conocimiento, que alguien determine los dos factores originales, inclusive usando computadoras muy poderosas.

Usando RSA, Alice puede recibir mensajes encriptados de Bob de modo tal que Eve no puede averiguar su significado incluso si logra interceptarlos. Aquí se muestra un esquema de todos los procedimientos básicos, a partir del establecimiento del esquema para codificar y luego decodificar un mensaje.

Fundamentos del RSA: Esquema de criptografía con clave pública

Alice (el destinatario) completa los siguientes pasos.

Paso 1 Elige los números primos p y q, los cuales mantiene en secreto.

Paso 2 Calcula el *módulo* n (el cual es el producto $p \cdot q$).

Paso 3 Calcula $\ell = (p-1)(q-1)$.

Paso 4 Elige el *exponente de codificación* e, el cual puede ser cualquier entero entre 1 y ℓ que sea primo relativo a ℓ, es decir, sin factores comunes con ℓ.

Paso 5 Obtiene el *exponente de decodificación* d, un número que satisfaga

$$e \cdot d = 1 \pmod{\ell}$$

Ella mantiene d en secreto.

Paso 6 Da a Bob su *clave pública*, la cual se integra con el módulo n y el exponente de codificación e.

(Los pasos de Bob se describen en la siguiente página).

Fundamentos del RSA: Esquema de criptografía con clave pública (*continuación*)

Ahora Bob (el emisor) completa los siguientes pasos. (Recuerde que el propósito de todo esto es que Bob pueda enviar con seguridad mensajes a Alice).

Paso 7 Convierte en un número M (llamado algunas veces el *texto llano*) el mensaje que va a enviar a Alice.

Paso 8 Codifica M, es decir, usa la clave pública de Alice (n y e) para generar el mensaje C codificado (llamado algunas veces el *texto cifrado*) de acuerdo con la fórmula

$$C = M^e \pmod{n}.$$

Paso 9 Transmite C a Alice.

Cuando Alice recibe C, ella completa el paso final:

Paso 10 Decodifica C, es decir, usa su clave privada, integrada por n (que también es parte de su clave pública) y d, para reproducir el texto llano original del mensaje M de acuerdo con la fórmula

$$M = C^d \pmod{n}.$$

EJEMPLO 2 Creación de una clave pública de codificación

Un **número brillante** (definido solo hace unos cuantos años) es el producto de dos primos con igual número de dígitos. ¿El producto n del **ejemplo 2** es brillante?

Use los valores $p = 7$ y $q = 13$ (primos seleccionados de manera arbitraria) para crear la clave pública de Alice completando los pasos 2 a 4 de los fundamentos del RSA enunciados anteriormente.

SOLUCIÓN

Paso 2 $n = p \cdot q = 7 \cdot 13 = 91$

Paso 3 $\ell = (p-1)(q-1) = 6 \cdot 12 = 72$

Paso 4 Existen muchas opciones aquí, pero un primo menor que 72 y un primo relativo a 72 cumplirá los requerimientos. Seleccionamos de forma arbitraria $e = 11$.

La clave pública de Alice es $n = 91$, $e = 11$. (Los factores primos p y q deben ser secretos).

EJEMPLO 3 Obtención de una clave privada de decodificación

Complete el paso 5 de los fundamentos del RSA para obtener la clave privada de decodificación de Alice.

SOLUCIÓN

Paso 5 El exponente de decodificación d debe satisfacer:

$$e \cdot d = 1 \pmod{\ell} \quad \text{u} \quad 11d = 1 \pmod{72}.$$

Una manera de satisfacer esta ecuación es revisar las potencias de 11 hasta encontrar una igual (realmente congruente) a 1, módulo 72:

Congruencias del módulo 72

$$11^1 = 11, \quad 11^2 = 121 = 49, \quad 11^3 = 1331 = 35,$$
$$11^4 = 14{,}641 = 25, \quad 11^5 = 161{,}051 = 59, \quad 11^6 = 1{,}771{,}561 = 1.$$

(Se encontraron los residuos usando la rutina de la calculadora que se describió con anterioridad en el **ejemplo 1**). Como encontramos que $11^6 = 1$, tomamos $d = 11^5 = 59$. De esta manera,

$$e \cdot d = 11 \cdot 11^5 = 11^6 = 1, \qquad \text{como se requería.}$$

La clave privada de Alice es $n = 91$, $d = 59$.

James Ellis, Clifford Cocks y Malcolm Williamson trabajaban en la Britain's Government Communications Headquarters en la década de 1970. Ellos descubrieron realmente las matemáticas de la criptografía con clave pública varios años antes de que se anunciara el trabajo en Stanford y el MIT (y se patentara). El trabajo británico fue clasificado como ultra secreto y nunca vio la luz sino hasta unos 20 años después, aproximadamente al mismo tiempo que la RSA Data Security, la compañía que había patentado el RSA en Estados Unidos, fue vendida en $200 millones.

EJEMPLO 4 Codificación de un mensaje para transmisión

Complete los pasos 7 y 8 de los fundamentos del RSA para codificar el mensaje "HI" enviado de Bob a Alice. Use la clave pública de Alice obtenida en el **ejemplo 2:** $n = 91$, $e = 11$.

SOLUCIÓN

Paso 7 Una manera sencilla de convertir "HI" en número es observar que H e I son las letras octava y novena del alfabeto inglés. Simplemente hagamos el texto llano del mensaje $M = 89$.

Paso 8 Ahora calcule el texto cifrado C: $C = M^e \pmod{n} = 89^{11} \pmod{91}$.

Aquí, 89^{11} es demasiado grande para manejarlo como lo hicimos con las potencias de 11 en el **ejemplo 3**. Pero podemos usar un truco, expresando 11 como $1 + 2 + 8$. (1, 2 y 8 son las únicas potencias de 2 que suman 11). Ahora podemos reformular 89^{11} en términos de potencias más pequeñas y luego usar las reglas de los exponentes (**sección 6.5**).

$$\begin{aligned} 89^{11} &= 89^{1+2+8} && 1 + 2 + 8 = 11 \\ &= 89^1 \cdot 89^2 \cdot 89^8 && \text{Regla de los exponentes: } a^{n+m} = a^n \cdot a^m \end{aligned}$$

Ahora "modulamos antes de multiplicar", en otras palabras, primero calculamos el residuo de los factores individuales, y luego multiplicamos los resultados. Esto permite mantener los números más pequeños.

$$\begin{aligned} 89^1 &= 89 && \text{Definición de la primera potencia} \\ 89^2 &= 7921 = 4 && \text{Módulo} \\ 89^8 &= 3.936588806\text{E}15 && \text{Resultado de la calculadora} \end{aligned}$$

El último factor es demasiado largo para manejarlo como los otros. Debido a la manera en que "dividimos" el exponente, es posible escribir las potencias de 89 subsiguientes como las potencias anteriores.

$$\begin{aligned} 89^8 &= (89^2)^4 && \text{Regla de los exponentes: } a^{m \cdot n} = (a^m)^n \\ &= 4^4 && 89^2 = 4 \text{ de arriba.} \\ &= 256 && \text{Cálculo de } 4^4. \\ &= 74 && \text{Módulo} \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos

$$\begin{aligned} 89^{11} &= 89 \cdot 4 \cdot 74 && \text{Se sustituye.} \\ &= 26{,}344 && \text{Se multiplica.} \\ &= 45. && \text{Módulo.} \end{aligned}$$

El texto llano $M = 89$ (para el mensaje "HI") se ha convertido en el texto cifrado $C = 45$.

Veamos si Alice puede decodificar con éxito el mensaje 45 cuando lo reciba.

EJEMPLO 5 Decodificación de un mensaje recibido

Complete el paso 10 de los fundamentos del RSA para decodificar el mensaje $C = 45$ del **ejemplo 4**. Utilice la clave privada de Alice, obtenida en el **ejemplo 3**: $d = 59$ (también, $n = 91$).

SOLUCIÓN

Paso 10 La fórmula de decodificación nos da:

$$\begin{aligned} M &= C^d \pmod{n} \\ &= 45^{59} \pmod{91} && \text{Se sustituye.} \\ &= 45^{1+2+8+16+32} \pmod{91} && \text{Se usa la suma de las potencias de 2.} \\ &= 45 \cdot 45^2 \cdot 45^8 \cdot 45^{16} \cdot 45^{32} \pmod{91}. && \text{Regla de los exponentes: } a^{m+n} = a^m \cdot a^n \end{aligned}$$

Se inicia con las potencias más pequeñas y "mod" de cada factor, individualmente.

$$45^2 = 2025 = 23$$
$$45^8 = (45^2)^4 = 23^4 = 279{,}841 = 16$$
$$45^{16} = (45^8)^2 = 16^2 = 256 = 74$$
$$45^{32} = (45^{16})^2 = 74^2 = 5476 = 16$$

Se insertan los valores en el producto de M, para obtener

$$\begin{aligned} M &= 45 \cdot 23 \cdot 16 \cdot 74 \cdot 16 \\ &= 19{,}607{,}040 \\ &= 89. \end{aligned}$$

Hemos decodificado correctamente C para obtener:

$$M = 89 = \text{HI}.$$ ■■■

EJERCICIOS DE LA EXTENSIÓN

Obtenga el residuo en cada caso.

1. $45 \pmod 6$

2. $67 \pmod{10}$

3. $225 \pmod{13}$

4. $418 \pmod{15}$

5. $5^9 \pmod{12}$

6. $4^{11} \pmod 9$

7. $8^7 \pmod{11}$

8. $14^5 \pmod{13}$

9. $8^{27} \pmod{17}$

10. $45^7 \pmod{23}$

11. $11^{14} \pmod{18}$

12. $14^9 \pmod{19}$

Obtención de una clave común *Obtenga la clave común K de Alice y Bob usando el esquema de cambio de clave de Diffie-Hellman-Merkle con los valores proporcionados de M, n, a y b.*

	M	n	a	b
13.	5	13	7	6
14.	11	9	5	4
15.	5	11	6	7
16.	17	5	6	3

Aplique el esquema RSA para obtener los valores faltantes.

	p	q	n	ℓ
17.	5	11	____	____
18.	11	3	____	____
19.	5	13	____	____
20.	17	7	____	____

Codificación de texto llano *Dados los módulos n, el exponente de codificación e y el texto llano M, use codificación RSA para obtener el texto cifrado C de cada caso.*

	n	e	M
21.	55	7	15
22.	33	7	8
23.	65	5	16
24.	119	11	12

Decodificación de texto cifrado *Dados los factores primos p y q, el exponente de codificación e y el texto cifrado C, aplique el algoritmo RSA para obtener* ***a)*** *el exponente de decodificación d y* ***b)*** *el mensaje de texto llano M.*

	p	q	e	C
25.	5	11	3	30
26.	11	3	13	24
27.	5	13	35	17
28.	17	7	5	40

29. Describa el adelanto que significó el trabajo de Diffie-Hellman-Merkle y el sistema RSA en relación con todas las formas de criptografía anteriores.

30. Explique por qué fallaría el RSA si los matemáticos pudieran (usando computadoras) factorizar de manera arbitraria números grandes.

4.5 LA SECUENCIA DE FIBONACCI Y LA RAZÓN ÁUREA

La secuencia de Fibonacci • La razón áurea

La secuencia de Fibonacci

La solución al problema de los conejos de Fibonacci se analizó en el **capítulo 1, páginas 19 y 20.**

Uno de los problemas más famosos de matemática elemental se encuentra en el libro *Liber Abaci*, escrito en 1202 por Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci. El problema es el siguiente:

> Un hombre colocó una pareja de conejos en una jaula. Durante el primer mes los conejos no se reprodujeron, pero cada mes a partir de entonces tuvieron una nueva pareja de conejos. Si cada nueva pareja se reproducía de la misma manera, ¿cuántas parejas de conejos habrá al cabo de un año?

La solución de este problema nos lleva a una secuencia de números conocida como la **secuencia de Fibonacci**. Aquí se presentan los primeros 15 términos de la secuencia de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.$$

Después de los primeros dos términos (iguales a 1) de la secuencia, cada término se obtiene sumando los dos términos anteriores. Por ejemplo, el tercer término se genera sumando $1 + 1$ para obtener 2, el cuarto término se genera sumando $1 + 2$ para obtener 3, y así sucesivamente. Esto se puede describir con una fórmula matemática conocida como **fórmula de recursión**.

Si F_n representa el número de Fibonacci en la n-ésima posición de la secuencia, entonces:

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \quad \text{para } n \geq 3.$$

Usando la fórmula de recursión $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, obtenemos

$$F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2, \quad F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3, \quad \text{y así sucesivamente.}$$

La **Asociación Fibonacci** es una organización dedicada a la investigación de la **secuencia de Fibonacci** y temas relacionados. Revise su biblioteca para ver si tiene la revista *Fibonacci Quarterly*. Los primeros dos números de 1963 incluyen una introducción básica a la secuencia de Fibonacci.

La secuencia de Fibonacci presenta muchos patrones interesantes, y por razonamiento inductivo es posible hacer muchas conjeturas en relación con estos patrones. Sin embargo, la simple observación de un número finito de ejemplos no demuestra un enunciado. La demostración de las propiedades de la secuencia de Fibonacci con frecuencia implica inducción matemática (que se estudia en los textos universitarios de álgebra). Aquí simplemente se observan patrones y no se presentan demostraciones.

EJEMPLO 1 Observación de un patrón de los números de Fibonacci

Obtenga la suma de los cuadrados de los primeros n números de Fibonacci para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, y examine el patrón. Generalice esta relación.

SOLUCIÓN

$$1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = F_1 \cdot F_2$$
$$1^2 + 1^2 = 2 = 1 \cdot 2 = F_2 \cdot F_3$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \cdot 3 = F_3 \cdot F_4$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \cdot 5 = F_4 \cdot F_5$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 = 5 \cdot 8 = F_5 \cdot F_6$$

La suma de los cuadrados de los primeros n números de Fibonacci parece ser siempre el producto de F_n y F_{n+1}. Se ha demostrado que esto es verdadero, en general, usando inducción matemática. ■■■

El siguiente programa de la TI-83/84 Plus utiliza la fórmula de *Binet* del n-ésimo número de Fibonacci (véase los **ejercicios 33 a 38**) para determinar su valor.

```
PROGRAM: FIB
:ClrHome
:Disp "WHICH TERM"
:Disp "OF THE"
:Disp "SEQUENCE DO"
:Disp "YOU WANT?"
:Input N
:(1 + √(5))/2→A
:(1 − √(5))/2→B
:(A^N − B^N)/√(5)→F
:Disp F
```

```
WHICH TERM
OF THE
SEQUENCE DO
YOU WANT?
?20
                6765
Done
```

Esta pantalla indica que el vigésimo número de Fibonacci es 6765.

EJEMPLO 2 Observación de la secuencia de Fibonacci en un problema de división grande

Observe los pasos del algoritmo de una división grande utilizado para obtener los primeros dígitos del recíproco de 89, el undécimo número de Fibonacci. Localice las ocurrencias de los términos de la secuencia de Fibonacci en el algoritmo.

SOLUCIÓN

$$
\begin{array}{r}
.011235\ldots \\
89\overline{)1.000000\ldots} \\
\underline{89} \\
110 \\
\underline{89} \\
210 \\
\underline{178} \\
320 \\
\underline{267} \\
530 \\
\underline{445} \\
850\ldots
\end{array}
$$

Observe que después del cero en el lugar de las décimas, los siguientes cinco decimales son los primeros cinco términos de la secuencia de Fibonacci. Además, como indican los números más tenues a lo largo del proceso, los dígitos 1, 1, 2, 3, 5, 8 aparecen en los pasos de la división. Ahora, observe los dígitos que aparecen en seguida de los más tenues, iniciando con el segundo "1"; también son 1, 1, 2, 3, 5, ...

Si el proceso de división continúa más allá del paso final mostrado anteriormente, el patrón parece detenerse, en vista de que a los 10 decimales, $\frac{1}{89} \approx 0.0112359551$. (La representación decimal comienza a repetirse después en el proceso, puesto que $\frac{1}{89}$ es un número racional). Sin embargo, la suma que aparece a continuación indica cómo los números de Fibonacci están realmente escondidos en este decimal.

$$
\begin{array}{r}
0.01 \\
0.001 \\
0.0002 \\
0.00003 \\
0.000005 \\
0.0000008 \\
0.00000013 \\
0.000000021 \\
0.0000000034 \\
0.00000000055 \\
\underline{0.00000000089} \\
\frac{1}{89} = 0.0112359550\ldots
\end{array}
$$

■■■

Diversión Fibonacci Para observar una de las muchas propiedades interesantes de la secuencia de Fibonacci, realice lo siguiente.

1. Elija un término después del primero y elévelo al cuadrado.
2. Multiplique los términos que aparecen antes y después del término seleccionado en el paso 1.
3. Reste el valor más pequeño del valor más grande.
4. ¿Cuál es el resultado?

Aplique este procedimiento iniciando con varios términos de Fibonacci diferentes. ***El resultado siempre es el mismo.***

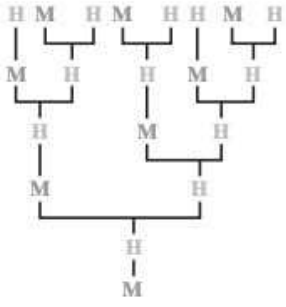


Figura 1

Los patrones de Fibonacci se encuentran en numerosos lugares en la naturaleza. Por ejemplo, las abejas macho (zánganos) nacen de huevos que no han sido fertilizados, de modo que una abeja macho solo tiene un progenitor, una hembra. Por otro lado, las abejas hembra nacen de huevos fertilizados, de modo que una hembra tiene dos progenitores, un macho y una hembra. La **figura 1** muestra varias generaciones de los antepasados de una abeja macho.

Observe que en la primera generación, iniciando por la parte inferior, hay una abeja, en la segunda hay una abeja, en la tercera hay dos abejas, y así sucesivamente. Estos son los términos de la secuencia de Fibonacci. Además, iniciando en la segunda generación, los números de abejas hembra forman la secuencia, e iniciando con la tercera generación, los números de abejas macho también forman la secuencia.

Una fracción como:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

se conoce como **fracción continua.** Esta fracción continua se puede evaluar como sigue.

Sea $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$

Luego, $x = 1 + \dfrac{1}{x}$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Por la fórmula cuadrática de álgebra,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Observe que la solución positiva es una **razón áurea.**

Los términos sucesivos de la secuencia de Fibonacci también aparecen en algunas plantas. Por ejemplo, la fotografía (de abajo a la izquierda) muestra la doble espiral de una margarita, con 21 espirales en sentido horario y 34 espirales en sentido antihorario. Estos números son términos sucesivos de la secuencia.

La mayoría de las piñas (véase la fotografía de abajo a la derecha) presentan la secuencia de Fibonacci de la siguiente manera: cuente las espirales formadas por las "escalas" del cono, partiendo de abajo a la izquierda hacia arriba a la derecha. Luego cuente las espirales de abajo a la derecha hacia arriba a la izquierda. Usted debe encontrar que en una dirección obtiene 8 espirales, y en la otra obtiene 13 espirales; una vez más, términos sucesivos de la secuencia de Fibonacci. Muchas piñas de coníferas presentan 5 y 8 espirales, y el cono de la secuoya gigante tiene 3 y 5 espirales.





La razón áurea

Si consideramos los cocientes de números de Fibonacci sucesivos, surge un patrón.

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{5}{3} = 1.666\ldots \qquad \frac{21}{13} \approx 1.615384615 \qquad \frac{89}{55} = 1.618181818\ldots$$

$$\frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{8}{5} = 1.6 \qquad \frac{34}{21} \approx 1.619047619$$

$$\frac{3}{2} = 1.5 \qquad \frac{13}{8} = 1.625 \qquad \frac{55}{34} \approx 1.617647059$$

Estos cocientes parecen estarse aproximando a un "valor límite" cerca de 1.618. De hecho, conforme vamos más lejos en la secuencia, este cociente se aproxima al número

$$\frac{\mathbf{1 + \sqrt{5}}}{\mathbf{2}}, \quad \text{Razón áurea}$$

conocido como la **razón áurea**, y con frecuencia se simboliza como ϕ, la letra griega fi.

La razón áurea aparece una y otra vez en arte, arquitectura, música y la naturaleza. Sus orígenes se remontan a los días de los antiguos griegos, quienes pensaban que un rectángulo áureo tenía las proporciones estéticas más agradables.

Un **rectángulo áureo** es uno que se puede dividir en un cuadrado y otro rectángulo (más pequeño) de la misma forma que el rectángulo original. (Véase la **figura 2**). Si hacemos que el rectángulo más pequeño tenga una longitud L y un ancho igual a W, como se muestra en la figura, entonces vemos que el rectángulo original tiene una longitud $L + W$ y un ancho igual a L. Ambos rectángulos (al ser "áureos") tienen sus longitudes y anchos en la razón áurea, ϕ, de modo que tenemos

$$\frac{L}{W} = \frac{L + W}{L}$$

$$\frac{L}{W} = \frac{L}{L} + \frac{W}{L} \quad \text{El lado derecho se escribe como la suma de dos fracciones.}$$



Figura 2

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \qquad \text{Se sustituye } \frac{L}{W} = \phi,\ \frac{L}{L} = 1 \text{ y } \frac{W}{L} = \frac{1}{\phi}.$$

$$\phi^2 = \phi + 1 \qquad \text{Se multiplican ambos lados por } \phi.$$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0. \qquad \text{Se escribe en forma cuadrática estándar.}$$



Usando la fórmula cuadrática de álgebra, la solución positiva de esta ecuación es $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989$, la razón áurea.

El Partenón (véase la fotografía), construido en la Acrópolis de la antigua Atenas durante el siglo v a. C., es un ejemplo de arquitectura que presenta muchos rectángulos áureos.

Para ver una conexión interesante entre los términos de la secuencia de Fibonacci, la razón áurea y los fenómenos naturales, podemos iniciar con un rectángulo que mide 89 por 55 unidades. (Véase la **figura 3**). Esta es una aproximación muy cercana al rectángulo áureo. Dentro de este rectángulo se construye un cuadrado, de 55 unidades por lado. El rectángulo remanente también es un rectángulo áureo aproximado, que mide 55 por 34 unidades. Cada vez que se repite este proceso, se forman un cuadrado y un rectángulo áureo aproximado.

Como se indica en la **figura 3**, los vértices de los cuadrados se unen con una curva suave conocida como *espiral*. Esta espiral se parece al contorno de la sección transversal de la concha de un nautilo, como se muestra en la fotografía.



Un rectángulo áureo en el arte El rectángulo dibujado con la figura de *San Jerónimo* por Leonardo da Vinci es un ejemplo de rectángulo áureo.

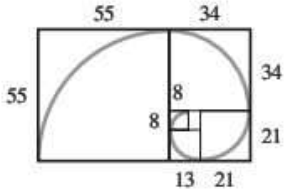


Figura 3



Para reflexionar

Animación matemática

La película animada de 1959 *Donald in Mathmagic Land* (*Donald en el país de las Matemáticas*) ha perdurado más de 50 años como un clásico. Es un viaje de 25 minutos con el pato Donald, guiado por el Espíritu de las Matemáticas, a través del mundo de esta disciplina. Se dedican varios minutos de la película a la razón áurea (o, como se nombra allí, la sección áurea).



© Disney Enterprises, Inc.

Disney usa animación para explicar la razón áurea de una manera que el mundo de la escritura simplemente no lo logra. La razón áurea se puede ver en la arquitectura, la naturaleza y el cuerpo humano.

Para investigación individual o en grupo

1. Verifique el siguiente patrón de Fibonacci en la familia de las coníferas. Obtenga una piña y cuente las espirales formadas por las "escamas" del cono, partiendo de la parte inferior izquierda hacia la parte superior derecha. Luego cuente las espirales de la parte inferior derecha hacia la parte superior izquierda. ¿Qué descubre?
2. Los dos tamaños comunes de las tarjetas de archivo son 3" por 5" y 5" por 8". ¿Por qué cree que estos sean los tamaños estándar de la industria?
3. Divida su estatura entre la altura a la que se encuentra su ombligo. Obtenga el promedio del grupo. ¿A qué valor se acerca este promedio?

4.5 EJERCICIOS

Conteste cada pregunta en relación con la secuencia de Fibonacci o la razón áurea.

1. El decimosexto número de Fibonacci es el 987 y el decimoséptimo es 1597. ¿Cuál es el valor del decimoctavo número de Fibonacci?

2. Recuerde que F_n representa el número de Fibonacci en la n-ésima posición de la secuencia. ¿Cuáles son los únicos dos valores de n tales que $F_n = n$?

3. $F_{22} = 17{,}711$ y $F_{24} = 46{,}368$. ¿Cuál es el valor de F_{23}?

4. Si dos términos sucesivos de la secuencia de Fibonacci son impares, ¿el siguiente término es par o impar?

5. ¿Cuál es el valor exacto de la razón áurea?

6. ¿Cuál es el valor aproximado de la razón áurea a la milésima más cercana?

En cada uno de los ejercicios 7 a 14 hay un patrón establecido que incluye términos de la secuencia de Fibonacci. Utilice el razonamiento inductivo para hacer una conjetura en relación con la ecuación siguiente del patrón, y verifíquela. Refiérase a unos cuantos términos del principio de la secuencia que se presenta en el texto.

7.
$1 = 2 - 1$
$1 + 1 = 3 - 1$
$1 + 1 + 2 = 5 - 1$
$1 + 1 + 2 + 3 = 8 - 1$
$1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13 - 1$

8.
$1 = 2 - 1$
$1 + 3 = 5 - 1$
$1 + 3 + 8 = 13 - 1$
$1 + 3 + 8 + 21 = 34 - 1$
$1 + 3 + 8 + 21 + 55 = 89 - 1$

9.
$1 = 1$
$1 + 2 = 3$
$1 + 2 + 5 = 8$
$1 + 2 + 5 + 13 = 21$
$1 + 2 + 5 + 13 + 34 = 55$

10.
$1^2 + 1^2 = 2$
$1^2 + 2^2 = 5$
$2^2 + 3^2 = 13$
$3^2 + 5^2 = 34$
$5^2 + 8^2 = 89$

11.
$2^2 - 1^2 = 3$
$3^2 - 1^2 = 8$
$5^2 - 2^2 = 21$
$8^2 - 3^2 = 55$

12.
$2^3 + 1^3 - 1^3 = 8$
$3^3 + 2^3 - 1^3 = 34$
$5^3 + 3^3 - 2^3 = 144$
$8^3 + 5^3 - 3^3 = 610$

13.
$1 = 1^2$
$1 - 2 = -1^2$
$1 - 2 + 5 = 2^2$
$1 - 2 + 5 - 13 = -3^2$
$1 - 2 + 5 - 13 + 34 = 5^2$

14.
$1 - 1 = -1 + 1$
$1 - 1 + 2 = 1 + 1$
$1 - 1 + 2 - 3 = -2 + 1$
$1 - 1 + 2 - 3 + 5 = 3 + 1$
$1 - 1 + 2 - 3 + 5 - 8 = -5 + 1$

15. Todos los números naturales se pueden expresar como una suma de números de Fibonacci, sin usar un número más de una vez. Por ejemplo, $25 = 21 + 3 + 1$. Exprese cada uno de los siguientes de la misma manera.

a) 37 ***b)*** 40 ***c)*** 52

16. Se ha demostrado que si m divide a n, entonces F_m es un factor de F_n. Demuestre que esto es verdadero para los siguientes valores de m y n.

a) $m = 2, n = 6$ ***b)*** $m = 3, n = 9$
c) $m = 4, n = 8$

17. Se ha demostrado que si el máximo común divisor de m y n es r, entonces el máximo común divisor de F_m y F_n es F_r. Demuestre que esto es verdadero para los siguientes valores de m y n.

a) $m = 10, n = 4$ ***b)*** $m = 12, n = 6$
c) $m = 14, n = 6$

18. Para cualquier número primo p con excepción de 2 o 5, F_{p+1} o F_{p-1} es divisible entre p. Demuestre que esto es verdadero para los siguientes valores de p.

a) $p = 3$ ***b)*** $p = 7$ ***c)*** $p = 11$

19. Vimos que si un término de la secuencia de Fibonacci se eleva al cuadrado y luego se obtiene el producto de los términos de cada lado del término original, siempre habrá una diferencia de 1. Siga los pasos descritos a continuación, seleccionando el séptimo número de Fibonacci, el 13.

a) Eleve al cuadrado 13. Multiplique los términos de la secuencia alejados a dos posiciones de 13 (es decir, 5 y 34). Reste el resultado más pequeño del más grande, y anote su respuesta.

b) Eleve al cuadrado 13. Multiplique los términos de la secuencia alejados tres posiciones de 13. Nuevamente, reste el resultado más pequeño del más grande, y anote su respuesta.

c) Repita el proceso moviéndose a cuatro términos de 13.

d) Haga una conjetura acerca de lo que pasará cuando repita el proceso, moviéndose a cinco términos. Verifique su respuesta.

20. ***Truco de números*** Aquí hay un truco de números que usted puede realizar. Pida a alguien que seleccione dos números al azar y que los anote uno debajo del otro. Pida a la persona que obtenga un tercer número sumando el primero y el segundo, un cuarto número sumando el segundo y el tercero, y así sucesivamente, hasta obtener 10 números. Luego solicite a la persona que sume estos diez números. Usted podrá obtener el resultado incluso antes de que la persona complete la lista, porque la suma siempre será 11 veces el séptimo número de la lista. Verifique que esto es verdad, usando x y y como los dos primeros números seleccionados. (*Sugerencia:* Recuerde la propiedad distributiva del álgebra).

Otra secuencia del tipo de la de Fibonacci que han estudiado los matemáticos es la ***secuencia de Lucas****, llamada así en honor de un matemático francés del siglo XIX. Los primeros 10 términos de la secuencia de Lucas son*:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123.$$

21. ¿Cuál es el undécimo término de la secuencia de Lucas?

22. Elija un término de la secuencia de Lucas y elévelo al cuadrado. Luego multiplique los términos a cada lado del número seleccionado. Reste el resultado más pequeño del resultado más grande. Repita esto con un término diferente de la secuencia. ¿Obtiene el mismo resultado? Haga una conjetura acerca de este patrón.

23. El primer término de la secuencia de Lucas es 1. Sume el primer término y el tercero. Escriba la respuesta. Ahora sume el primer término, el tercero y el quinto, y anote su respuesta. Continúe este patrón, sumando cada vez un término que esté en posición *impar* de la secuencia. ¿Qué observa en relación con las sumas?

24. El segundo término de la secuencia de Lucas es 3. Sume los términos segundo y cuarto. Escriba la respuesta. Ahora sume los términos segundo cuarto y sexto, y anote el resultado. Continúe este patrón, sumando cada vez otro término que esté en una posición *par* de la secuencia. ¿Qué observa en relación con todas las sumas?

25. Existen muchos patrones interesantes entre los términos de la secuencia de Fibonacci y la secuencia de Lucas. Haga una conjetura en relación con la siguiente ecuación que aparece en cada una de las listas y verifíquela.

a)
$$1 \cdot 1 = 1$$
$$1 \cdot 3 = 3$$
$$2 \cdot 4 = 8$$
$$3 \cdot 7 = 21$$
$$5 \cdot 11 = 55$$

b)
$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 3 = 4$$
$$2 + 5 = 7$$
$$3 + 8 = 11$$
$$5 + 13 = 18$$

c)
$$1 + 1 = 2 \cdot 1$$
$$1 + 3 = 2 \cdot 2$$
$$2 + 4 = 2 \cdot 3$$
$$3 + 7 = 2 \cdot 5$$
$$5 + 11 = 2 \cdot 8$$

d)
$$1 + 4 = 5 \cdot 1$$
$$3 + 7 = 5 \cdot 2$$
$$4 + 11 = 5 \cdot 3$$
$$7 + 18 = 5 \cdot 5$$
$$11 + 29 = 5 \cdot 8$$

26. En el texto vimos que los cocientes de términos sucesivos de la secuencia de Fibonacci se aproximan a la razón áurea. Haga una observación similar para los términos de la secuencia de Lucas; es decir, obtenga las aproximaciones decimales de los cocientes,

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{7}, \frac{18}{11}, \frac{29}{18},$$

etcétera, usando una calculadora. Luego haga una conjetura en relación con lo que parece que sucede.

Recuerde el ***teorema de Pitágoras*** *de geometría: si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b, y la hipotenusa de longitud c, entonces*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Suponga que seleccionamos cuatro términos sucesivos cualesquiera de la secuencia de Fibonacci. Multiplique los términos primero y cuarto. Duplique el producto del segundo y tercero. Sume los cuadrados de los términos segundo y tercero. Los tres resultados obtenidos forman una ***tripleta pitagórica*** *(tres números que satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$). Obtenga la tripleta pitagórica calculada de este modo usando los cuatro términos sucesivos de la secuencia de Fibonacci.*

27. 1, 1, 2, 3 **28.** 1, 2, 3, 5 **29.** 2, 3, 5, 8

30. Observe los valores de la hipotenusa (c) en las respuestas de los **ejercicios 27 a 29.** ¿Qué observa acerca de cada uno?

31. El siguiente arreglo de números se conoce como **triángulo de Pascal.**

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
1 & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & 1
\end{array}$$

Este arreglo es importante en el estudio de las técnicas de conteo y probabilidad (véase los capítulos posteriores) y aparece en álgebra en el teorema del binomio. Si el arreglo triangular se escribe de forma diferente, como se muestra a continuación, y se obtiene la suma a lo largo de las diagonales como se indica con las líneas punteadas, ocurre algo interesante. ¿Qué encuentra cuando se suman los números?

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \diagdown & & & & & & & & & \\
1 & & 1 & & & & & & & & \\
 & \diagdown & & \diagdown & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & & & & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

32. Escriba un párrafo explicando alguna de las ocurrencias de la secuencia de Fibonacci y la razón áurea en su entorno diario.

En los ejercicios 33 a 38 se requiere una calculadora científica.

33. La solución positiva de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ es $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, como se vio en el texto. La solución negativa es $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Obtenga una aproximación decimal de ambas. ¿Qué similitud observa entre los dos decimales?

34. En algunos casos, los autores definen la razón áurea como el *recíproco* de $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Obtenga una aproximación decimal del recíproco de $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. ¿Qué similitud observa entre los decimales de $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y su recíproco?

Existe una relación sorprendente entre las dos soluciones de $x^2 - x - 1 = 0$,

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad y \quad \overline{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

y los números de Fibonacci. Para calcular el n-ésimo número de Fibonacci sin usar la fórmula de recursión, use una calculadora para evaluar

$$\frac{\phi^n - \overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}.$$

Por ejemplo, para calcular el decimotercer número de Fibonacci, evalúe

$$\frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{13} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{13}}{\sqrt{5}}$$

Esta forma se conoce como la ***fórmula de Binet*** *del n-ésimo número de Fibonacci. Use la fórmula de Binet y una calculadora para calcular el n-ésimo número de Fibonacci para cada uno de los siguientes valores de n.*

35. $n = 14$ **36.** $n = 20$

37. $n = 22$ **38.** $n = 25$

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

Investigación de una propiedad interesante de cuadros con números

En esta actividad en grupo se investigará una propiedad de ciertos arreglos de números en un cuadro. Se inicia dividiendo a la clase en grupos de tres o cuatro estudiantes. Cada estudiante del grupo debe preparar un cuadro de números como el que sigue:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Temas de análisis

1. Cada estudiante debe realizar individualmente lo siguiente:

Elegir cualquier número de la primera fila. Encerrarlo en un círculo y cruzar con una diagonal todas las entradas de la columna debajo de él. (Por ejemplo, si usted elige el 4, se cruzan con una diagonal los números 9, 14, 19 y 24). Ahora encierre en un círculo cualquier número de los restantes de la segunda fila, y cruce con una diagonal todas las entradas de la columna debajo de él.

Repita este procedimiento para la tercera y cuarta filas, y encierre luego en un círculo el número remanente de la quinta fila.

Ahora cada estudiante del grupo debe sumar los números encerrados en un círculo y comparar la suma con todos los demás del grupo. ¿Qué observa?

2. Verifique que la suma del **ejercicio 1** sea igual a

$$\frac{1}{5}(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 5^2).$$

3. Suponga que el **ejercicio 1** se hizo como se muestra aquí:

1	(2)	3	4	5
6	~~7~~	(8)	9	10
11	~~12~~	~~13~~	14	(15)
(16)	~~17~~	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	~~23~~	(24)	~~25~~

Observe que la suma de las entradas encerradas en un círculo es exactamente como la suma

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5,$$

excepto que

el 3 se sustituye por $3 + 5$,
el 5 se sustituye por $5 + 10$,
el 1 se sustituye por $1 + 15$,
el 4 se sustituye por $4 + 20$.

Esto se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\text{Suma} &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\ &\quad + (5 + 10 + 15 + 20) \\ &= 15 + 50, \quad \text{o} \quad 65.\end{aligned}$$

4. Explique por qué, sin importar cuáles sean las entradas seleccionadas para encerrarlas en un círculo en las filas, la suma siempre es la misma.

5. Elabore un cuadro similar con los números naturales del 1 al 36. Luego repita el **ejercicio 1**. Analice sus resultados. Verifique que la suma sea igual a

$$\frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 6^2).$$

6. Como grupo, coloquen las entradas de esta ecuación en un cuadro de 6 por 6.

suma = (____ + ____ + ____ + ____ + ____ + ____)
+ (____ + ____ + ____ + ____ + ____)

7. Como grupo, pronostiquen la suma de los números encerrados en un círculo en un cuadro de 7 por 7 expresándola como sigue. (No construya realmente el cuadro. Solo generalice el patrón observado en los casos de 5 por 5 y 6 por 6).

suma = (____ + ____ + ____ + ____ + ____ + ____
+ ____) + (____ + ____ + ____ + ____ +
____ + ____)

Verifique que la suma sea igual a

$$\frac{1}{7}(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 7^2).$$

8. Cada individuo debe preparar ahora otro cuadro de 5 por 5 y repetir el **ejercicio 1**, excepto que esta vez deberá iniciar con un número en la primera *columna* y cruzar con una diagonal los números restantes en las *filas*. En su grupo, discuta y explique lo que observa. En particular, ¿cómo se comparan las respuestas de los individuos, y cómo se comparan con las respuestas del **ejercicio 1**?

EXAMEN DEL CAPÍTULO 4

En los ejercicios 1 a 6, determine si cada enunciado es verdadero *o* falso.

1. Ningún par de números primos difiere en 1.

2. Existe un número infinito de números primos.

3. Si un número natural es divisible entre 9, entonces también es divisible entre 3.

4. Si p y q son primos diferentes, 1 es su máximo común divisor y pq su mínimo común múltiplo.

5. Para todos los números naturales n, 1 es un factor de n, y n es un múltiplo de n.

6. Si un número natural no es perfecto, entonces debe ser abundante.

7. Aplique pruebas de divisibilidad para determinar si el número

656,723,600

es divisible entre cada uno de los siguientes números.

a) 2 ***b)*** 3 ***c)*** 4
d) 5 ***e)*** 6 ***f)*** 8
g) 9 ***h)*** 10 ***i)*** 12

8. Determine si cada número es primo, compuesto o ninguna de las dos cosas.

a) 87 ***b)*** 97 ***c)*** 1

9. Dé la factorización con números primos de 2520.

10. En sus propias palabras, enuncie el teorema fundamental de la aritmética.

11. Determine si cada número es perfecto, deficiente o abundante.

a) 36 ***b)*** 8 ***c)*** 28

12. ¿Cuál de los siguientes enunciados es falso?

A. No existen números perfectos impares conocidos.

B. Todos los números perfectos pares deben terminar en 6 o 28.

C. La conjetura de Goldbach para el número 8 se ilustra con la ecuación $8 = 7 + 1$.

13. Dé un par de números primos gemelos entre 50 y 70.

14. Obtenga el máximo común divisor de 135 y 216.

15. Obtenga el mínimo común múltiplo de 15, 45 y 50.

16. ***Día libre para los empleados de negocios de comida rápida*** Tanto Katherine Chong como Josh Dunlap trabajan en un establecimiento de comida rápida. Katherine tiene un día libre cada seis días y Josh tiene su día libre cada cuatro días. Si ambos están libres el miércoles de esta semana, ¿cuál será el día de la semana en que tendrán su día libre al mismo tiempo?

17. El vigésimo tercer número de Fibonacci es 28,657 y el vigésimo cuarto es 46,368. ¿Cuál es el vigésimo quinto número de Fibonacci?

18. Haga una conjetura en relación con la siguiente ecuación de la lista que aparece a continuación, y verifíquela.

$$\begin{aligned}8 - (1 + 1 + 2 + 3) &= 1 \\ 13 - (1 + 2 + 3 + 5) &= 2 \\ 21 - (2 + 3 + 5 + 8) &= 3 \\ 34 - (3 + 5 + 8 + 13) &= 5 \\ 55 - (5 + 8 + 13 + 21) &= 8\end{aligned}$$

19. Elija el complemento correcto de este enunciado: Si p es un número primo, entonces $2^p - 1$ _____ es primo.

A. nunca **B.** algunas veces **C.** siempre.

20. Indique los primeros ocho términos de una secuencia tipo Fibonacci con el primer término igual a 1 y el segundo término igual a 5.

21. Elija cualquier término después del primero en la secuencia del **ejercicio 20**. Elévelo al cuadrado. Multiplique los dos términos a cada lado del término original. Reste el resultado más pequeño del resultado más grande. Ahora repita el proceso con un número diferente. Haga una conjetura en relación con lo que dará este proceso para cualquier término de la secuencia.

22. ¿Cuál de los siguientes es el valor *exacto* de la razón áurea?

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **C.** 1.6 **D.** 1.618

23. Mencione brevemente lo que dice el último teorema de Fermat, y describa las circunstancias de su demostración, incluyendo el intervalo aproximado de tiempo implicado.

24. Escriba una breve explicación del acrónimo GIMPS. Incluya una definición y varios ejemplos del término representado por las letras MP.

LOS NÚMEROS REALES Y SUS REPRESENTACIONES

5



En la película de 1997 *Smilla's Sense of Snow* (*Misterio en la nieve*), Julia Ormond interpreta el papel de una joven científica brillante, que siente pasión por la nieve y las matemáticas. En una conversación, ella habla de su amor por los números.

> *Para mí, el sistema numérico es como la vida humana. Primero tienes a los números naturales, los cuales son enteros y positivos, como números para un niño pequeño. La conciencia se expande y el niño descubre la nostalgia. ¿Conoces la expresión matemática de la nostalgia? Los números negativos, la formalización del sentimiento de que te falta algo. Luego el niño descubre los que están en medio, entre piedras, entre personas, entre números, y eso produce fracciones. Pero es como un tipo de locura, porque no se detiene ahí. Nunca se detiene. Hay números que ni siquiera podemos comprender. Las matemáticas son un paisaje vasto, abierto…*

En este capítulo se analizan los números racionales e irracionales, los cuales integran el sistema de números reales.

5.1 Números reales, orden y valor absoluto

5.2 Operaciones, propiedades y aplicaciones de los números reales

5.3 Números racionales y representación decimal

5.4 Números irracionales y representación decimal

5.5 Aplicaciones de decimales y porcentajes

Extensión Números complejos

Investigación colaborativa Presupuesto para la compra de un automóvil

Examen del capítulo 5

5.1 NÚMEROS REALES, ORDEN Y VALOR ABSOLUTO

Conjuntos de números reales • Orden en los números reales • Inversos aditivos y valor absoluto • Aplicaciones

El origen del cero Los mayas de México y Centroamérica tenían uno de los sistemas numéricos más antiguos que incluía un símbolo para el cero. Antes, los babilonios tenían un sistema posicional, pero solo colocaban un espacio entre los "dígitos" para indicar la potencia que faltaba. Cuando los griegos incorporaron a su conocimiento la astronomía de Babilonia, usaron la letra ómicron (o) de su alfabeto, o bien ō para representar "sin potencia", o "cero". El sistema numérico griego fue sustituido gradualmente por el sistema numérico romano.

La palabra original india para cero era *sunya*, que significa "vacío". Los árabes adoptaron esta palabra como *sifr*, o "vacante". La palabra *sifr* pasó al latín como *zephirum*, la cual, con el tiempo, se convirtió en *zevero*, *zepiro* y, finalmente, *cero*.

Conjuntos de números reales

El matemático Leopoldo Kronecker (1823-1891) afirmó alguna vez que "Dios hizo los números enteros, el resto es trabajo del hombre". Los *números naturales* son aquellos con los cuales contamos objetos discretos. Al incluir 0 en el conjunto se obtiene el conjunto de *números enteros no negativos*.

Números naturales

$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ es el conjunto de **números naturales**.

Números enteros no negativos

$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de **números enteros no negativos**.

Estos números, junto con muchos otros, se pueden representar sobre una **recta numérica** como la de la **figura 1**. Una recta numérica se dibuja ubicando un punto sobre la línea, el cual se designa como 0. Se elige cualquier punto a la derecha de 0 para ubicar el 1. La distancia entre 0 y 1 nos da la unidad de medida que se usa para ubicar otros puntos, como se muestra en la **figura 1**. Los números identificados en esta figura y los que continúan con el mismo patrón hacia la derecha corresponden al conjunto de números enteros no negativos.

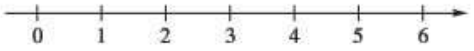
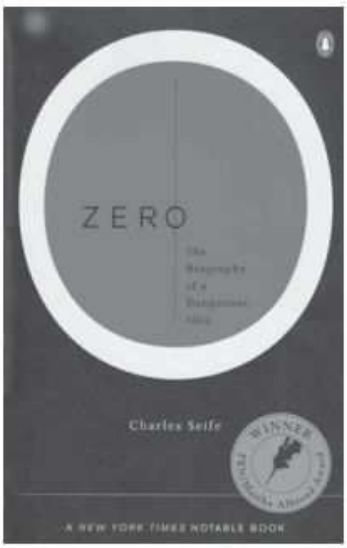


Figura 1



La historia del concepto de cero se narra en el libro ***Zero: The Biography of a Dangerous Idea***, de Charles Seife.

Todos los números enteros no negativos, iniciando con 1, se localizan a la derecha del cero en la recta numérica. Pero también se pueden ubicar números a la izquierda del cero. Estos números se escriben como -1, -2, -3, y así sucesivamente, como se muestra en la **figura 2**. (El signo negativo se usa para indicar que los números están colocados a la *izquierda* de 0).

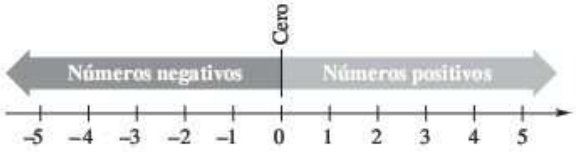


Figura 2

Los números a la *izquierda* de 0 son **números negativos**. Los números a la *derecha* de 0 son **números positivos**. Los números positivos y los números negativos se conocen como **números con signo**. El número 0 no es positivo ni negativo.

Hay muchas aplicaciones prácticas de los números negativos. Por ejemplo, la temperatura algunas veces cae por debajo de cero. La temperatura más baja consignada en los registros meteorológicos fue de $-128.6°$ F en Vostok, en la Antártida, el 22 de julio de 1983. Las altitudes por debajo del nivel del mar se representan con números negativos. La costa que rodea el Mar Muerto se ubica a 1312 pies por debajo del nivel del mar y se representa como -1312 pies.

El origen de los números negativos Los números negativos se remontan a los chinos entre el año 200 a. C. y el 220 d. C. En un principio, los matemáticos consideraban a los números negativos como algo feo y desagradable, aun cuando los tenían en cuenta para resolver problemas. Por ejemplo, un texto indio que data aproximadamente del año 1150 d. C. ofrece la solución de una ecuación igual a -5 y luego se mofa de algo tan inútil.

Leonardo de Pisa (Fibonacci) trabajaba en un problema financiero cuando se vio forzado a concluir que la solución debía ser un número negativo (es decir, una pérdida financiera). En 1545 d. C. **Girolamo Cardano** publicó las reglas de operaciones gubernamentales con números negativos en su *Ars Magna* (*El gran arte*).

Los números enteros positivos, sus negativos y el cero forman el conjunto de números *enteros*.

Números enteros

$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de **números enteros**.

No todos los números son enteros. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ es un número que está a la *mitad del camino* entre los números enteros 0 y 1. En la **figura 3** están *graficados* varios números que no son enteros. La **gráfica** de un número es un punto sobre la recta numérica que representa ese número. Piense en la gráfica de un conjunto de números como la "imagen" del conjunto. Todos los números de la **figura 3** se pueden escribir como cocientes de números enteros y son ejemplos de *números racionales*.

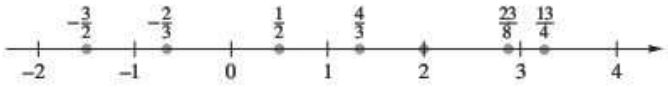


Figura 3

Un número entero, como el 2, también es un número racional. Esto es verdad porque $2 = \frac{2}{1}$.

Números racionales

$\{x|x$ es un cociente de dos enteros, con denominador diferente de $0\}$ es el conjunto de **números racionales**.

(La parte entre las llaves se lee como "el conjunto de todos los números x tales que x es un cociente de dos enteros, con denominador diferente de 0").

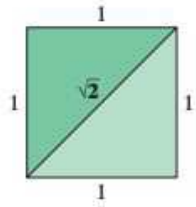


Figura 4

El simbolismo del conjunto utilizado en la definición de los números racionales,

$$\{x|x \textbf{ tiene cierta propiedad}\},$$

se conoce como **notación de comprensión de conjuntos**. Es conveniente usar esta notación cuando no es posible, o práctico, listar todos los elementos del conjunto.

Existen otros números sobre la recta numérica que no son racionales. Por ejemplo, un cuadrado que mide una unidad por lado tiene una diagonal cuya longitud es la raíz cuadrada de 2, que se escribe como $\sqrt{2}$. Véase la **figura 4**. Se demostrará posteriormente que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un cociente de números enteros. Debido a esto, $\sqrt{2}$ es un *número irracional*.

Números irracionales

$\{x|x$ es un número sobre la recta numérica que no es racional$\}$ es el conjunto de **números irracionales**.

Los números irracionales incluyen $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{10}$ y π, el cual es la razón entre la distancia alrededor de un círculo (su *circunferencia*) y la distancia a través de él (su *diámetro*). Todos los números que se pueden representar con puntos sobre la recta numérica (la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales) se llaman *números reales*.

Números reales

$\{x|x$ es un número que se puede representar mediante un punto sobre la recta numérica$\}$ es el conjunto de **números reales**.

Los números reales se pueden escribir como números decimales. Todos los números racionales se pueden escribir como un decimal exacto (que termina) o uno que se repite en un "bloque" fijo de dígitos (periódico). Por ejemplo, $\frac{2}{5} = 0.4$ y $\frac{27}{100} = 0.27$ son números racionales con terminaciones exactas; en cambio, $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$ y $\frac{3}{11} = 0.27272727\ldots$ son decimales periódicos.

La representación decimal de un número irracional no termina ni es periódica. La representación decimal de números racionales e irracionales se analizará más adelante en este capítulo.

La **figura 5** ilustra dos maneras de representar las relaciones entre los diferentes conjuntos de los números reales.

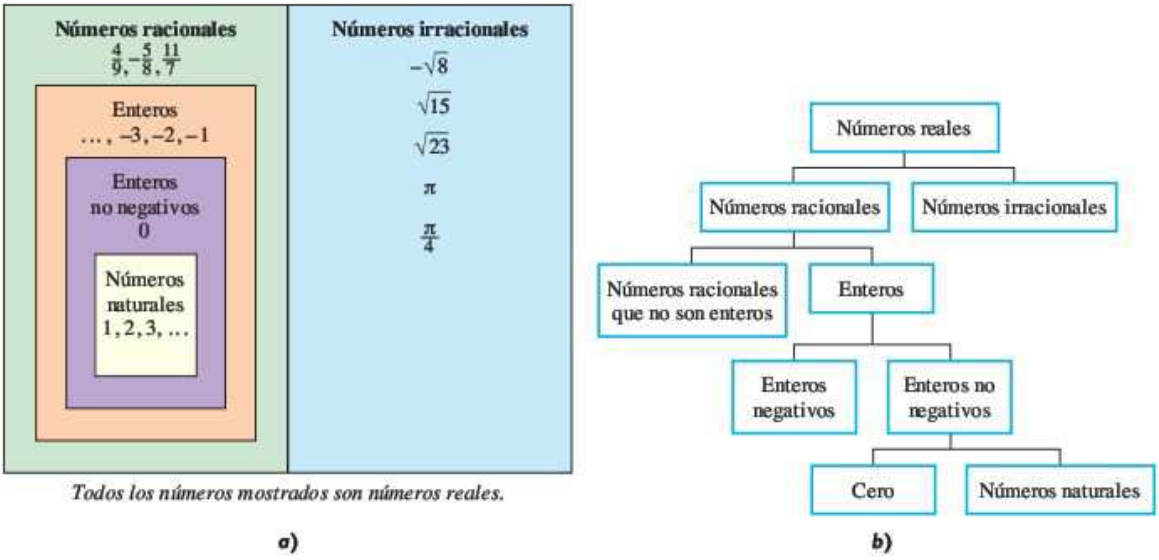


Figura 5

EJEMPLO 1 Identificación de elementos de un conjunto de números

Liste los números del conjunto que pertenecen a cada conjunto de números que se menciona en seguida.

$$\left\{-5, -\frac{2}{3}, 0, \sqrt{2}, \frac{13}{4}, 5, 5.8\right\}$$

a) números naturales ***b)*** números enteros no negativos ***c)*** enteros

d) números racionales ***e)*** números irracionales ***f)*** números reales

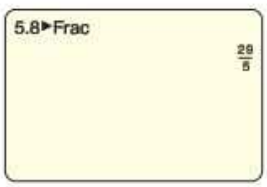
SOLUCIÓN

a) El único número natural en el conjunto es 5.

b) Los números enteros no negativos se integran con los números naturales y 0. Así, los elementos del conjunto que son números enteros no negativos son 0 y 5.

c) Los números enteros en el conjunto son −5, 0 y 5.

d) Los números racionales son $-5, -\frac{2}{3}, 0, \frac{13}{4}, 5$ y 5.8, porque cada uno de ellos se *puede* escribir como el cociente de dos enteros. Por ejemplo, $5.8 = \frac{58}{10} = \frac{29}{5}$.



La calculadora TI-83/84 convierte un decimal a una fracción. Véase el **ejemplo 1*d***.

e) El único número irracional en el conjunto es $\sqrt{2}$.

f) Todos los números en el conjunto son números reales. ■■■

Orden en los números reales

Suponga que a y b representan dos números reales. Si sus gráficas sobre la recta numérica representan el mismo punto, son **iguales**. Si la gráfica de a se encuentra a la izquierda de b, a **es menor que** b, y si la gráfica de a se encuentra a la derecha de b, a **es mayor que** b. La **ley de tricotomía** afirma que para dos números a y b, uno y solo uno de los siguientes enunciados es verdadero.

$$a = b, \quad a < b \quad \text{o} \quad a > b$$

Cuando se lee de izquierda a derecha, el símbolo $<$ significa "es menor que".

$7 < 8$ 7 es menor que 8.

El símbolo $>$ significa "es mayor que".

$8 > 2$ 8 es mayor que 2.

Observe que el símbolo siempre apunta al número menor.

Número menor ⟶ $8 < 15$

El símbolo $\leq$ significa "es menor que o igual a".

$5 \leq 9$ 5 es menor que o igual a 9.

Este enunciado es verdadero, puesto que $5 < 9$ es verdad. ***Si la parte $<$ o la parte $=$ es verdadera, entonces la desigualdad $\leq$ es verdadera***. También, $8 \leq 8$ es verdad porque $8 = 8$ es verdad. Pero $13 \leq 9$ no es verdadero porque ni $13 < 9$ ni $13 = 9$ son verdaderos.

El símbolo $\geq$ significa "es mayor que o igual a".

$9 \geq 5$ 9 es mayor que o igual a 5.

Este enunciado es verdadero porque $9 > 5$ es verdadero.



La calculadora presenta un 1 para cada uno de estos enunciados de desigualdad, lo que significa que son verdaderos.

El símbolo de igualdad, $=$, fue usado por primera vez por el inglés Robert Recorde en su texto de álgebra de 1557, *The Whetstone of Witte*. Usó dos rectas paralelas, porque, dijo, no existen dos cosas que sean más iguales.

Los símbolos de las relaciones de orden, $<$ y $>$, fueron usados por primera vez por otro inglés, Thomas Harriot (1560-1621). Estos símbolos no fueron adoptados inmediatamente por otros matemáticos.

EJEMPLO 2 Comparación de números reales

Determine si cada enunciado es *verdadero* o *falso*.

a) $6 \neq 6$ ***b)*** $5 < 19$ ***c)*** $15 \leq 20$ ***d)*** $25 \geq 30$ ***e)*** $12 \geq 12$

SOLUCIÓN

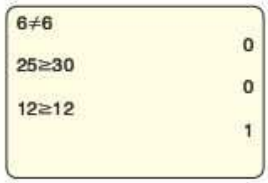
a) El enunciado $6 \neq 6$ es falso, porque 6 *es igual a* 6.

b) Como 5 es claramente menor que 19, este enunciado es verdadero.

c) El enunciado $15 \leq 20$ es verdadero, puesto que $15 < 20$.

d) Tanto $25 > 30$ como $25 = 30$ son falsos, de manera que $25 \geq 30$ es falso.

e) Como $12 = 12$, el enunciado $12 \geq 12$ es verdadero. ■■■



Las desigualdades del **ejemplo 2*a)* y *d)*** son falsas, como se indica por medio del 0. El enunciado del **ejemplo 2*e)*** es verdadero.

Inversos aditivos y valor absoluto

Para cualquier número real x diferente de cero, hay exactamente un número sobre la recta numérica que está a la misma distancia del 0 que x, pero en el lado opuesto del cero. En la **figura 6**, los números 3 y -3 se ubican a la misma distancia de 0, pero en lados opuestos del mismo. Así, 3 y -3 se conocen como **inversos aditivos**, **negativos** u **opuestos**, uno del otro.

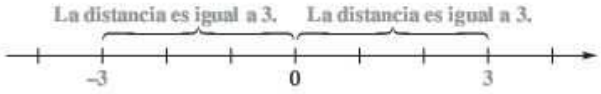
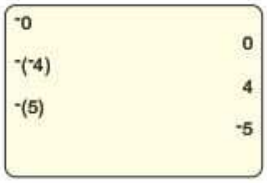


Figura 6



La TI-83/84 Plus distingue entre el símbolo negativo (−) y la operación de sustracción.

El inverso aditivo del número 0 es el 0 mismo. Esto hace del 0 el único número real que es su propio inverso aditivo. Los demás inversos aditivos se presentan en pares. Por ejemplo, 4 y −4, 5 y −5 son inversos aditivos uno del otro. En la **figura 7** se muestran varios pares de inversos aditivos.

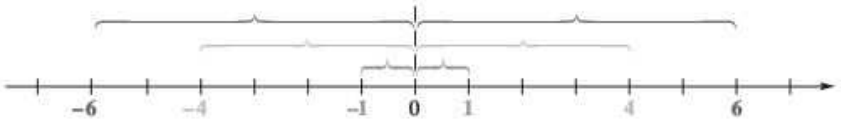


Figura 7

El inverso aditivo de un número se representa escribiendo el símbolo − antes del número. Con este símbolo, el inverso aditivo de 7 se escribe como −7. El inverso aditivo de −4 se escribe como −(−4) y se lee como "el opuesto de −4" o "el negativo de −4". La **figura 7** sugiere que 4 es un inverso aditivo de −4. Como un número tiene solamente un inverso aditivo, los símbolos 4 y −(−4) representan al mismo número, lo cual significa que

$$-(-4) = 4.$$

Regla del doble negativo

Para cualquier número real x, lo siguiente es verdadero.

$$\boldsymbol{-(-x) = x}$$

Tabla 1

Número	Inverso aditivo
-4	$-(-4)$ o 4
0	0
19	-19
$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

La **tabla 1** incluye varios números y sus inversos aditivos. Más adelante en este capítulo se estudiará una propiedad importante de los inversos aditivos:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0, \quad \text{para todos los números reales } a.$$

Como se mencionó, los inversos aditivos son números que se encuentran a la misma distancia de 0 (pero en lados opuestos) sobre la recta numérica. Véase la **figura 7**. Esta idea se puede expresar también diciendo que un número y su inverso aditivo tienen el mismo valor absoluto. El **valor absoluto** de un número real se define como la distancia entre 0 y el número en cuestión sobre la recta numérica.

El símbolo del valor absoluto para el número x es $|x|$, y se lee **"el valor absoluto de x"**. Por ejemplo, la distancia entre 2 y 0 sobre la recta numérica es de 2 unidades, de modo que:

$$|2| = 2.$$

Como la distancia entre −2 y 0 sobre la recta numérica también es de dos unidades,

$$|-2| = 2.$$

Puesto que la distancia es una medición física, la cual nunca es negativa, ***el valor absoluto de un número nunca es negativo.*** Como 0 es una distancia de 0 unidades a partir de 0, $\boldsymbol{|0| = 0}$.

Definición formal del valor absoluto

Para cualquier número real x, el valor absoluto de x se define como sigue.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si x es un número positivo o 0, entonces su valor absoluto es x misma. Por ejemplo, como 8 es un número positivo, $|8| = 8$. ***Si x es un número negativo, entonces su valor absoluto es el inverso aditivo de x.*** Por ejemplo, si $x = -9$, entonces $|-9| = -(-9) = 9$, puesto que el inverso aditivo de −9 es 9.

La definición formal de valor absoluto tal vez parezca confusa si no se lee con cuidado. La "$-x$" de la segunda parte de la definición *no* representa un número negativo. Como x es negativa en la segunda parte, $-x$ representa el opuesto de un número negativo, es decir, un número positivo.

EJEMPLO 3 Uso del valor absoluto

Simplifique obteniendo el valor absoluto.

a) $|5|$ ***b)*** $|-5|$ ***c)*** $-|5|$

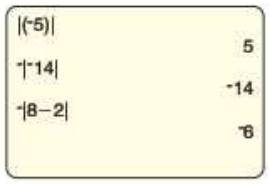
d) $-|-14|$ ***e)*** $|8-2|$ ***f)*** $-|8-2|$

SOLUCIÓN

a) $|5| = 5$ ***b)*** $|-5| = -(-5) = 5$

c) $-|5| = -(5) = -5$ ***d)*** $-|-14| = -(14) = -14$

e) $|8-2| = |6| = 6$ ***f)*** $-|8-2| = -|6| = -6$



Esta pantalla apoya los resultados del **ejemplo 3*b*), d) y *f*)**.

El **ejemplo 3 *e)*** muestra que las barras del valor absoluto también sirven como símbolos de agrupamiento. ***Efectúe cualquier operación que aparezca dentro de los símbolos de valor absoluto antes de obtener el valor absoluto.***

Aplicaciones

EJEMPLO 4 Interpretación del cambio usando una tabla

En la **tabla 2** se muestra la proyección de las tasas anuales de cambio en el número de empleos (en porcentaje) en algunas de las industrias con mayor crecimiento y con declinación más rápida, de 2002 a 2012. ¿Qué industria de la lista se espera que tenga el mayor cambio? ¿Y el menor cambio?

Tabla 2

Industria (2002 a 2012)	Tasa anual de cambio (en porcentaje)
Producción de software	5.3
Servicios de cuidado a adultos mayores	4.5
Servicios de guardería infantil	3.6
Manufactura de corte y confección de ropa	−12.2
Fabricación de telas	−5.9
Metalurgia o minería	−4.8

Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics.

SOLUCIÓN

Queremos identificar el mayor *cambio*, sin importar si se trata de un aumento o una disminución. Busque en la lista el número con el mayor valor absoluto. Ese número se encuentra en la industria de manufactura de corte y confección de ropa, puesto que

$$|-12.2| = 12.2.$$

De manera similar, el menor cambio se encuentra en la industria de servicios de guardería infantil:

$$|3.6| = 3.6.$$

5.1 EJERCICIOS

Dé un número que satisfaga las condiciones que se especifican.

1. Un número entero entre 4.5 y 5.5.
2. Un número racional entre 2.8 y 2.9.
3. Un número entero no negativo que no es positivo y es menor que 1.
4. Un número entero no negativo mayor que 4.5.
5. Un número irracional que se encuentra entre $\sqrt{13}$ y $\sqrt{15}$.
6. Un número real que no es negativo ni positivo.

Determine si los siguientes enunciados son verdaderos *o* falsos.

7. Todos los números naturales son positivos.
8. Todos los números enteros no negativos son positivos.
9. Todos los números enteros son números racionales.
10. Todos los números racionales son números reales.

Liste todos los números de cada conjunto que sean ***a)*** *números naturales;* ***b)*** *números enteros no negativos;* ***c)*** *enteros;* ***d)*** *números racionales;* ***e)*** *números irracionales;* ***f)*** *números reales.*

11. $\left\{-9, -\sqrt{7}, -1\frac{1}{4}, -\frac{3}{5}, 0, \sqrt{5}, 3, 5.9, 7\right\}$
12. $\left\{-5.3, -5, -\sqrt{3}, -1, -\frac{1}{9}, 0, 1.2, 1.8, 3, \sqrt{11}\right\}$
13. Explique los diferentes conjuntos de números presentados en esta sección, y dé un ejemplo de cada clase.
14. ¿Cuáles son las dos posibilidades de representación decimal de un número racional?

Use un número entero para expresar cada número en negritas que representa un cambio o una medición en las siguientes aplicaciones.

15. ***Altura de la Torre del New York Times*** La Torre del New York Times tiene **1046** pies de altura. (*Fuente:* Council on Tall Buildings and Urban Habitat).
16. ***Población de Dakota del Norte*** Entre 1990 y 2000, la población de Dakota del Norte aumentó en **3400** habitantes. (*Fuente:* U.S. Census Bureau).
17. ***Altura del Monte Arenal*** La altura del Monte Arenal, un volcán activo de Costa Rica, es de **5436** pies por arriba del nivel del mar. (*Fuente: The New York Times Almanac*).
18. ***Punto de ebullición del cloro*** El punto de ebullición del cloro es de aproximadamente **30°** Fahrenheit bajo 0°.
19. ***Punto de fusión del flúor*** El punto de fusión del flúor es de **220°** Celsius bajo 0°.
20. ***Población del Distrito de Columbia*** Entre 1990 y 2000, la población del Distrito de Columbia disminuyó en **31,841** habitantes. (*Fuente:* U.S. Census Bureau).
21. ***Sensación térmica*** Cuando la velocidad del viento es de **30** millas por hora, y la temperatura real es de **15°** Fahrenheit, el factor de sensación térmica es de **5°** Fahrenheit bajo 0°.
22. ***Elevación de Nueva Orleans*** La ciudad de Nueva Orleans se encuentra a **8** pies bajo el nivel del mar. (*Fuente:* U.S. Geological Survey, *Elevations and Distances in the United States*).
23. ***Profundidades y alturas de mares y montañas*** La tabla indica profundidades de cuerpos de agua y alturas de montañas.

Cuerpos de agua	Profundidad promedio en pies (como un número negativo)	Montañas	Altitud en pies (como un número positivo)
Océano Pacífico	−12,925	McKinley	20,320
Mar del Sur en China	−4802	Point Success	14,150
Golfo de California	−2375	Matlalcueyetl	14,636
Mar Caribe	−8448	Ranier	14,410
Océano Índico	−12,598	Steele	16,644

Fuente: The World Almanac and Book of Facts.

a) Liste los cuerpos de agua en orden, iniciando con el más profundo y terminando con el menos profundo.

b) Liste las montañas en orden, iniciando con la más baja y terminando con la más alta.

c) *Verdadero o falso*: El valor absoluto de la profundidad del Océano Pacífico es mayor que el valor absoluto de la profundidad del Océano Índico.

d) *Verdadero o falso*: El valor absoluto de la profundidad del Golfo de California es mayor que el valor absoluto de la profundidad del Mar Caribe.

24. ***Porcentaje de cambio*** La gráfica muestra el porcentaje de cambio en las ventas domésticas (Estados Unidos) de automóviles de enero de 2004 a enero de 2005 de varios fabricantes.

a) ¿Qué fabricante registró el mayor cambio en ventas? ¿Cuál fue el cambio?

b) ¿Qué fabricante registró el menor cambio en ventas? ¿Cuál fue el cambio?

c) *Verdadero* o *falso:* El valor absoluto del porcentaje de cambio de Ford fue mayor que el valor absoluto del porcentaje de cambio de General Motors.

d) *Verdadero* o *falso:* El porcentaje de cambio de Toyota fue más de cuatro veces mayor que el porcentaje de cambio de Mazda.



Fuente: Chicago Tribune.

Grafique cada grupo de números sobre una recta numérica.

25. $-2, -6, -4, 3, 4$

26. $-5, -3, -2, 0, 4$

27. $\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, -3\frac{4}{5}, -4, -1\frac{5}{8}$

28. $5\frac{1}{4}, 4\frac{5}{9}, -2\frac{1}{3}, 0, -3\frac{2}{5}$

29. Asocie cada expresión de la columna I con su valor en la columna II. Tal vez no se utilicen algunas opciones de la columna II.

I	II
a) $\lvert -7\rvert$	**A.** 7
b) $-(-7)$	**B.** -7
c) $-\lvert -7\rvert$	**C.** ni A ni B
d) $-\lvert -(-7)\rvert$	**D.** A y B

30. Llene los espacios con los valores correctos: El opuesto de -2 es ____, mientras que el valor absoluto de -2 es ____. El inverso aditivo de -2 es ____, mientras que el inverso aditivo del valor absoluto de -2 es ____.

Obtenga ***a)*** *el inverso aditivo (u opuesto) de cada número y* ***b)*** *el valor absoluto de cada número.*

31. -2

32. -8

33. 6

34. 11

35. $7 - 4$

36. $8 - 3$

37. $7 - 7$

38. $3 - 3$

39. Use los resultados de los **ejercicios 35 y 36** para completar lo siguiente: Si $a - b > 0$, entonces el valor absoluto de $a - b$ en términos de a y b es ____.

40. Observe los **ejercicios 37 y 38** y use los resultados para completar lo siguiente: Si $a - b = 0$, entonces el valor absoluto de $a - b$ es ____.

Seleccione el menor de los dos números dados.

41. $-12, -4$

42. $-9, -14$

43. $-8, -1$

44. $-15, -16$

45. $3, \lvert -4\rvert$

46. $5, \lvert -2\rvert$

47. $\lvert -3\rvert, \lvert -4\rvert$

48. $\lvert -8\rvert, \lvert -9\rvert$

49. $-\lvert -6\rvert, -\lvert -4\rvert$

50. $-\lvert -2\rvert, -\lvert -3\rvert$

51. $\lvert 5 - 3\rvert, \lvert 6 - 2\rvert$

52. $\lvert 7 - 2\rvert, \lvert 8 - 1\rvert$

Determine si cada enunciado es verdadero *o* falso.

53. $6 > -(-2)$

54. $-8 > -(-2)$

55. $-4 \le -(-5)$

56. $-6 \le -(-3)$

57. $\lvert -6\rvert < \lvert -9\rvert$

58. $\lvert -12\rvert < \lvert -20\rvert$

59. $-\lvert 8\rvert > \lvert -9\rvert$

60. $-\lvert 12\rvert > \lvert -15\rvert$

61. $-\lvert -5\rvert \ge -\lvert -9\rvert$

62. $-\lvert -12\rvert \le -\lvert -15\rvert$

63. $\lvert 6 - 5\rvert \ge \lvert 6 - 2\rvert$

64. $\lvert 13 - 8\rvert \le \lvert 7 - 4\rvert$

65. ***Cambios demográficos*** La tabla muestra el porcentaje de cambio en la población de 2000 a 2006 en determinados estados de EUA.

a) ¿Qué estado registró el mayor cambio demográfico? ¿Cuál fue el cambio? ¿Se trató de un aumento o de una disminución?

Estado	Porcentaje de cambio
Alabama	3.4
Iowa	1.9
Luisiana	−4.1
Michigan	1.6
Dakota del Norte	−1.0
Virginia Occidental	0.6

Fuente: U.S. Census Bureau.

b) ¿Cuál estado registró el menor cambio demográfico? ¿Cuál fue el cambio? ¿Se trató de un aumento o de una disminución?

66. ***Balanza comercial*** La tabla presenta el salto neto de la balanza comercial, en millones de dólares, para determinados socios comerciales de Estados Unidos en enero de 2006.

País	Balanza comercial (en millones de dólares)
India	−1257
China	−17,911
Países Bajos	756
Francia	−85
Turquía	−78

Fuente: U.S. Census Bureau.

Una balanza comercial negativa significa que las importaciones de Estados Unidos exceden a las exportaciones, mientras que una balanza positiva significa que las exportaciones exceden a las importaciones.

a) ¿Qué país registró la mayor diferencia entre exportaciones e importaciones? Explique su respuesta.

b) ¿Qué país registró la menor diferencia entre exportaciones e importaciones? Explique su respuesta.

67. ***Comparación de datos de empleo*** Observe la tabla del **ejemplo 4**. De las industrias de fabricación de telas y la producción de software, ¿cuál tasa de empleo anual muestra el mayor cambio (sin tomar en cuenta el signo)?

68. Los estudiantes afirman con frecuencia: "El valor absoluto siempre es positivo". ¿Es verdad esto? Si no, explique por qué.

Dé tres números entre −6 y 6 que satisfagan cada condición requerida.

69. Números reales positivos, pero no enteros.

70. Números reales, pero no números positivos.

71. Números reales, pero no números enteros no negativos.

72. Números racionales, pero no enteros.

73. Números reales, pero no números racionales.

74. Números racionales, pero no números negativos.

5.2 OPERACIONES, PROPIEDADES Y APLICACIONES DE LOS NÚMEROS REALES

Operaciones • Orden (prioridad) de las operaciones • Propiedades de la suma y la multiplicación de números reales • Aplicaciones de los números reales

Operaciones

El resultado de la adición de dos números se conoce como **suma**. Los números que se suman se llaman **sumandos** (o **términos**).

Suma de números reales

Signos iguales Para sumar dos números del *mismo* signo, se suman sus valores absolutos. El signo de la suma (ya sea + o −) es el mismo signo de los dos números.

Signos diferentes Para sumar dos números de signo *diferente*, se resta el valor absoluto más pequeño del más grande para obtener el valor absoluto de la suma. La suma es positiva si el número positivo tiene el mayor valor absoluto. La suma es negativa si el número negativo tiene el mayor valor absoluto.

Por ejemplo, para sumar −12 y −8, primero se obtienen sus valores absolutos.

$$|-12| = 12 \quad \text{y} \quad |-8| = 8$$

Como −12 y −8 tienen el *mismo* signo, se suman los valores absolutos: 12 + 8 = 20. La suma adopta el signo de los dos números. Como ambos números son negativos, la suma es negativa, y

$$-12 + (-8) = -20.$$

Para obtener la suma de $-17 + 11$ se restan los valores absolutos, ya que estos números tienen signos diferentes.

$$|-17| = 17 \quad \text{y} \quad |11| = 11$$
$$17 - 11 = 6$$

El signo del resultado es el del número con el mayor valor absoluto.

$$-17 + 11 = -6$$

↑ Es negativo puesto que $|-17| > |11|$

EJEMPLO 1 Suma de números con signo

Efectúe cada suma.

a) $-6 + (-3)$ ***b)*** $-12 + (-4)$ ***c)*** $4 + (-1)$

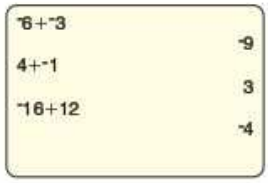
d) $-9 + 16$ ***e)*** $-16 + 12$ ***f)*** $-4 + 4$

SOLUCIÓN

a) $-6 + (-3) = -(6 + 3) = -9$ ***b)*** $-12 + (-4) = -(12 + 4) = -16$

c) $4 + (-1) = 3$ ***d)*** $-9 + 16 = 7$

e) $-16 + 12 = -4$ ***f)*** $-4 + 4 = 0$ La suma de inversos aditivos es igual a 0. ■■■



La calculadora apoya los resultados del **ejemplo 1*a*), *c*) y *e*)**.

El resultado de la resta o sustracción de dos números se conoce como **diferencia**. En $a - b$, a se conoce como **minuendo**, y b se conoce como **sustraendo**. Compare los dos enunciados siguientes.

$$7 - 5 = 2 \quad \text{y} \quad 7 + (-5) = 2$$

De manera similar, $9 - 3 = 9 + (-3)$. Es decir, para restar 3 de 9, se suma el inverso aditivo de 3 a 9. Estos ejemplos sugieren la siguiente regla para la sustracción.

Definición de sustracción

Para todos los números reales a y b,

$$a - b = a + (-b).$$

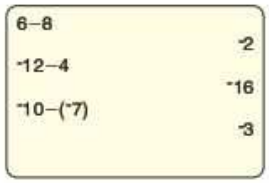
(Se cambia el signo del sustraendo y se suma).

EJEMPLO 2 Sustracción de números con signo

Obtenga cada diferencia.

a) $6 - 8$ ***b)*** $-12 - 4$ ***c)*** $-10 - (-7)$ ***d)*** $15 - (-3)$

SOLUCIÓN



La calculadora apoya los resultados del **ejemplo 2*a*), *b*) y *c*)**.

Cambio a suma.
Se cambia el signo del sustraendo y se suma.

a) $6 - 8 = 6 + (-8) = -2$

Cambio a suma.
Se cambia el signo.

b) $-12 - 4 = -12 + (-4) = -16$



Aritmética práctica En los tiempos de los mercaderes egipcios y babilonios, aspectos prácticos de la aritmética complementaban las tendencias místicas (o "pitagóricas"). Esto realmente fue verdad en los tiempos de **Adam Riese** (1489-1559), un influyente "maestro del cálculo", cuando el comercio crecía en el norte de Europa. Riese abogó por nuevos métodos de cálculo que empleaban numerales indo-arábigos y plumas de ave. (Los métodos romanos, entonces de uso común, se servían de cuentas que se desplazaban sobre una tabla con renglones). Así, Riese hizo realidad los esfuerzos de Fibonacci 300 años antes para sustituir los numerales y los métodos romanos.

c) $-10 - (-7) = -10 + [-(-7)]$ Este paso se puede omitir.
$= -10 + 7$
$= -3$

d) $15 - (-3) = 15 + 3 = 18$ ■■■

El resultado de multiplicar dos números se conoce como **producto**. Los dos números que se multiplican se llaman **factores**. Cualquier regla de multiplicación con números reales negativos debe ser congruente con las reglas para la multiplicación de los números reales positivos y cero. Con la finalidad de obtener de manera inductiva una regla para la multiplicación de un número real positivo y un número real negativo, observe el siguiente patrón de productos.

$$4 \cdot 5 = 20$$
$$4 \cdot 4 = 16$$
$$4 \cdot 3 = 12$$
$$4 \cdot 2 = 8$$
$$4 \cdot 1 = 4$$
$$4 \cdot 0 = 0$$
$$4 \cdot (-1) = ?$$

¿Qué número se debe asignar al producto $4 \cdot (-1)$ de modo que el patrón se conserve? Los números inmediatamente a la izquierda del signo de igualdad disminuyen de 1 en 1, y los productos de la derecha decrecen de 4 en 4. Para mantener el patrón, el número a la derecha en la ecuación inferior debe ser 4 veces menor que 0, lo cual es -4, de manera que

$$4 \cdot (-1) = -4.$$

El patrón continúa con

$$4 \cdot (-2) = -8$$
$$4 \cdot (-3) = -12$$
$$4 \cdot (-4) = -16,$$

y así sucesivamente. De la misma manera,

$$-4 \cdot 2 = -8$$
$$-4 \cdot 3 = -12$$
$$-4 \cdot 4 = -16,$$

y así sucesivamente. Una observación similar se puede hacer acerca del producto de dos números reales negativos. Observe el siguiente patrón.

$$-5 \cdot 4 = -20$$
$$-5 \cdot 3 = -15$$
$$-5 \cdot 2 = -10$$
$$-5 \cdot 1 = -5$$
$$-5 \cdot 0 = 0$$
$$-5 \cdot (-1) = ?$$

Los números inmediatamente a la izquierda de la igualdad disminuyen de 1 en 1. Los productos a la derecha aumentan 5 cada vez. Para mantener el patrón, el producto $-5 \cdot (-1)$ debe ser 5 veces mayor que 0, de modo que parece razonable que lo siguiente sea verdadero.

$$-5 \cdot (-1) = 5$$

Continuando este patrón se obtiene lo siguiente.

$$-5 \cdot (-2) = 10$$
$$-5 \cdot (-3) = 15$$
$$-5 \cdot (-4) = 20$$
$$\vdots$$

Estas observaciones traen consigo las siguientes reglas de la multiplicación.

Multiplicación de números reales

Signos iguales Para multiplicar dos números con el *mismo* signo, se multiplican sus valores absolutos para obtener el valor absoluto del producto. El producto es positivo.

Signos diferentes Para multiplicar dos números con signos *diferentes*, se multiplican los valores absolutos para obtener el valor absoluto del producto. El producto es negativo.

$(+) \cdot (+) = +$
$(-) \cdot (-) = +$
$(+) \cdot (-) = -$
$(-) \cdot (+) = -$

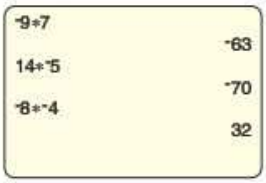
EJEMPLO 3 Multiplicación de números con signo

Obtenga cada producto.

a) $-9 \cdot 7$ ***b)*** $14 \cdot (-5)$ ***c)*** $-8 \cdot (-4)$

SOLUCIÓN

a) $-9 \cdot 7 = -63$ ***b)*** $14 \cdot (-5) = -70$ ***c)*** $-8 \cdot (-4) = 32$ ■■■



El símbolo (*) representa la multiplicación en la pantalla. Los resultados en pantalla apoyan los obtenidos en el **ejemplo 3**.

El resultado de dividir dos números se conoce como **cociente**. En el cociente de $a \div b$ (o $\frac{a}{b}$), donde $b \neq 0$, a se conoce como **dividendo** (o numerador), y b se conoce como **divisor** (o denominador). Para los números reales a, b y c,

$$\textbf{si} \quad \frac{a}{b} = c, \quad \textbf{entonces} \quad a = b \cdot c.$$

Para ilustrar esto, considere el cociente $\frac{10}{-2}$. El valor de este cociente se obtiene preguntando: "¿Qué número multiplicado por -2 nos da 10?". Partiendo de nuestro análisis de la multiplicación, la respuesta a esta pregunta es "-5". Por lo tanto,

$$\frac{10}{-2} = -5, \quad \text{porque} \quad 10 = -2 \cdot (-5).$$

De manera similar,

$$\frac{-10}{2} = -5 \quad \text{y} \quad \frac{-10}{-2} = 5.$$

Lo anterior, aunado al hecho de que el cociente de dos números positivos es positivo, conduce a las siguientes reglas para la división.

División de números reales

Signos iguales La división de dos números con el *mismo* signo se realiza dividiendo sus valores absolutos para obtener el valor absoluto del cociente. El cociente es positivo.

Signos diferentes La división de dos números con signos *diferentes* se realiza dividiendo sus valores absolutos para obtener el valor absoluto del cociente. El cociente es negativo.

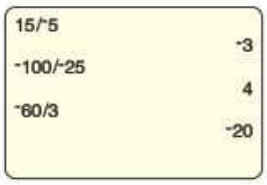
$(+)/(+) = +$
$(-)/(-) = +$
$(+)/(-) = -$
$(-)/(+) = -$

EJEMPLO 4 División de números con signo

Obtenga cada cociente.

a) $\frac{15}{-5}$ *b)* $\frac{-100}{-25}$ **c)** $\frac{-60}{3}$

SOLUCIÓN



La operación de división se representa mediante una diagonal (/). Esta pantalla apoya los resultados del **ejemplo 4**.

a) $\frac{15}{-5} = -3$ Esto es verdadero porque $-5 \cdot (-3) = 15$.

b) $\frac{-100}{-25} = 4$ *c)* $\frac{-60}{3} = -20$

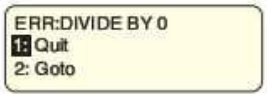
Si se divide 0 entre un número diferente de cero, el cociente es 0.

$$\frac{\mathbf{0}}{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0}, \quad \textbf{para } \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$$

Esto es verdadero porque $a \cdot 0 = 0$. Sin embargo, no se puede dividir entre 0. Existe una buena razón para esto. Siempre que se realiza una división, lo que deseamos es obtener un cociente y solo uno. Ahora considere este problema de división.

$$\frac{7}{0}$$

Debemos preguntarnos: "¿Qué número multiplicado por 0 nos da 7?". No existe tal número, puesto que el producto de 0 por cualquier número es cero. Ahora considere este cociente.



La división entre 0 produce este mensaje en la calculadora TI-83/84 Plus.

$$\frac{0}{0}$$

Existe un número infinito de respuestas a esta pregunta: "¿Qué número multiplicado por 0 nos da 0?". Puesto que la división entre 0 no produce un cociente *único*, esto no está permitido.

División entre cero

La división entre 0 es indefinida.



¿Qué resultado da la calculadora? El orden (la prioridad) de las operaciones determina la respuesta. [Véase el **ejemplo 5 *a***)].

Orden (prioridad) de las operaciones

Dado un problema como $5 + 2 \cdot 3$, ¿debe sumarse primero 5 y 2, o debe multiplicarse primero 2 por 3? Cuando un problema implica más de una operación, se deben aplicar las siguientes reglas del **orden de las operaciones**.

Orden de las operaciones

Si están presentes paréntesis y/o corchetes:

Paso 1 Trabaje por separado arriba y abajo de cualquier **barra de una fracción**.

Paso 2 Aplique las siguientes reglas dentro de cada grupo de **paréntesis o corchetes**. Inicie con el conjunto más interno y trabaje hacia fuera.

Si no hay paréntesis o corchetes:

Paso 1 Desarrolle todos los **exponentes**.

Paso 2 Realice todas las **multiplicaciones o divisiones** en el orden en que se presentan, trabajando de izquierda a derecha.

Paso 3 Efectúe todas las **sumas o restas** en el orden en que se presentan, trabajando de izquierda a derecha.

La frase **"Ponte en mi difícil situación, Reina"** se puede usar para ayudarnos a recordar la regla del orden de las operaciones. Las letras **P, E, M, D, S, R** son las primeras letras de las palabras de la frase, y significan ***paréntesis, exponentes, multiplicación, división, suma, resta***. (También recuerde que *M* y *D* tienen igual prioridad, así como *S* y *R*. *Las operaciones con la misma prioridad se realizan de izquierda a derecha*).

Cuando se realiza una expresión con exponentes que incluye un signo negativo, debemos estar conscientes de que $(-a)^n$ y $-a^n$ no necesariamente representan la misma cantidad. Por ejemplo, si $a = 2$ y $n = 6$,

$$(-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64$$ La base es −2.

mientras que $$-2^6 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -64.$$ La base es 2.



Observe la diferencia entre las dos expresiones. Esto apoya $(-2)^6 \neq -2^6$.

EJEMPLO 5 Aplicación del orden de las operaciones

De acuerdo con el orden de las aplicaciones, simplifique cada expresión.

a) $5 + 2 \cdot 3$ *b)* $4 \cdot 3^2 + 7 - (2 + 8)$

c) $\dfrac{2(8 - 12) - 11(4)}{5(-2) - 3}$ *d)* -4^4

e) $(-4)^4$ *f)* $(-8)(-3) - [4 - (3 - 6)]$

SOLUCIÓN

a) $5 + 2 \cdot 3 = 5 + 6$ Se multiplica.

$= 11$ Se suma.

Tenga cuidado de multiplicar primero.

b) $4 \cdot 3^2 + 7 - (2 + 8) = 4 \cdot 3^2 + 7 - 10$ Se trabaja primero dentro del paréntesis.

3^2 significa $3 \cdot 3$, no $3 \cdot 2$.

$= 4 \cdot 9 + 7 - 10$ Se desarrolla el exponente.

$= 36 + 7 - 10$ Se multiplica.

$= 43 - 10$ Se suma.

$= 33$ Se resta.

c) $\dfrac{2(8 - 12) - 11(4)}{5(-2) - 3} = \dfrac{2(-4) - 11(4)}{5(-2) - 3}$ Se trabaja por separado arriba y abajo de la barra de la fracción.

$= \dfrac{-8 - 44}{-10 - 3}$ Se multiplica.

$= \dfrac{-52}{-13}$ Se resta.

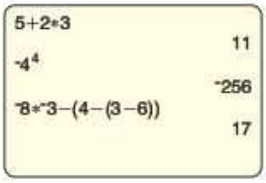
$= 4$ Se divide.

d) $-4^4 = -(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = -256$

La base es 4, no −4.

e) $(-4)^4 = (-4)(-4)(-4)(-4) = 256$

Aquí la base es −4.



La calculadora apoya los resultados del **ejemplo 5** *a)*, *d)* y *f)*.

f) $-8(-3) - [4 - (3 - 6)] = -8(-3) - [4 - (-3)]$ Se trabaja dentro del paréntesis.

Se inicia aquí.

$= -8(-3) - [4 + 3]$ Definición de resta.

$= -8(-3) - 7$ Se trabaja dentro de los corchetes.

$= 24 - 7$ Se multiplica.

$= 17$ Se resta.

Propiedades de la suma y la multiplicación de números reales

Propiedades de la suma y la multiplicación

Para los números reales a, b y c, se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedades de cerradura	$a + b$ y ab **son números reales.**
Propiedades conmutativas	$a + b = b + a \qquad ab = ba$
Propiedades asociativas	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(ab)c = a(bc)$
Propiedades de identidad	Existe un número real 0 tal que $a + 0 = a$ y $0 + a = a$. Existe un número real 1 tal que $a \cdot 1 = a$ y $1 \cdot a = a$.
Propiedades inversas	Para cada número real a, existe un solo número real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$ y $(-a) + a = 0$. Para cada número real a diferente de cero, existe un solo número real $\frac{1}{a}$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ y $\frac{1}{a} \cdot a = 1$.
Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma	$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ba + ca$

Se dice que el conjunto de números reales es cerrado respecto de las operaciones de suma y multiplicación. Esto significa que la suma de dos números reales y el producto de dos números reales son, en sí mismos, números reales. Las propiedades conmutativas establecen que dos números reales se pueden sumar o multiplicar en cualquier orden sin alterar el resultado. Las propiedades asociativas permiten agrupar los términos o factores de cualquier manera que deseemos sin alterar el resultado.

El número 0 es el **elemento de identidad de la suma**. Se puede sumar a cualquier número real para obtener ese número real. De forma similar, 1 es el **elemento de identidad de la multiplicación**. La multiplicación de un número real por 1 siempre producirá ese número real.

Cada número real a tiene un **inverso aditivo**, $-a$, tal que la suma de a y su inverso aditivo es el elemento de identidad de la suma, es decir, 0. Cada número real distinto de 0 tiene un **inverso multiplicativo**, o **recíproco**, $\frac{1}{a}$, tal que el producto de a y su inverso multiplicativo es el elemento de identidad de la multiplicación, es decir, 1.

La propiedad distributiva permite cambiar ciertos productos a sumas y ciertas sumas a productos.

```
X+Y=Y+X                    1
X+(Y+Z)=(X+Y)+Z            1
5(X+Y)=5X+5Y               1
```

Sin importar qué valores se almacenen en X, Y y Z, las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva garantizan que estos enunciados son verdaderos.

EJEMPLO 6 Identificación de las propiedades de la suma y de la multiplicación

Identifique las propiedades de la suma o de la multiplicación ilustradas en cada enunciado.

a) $5 + 7$ es un número real.

b) $5 + (6 + 8) = (5 + 6) + 8$

c) $8 + 0 = 8$

d) $-4\left(-\frac{1}{4}\right) = 1$

e) $4 + (3 + 9) = 4 + (9 + 3)$

f) $5(x + y) = 5x + 5y$

SOLUCIÓN

a) El enunciado de que la suma de dos números reales también es un número real es un ejemplo de la *propiedad de cerradura de la suma*.

b) Como el agrupamiento de términos es diferente en los dos lados de la ecuación, esto ilustra la *propiedad asociativa de la suma*.

c) La suma de 0 a un número produce el mismo número. Esto es un ejemplo de la *propiedad de identidad de la suma*.

d) La multiplicación de un número por su recíproco es igual a 1, y esto ilustra la *propiedad inversa de la multiplicación*.

e) El orden de los sumandos (términos) 3 y 9 es diferente, de manera que esto se justifica mediante la *propiedad conmutativa de la suma*.

f) El factor 5 se distribuye en los términos x y y. Este es un ejemplo de la *propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma*. ■■■

Aplicaciones de los números reales

La utilidad de los números negativos se puede constatar en situaciones que se presentan en la vida diaria. Por ejemplo, necesitamos números negativos para expresar las temperaturas en los días de enero en Anchorage, Alaska, donde con frecuencia se alcanzan valores bajo cero. Las frases "números rojos" o "números negros" significan pérdida o ganancia de dinero, respectivamente. Estas descripciones nos recuerdan los días en que los tenedores de libros usaban tinta roja para representar pérdidas y tinta negra para las ganancias.

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Cuando los problemas implican ganancias y pérdidas, las ganancias se pueden interpretar como números positivos y las pérdidas como números negativos. Las temperaturas por debajo de 0° son negativas, y por arriba de 0° son positivas. Las altitudes por arriba del nivel del mar se consideran positivas, y por debajo del nivel del mar se consideran negativas.

EJEMPLO 7 Análisis del cambio en rendimientos anuales

La **figura 8** muestra los porcentajes de rendimientos anuales de las acciones clase A del AIM Charter Fund.



Fuente: AIM.



Figura 8

Use un número con signo para representar el cambio en el porcentaje de los rendimientos, mostrados en la **figura 8** de la página anterior, para los siguientes años.

a) 2002 a 2003 ***b)*** 2003 a 2004

SOLUCIÓN

a) Para determinar el cambio, iniciamos con el porcentaje de 2003 y le restamos el porcentaje de 2002.

$$\underbrace{23.99}_{\text{Porcentaje de 2003}} - \underbrace{(-16.14)}_{\text{Porcentaje de 2002}} = \underbrace{40.13}_{\substack{\text{Un número positivo}\\ \text{indica aumento.}}}$$

b) Se usa el mismo procedimiento del inciso ***a)***.

$$\underbrace{8.67}_{\text{Porcentaje de 2004}} - \underbrace{23.99}_{\text{Porcentaje de 2003}} = \underbrace{-15.32}_{\substack{\text{Un número negativo}\\ \text{indica disminución.}}}$$

▮▮▮

EJEMPLO 8 Determinación de diferencias en temperatura

El récord de la temperatura más alta en Estados Unidos fue de 134° Fahrenheit, y se presentó en el Valle de la Muerte, California, en 1913. El récord más bajo fue de −80° F en Prospect Creek, Alaska, en 1971. Véase la **figura 9**. ¿Cuál fue la diferencia entre la temperatura más alta y la temperatura más baja? (*Fuente: The World Almanac and Book Facts*).



Figura 9

SOLUCIÓN

Se debe restar la temperatura más baja de la temperatura más alta.

$$\begin{aligned} 134 - (-80) &= 134 + 80 && \text{Se usa la definición de resta.}\\ &= 214 && \text{Se suma.} \end{aligned}$$

La diferencia entre las dos temperaturas es de 214° F. ▮▮▮

5.2 EJERCICIOS

Llene los espacios con la respuesta correcta.

1. La suma de dos números negativos siempre será un número _____.
(positivo/negativo)

2. La suma de un número y su opuesto siempre será _____.

3. Para simplificar la expresión $8 + [-2 + (-3 + 5)]$, se debe comenzar sumando _____ y _____, de acuerdo con las reglas del orden de las operaciones.

4. Si se suma un número positivo y un número negativo, y el número negativo tiene el valor absoluto más grande, la suma será un número _____.
(positivo/negativo)

5. Explique con palabras cómo sumar números con signo. Considere varios casos y dé ejemplos.

6. Explique con palabras cómo multiplicar números con signo.

Realice las operaciones indicadas, usando el orden de las operaciones cuando sea necesario.

7. $-12 + (-8)$

8. $-5 + (-2)$

9. $12 + (-16)$

10. $-6 + 17$

11. $-12 - (-1)$

12. $-3 - (-8)$

13. $-5 + 11 + 3$

14. $-9 + 16 + 5$

15. $12 - (-3) - (-5)$

16. $15 - (-6) - (-8)$

17. $-9 - (-11) - (4 - 6)$

18. $-4 - (-13) + (-5 + 10)$

19. $(-12)(-2)$

20. $(-3)(-5)$

21. $9(-12)(-4)(-1)(3)$

22. $-5(-17)(2)(-2)(4)$

23. $\frac{-18}{-3}$ **24.** $\frac{-100}{-50}$ **25.** $\frac{36}{-6}$

26. $\frac{52}{-13}$ **27.** $\frac{0}{12}$ **28.** $\frac{0}{-7}$

29. $-6 + [5 - (3 + 2)]$ **30.** $-8[4 + (7 - 8)]$

31. $-4 - 3(-2) + 5^2$ **32.** $-6 - 5(-8) + 3^2$

33. $(-8 - 5)(-2 - 1)$ **34.** $\frac{(-10 + 4) \cdot (-3)}{-7 - 2}$

35. $-8(-2) - [(4^2) + (7 - 3)]$

36. $-7(-3) - [2^3 - (3 - 4)]$

37. $\frac{(-6 + 3) \cdot (-4)}{-5 - 1}$

38. $\frac{2(-5 + 3)}{-2^2} - \frac{(-3^2 + 2)(3)}{3 - (-4)}$

39. $\frac{2(-5) + (-3)(-2^2)}{-3^2 + 9}$ **40.** $\frac{3(-4) + (-5)(-2)}{2^3 - 2 + (-6)}$

41. $-\frac{1}{4}[3(-5) + 7(-5) + 1(-2)]$

42. $\frac{5 - 3\left(\frac{-5 - 9}{-7}\right) - 6}{-9 - 11 + 3 \cdot 7}$

43. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son indefinidas?

A. $\frac{8}{0}$ **B.** $\frac{9}{6 - 6}$ **C.** $\frac{4 - 4}{5 - 5}$ **D.** $\frac{0}{-1}$

44. Si usted no tiene dinero en su bolsillo, pero lo divide en partes iguales entre sus tres hermanos, ¿cuánto obtiene cada uno? Use esta situación para explicar la división de cero entre un número entero positivo.

Identifique la propiedad ilustrada en cada enunciado.

45. $6 + 9 = 9 + 6$ **46.** $8 \cdot 4 = 4 \cdot 8$

47. $9 + (-9) = 0$ **48.** $12 + 0 = 12$

49. $9 \cdot 1 = 9$ **50.** $\left(\frac{1}{-3}\right) \cdot (-3) = 1$

51. $7 + (2 + 5) = (7 + 2) + 5$

52. $(3 \cdot 5) \cdot 4 = 4 \cdot (3 \cdot 5)$

53. $0 + 283 = 283$

54. $6 \cdot (4 \cdot 2) = (6 \cdot 4) \cdot 2$

55. $2 \cdot (4 + 3) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3$

56. $9 \cdot 6 + 9 \cdot 8 = 9 \cdot (6 + 8)$

57. $0 = -8 + 8$

58. $19 + 12$ es un número real.

59. $19 \cdot 12$ es un número real.

60. Uno de los autores recibió un mensaje por correo electrónico de un viejo amigo, Frank Capek. Frank dijo que su nieto tenía que resolver $9 + 15 \div 3$. Frank y su esposa Bárbara dijeron que la respuesta era 8, pero su nieto insistía en que la respuesta correcta era 14. El razonamiento del nieto era: "Existe una regla llamada Orden de Proceso que afirma que se debe proceder de derecha a izquierda, y no de izquierda a derecha".

a) ¿Cuál es la respuesta correcta?

b) ¿Es correcto el razonamiento del nieto? Explique.

Los ejercicios 61 a 68 están diseñados para explorar con mayor detalle las propiedades de los números reales.

61. ***a)*** Resuelva $6 - 8$ y $8 - 6$.

b) A partir de los resultados del inciso ***a)***, podemos concluir que la resta no es una operación _____.

c) ¿Existen números reales *cualesquiera* a y b para los cuales $a - b = b - a$? Si es así, dé un ejemplo.

62. ***a)*** Resuelva $4 \div 8$ y $8 \div 4$.

b) A partir de los resultados del inciso *a)*, podemos concluir que la división no es una operación _____.

c) ¿Existen números reales *cualesquiera* a y b para los cuales $a \div b = b \div a$? Si es así, dé un ejemplo.

63. Muchos acontecimientos cotidianos pueden considerarse como operaciones de opuestos o inversos. Por ejemplo, la operación inversa de "irse a dormir" es "despertarse". Para cada una de las siguientes actividades, especifique su inverso.

a) Limpiar su cuarto.

b) Ganar dinero.

c) aumentar el volumen de su reproductor MP3.

64. Muchas actividades cotidianas son conmutativas; es decir, el orden en el cual se realizan no afecta el resultado. Por ejemplo, "ponerse la camisa" y "ponerse los pantalones" son operaciones conmutativas. Determine si las siguientes actividades son conmutativas.

a) Ponerse los zapatos; ponerse los calcetines.

b) Vestirse; tomar una ducha.

c) Peinarse el cabello; cepillarse los dientes.

65. La conversación que sigue, realmente sucedió entre uno de los autores de este libro y su hijo, Jack, cuando este último tenía cuatro años de edad.

PAPÁ: "Jack, ¿cuánto es $3 + 0$?".
JACK: "3".
PAPÁ: "Jack, ¿cuánto es $4 + 0$?".
JACK: "4... y papá, ¡*algo* más cero es igual a *algo*!". ¿Qué propiedad de la suma de números reales reconoció Jack?

66. La frase *mostradores de artículos defectuosos* es un ejemplo de una frase que tiene diferentes significados, dependiendo de cómo se agrupen las palabras (piense en las propiedades asociativas). Por ejemplo, *mostradores de artículos defectuosos* son los lugares donde se devuelven los productos vendidos con ciertos defectos de fábrica, mientras que *mostradores defectuosos de artículos* indica que los mostradores donde se compra o se vende la mercancía tienen imperfecciones. Para cada una de las siguientes frases, explique por qué no se cumple la propiedad asociativa.

a) Pregunta de examen difícil.

b) Esposo de mujer con temor.

c) Perro que muerde a un hombre.

67. La propiedad distributiva se cumple para la multiplicación respecto de la adición. ¿Se cumple la propiedad distributiva para la adición respecto de la multiplicación? Es decir, ¿es $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ verdadero para todos los valores de a, b y c? (*Sugerencia:* Sea $a = 2, b = 3$ y $c = 4$).

68. Suponga que un estudiante le muestra el siguiente trabajo.

$$-3(4-6) = -3(4) - 3(6) = -12 - 18 = -30.$$

El estudiante cometió un **error** muy común al aplicar la propiedad distributiva. Explique el error del estudiante, y resuelva el problema correctamente.

Cada expresión de los ejercicios 69 a 76 es igual a 81 *o* −81. *Identifique cuáles de estos son los valores correctos.*

69. -3^4 **70.** $-(3^4)$ **71.** $(-3)^4$

72. $-(-3^4)$ **73.** $-(-3)^4$ **74.** $[-(-3)]^4$

75. $-[-(-3)]^4$ **76.** $-[-(-3^4)]$

77. ***Egresos del presupuesto federal*** La gráfica de barras muestra los egresos del presupuesto federal del Departamento del Tesoro de Estados Unidos para los años 2006 a 2009. Use números con signo para representar el cambio en los egresos de cada periodo.

a) 2006 a 2007

b) 2007 a 2008

c) 2008 a 2009

d) 2006 a 2009



Fuente: U.S. Office of Management and Budget.

78. ***Alturas de montañas y profundidades de depresiones*** La tabla indica las alturas en pies de ciertas montañas y las profundidades en pies (como números negativos) de ciertas depresiones oceánicas.

Montaña	Altura	Depresión	Profundidad
Foraker	17,400	de Filipinas	−32,995
Wilson	14,246	Caimán	−24721
Pikes Peak	14,110	Java	−23,376

Fuente: The World Almanac and Book of Facts.

a) ¿Qué diferencia hay entre la altura del monte Foraker y la profundidad de la fosa de las Filipinas?

b) ¿Cuál es la diferencia entre la altura del monte Pikes y la profundidad de la fosa de Java?

c) ¿Cuál es la diferencia en profundidad entre la fosa Caimán y la fosa de Java?

d) ¿Qué diferencia de profundidad hay entre la fosa de Filipinas y la fosa Caimán?

79. ***Finanzas de seguridad social*** La tabla muestra el ingreso fiscal destinado a seguridad social y el costo de los beneficios (en miles de millones de dólares).

Año	Ingresos fiscales	Costo de beneficios
2000	538	409
2010*	916	710
2020*	1479	1405
2030*	2041	2542

*Proyectado
Fuente: Social Security Board of Trustees.

a) Obtenga la diferencia entre el ingreso fiscal destinado a seguridad social y el costo de los beneficios para cada año que se muestra en la tabla.

b) Interprete su respuesta para 2030.

80. ***Cámara de Representantes*** Con base en las proyecciones del censo de población para 2020, Nueva York perderá 5 curules en la Cámara de Representantes de Estados Unidos, Pensilvania perderá 4 curules, y Ohio perderá 3. Escriba un número con signo que represente el cambio total proyectado en el número de curules de estos tres estados. (*Fuente:* Population Reference Bureau).

81. ***Cámara de Representantes*** Está proyectado que Michigan pierda 3 curules en la Cámara de Representantes de Estados Unidos e Illinois 2 en 2020. De acuerdo con los pronósticos, los estados que ganarán la mayoría de curules son California con 9, Texas con 5, Florida con 3, Georgia con 2 y Arizona con 2. Escriba un número con signo que represente la suma algebraica de estos cambios. (*Fuente:* Population Reference Bureau).

82. ***Saldo en cuenta de cheques*** El saldo en la cuenta de cheques de Christine MacKrell es de $54.00. Ella corre el riesgo de expedir un cheque por $89.00. ¿Cuál es su nuevo saldo? (Escriba el saldo con un número con signo).

83. ***Saldo en cuenta de cheques*** En agosto, Kimberly Manzi inició con un saldo en su cuenta de cheques de $904.89. En seguida se indican sus cheques girados y sus depósitos de agosto:

Cheques	Depósitos
$35.84	$85.00
$26.14	$120.76
$3.12	

Suponiendo que no hay más transacciones, ¿cuál fue el saldo de su cuenta al final de agosto?

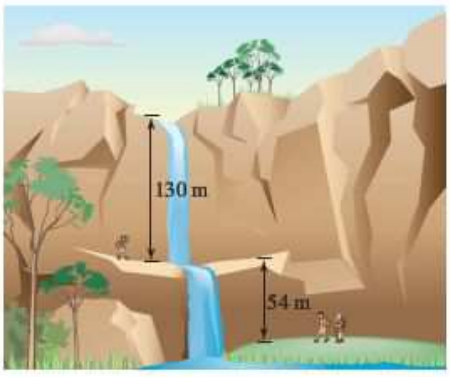
84. ***Saldo en cuenta de cheques*** En septiembre, David López inició con un saldo en su cuenta de cheques de $904.89 dólares. En seguida se indican sus cheques girados y depósitos de septiembre.

Cheques	Depósitos
$41.29	$80.59
$13.66	$276.13
$84.40	

Suponiendo que no hay más transacciones, ¿cuál fue el saldo de su cuenta al final de septiembre?

85. ***Diferencia de accidentes geográficos*** La punta del monte Whitney, visible desde el Valle de la Muerte, tiene una altura de 14,494 pies por arriba del nivel del mar. El Valle de la Muerte se encuentra a 282 pies bajo el nivel del mar. Considerando el 0 como el nivel del mar, obtenga la diferencia entre estos dos accidentes geográficos. (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).

86. ***Altitud de excursionistas*** La superficie o borde de un cañón se encuentra a una altitud igual a 0. Un grupo de excursionistas en descenso se detienen a descansar a 130 metros por debajo de la superficie. Luego descienden otros 54 metros. ¿Cuál es su nueva altitud? (Escriba la altitud con un número con signo).



87. ***Cambio drástico de temperatura*** El 23 de enero de 1943, la temperatura se elevó 49° F en dos minutos en Spearfish, Dakota del Sur. Si la temperatura inicial era de −4° F, ¿cuál era la temperatura dos minutos después? (*Fuente: Guiness World Records*).

88. ***Cambio drástico de temperatura*** El cambio más drástico de temperatura registrado en un periodo de 24 horas ocurrió en Browning, Montana, del 23 al 24 de enero de 1916. La temperatura bajó 100° F a partir de una temperatura inicial de 44° F. ¿Cuál fue la temperatura mínima durante este periodo? (*Fuente: Guinness World Records*).

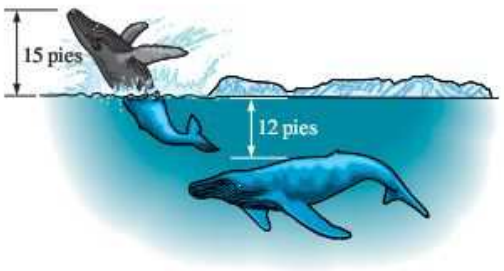
89. ***Temperaturas extremas en Alabama*** La temperatura más baja registrada en Alabama fue de −27° F. La temperatura más alta registrada fue de 139° F por arriba de la temperatura más baja. ¿Cuál fue la temperatura más alta? (*Fuente:* National Climatic Data Center).

90. ***Temperaturas extremas en Iowa*** La temperatura más baja registrada en Iowa fue de −47° F. La temperatura más alta registrada allí fue de 165° F por encima de la temperatura más baja. ¿Cuál fue la temperatura más alta? (*Fuente:* National Climatic Data Center).

91. ***Temperaturas bajas en Illinois y Minnesota*** La temperatura más baja registrada en Illinois fue de −36° F en 1999. El récord de temperatura más baja en Minnesota fue de 24° F por debajo de −36° F, en 1996. ¿Cuál fue la temperatura récord más baja en Minnesota? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).

92. ***Temperaturas bajas en Nuevo México y Utah*** La temperatura más baja registrada en Nuevo México fue de −50° F en 1951. La temperatura más baja registrada en Utah, en 1985, fue de 19° F por debajo de la temperatura récord más baja de Nuevo México. ¿Cuál es la temperatura récord más baja de Utah? (*Fuente:* National Climatic Data Center).

93. ***Salto de las ballenas jorobadas*** Mark y Debbie notaron que una de sus ballenas favoritas, "Pineapple", saltó sacando el cuerpo 15 pies por arriba de la superficie del océano, mientras que su pareja nadaba a 12 pies por debajo de la superficie. ¿Cuál es la diferencia entre estos dos niveles?



94. ***Punto más alto de Luisiana*** El punto más alto de Luisiana es la montaña Driskill, con una altitud de 535 pies. El punto más bajo es el Fuerte Español, a 8 pies bajo el nivel del mar. Considerando el cero como el nivel del mar, obtenga la diferencia de altitud entre estos dos accidentes geográficos. (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).

95. ***Fecha de cumpleaños de un matemático griego*** Un matemático griego nació en el año 428 a. C. Su padre nació 41 años antes. ¿En qué año nació su padre?

96. ***Fecha de cumpleaños de un filósofo romano*** Cierto filósofo romano nació en el año 325 a. C. Su madre nació 35 años antes. ¿En qué año nació su madre?

Precios de casas *En la tabla se muestran las medianas de los precios de venta de casas unifamiliares en Estados Unidos de 2003 a 2007. Complete la tabla, determinando mediante una resta o sustracción el cambio de un año a otro.*

	Año	Mediana de los precios de venta	Cambio en relación con el año anterior
	2003	$180,200	
97.	2004	$195,200	
98.	2005	$219,000	
99.	2006	$221,900	
100.	2007	$217,900	

Fuente: National Association of Realtors.



5.3 NÚMEROS RACIONALES Y REPRESENTACIÓN DECIMAL

Definición y propiedad fundamental • Operaciones con números racionales • Densidad y media aritmética • Forma decimal de los números racionales

Definición y propiedad fundamental

El conjunto de números reales está integrado por dos subconjuntos mutuamente excluyentes: los números racionales y los números irracionales. (Dos conjuntos son *mutuamente excluyentes* si no tienen elementos en común).

Recuerde de la **sección 5.1** que los cocientes de números enteros se conocen como **números racionales**. Piense en los números racionales como compuestos por todas las fracciones (cocientes de números enteros con denominador diferente de cero) y todos los números enteros. Cualquier número entero se puede escribir como el cociente de dos números enteros. Por ejemplo, el número entero 9 se puede escribir como el cociente de $\frac{9}{1}$ o $\frac{18}{2}$ o $\frac{27}{3}$, etcétera. Asimismo, -5 se puede expresar como un cociente de números enteros como $\frac{-5}{1}$ o $\frac{-10}{2}$, etcétera. (¿Cómo se puede escribir el número entero 0 como un cociente de números enteros?).



Benjamin Banneker (1731-1806) pasó la primera mitad de su vida atendiendo una granja en Maryland. Se hizo famoso en su localidad por sus habilidades mecánicas y su capacidad para resolver problemas matemáticos. En 1772 adquirió libros de astronomía de un vecino y se dedicó a su estudio, observando los cielos y haciendo cálculos. En 1789 Banneker se unió al equipo que realizó la medición topográfica de lo que ahora es el Distrito de Columbia.

Banneker publicó almanaques de 1792 a 1802. Envió una copia de su primer almanaque a Thomas Jefferson, junto con una carta donde se pronunció con vehemencia en contra de la esclavitud. Posteriormente Jefferson defendió la causa de este primer matemático afroestadounidense.

Números racionales

Números racionales $= \{x | x$ es un cociente de dos enteros, con denominador diferente de $0\}$.

Se dice que un número racional está en sus **términos simplificados** si el máximo común divisor del numerador (número superior) y del denominador (número inferior) es 1. Los números racionales se escriben en los términos simplificados usando la *propiedad fundamental de los números racionales.*

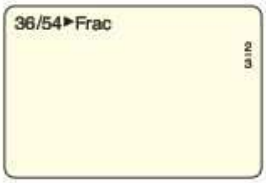
Propiedad fundamental de los números racionales

Si a, b y k son enteros, $b \neq 0$ y $k \neq 0$, entonces lo siguiente es verdadero.

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$$

EJEMPLO 1 Escritura de una fracción en términos simplificados

Escriba $\frac{36}{54}$ en términos simplificados.



La calculadora da 36/54 como los términos simplificados, como se ilustra en el **ejemplo 1**.

SOLUCIÓN

El máximo común divisor de 36 y 54 es 18.

$$\frac{36}{54} = \frac{2 \cdot 18}{3 \cdot 18} = \frac{2}{3}$$

Se usa la propiedad fundamental con $k = 18$.

■■■

En el **ejemplo 1** se ve que $\frac{36}{54} = \frac{2}{3}$. Si multiplicamos el numerador de la fracción de la izquierda por el denominador de la fracción de la derecha, se obtiene $36 \cdot 3 = 108$. Si se multiplica el denominador de la fracción de la izquierda por el numerador de la fracción de la derecha, se obtiene $54 \cdot 2 = 108$. El resultado es el mismo en ambos casos.

Una manera de determinar si dos fracciones son iguales es realizar esta prueba. Si el producto de los "**extremos**" (36 y 3 en este caso) es igual al producto de los "**medios**" (54 y 2), las fracciones son iguales. Esta prueba de igualdad de números racionales se conoce como **prueba de los productos cruzados**.

Prueba de los productos cruzados para verificar la igualdad de números racionales

Para los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, lo siguiente es verdadero.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \textbf{si y solo si} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Operaciones con números racionales

La operación de suma de los números racionales se ilustra con los dibujos de la **figura 10**. El rectángulo ubicado arriba a la izquierda está dividido en tres partes iguales, con una de las partes sombreada. El rectángulo ubicado arriba a la derecha se dividió en cinco partes iguales, dos de las cuales están sombreadas.

El total de las áreas sombreadas se representa por medio de la suma:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}.$$

Para resolver esta suma, se deben dibujar las áreas sombreadas en términos de una unidad común. Como el mínimo común múltiplo de 3 y 5 es 15, se dibujan ambos rectángulos dividiéndolos en 15 partes. Véase la **figura 11**. En la figura, 11 de los rectángulos pequeños están sombreados, de manera que

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}.$$

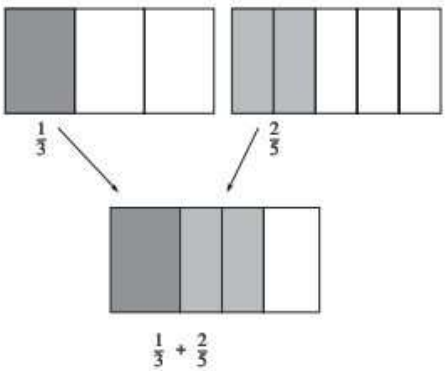


Figura 10

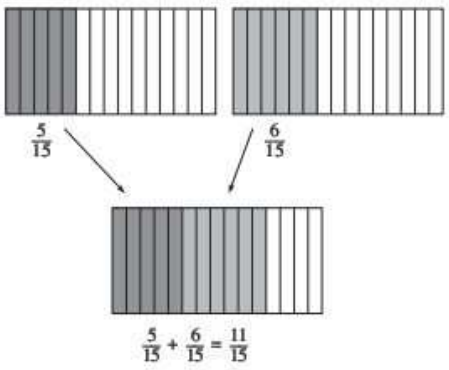


Figura 11

Se puede emplear un argumento similar en el caso de la diferencia de números racionales.

Suma y resta de números racionales

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces lo siguiente es verdadero.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

En la práctica, raras veces se usa esta definición formal. Por lo regular, primero se rescriben las fracciones con el mínimo común múltiplo de sus denominadores, conocido como **mínimo común denominador (mcd)**.

EJEMPLO 2 Suma y resta de números racionales

Efectúe las siguientes operaciones.

a) $\frac{2}{15}+\frac{1}{10}$ *b)* $\frac{173}{180}-\frac{69}{1200}$

SOLUCIÓN

a) Como $30 \div 15 = 2$,

$$\frac{2}{15}=\frac{2\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{4}{30}$$

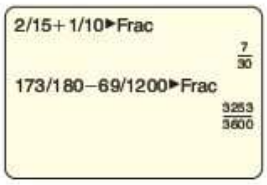
El mcd es 30.

y como $30 \div 10 = 3$,

$$\frac{1}{10}=\frac{1\cdot 3}{10\cdot 3}=\frac{3}{30}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{15}+\frac{1}{10}=\frac{4}{30}+\frac{3}{30}=\frac{7}{30}.$$



En esta pantalla se ilustran los resultados del **ejemplo 2**.

b) El mínimo común múltiplo de 180 y 1200 es 3600.

$$\frac{173}{180}-\frac{69}{1200}=\frac{3460}{3600}-\frac{207}{3600}=\frac{3460-207}{3600}=\frac{3253}{3600}$$

Multiplicación de números racionales

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces lo siguiente es verdadero.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

EJEMPLO 3 Multiplicación de números racionales

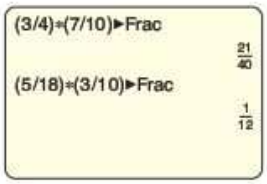
Obtenga cada producto.

a) $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{10}$ *b)* $\frac{5}{18}\cdot\frac{3}{10}$

SOLUCIÓN

a) $$\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{10}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 10}=\frac{21}{40}$$

b) $$\frac{5}{18}\cdot\frac{3}{10}=\frac{5\cdot 3}{18\cdot 10}=\frac{15}{180}=\frac{1\cdot 15}{12\cdot 15}=\frac{1}{12}$$



Para ilustrar los resultados del **ejemplo 3**, se usan paréntesis para encerrar los factores de la fracción.

En la práctica, un problema de multiplicación como

$$\frac{5}{18} \cdot \frac{3}{10}$$

del inciso ***b)*** con frecuencia se resuelve usando líneas diagonales para indicar que se ha dividido entre los factores comunes del numerador y del denominador.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{6}{\cancel{18}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{Se dividen entre 3 los términos 3 y 18. Se dividen entre 5 los términos 5 y 10.}$$

$$= \frac{1}{12}$$

■■■

En una fracción, la barra de la fracción indica la operación de división. El recíproco multiplicativo de un número b, diferente de cero, es $\frac{1}{b}$. La división se define utilizando multiplicadores recíprocos.



Las **primeras monedas de centavo y medio centavo de Estados Unidos** usaban fracciones para denotar sus denominaciones. Se usaba $\frac{1}{200}$ para denotar el medio centavo y $\frac{1}{100}$ para el centavo. (Véase la fotografía de una moneda con un error interesante en el **ejercicio 18**).

Las monedas mostradas aquí eran parte de la colección de **Louis Eliasberg** padre, quien fue la única persona que reunió una colección completa de las monedas de Estados Unidos. Las monedas de oro de Eliasberg fueron subastadas en 1982, mientras que las monedas de cobre, níquel y plata fueron vendidas en dos subastas en 1996 y 1997. El medio centavo de la fotografía se vendió en $506,000 y el centavo se vendió en $27,500. El centavo mostrado en el **ejercicio 18** se vendió en solo $2970.

Definición de la división

Si a y b son números reales, y $b \neq 0$, entonces lo siguiente es verdadero.

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Probablemente usted ha escuchado la siguiente regla: "Para dividir fracciones, invierta el divisor y multiplique". Para ilustrar esta regla, suponga que usted tiene $\frac{7}{8}$ de un galón de leche y desea saber cuántos cuartos tiene. Puesto que un cuarto es $\frac{1}{4}$ de galón, debe preguntarse: "¿Cuántos cuartos hay en siete octavos?". Esto se interpretaría como:

$$\frac{7}{8} \div \frac{1}{4} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{4}}.$$

La propiedad fundamental de los números racionales se puede ampliar a los valores de los números racionales a, b y k.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{\frac{7}{8} \cdot 4}{\frac{1}{4} \cdot 4} = \frac{\frac{7}{8} \cdot 4}{1} = \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{1} \quad \text{Sean } a = \tfrac{7}{8}, b = \tfrac{1}{4}, \text{ y } k = 4 \left(\text{el recíproco de } b = \tfrac{1}{4}\right).$$

Iniciamos el problema de dividir $\frac{7}{8} \div \frac{1}{4}$, el cual, a través de una serie de expresiones equivalentes, nos lleva al problema de multiplicar $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{1}$. De este modo, dividir entre $\frac{1}{4}$ es equivalente a multiplicar por su recíproco, $\frac{4}{1}$.

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{1} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2} \quad \text{Definición de multiplicación de fracciones.}$$

Así, existen $\frac{7}{2}$, o $3\frac{1}{2}$, cuartos en $\frac{7}{8}$ de galón.*

*$3\frac{1}{2}$ es un **número mixto**. Los números mixtos se analizan en los ejercicios de esta sección.

División de números racionales

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, donde $\frac{c}{d} \neq 0$, entonces lo siguiente es verdadero.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

EJEMPLO 4 División de números racionales

Calcule cada cociente.

a) $\frac{3}{5} \div \frac{7}{15}$ *b)* $\frac{-4}{7} \div \frac{3}{14}$ *c)* $\frac{2}{9} \div 4$ *d)* $-9 \div \frac{3}{5}$

SOLUCIÓN

a) $\frac{3}{5} \div \frac{7}{15} = \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{7} = \frac{45}{35} = \frac{9 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{9}{7}$

b) $\frac{-4}{7} \div \frac{3}{14} = \frac{-4}{7} \cdot \frac{14}{3} = \frac{-56}{21} = \frac{-8 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3}$

$\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$, y $-\frac{a}{b}$ son todos iguales.

c) $\frac{2}{9} \div 4 = \frac{2}{9} \div \frac{4}{1} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{9} \cdot \frac{1}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{1}{18}$

d) $-9 \div \frac{3}{5} = \frac{\overset{-3}{\cancel{-9}}}{1} \cdot \frac{5}{\underset{1}{\cancel{3}}} = -15$

(-4/7)/(3/14)▶Frac
$-\frac{8}{3}$
(2/9)/4▶Frac
$\frac{1}{18}$

Esta pantalla apoya los resultados del **ejemplo 4 *b)* y *c)***.

Densidad y media aritmética

No existen enteros entre dos enteros consecutivos, como 3 y 4. Sin embargo, siempre puede encontrarse un número racional entre dos números racionales distintos. Por esta razón, se dice que el conjunto de los números racionales es *denso*.

Propiedad de densidad de los números racionales

Si r y t son números racionales diferentes, con $r < t$, entonces existe un número racional s tal que

$$r < s < t.$$

Aplicaciones repetitivas de la propiedad de densidad llevan a la siguiente conclusión.

Existe una cantidad infinita de números racionales entre dos números racionales diferentes.

Un ejemplo de número racional que se encuentra entre dos números racionales diferentes es la *media aritmética*. Para obtener la **media aritmética**, o **promedio**, de n números, se suman los números y luego se divide la suma entre n. En el caso de dos números, aquel número que se encuentra a la mitad de ellos es el promedio.

EJEMPLO 5 Obtención de la media aritmética (promedio)

Calcule el número racional que se encuentra a la mitad de $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$ (es decir, su media aritmética o promedio).

SOLUCIÓN

Primero, se obtiene la suma.

Se calcula el denominador común.

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6}, \quad \text{o} \quad \frac{3}{2}$$

Ahora, la suma $\frac{3}{2}$ se divide entre 2.

$$\frac{3}{2} \div 2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Para dividir, se multiplica por el recíproco del divisor.

El número $\frac{3}{4}$ se encuentra a la mitad entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$. ■■■

EJEMPLO 6 Obtención de la media aritmética (promedio)

La **tabla 3** muestra el número de empleadas, en miles, de algunos estados de EUA. ¿Cuál es el número promedio de empleadas, en miles, de este grupo de estados?

Tabla 3

Estado	Número (en miles)
Illinois	2918
Maine	320
Carolina del Norte	2016
Oregon	869
Utah	571
Wisconsin	1427

Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics.

SOLUCIÓN

Para obtener este promedio, se divide la suma de empleadas entre el número de estados, es decir, 6.

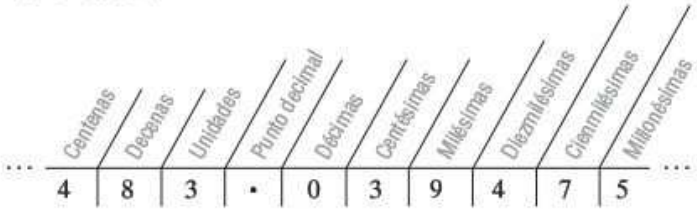
$$\frac{2918 + 320 + 2016 + 869 + 571 + 1427}{6} = \frac{8121}{6} = 1353.5$$

El promedio de empleadas del grupo de estados es de aproximadamente 1354 miles (o 1,354,000). ■■■

También es verdad que entre dos números *reales* cualesquiera existe otro número *real*. Por lo tanto, como en el caso de los números racionales, el conjunto de los números reales es denso.

Forma decimal de los números racionales

Los números racionales se pueden expresar como decimales. Los números decimales tienen valores posicionales que son potencias de 10. Los valores posicionales se muestran a continuación.



El numeral decimal 483.039475 se lee como "cuatrocientas ochenta y tres, treinta y nueve mil, cuatrocientas setenta y cinco millonésimas".

Un número racional de la forma $\frac{a}{b}$ se puede expresar más fácilmente como un decimal introduciéndolo en una calculadora. Por ejemplo, para escribir $\frac{3}{8}$ como un decimal, introduzca 3 en la operación de división, y luego introduzca 8. Presione la tecla igual para obtener la siguiente equivalencia:

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

Este mismo resultado se puede obtener con una larga división, como se muestra en el margen. Con este resultado, el número racional $\frac{3}{8}$ es el mismo que el decimal 0.375. Un decimal como 0.375, el cual termina, se conoce como **decimal exacto**.

$$\frac{1}{4} = 0.25, \quad \frac{7}{10} = 0.7 \quad \text{y} \quad \frac{89}{1000} = 0.089$$

Ejemplos de decimales exactos

$$\begin{array}{r|l} 0.375 & 8\overline{)3.000} \\ \underline{24} & \\ 60 & \\ \underline{56} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 0.3636\ldots & 11\overline{)4.00000\ldots} \\ \underline{33} & \\ 70 & \\ \underline{66} & \\ 40 & \\ \underline{33} & \\ 70 & \\ \underline{66} & \\ 40 & \\ \vdots & \end{array}$$

2/3
.6666666667

Mientras que la representación decimal de 2/3 tiene un decimal periódico ($2/3 = 0.\overline{6}$), la calculadora redondea el decimal final desplegado.

No todos los números racionales se pueden representar con decimales exactos. Por ejemplo, $\frac{4}{11}$ se convierte a decimales dividiendo 4 entre 11 en una calculadora. La pantalla muestra

0.3636363636, o quizá 0.363636364.

Sin embargo, se ve que el proceso de división larga, mostrado en el margen de la página anterior, indica que realmente obtendremos 0.3636 . . . , con los dígitos 36 repitiéndose una y otra vez de manera indefinida. Para indicar esto, se escribe una barra (llamada *vínculo*) sobre el "bloque" de dígitos que se repite.

$$\frac{4}{11} = 0.\overline{36}$$ $0.\overline{36}$ significa 0.3636....

Un decimal como $0.\overline{36}$, el cual continúa indefinidamente, se conoce como **decimal periódico**.

$$\frac{5}{11} = 0.\overline{45}, \quad \frac{1}{3} = 0.\overline{3} \quad \text{y} \quad \frac{5}{6} = 0.8\overline{3}$$ son ejemplos de decimales periódicos.

Debido a las limitaciones de la pantalla de una calculadora, y como algunos números racionales tienen decimales periódicos, es importante interpretar adecuadamente los resultados de una calculadora cuando se obtienen decimales periódicos.

5/11
.4545454545
1/3
.3333333333
5/6
.8333333333

Aun cuando solo se muestran 10 decimales, las tres fracciones tienen decimales periódicos sin fin.

Aunque en este libro distinguimos entre decimales *exactos* y *periódicos*, algunos matemáticos prefieren considerar todos los números racionales como decimales periódicos. Esto se justifica si se piensa de esta manera: si el proceso de división conduce a un residuo igual a 0, entonces los ceros se repiten de manera indefinida en forma decimal. Por ejemplo, podemos considerar la forma de $\frac{3}{4}$ como sigue.

$$\frac{3}{4} = 0.75\overline{0}$$

Si consideramos los posibles residuos que pueden obtenerse cuando convertimos un cociente de números enteros a decimal, podemos sacar una conclusión importante acerca de la forma decimal de los números racionales. Si el residuo nunca es cero, la división producirá un decimal periódico. Esto sucede porque cada paso del proceso de división debe producir un residuo que sea menor que el divisor. Como el número de posibles residuos diferentes es menor que el divisor, los residuos finalmente comenzarán a repetirse. Esto hace que los dígitos del cociente se repitan y generen un decimal periódico.



Simon Stevin (1548-1620) trabajó como tenedor de libros en Bélgica y se convirtió en ingeniero en el ejército de los Países Bajos. Normalmente se considera el autor del desarrollo de los **decimales.**

Representación decimal de los números racionales

Cualquier número racional se puede expresar como un decimal exacto o un decimal periódico.

Para determinar si la forma decimal de un cociente de números enteros será exacta o periódica, se usa la siguiente regla.

Criterios para decimales exactos y periódicos

Un número racional $\frac{a}{b}$ en sus *términos simplificados* tiene como resultado un **decimal exacto** si el único factor primo del denominador es 2 o 5 (o ambos).

Un número racional $\frac{a}{b}$ en sus *términos simplificados* tiene como resultado un **decimal periódico** si tiene un primo diferente a 2 o 5 en la factorización con números primos del denominador.

La justificación de esta regla tiene como base el hecho de que los factores primos de 10 son 2 y 5, y el sistema decimal utiliza el 10 como base.

EJEMPLO 7 Determine si un decimal es exacto o periódico

Determine si la forma decimal es exacta o periódica.

a) $\frac{7}{8}$ *b)* $\frac{13}{150}$ *c)* $\frac{6}{75}$

SOLUCIÓN

a) El número racional $\frac{7}{8}$ está expresado en términos simplificados. Su denominador es 8, y como los factores de 8 son 2^3, la forma decimal será exacta. Ningún primo diferente de 2 o 5 divide al denominador.

b) El número racional $\frac{13}{150}$ está expresado en términos simplificados con el denominador $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Puesto que el 3 aparece como factor primo del denominador, la forma decimal será periódica.

c) Primero se escribe el número racional $\frac{6}{75}$ en términos simplificados.

$$\frac{6}{75} = \frac{2}{25}$$ El denominador es 25.

Como $25 = 5^2$, la forma decimal será exacta. ■■■

Para obtener el promedio de bateo de un jugador de béisbol, dividimos el número de *hits* entre el número de turnos al bate. Existe una sorprendente paradoja en relación con los promedios; es posible que el jugador *A* tenga un promedio anual de bateo mayor que el del jugador *B* en dos años consecutivos; sin embargo, en el periodo de dos años, el jugador *B* puede tener un promedio total de bateo más alto. Véase la tabla.

Año	Joe Shlabotnik	Scott Bailes
1998	$\frac{20}{40} = .500$	$\frac{90}{200} = .450$
1999	$\frac{60}{200} = .300$	$\frac{10}{40} = .250$
Total de dos años	$\frac{80}{240} = .333$	$\frac{100}{240} = .417$

En cada uno de estos dos años Shlabotnik tuvo un promedio mayor, pero en el periodo de dos años, Bailes tuvo el promedio más alto. Este es un ejemplo de la **paradoja de Simpson** en estadística. (Véase también la página de inicio del **capítulo 10**).

Hemos visto que es posible representar un número racional mediante un decimal exacto o un decimal periódico. ¿Puede un decimal exacto o un decimal periódico representar a un número racional? La respuesta es *sí*. Por ejemplo, el decimal exacto 0.6 representa un número racional.

$$0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

EJEMPLO 8 Escritura de decimales exactos como cocientes de números enteros

Escriba cada decimal exacto como un cociente de números enteros.

a) 0.437 *b)* 8.2

SOLUCIÓN

a) $0.437 = \frac{437}{1000}$ Se lee como "cuatrocientas treinta y siete milésimas" y luego se escribe como una fracción.

b) $8.2 = 8 + \frac{2}{10} = \frac{82}{10} = \frac{41}{5}$ Se lee como un decimal, se escribe como una suma y luego se efectúa la suma. ■■■



Esta pantalla apoya los resultados del **ejemplo 8**.

Ahora mostraremos cómo convertir un decimal periódico a un cociente de números enteros.

EJEMPLO 9 Escritura de decimales periódicos como un cociente de números enteros

Obtenga un cociente de dos números enteros igual a $0.\overline{85}$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Sea $x = 0.\overline{85}$, de manera que $x = 0.858585\ldots$.

Paso 2 Se multiplican ambos lados de la ecuación $x = 0.858585\ldots$ por 100. (Se usa 100 porque existen dos dígitos en la parte periódica, y $100 = 10^2$).

$$\begin{aligned} x &= 0.858585\ldots \\ 100x &= 100(0.858585\ldots) \\ 100x &= 85.858585\ldots \end{aligned}$$

$1 = 0.999999999999\ldots$

¿Exacto o periódico? Una de las verdades más desconcertantes de las matemáticas elementales es la siguiente:

$1 = 0.9999\ldots$.

La mayoría de las personas creen que $0.\overline{9}$ tiene que ser menor que 1, pero no es así. El siguiente argumento muestra por qué. Sea $x = 0.9999\ldots$ Entonces,

$$\begin{array}{rl} 10x = & 9.9999\ldots \\ x = & 0.9999\ldots \\ \hline 9x = & 9 \quad \text{Se resta.} \\ x = & 1. \quad \text{Se divide.} \end{array}$$

Por lo tanto, $1 = 0.9999\ldots$ De manera similar, es posible demostrar que cualquier decimal exacto puede representarse como un decimal periódico con una cadena sin fin de nueves. Por ejemplo, $0.5 = 0.49999\ldots$ y $2.6 = 2.59999\ldots$ Esta es una manera de justificar que cualquier número racional puede representarse como un decimal periódico.

Paso 3 Se resta la expresión del paso 1 de las expresiones finales del paso 2.

$$\begin{array}{rl} 100x = & 85.858585\ldots \quad \text{(Recuerde que } x = 1x \text{ y } 100x - x = 99x\text{).} \\ x = & 0.858585\ldots \\ \hline 99x = & 85 \quad \text{Se resta.} \end{array}$$

Paso 4 Se resuelve la ecuación $99x = 85$ dividiendo ambos lados entre 99.

$$99x = 85$$

$$\frac{99x}{99} = \frac{85}{99} \quad \text{Se divide entre 99.}$$

$$x = \frac{85}{99} \quad \frac{99x}{99} = x$$

$$0.\overline{85} = \frac{85}{99} \quad x = 0.\overline{85}$$

Cuando se verifica con una calculadora, recuerde que la pantalla solo mostrará un número finito de lugares decimales y tal vez redondee el decimal final que muestra. ■■■

Para reflexionar

Influencia del sistema monetario español sobre los precios de las acciones

Hasta el 28 de agosto de 2000, cuando inició la conversión al sistema decimal del mercado de acciones de Estados Unidos, los precios se expresaban con fracciones que tenían denominadores con potencias de 2, como $17\frac{3}{4}$ y $112\frac{5}{8}$. ¿Alguna vez se preguntó por qué se hacía esto?

Cuando Estados Unidos se constituyó como nación, antes de que acuñara sus propias monedas, la moneda española de ocho reales, también conocida como el dólar español, circulaba libremente en Estados Unidos. Sus partes fraccionarias (cuatro reales, dos reales y un real) se conocían como **partes de ocho**, y se describieron como tales en la tradición de piratas y tesoros. Cuando se fundó la bolsa de valores de Nueva York (NYSE) en 1792, se decidió usar el dólar español como su precio base, en lugar de una base decimal como la que propuso Thomas Jefferson ese mismo año.

En el número de septiembre de 1997 de la revista *COINage*, el artículo de Tom Delorey, "El fin de 'las partes de ocho'", daba la siguiente versión.

Como el dólar español y sus fracciones continuaron siendo moneda de curso legal en Estados Unidos junto con monedas decimales hasta 1857, no había urgencia para modificar el sistema. Cuando la moneda española-estadounidense se retiró de la circulación en 1857, se continuó con la tradición de expresar los precios de las acciones en octavos de dólar (y no menores). Siendo una organización algo conservadora, la NYSE no vio la necesidad de reparar lo que no estaba descompuesto.

Todos los precios de los mercados de acciones estadounidenses se expresan ahora en decimales. (*Fuente:* "Stock price tables go to decimal listings", *The Times Picayune*, junio 27 de 2000).

Para investigación individual o en grupo

Considere lo siguiente. En los eventos deportivos que tienen lugar en Estados Unidos, es común escuchar esta porra: "Dos partes, cuatro partes, seis partes, un dólar. Todos los que apoyan a (nombre del equipo), pónganse de pie y griten". El término **dos partes** se refiere a 25 centavos. Comente cómo se basa esta porra en la moneda española de ocho reales.



5.3 EJERCICIOS

Elija la expresión (o las expresiones) que es (son) equivalente(s) al número racional que se indica.

1. $\frac{4}{8}$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{8}{4}$ **C.** 0.5 **D.** $0.5\overline{0}$ **E.** $0.\overline{55}$

2. $\frac{2}{3}$

A. 0.67 **B.** $0.\overline{6}$ **C.** $\frac{20}{30}$ **D.** 0.666 . . . **E.** 0.6

3. $\frac{5}{9}$

A. 0.56 **B.** 0.55 **C.** $0.\overline{5}$ **D.** $\frac{9}{5}$ **E.** $1\frac{4}{5}$

4. $\frac{1}{4}$

A. 0.25 **B.** $0.24\overline{9}$ **C.** $\frac{25}{100}$ **D.** 4 **E.** $\frac{10}{400}$

Escriba cada fracción en términos simplificados.

5. $\frac{16}{48}$ **6.** $\frac{21}{28}$ **7.** $-\frac{15}{35}$ **8.** $-\frac{8}{48}$

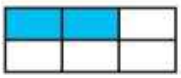
Escriba cada fracción de otras tres formas.

9. $\frac{3}{8}$ **10.** $\frac{9}{10}$

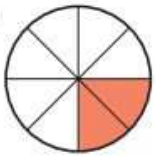
11. $-\frac{5}{7}$ **12.** $-\frac{7}{12}$

13. Escriba una fracción, en términos simplificados, que represente la parte sombreada de cada figura.

a)



b)



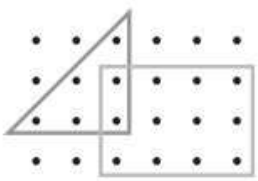
c)



d)



14. Escriba una fracción, en términos simplificados, que represente la región descrita en los incisos ***a)*** a ***d)***.



a) Los puntos del rectángulo como una parte de los puntos de la figura completa.

b) Los puntos del triángulo como una parte de los puntos de la figura completa.

c) Los puntos del rectángulo como una parte de los puntos de la unión del triángulo y el rectángulo.

d) Los puntos de la intersección del triángulo y del rectángulo como una parte de los puntos de la unión del triángulo y del rectángulo.

15. Observe la figura del **ejercicio 14** y escriba una descripción de la región que está representada por la fracción $\frac{1}{12}$.

16. ***Promedios de bateo*** En la liga de softbol, Paul Lewis bateó 8 *hits* en 20 turnos al bate, y Josh LaRoche bateó 12 *hits* en 30 turnos al bate. ¿Qué jugador (si acaso) tuvo el mayor promedio de bateo?

17. ***Promedios de bateo*** Después de 10 juegos, se obtuvieron los siguientes datos estadísticos.

Jugador	Turnos al bate	Hits	Jonrones
Anne Kelly	40	9	2
Christine O'Brien	36	12	3
Leah Goldberg	11	11	1
Otis Taylor	16	8	0
Carol Britz	20	10	2

Conteste las siguientes preguntas usando sus habilidades de estimación cuando sea necesario.

a) ¿Qué jugador(a) bateó un *hit* exactamente en $\frac{1}{3}$ de sus turnos al bate?

b) ¿Qué jugador(a) bateó un *hit* en exactamente $\frac{1}{2}$ de sus turnos al bate?

c) ¿Qué jugador(a) anotó un jonrón en menos de $\frac{1}{10}$ de sus turnos al bate?

d) ¿Qué jugador(a) anotó un jonrón en menos de $\frac{1}{4}$ de sus turnos al bate?

e) ¿Qué par de jugadores batearon *hits* en exactamente las mismas partes fraccionarias de sus turnos al bate? ¿Cuál fue la parte fraccionaria, reducida a sus términos mínimos?

18. Consulte la nota al margen referente al uso de fracciones comunes en el antiguo sistema de monedas de cobre que imperó en Estados Unidos. La fotografía muestra un error cerca de la parte inferior que apareció en un centavo grande acuñado en 1802. Analice el error y cómo este representa una imposibilidad matemática.



Efectúe las operaciones indicadas y exprese las respuestas en términos simplificados. Considere el orden de las operaciones cuando sea necesario.

19. $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$ **20.** $\frac{7}{9}+\frac{1}{9}$ **21.** $\frac{5}{16}+\frac{7}{12}$

22. $\frac{1}{15}+\frac{7}{18}$ **23.** $\frac{2}{3}-\frac{7}{8}$ **24.** $\frac{13}{20}-\frac{5}{12}$

25. $\frac{5}{8}-\frac{3}{14}$ **26.** $\frac{19}{15}-\frac{7}{12}$ **27.** $\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{5}$

28. $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}$ **29.** $-\frac{2}{3}\cdot-\frac{5}{8}$ **30.** $-\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{9}$

31. $\frac{5}{12}\div\frac{15}{4}$ **32.** $\frac{15}{16}\div\frac{30}{8}$

33. $-\frac{9}{16}\div-\frac{3}{8}$ **34.** $-\frac{3}{8}\div\frac{5}{4}$

35. $\left(\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{6}$ **36.** $\frac{2}{5}\div\left(-\frac{4}{5}\div\frac{3}{10}\right)$

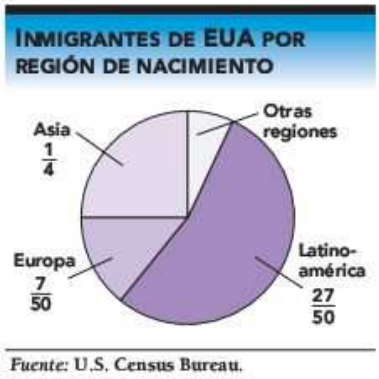
37. ***Receta de sémola*** La siguiente tabla aparece en un paquete de Quaker® Quick Grits.

	Microondas	Estufa		
Raciones	**1**	**1**	**4**	**6**
Agua	$\frac{3}{4}$ de taza	1 taza	3 tazas	4 tazas
Harina de sémola	3 cdas.	3 cdas.	$\frac{3}{4}$ de taza	1 taza
Sal (opcional)	Una pizca	Una pizca	$\frac{1}{4}$ de cdita.	$\frac{1}{2}$ cdita.

a) ¿Cuántas tazas de agua serían necesarias para 6 raciones preparadas en horno de microondas?

b) ¿Cuántas tazas de harina de sémola serían necesarias para 5 raciones preparadas en estufa? (*Sugerencia:* Considere que 5 se encuentra a la mitad entre 4 y 6).

38. ***Inmigrantes en Estados Unidos*** Aproximadamente 34 millones de personas que vivían en 2004 en Estados Unidos nacieron en otros países.



Fuente: U.S. Census Bureau.

La anterior gráfica circular indica los números fraccionarios de cada región de nacimiento de los inmigrantes.

a) ¿Qué fracción de inmigrantes son de otras regiones?

b) ¿Qué fracción de inmigrantes son de Latinoamérica o Asia?

c) ¿Cuántos (en millones) son de Europa?

El ***número mixto*** $2\frac{5}{8}$ *representa la suma* $2+\frac{5}{8}$. *Podemos convertir* $2\frac{5}{8}$ *a fracciones de la siguiente manera.*

$$2\frac{5}{8}=2+\frac{5}{8}=\frac{2}{1}+\frac{5}{8}=\frac{16}{8}+\frac{5}{8}=\frac{21}{8}.$$

La fracción $\frac{21}{8}$ *se puede convertir de nuevo en un número mixto dividiendo* 21 *entre* 8. *El cociente es* 2, *el residuo es* 5, *y el divisor es* 8.

Convierta cada número mixto en una fracción, y convierta cada fracción en un número mixto.

39. $4\frac{1}{3}$ **40.** $3\frac{7}{8}$ **41.** $2\frac{9}{10}$

42. $\frac{18}{5}$ **43.** $\frac{27}{4}$ **44.** $\frac{19}{3}$

Es posible sumar números mixtos convirtiéndolos primero en fracciones, para así efectuar la suma y luego convertir el resultado en un número mixto. Por ejemplo,

$$2\frac{1}{3}+3\frac{1}{2}=\frac{7}{3}+\frac{7}{2}=\frac{14}{6}+\frac{21}{6}=\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}.$$

Las otras operaciones con números mixtos se pueden efectuar de manera similar.

Realice cada operación y exprese la respuesta como un número mixto.

45. $3\frac{1}{4}+2\frac{7}{8}$ **46.** $6\frac{1}{5}-2\frac{7}{15}$

47. $-4\frac{7}{8}\cdot3\frac{2}{3}$ **48.** $-4\frac{1}{6}\div1\frac{2}{3}$

Resuelva cada problema.

49. ***Medidas de llaves de dado*** Una ferretería vende un juego de llaves de dado de 22 piezas. La medida de la llave más grande es $\frac{3}{4}$ de pulgada, mientras que la medida de la llave más pequeña es $\frac{3}{16}$ de pulgada. ¿Cuál es la diferencia entre las medidas?



50. ***Tamaño de los hoyos del queso suizo*** De acuerdo con los estándares existentes, la mayoría de los hoyos de un queso suizo deben tener diámetros entre $\frac{11}{16}$ y $\frac{13}{16}$ de pulgada. Para instalar nuevas máquinas rebanadoras de alta velocidad, la USDA quiere reducir el tamaño mínimo a $\frac{3}{8}$ de pulgada. ¿Qué tan pequeño es $\frac{3}{8}$ de pulgada en relación con $\frac{11}{16}$ de pulgada? (*Fuente:* Departamento de Agricultura de Estados Unidos).



El cociente de cantidades que incluyen fracciones (con denominadores diferentes de cero) se conoce como ***fracción compleja****. Existen dos métodos para simplificar una fracción compleja.*

Método 1 *Se simplifican por separado el numerador y el denominador. Luego se rescriben como un problema de división, y se procede como se haría en la división de fracciones.*

Método 2 *Se multiplican tanto el numerador como el denominador por el mínimo común denominador de todas las fracciones que se encuentran en la fracción compleja. (Esto equivale a multiplicar la fracción por 1, lo cual no altera su valor). Se aplica la propiedad distributiva, si es necesario, y se simplifica.*

Use uno de los métodos anteriores para simplificar cada fracción compleja.

51. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$ **52.** $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}$ **53.** $\dfrac{\frac{5}{8}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}+\frac{3}{4}}$

54. $\dfrac{\frac{3}{16}-\frac{1}{2}}{\frac{5}{16}+\frac{1}{8}}$ **55.** $\dfrac{\frac{7}{11}+\frac{3}{10}}{\frac{1}{11}-\frac{9}{10}}$ **56.** $\dfrac{\frac{11}{15}+\frac{1}{9}}{\frac{13}{15}-\frac{2}{3}}$

Las expresiones de los ejercicios 57 y 58 se conocen como ***fracciones continuas****. Escriba cada una de ellas en la forma $\frac{p}{q}$ reducida a los términos mínimos.*
(Sugerencia: Inicie en la parte inferior y trabaje hacia arriba).

57. $2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\frac{1}{2}}}$ **58.** $4+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}$

Obtenga el número racional que se encuentra en medio de los dos números racionales indicados.

59. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ **60.** $\frac{1}{3}, \frac{5}{12}$ **61.** $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}$

62. $\frac{7}{12}, \frac{5}{8}$ **63.** $-\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}$ **64.** $-3, -\frac{5}{2}$

Resuelva todos los problemas.

65. ***Salario anual promedio*** La tabla muestra el salario anual promedio en las ocho áreas metropolitanas con mayor monto salarial de Estados Unidos. Obtenga el promedio de estas cantidades redondeado al dólar más cercano.

Área metropolitana	Salario anual promedio
San José, CA	$63,056
Nueva York, NY	$57,708
San Francisco, CA	$56,602
New Haven, CT, área	$51,170
Middlesex, NJ, área	$50,457
Jersey City, NJ	$49,562
Newark, NJ	$48,781
Washington, DC, área	$48,430

Fuente: Bureau of Labor Statistics.

66. ***Ganancias por turismo*** En la tabla se muestran los cinco países con ganancias más elevadas por concepto de turismo en 2007. Calcule el promedio de estas cifras.

País	Entradas (en miles de millones de dólares)
EUA	96.7
España	57.6
Francia	54.3
Italia	42.7
China	37.2

Fuente: Organización Mundial de Turismo.

En el número de marzo de 1973 de The Mathematics Teacher *apareció un artículo de Laurence Sherzer, maestro de matemáticas de octavo grado, que inmortalizó uno de sus estudiantes, Robert Mckay. Para calcular un número (no necesariamente el promedio) entre dos números racionales positivos $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, McKay dijo que simplemente se suman los numeradores, por un lado, y los denominadores, por otro.*

Por ejemplo, para obtener un número racional entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$, se suma $1+1=2$ para obtener el numerador y $3+4=7$ para obtener el denominador. Por lo tanto, por el ***teorema de Mckay****, $\frac{2}{7}$ se encuentra entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. Sherzer dio una demostración de este método en el artículo.*

En los ejercicios 67 a 74, use el teorema de Mckay para obtener un número racional entre los dos números racionales indicados.

67. $\frac{5}{6}$ y $\frac{9}{13}$ **68.** $\frac{10}{11}$ y $\frac{13}{19}$

69. $\frac{4}{13}$ y $\frac{9}{16}$ **70.** $\frac{6}{11}$ y $\frac{13}{14}$

71. $\frac{7}{6}$ y $\frac{9}{8}$ **72.** $\frac{11}{5}$ y $\frac{12}{11}$

73. 2 y 3 **74.** 3 y 4

75. Aplique el teorema de McKay para cualquier par de números enteros consecutivos, y haga una conjetura acerca de lo que sucede siempre en este caso.

76. Explique, con sus propias palabras, cómo obtener el número racional que se encuentra a un cuarto del camino entre dos números racionales diferentes.

Convierta cada número racional en un decimal periódico o exacto. Use una calculadora si su profesor se lo permite.

77. $\frac{3}{4}$ **78.** $\frac{7}{8}$ **79.** $\frac{3}{16}$ **80.** $\frac{9}{32}$

81. $\frac{3}{11}$ **82.** $\frac{9}{11}$ **83.** $\frac{2}{7}$ **84.** $\frac{11}{15}$

Convierta cada decimal exacto en un cociente de números enteros. Escriba cada uno en términos simplificados.

85. 0.4 **86.** 0.9 **87.** 0.85

88. 0.105 **89.** 0.934 **90.** 0.7984

*Use el método del **ejemplo 7** para identificar si cada número racional produciría un decimal periódico o exacto. (Sugerencia: Escriba en los términos simplificados antes de intentar la identificación).*

91. $\frac{8}{15}$ **92.** $\frac{8}{35}$ **93.** $\frac{13}{125}$

94. $\frac{3}{24}$ **95.** $\frac{22}{55}$ **96.** $\frac{24}{75}$

97. Resuelva en orden todas las partes de este ejercicio.

a) Obtenga el decimal de $\frac{1}{3}$.

b) Obtenga el decimal de $\frac{2}{3}$.

c) Sumando las expresiones decimales obtenidas en los incisos ***a)*** y ***b)***, obtenga la expresión decimal de $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

d) Escriba su resultado. Lea la nota al margen de los decimales exactos y periódicos en esta sección, la cual se refiere a esta idea.

98. Es un hecho que $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$ Multiplique ambos lados de esta ecuación por 3. ¿Le incomoda la respuesta? Consulte la nota al margen de los decimales exactos y periódicos en esta sección.

*Use el método del **ejemplo 9** para escribir cada número racional como un cociente de números enteros en términos simplificados.*

99. ***a)*** 0.8 ***b)*** $0.7\overline{9}$ **100.** ***a)*** 0.75 ***b)*** $0.74\overline{9}$

101. ***a)*** 0.66 ***b)*** $0.65\overline{9}$

102. Con base en los resultados de los **ejercicios 99 a 101**, pronostique la forma de términos simplificados del número racional $0.4\overline{9}$.

5.4 NÚMEROS IRRACIONALES Y REPRESENTACIÓN DECIMAL

Definición y conceptos básicos • Irracionalidad de $\sqrt{2}$ y demostración por contradicción • Operaciones con raíces cuadradas • Los números irracionales π, ϕ y e

Definición y conceptos básicos

Todos los números racionales tienen una forma decimal exacta o periódica, y todos los decimales exactos o periódicos representan un número racional. Sin embargo,

$$0.10200100020000100000 2\ldots$$

no es exacto ni periódico. (Es verdad que existe un patrón en este decimal, pero no existe un grupo de dígitos que se repita indefinidamente).*

El número irracional $\sqrt{2}$ fue descubierto por los pitagóricos en el año 500 a. C. aproximadamente. Este descubrimiento fue un gran revés para su filosofía, la cual basaba todo en los números enteros. Los pitagóricos mantuvieron sus descubrimientos en secreto. Cuenta la leyenda que los miembros del grupo que divulgaran este descubrimiento serían enviados al mar y, de acuerdo con Próculo (410-485), "morirían en un naufragio causado por el hombre".

*En esta sección, supondremos que los dígitos de un número como este continúan indefinidamente de acuerdo con el patrón establecido. Unos cuantos dígitos siguientes serían 000000100000002, etcétera.



Tsu Ch'ung-chih (500 d. C. aproximadamente), el matemático chino honrado en esta estampilla, investigó los dígitos de π. **Aryabhata,** su contemporáneo indio, le asignó un valor de 3.1416.

Números irracionales

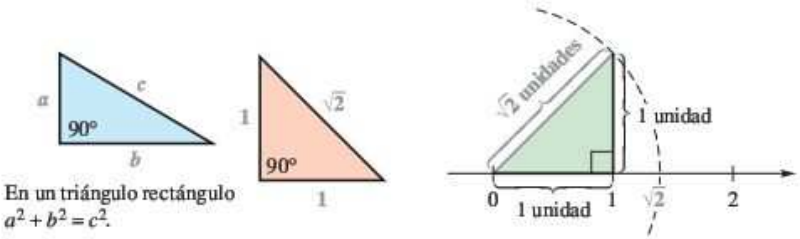
Números irracionales = $\{x \mid x$ es un número representado por un decimal que no es periódico ni repetitivo$\}$

Como implica el nombre, un número irracional no se puede representar como un cociente de números enteros.

El número decimal mencionado en la parte inferior de la página anterior es un número irracional. Otros números irracionales son $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ϕ, de la **sección 4.5**), π (la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro) y e (una constante *aproximadamente igual* a 2.71828). Existe un número infinito de números irracionales.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$ y demostración por contradicción

La **figura 12** muestra cómo se puede ubicar un punto de coordenada $\sqrt{2}$ sobre una recta numérica.

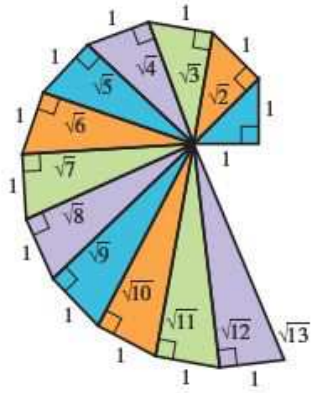


En un triángulo rectángulo $a^2 + b^2 = c^2$.

Figura 12

La prueba de que $\sqrt{2}$ es un número irracional es un ejemplo clásico de una **demostración por contradicción**. Se inicia suponiendo que $\sqrt{2}$ es racional, lo cual lleva a una contradicción o un absurdo. El método también se conoce como ***reductio ad absurdum*** (que en latín significa "reducción al absurdo"). Para entender la demostración, se consideran tres hechos preliminares:

1. Cuando un número racional se escribe en sus términos simplificados, el máximo común divisor del numerador y del denominador es 1.
2. Si un número entero es par, entonces tiene a 2 como factor y se puede escribir como $2k$, donde k es un número entero.
3. Si un cuadrado perfecto es par, entonces su raíz cuadrada es par.



Una manera interesante de representar las longitudes correspondientes a $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$, etcétera, se muestra en la figura. Utilice el **teorema de Pitágoras** para verificar las longitudes de la figura.

TEOREMA

Enunciado: $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Demostración: Se supone que $\sqrt{2}$ es un número racional. Entonces, por definición,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{para algunos enteros } p \text{ y } q.$$

Además, se supone que $\frac{p}{q}$ es la forma de $\sqrt{2}$ escrita en términos simplificados, de modo que el máximo común divisor de p y q es 1.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{Se elevan al cuadrado ambos lados de la ecuación.}$$

$$2q^2 = p^2 \quad \text{Se multiplica por } q^2.$$

La última ecuación, $2q^2 = p^2$, indica que 2 es un factor de p^2. De modo que p^2 es par y, por lo tanto, p es par. Como p es par, se puede escribir en la forma $2k$, donde k es un número entero.

Ahora, se sustituye $2k$ por p en la última ecuación y se simplifica.

$$2q^2 = (2k)^2 \quad \text{Sea } p = 2k.$$

$$2q^2 = 4k^2 \quad (2k)^2 = 2k \cdot 2k = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2 \quad \text{Se divide entre 2.}$$

Como q^2 tiene un 2 como factor, q^2 debe ser par y, por lo tanto, q debe ser par. Esto lleva a una contradicción: p y q no pueden ser ambas pares porque entonces tendrían un factor común igual a 2. Y se supuso que su máximo común divisor es 1.

Por lo tanto, como el supuesto original de que $\sqrt{2}$ es racional ha llevado a una contradicción, de ahí se sigue que $\sqrt{2}$ es irracional. ■■■

Operaciones con raíces cuadradas

En las matemáticas cotidianas, casi todos nuestros cálculos implican números racionales, por lo general en forma decimal. Sin embargo, algunas veces debemos efectuar operaciones con números irracionales.

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{3} \quad \text{y} \quad \sqrt{13} \quad \text{Ejemplos de raíces cuadradas que son irracionales.}$$

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{36} = 6 \quad \text{y} \quad \sqrt{100} = 10 \quad \text{Ejemplos de raíces cuadradas que son racionales.}$$

Si n es un número entero positivo que no es el cuadrado de un número entero, entonces $\sqrt{n}$ es un número irracional.

Una calculadora con tecla para la raíz cuadrada puede dar aproximaciones de raíces cuadradas de números que no son cuadrados perfectos. Para mostrar que son aproximaciones, se utiliza el símbolo $\approx$ para indicar "es aproximadamente igual a". Las aproximaciones en algunas calculadoras son las siguientes.

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562, \quad \sqrt{6} \approx 2.449489743 \quad \text{y} \quad \sqrt{1949} \approx 44.14748011$$

Recuerde que $\sqrt{a}$, para $a \geq 0$, es el número no negativo cuyo cuadrado es a. Es decir, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Ahora veremos algunos ejemplos de operaciones sencillas con raíces cuadradas.

Observe que

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$$

y

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6.$$

Por lo tanto, $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9}$. Este es un caso particular de la siguiente regla de productos.



La serie *Northern Exposure* (*Doctor en Alaska*) se exhibió entre 1990 y 1995 por la cadena CBS. En el episodio "Nada es perfecto" (10/12/92), el disc jockey local Chris Stevens (interpretado por John Corbett) encuentra y entabla una amistad con una matemática (interpretada por Wendel Meldrum), después de pasar accidentalmente encima de su perro. El área de investigación de ella es el **cálculo de los dígitos decimales de pi.** Ella menciona que una cadena de ocho ochos aparece relativamente al inicio de la expresión decimal. Esta cadena inicia en la posición 46,663,520, contando a partir del primer dígito después del punto decimal.

Regla de productos para raíces cuadradas

Para números reales no negativos a y b, lo siguiente es verdadero.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Al igual que todos los números racionales de la forma $\frac{a}{b}$ se pueden escribir en sus *términos simplificados* (usando la propiedad fundamental de los números racionales), todos los radicales de las raíces cuadradas tienen una *forma simplificada.*

Condiciones necesarias para la forma simplificada de un radical de raíz cuadrada

El radical de la raíz cuadrada está en **forma simplificada** si se cumplen las tres condiciones siguientes.

1. El número dentro del radical **(radicando)** no tiene factores (con excepción de 1) ya que es un cuadrado perfecto.
2. El radicando no tiene fracciones.
3. Ningún denominador contiene un radical.

EJEMPLO 1 Simplificación de un radical de raíz cuadrada (regla del producto)

Simplifique $\sqrt{27}$.



Al final de 2008 la película *Harold & Kumar Escape From Guantanamo Bay*, Kumar (Kal Penn), un excelente **estudiante de matemáticas,** se involucró en un incidente en la boda de su ex novia Vanessa (Danneel Harris), a quien le hace pasar una gran vergüenza. Cuando ella lo confronta, Penn le pregunta si él podría hacer algo para avergonzarse a sí mismo y hacerla sentir mejor. Ella le dice que no puede hacer nada, pero él recita un poema "bobo" pero hermoso acerca de la raíz cuadrada de tres, escrito por el extinto David Feinberg. El texto del poema se puede encontrar en Internet buscando "David Feinberg Square Root of 3". Ahí aparecen referencias a los números irracionales, enteros, una aproximación de la raíz cuadrada de 3, y la regla del producto de radicales de raíces cuadradas.

SOLUCIÓN

Como 9 es factor de 27, y 9 es un cuadrado perfecto, $\sqrt{27}$ no es la forma simplificada. La primera condición de la forma simplificada no se cumple. Se simplifica como sigue.

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3}$$

$$= \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} \quad \text{Se usa la regla del producto.}$$

Forma simplificada.

$$= 3\sqrt{3} \quad \sqrt{9} = 3 \text{ puesto que } 3^2 = 9.$$

■■■

Expresiones tales como $\sqrt{27}$ y $3\sqrt{3}$ representan el *valor exacto* de la raíz cuadrada de 27. Si se usa la tecla de la raíz cuadrada de una calculadora, se obtiene

$$\sqrt{27} \approx 5.196152423.$$

Si se calcula $\sqrt{3}$ y luego se multiplica el resultado por 3, se obtiene

$$3\sqrt{3} \approx 3(1.732050808) \approx 5.196152423.$$

Observe que estas aproximaciones son las mismas, como se podría esperar. El trabajo en el **ejemplo 1** ofrece la justificación matemática de que son claramente iguales.

Regla del cociente para raíces cuadradas

Para los números reales no negativos a y los números reales positivos b, lo siguiente es verdadero.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

EJEMPLO 2 Simplificación de radicales de raíces cuadradas (regla del cociente)

Simplifique cada radical.

a) $\sqrt{\frac{25}{9}}$ ***b)*** $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ***c)*** $\sqrt{\frac{1}{2}}$

SOLUCIÓN

a) Como el radicando contiene una fracción, la expresión no está simplificada.

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} \quad \text{Se usa la regla del cociente.}$$



En la segunda temporada de la serie original *Star Trek* (*Viaje a las estrellas*) los episodios "Wolf in the Fold" cuentan la historia de un extraterrestre que se había posesionado de la computadora de la nave espacial *Enterprise*. Para sacar al extraterrestre de la computadora, el capitán Kirk sugirió lo siguiente al señor Spock:

KIRK: Spock, ¿no tiene una unidad rastreadora obligatoria integrada a los bancos de la computadora?
SPOCK: Sí la tenemos capitán, pero con el extraterrestre en los controles . . .
KIRK: Bueno, ¿acaso no existen ciertos problemas matemáticos que simplemente no se pueden resolver?
SPOCK: Claro, si podemos enfocar la atención de la computadora en uno de ellos . . .
KIRK: Eso tiene que hacerse.

Más tarde, están listos para hacer eso:

SPOCK: ¿Listo?
KIRK: Impleméntelo.
SPOCK: Computadora, esta es una instrucción obligatoria clase "A". Calcule hasta el último dígito del valor pi.
Computadora: No, no, no, no, no . . .
SPOCK (A KIRK): Como sabemos, el valor de pi es un número fundamental sin solución. La computadora trabajará exclusivamente en este problema hasta que le ordenemos detenerse.
KIRK: Sí, eso puede mantener a esa máquina ocupada durante un tiempo.

Entonces el extraterrestre no pudo cumplir la orden porque pi (π) es un número irracional, y su representación decimal no tiene último dígito. Como resultado, el ingenio y las matemáticas salvaron la *Enterprise*.

b) $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Se usa la regla del cociente.

c) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Esto aún no está simplificado.

Esta expresión no está simplificada, puesto que no se cumple la condición 3 de la forma simplificada. Para obtener una expresión equivalente sin radical en el denominador, se usa un procedimiento conocido como **racionalización del denominador**. Se multiplica $\frac{1}{\sqrt{2}}$ por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, lo cual es una representación de 1, el elemento de identidad de la multiplicación.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Esta es la forma simplificada de $\sqrt{\frac{1}{2}}$

▮▮▮

¿$\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{4+9}$ es un enunciado verdadero? La respuesta es *no*, porque $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$, mientras que $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, y $5 \neq \sqrt{13}$.

Sin embargo, los radicales de raíces cuadradas se pueden combinar si tienen el mismo radicando. Estos radicales son **radicales semejantes**. Sumamos (y restamos) radicales semejantes usando la propiedad distributiva.

EJEMPLO 3 Suma y resta de radicales de raíces cuadradas

Sume o reste según se indica.

a) $3\sqrt{6} + 4\sqrt{6}$ ***b)*** $\sqrt{18} - \sqrt{32}$

SOLUCIÓN

a) Como ambos términos incluyen $\sqrt{6}$, se trata de radicales semejantes y se pueden combinar.

$$3\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = (3+4)\sqrt{6} \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$= 7\sqrt{6} \quad \text{Se suma.}$$

b) Si primero simplificamos $\sqrt{18}$ y $\sqrt{32}$, entonces podremos realizar esta operación.

$$\sqrt{18} - \sqrt{32} = \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} \quad \text{Se factoriza de modo que haya cuadrados perfectos en los radicandos.}$$
$$= \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} \quad \text{Regla del producto.}$$
$$= 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \quad \text{Se obtienen las raíces cuadradas.}$$
$$= (3-4)\sqrt{2} \quad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$= -1\sqrt{2} \quad \text{Se resta.}$$
$$= -\sqrt{2} \quad -1 \cdot a = -a$$

▮▮▮

En el **ejemplo 3**, vemos que los radicales semejantes se pueden sumar o restar sumando o restando sus coeficientes (los números que los multiplican) y se mantiene el mismo radical. Observe estos ejemplos.

$$9\sqrt{7} + 8\sqrt{7} = 17\sqrt{7} \quad \text{(puesto que } 9 + 8 = 17\text{)}$$
$$4\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = -8\sqrt{3} \quad \text{(puesto que } 4 - 12 = -8\text{)}$$

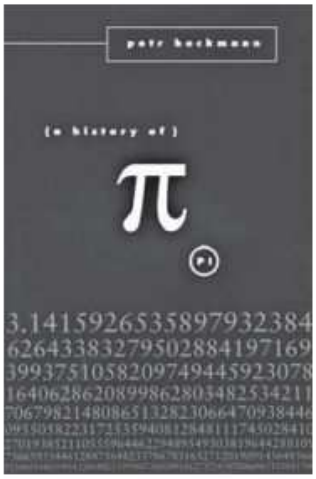
En los enunciados de las reglas de productos y cocientes de las raíces cuadradas, los radicandos no pueden ser negativos. Por ejemplo, $-\sqrt{2}$ es un número real; $\sqrt{-2}$ no lo es. No existen números reales cuyo cuadrado sea -2. Lo mismo se puede decir de cualquier radicando negativo. Con la finalidad de manejar esta situación, los matemáticos han ampliado nuestro sistema numérico para incluir los *números complejos*, que se analizan en la **Extensión** al final del capítulo.

Los números irracionales π, ϕ y e

π	3.141592654
$(1+\sqrt{5})/2$	1.618033989
e	2.718281828

Figura 13

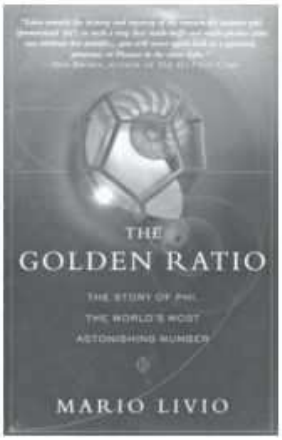
La **figura 13** muestra las aproximaciones de tres de los más importantes e interesantes números irracionales de las matemáticas. El primero de estos, π, representa la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. El segundo, ϕ, es la razón áurea, que se estudió con detalle en la **sección 4.5**. Su valor exacto es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. El tercero es e, un número fundamental en nuestro universo. Es la base de funciones *exponenciales naturales* y *logarítmicas naturales*, como se verá en la **sección 7.6**. Se seleccionó la letra e en honor de Leonhard Euler, quien publicó muchas investigaciones sobre el número en 1746.



Pi (π)

$$\pi \approx 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611212902196086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300192787661119590921642019893809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899577362259941389124972177528347913151557485724245415069595082953311686172785588907509838175463746493931925506040092770167113900984882401285836160356370766010471018194295559619894676783744944825537977472684710404753464620804668425906949129331367702898915210475216205696602405803815019351125338243003558764024749647326391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503028618297455570674983850549458858692699569092721079750930295532116534498720275596023648066549911988183479775356636980742654252786255181841757467289097777279380008164706001614524919217321721477235014144197356854816136115735255213347574184946843852332390739414333454776241686251898356948556209921922218427255025425688767179049460165346680498862723279178608578438382796797668145410095883466462068479600150618477364262641621780953691775911879718214616808366770117214386435988539627392583433207397958406201031637539180689942392331048530881833979911976882257214942388153444362707992692457562971096516165043793411204364357929734227465179590855683523104507596139294805687059571860846659845818394832478253167269872421348537562403026049630322177751969177535481562685256883539952159488509747714359218035732709354180688981394941948517369187833814990549758651301794527507709596158141794696705185242694754733309144684903896651501452490526809332151608226332343702577412275196778759782999490498824242628363937980316272638489648772626914230573321532844753502326104543267216480641995259505737263834166296550703125583674335382348688768176570483466840524905812746765817486845895169489852720103022230361882399064756415920648286194533151180717734367819077384863330942209285192217511253824300758663858386168382689940926078943774363717540862589607123458477845467636316488649176077705471152031767621468992648655249308774608034825756013941739607649349169113110051488696480762603765609435633182895064302587939865459063463438226681660570746284558038322420566687322948580366543340879415477151969565118850274345695357482636060249441521349718663595283907650432618930238108532403337626033228868523539147129532997661942293326623235719653116187129696365067571330588642877649825063778338252920840437481123968915673734888652151429187106292760315956998867452689987285699565995937180552258701716164540501427982261794354034759659139065292599631825287067487670216363442648338208686084223824963568521762017978968823117856038076070930418466264868233096026432944768228266264252303428124488377157825263562552176152749567478666569142154170464790998066868786333831404285883877571545649855396470742604962525137362835051616374301552941470902298981736794486099507331275341515393027669531969774221828922369804670649905238232627293034963988219258757032184

En 1767 **J.H. Lambert** demostró que π es irracional (y, por lo tanto, sus decimales nunca terminan y nunca se repiten). No obstante, la legislatura del estado de Indiana de 1897 consideró un proyecto de ley que *legislaría* el valor de π. En una parte del proyecto de ley, el valor estaba establecido como 4, y en otra parte como 3.2. De manera sorprendente, el proyecto de ley fue aprobado por la Cámara, pero el Senado pospuso la votación sobre el proyecto de ley de manera indefinida.



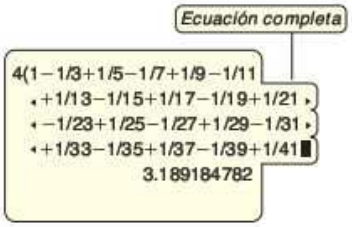


Figura 14

Un rectángulo que satisface la condición de que la razón entre su longitud y su ancho es igual a la razón entre la suma de su longitud más su ancho y su longitud se conoce como **rectángulo áureo**. Esta razón se llama **razón áurea**. Su valor exacto es el número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Se representa con la letra griega ϕ (fi).

Fi (ϕ)

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887498948482045868343 65$$

Dos libros sobre fi de fácil acceso son *The Divine Proportion, A Study in Mathematical Beauty*, de H. E. Huntley, y el más reciente *The Golden Ratio*, de Mario Livio. Algunos sitios Web dedicados a este número irracional son los siguientes.

www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/
www.goldennumber.net/
www.mathforum.org/dr.math/faq/faq.golden.ratio.html
www.geom.uiuc.edu/~demo5337/s97b/art.htm

EJEMPLO 5 Cálculo de los dígitos de fi usando la secuencia de Fibonacci

Los primeros 12 términos de la secuencia de Fibonacci son

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

Cada término después de los primeros dos se obtiene sumando los dos términos anteriores. Por lo tanto, el decimotercer término es $89 + 144 = 233$. Conforme uno avanza en la secuencia, la razón entre un término y su predecesor se acerca más y más a ϕ. ¿Qué tan lejos debe ir uno para aproximar ϕ de modo que los primeros cinco decimales de la secuencia concuerden con los de ϕ?

SOLUCIÓN

Después de 144, los siguientes tres números de Fibonacci son 233, 377 y 610. La **figura 15** muestra que $\frac{610}{377} \approx 1.618037135$, lo cual concuerda con los primeros cinco decimales de ϕ. ■■■



Figura 15

El número irracional e es una constante fundamental en matemáticas. En la **sección 7.6**, e es la base de funciones exponenciales y logarítmicas.

e

$$e \approx 2.7182818284590452353602874713 53$$



La naturaleza de e lo ha hecho menos comprensible para el lego que π (o inclusive que ϕ). El libro de 1944 *e: The Story of a Number*, de Eli Maor, ha intentado rectificar esta situación. Los siguientes sitios Web también brindan información sobre e.

www.mathforum.org/dr.math/faq/faq.e.html
www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/e.html
http://antwrp.gsfc.nasa.gov/htmltest/gifcity/e.1mil
www.math.toronto.edu/mathnet/answers/ereal.html

El **ejemplo 6** muestra otra serie infinita, la cual converge en e.

EJEMPLO 6 Cálculo de los dígitos de e usando una serie infinita

La serie infinita

$$2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots \text{ converge en } e.$$

Use una calculadora para aproximar e usando los primeros siete términos de esta serie.

SOLUCIÓN

La **figura 16** muestra la suma de los primeros siete términos. (Se han multiplicado todos los denominadores). La suma es 2.718253968, lo cual concuerda con los primeros cuatro decimales de e. Esta serie converge más rápidamente que la de π del **ejemplo 4**.

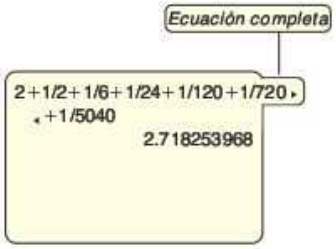


Figura 16

5.4 EJERCICIOS

Identifique cada número como racional *o* irracional.

1. $\frac{4}{9}$ **2.** $\frac{7}{8}$ **3.** $\sqrt{10}$

4. $\sqrt{14}$ **5.** 1.618 **6.** 2.718

7. $0.\overline{41}$ **8.** $0.\overline{32}$ **9.** π

10. e **11.** 3.14159 **12.** $\frac{22}{7}$

13. 0.878778777877778 . . . **14.** $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

15. ***a)*** Obtenga la suma

$$\begin{array}{r} 0.272772772772772\ldots \\ +0.616116111611116\ldots \\ \hline \end{array}$$

b) Con base en el resultado del inciso ***a)***, podemos concluir que la suma de dos números _____ puede ser un número _____.

16. ***a)*** Obtenga la suma

$$\begin{array}{r} 0.010110111011110\ldots \\ +0.252552555255552\ldots \\ \hline \end{array}$$

b) Con base en el resultado del inciso ***a)***, podemos concluir que la suma de dos números _____ puede ser un número _____.

Use una calculadora para obtener una aproximación decimal racional para cada uno de los siguientes números irracionales. Indique tantos lugares decimales como muestre su calculadora.

17. $\sqrt{39}$ **18.** $\sqrt{44}$ **19.** $\sqrt{15.1}$ **20.** $\sqrt{33.6}$

21. $\sqrt{884}$ **22.** $\sqrt{643}$ **23.** $\sqrt{\frac{9}{8}}$ **24.** $\sqrt{\frac{6}{5}}$

Utilice los métodos de los ***ejemplos 1 y 2*** *para simplificar cada expresión. Luego, utilice una calculadora para aproximar tanto la expresión dada como la expresión simplificada. (Ambas deberían ser iguales).*

25. $\sqrt{50}$ **26.** $\sqrt{32}$

27. $\sqrt{75}$ **28.** $\sqrt{150}$

29. $\sqrt{288}$ **30.** $\sqrt{200}$

31. $\frac{5}{\sqrt{6}}$ **32.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$

33. $\sqrt{\frac{7}{4}}$ **34.** $\sqrt{\frac{8}{9}}$

35. $\sqrt{\frac{7}{3}}$ **36.** $\sqrt{\frac{14}{5}}$

Utilice el método del ***ejemplo 3*** *para realizar las operaciones indicadas.*

37. $\sqrt{17} + 2\sqrt{17}$

38. $3\sqrt{19} + \sqrt{19}$

39. $5\sqrt{7} - \sqrt{7}$

40. $3\sqrt{27} - \sqrt{27}$

41. $3\sqrt{18} + \sqrt{2}$

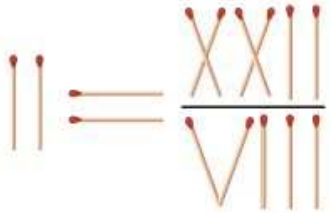
42. $2\sqrt{48} - \sqrt{3}$

43. $-\sqrt{12} + \sqrt{75}$

44. $2\sqrt{27} - \sqrt{300}$

Los ejercicios 45 a 58 se relacionan con π, ϕ o e. Cuando sea necesario use una calculadora o una computadora.

45. Mueva un cerillo para que la ecuación sea aproximadamente verdadera. (*Fuente:* www.joyofpi.com).



46. Obtenga la raíz cuadrada de $\frac{2143}{22}$ usando una calculadora. Luego calcule la raíz cuadrada de ese resultado. Compare su resultado con los decimales de π de la nota al margen. ¿Qué observa?

47. Use una calculadora para obtener los primeros ocho dígitos decimales de $\frac{355}{113}$. Compare el resultado con los decimales de π que se presentan en el texto. ¿Qué observa?

48. Tal vez usted haya visto los enunciados "use $\frac{22}{7}$ para π" y use "3.14 para π". Como $\frac{22}{7}$ es el cociente de dos enteros, y 3.14 es un decimal exacto, ¿sugieren estos enunciados que π es racional?

49. En la Biblia, (Reyes I, 7:23), un versículo describe un estanque circular en el templo del rey Salomón, en el año 1000 a. C. aproximadamente. Se dice que la fuente tenía 10 codos de uno a otro lado, y "una cuerda de 30 codos la ceñía alrededor". ¿Qué valor de π implica esto?

50. Los antiguos egipcios usaban un método para obtener el área de un círculo que es equivalente a un valor de 3.1605 para π. Escriba este decimal como un número mixto.

51. El cálculo de π ha fascinado a los matemáticos y legos durante siglos. En el siglo XIX, el matemático británico William Shanks pasó muchos años de su vida calculando π a 707 decimales. Concluyó que solo los primeros 527 eran correctos. Realice una búsqueda en Internet para obtener el quingentésimo vigésimo octavo dígito decimal de π (la parte que sigue del número entero 3).

52. Una de las razones para calcular tantos dígitos de π es determinar la frecuencia con que aparece cada dígito e identificar algún patrón interesante entre los dígitos. Gregory y David Chudnovsky han pasado una gran cantidad de tiempo buscando patrones en los dígitos. Por ejemplo, aparecen 6 nueves en fila relativamente pronto en el decimal, dentro de los primeros 800 lugares decimales. Realice una búsqueda en Internet para obtener las posiciones de estos 6 nueves en fila.

53. La expresión $\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}$ converge en $\frac{\pi}{2}$. Use una calculadora para evaluar solo los dígitos de la expresión que se muestra aquí, y luego multiplique por 2. ¿Qué valor de aproximación a π nos da (a un lugar decimal)?

54. Un **recurso mnemónico** es un esquema a través del cual se pueden recordar hechos memorizando algo completamente independiente de los mismos. Una manera de aprender algunos de los primeros dígitos decimales de π es memorizar una frase (o varias) y contar las letras de cada palabra en la frase. Por ejemplo, la frase en inglés "See, I know a digit" nos indica los primeros cinco dígitos de π: "See" tiene 3 letras, "I" tiene 1 letra, "know" tiene 4 letras, "a" tiene 1 letra, y "digit" tiene 5 letras. De modo que los primeros cinco dígitos son 3.1415.

Verifique que los siguientes recursos mnemónicos funcionan.

a) "¿May I have a large container of coffee?".

b) "See, I have a rhyme assisting my feeble brain, its tasks ofttimes resisting".

c) "How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics".

55. Use una calculadora para obtener aproximaciones decimales de $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y su **conjugado**, $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Comente acerca de las similitudes y diferencias de los dos decimales.

56. En algunos textos, la razón áurea se define como el recíproco de $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, el cual es $\frac{2}{1 + \sqrt{5}}$. Use una calculadora para obtener una aproximación decimal de $\frac{2}{1 + \sqrt{5}}$ y compárela con la definición de ϕ en este texto. ¿Qué observa?

57. Una aproximación de e es 2.718281828. Un estudiante notó que aparece una repetición de cuatro dígitos en este número (1, 8, 2, 8) y concluyó que e es racional, porque la repetición de decimales identifica números racionales. ¿Estaba en lo correcto el estudiante? ¿Por qué?

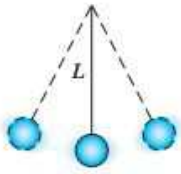
58. Use una calculadora que tenga una tecla exponencial para obtener los siguientes valores: $(1.1)^{10}$, $(1.01)^{100}$, $(1.001)^{1000}$, $(1.0001)^{10,000}$ y $(1.00001)^{100,000}$. Compare sus resultados con la aproximación que se dio de e en esta sección. ¿Qué observa?

Resuelva cada problema. Use una calculadora cuando sea necesario y dé aproximaciones a la décima más cercana a menos que se especifique otra cosa.

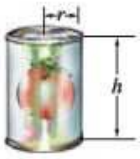
59. ***Periodo de un péndulo*** El periodo de un péndulo en segundos depende de su longitud, L, en pies, y está dado por la fórmula:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}.$$

Si un péndulo tiene 5.1 pies de largo, ¿cuál es su periodo? Use 3.14 para π.



60. ***Radio de una lata de aluminio*** El radio de la tapa o de la parte inferior de una lata de aluminio con una superficie igual a S y altura h está dada por:



$$r = \frac{-h + \sqrt{h^2 + 0.64S}}{2}.$$

¿Qué radio se debe usar para hacer una lata con una altura igual a 12 pulgadas y una superficie igual a 400 pulgadas cuadradas?

61. ***Distancia al horizonte*** Jack Adrian, un amigo de uno de los autores de este texto, tiene un hermoso condominio en el piso 14, con una vista sensacional, en el centro de Chicago. El piso se encuentra a 150 pies por arriba del suelo. Sabiendo que este autor es un maestro de matemáticas, Jack le mandó un correo electrónico y le dijo que recordaba que alguna vez había estudiado una fórmula para calcular la distancia al horizonte, pero que la había olvidado. Quería saber a qué distancia podía ver desde su condominio. El autor respondió:

> *Para calcular la distancia al horizonte en millas, se toma la raíz cuadrada de la altura de la vista y el resultado se multiplica por 1.224. Eso dará el número de millas al horizonte.*

Suponiendo que los ojos de Jack están a 6 pies por arriba del piso, la altura total a partir de la tierra es $150 + 6 = 156$ pies. Dé su respuesta redondeando a la décima de milla más cercana, ¿a qué distancia se puede ver el horizonte?



62. ***Fórmula electrónica*** La fórmula $I = \sqrt{\frac{2P}{L}}$ relaciona el coeficiente de autoinducción L (en henrys), la energía P almacenada en un circuito electrónico (en joules) y la corriente I (en amperes). Obtenga el valor de I si $P = 120$ joules y $L = 80$ henrys.

63. ***Área del triángulo de las Bermudas*** La fórmula de Herón ofrece un método para calcular el área de un triángulo si se conocen las longitudes de los lados. Suponga que a, b y c son las longitudes de los lados. Considere que s denota la mitad del perímetro del triángulo (conocido como **semiperímetro**); es decir,

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Entonces el área A del triángulo está dada por

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Obtenga el área del Triángulo de las Bermudas, si los "lados" de este triángulo miden aproximadamente 850 millas, 925 millas y 1300 millas. Dé su respuesta redondeando al millar de millas cuadradas más cercano.

64. ***Área comprendida dentro del monumento a los veteranos de Vietnam*** El monumento a los veteranos de Vietnam, en Washington, D.C., tiene la forma de un triángulo isósceles abierto, cuyos lados iguales miden 246.75 pies de longitud. Si el triángulo estuviera completo, el tercer lado tendría una longitud de 438.14 pies. Utilice la fórmula de Herón del ejercicio anterior para determinar el área circunscrita, aproxime a la centena de pies cuadrados más cercana. (*Fuente:* Información de los folletos obtenidos en el monumento a los veteranos de Vietnam).

65. ***Triángulos perfectos*** Un **triángulo perfecto** es un triángulo cuyos lados tienen números enteros no negativos en sus longitudes y cuya área es numéricamente igual a su perímetro. Use la fórmula de Herón para mostrar que el triángulo con lados de longitudes 9, 10 y 17 es perfecto.

66. ***Triángulos de Herón*** Un triángulo de Herón es un triángulo que tiene lados y área representados por números enteros. Use la fórmula de Herón para demostrar que cada uno de los siguientes es un triángulo de Herón.

a) $a = 11, b = 13, c = 20$

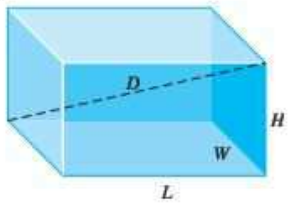
b) $a = 13, b = 14, c = 15$

c) $a = 7, b = 15, c = 20$

67. ***Diagonal de una caja*** La longitud de la diagonal de una caja está dada por

$$D = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2},$$

donde L, W y H corresponden a la longitud, el ancho y la altura de la caja, respectivamente. Obtenga la longitud de la diagonal, D, de una caja que tiene 4 pies de largo, 3 pies de ancho y 2 pies de alto.



68. ***Tasa de rendimiento de una inversión*** Si una inversión de P dólares crece a A dólares en dos años, la tasa anual de rendimiento sobre la inversión está dada por

$$r = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{P}}{\sqrt{P}}.$$

Primero racionalice el denominador y luego obtenga la tasa anual de rendimiento (en decimales) si \$50,000 se incrementan hasta convertirse en \$58,320.

69. ***Reconstrucción de un accidente*** En ocasiones, la policía utiliza el siguiente procedimiento para estimar la rapidez a la que un automóvil viajaba en el momento de un accidente. Un oficial conduce el automóvil implicado en el accidente en condiciones similares a las del accidente y luego derrapa hasta detenerse. Si el automóvil es conducido a 30 millas por hora, entonces la rapidez en el instante del accidente está dada por

$$s = 30\sqrt{\frac{a}{p}}.$$

Aquí, a es la longitud de la marca del derrape que se produce en el momento del accidente, y p es la longitud de la marca del derrape en la prueba de la policía. Obtenga s para los siguientes valores de a y p.

a) $a = 862$ pies; $p = 156$ pies

b) $a = 382$ pies; $p = 96$ pies

c) $a = 84$ pies; $p = 26$ pies

70. *Ley de tensiones* En el estudio del sonido, una versión de la ley de tensiones es

$$f_1 = f_2\sqrt{\frac{F_1}{F_2}}.$$

Obtenga f_1 a la unidad más cercana si $F_1 = 300$, $F_2 = 60$ y $f_2 = 260$.

El concepto de raíz cuadrada (segunda) se puede ampliar al concepto de ***raíz cúbica (tercera), raíz cuarta****, etcétera. Si $n \geq 2$ y a es un número no negativo, $\sqrt[n]{a}$ representa el número no negativo cuya n-ésima potencia es a. Por ejemplo,*

$\sqrt[3]{8} = 2$ *porque* $2^3 = 8$,

$\sqrt[3]{1000} = 10$ *porque* $10^3 = 1000$,

$\sqrt[4]{81} = 3$ *porque* $3^4 = 81$, *y así sucesivamente.*

Obtenga cada raíz.

71. $\sqrt[3]{64}$ **72.** $\sqrt[3]{125}$

73. $\sqrt[3]{343}$ **74.** $\sqrt[3]{729}$

75. $\sqrt[3]{216}$ **76.** $\sqrt[3]{512}$

77. $\sqrt[4]{1}$ **78.** $\sqrt[4]{16}$

79. $\sqrt[4]{256}$ **80.** $\sqrt[4]{625}$

81. $\sqrt[4]{4096}$ **82.** $\sqrt[4]{2401}$

Use una calculadora para aproximar cada raíz. Dé tantos dígitos como tenga su calculadora. (Sugerencia: Para obtener la raíz cuarta, obtenga la raíz cuadrada de la raíz cuadrada).

83. $\sqrt[3]{43}$ **84.** $\sqrt[3]{87}$

85. $\sqrt[3]{198}$ **86.** $\sqrt[4]{2107}$

87. $\sqrt[4]{10{,}265.2}$ **88.** $\sqrt[4]{863.5}$

89. $\sqrt[4]{968.1}$ **90.** $\sqrt[4]{12{,}966.4}$

5.5 APLICACIONES DE DECIMALES Y PORCENTAJES

Operaciones con decimales • Redondeo de decimales • Porcentaje • Aplicaciones

Operaciones con decimales

Debido a que en la mayoría de los casos las calculadoras han remplazado los métodos con lápiz y papel en el cálculo de operaciones con decimales y porcentajes, solo mencionaremos estos últimos de manera breve. ***Recomendamos ampliamente que el trabajo en esta sección se realice con una calculadora en la mano.***

Suma y resta de decimales

Para sumar o restar números decimales, se alinean los puntos decimales en una columna y se ejecuta la operación.

EJEMPLO 1 Suma y resta de números decimales

Calcule lo siguiente.

a) $0.46 + 3.9 + 12.58$ **b)** $12.1 - 8.723$

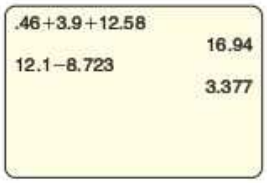
SOLUCIÓN

a)
$$\begin{array}{r} 0.46 \\ 3.90 \\ +12.58 \\ \hline 16.94 \end{array}$$

Se alinean los puntos decimales. Se incluye un cero como representante de las centésimas. ← Suma

b)
$$\begin{array}{r} 12.100 \\ -8.723 \\ \hline 3.377 \end{array}$$

Se incluyen ceros. ← Resta



Esta pantalla apoya los resultados del **ejemplo 1.**

"La **tecnología** ha invadido el mundo fuera de la escuela. No hay duda de que los estudiantes esperan usar las calculadoras en otros entornos; la tecnología ahora es parte de nuestra cultura . . . los estudiantes no tienen ya la misma necesidad de realizar los procedimientos (papel y lápiz) con grandes números en largas expresiones, como sucedía en el pasado cuando no existía libre acceso a la tecnología".

De *Computation, Calculators, and Common Sense (A Position Paper of the National Council of Teachers of Mathematics).*

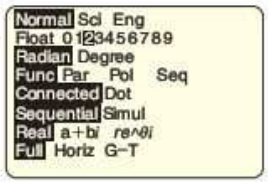
Recuerde que cuando se multiplican dos números, estos se llaman **factores** y la respuesta se llama **producto**. Cuando se dividen dos números, el número que se está dividiendo se llama **dividendo**, el número que divide se llama **divisor**, y la respuesta se llama **cociente**.

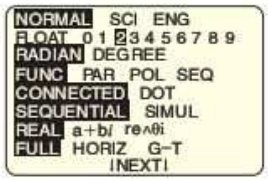
Multiplicación y división de decimales

Multiplicación Para multiplicar decimales, se multiplica de la misma manera como se multiplican los números enteros. El número de decimales a la derecha del punto decimal en el producto es igual a la *suma* de los decimales a la derecha de los puntos decimales de los factores.

División Para dividir decimales, se mueve el punto decimal a la derecha el mismo número de decimales en el divisor y el dividendo, de modo que se obtenga un número entero no negativo en el divisor. Se divide de la misma manera en que se dividen los números enteros. El número de lugares decimales a la derecha del punto decimal en el cociente es el mismo que el número a la derecha del dividendo.

EJEMPLO 2 Multiplicación y división de números decimales





En este caso, la TI-83/84 Plus está programada para redondear la respuesta a dos decimales.

Calcule lo siguiente.

a) 4.613×2.52 ***b)*** $65.175 \div 8.25$

SOLUCIÓN

a)

$$\begin{array}{rl} 4.613 & \leftarrow \text{3 decimales} \\ \times\ 2.52 & \leftarrow \text{2 decimales} \\ \hline 9226 & \\ 23065 & \\ 9226 & \\ \hline 11.62476 & \leftarrow 3 + 2 = 5 \text{ decimales} \end{array}$$

b)

$$8.25\overline{)65.175} \rightarrow 825\overline{)6517.5}$$

$$\begin{array}{r} 7.9 \\ 825\overline{)6517.5} \\ 5775 \\ \hline 7425 \\ 7425 \\ \hline 0 \end{array}$$

Lleve el punto decimal directamente a la respuesta.

Redondeo de decimales

EJEMPLO 3 Redondeo de un número decimal

Redondee 3.917 a la centésima más próxima.

SOLUCIÓN

El lugar de las centésimas del número 3.917 está ocupado por 1.

$$3.917$$

↑ Lugar de las centésimas

Para redondear este decimal, se ubican 3.91 y 3.92 sobre una recta numérica como en la **Figura 17**.



Figura 17



La calculadora redondea 3.917 a la centésima más próxima.

La distancia de 3.91 a 3.92 se divide en 10 partes iguales. En la séptima de estas diez partes se ubica el número 3.917. Como muestra la recta numérica, 3.917 está más cerca de 3.92 que de 3.91, por lo que 3.917 redondeado a la centésima más próxima es 3.92.



La calculadora redondea 3.915 *hacia arriba* a 3.92.

Si el método de la recta numérica del **ejemplo 3** se usara para redondear 3.915 a la centésima más próxima, surgiría un problema (el número 3.915 está exactamente a la mitad de 3.91 y 3.92). Se toma entonces la decisión arbitraria de redondear *hacia arriba*: 3.915 redondeado a la centésima más próxima es igual a 3.92. (Algunas disciplinas tienen reglas específicas, de modo que, en ciertos casos, se realiza el redondeo *hacia abajo*. No nos detendremos en este asunto).

Reglas para redondear decimales

Paso 1 Localice la **posición** en la cual se va a redondear el número.

Paso 2 Observe el siguiente **dígito de la derecha** de la posición en la cual se va a redondear el número.

Paso 3A Si este dígito es **menor que 5**, elimine todos los dígitos a la derecha de la posición en la cual se está redondeando el número. No *cambie* el dígito de la posición en la cual se está redondeando el número.

Paso 3B Si el dígito es **5 o mayor**, elimine los dígitos a la derecha de la posición en la cual se está redondeando el número. *Sume uno* al dígito ubicado en la posición en la cual se está redondeando el número.

EJEMPLO 4 Redondeo de un número decimal

Redondee 14.39656 a la milésima más próxima.

SOLUCIÓN

Paso 1 Se usa una flecha para ubicar la posición en la cual se va a redondear el número.



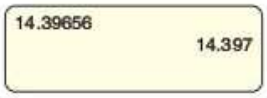
Paso 2 Se verifica si el primer dígito a la derecha de la flecha es 5 o mayor.



Paso 3 Como el dígito a la derecha de la flecha es 5 o mayor, se aumenta 1 al dígito al cual apunta la flecha. Se eliminan todos los dígitos a la derecha de la flecha.



Finalmente, 14.39656 redondeado a la milésima más cercana es igual a 14.397. ▮▮▮



Con la calculadora programada para redondear tres posiciones decimales, se apoya el resultado del **ejemplo 4**.

Porcentaje

Una de las principales aplicaciones de los decimales proviene de los problemas que implican porcentajes. La palabra **porcentaje** significa **"por cada cien"**. El símbolo % representa el "porcentaje".

Porcentaje

$$1\% = \frac{1}{100} = 0.01$$



En *The Producers* (*Los productores*), Leo Bloom (Gene Wilder) y Max Bialystock (Zero Mostel) conspiran para hacerse ricos pidiendo mucho más financiamiento del que necesitan para lo que creen que será un fracaso en Broadway. Después de mencionar el **porcentaje** de utilidades a todas las damas a las que se ha ofrecido la producción, comienza la realidad en los escenarios.

MAX: Leo, ¿qué porcentaje de una función puede venderse?

LEO: Max, tú solamente puedes vender el 100% de lo que sea.

MAX: ¿Y cuánto hemos vendido de *Springtime for Hitler*?

LEO: 25,000%.

MAX: 25,000%... Dame esa alegría.

En *Willy Wonka and the Chocolate Factory* (*Willy Wonka y la fábrica de chocolate*), en relación con la preparación de una mezcla en su laboratorio, Wilder entrega el siguiente análisis de **porcentaje** imposible mientras bebe su último brebaje.

WILLY WONKA: La invención, mis queridos amigos, es 93% transpiración, 6% electricidad, 4% evaporación y 2% de jarabe de caramelo.

VOZ FEMENINA: Eso es 105%.

VOZ MASCULINA: ¿Algo bueno?

WILLY WONKA: ¡Sí!

EJEMPLO 5 Conversión de porcentajes a decimales

Convierta cada porcentaje a un decimal.

a) 98% ***b)*** 3.4% ***c)*** 0.2% ***d)*** 150%

SOLUCIÓN

a) $98\% = 98(1\%) = 98(0.01) = 0.98$

b) $3.4\% = 3.4(1\%) = 3.4(0.01) = 0.034$

c) $0.2\% = 0.2(1\%) = 0.2(0.01) = 0.002$

d) $150\% = 150(1\%) = 150(0.01) = 1.5$

EJEMPLO 6 Conversión de decimales a porcentajes

Convierta cada decimal a un porcentaje.

a) 0.13 ***b)*** 0.532 ***c)*** 2.3 ***d)*** 0.07

SOLUCIÓN

a) $0.13 = 13(0.01) = 13(1\%) = 13\%$

b) $0.532 = 53.2(0.01) = 53.2(1\%) = 53.2\%$

c) $2.3 = 230(0.01) = 230(1\%) = 230\%$

d) $0.07 = 7(0.01) = 7(1\%) = 7\%$

Conversión entre decimales y porcentajes

Para convertir un porcentaje a un decimal, se elimina el símbolo de porcentaje (%) y se mueve el punto decimal dos posiciones a la izquierda, insertando ceros como marcadores de posición, si es necesario.

Para convertir un decimal a un porcentaje, se mueve el punto decimal dos posiciones a la derecha, insertando ceros como marcadores de posición, si es necesario, y se agrega el símbolo de porcentaje (%).

EJEMPLO 7 Conversión de fracciones a porcentajes

Convierta cada fracción a un porcentaje.

a) $\frac{3}{5}$ ***b)*** $\frac{14}{25}$

SOLUCIÓN

a) Primero se escribe $\frac{3}{5}$ como un decimal. Al dividir 3 entre 5 nos da $\frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$.

b) $\frac{14}{25} = \frac{14 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{56}{100} = 0.56 = 56\%$

Conversión de una fracción a un porcentaje

Para convertir una fracción a un porcentaje, se convierte la fracción a un decimal, y luego se convierte el decimal a un porcentaje.

El símbolo de porcentaje (%) probablemente evolucionó a partir de un símbolo utilizado en un manuscrito italiano en 1425. En lugar de "por 100", "P 100", o "P cento", lo cual era común en ese tiempo, el autor usó "P$\hat{\text{P}}$". En 1650 aproximadamente, el $\hat{\text{P}}$ se había transformado en $\frac{0}{0}$, de modo que "por $\frac{0}{0}$" se usaba con frecuencia. Finalmente, el "por" fue eliminado, dejando $\frac{0}{0}$ o %.

Fuente: Historical Topics for the Mathematics Classroom, anuario 31 del National Council of Teachers of Mathematics, 1969.

En los ejemplos siguientes que implican porcentajes, se presentan tres métodos de cálculo. El segundo método de cada caso implica el uso de productos cruzados. El tercer método implica la tecla de porcentaje de una calculadora. (Los comandos pueden variar entre los modelos).

EJEMPLO 8 Obtención del porcentaje de un número

Obtenga el 18% de 250.

SOLUCIÓN

Método 1 La palabra clave "de" se interpreta como "por".

$$(18\%)(250) = (0.18)(250) = 45$$

Método 2 Piense que "18 es a 100 como (x) es a 250". Esto se representa como sigue.

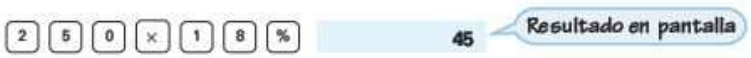
$$\frac{18}{100} = \frac{x}{250}$$

$$100x = 18 \cdot 250 \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solo si } ad = bc.$$

$$x = \frac{18 \cdot 250}{100} \qquad \text{Se divide entre 100.}$$

$$x = 45 \qquad \text{Se simplifica.}$$

Método 3 Use la tecla de porcentaje de una calculadora con las teclas siguientes.



Con cualquiera de estos métodos, se sabe que el 18% de 250 es 45. ■■■

EJEMPLO 9 ¿Qué porcentaje de un número es otro?

¿Qué porcentaje de 500 es 75?

SOLUCIÓN

Método 1 Hagamos que la frase "qué porcentaje" sea representada por $x \cdot 1\%$, es decir, $0.01x$. Nuevamente, la palabra "de" se interpreta como "por", mientras que "es" se traduce como "igual".

$$0.01x \cdot 500 = 75$$

$$5x = 75 \qquad \text{Se efectúa la multiplicación del lado izquierdo.}$$

$$x = 15 \qquad \text{Se divide entre 5.}$$

Método 2 Piense "que (x) es a 100 como 75 es a 500".

$$\frac{x}{100} = \frac{75}{500}$$

$$500x = 7500 \qquad \text{Productos cruzados}$$

$$x = 15 \qquad \text{Se divide entre 500.}$$

Método 3 Oprima las siguientes teclas de la calculadora.



En cada caso, 15 es el porcentaje, de modo que se concluye que 75 es el 15% de 500. ■■■

EJEMPLO 10 ¿De qué número es porcentaje otro número determinado?

¿38 es el 5% de qué número?

SOLUCIÓN

Método 1

$$38 = 0.05x$$

$$x = \frac{38}{0.05} \quad \text{Se divide entre 0.05.}$$

$$x = 760 \quad \text{Se simplifica.}$$

Método 2 Piense que "38 es a (x) como 5 es a 100".

$$\frac{38}{x} = \frac{5}{100}$$

$$5x = 3800 \quad \text{Productos cruzados}$$

$$x = 760 \quad \text{Se divide entre 5.}$$

Método 3 Oprima las siguientes teclas de la calculadora.

3 8 ÷ 5 % **760** Resultado en pantalla

Cada método indica que 38 es el 5% de 760.

Existen varios atajos que se pueden usar para trabajar con porcentajes. Suponga que se necesita calcular el 20% de 50. Para esto existen dos caminos cortos.

1. Piense que "20% es la $\frac{1}{5}$ parte de algo, y para calcular la $\frac{1}{5}$ parte de algo se divide entre 5, de modo que 50 dividido entre 5 es 10. La respuesta es 10".
2. Piense que "20% es dos veces el 10% de algo, y para obtener el 10% de algo se mueve el punto decimal una posición a la izquierda. De modo que el 10% de 50 es 5, y el 20% es dos veces 5, es decir, 10. La respuesta es 10".

Aplicaciones

EJEMPLO 11 Interpretación de porcentajes de una gráfica

En 2007 los estadounidenses gastaron aproximadamente $41,200 millones en sus mascotas. Con base en la gráfica de la **figura 18**, determine cuánto de esta cantidad se gastó en alimento para mascotas.



Fuente: American Pet Products Manufacturers Association, Inc.

Figura 18



Dotty

SOLUCIÓN

De acuerdo con la gráfica de la página anterior, se gastó el 39.3% en alimento. Hagamos que x represente esta cifra en miles de millones de dólares. Usaremos el método 2 del **ejemplo 8**.

$$\frac{x}{41.2} = 0.393 \qquad 39.3\% = 0.393$$

$$x = 41.2(0.393) \qquad \text{Se multiplica por 41.2.}$$

$$x \approx 16.2 \qquad \text{Décima más cercana}$$

Por lo tanto, se gastaron aproximadamente \$16,200 millones en alimento para mascotas. ■■■

En muchas aplicaciones se necesita calcular el porcentaje de aumento o de disminución de una cantidad con respecto a otra. En estos casos, son útiles las siguientes recomendaciones.

Obtención del porcentaje de aumento o de disminución

1. Para obtener el **porcentaje de aumento de a a b**, donde $b > a$, se resta a de b, y el resultado se divide entre a. Luego se convierte a porcentaje.

   Ejemplo: El porcentaje de aumento de 4 a 7 es $\frac{7-4}{4} = \frac{3}{4} = 75\%$.

2. Para obtener el **porcentaje de disminución de a a b**, donde $b < a$, se resta b de a, y el resultado se divide entre a. Luego se convierte a porcentaje.

   Ejemplo: El porcentaje de disminución de 8 a 6 es $\frac{8-6}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$.

EJEMPLO 12 Solución de problemas de aumento o disminución de porcentaje

a) Una tienda de electrónicos ajustó el precio de una laptop de \$1200 a \$1464. ¿Cuál fue el porcentaje del ajuste?

b) La matrícula en una universidad disminuyó de 12,750 en un año escolar a 11,350 en el siguiente. Obtenga el porcentaje de disminución redondeando a la décima más cercana.

SOLUCIÓN

a) "Ajuste" es otra forma de referirse a un aumento. Sea x = porcentaje de incremento (en forma decimal).

Se resta para obtener el monto del incremento.

$$x = \frac{1464 - 1200}{1200} \qquad \text{Se sustituyen los valores proporcionados.}$$

Se considera el costo original.

$$x = \frac{264}{1200}$$

$$x = 0.22 \qquad \text{Se usa una calculadora.}$$

La computadora aumentó un 22%.

b) Sea x = porcentaje de disminución (en forma decimal).

$$\text{porcentaje de disminución} = \frac{\text{monto de la disminución}}{\text{cantidad original}}$$

Se resta para obtener el monto de la disminución.

$$x = \frac{12{,}750 - 11{,}350}{12{,}750} \qquad \text{Se sustituyen los valores proporcionados.}$$

Se considera la cifra original de matrícula.

$$x = \frac{1400}{12{,}750}$$

$$x \approx 0.11 \qquad \text{Se usa una calculadora.}$$

La matrícula de la universidad disminuyó aproximadamente en un 11%. ■■■

Cuando calcule un porcentaje de aumento o de disminución, asegúrese de usar como base el número original (antes del aumento o de la disminución). Un error común es usar el número final (*después* del aumento o de la disminución) en el denominador de la fracción.

Para reflexionar

Es tiempo de terminar con el uso incorrecto del punto decimal

El uso erróneo del punto decimal junto con el símbolo de centavos es casi cotidiano. Piense que… \$.99 representa $\frac{99}{100}$ de un dólar, es decir, 99 centavos, mientras que 99¢ también representan 99 centavos (ya que ¢ es el símbolo de *centavos*). Entonces, ¿qué representa .99¢? Correcto, ¡$\frac{99}{100}$ de un centavo!

Observe las fotografías que tomó uno de los autores. Una orden de pollo sazonado en Wendy's se anuncia en .99¢. ¿Qué cree que pasaría si usted entregara al empleado diez centavos y le pidiera 10 órdenes y su cambio? Tal vez el empleado lo vería con una mirada de asombro. Probablemente obtendría una respuesta similar si pide una limonada Sierra Mist, la cual cuesta aún menos: .79¢. Aspirar su automóvil cuesta .50¢, apenas medio centavo. En el Floor Place pisos fabulosos realmente cuestan menos… mucho menos: menos de la mitad de un centavo por pie cuadrado de piso Berber. Ahora aquí hay una gran oportunidad: una botella de Coca Cola de 2 litros por .09¢ (Sin duda, el 1 que precedía al punto decimal se cayó. Entonces una botella como esa costaría solo un poco más de un centavo). En Winn Dixie, una libra de plátanos cuesta .69¢.













Para investigación individual o en grupo

Suponga que los productos mostrados en las fotografías se venden realmente en los precios indicados. Conteste lo siguiente.

1. ¿Cuántas órdenes de pollo sazonado adquiriría por \$1.00? ¿Cuánto dinero de cambio le devolvería Wendy's?
2. ¿Cuánto costaría una onza de Sierra Mist?
3. Si usted tiene 50 centavos para aspirar su automóvil, ¿cuántas veces podría aspirarlo?
4. Usted desea cubrir el área de su cuarto con 400 pies cuadrados de piso Berber. ¿Cuánto costaría esto?
5. ¿Cuántas botellas de Coca Cola de 2 litros podría adquirir con nueve centavos?
6. Si tres plátanos pesan 1 libra, ¿cuántos podría obtener con un centavo?

5.5 EJERCICIOS

Determine si cada enunciado es verdadero *o* falso.

1. El 300% de 12 es 36.

2. El 25% de una cantidad es lo mismo que $\frac{1}{4}$ de esa cantidad.

3. Cuando se redondea 759.367 a la centésima más cercana, el resultado es 759.40.

4. Cuando se redondea 759.367 a la centésima más cercana, el resultado es 759.37.

5. Para obtener el 50% de una cantidad, simplemente se divide la cantidad entre 2.

6. Un equipo de futbol que ha ganado 12 juegos y perdido 8 tiene un porcentaje de triunfos del 60%.

7. Si 70% es la calificación aprobatoria más baja de un examen que incluye 50 preguntas de igual valor, el hecho de contestar por lo menos 35 preguntas correctamente asegura al estudiante la aprobación del grado.

8. 30 es más del 40% de 120.

9. .99¢ = 99 centavos.

10. Si un artículo cuesta normalmente \$70.00 y tiene un descuento del 10%, entonces el precio de descuento es de \$7.00.

Calcule lo siguiente usando calculadora o papel y lápiz, de acuerdo con las indicaciones de su profesor.

11. 8.53 + 2.785

12. 9.358 + 7.2137

13. 8.74 − 12.955

14. 2.41 − 3.997

15. 25.7 × 0.032

16. 45.1 × 8.344

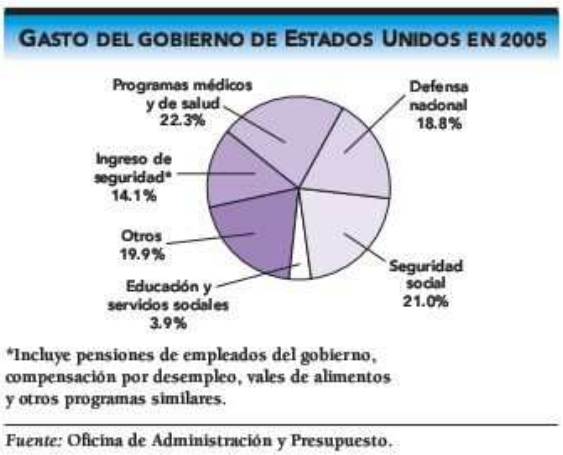
17. 1019.825 ÷ 21.47

18. −262.563 ÷ 125.03

19. $\dfrac{118.5}{1.45 + 2.3}$

20. 2.45(1.2 + 3.4 − 5.6)

Gasto gubernamental *En 2005 el gobierno de Estados Unidos gastó aproximadamente* \$2500 *miles de millones (es decir,* \$2.5 *billones). La gráfica circular muestra cómo se dividió el gasto.*



21. ¿Aproximadamente cuánto se gastó en seguridad social?

22. ¿Aproximadamente cuánto gastó el gobierno de Estados Unidos en educación y servicios sociales en 2005?

Precio de estampillas de correo *Revise la sección* ***Para reflexionar*** *acerca del uso incorrecto del punto decimal. Alguna vez, el Servicio Postal de Estados Unidos vendió rollos de estampillas de 33 centavos con imágenes de bayas. Abajo a la izquierda se muestra una de estas estampillas. A la derecha se muestra una fotografía con información del precio que se encuentra en la envoltura de celofán del rollo.*





23. Observe la segunda línea de la información del precio. De acuerdo con el precio listado *por estampilla*, ¿cuántas estampillas se pueden comprar con un centavo?

24. El precio total listado es la cantidad que el servicio postal realmente cobra. Si usted multiplicara el precio listado *por estampilla* por el número de estampillas, ¿cuál sería el precio total?

Precio de un pastel y un café *Las siguientes fotografías fueron tomadas en un mercado de pulgas cerca de Natchez, MS. La letra manuscrita indica que un trozo de pastel cuesta .10¢ y una taza de café (abreviado como ffee) cuesta .5¢. Suponiendo que estos son reales, conteste las preguntas de los ejercicios 25 a 28.*





25. ¿Cuánto costarán 10 trozos de pastel y 10 tazas de café?

26. ¿Cuánto costarán 20 trozos de pastel y 10 tazas de café?

27. ¿Cuántos trozos de pastel se pueden obtener con \$1.00?

28. ¿Cuántas tazas de café se pueden obtener con \$1.00?

Los ejercicios 29 a 32 se basan en fórmulas obtenidas en el Auto Math Handbook: Mathematical Calculations, Theory, and Formulas for Automotive Enthusiasts, *de John Lawlor (1991, HP Books).*

29. ***Concentración de alcohol en la sangre*** La concentración de alcohol en la sangre (CAS) de una persona que ha estado bebiendo está dada por la fórmula

$$\text{CAS} = \frac{(\text{onzas} \times \text{porcentaje de alcohol} \times 0.075)}{\text{peso del cuerpo en lb}} - (\text{horas bebiendo} \times 0.015).$$

Suponga que un policía detiene a un hombre de 190 libras que, en dos horas, ha ingerido cuatro cervezas de 12 onzas cada una, con 3.2% de contenido de alcohol. La fórmula de cálculo es entonces:

$$\text{CAS} = \frac{[(4 \times 12) \times 3.2 \times 0.075]}{190} - (2 \times 0.015).$$

a) Obtenga el contenido de alcohol en la sangre del hombre.

b) Obtenga el contenido de alcohol en la sangre de una mujer de 135 libras que, en tres horas, ha ingerido tres cervezas de 12 onzas, cada una con 4% de contenido de alcohol.

30. ***Velocidad aproximada de un automóvil*** La velocidad aproximada de un automóvil en millas por hora (MPH) se puede calcular en términos de revoluciones por minuto del motor (rpm), el diámetro de los neumáticos en pulgadas, y la razón total de transmisión, con la fórmula

$$\text{MPH} = \frac{\text{rpm} \times \text{diámetro del neumático}}{\text{razón de transmisión} \times 336}.$$

Si un automóvil funciona a 5600 rpm, tiene un diámetro de neumático igual a 26 pulgadas, y una razón de transmisión de 3.12, ¿cuál es su velocidad aproximada (MPH)?

31. ***Caballos de potencia de un motor*** Los caballos de potencia se pueden calcular a partir de la presión efectiva media nominal (pem) en libras por pulgada cuadrada, la cilindrada en pulgadas cúbicas y las revoluciones por minuto (rpm), mediante la fórmula

$$\text{Caballos de potencia} = \frac{\text{pem} \times \text{cilindrada} \times \text{rpm}}{792{,}000}.$$

Suponga que un motor tiene una cilindrada de 302 pulgadas cúbicas y una pem nominal de 195 libras por pulgada cuadrada a 4000 rpm. ¿Aproximadamente, cuál es su potencia?

32. ***Aproximación del torque*** Para determinar el torque a ciertas rpm, se aplica la siguiente fórmula:

$$\text{Torque} = \frac{5252 \times \text{caballos de potencia}}{\text{rpm}}.$$

Si los caballos de potencia de un vehículo son 400 a 500 rpm, ¿cuál es el torque aproximado?

Redondee cada número ***a)*** *a la décima más próxima;* ***b)*** *a la centésima más próxima. Redondee siempre a partir del número original.*

33. 78.414 **34.** 3689.537 **35.** 0.0837

36. 0.0658 **37.** 12.68925 **38.** 43.99613

Convierta cada decimal a un porcentaje.

39. 0.42 **40.** 0.87 **41.** 0.365 **42.** 0.792

43. 0.008 **44.** 0.0093 **45.** 2.1 **46.** 8.9

Convierta cada fracción a un porcentaje.

47. $\frac{1}{5}$ **48.** $\frac{2}{5}$ **49.** $\frac{1}{100}$ **50.** $\frac{1}{50}$

51. $\frac{3}{8}$ **52.** $\frac{5}{6}$ **53.** $\frac{3}{2}$ **54.** $\frac{7}{4}$

55. Explique la diferencia entre $\frac{1}{2}$ de una cantidad y $\frac{1}{2}$% de esa cantidad.

56. El grupo I muestra algunos porcentajes comunes que se encuentran en muchas situaciones cotidianas. En el grupo II se encuentran las equivalencias fraccionarias de esos porcentajes. Asocie las fracciones del grupo II con los porcentajes equivalentes del grupo I.

I		II	
a) 25%	***b)*** 10%	**A.** $\frac{1}{3}$	**B.** $\frac{1}{50}$
c) 2%	***d)*** 20%	**C.** $\frac{3}{4}$	**D.** $\frac{1}{10}$
e) 75%	***f)*** $33\frac{1}{3}$%	**E.** $\frac{1}{4}$	**F.** $\frac{1}{5}$

57. Llene cada espacio con la respuesta numérica correcta.

a) 5% significa _____ de cada 100.

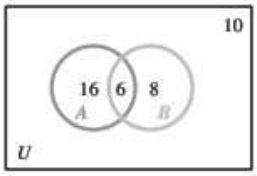
b) 25% significa 6 de cada _____.

c) 200% significa _____ de cada 4.

d) 0.5% significa _____ de cada 100.

e) _____% significa 12 de cada 2.

58. El diagrama de Venn muestra el número de elementos en las cuatro regiones formadas.



a) ¿Qué porcentaje de los elementos del universo se encuentran en $A \cap B$?

b) ¿Qué porcentaje de los elementos del universo se encuentran en A, pero no en B?

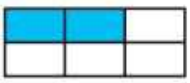
c) ¿Qué porcentaje de los elementos en $A \cup B$ se encuentran en $A \cap B$?

d) ¿Qué porcentaje de los elementos del universo no están en A ni en B?

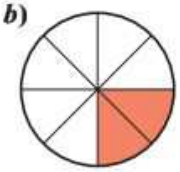
59. ***Descuento y aumento*** Suponga que un artículo cuesta normalmente \$60.00 y se aplica un descuento del 20%. Si a esto se le aumenta el 20%, ¿el precio es de \$60.00? Si no es así, ¿cuál es?

60. Las figuras del **ejercicio 13** de la **sección 5.3** se reproducen nuevamente aquí. Exprese como porcentajes las partes fraccionarias representadas por las áreas sombreadas.

a)



b)



c)



d)



Registro de juegos perdidos y ganados *En los ejercicios 61 y 62 se trata con porcentajes de juegos ganados en las posiciones de equipos deportivos.*

61. Al final de la temporada regular de 2009 de las grandes ligas de béisbol, las posiciones de la División Este de la Liga de Americana fueron como se muestra en la tabla. El porcentaje de juegos ganados se expresa normalmente como un decimal redondeado a la milésima más próxima. Para obtener el porcentaje de juegos ganados de un equipo, se divide el número de triunfos (W) entre el número total de juegos jugados (W + L). Obtenga el porcentaje de ganados de cada equipo.

Equipo	W	L	Pct.
Yankees de Nueva York	103	59	.636
Boston	95	67	
Tampa Bay	84	78	
Toronto	75	87	
Baltimore	64	98	

Fuente: The World Almanac and Book of Facts.

a) Boston *b)* Tampa Bay

c) Toronto *d)* Baltimore

62. Repita el ejercicio 61 para las siguientes posiciones de la División Este de la Liga Nacional.

Equipo	W	L	Pct.
Filadelfia	93	69	
Florida	87	75	.537
Atlanta	86	76	
Mets de Nueva York	70	92	
Washington	59	103	

Fuente: The World Almanac and Book of Facts.

a) Filadelfia *b)* Atlanta

c) Mets de Nueva York *d)* Washington

Resuelva cada problema que implica porcentajes.

63. ¿Cuál es el 26% de 480?

64. Obtenga el 38% de 12.

65. Obtenga el 10.5% de 28.

66. ¿Cuál es el 48.6% de 19?

67. ¿Qué porcentaje de 30 es 45?

68. ¿Qué porcentaje de 48 es 20?

69. ¿150 es el 25% de qué número?

70. ¿3600 es el 12% de qué número?

71. ¿Qué porcentaje de 28 es 0.392?

72. ¿Qué porcentaje de 292 es 78.84?

Resuelva cada problema que implica un porcentaje de aumento o disminución.

73. ***Porcentaje de aumento*** Después de un año en su trabajo, Grady obtuvo un aumento salarial. La tarifa inicial era de $10.50 la hora; con el aumento, la tarifa es de $11.34 la hora. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento en su salario por hora?

74. ***Porcentaje de descuento*** Clayton compró con descuento un boleto para un concierto de rock. El precio normal del boleto era de $70.00, pero él pagó únicamente $59.50. ¿Cuál fue el porcentaje de descuento?

75. ***Porcentaje de disminución*** Entre el 1 de julio de 2000 y el 1 de julio de 2007, la población estimada de Pittsfield, Massachusetts disminuyó de 134,953 a 129,798 habitantes. ¿Cuál fue el porcentaje de disminución, redondeando a la décima más próxima? (*Fuente:* U.S. Census Bureau).

76. ***Porcentaje de aumento*** Entre el 1 de julio de 2000 y el 1 de julio de 2007, la población estimada de Anchorage, Alaska, creció de 320,391 a 362,340 habitantes. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento, redondeando a la décima más próxima? (*Fuente:* U.S. Census Bureau).

77. ***Porcentaje de descuento*** En abril de 2008, el CD de la Original Broadway Cast Recording del musical *Wicked* se vendía en www.amazon.com en $9.97. El precio de lista (precio total) de este CD era de $18.98. ¿Cuál fue el porcentaje de descuento, redondeando a la décima más próxima? (*Fuente:* www.amazon.com).

78. ***Porcentaje de descuento*** En abril de 2008, se puso a la venta el DVD de la película *Alvin and the Chipmunks*. Este DVD tenía un precio de lista de $29.99 y se vendía en www.amazon.com en $15.99. ¿Cuál era el porcentaje de descuento, redondeando a la décima más próxima? (*Fuente:* www.amazon.com).

Resuelva mentalmente las preguntas de los ejercicios 79 a 82. Intente no utilizar papel, lápiz o calculadora.

79. ***Aumento de sobresueldo*** El sobresueldo de Carly Murray se elevó de $4.00 por semana a $5.00 por semana. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento?

A. 25% **B.** 20% **C.** 50% **D.** 30%

80. ***Compra y venta de un bote*** Susan Nassy compró un bote hace cinco años en $5,000 y lo vendió este año en $2,000. ¿Qué porcentaje de su precio original perdió con la venta?

A. 40% **B.** 50% **C.** 20% **D.** 60%

81. ***Población de Alabama*** El censo de 2000 en Estados Unidos reveló que la población de Alabama era de 4,447,000, con el 26.0% representado por afroestadounidenses. ¿Cuál es la mejor estimación de la población afroestadounidense de Alabama? (*Fuente:* U.S. Census Bureau).

A. 500,000 **B.** 1,500,000

C. 1,100,000 **D.** 750,000

82. ***Población de Hawai*** El censo de 2000 en Estados Unidos reveló que la población de Hawai era de 1,212,000, con el 21.4% representado por población de dos o más razas. ¿Cuál es la mejor estimación de la población de Hawai? (*Fuente:* U.S. Census Bureau).

A. 240,000 **B.** 300,000

C. 21,400 **D.** 24,000

Precios de la gasolina *La gráfica lineal muestra el precio promedio, ajustado por la inflación, que los estadounidenses han pagado por galón de gasolina entre los años 1958 y 2008. Use esta información en los ejercicios 83 y 84.*



Fuente: www.inflationdata.com

83. ¿En qué porcentaje se incrementaron los precios de 1998 a 2008?

84. ¿En qué porcentaje disminuyeron los precios de 1978 a 1988?

Unidades metabólicas *Una manera de medir la condición cardiaca de una persona es calcular cuántas unidades metabólicas (MET) puede alcanzar ejercitándose al límite. Una MET es la cantidad de energía que se consume estando sentado. Para calcular las MET ideales, se usa una de las siguientes expresiones.*

$14.7 - \text{edad} \cdot 0.13$ Para mujeres

$14.7 - \text{edad} \cdot 0.11$ Para hombres

(Fuente: New England Journal of Medicine, agosto de 2005).

85. Una mujer de 40 años de edad desea calcular su MET ideal.

a) Escriba la expresión usando su edad.

b) Calcule su MET ideal. (*Sugerencia:* Considere el orden de las operaciones).

c) Los investigadores recomiendan que una persona alcance aproximadamente el 85% de su MET cuando se ejercita. Calcule el 85% del MET ideal del inciso ***b)***. Luego observe la siguiente tabla. ¿Qué actividad puede realizar la mujer para aproximarse a este valor?

Actividad	MET	Actividad	MET
Golf (con carrito)	2.5	Esquiar (en agua o en nieve)	6.8
Caminata (3 mph)	3.3	Natación	7.0
Cortar el césped (podadora potente)	4.5	Caminata (5 mph)	8.0
Baile de salón o danza folklórica	5.5	Trotar	10.2
Ciclismo	5.7	Saltar la cuerda	12.0

Fuente: Harvard School of Public Health.

86. Repita los incisos ***a)*** a ***c)*** del **ejercicio 85** para un hombre de 55 años de edad.



87. ***Valor de la moneda de 10 centavos con la imagen de Mercurio (1916-D)*** La moneda de 10 centavos de dólar con la imagen de Mercurio acuñada en Denver es bastante rara. En 1979 su valor, en condición extremadamente fina, era de $625. El valor en 2010 aumentó a $6200. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento en el valor de esta moneda de 1979 a 2010? (*Fuentes: A Guide Book of United States Coins; Coin World Coin Values*).

88. ***Valor de un dólar Morgan de 1903-O*** En 1963 el valor de un dólar Morgan de 1903 acuñado en Nueva Orleans, en condición normal fuera de circulación, era de $1500. Debido al descubrimiento de un tesoro de estos dólares a finales de ese año, su valor disminuyó. Su valor en 2010 era de $550. ¿Cuál fue el porcentaje de disminución en su valor de 1963 a 2010? (*Fuentes: A Guide Book of United States Coins; Coin World Coin Values*).



Procedimiento para propinas *Es costumbre en nuestra sociedad "dar propina" a los meseros cuando se come en un restaurante. La tasa común de las propinas es del* 15%. *Una manera rápida de calcular una propina que se aproxime al* 15% *es la siguiente:*

Paso 1 *Redondee la cuenta al dólar más cercano.*

Paso 2 *Calcule el 10% de esta cantidad moviendo el punto decimal una posición a la izquierda.*

Paso 3 *Tome la mitad de la cantidad obtenida en el paso 2 y súmela al resultado del paso 2.*

Esto indicará aproximadamente el 15% *de la cuenta. La cantidad obtenida en el paso 3 es el* 5%, *y* 10% + 5% = 15%. *Use este método para obtener una aproximación del* 15% *para cada cuenta de restaurante.*

89. $29.57

90. $38.32

91. $5.15

92. $7.89

Suponga que le dan un servicio extremadamente bueno y decide dar el 20% *de propina. Puede usar los primeros dos pasos listados y luego, en el paso 3, duplicar la cantidad que obtuvo en el paso 2. Use este método para obtener una aproximación del* 20% *para cada cuenta de restaurante.*

93. $59.96

94. $40.24

95. $180.43

96. $199.86

97. ***¿Lo dice de nuevo?*** Un reportero de televisión preguntó una vez a un profesional de las "vencidas" qué porcentaje de su deporte era físico y qué porcentaje era mental. El atleta respondió "Me gustaría decir que es 50% físico y 90% mental". Comente esta respuesta.

98. ***¿Está seguro?*** De acuerdo con *The Yogi Book*, integrado por citas del beisbolista que ingresó al salón de la fama, Yogi Berra afirma que "el 90% del juego es la mitad mental". Comente este enunciado.

EXTENSIÓN Números complejos

Conceptos básicos y la unidad imaginaria • Productos y cocientes • Números complejos y potencias de i

Conceptos básicos y la unidad imaginaria

Los primeros matemáticos en la historia llamaron *imaginarios* a números como $\sqrt{-5}$ y $\sqrt{-16}$. Con el tiempo, su uso hizo necesaria la ampliación del conjunto de números reales para formar el conjunto de **números complejos**.

Considere la ecuación $z^2 + 1 = 0$. La solución no es un número real, puesto que cualquier solución debe ser un número cuyo cuadrado sea -1. En el conjunto de números reales todos los cuadrados son números no negativos, porque el producto de dos números positivos o dos números negativos es positivo y $0^2 = 0$. Para obtener una solución de la ecuación $z^2 + 1 = 0$, se define un número nuevo i de modo que lo siguiente es verdadero.

$$i^2 = -1, \quad \text{lo cual implica que} \quad i = \sqrt{-1}.$$

El número i se conoce como la **unidad imaginaria**. Esta definición de i hace posible definir la raíz cuadrada de cualquier número negativo como sigue.

$\sqrt{-b}$

Para cualquier número real positivo b, $\sqrt{-b} = i\sqrt{b}$.



Gauss y los números complejos Alrededor del año 1831, **Carl Gauss** logró demostrar que números de la forma $a + bi$ se pueden representar como puntos en el plano, exactamente como los números reales. Compartió esta contribución con **Robert Argand,** un tenedor de libros de París que escribió un ensayo sobre la geometría de los números complejos en 1806. Este hecho pasó inadvertido en esa época.

EJEMPLO 1 Escritura de raíces cuadradas usando i

Escriba cada número como un producto de un número real e i.

a) $\sqrt{-100}$ ***b)*** $\sqrt{-2}$

SOLUCIÓN

a) $\sqrt{-100} = i\sqrt{100} = 10i$ ***b)*** $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i = i\sqrt{2}$

▮▮▮



***An Imaginary Tale Story of* $\sqrt{-1}$ (*Esto no es real. La historia de i*)** de Paul J. Nahin, es una versión histórica del desarrollo de los números complejos.

En el **ejemplo 1 *b*)**, es fácil cometer el error de anotar $\sqrt{2}i$ en lugar de $\sqrt{2i}$, con la i debajo del radical. Por esa razón, comúnmente $\sqrt{2}\,i$ se escribe como $i\sqrt{2}$.

Productos y cocientes Cuando se calcula un producto como $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}$, no se puede aplicar la regla del producto para radicales, puesto que la regla solo se aplica cuando ambos radicales son números reales. Por esa razón, siempre se cambia $\sqrt{-b}$ (donde $b > 0$) a la forma $i\sqrt{b}$ antes de realizar cualquier multiplicación o división.

$$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = i\sqrt{4} \cdot i\sqrt{9} = i \cdot 2 \cdot i \cdot 3 = 6i^2$$

Como $i^2 = -1$,

$$6i^2 = 6(-1) = -6.$$

El uso ***incorrecto*** de la regla del producto de radicales daría un resultado equivocado.

$$\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{36} = 6 \quad \text{Incorrecto}$$

El mismo razonamiento se aplica en el caso de cocientes.

EJEMPLO 2 Multiplicación de expresiones que implican *i*

Multiplique.

a) $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-7}$ ***b)*** $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8}$ ***c)*** $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{6}$

SOLUCIÓN

a) $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-7} = i\sqrt{3} \cdot i\sqrt{7} = i^2\sqrt{3 \cdot 7} = (-1)\sqrt{21} = -\sqrt{21}$

b) $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-8} = i\sqrt{2} \cdot i\sqrt{8} = i^2\sqrt{2 \cdot 8} = (-1)\sqrt{16} = (-1)4 = -4$

c) $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{6} = i\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = i\sqrt{30}$



Cuando la calculadora TI-83/84 Plus está en modo de números complejos, representados por $a + bi$, ejecuta la aritmética de números complejos.

EJEMPLO 3 División de expresiones que implican *i*

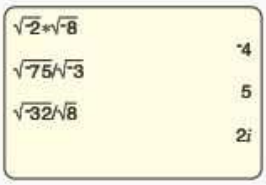
Divida.

a) $\dfrac{\sqrt{-75}}{\sqrt{-3}}$ ***b)*** $\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{8}}$

SOLUCIÓN

a) $\dfrac{\sqrt{-75}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{i\sqrt{75}}{i\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

b) $\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{8}} = \dfrac{i\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = i\sqrt{\dfrac{32}{8}} = i\sqrt{4} = 2i$

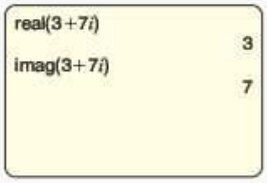


La pantalla apoya los resultados de los **ejemplos 2 *b*), 3 *a*) y 3 *b*).**

Números complejos y potencias de *i* Los *números complejos* se definen como sigue.

Números complejos

Si a y b son números reales, entonces cualquier número de la forma $\boldsymbol{a + bi}$ se conoce como **número complejo**.



La calculadora TI-83/84 Plus identifica la parte real y la parte imaginaria de $3 + 7i$.

En el número complejo $a + bi$, el número a se conoce como la **parte real** y b se conoce como la **parte imaginaria**.* Cuando $b = 0$, $a + bi$ es un número real, de modo que los números reales son un subconjunto de los números complejos. Los números complejos de la forma bi, donde $b \neq 0$, se conocen como **números imaginarios puros**. A pesar de su nombre, estos números son muy útiles en algunas aplicaciones, particularmente en el campo de la electricidad.

Cuando se consideran varias potencias de i, se presenta un patrón interesante. Por definición, $i^0 = 1$, e $i^1 = i$. Ya hemos visto que $i^2 = -1$, y es posible calcular potencias más grandes de i como se muestra en la siguiente lista.

$$i^3 = i \cdot i^2 = i(-1) = -i \qquad i^6 = i^2 \cdot i^4 = (-1) \cdot 1 = -1$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \qquad i^7 = i^3 \cdot i^4 = (-i) \cdot 1 = -i$$
$$i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1 = i \qquad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

A continuación se listan unas cuantas potencias de i.



La calculadora calcula potencias de i. Compárelas con las potencias de la tabla.

Potencias de i

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$	$i^{13} = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$	$i^{14} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$	$i^{15} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$	$i^{16} = 1$

Las potencias de i giran alrededor de cuatro números: $i, -1, -i$ y 1. Las potencias más grandes de i se pueden simplificar considerando el hecho de que $i^4 = 1$, Por ejemplo, considere i^{75}.

$$i^{75} = (i^4)^{18} \cdot i^3 = 1^{18} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i$$

Simplificación de potencias grandes de i

Paso 1 Divida el exponente entre 4.

Paso 2 Observe el residuo obtenido en el paso 1. La potencia grande de i es la misma i elevada a la potencia determinada por este residuo. Revise la tabla anterior para completar la simplificación. (Si el residuo es 0, la potencia se simplifica a $i^0 = 1$).

EJEMPLO 4 Simplificación de potencias de i

Simplifique cada potencia de i.

a) i^{12} ***b)*** i^{39}

SOLUCIÓN

a) $i^{12} = (i^4)^3 = 1^3 = 1$.

b) Para calcular i^{39}, se inicia dividiendo el exponente 39 entre 4 (paso 1), como se muestra en el margen. El residuo es 3. De modo que $i^{39} = i^3 = -i$ (paso 2).

$$\begin{array}{r} 9 \\ 4\overline{)39} \\ \underline{36} \\ 3 \end{array} \leftarrow \text{Residuo}$$

Otra manera de simplificar i^{39} es como sigue:

$$i^{39} = i^{36} \cdot i^3 = (i^4)^9 \cdot i^3 = 1^9 \cdot (-i) = -i$$

*En algunos textos, bi es la parte imaginaria.

EJERCICIOS DE LA EXTENSIÓN

Use el método de los ***ejemplos 1 a 3*** *para escribir cada expresión como un número real o un producto de un número real por i.*

1. $\sqrt{-144}$ **2.** $\sqrt{-196}$ **3.** $-\sqrt{-225}$

4. $-\sqrt{-400}$ **5.** $\sqrt{-3}$ **6.** $\sqrt{-19}$

7. $\sqrt{-75}$ **8.** $\sqrt{-125}$

9. $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-5}$ **10.** $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3}$

11. $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-36}$ **12.** $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-81}$

13. $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-100}$ **14.** $\sqrt{-81} \cdot \sqrt{-121}$

15. $\dfrac{\sqrt{-200}}{\sqrt{-100}}$ **16.** $\dfrac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-2}}$

17. $\dfrac{\sqrt{-54}}{\sqrt{6}}$ **18.** $\dfrac{\sqrt{-90}}{\sqrt{10}}$

19. $\dfrac{\sqrt{-288}}{\sqrt{-8}}$ **20.** $\dfrac{\sqrt{-48} \cdot \sqrt{-3}}{\sqrt{-2}}$

Use el método del ***ejemplo 4*** *para simplificar cada potencia de i.*

21. i^8 **22.** i^{16} **23.** i^{42} **24.** i^{86}

25. i^{47} **26.** i^{63} **27.** i^{101} **28.** i^{141}

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

Presupuesto para la compra de un automóvil

Usted va a comprar un automóvil deportivo y tiene disponible cierta cantidad de dinero mensual para el pago del vehículo. Su profesor determinará esa cantidad. Después de revisar varias opciones, estas se limitan a los automóviles listados en la siguiente tabla.

Año/ Marca/Modelo	Precio al menudeo	Tamaño del tanque de combustible (en galones)	Millas por galón (en ciudad)	Millas por galón (en carretera)
2010 Ford Mustang	$31,395	16.0	16	24
2010 Ford Taurus SEL	$29,220	19.0	17	25
2010 Toyota Camry Hybrid	$26,150	17.2	33	34
2010 Mazda MX-5 Miata	$26,250	12.7	21	28
2010 Honda CR-V EX-L	$26,495	15.3	21	28
2010 Chevrolet Malibu Hybrid	$25,555	16.0	26	34

Fuente: www.edmunds.com

En grupo, sigan estos pasos para determinar cuál automóvil pueden adquirir.

A. Identifiquen cuáles automóviles están dentro de su presupuesto.

B. Seleccionen uno de los automóviles identificados en el inciso A. Cada miembro del grupo tiene que calcular el pago mensual del automóvil usando una opción de financiamiento diferente. Usen la fórmula que se presenta más adelante, donde P es el capital (o principal), r la tasa de interés y m el número de pagos mensuales. También se incluye una tabla con opciones de financiamiento.

Opciones de financiamiento

Tiempo (en años)	Tasa de interés
4	2.0%
5	3.5%
6	5.0%

$$\text{Pago mensual} = \frac{\dfrac{Pr}{12}}{1 - \left(\dfrac{12}{12 + r}\right)^m}$$

C. Cada miembro del grupo tiene que determinar la cantidad de dinero que se pagará por concepto de intereses, con su opción de financiamiento, durante el tiempo de vigencia del crédito.

D. Consideren los gastos de combustible.

1. Supongan que viajarán cada semana un promedio de 75 millas en ciudad y 400 millas en carretera. ¿Cuántos galones de gasolina necesitarán comprar mensualmente?
2. Considerando los precios normales actuales de la gasolina en su área, ¿cuánto dinero necesitarán para comprar gasolina?

E. Repitan los incisos **B** a **D** tantas veces como sea necesario hasta que en su grupo haya consenso sobre el auto que les conviene comprar y la opción de financiamiento que usarán. Escriban un párrafo para justificar sus elecciones.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 5

1. Considere $\{-4, -\sqrt{5}, -\frac{3}{2}, -0.5, 0, \sqrt{3}, 4.1, 12\}$. Liste los elementos del conjunto que pertenecen a cada uno de los siguientes grupos.

a) números naturales
b) números enteros no negativos
c) enteros
d) números racionales
e) números irracionales
f) números reales

2. Asocie cada conjunto de los incisos ***a)*** a ***d)*** con la descripción correcta de la notación de comprensión de conjuntos en los incisos A a D.

a) $\{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$
b) $\{3, 4, 5, 6, \ldots\}$
c) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
d) $\{-12, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 12\}$

A. $\{x | x$ es un número entero con valor absoluto menor que o igual a $12\}$
B. $\{x | x$ es un número entero mayor que $2.5\}$
C. $\{x | x$ es un número entero negativo$\}$
D. $\{x | x$ es un número entero positivo$\}$

3. Determine si cada enunciado es *verdadero* o *falso*.

a) El valor absoluto de un número debe ser positivo.
b) $|-7| = -(-7)$
c) $\frac{2}{5}$ es un ejemplo de un número real que no es un número entero.
d) Todos los números reales son positivos o negativos.

Efectúe las operaciones indicadas. Considere el orden de las operaciones cuando sea necesario.

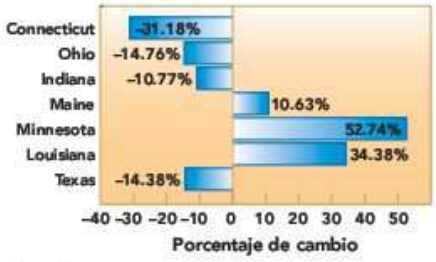
4. $6^2 - 4(9 - 1)$

5. $\dfrac{(-8 + 3) - (5 + 10)}{7 - 9}$

6. $(-3)(-2) - [5 + (8 - 10)]$

7. ***Cambios en las ejecuciones hipotecarias*** La gráfica muestra el porcentaje de cambio en Estados Unidos de las ejecuciones hipotecarias de 2008 a 2009 para varios estados. Utilice esta gráfica para contestar los incisos ***a)*** a ***d)***. (Considere el valor absoluto).

PORCENTAJE DE CAMBIO EN LAS EJECUCIONES HIPOTECARIAS



Fuente: Realty Trac, Inc.

a) ¿Qué estado registró el mayor cambio en ejecuciones hipotecarias? ¿Cuál fue ese cambio?
b) ¿Qué estado registró el menor cambio en ejecuciones hipotecarias? ¿Cuál fue ese cambio?
c) *Verdadero* o *falso*: El valor absoluto del porcentaje de cambio en Texas fue mayor que el valor absoluto del porcentaje de cambio en Ohio.
d) *Verdadero* o *falso*: El porcentaje de cambio en Minnesota fue más de cuatro veces mayor que el porcentaje de cambio en Maine.

8. ***Altitud de un avión*** La superficie del Mar Muerto tiene una altitud de 1299 pies bajo el nivel del mar. Victoria LoCascio está volando 80 pies por arriba de esa superficie. ¿A qué altitud debe subir para librar, por una distancia de 225 pies, un paso de 3852 pies? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).

9. ***Medianas de precios de casas*** En la tabla se muestran las medianas de los precios de casas en Estados Unidos de los años 2004 a 2009. Complete la tabla, determinando el cambio de un año al siguiente por sustracción.

	Año	Mediana del precio de las casas existentes	Cambio a partir del año anterior
	2004	$195,200	
	2005	$219,000	$23,800
a)	2006	$221,900	
b)	2007	$217,900	
c)	2008	$196,600	
d)	2009	$177,500	

Fuentes: National Association of Realtors.

10. Asocie cada enunciado de los incisos ***a)*** a ***f)*** con la propiedad que lo justifica en los incisos **A** a **F**.

a) $7 \cdot (8 \cdot 5) = (7 \cdot 8) \cdot 5$
b) $3x + 3y = 3(x + y)$
c) $8 \cdot 1 = 1 \cdot 8 = 8$
d) $7 + (6 + 9) = (6 + 9) + 7$
e) $9 + (-9) = -9 + 9 = 0$
f) $5 \cdot 8$ es un número real.

A. Propiedad distributiva
B. Propiedad de identidad
C. Propiedad de cerradura
D. Propiedad conmutativa
E. Propiedad asociativa
F. Propiedad inversa

11. ***Estadísticas de canastas en basquetbol*** Seis jugadores del equipo de basquetbol de la preparatoria local llevan las siguientes cifras de canastas anotadas. (Véase la tabla de la siguiente página). Conteste cada pregunta usando estimaciones cuando sea necesario.

Jugador	Intentos de canastas de campo	Tiros de campo anotados
Ed Moura	40	13
Jack Pritchard	10	4
Chuck Miller	20	8
Ben Whitney	6	4
Charlie Dawkins	7	2
Jason McElwain ("J-Mac")	7	6

a) ¿Qué jugadores anotaron en más de la mitad de sus intentos?

b) ¿Qué jugadores encestaron en menos de $\frac{1}{3}$ de sus intentos?

c) ¿Qué jugador encestó exactamente en $\frac{2}{3}$ de sus intentos?

d) ¿Qué par de jugadores encestaron en la misma fracción de sus intentos? ¿Cuál fue esa fracción reducida a sus términos mínimos?

e) ¿Qué jugador encestó en la mayor fracción de sus intentos?

Efectúe cada operación. Escriba su respuesta en términos simplificados.

12. $\frac{3}{16} + \frac{1}{2}$

13. $\frac{9}{20} - \frac{3}{32}$

14. $\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{16}{15}\right)$

15. $\frac{7}{9} \div \frac{14}{27}$

16. Convierta cada número racional en un decimal exacto o periódico. Use una calculadora si su profesor se lo permite.

a) $\frac{9}{20}$ ***b)*** $\frac{5}{12}$

17. Convierta cada decimal en un cociente de números enteros, reducido a los términos mínimos.

a) 0.72 ***b)*** $0.\overline{58}$

18. Identifique cada número como racional o irracional.

a) $\sqrt{10}$ ***b)*** $\sqrt{16}$

c) 0.01 ***d)*** $0.\overline{01}$

e) 0.0101101110 . . . ***f)*** π

Para cada una de las siguientes operaciones, ***a)*** *use una calculadora para obtener una aproximación decimal y* ***b)*** *simplifique el radical de acuerdo con las directrices del capítulo.*

19. $\sqrt{150}$

20. $\frac{13}{\sqrt{7}}$

21. $2\sqrt{32} - 5\sqrt{128}$

22. Utilizando una calculadora muy poderosa, un estudiante establece que el valor *exacto* de $\sqrt{65}$ es igual a 8.062257748. ¿Está en lo correcto? Si no es así, explique.

23. Resuelva cada una de las siguientes operaciones usando una calculadora o papel y lápiz, como lo indique su profesor.

a) $4.6 + 9.21$ ***b)*** $12 - 3.725 - 8.59$

c) $86(0.45)$ ***d)*** $236.439 \div (-9.73)$

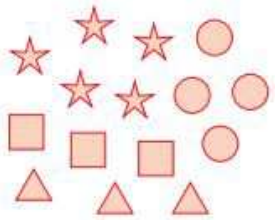
24. Redondee 9.0449 en las siguientes posiciones decimales:

a) centésimas ***b)*** milésimas

25. ***a)*** Calcule el 18.5% de 90.

b) ¿Qué número es el 145% de 70?

26. Considere la siguiente figura.



a) ¿Qué porcentaje del número total de figuras son círculos?

b) ¿Qué porcentaje del número total de figuras no son estrellas?

27. ***Venta de libros*** Use técnicas de estimación para contestar lo siguiente. En 2008 Carol Merrigan vendió \$300,000 en libros. En 2009 vendió \$900,000. Sus ventas de 2009 fueron el ____ de sus ventas de 2008.

A. 30% **B.** $33\frac{1}{3}\%$ **C.** 200% **D.** 300%

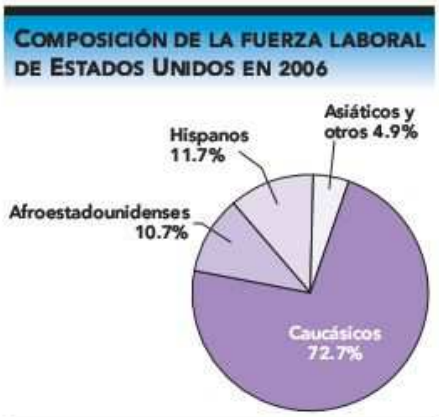
28. ***Bienestar material*** De una lista de "artículos cotidianos indispensables", algunos adultos fueron encuestados para saber si podrían vivir sin esos artículos. Complete los resultados mostrados en la tabla si se encuestó a 2400 adultos.

Artículo	Porcentaje que no podría vivir sin ese artículo	Número que no podría vivir sin ese artículo
Papel higiénico	69%	
Cremalleras	42%	
Alimentos congelados		384
Tarjetas autoadhesivas para notas		144

(Otros artículos incluyen cinta adhesiva, fijador para el cabello, pantimedias, clips sujetadores y Velcro).

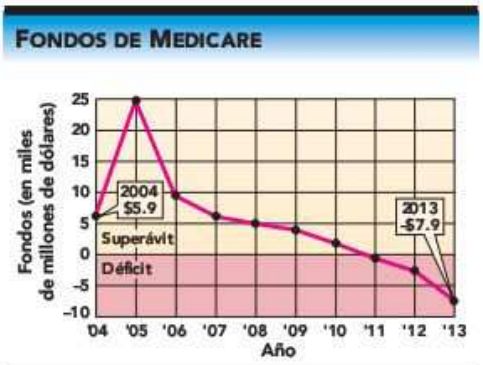
Fuente: Kleenex Cottonelle.

29. ***Composición de la fuerza laboral de Estados Unidos*** La Oficina de Estadísticas del Trabajo de Estados Unidos (U.S. Bureau of Labor Statistics) informó la composición de la fuerza de trabajo estadounidense en el año 2006. El número total de personas que integraron la fuerza laboral en ese año fue de 148,847,000. Redondeando a la milésima más próxima, ¿cuántas de estas personas estaban en la categoría de hispanos?



Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics.

30. ***Financiamiento de Medicare*** Las proyecciones indican que el financiamiento de Medicare no cubrirá sus costos a menos que se modifiquen sus programas. La gráfica lineal muestra las proyecciones de 2004 a 2013. ¿Qué número con signo representa cuánto tendrá que cambiar el financiamiento de 2004 a 2013?



Fuente: Centros y Servicios de Medicare.

CONCEPTOS BÁSICOS DE ÁLGEBRA

6



La película *Mean Girls* (*Chicas pesadas*) de 2004 fue estelarizada por Lindsay Lohan como Cady Heron. En una escena de la película, Cady se encuentra sentada en la cafetería de la escuela con The Plastics (las "chicas pesadas" a las que se hace alusión en el título). Regina George, interpretada por Rachel McAdams, lee la información en una envoltura de barra de chocolate.

REGINA: 120 calorías y 48 calorías de grasa. ¿Qué porcentaje es eso? Yo solo ingiero comida con menos del 30% de calorías de grasa.

CADY: Es el 40%. (Respondiendo a una mirada inquisitiva de Regina). Bueno, 48 sobre 120 es igual a x sobre 100, luego aplicas productos cruzados y obtienes el valor de x.

REGINA: Como sea. Voy a pedir papas a la francesa con queso.

En su solución, Cady plantea un problema de porcentaje con una proporción, la cual es un ejemplo de una ecuación lineal. En este capítulo, aprenderemos cómo resolver ecuaciones lineales e investigaremos otros temas de álgebra elemental.

6.1 Ecuaciones lineales

6.2 Aplicaciones de las ecuaciones lineales

6.3 Razón, proporción y variación

6.4 Desigualdades lineales

6.5 Propiedades de los exponentes y notación científica

6.6 Polinomios y factorización

6.7 Ecuaciones cuadráticas y aplicaciones

Extensión Soluciones con números complejos de ecuaciones cuadráticas

Investigación colaborativa ¿Cómo se compara su velocidad al caminar con la de los atletas olímpicos de caminata?

Examen del capítulo 6

6.1 ECUACIONES LINEALES

Solución de ecuaciones lineales • Clases especiales de ecuaciones lineales • Ecuaciones con literales y fórmulas • Modelos



al-jabr, algebrista, álgebra La palabra **álgebra** proviene del nombre de un tratado del árabe Mohammed ibn Mûsâ al-Khowârismî: *Hisâb al-jabr w'al muquâbalah*, del siglo IX. El título se traduce como "la ciencia de la reunión y la reducción" o, de manera más general, "la ciencia de la transposición y la cancelación".

En el libro de Khowârismî, *jabr* ("restauración") se refiere a transponer cantidades negativas a través del símbolo de igualdad en la solución de ecuaciones. En las versiones latinas del libro de Khowârismî, **"al-jabr"** se convierte en el término general para designar el arte de la solución de ecuaciones. (El prefijo *al* significa "el").

Solución de ecuaciones lineales

Una **expresión algebraica** implica solo las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación, división (excepto entre 0), potencias o raíces cuadradas de cualquier colección de variables y números.

$$8x + 9, \quad \sqrt{y} + 4, \quad \text{y} \quad \frac{x^3y^8}{z}$$ Ejemplos de expresiones algebraicas

Una **ecuación** es un enunciado que iguala dos expresiones algebraicas. Una *ecuación lineal con una variable* implica solo números reales y una variable.

$$x + 1 = -2, \quad x - 3 = 5 \quad \text{y} \quad 2x + 5 = 10$$ Ejemplos de ecuaciones lineales

Ecuaciones lineales con una variable

Una ecuación con la variable x es **lineal** si se puede escribir en la forma

$$Ax + B = C,$$

donde A, B y C son números reales, con $A \neq 0$.

Una ecuación lineal con una variable también se conoce como **ecuación de primer grado**, porque la potencia más grande de la variable es uno.

Si se sustituye la variable de una ecuación por un número real que hace verdadero el enunciado, entonces ese número es una **solución** de la ecuación. Por ejemplo, 8 es una solución de la ecuación

$$x - 3 = 5,$$

porque al sustituir x por 8 se obtiene como resultado un enunciado verdadero. Una ecuación se **resuelve** obteniendo su **conjunto solución**, es decir, el conjunto que incluye todas las soluciones. El conjunto solución de la ecuación $x - 3 = 5$ es $\{8\}$.

Las **ecuaciones equivalentes** son ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución. Las ecuaciones se resuelven generalmente iniciando con una ecuación determinada y generando una serie de ecuaciones equivalentes más sencillas. Por ejemplo,

$$8x + 1 = 17, \quad 8x = 16, \quad \text{y} \quad x = 2$$ Ecuaciones equivalentes

son ecuaciones equivalentes porque cada una tiene el mismo conjunto solución {2}. Se usan las propiedades aditiva y multiplicativa de la igualdad para generar ecuaciones equivalentes.

Propiedad aditiva de la igualdad

Para todos los números reales A, B y C, las ecuaciones

$$A = B \quad \text{y} \quad A + C = B + C$$

son equivalentes. (Es posible sumar el mismo número a ambos lados de la ecuación sin alterar el conjunto solución).



Algebrista, álgebra En España, durante el dominio musulmán, la palabra **algebrista** se refería a la persona que reparaba (sanaba) huesos rotos. Los anuncios afuera de las peluquerías se interpretaban como *algebrista y sangrador* (reparador de huesos y sacador de sangre). Estos servicios eran parte del negocio de peluquería. El cilindro tradicional con franjas rojas y blancas de la peluquería simbolizaba la sangre y los vendajes.

Propiedad multiplicativa de la igualdad

Para todos los números reales A, B y C, donde $C \neq 0$, las ecuaciones

$$A = B \quad \text{y} \quad AC = BC$$

son equivalentes. (Es posible multiplicar ambos lados de una ecuación por el mismo número diferente de cero sin modificar el conjunto solución).

EJEMPLO 1 Uso de las propiedades aditiva y multiplicativa para resolver ecuaciones lineales

Resuelva $4x - 2x - 5 = 4 + 6x + 3$.

SOLUCIÓN

La propiedad distributiva permite reducir los *términos semejantes*, tales como $4x$ y $2x$.

$$\begin{aligned}
4x - 2x - 5 &= 4 + 6x + 3 && \text{El objetivo es aislar } x \text{ en un lado de la ecuación.}\\
2x - 5 &= 7 + 6x && \text{Se reducen los términos semejantes; } 4x - 2x = (4 - 2)x = 2x\\
2x - 5 + 5 &= 7 + 6x + 5 && \text{Se suma 5.}\\
2x &= 12 + 6x && \text{Se reducen los términos semejantes.}\\
2x - 6x &= 12 + 6x - 6x && \text{Se resta } 6x.\\
-4x &= 12 && \text{Se reducen los términos semejantes.}\\
\frac{-4x}{-4} &= \frac{12}{-4} && \text{Se divide entre } -4.\\
x &= -3 && \text{Se simplifica.}
\end{aligned}$$

Se verifica que -3 es la solución sustituyéndolo en lugar de x en la ecuación *original*.

Verificación:

$$\begin{aligned}
4x - 2x - 5 &= 4 + 6x + 3 && \text{Ecuación original.}\\
4(-3) - 2(-3) - 5 &\stackrel{?}{=} 4 + 6(-3) + 3 && \text{Sea } x = -3.\\
-12 + 6 - 5 &\stackrel{?}{=} 4 - 18 + 3 && \text{Se multiplica.}\\
-11 &= -11 \quad \checkmark && \text{Verdadero}
\end{aligned}$$

Esta *no* es la solución.

La afirmación del enunciado indica que $\{-3\}$ es el conjunto solución. ■■■

Solución de una ecuación lineal con una variable

Paso 1 **Elimine fracciones.** Se eliminan las fracciones multiplicando ambos lados de la ecuación por un común denominador.

Paso 2 **Simplifique cada lado por separado.** Se usa la propiedad distributiva para eliminar paréntesis y reducir términos semejantes, cuando sea necesario.

Paso 3 **Aísle los términos con la variable en un lado de la ecuación.** Se usa la propiedad aditiva de la igualdad para modificar la ecuación, de modo que todos los términos que incluyan la variable estén de un lado de la ecuación y los números en el otro.

Paso 4 **Modifique la ecuación de modo que el coeficiente de la variable sea 1.** Se usa la propiedad multiplicativa de la igualdad para obtener una ecuación que incluya la variable solamente en un lado (con el coeficiente igual a 1).

Paso 5 **Verifique.** Se sustituye la solución en la ecuación original.

En el **ejemplo 1** observe que como la sustracción y la división están definidas en términos de suma y multiplicación, respectivamente, podemos restar el mismo número de ambos lados de la ecuación y dividir ambos lados entre el mismo número diferente de cero, sin afectar el conjunto solución.

EJEMPLO 2 Uso de la propiedad distributiva para resolver ecuaciones lineales

Resuelva $2(x-5)+3x=x+6$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Como no existen fracciones en esta ecuación, no se aplica el paso 1.

Paso 2 Se usa la propiedad distributiva para simplificar y reducir los términos del lado izquierdo.

$$\begin{aligned} 2(x-5)+3x &= x+6 \\ 2x-10+3x &= x+6 && \text{Propiedad distributiva} \\ 5x-10 &= x+6 && \text{Se reducen los términos semejantes.} \end{aligned}$$

Paso 3 Luego, se usa la propiedad aditiva de la igualdad.

$$\begin{aligned} 5x-10+10 &= x+6+10 && \text{Se suma 10.} \\ 5x &= x+16 && \text{Se reducen los términos semejantes.} \\ 5x-x &= x+16-x && \text{Se resta } x. \\ 4x &= 16 && \text{Se reducen los términos semejantes.} \end{aligned}$$

Paso 4 Se usa la propiedad multiplicativa de la igualdad para aislar x en el lado izquierdo.

$$\begin{aligned} \frac{4x}{4} &= \frac{16}{4} && \text{Se divide entre 4.} \\ x &= 4 && \text{Se simplifica.} \end{aligned}$$

Paso 5 Se verifica que el conjunto solución sea {4} sustituyendo 4 en lugar de x en la ecuación original. ***Siempre se debe verificar el resultado.*** ▮▮▮

La estrategia para la solución de problemas por suposición y verificación, analizada en el **capítulo 1**, fue usada realmente por los antiguos egipcios en la solución de ecuaciones. Este método, conocido como **regla de posición falsa**, implicaba hacer una propuesta inicial de solución de la ecuación, y luego realizar un ajuste si la propuesta era incorrecta. Por ejemplo (usando la notación moderna), si se va a resolver la ecuación

$$6x+2x=32,$$

una propuesta inicial podría ser $x=3$. Al sustituir 3 en lugar de x se obtiene:

$$\begin{aligned} 6(3)+2(3) &\stackrel{?}{=} 32 \\ 18+6 &\stackrel{?}{=} 32 \\ 24 &= 32. \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

La propuesta de 3 da un valor (24) más pequeño que el valor deseado (32). Como 24 es igual a $\frac{3}{4}$ de 32, la propuesta de 3 es $\frac{3}{4}$ de la solución real. Esta última, por lo tanto, debe ser igual a 4, puesto que 3 es igual a $\frac{3}{4}$ de 4.

Use los métodos explicados en esta sección para verificar este resultado.

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación lineal con fracciones

Resuelva $\dfrac{x+7}{6}+\dfrac{2x-8}{2}=-4$.

SOLUCIÓN

Paso 1
$$6\left(\frac{x+7}{6}+\frac{2x-8}{2}\right)=6(-4)$$
Se multiplica cada lado por el mínimo común denominador (mcd), 6, para eliminar las fracciones.

Paso 2 Se multiplica cada término por 6.

$$\begin{aligned} 6\left(\frac{x+7}{6}\right)+6\left(\frac{2x-8}{2}\right) &= 6(-4) && \text{Propiedad distributiva} \\ x+7+3(2x-8) &= -24 && \text{Se multiplica.} \\ x+7+6x-24 &= -24 && \text{Propiedad distributiva} \\ 7x-17 &= -24 && \text{Se reducen los términos semejantes.} \end{aligned}$$



François Viète (1540-1603) fue un abogado en la corte de Enrique IV de Francia y estudió ecuaciones. Viète simplificó la notación algebraica y fue de los primeros en usar letras para representar números.

Paso 3	$7x - 17 + 17 = -24 + 17$		Se suma 17.
	$7x = -7$		Se reducen los términos semejantes
Paso 4	$\frac{7x}{7} = \frac{-7}{7}$		Se divide entre 7.
	$x = -1$		Se simplifica.
Paso 5 *Verificación:*	$\frac{x+7}{6} + \frac{2x-8}{2} = -4$		Ecuación original
	$\frac{-1+7}{6} + \frac{2(-1)-8}{2} \stackrel{?}{=} -4$		Sea $x = -1$.
	$\frac{6}{6} + \frac{-10}{2} \stackrel{?}{=} -4$		Se simplifican las fracciones.
	$1 - 5 \stackrel{?}{=} -4$		
	$-4 = -4$	✓	Verdadero

La solución -1 es correcta, de manera que el conjunto solución es $\{-1\}$. ■■■

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación lineal con decimales

Resuelva $0.06x + 0.09(15 - x) = 0.07(15)$.

SOLUCIÓN

Como los números decimales son centésimos, se multiplican ambos lados de la ecuación por 100. Esto se hace recorriendo los puntos decimales dos posiciones a la derecha. [Para multiplicar el segundo término, $0.09(15 - x)$, por 100, se multiplica primero $100(0.09)$ para obtener 9, de modo que el producto $100(0.09)(15 - x)$ se convierte en $9(15 - x)$].

$0.06x + 0.09(15 - x) = 0.07(15)$	Ecuación original
$0.06x + 0.09(15 - x) = 0.07(15)$	Se multiplica cada término por 100.
$6x + 9(15 - x) = 7(15)$	
$6x + 9(15) - 9x = 105$	Propiedad distributiva; se multiplica.
$-3x + 135 = 105$	Se reducen los términos semejantes; se multiplica.
$-3x + 135 - 135 = 105 - 135$	Se resta 135.
$-3x = -30$	Se reducen los términos semejantes.
$\frac{-3x}{-3} = \frac{-30}{-3}$	Se divide entre -3.
$x = 10$	Se simplifica.

Se verifica que el conjunto solución sea $\{10\}$. ■■■

El **álgebra** se remonta a los babilonios del año 2000 a. C. Los egipcios también resolvían problemas de álgebra, pero sus problemas no eran tan complejos como los de los babilonios. En el siglo VI aproximadamente, los indios desarrollaron métodos de solución de problemas relacionados con intereses, descuentos y sociedades de negocios.

Muchos desarrollos matemáticos de los indios y los griegos se conservaron solo porque los estudiosos musulmanes los tradujeron entre los años 750 y 1250 aproximadamente. Por ejemplo, Mohammed ibn Mûsâ al-Khowârismî escribió libros sobre álgebra y el sistema numérico indio (el que usamos), los cuales tuvieron enorme influencia en Europa Occidental. Su nombre se recuerda hoy con la palabra *algoritmo*.

Clases especiales de ecuaciones lineales

Las ecuaciones anteriores tenían conjuntos solución con un solo elemento. Por ejemplo,

$2(x - 5) + 3x = x + 6$ tiene el conjunto solución $\{4\}$.

Algunas ecuaciones que parecen ser lineales no tienen soluciones, mientras que otras tienen un número infinito de soluciones. En la **tabla 1** de la siguiente página se presentan los nombres de estos tipos de ecuaciones.



Sofia Kovalevskaya (1850-1891) fue una matemática rusa muy conocida a finales del siglo XIX. Trabajó fundamentalmente en la teoría de **ecuaciones diferenciales** (ecuaciones invaluables para expresar tasas de cambio). Por ejemplo, en biología, la tasa de crecimiento de una población de microbios se puede establecer con exactitud mediante ecuaciones diferenciales.

Kovalevskaya estudió en privado porque las clases públicas no estaban abiertas a las mujeres. Finalmente, recibió un título (en 1874) de la Universidad de Göttingen, Alemania. En 1884 dio clases en la Universidad de Estocolmo y tiempo después fue nombrada profesora de matemáticas avanzadas.

Tabla 1 Tipos de ecuaciones

Tipo de ecuaciones	Número de soluciones	Indicaciones de solución
Condicional	Una	El resultado final es $x =$ un número. [Véase el **ejemplo 5** ***a***)].
Identidad	Infinitas; conjunto solución {todos los números reales}	El resultado final es verdadero, tal como $0 = 0$. [Véase el **ejemplo 5** ***b***)].
Contradicción	Ninguna; conjunto solución $\emptyset$	El resultado final es falso, tal como $0 = 1$. [Véase el **ejemplo 5** ***c***)].

EJEMPLO 5 Identificación de ecuaciones condicionales, identidades y contradicciones

Resuelva cada ecuación. Determine si se trata de una *ecuación condicional*, una *identidad* o una *contradicción*.

a) $5x - 9 = 4(x - 3)$ ***b***) $5x - 15 = 5(x - 3)$ ***c***) $5x - 15 = 5(x - 4)$

SOLUCIÓN

a)
$$5x - 9 = 4(x - 3)$$
$$5x - 9 = 4x - 12 \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$5x - 9 - 4x = 4x - 12 - 4x \quad \text{Se resta } 4x.$$
$$x - 9 = -12 \quad \text{Se reducen los términos semejantes.}$$
$$x - 9 + 9 = -12 + 9 \quad \text{Se suma 9.}$$
$$x = -3 \quad \text{Conjunto solución } \{-3\}$$

El conjunto solución tiene un elemento, de modo que $5x - 9 = 4(x - 3)$ es una ecuación condicional.

b)
$$5x - 15 = 5(x - 3)$$
$$5x - 15 = 5x - 15 \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$0 = 0 \quad \text{Se resta } 5x \text{ y se suma } 15.$$

El resultado final, $0 = 0$, indica que el conjunto solución es {todos los números reales}, y la ecuación $5x - 15 = 5(x - 3)$ es una identidad. (*Nota:* El primer paso nos dio $5x - 15 = 5x - 15$, lo cual es verdadero para todos los valores de x y, por lo tanto, se trata de una identidad).

c)
$$5x - 15 = 5(x - 4)$$
$$5x - 15 = 5x - 20 \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$5x - 15 - 5x = 5x - 20 - 5x \quad \text{Se resta } 5x.$$
$$-15 = -20 \quad \text{Falso}$$

Como el resultado, $-15 = -20$, es *falso*, la ecuación no tiene solución. El conjunto solución es $\emptyset$, de modo que la ecuación $5x - 15 = 5(x - 4)$ es una contradicción.

Ecuaciones con literales y fórmulas

Una ecuación que incluye *variables* (o letras), tal como $cx + d = e$, se conoce como **ecuación literal**. Los ejemplos más útiles de ecuaciones literales son las *fórmulas*. La solución de un problema en álgebra depende con frecuencia del uso de enunciados matemáticos o **fórmulas**, donde se usa más de una letra para expresar una relación.

$$d = rt, \quad I = prt, \quad \text{y} \quad P = 2L + 2W \quad \text{Ejemplos de fórmulas}$$

En algunos casos, en una fórmula debe despejarse una de sus variables. Este proceso se conoce como **despeje de una variable específica.** Los pasos que se aplican son similares a los que se siguen en la solución de ecuaciones lineales.

Cuando se despeja una variable específica, la clave es tratar a la variable como si fuera la única, y tratar a las demás variables como números (constantes).

Solución para una variable específica

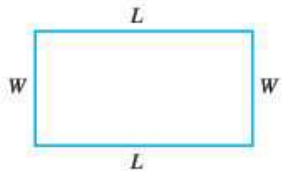
Paso 1 Modifique la ecuación de tal modo que todos los términos que incluyen a la variable en cuestión estén en un lado de la ecuación, y los demás términos en el otro lado.

Paso 2 Si es necesario, use la propiedad distributiva para reducir los términos que incluyen a la variable especificada. El resultado debe ser el producto de una suma o resta por la variable.

Paso 3 Divida ambos lados entre el factor que está multiplicando la variable especificada.

EJEMPLO 6 Solución para una variable especificada

Resuelva la fórmula $P = 2L + 2W$ para W.



El perímetro, P, está dado por la suma de las longitudes de los lados del rectángulo, $P = 2L + 2W$.

Figura 1

SOLUCIÓN

Resuelva la fórmula del perímetro (contorno) de un rectángulo (**figura 1**) para W aislando a W en un lado del símbolo de igualdad.

Paso 1
$$P = 2L + 2W$$
$$P - 2L = 2L + 2W - 2L \quad \text{Se resta } 2L.$$
$$P - 2L = 2W$$

Paso 2 Aquí no es necesario el paso 2.

Paso 3
$$\frac{P - 2L}{2} = \frac{2W}{2} \quad \text{Se dividen ambos lados entre 2.}$$
$$\frac{P - 2L}{2} = W, \quad \text{o} \quad W = \frac{P}{2} - L \quad \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$



Modelos

Un **modelo matemático** es una ecuación (o desigualdad) que describe la relación entre dos cantidades. Un *modelo lineal* es una ecuación lineal.

EJEMPLO 7 Modelo para prevenir la contaminación interior

Si la campana de una estufa desaloja contaminantes a una tasa de flujo de F litros de aire por segundo, entonces el porcentaje P de contaminantes que también se desalojan del aire circundante se puede modelar con la ecuación lineal:

$$P = 1.06F + 7.18,$$

donde $10 \le F \le 75$. ¿Qué tasa de flujo F debe tener la campana para desalojar el 50% de contaminantes del aire? (*Fuente:* Rezvan R. L., "Effectivness of Local Ventilation in Removing Simulated Pollutants from Point Sources", 65-75, en *Proceedings of the Third International Conference on Indoor Air Quality and Climate,* 1984).

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
P &= 1.06F + 7.18 \\
50 &= 1.06F + 7.18 && \text{Sea } P = 50. \\
5000 &= 106F + 718 && \text{Se multiplica por 100.} \\
4282 &= 106F && \text{Se resta 718.} \\
F &\approx 40.40 && \text{Se divide entre 106.}
\end{aligned}
$$

La tasa de flujo es aproximadamente de 40.40 L de aire por segundo. ■■■

Para reflexionar

Los axiomas de igualdad

Cuando se resuelve una ecuación, debemos asegurarnos de que permanece "equilibrada", es decir, cualquier operación que se realice en un lado de la ecuación también debe realizarse en el otro lado, para garantizar que el conjunto solución sigue siendo el mismo.

Las reglas subyacentes para solucionar ecuaciones son los cuatro axiomas de la igualdad, listados a continuación. Para todos los números reales a, b y c,

1. Axioma reflexivo	$a = a$
2. Axioma simétrico	Si $a = b$, entonces $b = a$
3. Axioma transitivo	Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$
4. Axioma de sustitución	Si $a = b$, entonces a puede sustituir a b en cualquier enunciado sin afectar la veracidad o falsedad del enunciado.



Una relación, como una igualdad, que satisface los primeros tres axiomas (reflexivo, simétrico y transitivo) se conoce como una relación de equivalencia.

Para investigación individual o en grupo

1. Dé un ejemplo de una relación cotidiana que no satisfaga el axioma simétrico.
2. ¿Se cumple el axioma transitivo en competencias deportivas, en relación con las "derrotas"?
3. Dé un ejemplo de una relación que no satisfaga el axioma transitivo.

6.1 EJERCICIOS

1. ¿Cuáles ecuaciones son lineales en x?

   A. $2x + x - 1 = 0$ **B.** $8 = x^2$

   C. $6x + 2 = 9$ **D.** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{x} = 0$

2. ¿Cuáles de las ecuaciones del **ejercicio 1** no son lineales en x? Explique por qué.

3. Determine si 12 es una solución de $3(x + 4) = 4x$ sustituyendo x por 12. Si no es una solución, explique por qué.

4. Use la sustitución para determinar si -2 es una solución de $5(x+4) - 3(x+6) = 7(x+1)$. Si no es una solución, explique por qué.

5. Si dos ecuaciones son equivalentes, tienen el mismo _____ _____.

6. La ecuación $4[x + (2 - 3x)] = 2(4 - 4x)$ es una identidad. Considere que x representa el número de letras de su apellido. ¿Ese número es una solución de esta ecuación? Compruebe su respuesta.

7. ¿Cuál expresión es equivalente a $0.06(10 - x)(100)$?

   A. $0.06 - 0.06x$ **B.** $60 - 6x$

   C. $6 - 6x$ **D.** $6 - 0.06x$

8. Describa con sus propias palabras los pasos que se siguen para resolver una ecuación lineal.

Resuelva las siguientes ecuaciones.

9. $7x + 8 = 1$ **10.** $5x - 4 = 21$

11. $8 - 8x = -16$ **12.** $9 - 2x = 15$

13. $7x - 5x + 15 = x + 8$

14. $2x + 4 - x = 4x - 5$

15. $12x + 15x - 9 + 5 = -3x + 5 - 9$

16. $-4x + 5x - 8 + 4 = 6x - 4$

17. $2(x + 3) = -4(x + 1)$

18. $4(x - 9) = 8(x + 3)$

19. $3(2x + 1) - 2(x - 2) = 5$

20. $4(x - 2) + 2(x + 3) = 6$

21. $2x + 3(x - 4) = 2(x - 3)$

22. $6x - 3(5x + 2) = 4(1 - x)$

23. $6x - 4(3 - 2x) = 5(x - 4) - 10$

24. $-2x - 3(4 - 2x) = 2(x - 3) + 2$

25. $-[2x - (5x + 2)] = 2 + (2x + 7)$

26. $-[6x - (4x + 8)] = 9 + (6x + 3)$

27. $-3x + 6 - 5(x - 1) = -(2x - 4) - 5x + 5$

28. $4(x + 2) - 8x - 5 = -3x + 9 - 2(x + 6)$

29. $-[3x - (2x + 5)] = -4 - [3(2x - 4) - 3x]$

30. $2[-(x - 1) + 4] = 5 + [-(6x - 7) + 9x]$

31. $-(9 - 3x) - (4 + 2x) - 4 = -(2 - 5x) - x$

32. $(2 - 4x) - (3 - 4x) + 4 = -(-3 + 6x) + x$

33. $(2x - 6) - (3x - 4) = -(-4 + x) - 4x + 6$

34. $(3x - 4) - (5x - 8) = -(x + 12) - 6x + 1$

35. Para resolver la ecuación lineal

$$0.05x + 0.12(x + 5000) = 940,$$

se pueden multiplicar ambos lados por una potencia de 10, de modo que todos los coeficientes sean enteros. ¿Cuál es la potencia más pequeña de 10 que puede lograr esto?

36. Suponga que para resolver la ecuación

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{6}x,$$

usted inicia multiplicando ambos lados por 12, en lugar de usar el *mínimo* común denominador, 6. ¿De todos modos obtendría la solución correcta? Explique.

Resuelva las siguientes ecuaciones.

37. $\frac{3x}{4} + \frac{5x}{2} = 13$

38. $\frac{8x}{3} - \frac{2x}{4} = -13$

39. $\frac{x - 8}{5} + \frac{8}{5} = -\frac{x}{3}$

40. $\frac{2x - 3}{7} + \frac{3}{7} = -\frac{x}{3}$

41. $\frac{4x + 1}{3} = \frac{x + 5}{6} + \frac{x - 3}{6}$

42. $\frac{2x + 5}{5} = \frac{3x + 1}{2} + \frac{-x + 7}{2}$

43. $0.05x + 0.12(x + 5000) = 940$

44. $0.09x + 0.13(x + 300) = 61$

45. $0.02(50) + 0.08x = 0.04(50 + x)$

46. $0.20(14{,}000) + 0.14x = 0.18(14{,}000 + x)$

47. $0.05x + 0.10(200 - x) = 0.45x$

48. $0.08x + 0.12(260 - x) = 0.48x$

49. La ecuación $x + 2 = x + 2$ se conoce como una _____, porque su conjunto solución es {todos los números reales}. La ecuación $x + 1 = x + 2$ se conoce como una _____, porque su conjunto solución es $\emptyset$.

50. ¿Cuál ecuación es condicional?

A. $2x + 1 = 3$ **B.** $x = 3x - 2x$

C. $3x + 1 = 3x$ **D.** $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$

Determine si cada una de las siguientes ecuaciones es condicional, una identidad o una contradicción. Dé el conjunto solución.

51. $-2x + 5x - 9 = 3(x - 4) - 5$

52. $-6x + 2x - 11 = -2(2x - 3) + 4$

53. $6x + 2(x - 2) = 9x + 4$

54. $-4(x + 2) = -3(x + 5) - x$

55. $-11x + 4(x - 3) + 6x = 4x - 12$

56. $3x - 5(x + 4) + 9 = -11 + 15x$

57. $7[2 - (3 + 4x)] - 2x = -9 + 2(1 - 15x)$

58. $4[6 - (1 + 2x)] + 10x = 2(10 - 3x) + 8x$

59. Si despejamos h en $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bh$, una posible respuesta es

$$h = \frac{2\mathcal{A}}{b}.$$

¿Cuál de las fórmulas *no* es equivalente a esto?

A. $h = 2\left(\frac{\mathcal{A}}{b}\right)$ **B.** $h = 2\mathcal{A}\left(\frac{1}{b}\right)$

C. $h = \frac{\mathcal{A}}{\frac{1}{2}b}$ **D.** $h = \frac{\frac{1}{2}\mathcal{A}}{b}$

60. Una fuente de fórmulas geométricas da la fórmula del perímetro de un rectángulo como

$$P = 2L + 2W,$$

mientras otra la da como

$$P = 2(L + W).$$

¿Estas fórmulas son equivalentes? Si es así, ¿qué propiedad justifica su equivalencia?

Fórmulas matemáticas *Despeje la variable especificada para cada fórmula.*

61. $d = vt$; despeje t (fórmula de la distancia)

62. $I = prt$; despeje r (interés simple)

63. $\mathcal{A} = bh$; despeje b (área de un paralelogramo)

64. $P = 2L + 2W$; despeje L (perímetro de un rectángulo)

65. $P = a + b + c$; despeje a (perímetro de un triángulo)

66. $V = LWH$; despeje W (volumen de un sólido rectangular)

67. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bh$; despeje b (área de un triángulo)

68. $C = 2\pi r$; despeje r (circunferencia de un círculo)

69. $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$; despeje h (área de la superficie de un cilindro circular recto)

70. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}h(B + b)$; despeje B (área de un trapezoide)

71. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$; despeje F (conversión de grados Fahrenheit a Celsius)

72. $F = \frac{9}{5}C + 32$; despeje C (conversión de grados Celsius a Fahrenheit)

73. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; despeje h (volumen de un cono)

74. $V = \frac{1}{3}Bh$; despeje h (volumen de una pirámide rectangular)

Resuelva cada problema que implica un modelo lineal.

75. ***Colegiaturas y cuotas*** El modelo lineal

$$y = 226.9x - 449{,}700$$

describe la cantidad y en dólares de la colegiatura y las cuotas promedio en preparatorias y universidades públicas de 1985 a 2008, donde x es el año. (*Fuente:* The College Board).

a) Use el modelo para estimar el costo de colegiatura y cuotas en 2006.

b) Use el modelo para determinar el año en el cual la colegiatura y las cuotas fueron de $7,150.

76. ***Colegiaturas y cuotas*** El modelo lineal

$$y = 837.7x - 1{,}657{,}993$$

describe la cantidad y en dólares de la colegiatura y las cuotas promedio en preparatorias y universidades privadas de 1985 a 2008, donde x es el año. (*Fuente:* The College Board).

a) Use el modelo para estimar el costo de colegiatura y cuotas en 2005.

b) Use el modelo para determinar el año en el cual la colegiatura y las cuotas fueron de $27,000.



77. ***Calidad y control del aire en interiores*** El riesgo R de adquirir cáncer durante el tiempo de vida es una medida de la probabilidad de que un individuo desarrolle cáncer a partir de un contaminante determinado. Por ejemplo, si $R = 0.01$, entonces una persona tiene un 1% más de probabilidad de desarrollar cáncer durante su vida. (Esto se interpreta como 1 caso de cáncer por cada 100 personas durante un tiempo de vida promedio). El valor de R para un formaldehído, el cual es un contaminante tóxico de un ambiente interior, se calcula usando el modelo lineal

$$R = kd,$$

donde k es una constante, y d es la dosis diaria en partes por un millón. La constante k para un formaldehído se calcula usando la fórmula

$$k = \frac{0.132B}{W},$$

donde B es el número total de metros cúbicos de aire que una persona respira en un día, y W es el peso de la persona en kilogramos. (*Fuente:* Hines, A., T. Ghosh, S. Loyalka y R. Warder, *Indoor Air*: *Quality & Control*, Prentice Hall, 1993; Ritchie, I. y R. Lehnen, "An Analysis of Formaldehyde Concentration in Mobile and Conventional Homes", *J. Env. Health*, 47:300-305).

a) Obtenga k para una persona que respira 20 metros cúbicos de aire por día y pesa 75 kilogramos.

b) Se averiguó que las casas móviles en Minnesota tienen una dosis diaria promedio d de 0.42 partes por millón. Calcule R usando el valor de k obtenido en el inciso ***a)***.

c) Por cada 5000 personas, ¿cuántos casos de cáncer se pueden esperar cada año partiendo de estos niveles de formaldehído? Suponga una expectativa de vida promedio de 72 años.

78. *Calidad y control del aire en interiores* (Véase el **ejercicio 77**). Para los no fumadores expuestos al ambiente del humo de tabaco (fumadores pasivos), $R = 0.0015$.

a) Si la expectativa de vida promedio es de 72 años, ¿cuál es el riesgo de adquirir cáncer para los fumadores pasivos por año?

b) Escriba una ecuación lineal que modele el número C de casos de cáncer esperados por año, si existen x fumadores pasivos.

c) Estime el número de casos de cáncer anuales por cada 100,000 fumadores pasivos.

6.2 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES LINEALES

Traducción de palabras a símbolos • Criterios para aplicaciones • Cálculo de cantidades desconocidas • Problemas de mezcla e interés • Problemas de denominación monetaria • Problemas de movimiento

Traducción de palabras a símbolos

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS En un problema planteado verbalmente que se debe traducir a expresiones matemáticas que implican sumas, restas, multiplicaciones y divisiones normalmente existen palabras y frases clave.

Traducción de palabras a expresiones matemáticas

Expresión oral	Expresión matemática (donde x y y son números)
Suma	
La **suma** de un número y 7	$x + 7$
6 **más que** un número	$x + 6$
3 **más** un número	$3 + x$
24 **sumado a** un número	$x + 24$
Un número **incrementado en** 5	$x + 5$
La **suma** de dos números	$x + y$
Resta	
2 **menos que** un número	$x - 2$
12 **menos** un número	$12 - x$
Un número **disminuido en** 12	$x - 12$
La **diferencia entre** dos números	$x - y$
Un número **restado de** 10	$10 - x$
Multiplicación	
16 **veces** un número	$16x$
Un número **multiplicado por** 6	$6x$
$\frac{2}{3}$ **de** un número (se aplica a fracciones y porcentajes)	$\frac{2}{3}x$
El **doble** de un número (o un número dos veces)	$2x$
El **producto** de dos números	xy
División	
El **cociente** de 8 entre un número	$\frac{8}{x}$ $(x \neq 0)$
Un número **dividido entre** 13	$\frac{x}{13}$
La **razón** entre dos números o el **cociente** de dos números	$\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$

El símbolo de igualdad, =, a menudo se identifica con la palabra *es*. De hecho, como las expresiones matemáticas que son iguales representan formas diferentes de referirse a un mismo número, las palabras que sugieren la idea de "igualdad" se traducen como =. Por ejemplo, la expresión

Si al producto de un número y 12 se le resta 7, el resultado es 105

se traduce en la ecuación matemática

$$12x - 7 = 105,$$

donde x representa el número desconocido. (¿Por qué $7 - 12x = 105$ sería incorrecto?).

Criterios para aplicaciones

Para resolver problemas, se aplican los seis pasos siguientes.

Se puede adaptar el **procedimiento de solución de problemas de George Polya** para las aplicaciones de álgebra como se describe en el recuadro. Los pasos 1 y 2 integran la primera etapa del procedimiento de Polya (*entender el problema*). El paso 3 representa la segunda etapa (*concebir un plan*). El paso 4 es la tercera etapa (*aplicar el plan*) y los pasos 5 y 6 conforman la última etapa (*repasar*).

Solución de un problema de aplicación

Paso 1 ***Lea*** el problema con cuidado hasta entender con qué elementos se cuenta y qué se va a calcular.

Paso 2 **Asigne una variable** para representar el valor desconocido (o incógnita), usando diagramas o tablas cuando sea necesario. Escriba lo que representa la variable. Si es necesario, exprese otros valores desconocidos cualesquiera en términos de la variable.

Paso 3 **Escriba una ecuación** usando la expresión (o expresiones) de la variable.

Paso 4 **Resuelva** la ecuación.

Paso 5 **Enuncie la respuesta.** ¿Parece razonable?

Paso 6 **Verifique** la respuesta considerando las palabras del problema *original*.

Cálculo de cantidades desconocidas

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Un problema común implica la obtención de dos cantidades cuando la suma de esas cantidades se conoce. Se elige una variable para representar una de las incógnitas y luego se representa la otra cantidad en términos de la misma variable, usando la información del problema. Luego se escribe una ecuación con base en las palabras del problema.

EJEMPLO 1 Cálculo de los números de ponches en el béisbol

Dos lanzadores sobresalientes de ligas mayores en años recientes son Randy Johnson y Johan Santana. En 2004 los dos juntos acumularon un total de 555 ponches. Johnson logró 25 ponches más que Santana. ¿Cuántos ponches logró cada lanzador? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).



Johan Santana

SOLUCIÓN

Paso 1 **Lea** el problema. Nos piden obtener el número de ponches que logró cada lanzador.

Paso 2 **Asigne una variable** para representar el número de ponches de cada persona.

Sea s = el número de ponches de Johan Santana.

También debemos obtener el número de ponches de Randy Johnson. Como él logró 25 ponches más que Santana,

$s + 25$ = el número de ponches de Johnson.

Aquí se presenta una aplicación de ecuaciones lineales tomada de la ***Antología griega*** (500 d. C. aproximadamente), una obra que incluye 46 problemas.

Demochares ha vivido un cuarto de su vida como niño, un quinto como joven, un tercio como adulto, y han pasado 13 años de su vejez. ¿Qué edad tiene?

(Respuesta: 60 años de edad).

Paso 3 **Escriba una ecuación.** La suma de los números de ponches es 555.

Ponches de Santana	+	Ponches de Johnson	=	Total
s	+	$(s + 25)$	=	555

Paso 4 **Resuelva** la ecuación.

$$\begin{aligned} s + (s + 25) &= 555 \\ 2s + 25 &= 555 && \text{Se reducen los términos semejantes.} \\ 2s + 25 - 25 &= 555 - 25 && \text{Se resta 25.} \\ 2s &= 530 && \text{Se reducen los términos semejantes.} \\ \frac{2s}{2} &= \frac{530}{2} && \text{Se divide entre 2.} \\ s &= 265 \end{aligned}$$

No se detenga aquí.

Paso 5 **Enuncie la respuesta.** Considere que s representa el número de ponches de Santana, de manera que Santana logró 265. Por lo tanto, el número de ponches de Johnson es

$$s + 25 = 265 + 25 = 290.$$

Asegúrese de obtener la segunda respuesta.

Paso 6 **Verifique.** 290 es 25 más que 265, y la suma de 265 y 290 es 555. ■■■

EJEMPLO 2 Obtención de las longitudes de unas piezas de madera

Un proyecto de carpintería requiere de tres piezas de madera. La pieza más larga debe tener el doble de la longitud de la pieza mediana, y la pieza más corta debe ser 10 pulgadas más corta que la pieza mediana. Si las tres piezas se van a cortar de una tabla de 70 pulgadas de largo, ¿qué longitud debe tener cada pieza?

SOLUCIÓN

Paso 1 **Lea** el problema. Se deben obtener las tres longitudes.

Paso 2 **Asigne una variable.** Como la pieza mediana aparece en ambas comparaciones, se determina que x representará la longitud, en pulgadas, de la pieza mediana.

x = longitud de la pieza mediana,
$2x$ = longitud de la pieza más larga,
$x - 10$ = longitud de la pieza más corta. Véase la **figura 2**.

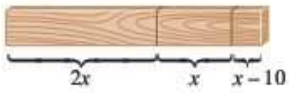


Figura 2

Paso 3 **Escriba una ecuación.**

pieza más larga	más	pieza mediana	más	pieza más corta	es	longitud total
$2x$	+	x	+	$(x - 10)$	=	70

Paso 4 **Resuelva.**

$$\begin{aligned} 4x - 10 &= 70 && \text{Se reducen los términos semejantes.} \\ 4x - 10 + 10 &= 70 + 10 && \text{Se suma 10.} \\ 4x &= 80 && \text{Se reducen los términos semejantes.} \\ \frac{4x}{4} &= \frac{80}{4} && \text{Se divide entre 4.} \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Los problemas que implican edades se han presentado desde la antigüedad. La *Antología griega* es la única fuente de información conocida de la vida del matemático **Diofanto**:

Diofanto pasó $\frac{1}{6}$ de su vida en la niñez, $\frac{1}{12}$ en su juventud, $\frac{1}{7}$ más como bachiller. Cinco años después de su matrimonio nació un hijo que murió cuatro años antes que su padre, a $\frac{1}{2}$ de la edad final de su padre.

Intente escribir una ecuación y resuélvala para demostrar que Diofanto tenía 84 años de edad cuando murió.

Paso 5 **Enuncie la respuesta.** La pieza mediana tiene una longitud de 20 pulgadas, la pieza más larga mide $2(20) = 40$ pulgadas de longitud, y la pieza más corta mide $20 - 10 = 10$ pulgadas de longitud.

Paso 6 **Verifique.** La suma de las longitudes es 70 pulgadas. Se satisfacen todas las condiciones del problema. ■■■

Problemas de mezcla e interés

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Los porcentajes se usan con frecuencia en problemas que implican la mezcla de diferentes concentraciones de una sustancia o diferentes tasas de interés. En cada caso, para obtener la cantidad de sustancia pura o el interés, se multiplica:

Problemas de mezcla	Problemas de interés (anual)
base × tasa (%) = porcentaje	**Capital × tasa (%) = interés**
$b \times r = p$	$P \times r = I$

En una ecuación, el porcentaje se debe escribir como decimal.

EJEMPLO 3 Uso de porcentajes en aplicaciones

a) Si un químico tiene 40 litros de una solución ácida al 35%, ¿cuál es la cantidad de ácido puro en la solución?

b) Si se invierten $1300 al 2% anual de interés simple, ¿cuánto se gana por intereses en un año?



En la película *Buck Privates*, de 1941, Slicker Smith (Bud Abbott) dice a Herbie Brown (Lou Costello) que es realmente un tonto y, para probarlo, desafía a Herbie a que conteste esta pregunta:

Supón que tienes 40 años de edad y estás enamorado de una niñita que tiene 10 años de edad. Eres cuatro veces más viejo que la niñita. Ahora, tú no podrías casarte con la niñita, o ¿sí? Entonces esperas cinco años. Ahora tú tienes 45 y ella 15. Eres tres veces más viejo que la niña. Pero aún no puedes casarte con ella, así que esperas otros 15 años. Ahora tú eres dos veces más viejo que ella. ¿Cuánto tiempo tendrás que esperar antes de que la chica te alcance?

Vea la película para conocer la inteligente respuesta de Herbie.

SOLUCIÓN

a) $40 \times 0.35 = 14$ litros (35% = 0.35)

Cantidad de solución · Tasa de concentración · Cantidad de ácido puro

b) $\$1300 \times 0.02 = \$26$ (2% = 0.02)

Capital · Tasa de interés · Interés ganado ■■■

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Una tabla permite establecer más fácilmente la ecuación de un problema, lo cual, por lo regular, es el paso más difícil.

EJEMPLO 4 Solución de un problema de mezcla

Un químico debe mezclar 8 litros de una solución ácida al 40% con una solución al 70%, para obtener una solución al 50%. ¿Qué cantidad de la solución al 70% debería usar?

SOLUCIÓN

Paso 1 **Lea** el problema. Hay que calcular la cantidad de solución al 70% que se va a usar.

Paso 2 **Asigne una variable.** Sea x = el número de litros que se usarán de la solución al 70%. La información del problema se muestra en la **figura 3**.



Figura 3

Con base en la información proporcionada, se elabora la siguiente tabla.

Porcentaje (en decimales)	Número de litros	Litros de ácido puro
40% = 0.40	8	0.40(8) = 3.2
70% = 0.70	x	$0.70x$
50% = 0.50	$8 + x$	$0.50(8 + x)$

La suma debe ser igual

Los números de la columna derecha se obtuvieron multiplicando las concentraciones y el número de litros. El número de litros de ácido puro en la solución al 40% más el número de litros de ácido puro en la solución al 70% debe ser igual al número de litros de ácido puro en la solución al 50%.

Paso 3 **Escriba una ecuación.**

$$3.2 + 0.70x = 0.50(8 + x)$$

Paso 4 **Resuelva la ecuación.**

$$3.2 + 0.70x = 4 + 0.50x \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$0.20x = 0.8 \quad \text{Se restan 3.2 y 0.50}x.$$
$$x = 4 \quad \text{Se divide entre 0.20.}$$

Paso 5 **Enuncie la respuesta.** El químico debe usar 4 litros de la solución al 70%.

Paso 6 **Verifique.** 8 litros de solución al 40% más 4 litros de solución al 70% nos da

$$8(0.40) + 4(0.70) = 6 \text{ litros}$$

de ácido. De manera similar, 8 + 4 o 12 litros de solución al 50% tiene

$$12(0.50) = 6 \text{ litros}$$

de ácido en la mezcla. La cantidad total de ácido puro es de 6 litros antes y después de la mezcla, de modo que la respuesta es correcta. ■■■



La película de acción *Die Hard: With a Vengeance (Duro de matar)*, de 1995, presenta al personaje John McClane (Bruce Willis) y a Zeus Carver (Samuel L. Jackson) uniendo su ingenio contra el villano Simon Gruber (Jeremy Irons), quien está colocando bombas por todo Nueva York. Para impedir que una bomba detone, McClane y Carver deben marcar un número que requiere la solución del siguiente acertijo.

Cuando iba a Saint Ives,
me encontré a un hombre con siete esposas.
Cada esposa tenía siete sacos,
cada saco tenía siete gatos,
cada gato tenía siete gatitos.
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
¿cuántos iban a Saint Ives?

El acertijo es la derivación de una aplicación antigua encontrada en el **papiro Rhind**, un manuscrito egipcio que se remonta al 1650 a. C. **Leonardo de Pisa (Fibonacci)** también incluyó un problema similar en su *Liber Abaci* en 1202.

La respuesta a la pregunta es 1. Solo "yo" iba a Saint Ives.

En el **ejemplo 5** se usa la fórmula de interés simple, $I = Prt$. Cuando $t = 1$, la fórmula se convierte en $I = Pr$, como se muestra en la sugerencia para la solución de problemas de la página anterior.

EJEMPLO 5 Solución de un problema de inversión

Después de ganar la lotería estatal, Theo Lieber invirtió $40,000. Depositó parte de su dinero en una cuenta que paga el 4% de interés, y con el resto compró acciones que pagan el 6% de interés. Su contador le informa que el ingreso total anual de estas inversiones debe ser igual a $2040. ¿Cuánto debe invertir a cada tasa de interés?

SOLUCIÓN

Paso 1 **Lea** el problema de nuevo. Debemos calcular las dos cantidades.

Paso 2 **Asigne una variable.**

Sea x = la cantidad a invertir al 4%.
Luego, $40{,}000 - x$ = la cantidad a invertir al 6%.

La fórmula del interés es $I = prt$. Aquí, el tiempo, t, es de 1 año.

Tasa (en decimales)	Principal	Interés
4% = 0.04	x	$0.04x$
6% = 0.06	$40{,}000 - x$	$0.06(40{,}000 - x)$
	40,000	2040 ← Total

Paso 3 **Escriba una ecuación.** La última columna de la tabla nos proporciona la ecuación.

Interés al 4%	más	Interés al 6%	es	Interés total
↓	↓	↓	↓	↓
$0.04x$	+	$0.06(40{,}000 - x)$	=	2040

Paso 4 **Resuelva** la ecuación. Lo hacemos sin eliminar los decimales.

$$0.04x + 0.06(40{,}000) - 0.06x = 2040 \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$0.04x + 2400 - 0.06x = 2040 \quad \text{Se multiplica.}$$
$$-0.02x + 2400 = 2040 \quad \text{Se reducen los términos semejantes.}$$
$$-0.02x = -360 \quad \text{Se resta 2400.}$$
$$x = 18{,}000 \quad \text{Se divide entre } -0.02.$$

Paso 5 **Enuncie la respuesta.** Theo debe invertir \$18,000 al 4%. Al 6% debe invertir \$40,000 − \$18,000 = \$22,000.

Paso 6 **Verifique** calculando el interés anual de cada tasa.

$$0.04(\$18{,}000) = \$720 \quad \text{y} \quad 0.06(\$22{,}000) = \$1320$$
$$\$720 + \$1320 = \$2040, \quad \text{como se pidió.}$$ ▮▮▮

Problemas de denominación monetaria

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Los problemas que implican dinero son similares a los problemas de mezcla e inversión.

Problemas de dinero

Número × Valor unitario = Valor total

Por ejemplo, si un recipiente contiene 37 monedas de 25 centavos, el valor monetario de las monedas es

$$37 \times \$0.25 = \$9.25.$$

Número de monedas · Denominación · Valor monetario

EJEMPLO 6 Solución de un problema de denominación monetaria

Para una cuenta que totaliza \$5.65, un cajero recibió 25 monedas de 5 y 25 centavos. ¿Cuántas monedas de cada denominación recibió el cajero?

SOLUCIÓN

Paso 1 **Lea** el problema. Se debe calcular el número de monedas de cada denominación.

Paso 2 **Asigne una variable.**

Sea x = número de monedas de 5 centavos.
Luego, $25 - x$ = número de monedas de 25 centavos.

Denominación	Número de monedas	Valor
\$0.05	x	$0.05x$
\$0.25	$25 - x$	$0.25(25 - x)$
	25	5.65

La suma debe ser igual

Paso 3 **Escriba una ecuación.** La última columna de la tabla proporciona lo siguiente.

$$0.05x + 0.25(25 - x) = 5.65$$

Paso 4 **Resuelva.**

$$\begin{aligned} 5x + 25(25 - x) &= 565 && \text{Se multiplica por 100.} \\ 5x + 625 - 25x &= 565 && \text{Propiedad distributiva} \\ -20x &= -60 && \text{Se resta 625. Se reducen los términos semejantes.} \\ x &= 3 && \text{Se divide entre } -20. \end{aligned}$$

Paso 5 **Enuncie la respuesta.** El cajero recibe 3 monedas de 5 centavos y $25 - 3 = 22$ monedas de 25 centavos.

Paso 6 **Verifique.** El cajero recibe $3 + 22 = 25$ monedas, y el valor de estas es

$$\$0.05(3) + \$0.25(22) = \$5.65, \text{ como se pidió.}$$

Problemas de movimiento

Si un automóvil viaja a una velocidad promedio de 50 millas por hora, durante dos horas, entonces viaja $50 \times 2 = 100$ millas. Este es un ejemplo de la relación básica:

distancia = velocidad × tiempo.

Esto se representa con la fórmula $d = vt$. Al despejar v y t, cada una por separado, se obtienen otras dos formas equivalentes de la fórmula. Las tres formas se presentan a continuación.

Relaciones entre distancia, velocidad y tiempo

$$d = vt \qquad v = \frac{d}{t} \qquad t = \frac{d}{v}$$

EJEMPLO 7 Uso de las relaciones entre distancia, velocidad y tiempo

a) La velocidad del sonido es igual a 1088 pies por segundo a nivel del mar y a 32° F. En estas condiciones, ¿qué distancia viaja el sonido en 5 segundos?

b) El ganador de la primera carrera de las 500 millas de Indianápolis (en 1911) fue Ray Harroun, conduciendo un Marmon Wasp a una velocidad promedio de 74.59 millas por hora. ¿Cuánto tiempo le tomó completar las 500 millas? (*Fuente: The Universal Almanac 1997*, John W. Wright, editor general).

c) En los Juegos Olímpicos de China, en Beijing 2008, la nadadora australiana Leisel Jones estableció un récord olímpico en el estilo de pecho en 100 metros libres para mujeres, con un tiempo de 65.17 segundos. ¿Cuál fue su velocidad? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).



Leisel Jones

SOLUCIÓN

a)

$$\begin{array}{ccccc} 1088 & \times & 5 & = & 5440 \text{ pies} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Velocidad} & \times & \text{Tiempo} & = & \text{Distancia} \end{array}$$

b) El tiempo que tardó Harroun en completar las 500 millas fue

$$\begin{array}{l} \text{Distancia} \longrightarrow \\ \text{Velocidad} \longrightarrow \end{array} \frac{500}{74.59} = 6.70 \text{ horas (redondeadas).} \longleftarrow \text{Tiempo}$$

Aquí se calcula el tiempo a partir de la velocidad y la distancia conocidas, usando $t = \frac{d}{r}$. Para convertir 0.70 horas a minutos, se multiplica por 60 para obtener $0.70(60) = 42$ minutos. Completar la carrera le tomó 6 horas, 42 minutos.

¿Es posible promediar promedios? Un automóvil viaja de *A* a *B* a 40 millas por hora y regresa a 60 millas por hora. ¿Cuál es la velocidad del viaje completo?

La respuesta correcta no son 50 millas por hora, como podría esperarse. Si recordamos la relación entre distancia, velocidad y tiempo, y considerando que x = distancia entre *A* y *B*, se puede simplificar una fracción compleja para obtener la respuesta correcta.

$$\text{Velocidad promedio del viaje completo} = \frac{\text{Distancia total}}{\text{Tiempo total}}$$

$$= \frac{x + x}{\frac{x}{40} + \frac{x}{60}}$$

$$= \frac{2x}{\frac{3x}{120} + \frac{2x}{120}}$$

$$= \frac{2x}{\frac{5x}{120}}$$

$$= 2x \cdot \frac{120}{5x}$$

$$= 48$$

La velocidad promedio del viaje completo es de 48 millas por hora.

c) Aquí la velocidad se obtiene dividiendo la distancia entre el tiempo.

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}} \longrightarrow \frac{100}{65.17} = 1.53 \text{ metros por segundo (redondeados)}$$ ■■■

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Problemas de movimiento que usan la fórmula de distancia

$$d = vt.$$

En esta fórmula, ***cuando la velocidad está dada en millas por hora, el tiempo debe expresarse en horas.*** Para resolver estos problemas, ***se dibuja un diagrama*** para ilustrar lo que sucede, y ***se elabora una tabla*** para resumir la información proporcionada.

EJEMPLO 8 Solución de un problema de movimiento

Greg Sabo va en bicicleta de su casa al trabajo en $\frac{3}{4}$ de hora. En autobús, el viaje le toma $\frac{1}{4}$ de hora. Si el autobús viaja a 20 mph más rápido de lo que va Greg en su bicicleta, ¿a qué distancia vive de su lugar de trabajo?

SOLUCIÓN

Paso 1 **Lea** el problema. Se debe determinar la distancia entre la casa de Greg y su lugar de trabajo.

Paso 2 **Asigne una variable.** Aun cuando en el problema se solicita la distancia, es más fácil aquí hacer que x sea la velocidad cuando va en bicicleta a su trabajo. De esta forma, la velocidad del autobús es $x + 20$.

$$d = vt = x \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}x,$$ Distancia del viaje en bicicleta

y

$$d = vt = (x + 20) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x + 20)$$ Distancia del viaje en autobús

Esta información se resume en una tabla:

	Velocidad	Tiempo	Distancia
Bicicleta	x	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}x$
Autobús	$x + 20$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}(x + 20)$

La distancia es la misma

Paso 3 **Escriba una ecuación.** La clave para establecer la ecuación correcta es tener en cuenta que la distancia en cada caso es la *misma*. Véase la **figura 4.**



Figura 4

$$\frac{3}{4}x = \frac{1}{4}(x + 20)$$ La distancia es la misma.

Paso 4 **Resuelva.**

$$4\left(\frac{3}{4}x\right) = 4\left(\frac{1}{4}\right)(x + 20) \quad \text{Se multiplica por 4.}$$

$$3x = x + 20 \quad \text{Se multiplica.}$$

$$2x = 20 \quad \text{Se resta } x.$$

$$x = 10 \quad \text{Se divide entre 2.}$$

Paso 5 **Enuncie la respuesta.** La distancia requerida está dada por $d = vt$.

$$d = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}(10) = \frac{30}{4} = 7.5 \text{ millas} \quad \text{Distancia en bicicleta}$$

Paso 6 **Verifique** calculando la distancia que recorre el autobús.

$$d = \frac{1}{4}(x + 20) = \frac{1}{4}(10 + 20) = \frac{30}{4} = 7.5 \text{ millas} \quad \text{Distancia en autobús}$$

Esto produce el mismo resultado. Vive a 7.5 millas de su lugar de trabajo. ■■■

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS En problemas de movimiento, como el del **ejemplo 8**, una vez que se han llenado los dos cuadros de información en cada fila de la tabla, automáticamente se llena el tercer cuadro de información, usando la forma adecuada de la fórmula que relaciona la distancia, la velocidad y el tiempo.

6.2 EJERCICIOS

Determine si cada uno de los siguientes enunciados se traduce en una expresión o una ecuación.

1. El producto de un número y 6.

2. El 39% de un número.

3. $\frac{2}{3}$ de un número son iguales a 36.

4. 9 es 5 veces más que un número.

5. La razón entre un número y 24.

6. 48 dividido entre un número es 12.

7. Resuelva de nuevo el **ejemplo 6**, haciendo que la variable represente el número de monedas de 25 centavos. ¿La respuesta del problema es la misma?

8. Explique por qué "19 menos que un número" *no* es una interpretación correcta de $19 - x$.

Convierta cada frase en una expresión matemática. Use x para representar el número desconocido o la incógnita.

9. Un número disminuido en 12.

10. 7 más que un número.

11. El producto de 6 menos que un número por 4 más que el número.

12. El cociente de un número entre 9.

13. La razón entre 25 y un número diferente de cero.

14. $\frac{6}{7}$ de un número.

15. Redacte unas cuantas frases describiendo los seis pasos de la solución de problemas.

16. ¿Cuál *no* es una interpretación válida de "30% de un número"?

A. $0.30x$ **B.** $0.3x$ **C.** $\frac{3x}{10}$ **D.** 0.30

Números desconocidos *Considerando que x representa un número, escriba una ecuación para el enunciado y luego resuélvala.*

17. Si se suma 2 a cinco veces un número, el resultado es igual a 5 más cuatro veces el número. Obtenga el número.

18. Si cuatro veces un número se suma a 8, el resultado es tres veces el número sumado a 5. Obtenga el número.

19. Si se resta 2 de un número y esta diferencia se triplica, el resultado es 6 más que el número. Obtenga el número.

20. Si 3 se suma a un número y esta suma se duplica, el resultado es 2 más que ese número. Obtenga el número.

21. La suma de tres veces un número y 7 más que el número es lo mismo que la diferencia entre −11 y dos veces el número. ¿Cuál es el número?

22. Si se suma 4 a dos veces un número y esta suma se multiplica por 2, el resultado es lo mismo que si el número se multiplica por 3 y se suma 4 al producto. ¿Cuál es el número?

Use los métodos de los ***ejemplos 1 y 2*** *o su propio método para resolver los siguientes problemas.*

23. ***Ganancias por conciertos*** Bon Jovi y Bruce Springsteen realizaron dos giras de conciertos en Norteamérica con las recaudaciones más altas en 2008; juntos generaron $415.3 millones en ventas de boletos. Si Bruce Springsteen obtuvo $6.1 millones menos que Bon Jovi, ¿cuánto generó cada gira? (*Fuente:* www.billboard.com).



24. ***Venta de automóviles*** El Toyota Camry fue el automóvil con las ventas más altas en Estados Unidos en 2007, seguido por el Honda Accord. Las ventas del Honda Accord fueron de 81 mil unidades menos que las ventas del Toyota Camry, y se vendieron 865 mil unidades de estos dos automóviles. ¿Cuántos automóviles de cada uno de estos modelos se vendieron? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).



25. ***Récord NBA*** En la temporada regular 2008-2009 de la NBA, los Celtics de Boston tuvieron dos triunfos más que tres veces los juegos perdidos. Los Celtics participaron en 82 juegos. ¿Cuántos juegos ganó y cuántos perdió el equipo? (*Fuente:* www.nba.com).

26. ***Récord MLB*** En la temporada 2008 de las Ligas Mayores de Béisbol, las Rayas de Tampa Bay ganaron 33 juegos menos que dos veces los juegos que perdieron. Ellos participaron en 162 juegos en la temporada regular. ¿Cuántos juegos ganó y cuántos perdió el equipo? (*Fuente:* www.mlb.com).

27. ***Senado de Estados Unidos*** Durante la CXI legislatura (a principios de 2009), el Senado de Estados Unidos tenía un total de 98 demócratas y republicanos. Había 18 republicanos menos que demócratas. ¿Cuántos demócratas y republicanos había en el senado? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).

28. ***Cámara de Representantes de Estados Unidos*** El número total de demócratas y republicanos en la Cámara de Representantes durante la CXI legislatura era de 435. Había 31 demócratas más que republicanos. ¿Cuántos miembros de cada partido había? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).

29. ***El emparedado submarino*** Nagaraj Nanjappa tiene un emparedado que mide 59 pulgadas de longitud, el cual se va a cortar en tres partes. La parte mediana será 5 pulgadas más larga que la parte más corta, y la pieza más corta será 9 pulgadas más corta que la parte más larga. ¿Qué longitud tendrán las partes?

30. ***Responsabilidades gerenciales*** En una semana, el gerente de una oficina reservó 55 boletos, divididos entre tres aerolíneas. Reservó 7 boletos más en American Airlines que en United Airlines. En Southwest Airlines reservó cuatro más que el doble de boletos de United Airlines. ¿Cuántos boletos reservó en cada aerolínea?

31. ***Medallas olímpicas de China*** China ganó un total de 100 medallas en los Juegos Olímpicos de Beijing 2008. El número de medallas de oro fue de 23 más que el número de medallas de bronce. El número de medallas de bronce fue de 7 más que el número de medallas de plata. ¿Cuántas medallas de cada clase ganó China? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).



32. ***Responsabilidades de un editor de libros de texto*** La editora de libros de texto Christine O'Brien pasó $7\frac{1}{2}$ horas realizando llamadas telefónicas, escribiendo correos electrónicos y asistiendo a reuniones. Pasó el doble de tiempo asistiendo a reuniones que haciendo llamadas telefónicas, y $\frac{1}{2}$ hora más escribiendo correos electrónicos que haciendo llamadas telefónicas. ¿Cuántas horas dedicó a cada actividad?

Use fórmulas básicas, como las del ***ejemplo 3****, para resolver los siguientes problemas.*

33. ***Mezcla ácida*** ¿Qué cantidad de ácido puro hay en 500 mililitros de una solución ácida al 14%?

34. ***Mezcla de alcohol*** ¿Qué cantidad de alcohol puro hay en 300 litros de una solución de alcohol al 30%?

35. ***Interés ganado*** Si se invierten $10,000 durante un año al 2.5% de interés simple, ¿cuál es la ganancia por concepto de interés?

36. ***Interés ganado*** Si se invierten $50,000 al 3% de interés simple durante dos años, ¿cuál es la ganancia por concepto de interés?

37. ***Valor de monedas*** ¿Cuál es el valor monetario de 497 monedas de 5 centavos?

38. ***Valor de monedas*** ¿Cuál es el valor monetario de 89 monedas de 50 centavos?

Use el método del ***ejemplo 4*** *o su propio método para resolver los siguientes problemas.*

39. ***Mezcla de alcohol*** En una clase de química, 12 litros de una solución de alcohol al 12% se deben mezclar con una solución al 20% para obtener una solución al 14%. ¿Cuántos litros de la solución al 20% son necesarios?

Concentración	Litros de solución	Litros de alcohol
12%	12	
20%		
14%		

40. ***Mezcla de alcohol*** ¿Cuántos litros de una solución de alcohol al 10% se deben mezclar con 40 litros de una solución al 50% para obtener una solución al 40%?

Concentración	Litros de disolución	Litros de alcohol
	x	
	40	
40%		

41. ***Mezcla anticongelante*** El radiador de un automóvil necesita una solución anticongelante al 40%. El radiador tiene actualmente 20 litros de solución al 20%. ¿Cuántos litros de esta se deben drenar y sustituir con anticongelante al 100% para obtener la concentración deseada?

42. ***Mezcla química*** Un tanque contiene 80 litros de una solución química. Actualmente, la solución tiene una concentración del 30%. ¿Cuánto de esta se debe drenar y sustituir con una solución al 70% para obtener una concentración final del 40%?

43. ***Mezcla de insecticida*** ¿Qué cantidad de agua se debe agregar a tres galones de una solución insecticida al 4% para reducir la concentración al 3%? (*Sugerencia:* Considere que el agua es 0% insecticida).

44. ***Mezcla de alcohol para primeros auxilios*** Un aerosol comercial de primeros auxilios contiene 78% de alcohol por volumen. Si el fabricante tiene 50 litros del aerosol con el 70% de alcohol, ¿qué cantidad de alcohol puro se debe agregar de modo que la mezcla final contenga el 78% de alcohol requerido? (*Sugerencia:* Considere que el alcohol puro es 100% alcohol).

Use el método del ***ejemplo 5*** *o su propio método para resolver los siguientes problemas. Suponga que todas las tasas y cantidades son anuales.*

45. ***Inversiones a diferentes tasas*** John Allen ganó $12,000 el año pasado dando lecciones de tenis. Invirtió una parte de sus ingresos al 3% de interés simple y el resto al 4%. Ganó un total de $440 de interés. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

Tasa (en decimales)	Capital	Interés en un año
0.03		
0.04		
	12,000	440

46. ***Inversiones a diferentes tasas*** Kim Hobbs ganó $60,000 en una máquina tragamonedas en Las Vegas. Invirtió una parte de sus ganancias al 2% de interés simple y el resto al 3%. Ganó un total de $1600 de interés. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

Tasa (en decimales)	Capital	Interés en un año
0.02	x	$0.02x$
	$60{,}000 - x$	
		1600

47. ***Inversiones a diferentes tasas*** Derrick Nantz invirtió algo de dinero al 4.5% de interés simple y $1000 menos que el doble de esa cantidad al 3%. Su ingreso total por concepto de interés fue de $1020. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

48. ***Inversiones a diferentes tasas*** Dee Myers invirtió algo de dinero al 3.5% de interés simple y $5000 más que tres veces esa cantidad al 4%. Ganó $1440 de interés. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

49. ***Inversiones a diferentes tasas*** Dave Morris tiene $29,000 invertidos en acciones que pagan el 5%. ¿Cuánto dinero adicional debe invertir en certificados de depósito que pagan el 2% para que el rendimiento promedio de las dos inversiones sea del 3%?

50. ***Inversiones a diferentes tasas*** Terry McGinnis depositó $15,000 en una cuenta que paga el 6%. ¿Cuánto dinero adicional debe depositar al 4% para que el rendimiento promedio de las dos inversiones sea del 5.5%?

Use el método del ***ejemplo 6*** *o su propio método para resolver los siguientes problemas.*

51. ***Combinación de monedas*** Mike Easley tiene una caja de monedas que usa cuando juega póquer con sus amigos. La caja actualmente contiene 44 monedas de un centavo, de 10 y de 25 centavos. El número de monedas de un centavo es igual al número de monedas de 10 centavos, y su valor total es de $4.37. ¿Cuántas monedas de cada denominación contiene en la caja?

Denominación	Número de monedas	Valor	
0.01	x	$0.01x$	
	x		
0.25			
	44	4.37	Totales

52. ***Combinación de monedas*** Kathy Diamond encontró algunas monedas mientras miraba debajo de los cojines del sofá. Había un número de monedas de cinco centavos igual al número de monedas de 25 centavos, y el doble de monedas de 50 centavos que el número de monedas de 25 centavos. Si encontró $2.60 en total, ¿cuántas monedas de cada denominación tenía?

Denominación	Número de monedas	Valor	
0.05	x	$0.05x$	
	x		
0.50	$2x$		
		2.60	Total

53. ***Asistencia a una obra escolar*** En la noche de estreno de una producción escolar, *The Mousetrap*, se vendieron 410 boletos. Los estudiantes pagaron $3 cada uno, mientras que quienes no eran estudiantes pagaron $7 cada uno. Si se recolectó un total de $1650, ¿cuántos estudiantes y cuántos no estudiantes asistieron?

54. ***Asistencia a un concierto*** Un total de 1100 personas asistieron al concierto de James Taylor. Los boletos de luneta costaron $40 cada uno, mientras que los boletos de galería costaban $28 cada uno. Si se recolectó un total de $41,600, ¿cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

55. ***Asistencia a un evento deportivo*** En el estadio de hockey de la liga menor local, los boletos de la fila 1 cuestan $35 cada uno y los boletos de la fila 2 cuestan $30 cada uno. Los 105 asientos de estas filas se vendieron para toda la temporada. Los ingresos totales fueron de $3420. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

56. ***Combinación de monedas*** En el siglo XIX, en Estados Unidos se acuñaron monedas de dos y tres centavos. Frances Steib tiene tres veces más monedas de tres centavos que monedas de dos centavos, y el valor nominal de estas monedas es de $1.76. ¿Cuántas monedas de cada denominación tiene?

57. ***Denominaciones de estampillas*** En mayo de 2009, el precio de los envíos en correo de primera clase en Estados Unidos se incrementó a 44 centavos por la primera onza, más 17 centavos por cada onza adicional. Si Sabrina gastó $17.45 por un total de 55 estampillas de estas dos denominaciones, ¿cuántas estampillas de cada denominación compró? (*Fuente:* Servicio Postal de Estados Unidos).

58. ***Precios de boletos para el cine*** Un cine tiene a la venta boletos de entrada de dos precios: $9 para adultos y $6 para niños. Si la taquilla obtuvo $4716 por la venta de 600 boletos, ¿cuántos boletos de cada clase se vendieron?

Use la fórmula $d = vt$ en los ejercicios 59 a 62.

59. ***Distancia entre ciudades*** Un pequeño avión viajó de Varsovia a Roma, a una velocidad promedio de 164 millas por hora. El viaje duró dos horas. ¿Cuál es la distancia de Varsovia a Roma?

60. ***Distancia entre ciudades*** Un conductor promedió 53 millas por hora durante 10 horas para viajar de Memphis a Chicago. ¿Cuál es la distancia entre Memphis y Chicago?

61. Suponga que un automóvil promedia una velocidad de 55 millas por hora, y viaja durante 30 minutos. ¿La distancia recorrida es $55 \cdot 30 = 1650$ millas? Si no, dé la respuesta correcta.

62. ¿Cuál de las siguientes opciones es la mejor *estimación* de velocidad promedio de un viaje de 350 millas que duró 6.8 horas?

A. 50 millas por hora **B.** 30 millas por hora
C. 60 millas por hora **D.** 40 millas por hora

Use el método del ***ejemplo 8*** *o su propio método para resolver los siguientes problemas.*

63. ***Tiempos de los viajes en tren*** Un tren sale de Little Rock, Arkansas, y viaja hacia el norte a 85 kilómetros por hora. Otro tren sale al mismo tiempo y viaja hacia el sur a 95 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que la distancia entre ellos sea de 315 kilómetros?

	Velocidad	Tiempo	Distancia
Primer tren	85	t	
Segundo tren			

64. ***Tiempos de viaje en barco de vapor*** Dos barcos de vapor zarpan del puerto fluvial al mismo tiempo, viajando en direcciones opuestas. Los dos barcos viajan a 22 millas por hora. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la distancia entre ellos sea de 110 millas?

	Velocidad	Tiempo	Distancia
Primer barco		t	
Segundo barco	22		

65. ***Tiempos de viaje al trabajo*** Nancy y Mark se dirigen al trabajo, viajando en direcciones opuestas. Nancy sale de su casa a las 9:00 A.M. a una velocidad promedio de 35 millas por hora. Mark sale a las 9:15 A.M. a una velocidad promedio de 40 millas por hora. ¿En cuánto tiempo la distancia entre ellos será de 140 millas?

66. ***Tiempos de viaje de ciclistas*** Jeff sale de su casa en bicicleta a las 7:30 A.M. y promedia 5 millas por hora. Su esposa Joan, sale a las 8:00 A.M., en la misma trayectoria, y promedia 8 millas por hora. ¿En qué tiempo alcanzará Joan a Jeff?

67. ***Tiempo de viaje en un barco turístico*** Un barco turístico viaja por el río Mississippi de New Roads, LA, a Nueva Orleans, haciendo una parada en White Castle. Durante la primera parte del recorrido, el barco viajó a una velocidad promedio de 10 millas por hora. De White Castle a Nueva Orleans, la velocidad promedio fue de 15 millas por hora. El recorrido total fue de 100 millas. ¿Cuál fue la duración total del viaje si cada una de las dos partes del viaje duró el mismo número de horas?

68. ***Tiempo de viaje para encontrarse*** Steve salió de Nashville para visitar a su primo David en Napa, a 80 millas de distancia. Viajó a una velocidad promedio de 50 millas por hora. Media hora más tarde, David sale para visitar a Steve, viajando a una velocidad promedio de 60 millas por hora. ¿Cuánto tiempo después de la salida de David se encuentran?

69. ***Distancia recorrida al trabajo*** Cuando Glen Spencer conduce su automóvil al trabajo, el trayecto dura 30 minutos. Cuando toma el autobús, el trayecto tarda 45 minutos. La velocidad promedio del autobús es de 12 millas por hora menos que cuando conduce. Calcule la distancia que recorre hacia el trabajo.

70. ***Distancia recorrida a la escuela*** Theresa Stevens puede llegar a la escuela en 15 minutos si usa su bicicleta. Si camina, tarda 45 minutos. Cuando camina, su velocidad es de 10 millas por hora menos que su velocidad en bicicleta. ¿Qué distancia recorre hacia la escuela?

Carrera de automóviles *En los ejercicios 71 a 74, calcule el tiempo. Use una calculadora y redondee sus respuestas a la milésima más cercana. (Fuente: The World Almanac and Book of Facts.*

	Evento y año	Participante	Distancia	Velocidad
71.	Indianápolis 500, 2009	Helio Castroneves (Honda)	500 millas	150.318 mph
72.	Daytona 500, 2009	Matt Kenseth (Ford)	500 millas	132.816 mph
73.	Indianápolis 500, 1980	Johnny Rutherford (Hy-Gain McLaren/Goodyear)	255 millas*	148.725 mph
74.	Indianápolis 500, 1975	Bobby Unser (Jorgensen Eagle)	435 millas*	149.213 mph

*Suspendido por lluvia

Resultados olímpicos *En los ejercicios 75 a 78, calcule la velocidad. Use una calculadora y redondee sus respuestas a la centésima más cercana. Todas las competencias se realizaron en los Juegos Olímpicos de Beijing 2008. (Fuente: The World Almanac and Book of Facts).*

	Evento	Participante	Distancia	Tiempo
75.	100 metros con vallas, femenil	Dawn Harper, USA	100 metros	12.54 segundos
76.	400 metros con vallas, femenil	Melanie Walker, Jamaica	400 metros	52.64 segundos
77.	400 metros con vallas, varonil	Angelo Taylor, USA	400 metros	47.25 segundos
78.	carrera de 400 metros, varonil	LaShawn Merritt, USA	400 metros	43.75 segundos

6.3 RAZÓN, PROPORCIÓN Y VARIACIÓN

Escritura de razones • Precio unitario • Solución de proporciones • Variación directa • Variación inversa • Variación conjunta y combinada

Escritura de razones



En la primera temporada (1960) de ***El Show de Andy Griffith***, en el episodio "Opie's Charity" se presenta una conversación entre Opie y Andy, durante la cual este último explica a Opie que su donación de tres centavos en la escuela para los niños desamparados era una "cantidad insignificante".

ANDY: Estaba leyendo el otro día que hay algo así como 400 niños necesitados solo en este condado, es decir, uno y medio niños por milla cuadrada.

OPIE: ¿De verdad?

ANDY: Así es.

OPIE: Nunca he visto uno, papá.

ANDY: ¿Nunca has visto un qué?

OPIE: Un medio niño.

ANDY: Bueno, no se trata exactamente de medio niño, es *una razón*.

OPIE: ¿Horacio qué?

ANDY: *Horacio* no, una razón. Son matemáticas. Aritmética. Mira Opie, solo olvida la parte del niño. Olvida la parte de la mitad de niño.

OPIE: Es muy difícil olvidar una cosa como esa, papá.

ANDY: Bueno, inténtalo.

OPIE: Pobre Horacio.

Uno de los conceptos matemáticos que se usan con más frecuencia en la vida diaria es la *razón*. El promedio de bateo de un jugador de béisbol es en realidad una razón. La pendiente del techo de un edificio se expresa como una razón. Las razones expresan un modo de comparación entre dos números o cantidades.

Razón

Una **razón** es el cociente de dos cantidades. La razón entre el número a y el número b se escribe como

$$a \text{ a } b, \quad \frac{a}{b} \quad \text{o} \quad a:b.$$

Cuando se usan razones para comparar unidades de medida, las unidades deben ser homogéneas.

EJEMPLO 1 Escritura de razones

Escriba una razón para cada frase.

a) 5 horas a 3 horas ***b)*** 6 horas a 3 días

SOLUCIÓN

a) La razón de 5 horas a 3 horas es

$$\frac{5 \text{ hr}}{3 \text{ hr}} = \frac{5}{3}.$$

La razón es 5 a 3.

b) Para obtener la razón de 6 horas a 3 días, primero se convierten los 3 días a horas.

$$3 \text{ días} = 3 \text{ días} \cdot \frac{24 \text{ hr}}{1 \text{ día}} = 72 \text{ hr}$$

La razón de 6 horas a 3 días se obtiene como sigue.

$$\frac{6 \text{ hr}}{3 \text{ días}} = \frac{6 \text{ hr}}{72 \text{ hr}} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$$

La razón es 1 a 12.

Precio unitario

Las razones se pueden aplicar a los precios unitarios para ver qué presentación de un artículo que se comercializa en diferentes tamaños tiene el mejor precio por unidad. Para hacer esto, se define la razón entre el precio del artículo y el número de unidades indicado en la etiqueta. Luego se divide para obtener el precio por unidad.

EJEMPLO 2 Obtención del precio unitario

Un supermercado cobra lo siguiente por un frasco de mantequilla de maní (cacahuate).

Mantequilla de maní

Tamaño	Precio
18 oz	$1.78
28 oz	$2.97
40 oz	$3.98



¿Qué presentación del artículo es la mejor compra? Es decir, ¿qué tamaño tiene el precio unitario más bajo?

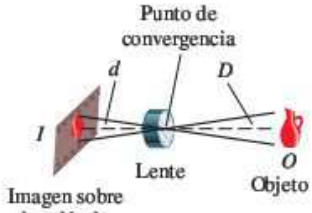
SOLUCIÓN

Se escriben las razones entre los precios de cada tamaño y el número de unidades (onzas) por frasco. Los resultados de la **tabla 2** están redondeados a la milésima más próxima.

Tabla 2

Tamaño	Costo unitario (dólares por onza)
18 oz	$\frac{\$1.78}{18} = \$0.099$ ← La mejor compra
28 oz	$\frac{\$2.97}{28} = \$0.106$
40 oz	$\frac{\$3.98}{40} = \$0.100$

Como el tamaño de 18 onzas tiene el precio unitario más bajo, esta es la mejor opción. De modo que, la compra del tamaño más grande no siempre garantiza la mejor compra. ■■■



Cuando usted observa un gran trecho de un camino en línea recta, o las vías de un ferrocarril, parece que se angostan conforme se desvanecen en la distancia. El punto donde los lados parecen tocarse se conoce como **punto de convergencia**.

Lo mismo ocurre con las lentes de una cámara, como se muestra en la figura. Suponga que I representa la longitud de la imagen, O la longitud del objeto, d la distancia de la lente a la película, y D la distancia de la lente al objeto.

$$\frac{\text{Longitud de la imagen}}{\text{Longitud del objeto}} = \frac{\text{Distancia a la imagen}}{\text{Distancia al objeto}}$$

o

$$\frac{I}{O} = \frac{d}{D}$$

Dada la longitud de la imagen proyectada en la película y su distancia a la lente, la longitud del objeto determina la distancia a la que debe ubicarse la lente respecto del objeto.

Solución de proporciones

Proporción

Una **proporción** es un enunciado que dice que dos razones son iguales.

Por ejemplo, $$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$ Proporción

es una proporción que señala que las razones $\frac{3}{4}$ y $\frac{15}{20}$ son iguales. En la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (b, d \neq 0),$$

a, b, c y d son los **términos** de la proporción. Los términos a y d se conocen como **extremos**, mientras que los términos b y c se conocen como **medios**. La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se lee como "a es a b como c es a d". Se multiplica cada lado de la proporción por el denominador común, bd.



En la película *Little Big League* (1994), el joven Billy Heywood (Luke Edwards) hereda el equipo de béisbol los Twins de Minnesota y se convierte en su entrenador. Antes del juego más importante del año, no puede mantener la mente en su trabajo, porque un problema de su tarea le está dando problemas.

Si Joe pinta una casa en 3 horas, y Sam la puede pintar en 5 horas, ¿cuánto tiempo les tomará hacerlo juntos?

Uno de sus jugadores brinda un método para resolver el problema, donde a y b son los tiempos individuales. Él dice que la expresión $\frac{a \times b}{a + b}$ da la respuesta correcta. Sustituyendo $a = 5$ y $b = 3$, la respuesta que se obtiene es

$$\frac{5 \times 3}{5 + 3} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} \text{ horas.}$$

La expresión del jugador y la respuesta son correctas. Suponga que a y b son los tiempos individuales. Luego, el trabajo por hora de los jugadores es $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$. Multiplicando el trabajo por hora por el tiempo trabajado se obtiene la parte fraccionaria del trabajo ejecutado por cada jugador. Sea x el tiempo que deben laborar juntos para terminar el trabajo por completo.

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}x = 1$$
Ecuación lineal

$$ab\left(\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}x\right) = ab \cdot 1$$
Se multiplica por ab.

$$bx + ax = ab$$
Propiedad distributiva

$$x(a + b) = ab$$
Propiedad distributiva

$$x = \frac{ab}{a + b}$$
Se divide entre $a + b$.

$$bd \cdot \frac{a}{b} = bd \cdot \frac{c}{d}$$ Se multiplica cada lado por bd.

$$\frac{b}{b}(d \cdot a) = \frac{d}{d}(b \cdot c)$$ Propiedades asociativa y conmutativa

$$ad = bc$$ Propiedades conmutativa y de identidad

Los productos ad y bc también se pueden obtener multiplicando diagonalmente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad bc, \; ad$$

Por esta razón, ad y bc se conocen como **productos cruzados**.

Productos cruzados

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces los productos ad y bc son iguales.

Además, si $ad = bc$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (siempre y cuando $b \neq 0, d \neq 0$).

Para que una proporción sea verdadera, el producto de los extremos debe ser igual al producto de los medios. Si $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, entonces $ad = cb$, o $ad = bc$. Esto significa que estas dos proporciones correspondientes son equivalentes:

La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ también se puede escribir como $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ $(c \neq 0)$.

Algunas veces es más conveniente trabajar con una forma que con la otra.

EJEMPLO 3 Solución de proporciones

Resuelva la proporción $\frac{x}{63} = \frac{5}{9}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{x}{63} = \frac{5}{9}$$

$$9x = 63 \cdot 5$$ Se igualan los productos cruzados.

$$9x = 315$$ Se multiplica.

$$x = 35$$ Se divide entre 9.

El conjunto solución es {35}. ▮▮▮

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación usando productos cruzados

Resuelva $\frac{x - 2}{5} = \frac{x + 1}{3}$.

SOLUCIÓN

Se obtienen los productos cruzados y se igualan uno con otro.

Asegúrese de usar paréntesis

$$\begin{aligned} 3(x-2) &= 5(x+1) && \text{Productos cruzados} \\ 3x-6 &= 5x+5 && \text{Propiedad distributiva} \\ 3x &= 5x+11 && \text{Se suma 6.} \\ -2x &= 11 && \text{Se resta 5x.} \\ x &= -\frac{11}{2} && \text{Se divide entre −2.} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{11}{2}\right\}$. ■■■

EJEMPLO 5 Uso de una proporción para pronosticar una población



Unos biólogos atraparon una muestra de peces en un lago y marcaron cada espécimen con una etiqueta inofensiva. Luego, atraparon otra muestra similar de peces de las mismas áreas del lago y determinaron la proporción de los peces atrapados anteriormente presentes en la nueva muestra. La población total de peces se estimó suponiendo que la proporción de peces etiquetados originalmente en la nueva muestra es la misma que la proporción de peces etiquetados en el lago completo.

Suponga que los biólogos etiquetan 300 peces el 1 de mayo. Cuando regresan el 1 de junio y toman una nueva muestra de 400 peces, encuentran 5 de los 400 que fueron etiquetados anteriormente. Estime el número de peces en el lago.

SOLUCIÓN

Sea x el número de peces en el lago. Se establece y se resuelve una proporción.

Peces etiquetados el 1 de mayo → $\frac{300}{x} = \frac{5}{400}$ ← Muestra de peces etiquetados el 1 de junio
Total de peces en el lago → ← Número total de la muestra el 1 de junio

$$\begin{aligned} 5x &= 120{,}000 && \text{Productos cruzados} \\ x &= 24{,}000 && \text{Se divide entre 5.} \end{aligned}$$

Con base en este procedimiento de muestreo, existen aproximadamente 24,000 peces en el lago. ■■■

Variación directa

Suponga que un servicio de limpieza de alfombras cobra $49.99 por lavar la alfombra de una habitación. La **tabla 3** muestra la relación entre el número de habitaciones aseadas y el costo del trabajo completo de 1 a 5 habitaciones.

Tabla 3

Número de habitaciones	Costo del trabajo
1	$ 49.99
2	$ 99.98
3	$149.97
4	$199.96
5	$249.95

Si dividimos el costo del trabajo entre el número de habitaciones, en cada caso se obtiene el cociente, o razón, igual a 49.99 (dólares por habitación). Suponga que x representa el número de habitaciones y y representa el costo de la limpieza de ese número de habitaciones. Entonces, la relación entre x y y está dada por la ecuación

$$\frac{y}{x} = 49.99, \quad \text{o} \quad y = 49.99x.$$

Esta relación entre x y y es un ejemplo de *variación directa*.

Variación directa

y varía directamente en relación con x, o **y es directamente proporcional a x**, si existe una constante k diferente de cero tal que

$$y = kx, \quad \text{o, de manera equivalente,} \quad \frac{y}{x} = k.$$

La constante k es un valor numérico conocido como la **constante de variación.**

EJEMPLO 6 Solución de un problema de variación directa

Otro modo de pensar
En el **ejemplo 6**, como la razón de y a x es constante, la ecuación se puede escribir simplemente como

$$\frac{50}{20} = \frac{y}{14}$$

y resolverse despejando y.

Suponga que y varía directamente con respecto a x, y que $y = 50$ cuando $x = 20$. Calcule y cuando $x = 14$.

SOLUCIÓN

Como y varía directamente en relación con x, existe una constante k tal que $y = kx$. Se obtiene k sustituyendo y por 50 y x por 20.

$$y = kx \qquad \text{Ecuación de variación}$$
$$50 = k \cdot 20 \qquad \text{Se sustituyen los valores dados.}$$
$$\frac{5}{2} = k \qquad \text{Se divide entre 20. Se expresa en términos simplificados.}$$

Como $y = kx$ y $k = \frac{5}{2}$,

$$y = \frac{5}{2}x.$$

Ahora calculamos y cuando $x = 14$.

$$y = \frac{5}{2} \cdot 14 = 35$$

El valor de y es igual a 35 cuando $x = 14$. ■■■

EJEMPLO 7 Solución de un problema de variación directa

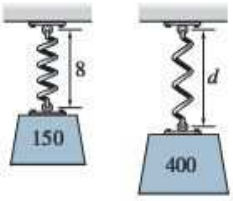


Figura 5

La ley de Hooke para un resorte elástico establece que la distancia que se estira un resorte es directamente proporcional a la fuerza aplicada. Si una fuerza de 150 libras estira un resorte 8 centímetros, ¿cuánto alargará el resorte una fuerza de 400 libras? Véase la **figura 5**.

SOLUCIÓN

Si d es la distancia que se alarga el resorte, y f es la fuerza aplicada, entonces $d = kf$ para una constante k.

$$d = kf \qquad \text{Ecuación de variación}$$
$$8 = k \cdot 150 \qquad \text{Sea } d = 8 \text{ y } f = 150.$$
$$k = \frac{8}{150} = \frac{4}{75} \qquad \text{Se calcula } k.$$

Por lo tanto, $d = \frac{4}{75}f$.

Para una fuerza de 400 libras,

$$d = \frac{4}{75}(400) = \frac{64}{3}. \qquad \text{Sea } f = 400.$$

El resorte se estirará $\frac{64}{3}$ centímetros si se aplica una fuerza de 400 libras. ■■■

Solución de un problema de variación

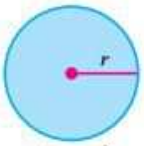
Paso 1 Escriba la ecuación de variación.
Paso 2 Sustituya los valores iniciales y despeje k.
Paso 3 Rescriba la ecuación de variación con el valor de k obtenido en el paso 2.
Paso 4 Sustituya los valores restantes, despeje la incógnita y obtenga la respuesta requerida.

En algunos casos una cantidad variará directamente en relación con una *potencia* de otra.

Variación directa en relación con una potencia

y* varía directamente en relación con la *n*-ésima potencia de *x si existe un número real k diferente de cero, tal que

$$y = kx^n.$$



$\mathcal{A} = \pi r^2$

Figura 6

Un ejemplo de variación directa en relación con una potencia es el área de un círculo. Véase la **figura 6**. La fórmula del área de un círculo es $\mathcal{A} = \pi r^2$. Aquí, π es la constante de variación, y el área $\mathcal{A}$ varía directamente en relación con el cuadrado del radio r.

EJEMPLO 8 Solución de un problema de variación directa



La distancia que cae un cuerpo partiendo del reposo varía directamente con el cuadrado del tiempo transcurrido (aquí se ignora la resistencia del aire). Si un paracaidista de caída libre cae 64 pies en 2 segundos, ¿qué distancia caerá en 8 segundos?

SOLUCIÓN

Paso 1 Si d representa la distancia que cae el paracaidista y t el tiempo de la caída, entonces d es una función de t, y para una constante k, $d = kt^2$.

Paso 2 Para calcular el valor de k, se considera el hecho de que el paracaidista cae 64 pies en 2 segundos.

$$\begin{aligned} d &= kt^2 && \text{Fórmula} \\ 64 &= k(2)^2 && \text{Sea } d = 64 \text{ y } t = 2. \\ k &= 16 && \text{Se calcula } k. \end{aligned}$$

Paso 3 Con este resultado, la ecuación de variación se convierte en

$$d = 16t^2.$$

Paso 4 Ahora sea $t = 8$ para calcular el número de pies que el paracaidista caerá en 8 segundos.

$$d = 16t^2 = 16(8)^2 = 1024 \quad \text{Sea } t = 8.$$

$8^2 = 8 \cdot 8 = 64$

El paracaidista caerá 1024 pies en 8 segundos. ■■■

Variación inversa

En variación directa donde $k > 0$, cuando x se incrementa, y se incrementa; de manera similar, cuando x disminuye, y disminuye. Otro tipo de variación es la *variación inversa*.

Variación inversa

y* varía inversamente en relación con *x si existe un número real k diferente de cero tal que

$$y = \frac{k}{x}, \quad \text{o, de manera equivalente,} \quad xy = k.$$

Además, ***y* varía inversamente respecto de la *n*-ésima potencia de *x*** si existe un número real k diferente de cero tal que

$$y = \frac{k}{x^n}.$$

Johannes Kepler (1571-1630) estableció la importancia de la elipse en 1609, cuando descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del Sol eran elípticas, y no circulares.

El cometa Halley, que se ha estudiado desde el año 467 a. C., tiene una órbita elíptica, la cual es larga y angosta, con uno de sus ejes mucho más largo que el otro. Este cometa fue llamado así en honor del astrónomo y matemático británico **Edmund Halley** (1656-1742), quien predijo su regreso después de observarlo en 1682. El cometa aparece regularmente cada 76 años.

EJEMPLO 9 Solución de un problema de variación inversa

El peso de un objeto sobre la Tierra varía inversamente con el cuadrado de su distancia al centro de la Tierra. Un vehículo espacial en una órbita elíptica tiene una distancia máxima al centro de la Tierra (apogeo) de 6700 millas. Su distancia mínima al centro de la Tierra (perigeo) es de 4090 millas. Véase la **figura 7** (no está a escala). Si un astronauta en el vehículo pesa 57 libras cuando se encuentra en el apogeo, ¿cuánto pesará el astronauta en el perigeo?

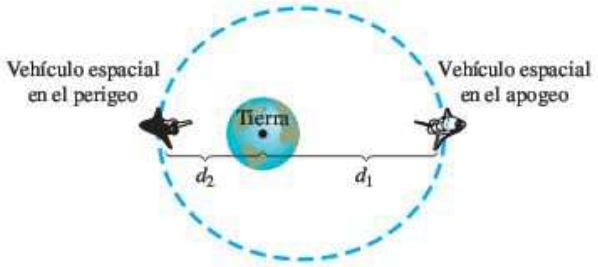


Figura 7

SOLUCIÓN

Si w es el peso y d es la distancia al centro de la Tierra, entonces

$$w = \frac{k}{d^2}, \quad \text{para una constante } k \text{ determinada.}$$

En el apogeo, el astronauta pesa 57 libras, y la distancia al centro de la Tierra es de 6700 millas. Se usan estos valores para obtener k.

$$57 = \frac{k}{(6700)^2} \qquad \text{Sea } w = 57 \text{ y } d = 6700.$$

$$k = 57(6700)^2 \qquad \text{Se multiplica por } (6700)^2. \text{ Se escribe nuevamente.}$$

Entonces, el peso en el perigeo con $d = 4090$ millas es

$$w = \frac{57(6700)^2}{(4090)^2} \approx 153 \text{ libras.} \qquad \text{Use una calculadora.}$$

Variación conjunta y combinada

Si una variable cambia en relación con el producto de algunas otras variables (quizás elevadas a potencias), se dice que la primera variable **varía conjuntamente** con las otras.

EJEMPLO 10 Solución de un problema de variación conjunta

La resistencia de una viga rectangular varía conjuntamente con el ancho y el cuadrado de su longitud. Si la resistencia de una viga de 2 pulgadas de ancho y 10 pulgadas de longitud es de 1000 libras por pulgada cuadrada, ¿cuál es la resistencia de una viga de 4 pulgadas de ancho y 8 pulgadas de longitud?

SOLUCIÓN

Si S representa la resistencia, w el ancho, y d la longitud, entonces, para una constante k determinada, $S = kwd^2$.

$$S = kwd^2 \qquad 10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$1000 = k(2)(10)^2 \qquad \text{Sea } S = 1000, w = 2, \text{ y } d = 10.$$

$$1000 = 200k \qquad \text{Se desarrolla el exponente. Se multiplica.}$$

$$k = 5 \qquad \text{Se divide entre 200. Se escribe nuevamente.}$$

Por lo tanto, $S = 5wd^2$. Se calcula S para $w = 4$ y $d = 8$ por sustitución.

$$S = 5(4)(8)^2 = 1280 \quad \text{Sea } w = 4 \text{ y } d = 8.$$

La resistencia de la viga es de 1280 libras por pulgada cuadrada.

Los problemas de **variación combinada** implican combinaciones de variación directa e inversa.

EJEMPLO 11 Solución de un problema de variación combinada



Grady Sizemore

Los médicos utilizan el índice de masa corporal, o IMC, para evaluar el nivel de grasa en las personas. El IMC varía directamente con el peso en libras de un individuo e inversamente con el cuadrado de la estatura en pulgadas del individuo. Una persona que pesa 118 libras y mide 64 pulgadas tiene un IMC de 20.25. (El IMC normalmente se redondea al número entero más próximo). Grady Sizemore de los Indios de Cleveland pesa 200 libras y mide 6 pies, 2 pulgadas de estatura. Obtenga su IMC. (*Fuente: Washington Post;* www.mlb.com).

SOLUCIÓN

Considere que B representa el IMC, w el peso, y h la altura. Use la información proporcionada para determinar k.

$$B = \frac{kw}{h^2}$$ El IMC varía directamente con el peso. El IMC varía inversamente con el cuadrado de la estatura.

$$20.25 = \frac{k(118)}{64^2}$$ Sean $B = 20.25$, $w = 118$ y $h = 64$.

$$k = \frac{20.25(64^2)}{118}$$ Se multiplica por 64^2. Se divide entre 118.

$$k \approx 703$$ Use una calculadora.

Para Sizemore, se usa $k = 703$, $w = 200$ y $h = (6 \times 12) + 2 = 74$, para obtener B.

$$B = \frac{703(200)}{74^2} \approx 25.68 \approx 26$$ Entero más próximo.

El IMC de Grady es igual a 26. ■■■

6.3 EJERCICIOS

Determine la razón y escríbala con términos simplificados.

1. 50 pies a 80 pies.

2. 12 millas a 36 millas.

3. 17 dólares a 68 dólares.

4. 600 personas a 500 personas.

5. 288 pulgadas a 12 pies.

6. 60 pulgadas a 2 yardas.

7. 5 días a 40 horas.

8. 75 minutos a 4 horas.

9. ¿Qué razón es diferente de la razón 2 a 5?
A. 0.4 **B.** 4 a 10 **C.** 20 a 50 **D.** 5 a 2

10. Dé tres razones que sean equivalentes a la razón 4 a 3.

11. Explique la diferencia entre *razón* y *proporción*. Dé ejemplos.

12. Suponga que alguien le dice que use productos cruzados para multiplicar fracciones. ¿Cómo explicaría usted a esa persona que está equivocada en su planteamiento?

Determine si las proporciones siguientes son verdaderas *o* falsas.

13. $\frac{5}{35} = \frac{8}{56}$

14. $\frac{4}{12} = \frac{7}{21}$

15. $\frac{120}{82} = \frac{7}{10}$

16. $\frac{27}{160} = \frac{18}{110}$

17. $\frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10}$

18. $\frac{\frac{1}{3}}{6} = \frac{1}{18}$

Resuelva las siguientes ecuaciones.

19. $\frac{x}{4} = \frac{175}{20}$

20. $\frac{49}{56} = \frac{x}{8}$

21. $\frac{3x - 2}{5} = \frac{6x - 5}{11}$

22. $\frac{5 + x}{3} = \frac{x + 7}{5}$

23. $\frac{3x + 1}{7} = \frac{2x - 3}{6}$

24. $\frac{2x + 7}{3} = \frac{x - 1}{4}$

Resuelva cada problema. En los ejercicios 25 a 31, suponga que todos los artículos tienen el mismo precio.

25. ***Precio de caramelos*** Si 16 caramelos cuestan $20.00, ¿cuánto cuestan 24?

26. ***Precio de tonos de llamada*** Si 12 tonos de llamadas telefónicas cuestan $30.00, ¿cuánto cuestan 8 tonos?

27. ***Precio del aceite*** Ocho cuartos de aceite cuestan $14.00. ¿Cuánto cuestan 5 cuartos?

28. ***Precio de neumáticos*** Cuatro neumáticos cuestan $398.00 ¿Cuánto cuestan 7?

29. ***Precio de jeans*** Si 9 *jeans* cuestan $121.50, determine el costo de 5 *jeans*.

30. ***Precio de camisas*** Si 7 camisas cuestan $87.50, determine el costo de 11 camisas.

31. ***Precio de la gasolina*** Si 6 galones de gasolina Premium sin plomo cuestan $17.82, ¿cuánto cuesta llenar totalmente un tanque de gasolina de 15 galones?

32. ***Impuesto sobre ventas*** Si el impuesto sobre ventas de un DVD de $16.00 es $1.40, ¿a cuánto ascendería el impuesto sobre ventas de un reproductor Blu-ray de $120.00?

33. ***Distancia entre ciudades*** La distancia entre la ciudad de Kansas, Missouri, y Denver es de 600 millas. En un mapa, esto se representa por la longitud de 2.4 pies. Sobre el mapa, ¿cuántos pies habría entre Memphis y Filadelfia, dos ciudades que en realidad se encuentran a una distancia de 1000 millas?

34. ***Distancia entre ciudades*** La distancia entre Singapur y Tokio es de 3300 millas. En un mapa, esta distancia se representa por 11 pulgadas. La distancia real entre la Ciudad de México y el Cairo es de 7700 millas. ¿Qué tan separadas están en el mismo mapa?

35. ***Distancia entre ciudades*** Un mapa de Estados Unidos tiene una distancia de 8.5 pulgadas entre Memphis y Denver, dos ciudades que en realidad se encuentran a 1040 millas una de otra. La distancia real entre Saint Louis y Des Moines es de 333 millas. ¿Qué distancia están separadas Saint Louis y Des Moines en el mapa?

36. ***Distancia entre ciudades*** Un mapa de Estados Unidos tiene una distancia de 8.0 pulgadas entre Nueva Orleans y Chicago, dos ciudades que en realidad se encuentran a 912 millas una de otra. La distancia real entre las ciudades de Milwaukee y Seattle es de 1940 millas. ¿Qué distancia están separadas Milwaukee y Seattle en el mapa?

37. ***Distancia entre ciudades*** En un globo terráqueo, la distancia entre Ciudad del Cabo y Bangkok, dos ciudades que en realidad se encuentran a 10,080 kilómetros una de otra, es de 12.4 pulgadas. La distancia real entre Moscú y Berlín es de 1610 kilómetros. ¿A qué distancia se encuentran Moscú y Berlín en el globo?



38. ***Distancia entre ciudades*** En un globo terráqueo, la distancia entre Río de Janeiro y Hong Kong, dos ciudades que en realidad se encuentran a 17,615 kilómetros una de otra, es de 21.5 pulgadas. La distancia real entre París y Estocolmo es de 1605 kilómetros. ¿A qué distancia se encuentran París y Estocolmo en el globo?

39. ***Mezcla para limpieza*** De acuerdo con las instrucciones en un envase del limpiador de pisos concentrado Armstrong®, para limpieza de rutina, se debe mezclar $\frac{1}{4}$ de taza de limpiador con 1 galón de agua tibia. ¿Qué cantidad de limpiador se debe mezclar con $10\frac{1}{2}$ galones de agua?

40. ***Mezcla para limpieza*** Las instrucciones del envase mencionado en el **ejercicio 39** también especifican que para limpieza profunda, se debe usar $\frac{1}{2}$ taza de limpiador por cada galón de agua. Para limpieza profunda, ¿cuánto limpiador se debe mezclar con $15\frac{1}{2}$ galones de agua?

41. ***Tasa de cambio (dólares y euros)*** El euro es la divisa común que se usa en la mayoría de los países europeos, incluyendo Italia. El 15 de agosto de 2009, la tasa de cambio entre euros y dólares estadounidenses era de 1 euro por $1.4294. Ashley viajó a Roma y cambió sus divisas estadounidenses por euros, recibiendo 300 euros. ¿Cuantos dólares cambió? (*Fuente:* www.xe.com/ucc).

42. ***Tasa de cambio (Estados Unidos y México)*** Si se pueden cambiar 8 dólares estadounidenses por 103.0 pesos mexicanos, ¿cuántos pesos, redondeados a la centésima más próxima, se pueden obtener por 65 dólares?

43. ***Marcando peces para estimar la población*** Biólogos de Luisiana marcaron 250 peces en un recodo del Río Falso el 5 de octubre. En una fecha posterior, encontraron 7 peces marcados en una muestra de 350 peces. Estime el número total de peces en el Río Falso, redondeando a la centena más próxima.



44. ***Marcando peces para estimar la población*** El 13 de mayo, unos investigadores marcaron 420 peces en el Lago Spirit. Cuando regresaron unas cuantas semanas después, su muestra de 500 peces contenía 9 que fueron marcados en mayo. Dé una aproximación de la población de peces en el Lago Spirit, redondeando a la centena más cercana.

Precio de mercancía *Se investigó un supermercado para obtener los precios cobrados por artículos de varios tamaños. Determine la mejor compra (con base en el precio unitario) de cada artículo.*

45. **Azúcar granulada**

Tamaño	Precio
4 lb	$1.79
10 lb	$4.29

46. **Café orgánico**

Tamaño	Precio
15 oz	$3.43
34.5 oz	$6.98

47. **Aderezo para ensalada**

Tamaño	Precio
16 oz	$2.44
32 oz	$2.98
48 oz	$4.95

48. **Pimienta negra**

Tamaño	Precio
2 oz	$2.23
4 oz	$2.49
8 oz	$6.59

49. **Aceite vegetal**

Tamaño	Precio
16 oz	$1.66
32 oz	$2.59
64 oz	$4.29
128 oz	$6.49

50. **Enjuague bucal**

Tamaño	Precio
8.5 oz	$0.99
16.9 oz	$1.87
33.8 oz	$2.49
50.7 oz	$2.99

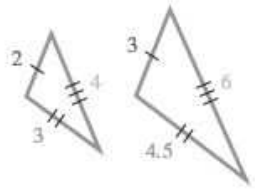
51. **Salsa de tomate**

Tamaño	Precio
14 oz	$1.39
24 oz	$1.55
36 oz	$1.78
64 oz	$3.99

52. **Jalea de uva**

Tamaño	Precio
12 oz	$1.05
18 oz	$1.73
32 oz	$1.84
48 oz	$2.88

Dos triángulos son ***semejantes*** *si tienen la misma forma (pero no necesariamente el mismo tamaño). Los triángulos semejantes tienen lados que son proporcionales. La figura muestra dos triángulos semejantes.*

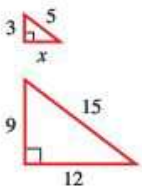


Observe que las razones de los lados correspondientes son iguales a $\frac{3}{2}$*:*

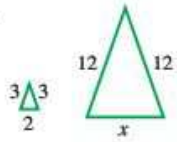
$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \qquad \frac{4.5}{3} = \frac{3}{2} \qquad \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Si sabemos que dos triángulos son semejantes, podemos establecer una proporción para obtener la longitud de un lado desconocido. Use una proporción para obtener las longitudes x y y, considerando que los triángulos son semejantes.

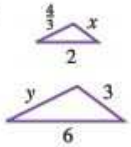
53.



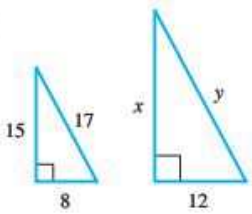
54.



55.



56.



En los problemas de los ejercicios 57 y 58, ***a)*** *elabore un dibujo de dos triángulos rectángulos, reflejando la situación descrita y* ***b)*** *resuelva el problema. (Fuente: Guiness World Records).*

57. ***Silla de George Washington*** Una versión ampliada de la silla usada por George Washington en la Convención Constitucionalista proyecta una sombra de 18 pies de longitud al mismo tiempo que un poste vertical de 12 pies de alto proyecta una sombra de 4 pies de longitud. ¿Qué altura tiene la silla?

58. ***Exhibición de un candil*** Uno de los candiles más altos construidos fue exhibido en la Feria de Estocolmo en 1897. Si proyecta una sombra de 5 pies de longitud, al mismo tiempo que un poste vertical de 32 pies de alto proyecta una sombra de 2 pies de longitud, ¿qué altura tiene el candil?

Índice de precios al consumidor *El Índice de precios al consumidor, publicado por la U.S. Bureau of Labor Statistics, es un medio para determinar el poder de compra del dólar estadounidense de un año al siguiente. A continuación se muestra el Índice de precios al consumidor para los años de 1995 a 2007, usando el periodo de 1982 a 1984 como medida de 100.0.*

Año	Índice de precios al consumidor
1995	152.4
1997	160.5
1999	166.6
2001	177.1
2003	184.0
2005	195.3
2007	207.3

Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics.

Para usar el Índice de precios al consumidor con la finalidad de pronosticar un precio en un año determinado, podemos establecer una proporción y compararla con un precio conocido de otro año, como se muestra a continuación:

$$\frac{\text{Precio en el año } A}{\text{Índice en el año } A} = \frac{\text{Precio en el año } B}{\text{Índice en el año } B}.$$

Use las cifras de la tabla del Índice de precios al consumidor para calcular la cantidad que se cobraría por el consumo de la misma cantidad de electricidad que costaba $225 en 1995. Redondee su respuesta al dólar más cercano.

59. En 1997

60. En 1999

61. En 2003

62. En 2007

Resuelva los siguientes problemas, los cuales implican variación.

63. Si x varía directamente respecto de y, y $x = 27$ cuando $y = 6$, obtenga x cuando $y = 2$.

64. Si z varía directamente respecto de x, y $z = 30$ cuando $x = 8$, obtenga z cuando $x = 4$.

65. Si m varía directamente respecto de p^2, y $m = 20$ cuando $p = 2$, obtenga m cuando $p = 5$.

66. Si a varía directamente respecto de b^2, y $a = 48$ cuando $b = 4$, obtenga a cuando $b = 7$.

67. Si p varía inversamente respecto de q^2, y $p = 4$ cuando $q = \frac{1}{2}$,, obtenga p cuando $q = \frac{3}{2}$.

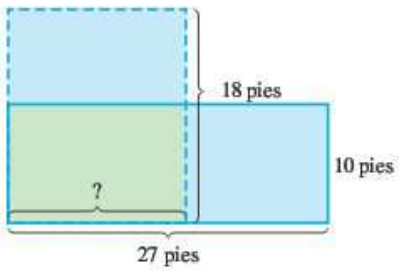
68. Si z varía inversamente respecto de x^2, y $z = 9$ cuando $x = \frac{2}{3}$, obtenga z cuando $x = \frac{5}{4}$.

69. ***Interés de una inversión*** El interés de una inversión varía directamente con la tasa de interés. Si el interés es igual a $48 cuando la tasa de interés es del 5%, obtenga el interés cuando la tasa es del 4.2%.

70. ***Área de un triángulo*** Para una base de longitud constante, el área de un triángulo varía directamente con su altura. Calcule el área de un triángulo que tiene una altura de 6 pulgadas, si el área es igual a 10 pulgadas cuadradas cuando la altura es de 4 pulgadas.

71. ***Velocidad de un automóvil*** En una distancia específica, la velocidad varía inversamente con el tiempo. Si un automóvil viaja cierta distancia en media hora a 30 millas por hora, ¿qué velocidad se necesita para recorrer la misma distancia en tres cuartos de hora?

72. ***Longitud de un rectángulo*** Para una área constante, la longitud de un rectángulo varía inversamente en relación con su ancho. La longitud de un rectángulo es de 27 pies, cuando el ancho es de 10 pies. Calcule la longitud de un rectángulo con la misma área si el ancho es de 18 pies.



73. ***Peso de un alce*** El peso de un objeto sobre la Luna varía directamente respecto del peso del objeto sobre la Tierra. De acuerdo con el *Libro de Récords Guiness*, "Shad", una cabra perteneciente a una pareja de California, pesa 352 libras. Shad pesaría alrededor de 59 libras en la Luna. Un alce que pesaba 1800 libras fue cazado en Canadá. ¿Cuánto habría pesado el alce en la Luna?

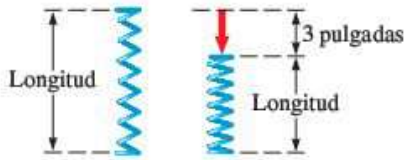
74. ***Viaje en un bote con pedales*** De acuerdo con el *Libro de Récords Guiness*, el viaje más largo registrado en un bote con pedales es de 2226 millas en 103 días, usando la fuerza de los pies de dos personas, río abajo en el Mississippi. Suponiendo una velocidad constante, ¿qué distancia habrían recorrido si hubieran viajado 120 días? (La distancia varía directamente con el tiempo).

75. ***Presión ejercida por un líquido*** La presión ejercida por un líquido en un punto determinado varía directamente con la profundidad del punto bajo la superficie del líquido. La presión a una profundidad de 10 pies es de 50 libras por pulgada cuadrada. ¿Cuál será la presión a una profundidad de 20 pies?

76. ***Presión de un gas en un contenedor*** Si el volumen es constante, la presión de un gas en un contenedor varía directamente con la temperatura. [La temperatura se debe medir en grados *Kelvin* (K), una unidad de medición usada en física]. Si la presión es de 5 libras por pulgada cuadrada a una temperatura de 200 grados K, ¿cuál será la presión a una temperatura de 300 grados K?

77. ***Presión de un gas en un contenedor*** Si la temperatura es constante, la presión de un gas en un contenedor varía inversamente con el volumen del contenedor. Si la presión es de 10 libras por pie cuadrado en un contenedor con un volumen de 3 pies cúbicos, ¿cuál será la presión en un contenedor con un volumen de 1.5 pies cúbicos?

78. ***Fuerza requerida para comprimir un resorte*** La fuerza requerida para comprimir un resorte varía directamente con el cambio de la longitud del resorte. Si se requiere una fuerza de 12 libras para comprimir un resorte de 3 pulgadas, ¿cuál será la fuerza necesaria para comprimir un resorte de 5 pulgadas?



79. ***Caída de un cuerpo*** Para un cuerpo en caída libre a partir del reposo (despreciando la resistencia del aire), la distancia que el cuerpo cae varía directamente en relación con el cuadrado del tiempo. Si se deja caer un objeto de una torre de 400 pies de altura y este golpea el suelo en 5 segundos, ¿qué distancia descendió en los primeros 3 segundos?

80. ***Iluminación de una fuente de luz*** La iluminación producida por una fuente de luz varía inversamente en relación con el cuadrado de la distancia a la fuente. Si la iluminación producida a 4 pies de una fuente de luz es de 75 unidades fotométricas (*footcandles*), calcule la iluminación producida a 9 pies de la misma fuente.



81. ***Volumen de un gas*** El gas natural provee el 35.8% de energía en Estados Unidos (*Fuente:* Departamento de Energía de Estados Unidos). El volumen de gas varía inversamente con la presión y directamente con la temperatura. Si un gas ocupa un volumen de 1.3 litros a 300° K y una presión de 18 newtons, calcule el volumen a 340° K y una presión de 24 newtons.

82. ***Derrape de un automóvil*** La fuerza necesaria para mantener un automóvil sin derrapar en una curva varía inversamente con el radio de la curva y conjuntamente con el peso del automóvil y el cuadrado de la velocidad. Si 242 libras de fuerza mantienen un automóvil de 2000 libras sin derrapar en una curva de radio igual a 500 pies, a 30 millas por hora, ¿qué fuerza mantendría al mismo automóvil sin derrapar en una curva de radio igual a 750 pies, y a 50 millas por hora?

83. ***Carga soportada por una columna*** La carga máxima que puede soportar una columna cilíndrica con una sección transversal circular varía directamente con la cuarta potencia del diámetro de la sección transversal e inversamente con el cuadrado de la altura. Una columna de 9 metros con 1 metro de diámetro soporta 8 toneladas métricas. ¿Cuántas toneladas métricas soportará una columna de 12 metros de alto y $\frac{2}{3}$ de metro de diámetro?



Carga = 8 toneladas métricas

Estimación del peso de un pez *La cincha es la distancia alrededor del cuerpo de un pez. (Fuente:* Sacramento Bee, *9 de noviembre de 2000).*

84. El peso de una lubina varía conjuntamente con la cincha y el cuadrado de su longitud. Una lubina ganó un premio al pesar 22.7 libras y medir 36 pulgadas de longitud con una cincha de 21 pulgadas. ¿Cuánto pesaría una lubina de 28 pulgadas de longitud con una cincha de 18 pulgadas?



85. El peso de una trucha varía conjuntamente con su longitud y el cuadrado de su cincha. Un pescador atrapó una trucha que pesaba 10.5 libras y medía 26 pulgadas de longitud, con 18 pulgadas de cincha. Calcule el peso de una trucha de 22 pulgadas de longitud con una cincha de 15 pulgadas.

86. Bill Veeck fue dueño de varios equipos de béisbol de Ligas Mayores durante las décadas de 1950 y 1960. Con frecuencia acostumbraba sentarse en la tribuna y disfrutar los partidos al lado de los aficionados. Esta es una cita que se le atribuye:

En 20 años de estar en un estadio de béisbol, he descubierto que el conocimiento del juego generalmente está en la proporción inversa del precio de las entradas.

Explique con sus propias palabras el significado del anterior enunciado. (Para comprobar este argumento, Veeck alguna vez permitió a los aficionados, como se muestra en la fotografía, votar en relación con decisiones administrativas).



6.4 DESIGUALDADES LINEALES

Rectas numéricas y notación de intervalos • Propiedad aditiva de la desigualdad • Propiedad multiplicativa de la desigualdad • Solución de desigualdades lineales • Aplicaciones • Desigualdades de tres partes



Arquímedes, uno de los más grandes matemáticos de la Antigüedad, nació en la ciudad griega de Siracusa alrededor del 287 a.C.

Una anécdota acerca de Arquímedes narra su reacción a uno de sus descubrimientos. Mientras tomaba un baño, notó que un objeto sumergido, si era más pesado que el líquido, "descendería al fondo del fluido, y el sólido, cuando se pesaba dentro del fluido, era más ligero por una diferencia equivalente al peso del líquido desplazado". Este descubrimiento lo entusiasmó tanto que corrió por las calles gritando "Eureka" (¡Lo encontré!), sin preocuparse por vestirse.

Arquímedes murió a los 75 años durante el saqueo de Siracusa. Se encontraba ante un arenero dibujando figuras geométricas, cuando un soldado romano fue hacia él. Arquímedes ordenó al soldado moverse para que lo dejara trabajar con sus "círculos"; en respuesta, el soldado lo mató.

Rectas numéricas y notación de intervalos

Las desigualdades son relaciones algebraicas relacionadas con cualquiera de estos símbolos:

$<$ "es menor que"	$\leq$ "es menor que o igual a"
$>$ "es mayor que"	$\geq$ "es mayor que o igual a"

A menos que se especifique lo contrario, una desigualdad se resuelve obteniendo todas las soluciones de números reales que la satisfagan. Por ejemplo, el conjunto solución de $x \leq 2$ incluye *todos los números reales* que son menores que o iguales a 2, no solo los *números enteros* menores que o iguales a 2.

El conjunto solución de esta desigualdad se muestra graficando los números reales que satisfacen $x \leq 2$. Esto se hace colocando un corchete en el 2 sobre una recta numérica y dibujando una flecha a partir del corchete hacia la izquierda (para hacer notar que todos los números menores que 2 también son parte de la gráfica).* Véase la **figura 8**.

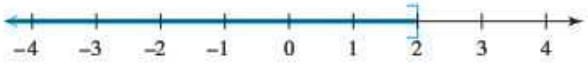


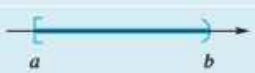
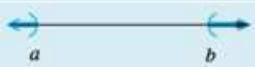
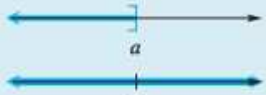
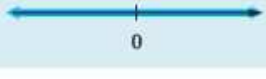
Figura 8

El conjunto de números menores que o iguales a 2 es un ejemplo de un **intervalo** sobre la recta numérica. Para representar intervalos, se usa la **notación de intervalos**. Por ejemplo, usando esta notación, el intervalo de todos los números menores que o iguales a 2 se escribe como $(-\infty, 2]$. En la notación de intervalos se usa con frecuencia el **símbolo de infinito**, ∞. El **símbolo de infinito negativo**, $-\infty$, no representa un número. Se usa para indicar que el intervalo incluye todos los números reales menores que 2. Al igual que sobre la recta numérica, el corchete indica que 2 es parte de la solución. ***Siempre se usa un paréntesis a un lado del símbolo de infinito.***

En notación de intervalos, el conjunto de números reales se escribe como $(-\infty, \infty)$. En la **tabla 4** de la siguiente página se muestran ejemplos de escritura de otros conjuntos en notación de intervalos. En estos intervalos, se supone que $a < b$.

*Algunos textos usan círculos sólidos en lugar de corchetes para indicar que el punto del extremo se incluye en la gráfica de la recta numérica. [También se usan círculos abiertos para indicar la exclusión en lugar del paréntesis, como se describe en el **ejemplo 1*a***)].

Tabla 4

Tipo de intervalo	Notación de comprensión de conjuntos	Notación de intervalos	Gráfica
Intervalo abierto	$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)	
Intervalo cerrado	$\{x \mid a \le x \le b\}$	$[a, b]$	
Intervalo medio abierto (o medio cerrado)	$\{x \mid a \le x < b\}$	$[a, b)$	
	$\{x \mid a < x \le b\}$	$(a, b]$	
Intervalo disjunto	$\{x \mid x < a \text{ o } x > b\}$	$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$	
	$\{x \mid x > a\}$	(a, ∞)	
	$\{x \mid x \ge a\}$	$[a, \infty)$	
Intervalo infinito	$\{x \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	
	$\{x \mid x \le a\}$	$(-\infty, a]$	
	$\{x \mid x \text{ es un número real}\}$	$(-\infty, \infty)$	

EJEMPLO 1 Gráfica de intervalos expresados en notación de intervalos sobre una recta numérica

Escriba las siguientes desigualdades en notación de intervalos y grafique el intervalo.

a) $x > -5$ ***b)*** $-1 \le x < 3$

SOLUCIÓN

a) El enunciado $x > -5$ señala que x puede ser cualquier número mayor que -5 pero no puede ser -5. El intervalo se escribe como $(-5, \infty)$. Colocamos sobre una gráfica un paréntesis en -5 y dibujamos una flecha hacia la derecha, como se muestra en la **figura 9**. El paréntesis en -5 indica que -5 no es parte de la gráfica.

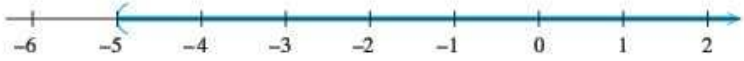


Figura 9

b) El enunciado $-1 \le x < 3$ se lee como "-1 es menor que o igual a x, y x es menor que 3". Así, obtenemos los números del conjunto que están *entre* -1 y 3, incluyendo -1 y excluyendo 3. En la notación de intervalos, se escribe $[-1, 3)$, usando un corchete junto a -1 porque -1 es parte de la gráfica, y un paréntesis al lado de 3 porque 3 no es parte de la gráfica. La gráfica se ilustra en la **figura 10**.

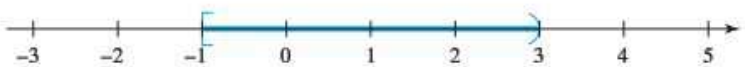


Figura 10



Bernard Bolzano (1781-1848) fue uno de los primeros exponentes rigurosos y precisos en matemáticas. Muchos de los primeros resultados en áreas como el cálculo fueron obtenidos por los expertos en el campo. Estos expertos sabían que estaban generando y produciendo resultados exactos. Sin embargo, sus argumentos desordenados causaban problemas en las manos de los menos versados. El trabajo de Bolzano y otros ayudó a expresar las matemáticas en forma clara y armónica.

Propiedad aditiva de la desigualdad

Desigualdad lineal de una variable

Una **desigualdad lineal de una variable** se puede escribir en la forma

$$Ax + B < C,$$

donde A, B y C son números reales, con $A \neq 0$. (El símbolo $<$ se puede sustituir por $>$, $\leq$ o $\geq$).

$x + 5 < 2$, $x - 3 \geq 5$, y $2x + 5 \leq 10$ Ejemplos de desigualdades lineales

Considere la desigualdad verdadera $2 < 5$ y sume 4 a cada lado

$2 < 5$ Verdadero

$2 + 4 < 5 + 4$ Se suma 4 a cada lado.

$6 < 9$ Verdadero

Se inicia de nuevo y se resta 8 a cada lado.

$2 - 8 < 5 - 8$ Se resta 8 de cada lado.

$-6 < -3$ Verdadero

Estos ejemplos sugieren la **propiedad aditiva de la desigualdad**.

Propiedad aditiva de la desigualdad

Para cualquier expresión de números reales A, B y C, las desigualdades

$$A < B \quad \text{y} \quad A + C < B + C$$

tienen exactamente las mismas soluciones.

Es decir, se puede sumar el mismo número a cada lado de la desigualdad sin alterar las soluciones.



Amalie ("Emmy") Noether (1882-1935) fue una matemática sobresaliente en el campo del **álgebra abstracta.** Estudió y trabajó en Alemania en el tiempo en que era muy difícil que una mujer se dedicara a ello. En la universidad de Erlangen en 1900, Noether era una de solo dos mujeres. Aun cuando pudo asistir a clases, los profesores podían negarle el derecho a presentar los exámenes de los cursos, y de hecho se lo negaron. No fue sino hasta 1904 que se le permitió inscribirse oficialmente. Terminó su doctorado cuatro años más tarde.

En 1916 Emmy Noether fue a Göttingen a trabajar con David Hilbert, en la teoría general de la relatividad. Pero inclusive con el respaldo del prestigiado Hilbert, la facultad demoró tres años en nombrar a Noether *Privatdozent*, el puesto de menor rango en la universidad. En 1922 Noether fue nombrada profesora informal (o asistente). No recibía pago por este puesto, aunque se le entregó un pequeño estipendio por sus conferencias de álgebra.

También es posible *restar* el mismo número de cada lado de la desigualdad.

EJEMPLO 2 Uso de la propiedad aditiva de la desigualdad

Resuelva $7 + 3x > 2x - 5$.

SOLUCIÓN

Siga el mismo procedimiento general de solución de ecuaciones lineales.

$7 + 3x > 2x - 5$

$7 + 3x - 2x > 2x - 5 - 2x$ Se resta $2x$.

$7 + x > -5$ Se reducen los términos semejantes.

$7 + x - 7 > -5 - 7$ Se resta 7.

$x > -12$ Se reducen los términos semejantes.

El conjunto solución es $(-12, \infty)$. La gráfica se muestra en la **figura 11**.

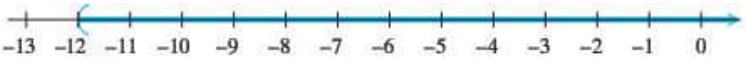


Figura 11

Propiedad multiplicativa de la desigualdad

La propiedad aditiva de la desigualdad no se puede utilizar para resolver desigualdades como

$$4x \geq 28.$$

Estas desigualdades requieren de la *propiedad multiplicativa de la desigualdad*. Para saber cómo funciona esta propiedad, veamos algunos ejemplos.

Multiplique cada lado de la desigualdad verdadera $3 < 7$ por el número positivo 2.

$$\begin{aligned} 3 &< 7 && \text{Verdadero} \\ 2(3) &< 2(7) && \text{Se multiplica cada lado por 2.} \\ 6 &< 14 && \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Ahora se multiplica cada lado de $3 < 7$ por el número negativo -5.

$$\begin{aligned} 3 &< 7 && \text{Verdadero} \\ -5(3) &< -5(7) && \text{Se multiplica cada lado por } -5. \\ -15 &< -35 && \text{Falso} \end{aligned}$$

Para obtener un enunciado verdadero cuando se multiplica cada lado por -5, se debe invertir la dirección del símbolo de desigualdad.

$$\begin{aligned} 3 &< 7 && \text{Verdadero} \\ -5(3) &> -5(7) && \text{Se multiplica por } -5. \text{ Se invierte el símbolo de desigualdad.} \\ -15 &> -35 && \text{Verdadero} \end{aligned}$$

En resumen, la **propiedad multiplicativa de la desigualdad** incluye dos partes.

Propiedad multiplicativa de la desigualdad

Sean A, B y C expresiones de números reales, con $C \neq 0$.

1. Si C es *positivo*, entonces las desigualdades

$$A < B \quad \text{y} \quad AC < BC$$

tienen las mismas soluciones.

2. Si C es *negativo*, entonces las desigualdades

$$A < B \quad \text{y} \quad AC > BC$$

tienen las mismas soluciones.

Es decir, cada lado de una desigualdad se puede multiplicar por el mismo número positivo sin alterar las soluciones. ***Si el multiplicador es negativo, se debe invertir la dirección del símbolo de desigualdad.***

La propiedad multiplicativa de la desigualdad también permite la *división* de cada lado de una desigualdad entre el mismo número diferente de cero.

Observe las siguientes diferencias para multiplicadores/divisores negativos y positivos.

1. Cuando cada lado de una desigualdad se multiplica por o se divide entre un ***número positivo***, la dirección del símbolo de la desigualdad *no cambia*.
2. ***Se invierte la dirección del símbolo de desigualdad solo cuando cada lado de la desigualdad se multiplica por o se divide entre un número negativo.***

En el **ejemplo 3** que sigue, observe cómo se invierte el símbolo de desigualdad *solo* en el inciso ***b)***, donde ambos lados de la desigualdad se dividen entre un número negativo.

EJEMPLO 3 Uso de la propiedad multiplicativa de la desigualdad

Resuelva cada desigualdad y grafique el conjunto solución.

a) $3x < -18$ ***b)*** $-4x \geq 8$

SOLUCIÓN

a)

$$3x < -18$$

3 es un número positivo, de modo que el símbolo de desigualdad no cambia.

$$\frac{3x}{3} < \frac{-18}{3}$$ Se divide entre 3, que es un número *positivo*.

$$x < -6$$

El conjunto solución es $(-\infty, -6)$. La gráfica se muestra en la **figura 12**.



Figura 12

b)

$$-4x \geq 8$$

$$\frac{-4x}{-4} \leq \frac{8}{-4}$$ Se divide entre −4, que es un número *negativo*. Se invierte el símbolo de desigualdad.

Se invierte la desigualdad cuando se multiplica por o se divide entre un número negativo.

$$x \leq -2$$

El conjunto solución $(-\infty, -2]$ está graficado en la **figura 13**.



Figura 13

Solución de desigualdades lineales

Solución de una desigualdad lineal con una variable

Paso 1 **Simplifique cada lado por separado.** Con base en la propiedad distributiva, elimine los paréntesis y reduzca términos semejantes en cada lado, cuando sea necesario.

Paso 2 **Aísle los términos con la variable en un solo lado.** Con base en la propiedad aditiva de la desigualdad, coloque todos los términos que contienen la variable en un lado de la desigualdad y todos los números del otro lado.

Paso 3 **Despeje la variable.** Con base en la propiedad multiplicativa de la desigualdad, cambie la desigualdad de la variable x a la forma

$$x < k,\ x > k,\ x \leq k \text{ o } x \geq k, \quad \text{donde } k \text{ es un número.}$$

Recuerde que la dirección del símbolo de desigualdad se invierte solo cuando ambos lados se multiplican por o se dividen entre un número negativo.

EJEMPLO 4 Solución de una desigualdad lineal

Resuelva $5(x-3)-7x \geq 4(x-3)+9$. Proporcione el conjunto solución en forma de intervalo y luego grafíquelo.

SOLUCIÓN

Paso 1

$$5(x-3)-7x \geq 4(x-3)+9$$

$$5x-15-7x \geq 4x-12+9 \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$-2x-15 \geq 4x-3 \quad \text{Se reducen los términos semejantes.}$$

Paso 2

$$-2x-15-4x \geq 4x-3-4x \quad \text{Se usa la propiedad aditiva de la desigualdad y se resta } 4x.$$

$$-6x-15 \geq -3$$

$$-6x-15+15 \geq -3+15 \quad \text{Se suma 15.}$$

$$-6x \geq 12 \quad \text{Se reducen los términos semejantes.}$$

Paso 3

$$\frac{-6x}{-6} \leq \frac{12}{-6} \quad \text{Se usa la propiedad multiplicativa de la desigualdad. Se divide entre } -6, \text{ que es un número } \textit{negativo}.$$

Recuerde invertir el símbolo de desigualdad.

$$x \leq -2 \quad \text{Se invierte el símbolo.}$$

El conjunto solución es $(-\infty, -2]$. Su gráfica se ilustra en la **figura 14**.



Figura 14

Aplicaciones

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS La siguiente tabla incluye algunas de las frases más comunes que sugieren desigualdad, junto con ejemplos e interpretaciones.

Frase	Ejemplo	Desigualdad
Es mayor que	Un número *es mayor que* 4.	$x > 4$
Es menor que	Un número *es menor que* −12.	$x < -12$
Es por lo menos	Un número *es por lo menos* 6.	$x \geq 6$
Es cuando mucho	Un número *es cuando mucho* 8.	$x \leq 8$

Se siguen los mismos seis pasos para la solución de problemas de la sección 6.2, modificando el paso 3 por "Escriba una desigualdad" en lugar de "Escriba una ecuación".

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de álgebra que es importante para cualquier persona que alguna vez se haya preguntado,

"¿Qué puntuación debo lograr en mi próximo examen para obtener (una calificación particular) en este curso?".

Se parte de la idea de obtener el promedio de varias calificaciones. ***En general, para obtener el promedio de n números, se suman los números y luego se divide entre n.***

EJEMPLO 5 Cálculo de la calificación promedio de exámenes



Josh tiene calificaciones de 86, 88 y 78 en sus primeros tres exámenes de cálculo. Si desea un promedio de por lo menos 80 después del cuarto examen, ¿cuáles son las calificaciones posibles que puede obtener en su cuarto examen?

SOLUCIÓN

Paso 1 **Lea** el problema de nuevo.

Paso 2 **Asigne una variable**. Sea x = calificación de Josh en su cuarto examen.

Paso 3 **Escriba una desigualdad**. Para obtener este promedio después de 4 exámenes, se suman las calificaciones de los exámenes y se divide entre 4.

$$\underbrace{\frac{86 + 88 + 78 + x}{4}}_{\text{Promedio}} \underbrace{\geq}_{\text{es por lo menos}} 80$$

Paso 4 **Resuelva.**

$$\frac{252 + x}{4} \geq 80 \qquad \text{Se suman las calificaciones conocidas.}$$

$$4\left(\frac{252 + x}{4}\right) \geq 4(80) \qquad \text{Se multiplica por 4 para eliminar la fracción.}$$

$$252 + x \geq 320$$

$$252 + x - 252 \geq 320 - 252 \qquad \text{Se resta 252.}$$

$$x \geq 68 \qquad \text{Se reducen los términos semejantes.}$$

Paso 5 **Enuncie la respuesta**. Josh debe obtener 68 o más de calificación en el cuarto examen para obtener un promedio de *por lo menos* 80.

Paso 6 **Verifique**. Determine si esta calificación mínima de 68 da un promedio de 80.

$$\frac{86 + 88 + 78 + 68}{4} = \frac{320}{4} = 80 \quad \checkmark$$

▮▮▮

EJEMPLO 6 Uso de una desigualdad lineal para resolver un problema de alquiler



Una compañía de alquiler cobra \$15.00, más \$2.00 por hora, por rentar una sierra de cadena. Ken Pott no puede gastar más de \$35.00 para cortar algunos troncos de su patio. ¿Cuánto tiempo puede rentar la sierra con este presupuesto?

SOLUCIÓN

Sea h = el número de horas que puede rentar la sierra. Para rentar la sierra por h horas, él debe pagar \$15.00 más \$2.00h, y esta cantidad *no* debe ser *mayor que* \$35.00.

$$\underbrace{15 + 2h}_{\text{Costo de la renta}} \quad \underbrace{\leq}_{\text{no es mayor que}} \quad \underbrace{35}_{\text{35 dólares.}}$$

$$15 + 2h - 15 \leq 35 - 15 \qquad \text{Se resta 15.}$$

$$2h \leq 20$$

$$h \leq 10 \qquad \text{Se divide entre 2.}$$

Ken puede usar la sierra un máximo de 10 horas. (Desde luego, podrá usarla menos tiempo, como indica la desigualdad $h \leq 10$). ▮▮▮

Desigualdades de tres partes

Las desigualdades que afirman que un número se encuentra *entre* dos números son **desigualdades de tres partes**. Por ejemplo,

$-3 < 5 < 7$ afirma que 5 se encuentra entre -3 y 7.

En algunas aplicaciones, es necesario trabajar con una desigualdad como

$3 < x + 2 < 8$, donde $x + 2$ está entre 3 y 8.

Para resolver esta desigualdad, se resta 2 de cada una de las tres partes.

$$3 - 2 < x + 2 - 2 < 8 - 2 \quad \text{Se resta 2 de cada parte.}$$

$$1 < x < 6$$

La idea es usar la expresión "es menor que" para obtener una desigualdad en la forma

Los símbolos deben apuntar en la misma dirección y hacia el número menor.

un número $< x <$ otro número.

EJEMPLO 7 Solución de desigualdades de tres partes

Resuelva $4 \le 3x - 5 < 6$. Exprese el conjunto solución en forma de intervalo y grafíquelo.

SOLUCIÓN

$$4 \le 3x - 5 < 6$$

$$4 + 5 \le 3x - 5 + 5 < 6 + 5 \quad \text{Se suma 5 a cada parte.}$$

$$9 \le 3x < 11 \quad \text{Se simplifica.}$$

Recuerde dividir las tres partes entre 3.

$$\frac{9}{3} \le \frac{3x}{3} < \frac{11}{3} \quad \text{Se divide cada parte entre 3.}$$

$$3 \le x < \frac{11}{3} \quad \text{Se simplifica.}$$

El conjunto solución es $\left[3, \frac{11}{3}\right)$. La gráfica se muestra en la **figura 15**.



Figura 15

6.4 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 6, asocie cada conjunto del grupo I con la gráfica correcta o notación de intervalo A a F del grupo II.

I

1. $\{x | x \le 3\}$

2. $\{x | x > 3\}$

3. $\{x | x < 3\}$

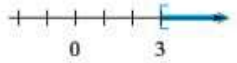
4. $\{x | x \ge 3\}$

5. $\{x | -3 \le x \le 3\}$

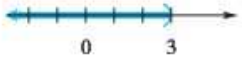
6. $\{x | -3 < x < 3\}$

II

A.



B.



C. $(3, \infty)$

D. $(-\infty, 3]$

E. $(-3, 3)$

F. $[-3, 3]$

7. ¿Cómo se determina si se usan paréntesis o corchetes cuando se grafica el conjunto solución de una desigualdad?

8. Describa los pasos que se siguen para resolver una desigualdad lineal. Explique cuándo es necesario invertir el símbolo de desigualdad.

Resuelva las siguientes desigualdades. Exprese el conjunto solución tanto en forma de intervalo como en forma gráfica.

9. $4x + 1 \geq 21$

10. $5x + 2 \geq 52$

11. $\frac{3x - 1}{4} > 5$

12. $\frac{5x - 6}{8} < 8$

13. $-4x < 16$

14. $-2x > 10$

15. $-\frac{3}{4}x \geq 30$

16. $-1.5x \leq -\frac{9}{2}$

17. $-1.3x \geq -5.2$

18. $-2.5x \leq -1.25$

19. $\frac{2x - 5}{-4} > 5$

20. $\frac{3x - 2}{-5} < 6$

21. $x + 4(2x - 1) \geq x$

22. $x - 2(x - 4) \leq 3x$

23. $-(4 + x) + 2 - 3x < -14$

24. $-(9 + x) - 5 + 4x \geq 4$

25. $-3(x - 6) > 2x - 2$

26. $-2(x + 4) \leq 6x + 16$

27. $\frac{2}{3}(3x - 1) \geq \frac{3}{2}(2x - 3)$

28. $\frac{7}{5}(10x - 1) < \frac{2}{3}(6x + 5)$

29. $-\frac{1}{4}(x + 6) + \frac{3}{2}(2x - 5) < 10$

30. $\frac{3}{5}(x - 2) - \frac{1}{4}(2x - 7) \leq 3$

31. $3(2x - 4) - 4x < 2x + 3$

32. $7(4 - x) + 5x < 2(16 - x)$

33. $8\left(\frac{1}{2}x + 3\right) < 8\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

34. $10x + 2(x - 4) < 12x - 10$

35. Un estudiante resolvió la desigualdad

$$5x < -20$$

dividiendo ambos lados entre 5 e invirtiendo la dirección del símbolo de desigualdad. Su razonamiento fue que como -20 es un número negativo, era necesario invertir la dirección del símbolo. ¿Es esto correcto? Explique por qué.

36. Asocie cada conjunto en notación de intervalo con su descripción.

a) $(0, \infty)$	**A.** Números reales positivos.
b) $[0, \infty)$	**B.** Números reales negativos.
c) $(-\infty, 0]$	**C.** Números reales no positivos.
d) $(-\infty, 0)$	**D.** Números reales no negativos.

Resuelva las siguientes desigualdades. Exprese el conjunto solución tanto en forma de intervalo como en forma gráfica.

37. $-4 < x - 5 < 6$

38. $-1 < x + 1 < 8$

39. $-9 \leq x + 5 \leq 15$

40. $-4 \leq x + 3 \leq 10$

41. $-6 \leq 2x + 4 \leq 16$

42. $-15 < 3x + 6 < -12$

43. $-19 \leq 3x - 5 \leq 1$

44. $-16 < 3x + 2 < -10$

45. $-1 \leq \frac{2x - 5}{6} \leq 5$

46. $-3 \leq \frac{3x + 1}{4} \leq 3$

47. $4 \leq 5 - 9x < 8$

48. $4 \leq 3 - 2x < 8$

Actividad de un tornado *En los ejercicios 49 a 52, conteste las preguntas con base en la gráfica.*



Fuente: The USA Today Weather Book.

49. ¿En qué meses el porcentaje de tornados excede el 7.7%?

50. ¿En qué meses el porcentaje de tornados fue por lo menos del 12.9%?

51. Los datos utilizados para elaborar la gráfica se basaron en el número de tornados registrados en Estados Unidos durante un periodo de 20 años. Se reportó un total de 17,252 tornados. ¿En qué meses se reportaron menos de 1500?

52. ¿Cuántos tornados más ocurrieron en marzo en comparación con octubre? (Considere el total mencionado en el **ejercicio 51**).

Producción de huevo *En los ejercicios 53 a 56, conteste las preguntas con base en la gráfica.*



Fuente: Departamento de Agricultura de Estados Unidos.

53. ¿En qué estados y en qué años la producción fue *al menos* de 6687 millones?

54. ¿En qué estados y en qué años la producción fue *cuando mucho* de 4962 millones?

55. Si x representa la producción de huevo de 2006 en Texas (TX) y y representa la producción de huevo de 2006 en California (CA), ¿cuál enunciado es verdadero: $x < y$ o $x > y$?

56. Si x representa la producción de huevo de 2005 en Ohio (OH) y y representa la producción de huevo de 2006 en OH, ¿cuál enunciado es verdadero: $x < y$ o $x > y$?

Resuelva los siguientes problemas.

57. ***Tarifa de taxis*** En una ciudad, los taxis cobran \$3.00 por el primer $\frac{1}{5}$ de milla y \$0.50 por cada $\frac{1}{7}$ de milla adicional. Frank Steed solo tiene \$7.50. ¿Cuál es la distancia máxima que puede viajar (sin incluir la propina del taxista)?

58. ***Tarifa de taxis*** Hace 15 años, las tarifas de taxis en la ciudad del ejercicio 57 eran de \$0.90 por el primer $\frac{1}{7}$ de milla y \$0.10 por cada $\frac{1}{7}$ de milla adicional. Con base en la información proporcionada allí y la respuesta obtenida por usted, ¿qué distancia adicional habría podido viajar Frank en esa época?

59. ***Promedio de calificaciones*** Hollis Sherman obtuvo calificaciones de 90 y 82 en sus primeros dos exámenes de Literatura inglesa. ¿Qué calificación debe obtener en su tercer examen para lograr un promedio de 84 o mayor?

60. ***Promedio de calificaciones*** Beth Anderson obtuvo calificaciones de 92 y 96 en sus primeros dos exámenes de Taller de fotografía. ¿Qué calificación debe obtener en su tercer examen para lograr un promedio de 90 o mayor?

61. ***Renta de automóvil*** Una pareja desea rentar un automóvil por un día. La agencia A cobra \$29.95 por día más 28 centavos por milla, mientras que la agencia B cobra \$34.95 por día más 25 centavos por milla. ¿Por cuántas millas el precio de renta de la agencia B excedería el precio de renta de la agencia A?

62. ***Renta de automóvil*** John y Suzanne Gainey fueron a California una semana. Necesitaban rentar un automóvil, de modo que consultaron a dos empresas de renta de autos. La agencia A pedía \$28 por día sin cargo por kilometraje. La agencia B pedía \$108 por semana más 14 centavos por cada milla. ¿Cuántas millas tendrían que manejar antes de que el precio de la agencia A sea menor que el precio de la agencia B?



63. ***Índice de masa muscular*** Un índice de masa muscular (IMM) entre 19 y 25 se considera saludable. Use la fórmula

$$\text{IMM} = \frac{703 \times (\text{peso en libras})}{(\text{estatura en pulgadas})^2}$$

para obtener el intervalo w de peso, a la libra más próxima, que representa un índice de masa muscular saludable para cada una de las siguientes estaturas. (*Fuente:* www.bmi-calculator.net).

a) 72 pulgadas ***b)*** Su estatura en pulgadas

64. ***Latidos del corazón por minuto*** Para obtener el beneficio máximo del ejercicio, la frecuencia cardiaca medida en latidos por minuto debe estar dentro de la frecuencia cardiaca objetivo (FCO). Para una persona de edad A, la fórmula es

$$0.7(220 - A) \leq \text{FCO} \leq 0.85(220 - A).$$

Obtenga la FCO redondeando al número entero más próximo para cada una de las siguientes edades. (*Fuente:* Hockey, Robert V., *Physical Fitness: The Pathway to Healthful Living*, Times Mirror/Mosby College Publishing).

a) 35 ***b)*** Su edad

Análisis de costo/beneficio *Un producto genera una utilidad solo cuando el ingreso R de la venta del producto excede el costo C de producción (R y C en dólares). Calcule el número mínimo de unidades x que se deben vender para obtener una utilidad del artículo que se describe.*

65. Peripheral Visions, Inc., calcula que el costo para producir x DVD con calidad de estudio es

$$C = 20x + 100,$$

mientras que el ingreso generado por estos es de $R = 24x$.

66. Speedy Delivery calcula que el costo por realizar x entregas a los clientes es de

$$C = 3x + 2300,$$

mientras que el ingreso generado por estas es de $R = 5.50x$.

6.5 PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES Y NOTACIÓN CIENTÍFICA

Exponentes y expresiones exponenciales • Regla del producto • Exponente cero y exponentes negativos • Regla del cociente • Reglas de potencias • Resumen de reglas de los exponentes • Notación científica



El término **googol,** que significa 10^{100}, fue acuñado por el profesor Edward Kasner de la Universidad de Columbia. Un googol está formado por un 1 seguido de cien ceros. Este número excede el número de electrones que, según las estimaciones, existen en el Universo, esto es, 10^{79}.

El motor de búsqueda Google fue llamado así en honor del googol. Sergey Brin, presidente y cofundador de Google, Inc., tenía una especialidad en matemáticas y eligió el nombre de Google para describir el vasto alcance de su buscador. (*Fuente: The Gazette*, del 2 de marzo de 2001). El término "googling" ahora es parte del idioma inglés.

Si un googol no es lo suficientemente grande para usted, piense en un **googolplex:**

$$\text{googolplex} = 10^{\text{googol}}.$$

Exponentes y expresiones exponenciales

Los *exponentes* se usan para escribir productos de factores que se repiten. Por ejemplo, el producto $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ se expresa como

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{4 factores de 3}} = 3^{4}. \quad \leftarrow \text{Exponente}$$

Base

El número 4 indica que el 3 aparece como factor cuatro veces. El número 4 es el **exponente** y el 3 es la **base.** La cantidad 3^4 se conoce como **expresión exponencial.** 3^4 se lee como "tres a la cuarta potencia", o "3 a la cuarta". La multiplicación de los cuatro 3 da 81.

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Expresión exponencial

Si a es un número real y n es un número natural, entonces la expresión exponencial a^n se define como

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}.$$

El número a es la *base* y n es el *exponente*.

EJEMPLO 1 Desarrollo de expresiones exponenciales

Desarrolle las siguientes expresiones exponenciales.

a) 7^2 ***b)*** 5^3 ***c)*** $(-2)^4$ ***d)*** $(-2)^5$ ***e)*** 5^1

SOLUCIÓN

$7^2 = 7 \cdot 7$, *no* $7 \cdot 2$.

a) $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$ 7^2 se lee como "7 al cuadrado".

b) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ 5^3 se lee como "5 al cubo".

c) $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$

d) $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

e) $5^1 = 5$

En la expresión exponencial $3z^7$, la base del exponente 7 es z, *no* $3z$.

$$3z^7 = 3 \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z \quad \text{La base es } z.$$

$$(3z)^7 = (3z)(3z)(3z)(3z)(3z)(3z)(3z) \quad \text{La base es } 3z.$$

Para $(-2)^6$, el paréntesis que encierra a -2 indica que la base es -2.

$$(-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64 \quad \text{La base es } -2.$$



Esta pantalla apoya el análisis del **ejemplo 2**.

En la expresión -2^6, la base es 2, *no* -2. El signo $-$ (menos) nos dice que se calcule el negativo, o el inverso aditivo, de 2^6. El signo actúa como un símbolo del factor -1.

$$-2^6 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -64$$ La base es 2.

Por lo tanto, como $64 \neq -64$, $(-2)^6 \neq -2^6$.

EJEMPLO 2 Desarrollo de expresiones exponenciales

Desarrolle las siguientes expresiones exponenciales.

a) -4^2 ***b)*** -8^4 ***c)*** $(-8)^4$

SOLUCIÓN

a) $-4^2 = -(4 \cdot 4) = -16$

b) $-8^4 = -(8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) = -4096$

c) $(-8)^4 = (-8)(-8)(-8)(-8) = 4096$

Observe cómo los incisos ***b)*** y ***c)*** son diferentes. ■■■

Regla del producto

Considere el producto $2^5 \cdot 2^3$, el cual se puede simplificar como sigue.

$$2^5 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^8$$ $5 + 3 = 8$

Este resultado (los productos de expresiones exponenciales con la misma base se obtienen sumando los exponentes) se generaliza como la **regla del producto para exponentes**.

Regla del producto para exponentes

Si m y n son números naturales y a es cualquier número real, entonces

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la regla del producto

Aplique la regla del producto para los exponentes en cada caso.

a) $3^4 \cdot 3^7$ ***b)*** $5^3 \cdot 5$ ***c)*** $y^3 \cdot y^8 \cdot y^2$

d) $(5y^2)(-3y^4)$ ***e)*** $(7p^3q)(2p^5q^2)$

SOLUCIÓN

a) $3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$ ***b)*** $5^3 \cdot 5 = 5^3 \cdot 5^1 = 5^{3+1} = 5^4$

No cometa el error de escribir $3 \cdot 3 = 9$ como la base.

c) $y^3 \cdot y^8 \cdot y^2 = y^{3+8+2} = y^{13}$ Regla del producto ampliada para tres potencias

d) $(5y^2)(-3y^4) = 5(-3)y^2y^4$ Propiedades asociativa y conmutativa

$= -15y^{2+4}$ Se multiplica; regla del producto.

$= -15y^6$ Se suma.

e) $(7p^3q)(2p^5q^2) = 7(2)p^3p^5qq^2$

$= 14p^8q^3$ ■■■

Exponente cero y exponentes negativos

Ahora se considerará el cero como exponente. ¿De qué manera podemos definir una expresión como 4^0 para que sea consistente con la regla del producto? De acuerdo con la regla del producto, tendríamos

$$4^2 \cdot 4^0 = 4^{2+0} = 4^2.$$

Para que la regla del producto siga cumpliéndose, 4^0 debe ser igual a 1. Esto nos lleva a la definición de a^0 para cualquier número real a diferente de cero.

Exponente cero

Si a es cualquier número real diferente de cero, entonces $\boldsymbol{a^0 = 1}$.

La expresión $\mathbf{0^0}$ **no está definida.***

EJEMPLO 4 Aplicación de la definición del exponente cero

Efectúe cada operación.

a) 12^0 ***b)*** $(-6)^0$ ***c)*** -6^0

d) $5^0 + 12^0$ ***e)*** $(8k)^0, \quad k \neq 0$

SOLUCIÓN

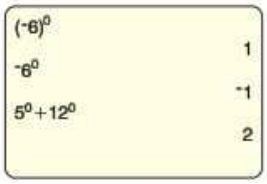
a) $12^0 = 1$

b) $(-6)^0 = 1$ La base es -6.

c) $-6^0 = -(6^0) = -1$ La base es 6.

d) $5^0 + 12^0 = 1 + 1 = 2$

e) $(8k)^0 = 1, \quad k \neq 0$



Esta pantalla apoya los resultados de los incisos ***b)***, ***c)*** y ***d)*** del **ejemplo 4.**

Definiremos ahora un exponente negativo. Usando de nuevo la regla del producto,

$$8^2 \cdot 8^{-2} = 8^{2+(-2)} = 8^0 = 1.$$

Esto indica que 8^{-2} es el recíproco de 8^2. Pero $\frac{1}{8^2}$ es el recíproco de 8^2, y un número solamente puede tener un recíproco. Por lo tanto, es razonable concluir que $8^{-2} = \frac{1}{8^2}$. Podemos generalizar y enunciar la siguiente definición.

Exponentes negativos

Para cualquier número natural n y cualquier número real a diferente de cero,

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}.$$

Con esta definición y las que se consideraron anteriormente para exponentes positivos y el exponente cero, la expresión a^n tiene sentido para cualquier exponente entero n y cualquier número real a diferente de cero.

EJEMPLO 5 Aplicación de la definición de exponentes negativos

Escriba las siguientes expresiones solo con exponentes positivos. Suponga que todas las variables representan números reales diferentes de cero.

a) 2^{-3} ***b)*** 3^{-2} ***c)*** 6^{-1} ***d)*** $(5z)^{-3}$

e) $5z^{-3}$ ***f)*** $(5z^2)^{-3}$ ***g)*** $-m^{-2}$ ***h)*** $(-m)^{-4}$

*En cursos avanzados, 0^0 se conoce como *forma indeterminada*.

SOLUCIÓN

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

c) $6^{-1} = \frac{1}{6^1} = \frac{1}{6}$

d) $(5z)^{-3} = \frac{1}{(5z)^3}$ La base es 5z.

e) $5z^{-3} = 5\left(\frac{1}{z^3}\right) = \frac{5}{z^3}$ La base es z.

f) $(5z^2)^{-3} = \frac{1}{(5z^2)^3}$

g) $-m^{-2} = -\frac{1}{m^2}$

h) $(-m)^{-4} = \frac{1}{(-m)^4}$

■■■

EJEMPLO 6 Desarrollo de expresiones exponenciales

Desarrolle cada expresión.

a) $3^{-1} + 4^{-1}$ ***b)*** $5^{-1} - 2^{-1}$ ***c)*** $\frac{1}{2^{-3}}$ ***d)*** $\frac{2^{-3}}{3^{-2}}$

SOLUCIÓN

a) $3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$ $3^{-1} = \frac{1}{3}, 4^{-1} = \frac{1}{4}$

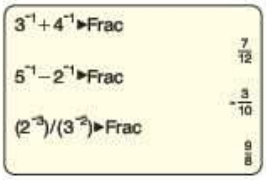
b) $5^{-1} - 2^{-1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2}{10} - \frac{5}{10} = -\frac{3}{10}$

c) $\frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{2^3}} = 1 \div \frac{1}{2^3} = 1 \cdot \frac{2^3}{1} = 2^3 = 8$

Para dividir, se multiplica por el recíproco del divisor.

d) $\frac{2^{-3}}{3^{-2}} = \frac{\frac{1}{2^3}}{\frac{1}{3^2}} = \frac{1}{2^3} \div \frac{1}{3^2} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3^2}{1} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$

■■■



Esta pantalla apoya los resultados de los incisos ***a)***, ***b)*** y ***d)*** del **ejemplo 6.**

Los incisos ***c)*** y ***d)*** del **ejemplo 6** sugieren las siguientes generalizaciones.

Reglas especiales para exponentes negativos

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ y $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$.

Regla del cociente

Un cociente, como $\frac{a^8}{a^3}$, se puede simplificar de manera similar a la simplificación de un producto. (Suponga que el denominador no es 0). Usando la definición de exponente,

$$\frac{a^8}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5.$$

Observe que $8 - 3 = 5$. De la misma manera,

$$\frac{a^3}{a^8} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}.$$

Aquí, $3 - 8 = -5$. Estos ejemplos sugieren la **regla de cocientes para los exponentes**.

Regla del cociente para exponentes

Si a es un número real diferente de cero y m y n son enteros, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

EJEMPLO 7 Aplicación de la regla del cociente

Aplique la regla del cociente para exponentes en cada caso. Suponga que todas las variables representan números reales diferentes de cero.

a) $\frac{3^7}{3^2}$ *b)* $\frac{p^6}{p^2}$ *c)* $\frac{12^{10}}{12^9}$ *d)* $\frac{7^4}{7^6}$ *e)* $\frac{k^7}{k^{12}}$

SOLUCIÓN

Exponente del numerador — Exponente del denominador — Se resta.

a) $\frac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5$

b) $\frac{p^6}{p^2} = p^{6-2} = p^4$

c) $\frac{12^{10}}{12^9} = 12^{10-9} = 12^1 = 12$

d) $\frac{7^4}{7^6} = 7^{4-6} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$

e) $\frac{k^7}{k^{12}} = k^{7-12} = k^{-5} = \frac{1}{k^5}$

Se usa la definición de exponente negativo.

EJEMPLO 8 Aplicación de la regla del cociente

Escriba cada cociente usando solo exponentes positivos. Suponga que todas las variables representan números reales diferentes de cero.

a) $\frac{2^7}{2^{-3}}$ *b)* $\frac{8^{-2}}{8^5}$ *c)* $\frac{6^{-5}}{6^{-2}}$ *d)* $\frac{4}{4^{-1}}$ *e)* $\frac{z^{-5}}{z^{-8}}$

SOLUCIÓN

Se debe tener cuidado al restar un número negativo.

a) $\frac{2^7}{2^{-3}} = 2^{7-(-3)} = 2^{10}$

b) $\frac{8^{-2}}{8^5} = 8^{-2-5} = 8^{-7} = \frac{1}{8^7}$

c) $\frac{6^{-5}}{6^{-2}} = 6^{-5-(-2)} = 6^{-3} = \frac{1}{6^3}$

d) $\frac{4}{4^{-1}} = \frac{4^1}{4^{-1}} = 4^{1-(-1)} = 4^2$

e) $\frac{z^{-5}}{z^{-8}} = z^{-5-(-8)} = z^3$

$(2^7)/(2^{-3})=2^{10}$ 1
$4/4^{-1}=4^2$ 1

Esta pantalla apoya los resultados de los incisos *a)* y *d)* del **ejemplo 8.**

Reglas de potencias

La expresión $(3^4)^2$ se puede simplificar como

$$(3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^{4+4} = 3^8, \text{ donde } 4 \cdot 2 = 8.$$

Este ejemplo sugiere la primera de las **reglas de potencias para exponentes**. Existen otras dos reglas que se pueden demostrar con ejemplos similares.

Reglas de potencias para exponentes

Si a y b son números reales, y m y n son enteros, entonces

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^m = a^m b^m, \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0).$$

En los enunciados de las reglas para exponentes, siempre se supone que el cero nunca aparece como una potencia negativa o como la potencia cero.

EJEMPLO 9 Aplicación de reglas de potencias

Use una o más reglas de potencias en los siguientes casos. Suponga que todas las variables representan números reales diferentes de cero.

a) $(p^8)^3$ **b)** $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ **c)** $(3y)^4$ **d)** $(6p^7)^2$ **e)** $\left(\frac{-2m^5}{z}\right)^3$

SOLUCIÓN

a) $(p^8)^3 = p^{8\cdot 3} = p^{24}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

c) $(3y)^4 = 3^4 y^4 = 81y^4$

d) $(6p^7)^2 = 6^2 p^{7\cdot 2} = 6^2 p^{14} = 36p^{14}$

e) $\left(\frac{-2m^5}{z}\right)^3 = \frac{(-2)^3 m^{5\cdot 3}}{z^3} = \frac{(-2)^3 m^{15}}{z^3} = \frac{-8m^{15}}{z^3}$

Observe que

$$6^{-3} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \quad \text{y} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Estos son ejemplos de dos reglas especiales para exponentes negativos.

Reglas especiales para exponentes negativos

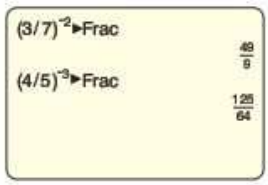
Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ y n es un número entero, entonces

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

EJEMPLO 10 Aplicación de reglas especiales para exponentes negativos

Escriba cada expresión solamente con exponentes positivos, y luego desarróllela.

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$ **b)** $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$



La pantalla apoya los resultados del **ejemplo 10.**

SOLUCIÓN

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$

Resumen de reglas de los exponentes

Aquí se resumen las definiciones y reglas de esta sección.

Definiciones y reglas para exponentes

Para todos los números enteros m y n y todos los números reales a y b,

Regla del producto $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Regla del cociente $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$

Exponente cero $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

Exponente negativo $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$

Reglas para potencias $(a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^m = a^m b^m$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0)$$

Reglas especiales para exponentes negativos

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n \, (a \neq 0) \qquad \frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n} \quad (a, b \neq 0)$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad (a \neq 0)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad (a, b \neq 0).$$

EJEMPLO 11 Escritura de expresiones con exponentes no negativos

Simplifique cada expresión de modo que no aparezcan exponentes negativos en el resultado. Suponga que todas las variables representan números reales diferentes de cero.

a) $3^2 \cdot 3^{-5}$ *b)* $x^{-3} \cdot x^{-4} \cdot x^2$ *c)* $(4^{-2})^{-5}$

d) $(x^{-4})^6$ *e)* $\dfrac{x^{-4}y^2}{x^2y^{-5}}$ *f)* $(2^3x^{-2})^{-2}$

SOLUCIÓN

a) $3^2 \cdot 3^{-5} = 3^{2+(-5)} = 3^{-3} = \dfrac{1}{3^3}$, o $\dfrac{1}{27}$

b) $x^{-3} \cdot x^{-4} \cdot x^2 = x^{-3+(-4)+2} = x^{-5} = \dfrac{1}{x^5}$

c) $(4^{-2})^{-5} = 4^{-2(-5)} = 4^{10}$

d) $(x^{-4})^6 = x^{(-4)6} = x^{-24} = \dfrac{1}{x^{24}}$

e) $\dfrac{x^{-4}y^2}{x^2y^{-5}} = \dfrac{x^{-4}}{x^2} \cdot \dfrac{y^2}{y^{-5}}$

$= x^{-4-2} \cdot y^{2-(-5)}$

$= x^{-6}y^7$

$= \dfrac{y^7}{x^6}$

f) $(2^3x^{-2})^{-2} = (2^3)^{-2} \cdot (x^{-2})^{-2}$

$= 2^{-6}x^4$

$= \dfrac{x^4}{2^6}$, o $\dfrac{x^4}{64}$



En el episodio "Court-Martial" de la serie original de televisión *Star Trek*, el capitán Kirk expresa lo siguiente durante una escena en el puente de la Enterprise:

Caballeros, esta computadora tiene un sensor auditivo. Puede, en efecto, oír sonidos. A través de un elevador de potencia, podemos incrementar esa capacidad en un orden de uno a la cuarta potencia. La computadora podrá traernos cualquier sonido que se registre en esta nave.

¿Puede usted identificar el error en el enunciado de Kirk? ¿Qué cree que quiso decir en realidad? (Piense en la notación científica).

Notación científica

Muchos de los números que se manejan en la ciencia son muy grandes o muy pequeños. La escritura de estos números se simplifica usando la *notación científica.*

Notación científica

Un número está escrito en **notación científica** cuando se expresa en la forma

$$a \times 10^n, \quad \text{donde } 1 \le |a| < 10, \text{ y } n \text{ es un número entero.}$$

La notación científica requiere que el número esté escrito como el producto de un número entre 1 y 10 (o −1 y −10) y una potencia entera de 10. (1 y −1 son valores permitidos de a, pero 10 y −10 no lo son). Por ejemplo,

$$8000 = 8 \cdot 1000 = 8 \cdot 10^3, \quad \text{u} \quad 8 \times 10^3. \leftarrow \text{Notación científica}$$

En notación científica, se acostumbra usar el símbolo × en lugar de un punto de multiplicación.

A continuación se describen los pasos implicados en la escritura de un número en notación científica. (Si el número es negativo, se ignora el signo negativo, se siguen estos pasos, y al final se agrega un signo negativo al resultado).

Conversión de un número positivo a notación científica

Paso 1 **Coloque el punto decimal.** Coloque un signo de intercalación o separación, ∧, a la derecha del primer dígito diferente de cero, donde se colocará el punto decimal.

Paso 2 **Determine el numeral del exponente.** Se cuenta el número de dígitos desde el punto decimal hasta el signo de intercalación. Este número indica el valor absoluto del exponente de 10.

Paso 3 **Determine el signo del exponente.** Determine si, al multiplicar por 10^n, el resultado del paso 1 se hace más grande o más pequeño. El exponente debe ser positivo para hacer el resultado más grande. Debe ser negativo para hacer el resultado más pequeño.

Es útil recordar que para $n \ge 1$, $10^{-n} < 1$ y $10^n \ge 10$.

EJEMPLO 12 Conversión a notación científica

Convierta cada número de notación estándar a notación científica.

a) 8,200,000 ***b)*** 0.000072

SOLUCIÓN

a) Se coloca un signo de intercalación a la derecha del 8 (el primer dígito diferente de cero) para marcar la nueva ubicación del punto decimal.

$$8\text{∧}200{,}000$$

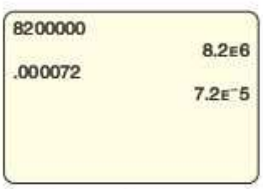
Se cuentan los dígitos a partir del punto decimal, lo cual se debe entender como después del último cero, hasta el signo de intercalación.

$$8\text{∧}200{,}000. \leftarrow \text{Punto decimal}$$

Se cuentan 6 posiciones.

Como el número 8.2 debe ser más grande, el exponente de 10 es positivo.

$$8{,}200{,}000 = 8.2 \times 10^6$$



Si una calculadora graficadora está en el modo de notación científica, dará los resultados como se muestra aquí. E6 significa "por 10^6" y E-5 significa "por 10^{-5}". Compare con los resultados del **ejemplo 12.**

b) $0.00007\underbrace{2}_{\text{5 posiciones}}$ Se cuenta de izquierda a derecha.

Como el número 7.2 se debe hacer más pequeño, el exponente del 10 es negativo.

$$0.000072 = 7.2 \times 10^{-5}$$

Conversión de un número positivo de notación científica a notación estándar

La multiplicación de un número positivo por una potencia positiva de 10 produce un número más grande; así que mueva el punto decimal a la derecha si la n de 10^n es positiva.

La multiplicación de un número positivo por una potencia negativa de 10 genera un número más pequeño; así que mueva el punto decimal a la izquierda si n es negativa.

Si n es igual a cero, no mueva el punto decimal.

EJEMPLO 13 Conversión de notación científica

Convierta cada número de notación científica a notación estándar.

a) 6.93×10^5 *b)* 4.7×10^{-6} *c)* -1.083×10^0

SOLUCIÓN

a) $6.93 \times 10^5 = 6.93\underbrace{000}_{\text{5 posiciones}}$ Se agregan tantos ceros como sea necesario.

El punto decimal se movió 5 posiciones a la derecha.

$$6.93 \times 10^5 = 693{,}000$$

b) $4.7 \times 10^{-6} = \underbrace{000004}_{\text{6 posiciones}}.7$ Se agregan tantos ceros como sea necesario.

El punto decimal se movió 6 posiciones a la izquierda.

$$4.7 \times 10^{-6} = 0.0000047$$

c) $-1.083 \times 10^0 = -1.083$

EJEMPLO 14 Uso de la notación científica en los cálculos

Simplifique $\dfrac{1{,}920{,}000 \times 0.0015}{0.000032 \times 45{,}000}$ usando notación científica.

SOLUCIÓN

$$\frac{1{,}920{,}000 \times 0.0015}{0.000032 \times 45{,}000} = \frac{1.92 \times 10^6 \times 1.5 \times 10^{-3}}{3.2 \times 10^{-5} \times 4.5 \times 10^4}$$ Se expresan todos los números en notación científica.

$$= \frac{1.92 \times 1.5 \times 10^6 \times 10^{-3}}{3.2 \times 4.5 \times 10^{-5} \times 10^4}$$ Propiedades conmutativa y asociativa

$$= \frac{1.92 \times 1.5}{3.2 \times 4.5} \times 10^4$$ Reglas de producto y cociente

No se detenga aquí.

$$= 0.2 \times 10^4$$ Se simplifica.

$$= (2 \times 10^{-1}) \times 10^4$$ Se escribe 0.2 usando notación científica.

$$= 2 \times 10^3, \text{ o } 2000$$ Propiedad asociativa; regla del producto; se multiplica.

EJEMPLO 15 Uso de notación científica en una aplicación



En 1990 los gastos nacionales para el cuidado de la salud en Estados Unidos fueron de $714.0 miles de millones. En 2005 la cifra se elevó por un factor de 2.8; es decir, casi se triplicó en 15 años. (*Fuente:* Centros de Medicare y Medicaid en Estados Unidos).

a) Exprese en notación científica los gastos para el cuidado de la salud de 1990.

b) ¿Cuáles fueron los gastos en 2005?

SOLUCIÓN

a) 714.0 miles de millones

$= 714.0 \times 10^9$ 1 mil millones $= 10^9$

$= (7.140 \times 10^2) \times 10^9$ Se expresa 714.0 en notación científica.

$= 7.140 \times 10^{11}$ Regla del producto

En 1990 los gastos fueron de $\$7.140 \times 10^{11}$.

b) Se multiplica el resultado del inciso ***a)*** por 2.8.

$(7.140 \times 10^{11}) \times 2.8$

$= (2.8 \times 7.140) \times 10^{11}$ Propiedades conmutativa y asociativa

$= 19.992 \times 10^{11}$ Se redondea a tres posiciones decimales.

$= (1.9992 \times 10^1) \times 10^{11}$ Se expresa 19.992 en notación científica.

$= 1.9992 \times 10^{12}$ Propiedad asociativa; regla del producto; se multiplica.

El gasto en 2005 fue de aproximadamente $1,999,200,000,000 (casi $2 billones). ■■■

6.5 EJERCICIOS

Asocie las expresiones exponenciales de los ejercicios 1 a 6 con las expresiones equivalentes de las opciones A a F. Las opciones se pueden usar una vez, más de una vez, o no usarse.

1. $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ **2.** $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ **3.** $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$

4. $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}$ **5.** $-\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ **6.** $-\left(-\frac{5}{3}\right)^2$

A. $\frac{25}{9}$ **B.** $-\frac{25}{9}$ **C.** $\frac{9}{25}$

D. $-\frac{9}{25}$ **E.** ninguna de estas **F.** todas estas

Desarrolle cada una de las expresiones exponenciales.

7. 5^4 **8.** 10^3

9. $(-2)^5$ **10.** $(-5)^4$

11. -2^3 **12.** -3^2

13. $-(-3)^4$ **14.** $-(-5)^2$

15. 7^{-2} **16.** 4^{-1}

17. -7^{-2} **18.** -4^{-1}

19. $\frac{2}{(-4)^{-3}}$ **20.** $\frac{2^{-3}}{3^{-2}}$

21. $\frac{5^{-1}}{4^{-2}}$ **22.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

23. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ **24.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

25. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$ **26.** $3^{-1} + 2^{-1}$

27. $4^{-1} + 5^{-1}$ **28.** 8^0

29. 12^0 **30.** $(-23)^0$

31. $(-4)^0$ **32.** -2^0

33. $3^0 - 4^0$ **34.** $-8^0 - 7^0$

35. Para elevar una fracción a una potencia negativa, se debe modificar la fracción a su _____ y cambiar el exponente al _____ _____ del exponente original.

36. Explique con sus propias palabras cómo elevar una potencia a una potencia.

37. ¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?

A. $-\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$ **B.** $\frac{3^{-1}}{4^{-1}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$

C. $\frac{3^{-1}}{4} = \frac{3}{4^{-1}}$ **D.** $\frac{3^{-1}}{4^{-1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

38. ¿Cuál de las siguientes expresiones es incorrecta?

A. $(3r)^{-2} = 3^{-2}r^{-2}$ **B.** $3r^{-2} = (3r)^{-2}$

C. $(3r)^{-2} = \frac{1}{(3r)^2}$ **D.** $(3r)^{-2} = \frac{r^{-2}}{9}$

Use las reglas del producto, del cociente y de las potencias para simplificar cada expresión. Escriba las respuestas solamente con exponentes positivos. Suponga que todas las variables representan números reales diferentes de cero.

39. $x^{12} \cdot x^4$ **40.** $\frac{x^{12}}{x^4}$

41. $\frac{5^{17}}{5^{16}}$ **42.** $\frac{3^{12}}{3^{13}}$

43. $\frac{3^{-5}}{3^{-2}}$ **44.** $\frac{2^{-4}}{2^{-3}}$

45. $\frac{9^{-1}}{9}$ **46.** $\frac{12}{12^{-1}}$

47. t^5t^{-12} **48.** p^5p^{-6}

49. $(3x)^2$ **50.** $(-2x^{-2})^2$

51. $a^{-3}a^2a^{-4}$ **52.** $k^{-5}k^{-3}k^4$

53. $\frac{x^7}{x^{-4}}$ **54.** $\frac{p^{-3}}{p^5}$

55. $\frac{r^3r^{-4}}{r^{-2}r^{-5}}$ **56.** $\frac{z^{-4}z^{-2}}{z^3z^{-1}}$

57. $7k^2(-2k)(4k^{-5})$ **58.** $3a^2(-5a^{-6})(-2a)$

59. $(z^3)^{-2}z^2$ **60.** $(p^{-1})^3p^{-4}$

61. $-3r^{-1}(r^{-3})^2$ **62.** $2(y^{-3})^4(y^6)$

63. $(3a^{-2})^3(a^3)^{-4}$ **64.** $(m^5)^{-2}(3m^{-2})^3$

65. $(x^{-5}y^2)^{-1}$ **66.** $(a^{-3}b^{-5})^2$

67. ¿Cuál de las siguientes expresiones *no* representa el recíproco de x $(x \neq 0)$?

A. x^{-1} **B.** $\frac{1}{x}$ **C.** $\left(\frac{1}{x^{-1}}\right)^{-1}$ **D.** $-x$

68. ¿Cuál de las siguientes expresiones *no* está en notación científica?

A. 6.02×10^{23} **B.** 14×10^{-6}

C. 1.4×10^{-5} **D.** 3.8×10^3

Convierta cada número de notación estándar a notación científica.

69. 230 **70.** 46,500

71. 0.02 **72.** 0.0051

Convierta cada número de notación científica a notación estándar.

73. 6.5×10^3 **74.** 2.317×10^5

75. 1.52×10^{-2} **76.** 1.63×10^{-4}

Use notación científica para efectuar cada uno de los siguientes cálculos. Exprese las respuestas en notación científica.

77. $\frac{0.002 \times 3900}{0.000013}$ **78.** $\frac{0.009 \times 600}{0.02}$

79. $\frac{0.0004 \times 56{,}000}{0.000112}$ **80.** $\frac{0.018 \times 20{,}000}{300 \times 0.0004}$

81. $\frac{840{,}000 \times 0.03}{0.00021 \times 600}$ **82.** $\frac{28 \times 0.0045}{140 \times 1500}$

En los ejercicios 83 a 86, exprese en notación científica los números que se encuentran en negritas.

83. ***Presupuesto de Estados Unidos*** El presupuesto de Estados Unidos rebasó por primera vez **$1,000,000,000** en 1917. Setenta años después, en 1987 excedió **$1,000,000,000,000** por primera vez. El presupuesto requerido por el presidente George W. Bush para el año fiscal 2009 fue de **$3,100,000,000,000**. Si esta cifra se apilara en billetes de un dólar, la cantidad podría alcanzar las **210,385** millas, casi el 90% de la distancia a la Luna. (*Fuente: The New York Times*).



84. ***Área de Estados Unidos*** Alaska es el estado con el área más grande de Estados Unidos, ya que su superficie mide aproximadamente **365,482,000** acres, mientras que el estado más pequeño es Rhode Island, con una superficie de alrededor de **677,000** acres. El área total de Estados Unidos es de aproximadamente **2,271,343,000** acres. (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).

85. ***Presupuesto de la NASA*** El presupuesto del plan operativo de 2010 para la Agencia Nacional de Aeronáutica y del Espacio fue de **$18.69 miles de millones**. Exprese esta cantidad en notación científica. (*Fuente:* www.nasa.gov).

86. ***Registro de vehículos automotores*** En 2007 había aproximadamente **247,264,600** vehículos automotores registrados en Estados Unidos. Exprese este número en notación científica. (*Fuente:* U.S. Federal Highway Administration).

Datos de astronomía *Cada uno de los siguientes enunciados (ejercicios 87 a 90) proviene de la obra* Astronomy! A Brief Edition, *de James B. Kaler (Addison-Wesley). Si el número del enunciado está en notación científica, escríbalo en notación estándar sin usar exponentes. Si el número está en notación estándar, escríbalo en notación científica.*

87. Al multiplicar esta vista por el cielo completo, se obtiene un número de galaxias de más de **10 mil millones**. (Página 496).

88. La circunferencia de la órbita solar es [...] de aproximadamente **4.7 mil millones** de km. (En referencia a la órbita de Júpiter, página 395).

89. La luminosidad solar requiere que $\mathbf{2 \times 10^9}$ kg de masa se conviertan en energía cada segundo. (Página 327).

90. Como máximo, la partícula de un rayo cósmico, un simple núcleo atómico de apenas $\mathbf{10^{-13}}$ cm de diámetro, puede transportar la energía de una bola lanzada en un partido profesional de béisbol. (Página 445).

Resuelva los siguientes problemas.

91. ***Población de Estados Unidos*** En mayo de 2008, la población de Estados Unidos era de 304.1 millones. (*Fuente:* U.S. Census Bureau).

a) Exprese la población de mayo de 2008 en notación científica.

b) Exprese \$1 billón, es decir, \$1,000,000,000,000, usando notación científica.

c) Con base en sus respuestas de los incisos ***a)*** y ***b)***, calcule con cuánto habría tenido que contribuir cada persona en Estados Unidos en el año 2008 para hacer a alguien billonario. Escriba esta cantidad en notación estándar aproximando al dólar más cercano.

92. ***Lotería Powerball*** En los primeros años de la Lotería Powerball, un jugador tenía que seleccionar 5 números del 1 al 49 y un número del 1 al 42. Es posible demostrar que existen aproximadamente 8.009×10^7 maneras diferentes de hacer esto. Suponga que un grupo de 2000 personas deciden comprar los boletos para todas estas posibilidades, y que cada boleto cuesta \$1.00. ¿Cuánto debería pagar cada persona? (*Fuente:* www.powerball.com).



93. ***Distancia de Urano al Sol*** Un pársec (o parsec), una unidad de longitud usada en astronomía, es igual a 1.9×10^{13} millas. La distancia media de Urano al Sol es de 1.8×10^7 millas. ¿A cuántos pársec está Urano del Sol?

94. ***Número de pulgadas en una milla*** Una pulgada es aproximadamente 1.57828×10^{-5} millas. Obtenga el recíproco de este número para determinar el número de pulgadas en una milla.

95. ***Velocidad de la luz*** La velocidad de la luz es de aproximadamente 3×10^{10} centímetros por segundo. ¿Cuánto tiempo tardará la luz en viajar 9×10^{12} centímetros?

96. ***Cohete de la Tierra al Sol*** La distancia promedio de la Tierra al Sol es de 9.3×10^7 millas. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar al Sol un cohete que viaja a 2.9×10^3 millas por hora?

97. ***Millas en un año luz*** Un *año luz* es la distancia que viaja la luz en un año. Obtenga el número de millas en un año luz, si la luz viaja a 1.86×10^5 millas por segundo.

98. ***Tiempo de viaje de la luz*** Use la información de los dos ejercicios anteriores para obtener el número de minutos necesarios para que la luz del Sol llegue a la Tierra.

99. ***Cohete de Venus a Mercurio*** El planeta Mercurio tiene una distancia promedio al Sol de 3.6×10^7 millas, mientras que la distancia media de Venus al Sol es de 6.7×10^7 millas. ¿Cuánto tiempo tardará una nave espacial, que viaja a 1.55×10^3 millas por hora, en ir de Venus a Mercurio? Suponga que el tiempo de viaje se puede medir de modo que el inicio y el final ocurrirían cuando los planetas respectivos se encuentren a su distancia promedio del Sol y en la misma dirección del Sol. (Dé su respuesta en horas, sin notación científica).

100. ***Distancia de un objeto a la Luna*** Cuando la distancia entre los centros de la Luna y la Tierra es de 4.60×10^8 metros, un objeto sobre la línea que une los centros ejerce la misma fuerza gravitacional sobre la Luna y la Tierra cuando se encuentra a 4.14×10^8 metros del centro de la Tierra. ¿A qué distancia está el objeto del centro de la Luna en ese punto?



6.6 POLINOMIOS Y FACTORIZACIÓN

Terminología básica • Adición y sustracción • Multiplicación • Productos notables • Factorización • Factorización con el máximo común divisor • Factorización por agrupamiento • Factorización de trinomios • Factorización de binomios notables

Terminología básica

Un **término,** o **monomio,** se define como un número, una variable o un producto de números y variables. Un **polinomio** es un término o una suma o resta finita de términos, solo con exponentes enteros no negativos en las variables. Si los términos de un polinomio contienen solo la variable x, entonces el polinomio se conoce como **polinomio en x**. (Los polinomios en otras variables se definen del mismo modo).

$$5x^3 - 8x^2 + 7x - 4, \quad 9p^5 - 3, \quad 8r^2, \quad \text{y} \quad 6$$ Ejemplos de polinomios

La expresión $9x^2 - 4x - \frac{6}{x}$ no es un polinomio debido a la presencia de $-\frac{6}{x}$. Los términos de un polinomio no pueden tener variables en el denominador.

El exponente más grande de una variable en un polinomio indica el **grado** del polinomio. Una constante diferente de cero tiene un grado igual a cero. (El polinomio 0 no tiene grado). Por ejemplo,

$3x^6 - 5x^2 + 2x + 3$ es un polinomio de grado 6.

Un polinomio puede tener más de una variable. Un término que tiene más de una variable tiene un grado igual a la suma de todos los exponentes que aparecen en las variables del término. Por ejemplo, $-3x^4y^3z^5$ tiene un grado igual a $4 + 3 + 5 = 12$. El grado de un polinomio con más de una variable es igual al mayor grado de cualquier término que aparece en el polinomio. De acuerdo con esta definición, el polinomio

$2x^4y^3 - 3x^5y + x^6y^2$ es de grado 8

porque el término x^6y^2 es de grado 8.

Un polinomio que incluye exactamente tres términos se conoce como **trinomio** y uno que contiene exactamente dos términos es un **binomio**. La **tabla 5** muestra varios polinomios e indica el grado y tipo de cada uno.

Tabla 5

Polinomio	Grado	Tipo
$9p^7 - 4p^3 + 8p^2$	7	Trinomio
$29x^{11} + 8x^{15}$	15	Binomio
$-10r^6s^8$	14	Monomio
$5a^3b^7 - 3a^5b^5 + 4a^2b^9 - a^{10}$	11	Ninguno de estos

Adición y sustracción

Como las variables utilizadas en los polinomios representan números reales, un polinomio representa un número real. Esto significa que todas las propiedades de los números reales se cumplen en el caso de los polinomios. A continuación se presenta una aplicación de la propiedad distributiva.

$3m^5 - 7m^5 = (3 - 7)\,m^5 = -4m^5$ Se reducen los términos semejantes.

Términos semejantes son los términos que tienen exactamente las mismas variables. Por lo tanto, los polinomios se suman con la adición de los coeficientes de los términos semejantes, y se restan con la sustracción de los coeficientes de los términos semejantes.

EJEMPLO 1 Suma y resta de polinomios

Sume o reste como se indica.

a) $(2y^4 - 3y^2 + y) + (4y^4 + 7y^2 + 6y)$

b) $(-3m^3 - 8m^2 + 4) - (m^3 + 7m^2 - 3)$

c) $(8m^4p^5 - 9m^3p^5) + (11m^4p^5 + 15m^3p^5)$

d) $4(x^2 - 3x + 7) - 5(2x^2 - 8x - 4)$

SOLUCIÓN

a) $(2y^4 - 3y^2 + y) + (4y^4 + 7y^2 + 6y)$

$= (2 + 4)y^4 + (-3 + 7)y^2 + (1 + 6)y$ Se reducen los términos semejantes.

$= 6y^4 + 4y^2 + 7y$

b) $(-3m^3 - 8m^2 + 4) - (m^3 + 7m^2 - 3)$

$= (-3 - 1)m^3 + (-8 - 7)m^2 + [4 - (-3)]$

$= -4m^3 - 15m^2 + 7$

c) $(8m^4p^5 - 9m^3p^5) + (11m^4p^5 + 15m^3p^5)$

$= 19m^4p^5 + 6m^3p^5$

d) $4(x^2 - 3x + 7) - 5(2x^2 - 8x - 4)$

$= 4x^2 - 4(3x) + 4(7) - 5(2x^2) - 5(-8x) - 5(-4)$ Propiedad distributiva

$= 4x^2 - 12x + 28 - 10x^2 + 40x + 20$ Propiedad asociativa

$= -6x^2 + 28x + 48$ Se reducen los términos semejantes.

■■■

Como se muestra en los **ejemplos 1 *a*), *b*) y *d*),** los polinomios con una variable a menudo se escriben con sus términos en **potencias decrecientes**. Primero, el término de mayor grado, luego el siguiente de mayor grado, y así sucesivamente.

Multiplicación

Las propiedades asociativa y distributiva, junto con las propiedades de exponentes, también se pueden usar para calcular el producto de dos polinomios. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
&(3x - 4)(2x^2 - 3x + 5)\\
&= (3x - 4)(2x^2) - (3x - 4)(3x) + (3x - 4)(5)\\
&= (3x)(2x^2) - 4(2x^2) - (3x)(3x) - (-4)(3x) + (3x)5 - 4(5)\\
&= 6x^3 - 8x^2 - 9x^2 + 12x + 15x - 20\\
&= 6x^3 - 17x^2 + 27x - 20.
\end{aligned}$$

Algunas veces es más conveniente escribir este producto en forma vertical, como aquí se muestra.

Asegúrese de colocar los términos semejantes en la misma columna.

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^2 - 3x + 5\\
 & 3x - 4\\
\hline
 & -8x^2 + 12x - 20 \quad \leftarrow -4(2x^2 - 3x + 5)\\
6x^3 - 9x^2 + 15x & \quad \leftarrow 3x(2x^2 - 3x + 5)\\
\hline
6x^3 - 17x^2 + 27x - 20 & \text{Se suma verticalmente.}
\end{array}$$

EJEMPLO 2 Multiplicación vertical de polinomios

Multiplique $(3p^2 - 4p + 1)(p^3 + 2p - 8)$.

SOLUCIÓN

Se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo y luego se suma.

$$\begin{array}{rl} & 3p^2 - 4p + 1 \\ & p^3 + 2p - 8 \\ \hline & -24p^2 + 32p - 8 \quad \text{Se multiplica } 3p^2 - 4p + 1 \text{ por } -8. \\ & 6p^3 - 8p^2 + 2p \quad \text{Se multiplica } 3p^2 - 4p + 1 \text{ por } 2p. \\ 3p^5 - 4p^4 + p^3 & \quad \text{Se multiplica } 3p^2 - 4p + 1 \text{ por } p^3. \\ \hline 3p^5 - 4p^4 + 7p^3 - 32p^2 + 34p - 8 & \quad \text{Se suman las columnas.} \end{array}$$

■■■

La ayuda de memoria "FOIL" es una manera eficaz de obtener el producto de dos binomios. FOIL (un acrónimo de *First*, *Outside*, *Inside*, *Last*, es decir, primero, fuera, dentro, último) indica los pares de términos a ser multiplicados para obtener el producto, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3 Uso del método FOIL

Calcule los siguientes productos.

a) $(6m + 1)(4m - 3)$ ***b)*** $(2x + 7)(2x - 7)$ ***c)*** $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$

SOLUCIÓN

a) $(6m + 1)(4m - 3)$

$$\begin{array}{rl} & \overset{\text{F}}{(6m)}(4m) + \overset{\text{O}}{(6m)}(-3) + \overset{\text{I}}{1}(4m) + \overset{\text{L}}{1}(-3) \\ = & 24m^2 - 18m + 4m - 3 \\ = & 24m^2 - 14m - 3 \quad \text{Se reducen los términos semejantes.} \end{array}$$

b) $(2x + 7)(2x - 7)$

$$\begin{array}{rl} = & 4x^2 - 14x + 14x - 49 \quad \text{FOIL} \\ = & 4x^2 - 49 \quad \text{Se reducen los términos semejantes.} \end{array}$$

c) $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = x^4 + 4x^2 - 4x^2 - 16$

$$= x^4 - 16$$

■■■

El **producto notable**

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

se puede usar para resolver algunos problemas de multiplicación.

$$\begin{aligned} 51 \times 49 &= (50 + 1)(50 - 1) \\ &= 50^2 - 1^2 \\ &= 2500 - 1 \\ &= 2499 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 102 \times 98 &= (100 + 2)(100 - 2) \\ &= 100^2 - 2^2 \\ &= 10{,}000 - 4 \\ &= 9996 \end{aligned}$$

Una vez que se identifican estos patrones, las multiplicaciones de este tipo se pueden efectuar mentalmente.

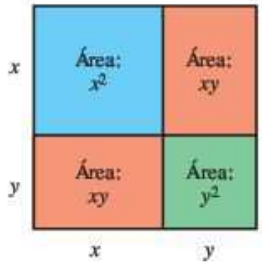
Productos notables

En el **ejemplo 3 *a)***, el producto de dos binomios es un trinomio, mientras que en el ***b)*** y ***c)*** el producto de dos binomios es un binomio. ***El producto de dos binomios de las formas $x + y$ y $x - y$ siempre es un binomio.*** Compruebe que lo siguiente es verdadero.

Producto de la suma y la diferencia de dos términos

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

El producto $x^2 - y^2$ se conoce como **diferencia de dos cuadrados**.



El **producto notable**

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

se puede ilustrar geométricamente usando el diagrama mostrado aquí. Cada lado del cuadrado grande tiene una longitud $x + y$, de modo que el área del cuadrado es

$$(x + y)^2.$$

El cuadrado grande está formado por dos cuadrados más pequeños, y dos rectángulos congruentes. La suma de las áreas de estas figuras es

$$x^2 + 2xy + y^2.$$

Como estas expresiones representan la misma cantidad, deben ser iguales; por lo tanto, nos indican el patrón para elevar al cuadrado un binomio.

EJEMPLO 4 Cálculo de productos notables

Calcule cada producto.

a) $(3p + 11)(3p - 11)$ **b)** $(5m^3 - 3)(5m^3 + 3)$

c) $(9k - 11r^3)(9k + 11r^3)$

SOLUCIÓN

a) Utilizando el patrón analizado anteriormente, se sustituye x por $3p$ y y por 11.

$$\begin{aligned}(3p + 11)(3p - 11) &= (3p)^2 - 11^2 \\ &= 9p^2 - 121\end{aligned}$$

b) $(5m^3 - 3)(5m^3 + 3)$

$$\begin{aligned}&= (5m^3)^2 - 3^2 \\ &= 25m^6 - 9\end{aligned}$$

c) $(9k - 11r^3)(9k + 11r^3)$

$$\begin{aligned}&= (9k)^2 - (11r^3)^2 \\ &= 81k^2 - 121r^6\end{aligned}$$

■■■

Los **cuadrados de binomios** también son productos notables.

Cuadrados de binomios

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

EJEMPLO 5 Cálculo de productos notables

Calcule cada producto.

a) $(2m + 5)^2$ **b)** $(3x - 7y^4)^2$

SOLUCIÓN

a) $(2m + 5)^2 = (2m)^2 + 2(2m)(5) + (5)^2$

$$= 4m^2 + 20m + 25$$

El cuadrado de un binomio tiene tres términos $(x + y)^2 \neq x^2 + y^2$

b) $(3x - 7y^4)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(7y^4) + (7y^4)^2$

$$= 9x^2 - 42xy^4 + 49y^8$$

■■■

Factorización

El proceso de obtención de polinomios cuyo producto es igual a un polinomio determinado se conoce como **factorización**. Por ejemplo, como

$$4x + 12 = 4(x + 3),$$

tanto 4 como $x + 3$ se conocen como **factores** de $4x + 12$. Además, $4(x + 3)$ se conoce como **forma factorizada** de $4x + 12$. Un polinomio que no se puede escribir como el producto de dos polinomios con coeficientes enteros es un **polinomio primo**. Un polinomio se encuentra **factorizado completamente** cuando está escrito como el producto de polinomios primos con coeficientes enteros.

La factorización es el inverso de la multiplicación, de modo que una comprobación requiere que el producto de la forma factorizada dé el polinomio original.

Factorización con el máximo común divisor

Cuando se factoriza un polinomio, primero se busca un monomio que sea el máximo común divisor (MCD) de todos los términos del polinomio.

$$\begin{aligned} &6x^2y^3 + 9xy^4 + 18y^5 \\ &= (3y^3)(2x^2) + (3y^3)(3xy) + (3y^3)(6y^2) \quad \text{MCD} = 3y^3 \\ &= 3y^3(2x^2 + 3xy + 6y^2) \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Factorización con el máximo común divisor

Factorice cada polinomio con el máximo común divisor.

a) $9y^5 + y^2$ ***b)*** $6x^2t + 8xt + 12t$

SOLUCIÓN

a) $9y^5 + y^2 = y^2 \cdot 9y^3 + y^2 \cdot 1$ El máximo común divisor es y^2.

$= y^2(9y^3 + 1)$

b) $6x^2t + 8xt + 12t$

$= 2t(3x^2 + 4x + 6)$ MCD $= 2t$ ■■■

Factorización por agrupamiento

Cuando un polinomio tiene más de tres términos, algunas veces se puede factorizar con un método llamado **factorización por agrupamiento**.

$$\begin{aligned} &ax + ay + 6x + 6y \\ &= (ax + ay) + (6x + 6y) && \text{Se agrupan los términos.} \\ &= a(x + y) + 6(x + y) && \text{Se factoriza cada grupo.} \\ &= (x + y)(a + 6) && \text{Se factoriza } (x + y). \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Factorización por agrupamiento

Factorice por agrupamiento.

a) $mp^2 + 7m + 3p^2 + 21$ ***b)*** $2y^2 - 2z - ay^2 + az$

SOLUCIÓN

a) $mp^2 + 7m + 3p^2 + 21$

$= (mp^2 + 7m) + (3p^2 + 21)$ Se agrupan los términos.

$= m(p^2 + 7) + 3(p^2 + 7)$ Se factoriza cada grupo.

$= (p^2 + 7)(m + 3)$ $p^2 + 7$ es un factor común.

b) $2y^2 - 2z - ay^2 + az$

$= (2y^2 - 2z) + (-ay^2 + az)$ Se agrupan los términos.

$= 2(y^2 - z) + a(-y^2 + z)$ Se factoriza cada grupo.

La expresión $-y^2 + z$ es el negativo de $y^2 - z$, de modo que se factoriza $-a$ en lugar de a.

$= 2(y^2 - z) - a(y^2 - z)$ Se factoriza $-a$.

$= (y^2 - z)(2 - a)$ Se factoriza $y^2 - z$. ■■■

Factorización de trinomios

La factorización de trinomios requiere del método FOIL de una manera inversa.

EJEMPLO 8 Factorización de trinomios

Factorice los siguientes trinomios.

a) $4y^2 - 11y + 6$ **b)** $6p^2 - 7p - 5$

SOLUCIÓN

a) Para factorizar este polinomio debemos encontrar enteros a, b, c y d tales que

$$4y^2 - 11y + 6 = (ay + b)(cy + d).$$

Usando el método FOIL, vemos que $ac = 4$ y $bd = 6$. Los factores positivos de 4 son 4 y 1 o 2 y 2. Como el término medio es negativo, se consideran solo los factores negativos de 6. Las posibilidades son -2 y -3 o -1 y -6. Intente con varios arreglos.

$$(2y - 1)(2y - 6) = 4y^2 - 14y + 6 \quad \text{Incorrecto}$$
$$(2y - 2)(2y - 3) = 4y^2 - 10y + 6 \quad \text{Incorrecto}$$
$$(y - 2)(4y - 3) = 4y^2 - 11y + 6 \quad \text{Correcto}$$

El último intento da la factorización correcta.

b) Nuevamente, se intentan varias posibilidades. Los factores positivos de 6 pueden ser 2 y 3 o 1 y 6. Como factores de -5, solo tenemos -1 y 5 o -5 y 1.

$$(2p - 5)(3p + 1) = 6p^2 - 13p - 5 \quad \text{Incorrecto}$$
$$(3p - 5)(2p + 1) = 6p^2 - 7p - 5 \quad \text{Correcto}$$

Por lo tanto, $6p^2 - 7p - 5$ se factoriza como $(3p - 5)(2p + 1)$. ■■■

Los trinomios cuadrados perfectos se pueden factorizar como sigue.

Trinomios cuadrados perfectos

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

EJEMPLO 9 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Factorice cada polinomio.

a) $16p^2 - 40pq + 25q^2$ **b)** $169x^2 + 104xy^2 + 16y^4$

SOLUCIÓN

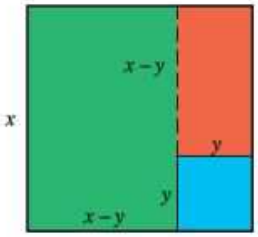
a) Asegúrese de que el término medio del trinomio que se factoriza, $-40pq$ en este caso, sea dos veces el producto de ambos términos del binomio $4p - 5q$.

$$-40pq = 2(4p)(-5q)$$

Como $16p^2 = (4p)^2$ y $25q^2 = (5q)^2$, utilice el segundo patrón que aquí se muestra.

$$16p^2 - 40pq + 25q^2 = (4p)^2 - 2(4p)(5q) + (5q)^2$$
$$= (4p - 5q)^2$$

b) $169x^2 + 104xy^2 + 16y^4 = (13x + 4y^2)^2$, ya que $2(13x)(4y^2) = 104xy^2$. ■■■



Una **demostración geométrica** de la propiedad de diferencia de cuadrados se muestra arriba. (La demostración es válida solo para $x > y > 0$).

$$x^2 - y^2 = x(x - y) + y(x - y)$$
$$= (x - y)(x + y)$$

Se factoriza $x - y$ en este segundo paso.

Factorización de binomios notables

Diferencia de cuadrados

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

EJEMPLO 10 Factorización de diferencia de cuadrados

Factorice los siguientes polinomios.

a) $4m^2 - 9$ *b)* $256k^4 - 625m^4$ *c)* $x^2 - 6x + 9 - y^4$

SOLUCIÓN

a) $4m^2 - 9$

$= (2m)^2 - 3^2$ Diferencia de cuadrados

$= (2m + 3)(2m - 3)$

b) $256k^4 - 625m^4$

$= (16k^2)^2 - (25m^2)^2$ Diferencia de cuadrados

$= (16k^2 + 25m^2)(16k^2 - 25m^2)$

$= (16k^2 + 25m^2)(4k + 5m)(4k - 5m)$

c) $x^2 - 6x + 9 - y^4$

$= (x^2 - 6x + 9) - y^4$ Se agrupan los tres primeros términos.

$= (x - 3)^2 - (y^2)^2$ Trinomio cuadrado perfecto

$= [(x - 3) + y^2][(x - 3) - y^2]$ Diferencia de cuadrados

$= (x - 3 + y^2)(x - 3 - y^2)$

Suma y diferencia de cubos

Suma de cubos	$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
Diferencia de cubos	$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

EJEMPLO 11 Factorización con sumas y diferencias de cubos

Factorice los siguientes polinomios.

a) $x^3 + 27$ *b)* $m^3 - 64n^3$ *c)* $8q^6 + 125p^9$

SOLUCIÓN

a) $x^3 + 27$

$= x^3 + 3^3$ Suma de cubos

$= (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

b) $m^3 - 64n^3$

$= m^3 - (4n)^3$ Diferencia de cubos

$= (m - 4n)[m^2 + m(4n) + (4n)^2]$

$= (m - 4n)(m^2 + 4mn + 16n^2)$

c) $8q^6 + 125p^9$

$= (2q^2)^3 + (5p^3)^3$ Suma de cubos

$= (2q^2 + 5p^3)[(2q^2)^2 - (2q^2)(5p^3) + (5p^3)^2]$

$= (2q^2 + 5p^3)(4q^4 - 10q^2p^3 + 25p^6)$

6.6 EJERCICIOS

Efectúe cada suma o diferencia.

1. $(3x^2 - 4x + 5) + (-2x^2 + 3x - 2)$

2. $(4m^3 - 3m^2 + 5) + (-3m^3 - m^2 + 5)$

3. $(12y^2 - 8y + 6) - (3y^2 - 4y + 2)$

4. $(8p^2 - 5p) - (3p^2 - 2p + 4)$

5. $(6m^4 - 3m^2 + m) - (2m^3 + 5m^2 + 4m) + (m^2 - m)$

6. $-(8x^3 + x - 3) + (2x^3 + x^2) - (4x^2 + 3x - 1)$

7. $5(2x^2 - 3x + 7) - 2(6x^2 - x + 12)$

8. $8x^2y - 3xy^2 + 2x^2y - 9xy^2$

Obtenga cada producto.

9. $(x + 3)(x - 8)$

10. $(y - 3)(y - 9)$

11. $(4r - 1)(7r + 2)$

12. $(5m - 6)(3m + 4)$

13. $4x^2(3x^3 + 2x^2 - 5x + 1)$

14. $2b^3(b^2 - 4b + 3)$

15. $(2m + 3)(2m - 3)$

16. $(8s - 3t)(8s + 3t)$

17. $(4m + 2n)^2$

18. $(a - 6b)^2$

19. $(5r + 3t^2)^2$

20. $(2z^4 - 3y)^2$

21. $(2z - 1)(-z^2 + 3z - 4)$

22. $(k + 2)(12k^3 - 3k^2 + k + 1)$

23. $(m - n + k)(m + 2n - 3k)$

24. $(r - 3s + t)(2r - s + t)$

25. $(a - b + 2c)^2$

26. $(k - y + 3m)^2$

27. ¿Cuál de los siguientes es un trinomio con potencias decrecientes, de grado 6?

A. $5x^6 - 4x^5 + 12$ **B.** $6x^5 - x^6 + 4$

C. $2x + 4x^2 - x^6$ **D.** $4x^6 - 6x^4 + 9x + 1$

28. Dé un ejemplo de polinomio de cuatro términos con la variable x, de grado 5, escrito con sus potencias decrecientes, que no tenga un término de cuarto grado.

29. El exponente de la expresión 6^3 es 3. Explique por qué el grado de 6^3 no es 3. ¿Cuál es el grado?

30. Explique con sus propias palabras cómo elevar al cuadrado un binomio.

Factorice con el máximo común divisor de cada polinomio.

31. $8m^4 + 6m^3 - 12m^2$

32. $2p^5 - 10p^4 + 16p^3$

33. $4k^2m^3 + 8k^4m^3 - 12k^2m^4$

34. $28r^4s^2 + 7r^3s - 35r^4s^3$

35. $2(a + b) + 4m(a + b)$

36. $4(y - 2)^2 + 3(y - 2)$

37. $2(m - 1) - 3(m - 1)^2 + 2(m - 1)^3$

38. $5(a + 3)^3 - 2(a + 3) + (a + 3)^2$

Factorice cada polinomio por agrupamiento.

39. $6st + 9t - 10s - 15$

40. $10ab - 6b + 35a - 21$

41. $rt^3 + rs^2 - pt^3 - ps^2$

42. $2m^4 + 6 - am^4 - 3a$

43. $16a^2 + 10ab - 24ab - 15b^2$

44. $15 - 5m^2 - 3r^2 + m^2r^2$

45. $20z^2 - 8zx - 45zx + 18x^2$

46. $4 - 2y - 2x + xy$

47. $1 - a + ab - b$

48. Considere el polinomio $1 - a + ab - b$ del **ejercicio 47**. La solución incluida en la sección de respuestas es $(1 - a)(1 - b)$. Sin embargo, existen otras formas de factorización adecuadas. ¿Cuál de las formas de los incisos A a D *no* es una forma de factorización de este polinomio?

A. $(a - 1)(b - 1)$ **B.** $(-a + 1)(-b + 1)$

C. $(-1 + a)(-1 + b)$ **D.** $(1 - a)(b + 1)$

Factorice cada trinomio.

49. $x^2 - 2x - 15$

50. $r^2 + 8r + 12$

51. $y^2 + 2y - 35$

52. $x^2 - 7x + 6$

53. $6a^2 - 48a - 120$

54. $8h^2 - 24h - 320$

55. $3m^3 + 12m^2 + 9m$

56. $9y^4 - 54y^3 + 45y^2$

57. $6k^2 + 5kp - 6p^2$

58. $14m^2 + 11mr - 15r^2$

59. $5a^2 - 7ab - 6b^2$

60. $12s^2 + 11st - 5t^2$

61. $21x^2 - xy - 2y^2$

62. $30a^2 + am - m^2$

63. $24a^4 + 10a^3b - 4a^2b^2$

64. $18x^5 + 15x^4z - 75x^3z^2$

65. $15x^2y^5 - 20x^3y^3 + 15xy^2$

66. $28m^4n^6 + 21m^6n^3 - 35m^3n^2$

Factorice cada trinomio cuadrado perfecto. Tal vez sea necesario factorizar primero un factor común.

67. $9m^2 - 12m + 4$

68. $16p^2 - 40p + 25$

69. $32a^2 - 48ab + 18b^2$

70. $20p^2 - 100pq + 125q^2$

71. $4x^2y^2 + 28xy + 49$

72. $9m^2n^2 - 12mn + 4$

Factorice cada diferencia de cuadrados.

73. $x^2 - 36$

74. $t^2 - 64$

75. $y^2 - w^2$

76. $25 - w^2$

77. $9a^2 - 16$

78. $16q^2 - 25$

79. $25s^4 - 9t^2$

80. $36z^2 - 81y^4$

81. $p^4 - 625$

82. $m^4 - 81$

Factorice cada suma o diferencia de cubos.

83. $8 - a^3$

84. $r^3 + 27$

85. $125x^3 - 27$

86. $8m^3 - 27n^3$

87. $27y^9 + 125z^6$

88. $27z^3 + 729y^3$

Determine el método de factorización y luego factorice el polinomio por completo.

89. $x^2 + xy - 5x - 5y$

90. $8r^2 - 10rs - 3s^2$

91. $12m^2 + 16mn - 35n^2$

92. $36a^2 + 60a + 25$

93. $4z^2 + 28z + 49$

94. $6p^4 + 7p^2 - 3$

95. $1000x^3 + 343y^3$

96. $b^2 + 8b + 16 - a^2$

97. $125m^6 - 216$

98. $q^2 + 6q + 9 - p^2$

99. $p^4(m - 2n) + q(m - 2n)$

100. $216p^3 + 125q^3$

6.7 ECUACIONES CUADRÁTICAS Y APLICACIONES

Ecuaciones cuadráticas • Propiedad de factor cero • Propiedad de raíz cuadrada • Fórmula cuadrática • Aplicaciones

Ecuaciones cuadráticas

Ecuación cuadrática

Una ecuación que se puede escribir en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{Forma estándar}$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$, es una **ecuación cuadrática**. La forma de la ecuación presentada se conoce como **forma estándar**.

Propiedad de factor cero

El método más sencillo para resolver una ecuación cuadrática, aunque no siempre se aplica fácilmente, es la factorización. Este método depende de la siguiente propiedad.

Propiedad de factor cero

Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$, o ambos son iguales a 0.

Al resolver una ecuación cuadrática por la propiedad de factor cero, la ecuación debe estar en forma estándar antes de factorizar.

EJEMPLO 1 Uso de la propiedad de factor cero

Resuelva $6x^2 + 7x = 3$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
6x^2 + 7x &= 3 && \\
6x^2 + 7x - 3 &= 0 && \text{Forma estándar} \\
(3x - 1)(2x + 3) &= 0 && \text{Se factoriza.} \\
3x - 1 = 0 \quad &\text{o} \quad 2x + 3 = 0 && \text{Propiedad de factor cero} \\
3x = 1 \quad &\text{o} \quad 2x = -3 && \text{Se resuelve cada ecuación.} \\
x = \frac{1}{3} \quad &\text{o} \quad x = -\frac{3}{2} && \text{Se divide.}
\end{aligned}$$

Primero se verifica sustituyendo $\frac{1}{3}$ y luego $-\frac{3}{2}$ en la ecuación original. El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right\}$. ■■■

Propiedad de raíz cuadrada

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 = k, k \geq 0$, se puede resolver por factorización.

$$\begin{aligned}
x^2 &= k && \\
x^2 - k &= 0 && \text{Se resta } k. \\
(x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k}) &= 0 && \text{Se factoriza usando radicales.} \\
x + \sqrt{k} = 0 \quad &\text{o} \quad x - \sqrt{k} = 0 && \text{Propiedad de factor cero} \\
x = -\sqrt{k} \quad &\text{o} \quad x = \sqrt{k} && \text{Se resuelve cada ecuación.}
\end{aligned}$$

Esto nos lleva a la propiedad de la raíz cuadrada para resolver ecuaciones.

Propiedad de la raíz cuadrada

Si $k \geq 0$, entonces las soluciones de $x^2 = k$ son $x = \pm\sqrt{k}$.

Si $k > 0$, la ecuación $x^2 = k$ tiene dos soluciones reales. Si $k = 0$, existe solo una solución, 0. Si $k < 0$, no existen soluciones reales. (Sin embargo, en este caso, *existen* soluciones imaginarias. Los números imaginarios se analizan brevemente en las **extensiones** sobre números complejos al final del capítulo 5 y de este capítulo).

EJEMPLO 2 Uso de la propiedad de raíz cuadrada

Use la propiedad de raíz cuadrada para obtener las soluciones reales de las ecuaciones cuadráticas siguientes.

a) $x^2 = 25$ ***b)*** $x^2 = 18$ ***c)*** $x^2 = -3$ ***d)*** $(x-4)^2 = 12$

SOLUCIÓN

a) Como $\sqrt{25} = 5$, el conjunto solución de la ecuación $x^2 = 25$ es $\{5, -5\}$, el cual se abrevia como $\{\pm 5\}$.

El hecho de **completar el cuadrado**, que se usó en la deducción de la fórmula cuadrática, tiene aplicaciones importantes en álgebra. Para convertir la expresión $x^2 + kx$ en el cuadrado de un binomio, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir,

$$\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)k\right]^2 = \tfrac{k^2}{4}.$$

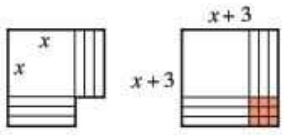
Luego se obtiene

$$x^2 + kx + \frac{k^2}{4} = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2.$$

Por ejemplo, para igualar $x^2 + 6x$ al cuadrado de un binomio, se suma 9, porque $9 = \left[\frac{1}{2}(6)\right]^2$. Esto da como resultado el trinomio $x^2 + 6x + 9$, el cual es igual a $(x+3)^2$.

Los griegos tenían un método para obtener el cuadrado geométricamente. Por ejemplo, para obtener el cuadrado de $x^2 + 6x$, se inicia con un cuadrado de lado igual a x. Se agregan tres rectángulos de ancho igual a 1 y longitud x en el lado derecho y en la parte inferior. Cada rectángulo tiene área igual a $1x$, o x, de modo que el área total de la figura es ahora $x^2 + 6x$. Para rellenar la esquina (es decir, "completar el cuadrado"), se suman 9 cuadrados de 1 por 1, como se muestra. Los lados del nuevo cuadrado que se obtiene son de longitud igual a $x + 3$ y área igual a

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$



b)
$$x^2 = 18$$
$$x = \pm\sqrt{18} \quad \text{Propiedad de raíz cuadrada}$$
$$x = \pm\sqrt{9 \cdot 2} \quad \text{Se factoriza 18 como } 9 \cdot 2.$$
$$x = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{2} \quad \text{Regla del producto para raíces cuadradas}$$
$$x = \pm 3\sqrt{2} \quad \sqrt{9} = 3$$

El conjunto solución es $\{\pm 3\sqrt{2}\}$.

c) Como $-3 < 0$, la ecuación $x^2 = -3$ no tiene soluciones reales. El conjunto solución es $\emptyset$.

d)
$$(x - 4)^2 = 12$$
$$x - 4 = \pm\sqrt{12} \quad \text{Propiedad de raíz cuadrada}$$
$$x = 4 \pm \sqrt{12} \quad \text{Se suma 4.}$$
$$x = 4 \pm \sqrt{4 \cdot 3} \quad \text{Se factoriza 12 como } 4 \cdot 3.$$
$$x = 4 \pm 2\sqrt{3} \quad \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

El conjunto solución es $4 \pm 2\sqrt{3}$ ■■■

Fórmula cuadrática

Al *completar un cuadrado* (véase la nota al margen de la **página anterior**), es posible deducir una de las fórmulas más importantes del álgebra, la *fórmula cuadrática*.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{Ecuación cuadrática estándar } (a > 0)$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{Se divide entre } a.$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \text{Se suma } -\frac{c}{a}.$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad \text{Se suma } \frac{b^2}{4a^2}.$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{Se factoriza el lado izquierdo. Se reducen los términos semejantes de la derecha.}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{Propiedad de raíz cuadrada}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} \quad \text{Regla del cociente para raíces cuadradas}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Se resta } \frac{b}{2a}.$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Se reducen los términos semejantes. Esto también es válido para } a < 0.$$

Tenga cuidado; $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ se divide totalmente entre $2a$.



En un episodio televisivo de la primera temporada (2004) de *Blue Collar* se presentó una escena con Bill Engvall rindiendo tributo sarcásticamente a un personaje subestimado de su vida.

A mi profesor de álgebra de preparatoria, por enseñarme que x es igual a menos b más menos la raíz cuadrada de b cuadrada menos 4ac, todo entre 2a, porque Dios sabe que uso esa información ¡TODOS LOS DÍAS!

Evidentemente, el profesor de Bill hizo un buen trabajo, porque usó la palabra "todo" antes de $2a$. Un error común de los estudiantes es olvidar escribir $-b$ en el numerador, junto con la expresión del radical en la **fórmula cuadrática**. Véase el **ejercicio 42** de esta sección.

Fórmula cuadrática

Las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, están dadas por la **fórmula cuadrática**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diferencia radical respecto de otros métodos de obtención de la razón áurea Recuerde que en un capítulo anterior vimos que la razón áurea se encuentra en muchas áreas de las matemáticas, el arte y la naturaleza. En un nota al margen, demostramos que la *fracción "continua"*

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

es igual a la razón áurea, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ahora considere este *radical "anidado"*:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$$

Consideremos que x representa esta expresión. Como aparece "dentro de sí misma", podemos escribir

$$x=\sqrt{1+x}$$
$$x^2=1+x$$
$$x^2-x-1=0.$$

Usando la fórmula cuadrática, con $a=1$, $b=-1$, y $c=-1$, es posible demostrar que la solución positiva de esta ecuación y, por lo tanto, el valor del radical anidado es... (¡lo adivinó!) la razón áurea.

EJEMPLO 3 Uso de la fórmula cuadrática

Resuelva $x^2-4x+2=0$.

SOLUCIÓN

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ Fórmula cuadrática

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(2)}}{2(1)}$$ $a=1, b=-4, c=2$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}$$ Inicio de la simplificación

$$x=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}$$ $\sqrt{16-8}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$$x=\frac{2(2\pm\sqrt{2})}{2}$$ Se factoriza con 2 en el numerador.

Se factoriza y luego se divide el factor común.

$$x=2\pm\sqrt{2}$$ Se divide el factor común.

El conjunto solución es $\{2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$, que se abrevia como $\{2\pm\sqrt{2}\}$. ■■■

EJEMPLO 4 Uso de la fórmula cuadrática

Resuelva $2x^2=x+4$.

SOLUCIÓN

Primero se escribe la ecuación en la forma estándar como $2x^2-x-4=0$.

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(2)(-4)}}{2(2)}$$ Fórmula cuadrática, con $a=2, b=-1, c=-4$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+32}}{4}$$ Se simplifica el radicando.

$$x=\frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$$ Se suma.

El conjunto solución es $\left\{\frac{1\pm\sqrt{33}}{4}\right\}$. ■■■

Aplicaciones

EJEMPLO 5 Aplicación de la ecuación cuadrática

Dos automóviles dejan atrás una intersección al mismo tiempo: uno se dirige hacia el norte, y el otro se dirige hacia el oeste. Tiempo más tarde, están separados exactamente 100 millas. El automóvil que va hacia el norte ha viajado 20 millas más que el vehículo que se dirige hacia el oeste. ¿Qué distancia ha viajado cada automóvil?

SOLUCIÓN

Paso 1 **Lea** el problema con cuidado.

Paso 2 **Asigne una variable.**

Sea x = distancia recorrida por el auto que se dirige hacia el oeste.

Entonces $(x+20)$ = distancia recorrida por el auto que se dirige hacia el norte.

Véase la **figura 16**. Los automóviles están separados 100 millas, de modo que la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a 100.

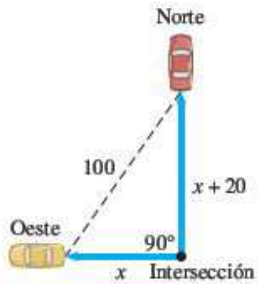


Figura 16



Évariste Galois (1811-1832), como buen francés, aceptó batirse en duelo. Se había dedicado por un tiempo a la investigación matemática en el área de solución de ecuaciones usando la **teoría de grupos**. Ahora, anticipándose a la posibilidad de su muerte, resumió sus descubrimientos más importantes en una carta dirigida a un amigo. Al día siguiente, Galois murió en el duelo, cuando aún no cumplía los 21 años.

Paso 3 **Escriba una ecuación.**

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{Teorema de Pitágoras}$$

$$100^2 = x^2 + (x + 20)^2 \qquad \text{Se sustituye.}$$

Paso 4 **Resuelva.**

$$10{,}000 = x^2 + x^2 + 40x + 400 \qquad \text{Se eleva el binomio al cuadrado.}$$

$$2x^2 + 40x - 9600 = 0 \qquad \text{Forma estándar}$$

$$x^2 + 20x - 4800 = 0 \qquad \text{Se dividen ambos lados entre 2.}$$

Se usa la fórmula cuadrática para obtener x.

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(1)(-4800)}}{2(1)} \qquad a = 1, b = 20, c = -4800$$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{19{,}600}}{2} \qquad \text{Se simplifica bajo el signo de radical.}$$

$$x = 60 \quad \text{o} \quad x = -80 \qquad \text{Se usa una calculadora.}$$

Paso 5 **Enuncie la respuesta.** Como la distancia no puede ser negativa, se descarta la solución negativa. Las distancias requeridas son 60 millas y $60 + 20 = 80$ millas.

Paso 6 **Verifique.** Como $60^2 + 80^2 = 100^2$, la respuesta es correcta. ■■■



Niels Henrik Abel (1802-1829), de nacionalidad noruega, fue identificado desde su niñez como un genio de las matemáticas, pero nunca recibió en vida el merecido reconocimiento profesional por su trabajo. Demostró que no existe una fórmula para resolver **ecuaciones de quinto grado**. La fórmula cuadrática (para ecuaciones de segundo grado) es bien conocida, y existen fórmulas para resolver ecuaciones de tercero y cuarto grados. El trabajo de Abel concluyó una investigación que había durado muchos años.

EJEMPLO 6 Aplicación de la ecuación cuadrática

Si en la Tierra se arroja una roca hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 144 pies, con una velocidad inicial de 112 pies por segundo, su posición (en pies por arriba del suelo) está dada por $s = -16t^2 + 112t + 144$, donde t es el tiempo en segundos después de arrojarla. ¿Cuánto tiempo tarda la roca en golpear el suelo?

SOLUCIÓN

Cuando la roca golpea el suelo, la distancia es de cero. Encuentre t cuando s es 0.

$$0 = -16t^2 + 112t + 144 \qquad \text{Sea } s = 0.$$

$$0 = t^2 - 7t - 9 \qquad \text{Se dividen ambos lados entre } -16.$$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 36}}{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{85}}{2} \qquad \text{Se suma.}$$

Esta respuesta se rechaza.

$$t \approx 8.1 \quad \text{o} \quad t \approx -1.1 \qquad \text{Se usa calculadora.}$$

Como la roca no puede tocar el suelo antes de ser arrojada, se descarta la solución negativa. La roca golpeará el suelo aproximadamente 8.1 segundos después de que fue arrojada. ■■■

6.7 EJERCICIOS

Llene los espacios con la respuesta correcta.

1. En la ecuación cuadrática $5x^2 + 4x - 8 = 0$, los valores de a, b y c son, respectivamente _____, _____ y _____.

2. Para resolver $3x^2 - 5x = -3$ aplicando la fórmula cuadrática, el primer paso es sumar _____ a ambos lados de la ecuación.

3. ¿Se puede usar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $2x^2 - 5 = 0$? Explique, y resuélvala si la respuesta es afirmativa.

4. ¿Se puede usar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $4x^2 + 3x = 0$? Explique, y resuélvala si la respuesta es afirmativa.

Resuelva cada ecuación aplicando la propiedad de factor cero.

5. $(x + 3)(x - 9) = 0$

6. $(x + 6)(x + 4) = 0$

7. $(2x - 7)(5x + 1) = 0$

8. $(7x - 3)(6x + 4) = 0$

9. $x^2 - x - 12 = 0$

10. $x^2 + 4x - 5 = 0$

11. $x^2 + 9x + 14 = 0$

12. $x^2 + 3x - 4 = 0$

13. $12x^2 + 4x = 1$

14. $15x^2 + 7x = 2$

15. $(x + 4)(x - 6) = -16$

16. $(x - 1)(3x + 2) = 4x$

Resuelva cada ecuación aplicando la propiedad de raíz cuadrada. Solo dé soluciones con números reales.

17. $x^2 = 64$

18. $x^2 = 16$

19. $x^2 = 24$

20. $x^2 = 48$

21. $x^2 = -5$

22. $x^2 = -10$

23. $(x - 4)^2 = 9$

24. $(x + 3)^2 = 25$

25. $(4 - x)^2 = 3$

26. $(3 + x)^2 = 11$

27. $(2x - 5)^2 = 13$

28. $(4x + 1)^2 = 19$

Resuelva cada ecuación aplicando la fórmula cuadrática. Solo dé soluciones con números reales.

29. $4x^2 - 8x + 1 = 0$

30. $x^2 + 2x - 5 = 0$

31. $2x^2 = 2x + 1$

32. $9x^2 + 6x = 1$

33. $x^2 - 1 = x$

34. $2x^2 - 4x = 5$

35. $4x(x + 1) = 1$

36. $4x(x - 1) = 19$

37. $(x + 2)(x - 3) = 1$

38. $(x - 5)(x + 2) = 6$

39. $x^2 - 6x = -14$

40. $x^2 = 2x - 2$

41. ¿Por qué no se puede usar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $2x^3 + 3x - 4 = 0$?

42. Un estudiante dio la fórmula cuadrática erróneamente, de la siguiente manera: $x = -b \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. ¿Cuál es el error aquí?

La expresión $b^2 - 4ac$, el radicando de la fórmula cuadrática, se conoce como el ***discriminante*** *de la ecuación cuadrática*

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Al evaluarla se puede determinar, sin resolver realmente la ecuación, el número y la naturaleza de las soluciones de la ecuación. Suponga que a, b y c son enteros. La siguiente tabla muestra cómo se puede usar el discriminante para analizar las soluciones.

Discriminante	Soluciones
Positivo y el cuadrado de un número entero	Dos soluciones racionales diferentes
Positivo, pero no el cuadrado de un número entero	Dos soluciones irracionales diferentes
Cero	Una solución racional (doble solución)
Negativo	No hay soluciones reales

En los ejercicios 43 a 48 evalúe el discriminante, y luego determine si la ecuación tiene ***a)*** *dos soluciones racionales diferentes,* ***b)*** *dos soluciones irracionales diferentes,* ***c)*** *una solución racional (solución doble) o* ***d)*** *no tiene soluciones reales.*

43. $x^2 + 6x + 9 = 0$

44. $4x^2 + 20x + 25 = 0$

45. $6x^2 + 7x - 3 = 0$

46. $2x^2 + x - 3 = 0$

47. $9x^2 - 30x + 15 = 0$

48. $2x^2 - x + 1 = 0$

49. Cuando se usa la fórmula cuadrática, si $b^2 - 4ac$ es positivo, entonces la ecuación tiene _____ soluciones reales. (¿cuántas?)

50. Si a, b y c son enteros en $ax^2 + bx + c = 0$ y $b^2 - 4ac = 17$, entonces la ecuación tiene _____ solución(es) irracional(es). (¿cuántas?)

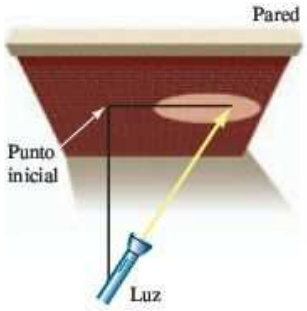
Resuelva los siguientes problemas. Use una calculadora cuando sea necesario, y redondee la respuesta a la décima más cercana.

51. ***Altura de un proyectil*** Un edificio mide 400 pies de altura. Suponga que se arroja hacia arriba una pelota desde la parte superior, y su posición s en pies por arriba del suelo está dada por la ecuación $s = -16t^2 + 45t + 400$, donde t es el número de segundos transcurridos. ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en alcanzar una altura de 200 pies por arriba del suelo?

52. ***Altura de un proyectil*** Un condominio mide 407 pies de altura. Suponga que se arroja una pelota hacia arriba desde la parte superior, y su posición s en pies por arriba del suelo está dada por la ecuación $s = -16t^2 + 75t + 407$, donde t es el número de segundos transcurridos. ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en alcanzar una altura de 450 pies por arriba del suelo?

53. ***Altura de un proyectil*** Remítase a las ecuaciones de los **ejercicios 51 y 52**. Suponga que el primer enunciado de cada problema no indica la altura. ¿Cómo podría usar la ecuación para determinar la altura?

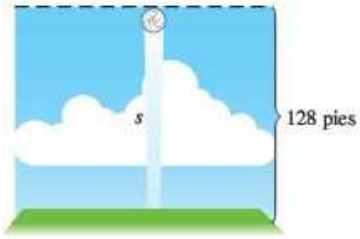
54. *Posición del haz de una linterna* El haz de una linterna se mueve horizontalmente hacia delante y hacia atrás a lo largo de una pared con la distancia de la luz sobre la pared a partir del punto inicial en t minutos determinada por $s = 100t^2 - 300t$. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que la luz regrese al punto inicial?



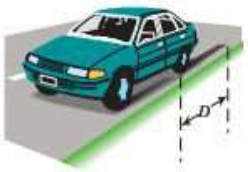
55. *Altura de un proyectil* Un objeto es arrojado directamente hacia arriba desde el suelo. Después de t segundos, su distancia en pies por arriba del suelo es $s = 144t - 16t^2$.

a) ¿Después de cuántos segundos estará el objeto a 128 pies por arriba del suelo? (*Sugerencia:* Busque un factor común antes de resolver la ecuación).

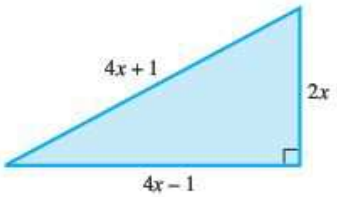
b) ¿Cuándo golpea el objeto el suelo?



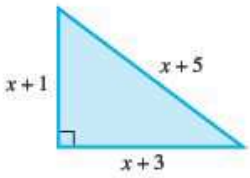
56. *Distancia de un derrape* La fórmula $D = 100t - 13t^2$ proporciona la distancia en pies que un automóvil a 68 millas por hora aproximadamente derrapa en t segundos. Calcule el tiempo necesario para que el automóvil derrape 190 pies. (*Sugerencia:* Considere que su respuesta debe ser una cifra menor que el tiempo que tarda el auto en detenerse, el cual es de 3.8 segundos).



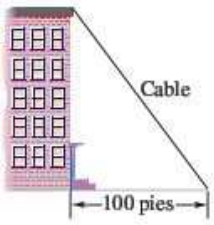
57. *Longitudes de los lados de un triángulo* Calcule las longitudes de los lados del triángulo rectángulo.



58. *Longitudes de los lados de un triángulo* Calcule las longitudes de los lados del triángulo rectángulo.

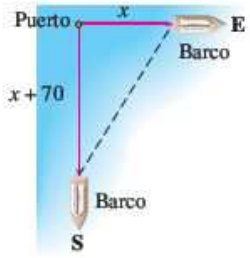


59. *Longitud de un cable* Remítase al **ejercicio 51**. Suponga que un cable se encuentra atado a la parte superior del edificio y está completamente tenso. Se sujeta en el suelo a una distancia de 100 pies de la base del edificio, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud del cable?

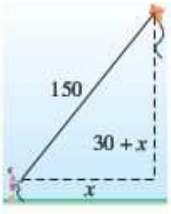


60. *Longitud de un cable* Remítase al **ejercicio 52**. Suponga que un cable se encuentra atado a la parte superior del edificio y está completamente tenso. La longitud del cable es el doble de la distancia entre la base del edificio y el punto del suelo donde está sujeto el cable. ¿Cuál es la longitud del cable?

61. *Distancias recorridas por dos barcos* Dos barcos zarpan del puerto al mismo tiempo: uno se dirige hacia el sur y otro se dirige hacia el este. Varias horas después, se encuentran a una distancia de 170 millas uno del otro. Si el barco que va hacia el sur viaja 70 millas más lejos que el otro, ¿cuántas millas ha viajado cada barco?



62. *Altura de una cometa* Paulette Starney está volando una cometa que se encuentra a una distancia horizontal de 30 pies respecto de su mano. La cuerda que hay entre su mano y la cometa mide 150 pies de longitud. ¿A qué distancia vertical está la cometa arriba de su mano?



63. ***Tamaño de la pieza de un juguete*** Un fabricante de juguetes necesita una pieza de plástico en forma de triángulo recto, cuyo cateto más largo debe medir 2 centímetros más que el doble del cateto más corto; la hipotenusa debe medir 1 centímetro más que el cateto más largo. ¿De qué longitud deben ser los lados de la pieza triangular?

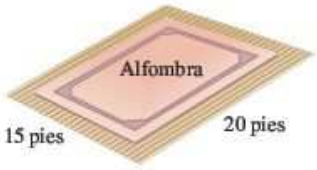
64. ***Dimensiones de un desarrollo inmobiliario*** Hollis Sherman, un desarrollador de bienes inmuebles, es dueño de un terreno circunscrito por calles que forman un triángulo rectángulo. La hipotenusa es 8 metros más larga que el cateto mayor, y el cateto más corto mide 9 metros menos que la hipotenusa. Obtenga las longitudes de los tres lados de la propiedad.

65. ***Dimensiones de las piezas de un rompecabezas*** Dos piezas de un rompecabezas grande de madera embonan para formar un rectángulo con una longitud de 1 centímetro menos que el doble del ancho. La diagonal, donde se unen las dos piezas, mide 2.5 centímetros de longitud. Calcule la longitud y el ancho del rectángulo.

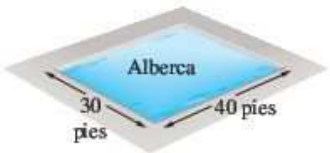
66. ***Escalera inclinada*** Una escalera de 13 pies está recargada contra una casa. La distancia de la parte inferior de la escalera a la casa mide 7 pies menos que la distancia de la parte superior de la escalera al suelo. ¿A qué distancia se encuentra la parte inferior de la escalera de la casa?



67. ***Dimensiones de una franja de piso alrededor de una alfombra*** Kyle y Marin quieren comprar una alfombra para una habitación que mide 15 por 20 pies. Desean dejar descubierta una franja uniforme del piso a lo largo de las orillas de la habitación. ¿De qué ancho será la franja si compran una alfombra cuya área es de 234 pies cuadrados?



68. ***Dimensiones de los bordes alrededor de una alberca*** La alberca de un club mide 30 pies de ancho y 40 pies de largo. Los miembros del club quieren agregar una franja en el borde, de ancho uniforme, alrededor de la alberca. Tienen material suficiente para 296 pies cuadrados. ¿De qué ancho debe ser la franja?



69. ***Dimensiones de un jardín*** El patio de Arif mide 20 por 30 metros; él desea poner un jardín de flores a la mitad del patio, dejando una franja de pasto de ancho uniforme alrededor del jardín. Arif tiene 184 metros cuadrados de pasto. En estas condiciones, ¿qué longitud y ancho debe tener el jardín?

70. ***Dimensiones de una caja de cartón*** Si a una pieza cuadrada de cartón se le corta en cada esquina un cuadrado de 3 pulgadas cuadradas, y luego se pliegan las pestañas hasta formar un caja abierta por arriba, el volumen de la caja está dado por la fórmula

$$V = 3(x - 6)^2,$$

donde x es la longitud de cada lado de la pieza original de la caja de cartón en pulgadas. ¿Qué longitud original produciría una caja de cartón con un volumen igual a 432 pulgadas cúbicas?

71. ***Dimensiones de una hoja de metal*** Una hoja rectangular de metal tiene una longitud que es 4 pulgadas menor que el doble del ancho. En cada esquina, se corta una pieza cuadrada de 2 pulgadas de lado. Las pestañas se pliegan entonces hasta formar una caja descubierta con un volumen de 256 pulgadas cúbicas. Obtenga la longitud y el ancho de la pieza original de metal.



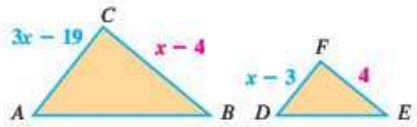
72. ***Tasa de interés*** La fórmula

$$A = P(1 + r)^2$$

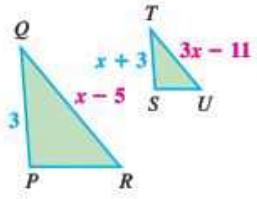
proporciona la cantidad A en dólares que P dólares generarán en dos años a una tasa r de interés (donde r está dada en decimales), con base en interés compuesto. ¿Qué tasa de interés logrará que \$2000 se conviertan en \$2142.25 en dos años?

Recuerde que los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales. (Remítase a la ***sección 6.3, ejercicios 53 a 56****). Con base en este hecho, calcule las longitudes de los lados indicados de cada par de triángulos semejantes. Verifique todas las soluciones posibles en ambos triángulos. Los lados de un triángulo no pueden ser negativos.*

73. Lado AC



74. Lado RQ



75. Durante siglos, los matemáticos han luchado para obtener una fórmula que pueda resolver ecuaciones de tercer grado (cúbicas). En el siglo XVI en Italia, Niccolo Tartaglia desarrolló un método para resolver una ecuación cúbica de la forma

$$x^3 + mx = n.$$

Girolamo Cardano rogó a Tartaglia para que le diera a conocer su método, y le dijo que guardaría el secreto. Sin embargo, Cardano publicó el método de Tartaglia en su *Ars Magna* de 1545 (aunque dio el crédito a Tartaglia).

La fórmula para encontrar una solución real de la ecuación $x^3 + mx = n$ es

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}.$$

Resuelva $x^3 + 9x = 26$ usando esta fórmula.

EXTENSIÓN Soluciones con números complejos de ecuaciones cuadráticas

Repaso de i y $\sqrt{-b}$, donde $b > 0$ • El discriminante

• Solución de una ecuación cuadrática

Repaso de i y $\sqrt{-b}$, donde $b > 0$ En la **extensión del capítulo 5**, vimos que el sistema de números reales es un subconjunto del sistema de números complejos. La parte imaginaria i, donde $i = \sqrt{-1}$, está definida de modo que $i^2 = -1$, y un número de la forma $a + bi$, donde a y b son reales, se conoce como número complejo.

La raíz cuadrada de un número negativo se puede escribir como el producto de i por un número real. He aquí algunos ejemplos.

$$\sqrt{-4} = i \cdot \sqrt{4} = i \cdot 2 = 2i$$
$$\sqrt{-7} = i\sqrt{7}$$
$$\sqrt{-32} = i\sqrt{32} = i\sqrt{16 \cdot 2} = 4i\sqrt{2}$$

El discriminante En la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

la expresión dentro del símbolo de radical, $b^2 - 4ac$, se conoce como el **discriminante**. En la **sección 6.7**, nos enfocamos en las ecuaciones cuadráticas con discriminantes que eran positivos o cero. Si el discriminante es negativo, entonces la ecuación tiene dos soluciones no reales.

Discriminante

El discriminante de $ax^2 + bx + c = 0$ es $b^2 - 4ac$. Si a, b y c son enteros, entonces el número y el tipo de soluciones se determinan como sigue.

Discriminante	Número y tipo de soluciones
Positivo, y el cuadrado de un número entero	Dos soluciones racionales
Positivo, pero no el cuadrado de un número entero	Dos soluciones irracionales
Cero	Una solución racional
Negativo	Dos soluciones no reales

EJEMPLO 1 Uso del discriminante

Demuestre que $x^2 + x + 4 = 0$ tiene dos soluciones complejas no reales.

SOLUCIÓN

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(4) \quad \text{Aquí, } a = 1,\ b = 1 \text{ y } c = 4.$$
$$= -15 \quad \text{Discriminante negativo.}$$

Como $-15 < 0$, la ecuación tiene dos soluciones no reales. ■■■

Solución de una ecuación cuadrática

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación cuadrática con soluciones no reales

Resuelva $(9x + 3)(x - 1) = -8$.

SOLUCIÓN

$$(9x + 3)(x - 1) = -8$$
$$9x^2 - 6x - 3 = -8 \quad \text{Se multiplica.}$$
$$9x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \text{Se suma 8.}$$

En la ecuación $9x^2 - 6x + 5 = 0$, identificamos $a = 9$, $b = -6$ y $c = 5$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Fórmula cuadrática}$$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(9)(5)}}{2(9)} \quad \text{Se sustituye.}$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-144}}{18} \quad \text{Véase la extensión del capítulo 5.}$$
$$x = \frac{6 \pm 12i}{18} \quad \sqrt{-144} = 12i$$
$$x = \frac{6(1 \pm 2i)}{6(3)} \quad \text{Se factoriza.}$$
$$x = \frac{1 \pm 2i}{3} \quad \text{Términos simplificados}$$
$$x = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}i \quad \text{Forma estándar } a + bi \text{ de un número complejo}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i, \frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\right\}$. ■■■

EJERCICIOS DE LA EXTENSIÓN

Las siguientes ecuaciones tienen soluciones no reales. Use la fórmula cuadrática y el análisis de números complejos de esta ***Extensión*** *y de la* ***Extensión del capítulo 5*** *para resolverlas.*

1. $x^2 + 12 = 0$

2. $x^2 + 18 = 0$

3. $9x(x - 2) = -13$

4. $4x(x - 4) = -17$

5. $x^2 - 6x + 14 = 0$

6. $x^2 + 4x + 11 = 0$

7. $4x^2 - 4x = -7$

8. $9x^2 - 6x = -7$

9. $x(3x + 4) = -2$

10. $x(2x + 3) = -2$

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

¿Cómo se compara su velocidad al caminar con la de los atletas olímpicos de caminata?

La caminata, a velocidades que exceden 8 millas por hora, es un deporte competitivo de larga distancia y alta velocidad. La siguiente tabla menciona a los ganadores de la medalla de oro en la competencia de caminata de los Juegos Olímpicos de 2008.

A. Complete la tabla aplicando la proporción que se da a continuación para determinar los pasos por minuto de los atletas. **Use 10 km ≈ 6.21 millas.** (Redondee todas las respuestas, excepto las de pasos por minuto, a la milésima más próxima. Redondee los pasos por minuto al número entero más próximo).

$$\frac{70 \text{ pasos por minuto}}{2 \text{ millas por hora}} = \frac{x \text{ pasos por minuto}}{y \text{ millas por hora}}$$

Evento	Ganador de medalla de oro	País	Tiempo en horas: minutos: segundos:	Tiempo en minutos	Tiempo en horas	y en millas por hora	x en pasos por minuto
20 kilómetros, caminata femenil	Olga Kaniskina	Rusia	1:26:31				
20 kilómetros, caminata varonil	Valeriy Borchin	Rusia	1:19:01				
50 kilómetros, caminata varonil	Alex Schwazer	Italia	3:37:09				

Fuente: The World Almanac and Book of Facts.

B. Usando un cronómetro, turnándose con los miembros del grupo, cuente los pasos que cada miembro del grupo da a paso normal. Registre los resultados en la tabla que se presenta a continuación. Luego repita el procedimiento a un paso más rápido. Registre estos resultados.

C. Use la proporción del inciso A para convertir los números del inciso B a millas por hora y complete la tabla.

1. Calcule la velocidad promedio del grupo a paso normal y a paso rápido.
2. ¿Cuál es el número mínimo de pasos por minuto que tendría que dar para ser un atleta olímpico de caminata?
3. A paso rápido, ¿alguien del grupo camina lo suficientemente rápido para ser un atleta de caminata? Explique cómo se llegó a esa determinación.

	Paso normal		Paso rápido	
Nombre	x pasos por minuto	y millas por hora	x pasos por minuto	y millas por hora

EXAMEN DEL CAPÍTULO 6

Resuelva cada ecuación.

1. $5x - 3 + 2x = 3(x - 2) + 11$

2. $\frac{2x - 1}{3} + \frac{x + 1}{4} = \frac{43}{12}$

3. Determine si la ecuación

$$3x - (2 - x) + 4x = 7x - 2 - (-x)$$

es condicional, una identidad o una contradicción. Dé el conjunto solución.

4. Resuelva despejando v: $S = vt - 16t^2$.

Resuelva cada aplicación.

5. ***Área de las islas hawaianas*** Tres islas en el archipiélago hawaiano son Hawai (la isla grande), Maui y Kauai. Juntas, tienen una superficie total de 5300 millas cuadradas. La isla de Hawai es 3293 millas cuadradas más grande que la isla de Maui, y Maui es 177 millas cuadradas más grande que Kauai. ¿Cuál es el área de cada isla?

6. ***Mezcla química*** ¿Cuántos litros de una solución al 20% de una sustancia química debe mezclar Roxanne Roberts con 10 litros de una solución al 50%, para obtener una mezcla química al 40%?

7. ***Velocidades de trenes*** Un tren de pasajeros y un tren de carga salen de un pueblo al mismo tiempo y viajan en direcciones opuestas. Sus velocidades son de 60 mph y 75 mph, respectivamente. ¿Cuánto tiempo tardarán en alejarse 297 millas uno del otro?

8. ***Precio de mercancía*** ¿Cuál es la mejor compra de rebanadas de queso procesado: 16 rebanadas por \$4.38 o 12 rebanadas por \$3.30?

9. ***Distancia entre ciudades*** La distancia entre Boston y Milwaukee es de 1050 millas. En cierto mapa, esta distancia se representa con 21 pulgadas. En el mismo mapa, Seattle y Cincinnati están separadas 46 pulgadas. ¿Cuál es la distancia real entre Seattle y Cincinnati?

10. ***Corriente en un circuito*** La corriente en un circuito eléctrico simple es inversamente proporcional a la resistencia. Si la corriente es de 80 amperes cuando la resistencia es de 30 ohms, determine la corriente cuando la resistencia es de 12 ohms.

Resuelva cada desigualdad. Dé el conjunto solución tanto en forma de intervalo como en forma gráfica.

11. $-4x + 2(x - 3) \geq 4x - (3 + 5x) - 7$

12. $-10 < 3x - 4 \leq 14$

13. ¿Cuál de las siguientes desigualdades es equivalente a $x < -3$?

A. $-3x < 9$ **B.** $-3x > -9$

C. $-3x > 9$ **D.** $-3x < -9$

14. ***Promedio de calificaciones*** Robert Murphy tiene calificaciones de 83, 76 y 79 en sus primeros tres exámenes de Matemáticas 1031 (Investigación de matemáticas). Si él necesita un promedio de por lo menos 80 después de su cuarto examen, ¿cuáles son las calificaciones posibles que necesita en su cuarto examen?

Efectúe las siguientes operaciones exponenciales.

15. $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ **16.** $-(-2)^6$

17. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ **18.** $-5^0 + (-5)^0$

Use las propiedades de los exponentes para simplificar cada expresión. Escriba las respuestas solamente con exponentes positivos. Suponga que todas las variables representan números reales diferentes de cero.

19. $9(4p^3)\,(6p^{-7})$ **20.** $\frac{m^{-2}(m^3)^{-3}}{m^{-4}m^7}$

21. Escriba cada número en notación estándar.

a) 6.93×10^8 ***b)*** 1.25×10^{-7}

22. Use notación científica para resolver

$$\frac{(2{,}500{,}000)(0.00003)}{(0.05)(5{,}000{,}000)}.$$

Dé la respuesta en notación científica.

23. ***Tiempo viajado por una señal de radio*** La distancia promedio de la Tierra a Plutón es de 4.58×10^9 kilómetros. La primera sonda espacial que envió Estados Unidos a Plutón transmitió señales de radio de Plutón a la Tierra a la velocidad de la luz, 3.00×10^5 kilómetros por segundo. ¿Cuánto tiempo (en segundos) tardaron las señales en llegar a la Tierra?

Efectúe las operaciones indicadas.

24. $(3k^3 - 5k^2 + 8k - 2) - (3k^3 - 9k^2 + 2k - 12)$

25. $(5x + 2)(3x - 4)$

26. $(4x^2 - 3)(4x^2 + 3)$

27. $(x + 4)(3x^2 + 8x - 9)$

28. Dé un ejemplo de polinomio que incluya la variable t, que sea de quinto grado, ordenado en forma decreciente respecto de las potencias de la variable, con exactamente seis términos, y con un coeficiente negativo en su término de segundo grado.

Factorice completamente cada polinomio.

29. $2p^2 - 5pq + 3q^2$

30. $100x^2 - 49y^2$

31. $27y^3 - 125x^3$

32. $4x + 4y - mx - my$

Resuelva cada ecuación cuadrática.

33. $6x^2 + 7x - 3 = 0$

34. $x^2 - 13 = 0$

35. $x^2 - x = 7$

36. ***Tiempo que desciende un objeto*** La ecuación

$$s = 16t^2 + 15t$$

permite determinar la distancia s en pies que un objeto arrojado desde un edificio desciende en t segundos. Calcule el tiempo t cuando el objeto ha descendido 25 pies. Use una calculadora y redondee la respuesta a la centésima más próxima.



GRÁFICAS, FUNCIONES, SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

7



De 1969 a 1971 la cadena de televisión NBC transmitió *El show de Bill Cosby*, en el cual el comediante interpretaba a Chet Kincaid, un maestro de educación física en una preparatoria. En un episodio, Chet tiene que sustituir a un maestro de álgebra. Él y la clase completa estaban perplejos con el siguiente problema:

¿Cuántas libras de dulces, que se venden a $0.75 la libra, se deben mezclar con dulces que se venden a $1.25 por libra, para obtener 9 libras de una mezcla que se debe vender a $0.96 la libra?

Chet pasa su fin de semana intentando resolver este problema. (El título del episodio es "Hagamos que x sea igual a un mal fin de semana"). Incluso él visita la tienda local de dulces, cuyo dueño le dice que para resolver el problema, "usted tiene que saber álgebra". El estudiante más inteligente de la clase, Eddie Tucker, resuelve correctamente el problema usando un sistema de ecuaciones. Véase la página 387 para conocer la respuesta de Eddie.

7.1 Sistema de coordenadas rectangulares y círculos
7.2 Rectas, pendiente y tasa de cambio promedio
7.3 Ecuaciones de la recta y modelos lineales
7.4 Introducción a funciones: funciones lineales, aplicaciones y modelos
7.5 Funciones cuadráticas, gráficas y modelos
7.6 Funciones exponenciales y logarítmicas, aplicaciones y modelos
7.7 Sistemas de ecuaciones
7.8 Aplicaciones de sistemas

Extensión Uso de las operaciones de renglón en las matrices para resolver sistemas de ecuaciones

7.9 Desigualdades lineales, sistemas de desigualdades y programación lineal

Investigación colaborativa Rastreo epidemiológico

Examen del capítulo 7

7.1 SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES Y CÍRCULOS

Coordenadas rectangulares • Fórmula de la distancia • Fórmula del punto medio • Círculos • Una aplicación



Descartes dos veces Después de que el servicio postal francés emitió esta estampilla en honor de **René Descartes,** ojos avezados notaron que el título del libro más famoso de Descartes estaba equivocado. De modo que se emitió una segunda estampilla (véase la siguiente página) con el título correcto. El libro en cuestión, *El discurso del método,* apareció en 1637. En él, Descartes rechaza la filosofía aristotélica tradicional y propone un sistema de conocimiento universal que consistía en tener la certidumbre de las matemáticas. Para Descartes, el método era el *análisis,* partiendo de verdades evidentes por sí mismas, para luego, paso a paso, obtener verdades más generales y distantes. Una de estas verdades es su famoso enunciado "pienso, luego existo". (Thomas Jefferson, un racionalista, inició la *Declaración de Independencia* con estas palabras: "Creemos en estas verdades por ser evidentes por sí mismas".)

Coordenadas rectangulares

Cada par de números $(1, 2)$, $(-1, 5)$ y $(3, 7)$ es un ejemplo de **par ordenado,** es decir, un par de números escritos dentro de un paréntesis en el cual las posiciones de los números son relevantes. Los dos números son los **componentes** del par ordenado.

Un par ordenado se grafica usando dos rectas escaladas que se intersecan formando un ángulo recto, donde se ubica el cero, como se muestra en la **figura 1**. El punto común cero se conoce como **origen**. La recta horizontal, el **eje** x, representa al primer número del par ordenado, y la recta vertical, el **eje** y, representa al segundo. Los ejes x y y forman un sistema de coordenadas **rectangulares** (o **cartesiano**). Los ejes forman cuatro **cuadrantes,** numerados como I, II, III y IV como se muestra en la **figura 2**. (Un punto sobre un eje no se considera que esté en alguno de los cuatro cuadrantes).

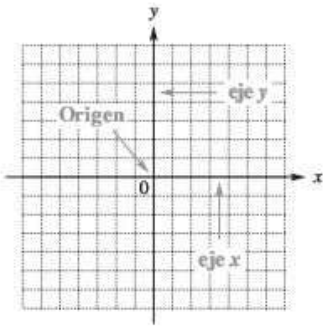


Figura 1

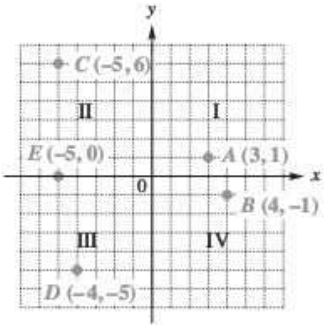


Figura 2

Para localizar o graficar el punto correspondiente al par ordenado $(3, 1)$, identificado como A en la **figura 2**, debemos desplazarnos tres unidades a la derecha a partir del cero a lo largo del eje x, y luego una unidad hacia arriba, en forma paralela al eje y. La frase "el punto correspondiente al par ordenado $(3, 1)$", se abrevia con frecuencia como "el punto $(3, 1)$". Los números de un par ordenado se conocen como **coordenadas** del punto correspondiente.

Los paréntesis que se usan para representar un par ordenado también se usan para representar un intervalo abierto (presentado en el **capítulo 6**). El contexto del análisis indica si se trata de pares ordenados o de intervalos abiertos.

Fórmula de la distancia

Para calcular la distancia entre dos puntos, digamos $(3, -4)$ y $(-5, 3)$, se utiliza el teorema de Pitágoras. En la **figura 3**, vemos que la recta vertical que pasa por $(-5, 3)$ y la recta horizontal que pasa por $(3, -4)$ se intersecan en el punto $(-5, -4)$. De modo que el punto $(-5, -4)$ se convierte en el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa, d, en la **figura 3** es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos a y b.

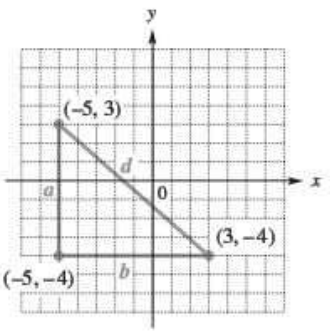


Figura 3

$$d^2 = a^2 + b^2$$ Ecuación del teorema de Pitágoras

La longitud a es la distancia entre los puntos de los extremos de ese cateto. Como la coordenada en x de ambos puntos es -5, el lado es vertical, y podemos encontrar a calculando la diferencia entre las coordenadas en y. Se resta -4 de 3 para obtener un valor positivo de a. De manera análoga, se calcula b restando -5 de 3.

$$a = 3 - (-4) = 7$$
$$b = 3 - (-5) = 8$$

Se usan paréntesis cuando se resta un número negativo.

Se sustituyen estos valores en la ecuación.

$$d^2 = a^2 + b^2$$
$$d^2 = 7^2 + 8^2 \quad \text{Sean } a = 7 \text{ y } b = 8.$$
$$d^2 = 49 + 64 \quad \text{Se desarrollan los exponentes.}$$
$$d^2 = 113 \quad \text{Se suma.}$$
$$d = \sqrt{113} \quad \text{Propiedad de la raíz cuadrada, } d > 0$$

Por lo tanto, la distancia entre $(-5, 3)$ y $(3, -4)$ es $\sqrt{113}$.

Este resultado se puede generalizar. La **figura 4** muestra dos puntos diferentes (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Para obtener la fórmula de la distancia d entre estos dos puntos, observe que la distancia entre (x_2, y_2) y (x_2, y_1) está dada por $a = y_2 - y_1$, y la distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_1) está dada por $b = x_2 - x_1$. De modo que,

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \quad \text{Teorema de Pitágoras}$$

y usando la propiedad de raíz cuadrada, se obtiene la fórmula de la distancia.

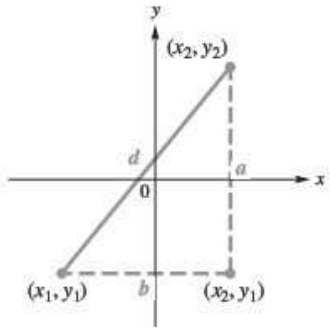


Figura 4

Fórmula de la distancia

La distancia d entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la siguiente fórmula.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta ecuación es la **fórmula de la distancia**.

Los números pequeños 1 y 2 en los pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se conocen como **subíndices**. x_1 se lee como "x subíndice 1". Los subíndices se usan para distinguir los diferentes valores de una variable que tienen una propiedad común.

EJEMPLO 1 Cálculo de la distancia entre dos puntos

Calcule la distancia entre los puntos $(-3, 5)$ y $(6, 4)$.

SOLUCIÓN

Los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se designan de forma arbitraria. Elijamos $(x_1, y_1) = (-3, 5)$ y $(x_2, y_2) = (6, 4)$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{Fórmula de la distancia}$$
$$= \sqrt{(6 - (-3))^2 + (4 - 5)^2} \quad x_2 = 6, y_2 = 4, x_1 = -3, y_1 = 5$$
$$= \sqrt{9^2 + (-1)^2} \quad \text{Se simplifica.}$$
$$= \sqrt{82}$$

Se inicia con los valores x y y del mismo punto

■■■



Descartes escribió su *Geometría* como una aplicación de su método. Fue publicada como un apéndice de su *Discurso*. Sus esfuerzos por unificar la geometría y el álgebra influyeron en la creación de lo que se convirtió en la geometría de coordenadas, e influyó también en el desarrollo del cálculo de Newton y Leibniz en la generación siguiente.

En 1649 Descartes fue a Suecia como tutor de la reina Cristina. Ella prefería trabajar sin calefacción en el castillo durante las mañanas. Descartes acostumbraba permanecer en cama hasta el mediodía. Los rigores del invierno sueco fueron demasiado para él y, en menos de un año, murió.

Fórmula del punto medio

El **punto medio** de una recta es el punto sobre dicha recta que es equidistante de ambos extremos. Dadas las coordenadas de los dos extremos de una recta, es posible calcular las coordenadas del punto medio de esa recta.

Fórmula del punto medio

Las coordenadas del punto medio de la recta con extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se determinan mediante la siguiente fórmula.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto medio de una recta se obtienen calculando los promedios de las coordenadas x y y de los extremos.

EJEMPLO 2 Cálculo del punto medio de una recta

Obtenga las coordenadas del punto medio de una recta con extremos en $(8, -4)$ y $(-9, 6)$.

SOLUCIÓN

Usando la fórmula del punto medio, encontramos que las coordenadas del punto medio son

$$\left(\frac{8 + (-9)}{2}, \frac{-4 + 6}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right). \qquad x_1 = 8, x_2 = -9, \; y_1 = -4, y_2 = 6$$

■■■

EJEMPLO 3 Aplicación de la fórmula del punto medio en los datos

La **figura 5** muestra cómo una gráfica podría indicar el incremento en el número de puntos de venta de McDonald's alrededor del mundo, de 20,000 en 1996 a 31,000 en 2006. Con base en la fórmula del punto medio y los dos puntos que se proporcionan, estime el número de restaurantes en 2001, y compárelo con la cifra real (redondeada) de 30,000.



Fuente: McDonald's Corp.; Hoovers.



Figura 5

SOLUCIÓN

El año 2001 se encuentra a la mitad de 1996 y 2006, de modo que debemos obtener las coordenadas del punto medio de la recta que tiene los extremos (1996, 20) y (2006, 31).

$$\left(\frac{1996 + 2006}{2}, \frac{20 + 31}{2}\right) = (2001, 25.5) \qquad y \text{ está en miles.}$$

Así, nuestra estimación es de 25,500, el cual está muy por debajo de la cifra real de 30,000. (Esta discrepancia se debe a que McDonald's tuvo un incremento promedio de 2000 nuevos puntos de venta anuales entre 1996 y 2001, y luego el promedio de crecimiento fue de solo 200 restaurantes anuales de 2001 a 2006. Gráficas como esta pueden ser engañosas). ■■■

Círculos

Una aplicación de la fórmula de la distancia nos lleva a una de las formas más familiares en geometría: el círculo. Un **círculo** es el conjunto de puntos en un plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo. El punto fijo se conoce como **centro**, y la distancia fija como **radio**.

EJEMPLO 4 Obtención de la ecuación de un círculo

Obtenga la ecuación de un círculo de radio 3 y centro en (0, 0); grafique el círculo.

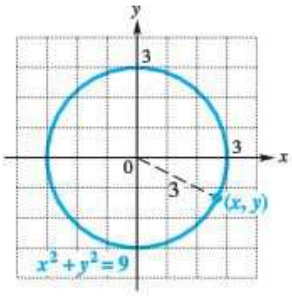


Figura 6

SOLUCIÓN

Si el punto (x, y) se encuentra sobre el círculo, la distancia de (x, y) al centro en $(0, 0)$ es 3, como se muestra en la **figura 6**.

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d \quad \text{Fórmula de la distancia}$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = 3 \quad x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = x,\ y_2 = y,\ d = 3$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{Se elevan al cuadrado ambos lados.}$$

La ecuación de este círculo es $x^2 + y^2 = 9$. Se puede graficar ubicando todos los puntos a 3 unidades del origen. ■■■

EJEMPLO 5 Obtención de la ecuación de un círculo y elaboración de su gráfica

Obtenga la ecuación del círculo que tiene su centro en $(4, -3)$ y radio 5; grafique el círculo.

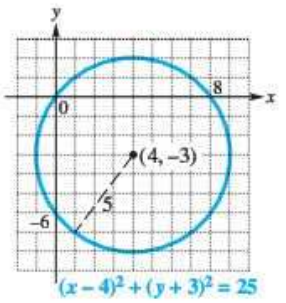


Figura 7

SOLUCIÓN

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d \quad \text{Fórmula de la distancia}$$

$$\sqrt{(x - 4)^2 + [y - (-3)]^2} = 5 \quad \text{Se sustituye en la fórmula de la distancia.}$$

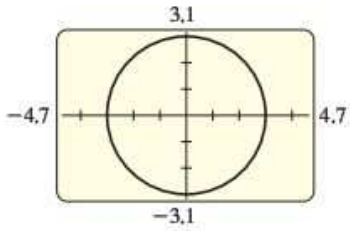
$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25 \quad \text{Se elevan al cuadrado ambos lados.}$$

La gráfica de este círculo se muestra en la **figura 7**. ■■■

Los **ejemplos 4 y 5** pueden generalizarse para obtener la ecuación de un círculo de radio r y centro en (h, k). Si (x, y) es un punto sobre el círculo, la distancia del centro (h, k) al punto (x, y) es r. Entonces, de acuerdo con la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r.$$

Al elevar al cuadrado ambos lados, se obtiene la ecuación de un círculo en la **forma centro-radio**.



Para graficar $x^2 + y^2 = 9$, en el **ejemplo 4**, despejamos y para obtener

$y_1 = \sqrt{9 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{9 - x^2}$.

Luego, se grafican ambas en una ventana cuadrada.

Ecuación de un círculo

La ecuación de un círculo de radio r y centro en (h, k) es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

En particular, un círculo de radio r con centro en el origen tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

En estas ecuaciones, r^2 será mayor que o igual a cero. Si la constante de la derecha es 0, la gráfica es un punto. Si es negativa, no existe gráfica.

EJEMPLO 6 Obtención de la ecuación de un círculo

Obtenga la ecuación de un círculo con centro en $(-1, 2)$ y radio 4.

SOLUCIÓN

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{Ecuación del círculo}$$

$$[x - (-1)]^2 + (y - 2)^2 = 4^2 \quad \text{Sean } h = -1,\ k = 2 \text{ y } r = 4.$$

Tenga cuidado con los signos.

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

■■■

Al desarrollar las operaciones $(x-4)^2$ y $(y+3)^2$ de la ecuación obtenida en el **ejemplo 5,** y luego reduciendo términos semejantes se obtiene lo siguiente.

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$

Este resultado sugiere que una ecuación que tiene tanto x^2 como y^2 con coeficientes iguales puede representar un círculo. El siguiente ejemplo muestra cómo averiguarlo, usando un método algebraico llamado **completar el cuadrado**.

EJEMPLO 7 Complete el cuadrado y grafique el círculo

Grafique $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$.

SOLUCIÓN

Como la ecuación incluye los términos x^2 y y^2 con los mismos coeficientes, su gráfica podría ser un círculo. Para obtener el centro y el radio, se completan los cuadrados de x y y de la siguiente manera. (Véase la **página 308**, donde se presenta el procedimiento para completar cuadrados).

$$x^2 + y^2 + 2x + 6y = 15 \quad \text{Se suma 15 en ambos lados.}$$

$$(x^2 + 2x \quad) + (y^2 + 6y \quad) = 15 \quad \text{Se replantea la ecuación anticipando la obtención del cuadrado.}$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 15 + 1 + 9 \quad \text{Se obtienen los cuadrados tanto de } x \text{ como de } y.$$

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25 \quad \text{Se factoriza en el lado izquierdo y se suma en el lado derecho.}$$

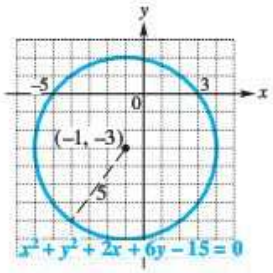


Figura 8

La ecuación final indica que la gráfica es un círculo con centro en $(-1, -3)$ y radio igual a 5. La gráfica se presenta en la **figura 8**. ■■■

Una aplicación

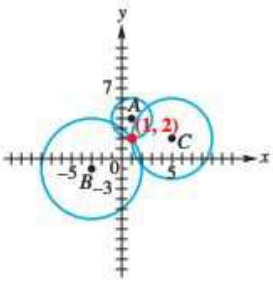


Figura 9

EJEMPLO 8 Localización del epicentro de un terremoto

Los sismólogos pueden localizar el epicentro de un terremoto determinando la intersección de tres círculos. Los radios de estos círculos representan las distancias del epicentro a cada una de las tres estaciones receptoras. Los centros de los círculos representan las estaciones receptoras.

Suponga que las estaciones receptoras A, B y C están ubicadas en un plano coordenado en los puntos $(1, 4)$, $(-3, -1)$ y $(5, 2)$. Considere que las distancias del epicentro del terremoto a las estaciones son de 2, 5 y 4 unidades, respectivamente. Véase la **figura 9**. ¿Dónde está ubicado el epicentro en el plano coordenado?



SOLUCIÓN

Se grafican los tres círculos como se muestra en la **figura 9**. De acuerdo con las gráficas, parece que el epicentro está ubicado en (1, 2). Para comprobar esto algebraicamente, se determina la ecuación de cada círculo y se sustituyen $x = 1$ y $y = 2$.

Estación *A*:	Estación *B*:	Estación *C*:
$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$	$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25$	$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 16$
$(1-1)^2 + (2-4)^2 = 4$	$(1+3)^2 + (2+1)^2 = 25$	$(1-5)^2 + (2-2)^2 = 16$
$0 + 4 = 4$	$16 + 9 = 25$	$16 + 0 = 16$
$4 = 4$	$25 = 25$	$16 = 16$

El punto (1, 2) se encuentra sobre las tres gráficas. Por lo tanto, es el epicentro. ■■■

Para reflexionar

Phlash Phelps es la personalidad de la radio matutina de Sirius XM Satellite Radio's *Sixties on Six* Decades. Phlash es un experto en la geografía de Estados Unidos y le gusta viajar por el país para conocer lugares apartados. La fotografía muestra a Kurt Gilchrist y Phlash (sentado) visitando un pequeño poblado de Arizona llamado *Nothing*. (Nothing es tan pequeño que no aparece en los mapas actuales). La señal indica que *Nothing* se ubica a 50 millas de Wickenburg, AZ, a 75 millas de Kingman, AZ, a 105 millas de Phoenix, AZ, y a 180 millas de Las Vegas, NV.



Para investigación individual o en grupo

Analice cómo se podrían usar los conceptos del **ejemplo 8** para localizar el poblado de Nothing, AZ, en un mapa de Arizona y del sur de Nevada.

7.1 EJERCICIOS

Llene los espacios con la respuesta correcta.

1. Para cualquier valor de x, el punto $(x, 0)$ se encuentra sobre el eje_____.

2. Para cualquier valor de y, el punto $(0, y)$ se encuentra sobre el eje_____.

3. El círculo $x^2 + y^2 = 9$ tiene el punto ____ como centro.

4. El punto (__, 0) es el centro del círculo

$$(x-2)^2 + y^2 = 16.$$

En caso de ser posible, mencione el cuadrante en el cual se localiza cada uno de los siguientes puntos.

5. ***a)*** (1, 6)
b) (−4, −2)
c) (−3, 6)
d) (7, −5)
e) (−3, 0)

6. ***a)*** (−2, −10)
b) (4, 8)
c) (−9, 12)
d) (3, −9)
e) (0, −8)

7. Use la información que se presenta para determinar los posibles cuadrantes en los cuales se encuentra el punto (x, y).

a) $xy > 0$ ***b)*** $xy < 0$

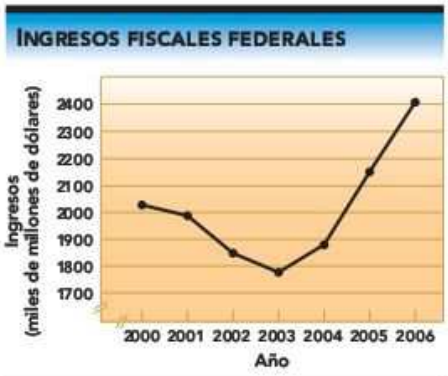
c) $\frac{x}{y} < 0$ ***d)*** $\frac{x}{y} > 0$

8. ¿Qué condición se debe cumplir acerca de una de las coordenadas de cualquier punto que se encuentra a lo largo de un eje?

Localice los siguientes puntos sobre un sistema de coordenadas rectangulares, usando una gráfica similar a la **figura 2.**

9. (2, 3)
10. (−1, 2)
11. (−3, −2)
12. (1, −4)
13. (0, 5)
14. (−2, −4)
15. (−2, 4)
16. (3, 0)
17. (−2, 0)
18. (3, −3)

19. ***Ingresos fiscales*** La gráfica indica los ingresos fiscales del gobierno federal estadounidense en miles de millones de dólares.



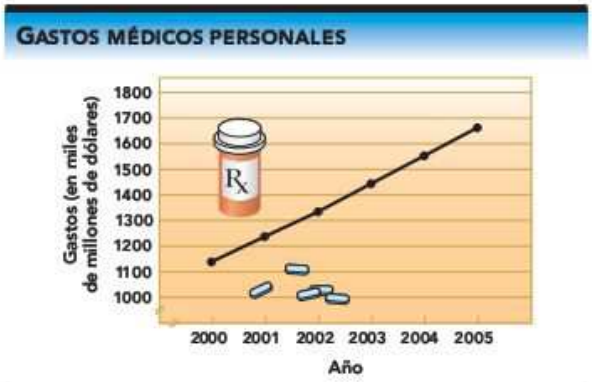
Fuente: Office of Management and Budget.

a) Si (x, y) representa un punto de la gráfica, ¿qué representa x? ¿Qué representa y?

b) Estime los ingresos de 2006.

c) Escriba un par ordenado (x, y) que represente los ingresos fiscales federales de 2006.

20. ***Gastos médicos*** La gráfica muestra, en miles de millones de dólares, los gastos médicos en Estados Unidos.



Fuente: Centros de Medicare y Servicios Medicaid de Estados Unidos.

a) Si (x, y) representa un punto de la gráfica, ¿qué representa x? ¿Qué representa y?

b) ¿Cuáles fueron los gastos en 2003?

c) ¿En qué año el gasto fue de aproximadamente \$1140 miles de millones?

En los ejercicios 21 a 26, obtenga

a) *la distancia entre el par de puntos, y*

b) *las coordenadas del punto medio de la recta cuyos extremos coinciden con los puntos que se indican.*

21. $(3, 4)$ y $(-2, 1)$

22. $(-2, 1)$ y $(3, -2)$

23. $(-2, 4)$ y $(3, -2)$

24. $(1, -5)$ y $(6, 3)$

25. $(-3, 7)$ y $(2, -4)$

26. $(0, 5)$ y $(-3, 12)$

En los ejercicios 27 a 30, asocie cada ecuación del círculo en la forma centro-radio con su gráfica en las opciones A a D.

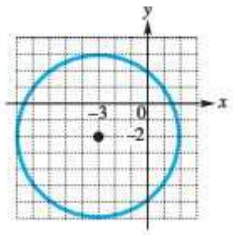
27. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

28. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$

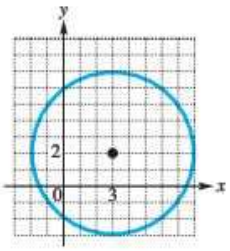
29. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

30. $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$

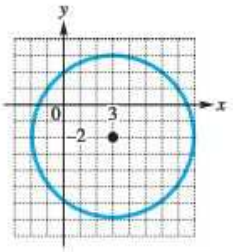
A.



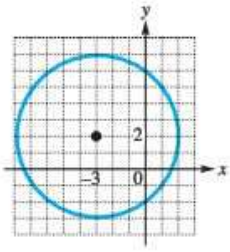
B.



C.



D.



Escriba la ecuación del círculo con el centro y radio proporcionados.

31. $(0, 0); r = 6$

32. $(0, 0); r = 5$

33. $(-1, 3); r = 4$

34. $(2, -2); r = 3$

35. $(0, 4); r = \sqrt{3}$

36. $(-2, 0); r = \sqrt{5}$

37. Suponga que la ecuación de un círculo es de la forma $x^2 + y^2 = r^2, r > 0$. ¿Dónde se encuentra el centro del círculo? ¿Cuál es el radio del círculo?

38. ***a)*** ¿Cuántos puntos existen en la gráfica de $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 0$? Explique su respuesta.

b) ¿Cuántos puntos existen sobre la gráfica de $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = -1$? Explique su respuesta.

Obtenga el centro y el radio de cada círculo. (Sugerencia: En los ejercicios 43 y 44 divida ambos lados entre el máximo común divisor).

39. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

40. $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 3 = 0$

41. $x^2 + y^2 + 10x - 14y - 7 = 0$

42. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

43. $3x^2 + 3y^2 - 12x - 24y + 12 = 0$

44. $2x^2 + 2y^2 + 20x + 16y + 10 = 0$

Grafique los siguientes círculos.

45. $x^2 + y^2 = 36$

46. $x^2 + y^2 = 81$

47. $(x - 2)^2 + y^2 = 36$

48. $x^2 + (y + 3)^2 = 49$

49. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$

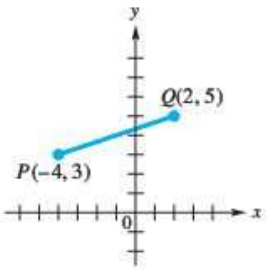
50. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$

51. $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 36$

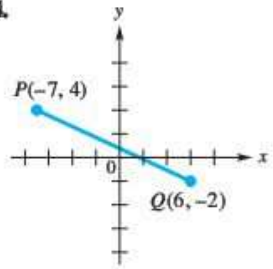
52. $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 49$

Obtenga ***a)*** *la distancia entre P y Q y* ***b)*** *las coordenadas del punto medio de la recta que une P y Q.*

53.



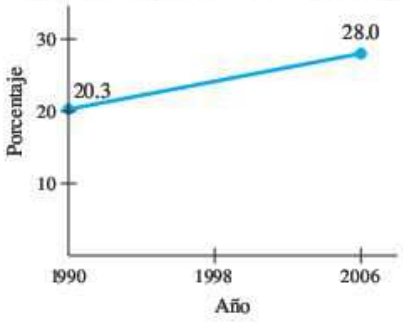
54.



Resuelva los siguientes problemas.

55. ***Graduación de bachillerato*** La gráfica muestra una recta que aproxima el porcentaje de estadunidenses de 25 años en adelante que obtuvieron un grado de bachillerato o superior entre 1990 y 2006. Use la fórmula del punto medio y los dos puntos indicados para estimar el porcentaje en 1998. Compare su respuesta con el porcentaje real de 24.4.

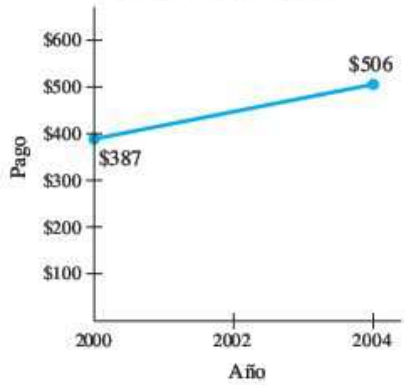
Porcentaje de estadounidenses que obtuvieron el grado de bachillerato o superior



Fuente: U.S. Census Bureau.

56. ***Asistencia temporal a familias pobres*** La siguiente gráfica muestra una relación lineal ideal del promedio de pagos mensuales a familias necesitadas del programa TANF (Temporary Assistance for Needy Families). Con base en esta información, ¿cuál fue el pago promedio a familias en 2002, redondeando al dólar más próximo?

Pago mensual promedio a los beneficiarios del programa TANF



Fuente: Administration for Children and Families; U.S. Census Bureau.

57. ***Topes de ingresos en los niveles de pobreza*** La siguiente tabla muestra cómo han cambiado los topes de ingresos (en dólares) para determinar el nivel de pobreza en el caso de las familias de 4 personas. Use la fórmula del punto medio para aproximar el tope de ingresos que determinó el nivel de pobreza en 1995.

Año	Ingreso (en dólares)
1970	3968
1980	8414
1990	13,359
2000	17,603
2004	19,157

Fuente: U.S. Census Bureau.

58. ***Inscripciones en universidades públicas*** En la siguiente tabla se muestran las inscripciones de años recientes en universidades públicas. Use la fórmula del punto medio para estimar las inscripciones en ***a)*** 1998 y ***b)*** 2004.

Año	Inscripción (en miles)
1995	11,092
2001	12,233
2007	13,555

Fuente: U.S. Census Bureau.

59. Se pidió a un estudiante que calculara la distancia entre los puntos (5, 8) y (2, 14), y escribió lo siguiente:

$$d = \sqrt{(5 - 8)^2 + (2 - 14)^2}.$$

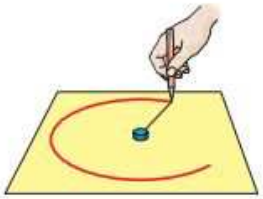
Explique por qué esto es incorrecto.

60. Una forma alternativa de la fórmula de la distancia es

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Compare lo anterior con la forma utilizada en la presente sección, y explique por qué las dos formas son equivalentes.

61. Es posible dibujar un círculo sobre una cartulina sujetando el extremo de una cuerda y atando el otro extremo a un lápiz, para luego trazar una curva como se muestra en la figura. Explique por qué funciona este método.



62 ***Carrera de cangrejos*** Esta figura muestra cómo se sigue efectuando la carrera de cangrejos en el Crawfish Festival en Breaux Bridge, Luisiana. Explique por qué es adecuada en este caso una "carrera circular".



63. ***Epicentro de un terremoto*** Tres estaciones receptoras registran la ocurrencia de un terremoto. Las ubicaciones de las estaciones receptoras y las distancias al epicentro se indican mediante las siguientes tres ecuaciones: $(x-2)^2+(y-1)^2=25$, $(x+2)^2+(y-2)^2=16$, y $(x-1)^2+(y+2)^2=9$. Grafique los círculos y determine la ubicación del epicentro del terremoto.

64. ***Epicentro de un terremoto*** Demuestre algebraicamente que si tres estaciones receptoras en $(1, 4)$, $(-6, 0)$ y $(5, -2)$ registran que las distancias al epicentro de un terremoto son 4, 5 y 10 unidades, respectivamente, el epicentro se ubicaría en $(-3, 4)$.

65. ¿Un círculo puede tener su centro en $(2, 4)$ y ser tangente a ambos ejes? (*Tangente a* significa tocar en un punto). Explique.

66. Sin hacer una gráfica, determine si las gráficas de $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=25$ se intersecan. Explique su respuesta.

67. Si las coordenadas del extremo de una recta son $(3, -8)$, y las coordenadas del punto medio de la recta son $(6, 5)$, ¿cuáles son las coordenadas del otro extremo?

68. Suponga que los extremos de un segmento de recta tienen las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

a) Demuestre que la distancia entre (x_1, y_1) y $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ es la misma que la distancia entre (x_2, y_2) y $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

b) Demuestre que la suma de las distancias entre (x_1, y_1) y $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, y (x_2, y_2) y $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ es igual a la distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

c) A partir de los resultados de los incisos ***a)*** y ***b)***, ¿qué conclusión se puede obtener?

69. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene un círculo como gráfica?

A. $x^2-y^2=9$ **B.** $x^2=9-y^2$

C. $y^2-x^2=9$ **D.** $-x^2-y^2=9$

70. Un **triángulo isósceles** tiene por lo menos dos lados iguales. Determine si el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(3, 4)$ y $(7, 1)$ es isósceles.

7.2 RECTAS, PENDIENTE Y TASA DE CAMBIO PROMEDIO

Ecuaciones lineales con dos variables • Intersecciones con los ejes • Pendiente • Rectas paralelas y perpendiculares • Tasa de cambio promedio

Ecuaciones lineales con dos variables

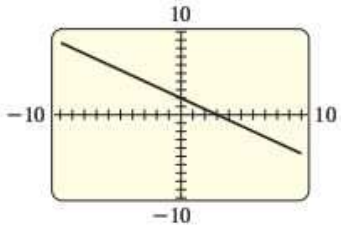
Ya hemos estudiado las ecuaciones lineales con una variable. La solución de estas ecuaciones es un número real. Una ecuación lineal con *dos* variables tiene soluciones en forma de pares ordenados de números. Las ecuaciones con dos variables tienen, en general, un número infinito de soluciones. Para obtener pares ordenados que satisfagan la ecuación, se elige cualquier número para una de las variables, se sustituye en la ecuación, y luego se obtiene la otra variable.

Por ejemplo, suponga que $x = 0$ en la ecuación $2x + 3y = 6$.

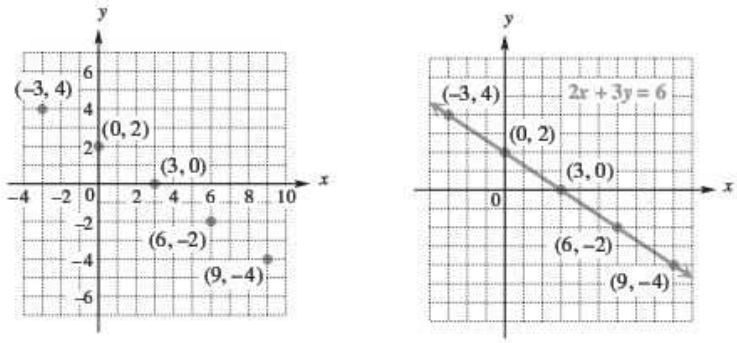
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 && \text{Ecuación proporcionada} \\ 2(0) + 3y &= 6 && \text{Sea } x = 0. \\ 0 + 3y &= 6 && \text{Se multiplica.} \\ 3y &= 6 && \text{Se suma.} \\ y &= 2 && \text{Se divide entre 3.} \end{aligned}$$

Esto da como resultado el par ordenado $(0, 2)$. Otros pares ordenados que satisfacen $2x + 3y = 6$ son $(6, -2)$, $(3, 0)$, $(-3, 4)$ y $(9, -4)$.

La ecuación $2x + 3y = 6$ se grafica localizando los pares mencionados anteriormente. Esto se muestra en la **figura 10 *a)***. Los puntos resultantes parecen estar sobre una recta. Si todos los pares ordenados que satisfacen la ecuación $2x + 3y = 6$ se graficaran, formarían una recta, como muestra la **figura 10 *b)***. ***La gráfica de cualquier ecuación de primer grado con dos variables es una recta.***



Esta es la gráfica, elaborada con una calculadora, de la recta mostrada en la **figura 10*b)***. Primero se debe resolver $2x + 3y = 6$ despejando y para introducir la ecuación a la calculadora.



a) *b)*

Figura 10

Ecuación lineal con dos variables

Una ecuación que se puede escribir en la forma

$$Ax + By = C \text{ (donde ni } A \text{ ni } B \text{ son 0)}$$

es una **ecuación lineal con dos variables**. Esta forma se conoce como **ecuación general de la recta**.

En este libro, cuando las respuestas se proporcionan en forma general, se hace considerando $A > 0$ (o si $A = 0$, entonces $B > 0$) y el máximo común divisor de A, B y C es igual a 1.

Las ecuaciones (lineales) de primer grado con una o dos variables, tienen rectas como gráficas. Como una recta se determina si se conocen dos puntos cualesquiera de ella, es suficiente la obtención de dos puntos diferentes para graficarla.

Intersecciones con los ejes

Dos puntos útiles para graficar rectas son las intersecciones con los ejes x y y. La **intersección con *x*** es el punto (si existe) donde la recta cruza el eje x, y la **intersección con *y*** es el punto (si existe) donde la recta cruza el eje y. (*Nota:* En muchos textos, las intersecciones se definen como números y no como puntos. Sin embargo, en este libro nos referiremos a las intersecciones como puntos). Las intersecciones se pueden obtener como sigue.

Intersecciones con los ejes de las gráficas de ecuaciones lineales

Para obtener la intersección con x, se considera $y = 0$ y se despeja x.

Para obtener la intersección con y, se considera $x = 0$ y se despeja y.

EJEMPLO 1 Gráfica de una ecuación usando intersecciones

Obtenga las intersecciones con x y y de $4x - y = -3$, y grafique la ecuación.

SOLUCIÓN

Para obtener la intersección con x se considera $y = 0$.

$$4x - 0 = -3 \quad \text{Sea } y = 0.$$
$$4x = -3$$
$$x = -\frac{3}{4} \quad \text{La intersección con } x \text{ es } \left(-\frac{3}{4}, 0\right).$$

Para obtener la intersección con y se considera $x = 0$.

$$4(0) - y = -3 \quad \text{Sea } x = 0.$$
$$-y = -3$$
$$y = 3 \quad \text{La intersección con } y \text{ es } (0, 3).$$

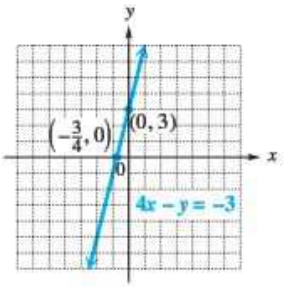
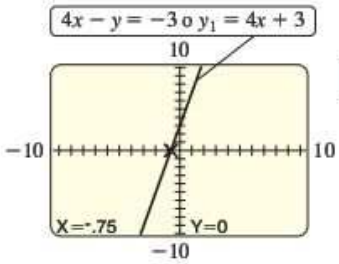


Figura 11

Las intersecciones son los dos puntos $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ y $(0, 3)$. Se usan estos dos puntos para trazar la gráfica, como se muestra en la **figura 11**. ■■■

Una recta podría no tener intersección con el eje x o con el eje y.



El desplegado en la parte inferior de la pantalla apoya el hecho de que $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ es la intersección de la recta con el eje x en la **figura 11**. Se podría localizar la intersección con el eje y de manera similar.

EJEMPLO 2 Gráfica de rectas con una sola intersección

Grafique las siguientes rectas.

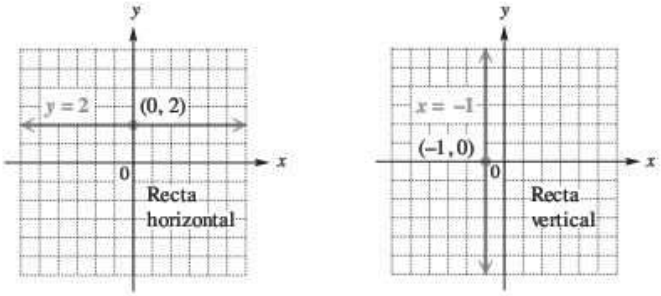
a) $y = 2$ ***b)*** $x = -1$

SOLUCIÓN

a) Al escribir la ecuación $y = 2$ como

$$0x + 1y = 2$$

se muestra que cualquier valor de x, incluyendo $x = 0$, da como resultado $y = 2$, haciendo la intersección con y igual a $(0, 2)$. Como y siempre es igual a 2, no existe un valor de x que se corresponda con $y = 0$, de modo que la gráfica no tiene intersección con x. La gráfica, mostrada en la **figura 12 *a)*** es una recta horizontal.



a) ***b)***

Figura 12

b) En esta ecuación, $x = -1$ para cualquier y. No hay un valor de y que haga a $x = 0$. La gráfica no tiene intersección con el eje y y, por lo tanto, debe ser vertical, como se observa en la **figura 12 *b)***. ■■■

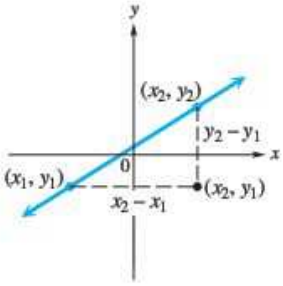


Figura 13

Pendiente

Dos puntos diferentes determinan una recta única. Una recta también se puede determinar por un punto sobre la recta y una medida de su "inclinación". La medida de inclinación de una recta se conoce como *pendiente* de la recta. Una manera de obtener la medida de inclinación de una recta es comparar el cambio vertical de la recta (la *elevación*) con el cambio horizontal (el *desplazamiento*) al movernos sobre la recta de un punto fijo a otro.

Suponga que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos diferentes sobre una recta. Entonces, al movernos a lo largo de la recta de (x_1, y_1) a (x_2, y_2), el valor de y cambia de y_1 a y_2, en una cantidad igual a $y_2 - y_1$. Conforme y cambia de y_1 a y_2, el valor de x cambia de x_1 a x_2 en una cantidad igual a $x_2 - x_1$. Véase la **figura 13**. La razón entre el cambio en y y el cambio en x se conoce como **pendiente** de la recta. Para denotar la pendiente, se utiliza la letra m.

Fórmula de la pendiente

Si $x_1 \neq x_2$, la pendiente m de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{\textbf{elevación}}{\textbf{desplazamiento}} = \frac{\textbf{cambio en } y}{\textbf{cambio en } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

EJEMPLO 3 Uso de la fórmula de la pendiente

Obtenga la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos $(2, -1)$ y $(-5, 3)$.

SOLUCIÓN

Sean $(2, -1) = (x_1, y_1)$ y $(-5, 3) = (x_2, y_2)$; se aplica la fórmula de la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-1)}{-5 - 2} = \frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}$$

Se inicia con los valores x y y del mismo punto.

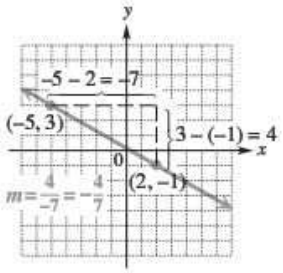


Figura 14

Véase la **figura 14**. Ahora sean $(2, -1) = (x_2, y_2)$ y $(-5, 3) = (x_1, y_1)$.

$$m = \frac{-1 - 3}{2 - (-5)} = \frac{-4}{7} = -\frac{4}{7}$$ La respuesta es igual.

Este ejemplo sugiere que la pendiente es la misma sin importar el punto que se considere primero. Por medio de la geometría, usando triángulos semejantes, es posible demostrar que la pendiente es la misma para dos puntos diferentes *cualesquiera* sobre la recta. ■■■

EJEMPLO 4 Obtención de pendientes de rectas verticales y horizontales

Obtenga la pendiente, si es posible, de cada una de las siguientes rectas.

a) $x = -3$ ***b)*** $y = 5$

SOLUCIÓN

a) Por observación, vemos que $(-3, 5)$ y $(-3, -4)$ son dos puntos que satisfacen la ecuación $x = -3$. Se usan estos dos puntos para obtener la pendiente.

$$m = \frac{-4 - 5}{-3 - (-3)} = \frac{-9}{0}$$ Pendiente indefinida

Como la división entre cero es indefinida, la pendiente es indefinida. (Esto se debe a que la definición de la pendiente incluye la restricción de que $x_1 \neq x_2$).



A los visitantes de Epcot Center en el Walt Disney World de Florida les encanta el viaje **Test Track.** La señal al principio del viaje indica una **pendiente** ascendente de aproximadamente $\frac{1}{4}$.

b) La pendiente se obtiene seleccionando dos puntos diferentes sobre la recta, como $(3, 5)$ y $(-1, 5)$, y usando la definición de pendiente.

$$m = \frac{5 - 5}{3 - (-1)} = \frac{0}{4} = 0$$ Pendiente igual a cero ■■■

En el **ejemplo 2**, $x = -1$ tiene una gráfica que es una recta vertical, y $y = 2$ tiene una gráfica que es una recta horizontal. Generalizando a partir de esos resultados y los del **ejemplo 4**, podemos establecer los siguientes enunciados acerca de las rectas verticales y horizontales.

Rectas verticales y horizontales

- Una recta vertical tiene una ecuación de la forma $x = a$, donde a es un número real, y su pendiente es indefinida.
- Una recta horizontal tiene una ecuación de la forma $y = b$, donde b es un número real, y su pendiente es igual a 0.

EJEMPLO 5 Gráfica de una recta usando un punto y la pendiente

Grafique la recta con una pendiente de $\frac{2}{3}$ y que pasa por el punto $(-1, 4)$.

SOLUCIÓN

Primero localice el punto $(-1, 4)$ sobre la gráfica, como se muestra en la **figura 15**. Luego,

$$m = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{2}{3}.$$ Definición de pendiente

Avance *hacia arriba* 2 unidades en la dirección y y luego a la *derecha* 3 unidades en la dirección x para ubicar otro punto sobre la gráfica (identificado como P). La recta que pasa por $(-1, 4)$ y P es la gráfica requerida. ■■■

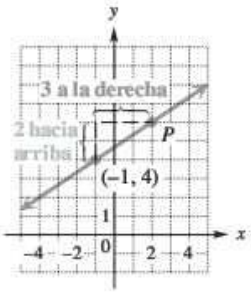


Figura 15

La recta graficada en la **figura 14** tiene una pendiente negativa igual a $-\frac{4}{7}$, y la recta *decrece* de izquierda a derecha. En contraste, la recta graficada en la **figura 15** tiene una pendiente positiva igual a $\frac{2}{3}$, y *crece* de izquierda a derecha. Estas ideas se pueden generalizar. (La **figura 16** muestra rectas con pendiente positiva, pendiente cero, negativa e indefinida).

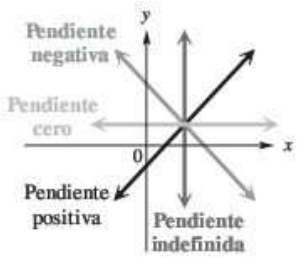


Figura 16

Pendientes positivas y negativas

- Una recta con pendiente positiva crece de izquierda a derecha.
- Una recta con pendiente negativa decrece de izquierda a derecha.

Rectas paralelas y perpendiculares

Las pendientes de un par de rectas paralelas o perpendiculares están relacionadas de un modo especial. La pendiente de una recta mide la inclinación de la misma. Como las rectas paralelas tienen la misma inclinación, sus pendientes también son iguales. Por otro lado, las rectas con la misma pendiente son paralelas.

Pendientes de rectas paralelas

Dos rectas no verticales con la misma pendiente son paralelas. Dos rectas paralelas no verticales tienen la misma pendiente. Adicionalmente, dos rectas verticales cualesquiera son paralelas.

EJEMPLO 6 Determinar si dos rectas son paralelas

Determine si las rectas L_1, que pasa por $(-2, 1)$ y $(4, 5)$, y L_2, que pasa por $(3, 0)$ y $(0, -2)$, son paralelas.

SOLUCIÓN

La pendiente de L_1 es

$$m_1 = \frac{5 - 1}{4 - (-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

La pendiente de L_2 es

$$m_2 = \frac{-2 - 0}{0 - 3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

Como las pendientes son iguales, las rectas son paralelas. ■■■

Las rectas perpendiculares son rectas que se cortan formando un ángulo recto. Es posible mostrar que las pendientes de las rectas perpendiculares tienen un producto igual a -1, siempre y cuando ninguna de ellas sea vertical. Por ejemplo, si la pendiente de una recta es $\frac{3}{4}$, entonces cualquier recta perpendicular a ella tiene una pendiente de $-\frac{4}{3}$, porque $\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = -1$.

Pendientes de rectas perpendiculares

Dos rectas perpendiculares (siempre y cuando ninguna de ellas sea vertical) tienen pendientes que son recíprocos negativos, es decir, su producto es igual a -1. Además, dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son recíprocos negativos. Toda recta vertical es perpendicular a toda recta horizontal.

EJEMPLO 7 Identifique si dos rectas son perpendiculares

Determine si las rectas L_1, que pasa por $(0, -3)$ y $(2, 0)$, y L_2, que pasa por $(-3, 0)$ y $(0, -2)$, son perpendiculares.

SOLUCIÓN

La pendiente de L_1 es

$$m_1 = \frac{0 - (-3)}{2 - 0} = \frac{3}{2}.$$

La pendiente de L_2 es

$$m_2 = \frac{-2 - 0}{0 - (-3)} = -\frac{2}{3}.$$

Como el producto de las pendientes de las dos rectas es $\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) = -1$, las rectas son perpendiculares. ■■■

Tasa de cambio promedio

La fórmula de la pendiente aplicada a dos puntos cualesquiera sobre una recta indica la **tasa de cambio promedio** en y por unidad de cambio en x, donde el valor de y depende del valor de x.

Por ejemplo, suponga que la estatura de una persona se incrementó de 60 a 68 pulgadas entre las edades de 12 y 16 años, como se muestra en la **figura 17**. Es posible calcular la tasa de crecimiento promedio de la persona (o el cambio promedio en la estatura) por año.

$$\begin{matrix}\text{Cambio en la estatura } y \longrightarrow \\ \text{Cambio en la edad } x \longrightarrow\end{matrix} \frac{68 - 60}{16 - 12} = \frac{8}{4} = 2 \text{ pulgadas por año}$$

La persona en realidad pudo haber crecido más de dos pulgadas durante algunos años y menos de 2 pulgadas durante otros. Si graficamos pares ordenados (edad, estatura) para esos años y graficamos una recta que conecte dos de esos puntos cualesquiera, la tasa de cambio promedio tal vez sería ligeramente diferente de la obtenida arriba. Sin embargo, usando los datos de las edades 12 y 16, el cambio *promedio* en la estatura de la persona fue de 2 pulgadas por año durante ese tiempo.

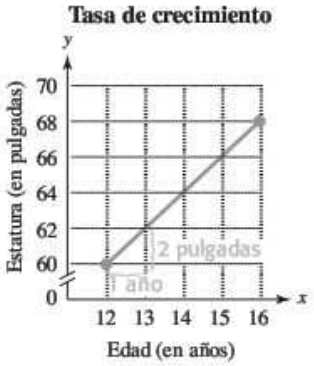


Figura 17

EJEMPLO 8 Interpretación de la pendiente como tasa de cambio promedio

La gráfica de la **figura 18** aproxima el número de horas promedio por año que cada persona pasó viendo televisión por cable y por satélite en Estados Unidos, de 2000 a 2005. Calcule la tasa de cambio promedio en número de horas por año.



Fuente: Veronis Suhler Stevenson.

Figura 18

SOLUCIÓN

Para determinar la tasa de cambio promedio, se necesitan dos pares de datos. En la gráfica, si $x = 2000$, entonces $y = 690$, y si $x = 2005$, entonces $y = 980$. Por lo tanto, tenemos los pares ordenados (2000, 690) y (2005, 980). De acuerdo con la fórmula de la pendiente,

$$\text{tasa de cambio promedio} = \frac{980 - 690}{2005 - 2000} = \frac{290}{5} = 58$$

Una pendiente positiva indica un incremento.

Esto significa que el tiempo promedio que una persona vio televisión por cable y por satélite se *incrementó* en 58 horas por año entre 2000 y 2005. ■■■

EJEMPLO 9 Interpretación de la pendiente como tasa de cambio promedio

Durante el año 2000, una persona vio, en promedio, televisión abierta en Estados Unidos durante 866 horas. En 2004 el número de horas promedio que una persona vio televisión abierta fue de 678 horas. Calcule la tasa de cambio promedio en número de horas por año. (*Fuente:* Veronis Suhler Stevenson).

Audiencia de televisión abierta

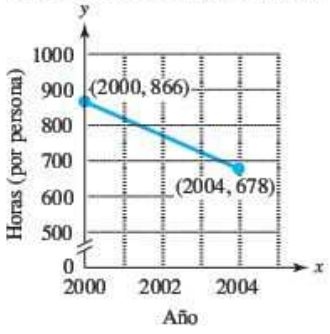


Figura 19

SOLUCIÓN

Para usar la fórmula de la pendiente, necesitamos dos pares ordenados. En este caso, consideremos que un par ordenado es (2000, 866) y que el otro es (2004, 678).

$$\text{tasa de cambio promedio} = \frac{678 - 866}{2004 - 2000} = \frac{-188}{4} = -47$$

Una pendiente negativa indica una disminución.

La gráfica de la **figura 19** confirma que la recta que pasa por los pares ordenados decrece de izquierda a derecha y, por consiguiente, tiene una pendiente negativa. Por lo tanto, el tiempo que una persona vio en promedio televisión abierta *disminuyó* en 47 horas por año de 2000 a 2004. ■■■

7.2 EJERCICIOS

Complete los pares ordenados que se indican para cada ecuación. Luego grafique la ecuación.

1. $2x + y = 5$; (0,), (, 0), (1,), (, 1)

2. $3x - 4y = 24$; (0,), (, 0), (6,), (, −3)

3. $x - y = 4$; (0,), (, 0), (2,), (, −1)

4. $x + 3y = 12$; (0,), (, 0), (3,), (, 6)

5. $4x + 5y = 20$; (0,), (, 0), (3,), (, 2)

6. $2x - 5y = 12$; $(0, \ \ )$, $(\ \ , 0)$, $(\ \ , -2)$, $(-2, \ \ )$

7. $3x + 2y = 8$

x	y
0	
	0
2	
	-2

8. $5x + y = 12$

x	y
0	
	0
	-3
2	

9. Explique cómo se obtiene la intersección con el eje x de una ecuación lineal con dos variables.

10. Explique cómo se obtiene la intersección con el eje y de una ecuación lineal con dos variables.

11. ¿Qué opción tiene como gráfica una recta horizontal?

A. $2y = 6$ **B.** $2x = 6$
C. $x - 4 = 0$ **D.** $x + y = 0$

12. ¿Cuál es el número mínimo de puntos que se deben determinar para graficar una ecuación lineal con dos variables?

Para cada una de las siguientes ecuaciones, identifique las intersecciones con los ejes x y y. Luego grafique la ecuación.

13. $3x + 2y = 12$ **14.** $2x + 5y = 10$

15. $5x + 6y = 10$ **16.** $3y + x = 6$

17. $2x - y = 5$ **18.** $3x - 2y = 4$

19. $x - 3y = 2$ **20.** $y - 4x = 3$

21. $y + x = 0$ **22.** $2x - y = 0$

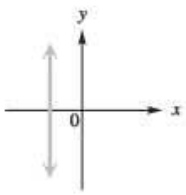
23. $3x = y$ **24.** $x = -4y$

25. $x = 2$ **26.** $y = -3$

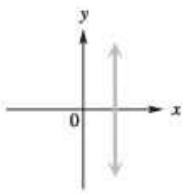
27. $y = 4$ **28.** $x = -2$

En los ejercicios 29 a 36, asocie la ecuación con las rectas de las opciones A a D que más se parezcan a la gráfica.

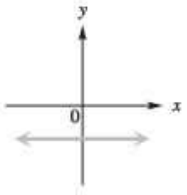
A.



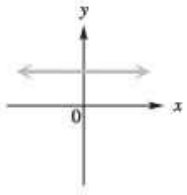
B.



C.



D.



29. $y + 2 = 0$ **30.** $y + 4 = 0$

31. $x + 3 = 0$ **32.** $x + 7 = 0$

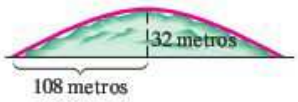
33. $y - 2 = 0$ **34.** $y - 4 = 0$

35. $x - 3 = 0$ **36.** $x - 7 = 0$

37. ¿Cuál es la pendiente (o inclinación) de este techo?

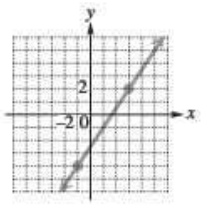


38. ¿Cuál es la pendiente (o inclinación) de esta colina?

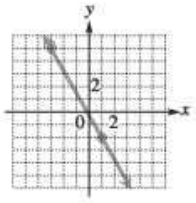


39. Use las coordenadas de los puntos indicados para obtener la pendiente de cada recta.

a)

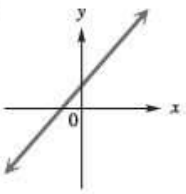


b)

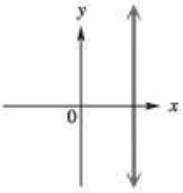


40. Diga si la pendiente de cada recta en ***a)*** a ***d)*** es positiva, negativa, cero o indefinida.

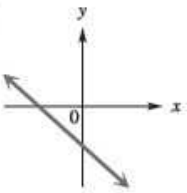
a)



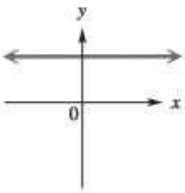
b)



c)



d)



Obtenga la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos usando la fórmula de la pendiente.

41. $(-2, -3)$ y $(-1, 5)$ **42.** $(-4, 3)$ y $(-3, 4)$

43. $(8, 1)$ y $(2, 6)$ **44.** $(13, -3)$ y $(5, 6)$

45. $(2, 4)$ y $(-4, 4)$ **46.** $(-6, 3)$ y $(2, 3)$

47. ***Datos de escuelas públicas*** La **figura A** indica la matrícula de estudiantes (en miles) de escuelas públicas en los grados 9 a 12 en Estados Unidos. La **figura B** da el número (promedio) de estudiantes en escuelas públicas por cada computadora.



Fuente: Departamento de Educación de Estados Unidos.

Figura A

a) Use los puntos (1990, 11,338) y (2005, 14,818) para obtener la pendiente de la recta de la **figura A**.

b) La pendiente de la recta en la **figura A** es _____. (positiva/negativa)
Esto significa que durante el periodo en cuestión, las inscripciones _____. (aumentaron/disminuyeron)

c) La pendiente de una recta representa su *tasa de cambio*. Con base en la **figura A**, ¿cuál fue el incremento en el número de estudiantes *por año* durante el periodo en cuestión?



Fuente: Quality Education Data, Inc.

Figura B

d) Use los dos puntos indicados para obtener la pendiente de la recta de la **figura B**.

e) La pendiente de la recta de la **figura B** es _____. (positiva/negativa)
Esto significa que durante el periodo en cuestión, el número de estudiantes por computadora _____. (aumentó/disminuyó)

f) Con base en la **figura B**, ¿cuál fue la disminución en el número de estudiantes por computadora *por año* durante el periodo mostrado?

48. Use los resultados del **ejercicio 47** para efectuar una conexión entre el signo de la pendiente de una recta y el aumento o la disminución en la cantidad representada por y.

Use el método del ***ejemplo 5*** *para graficar las siguientes rectas.*

49. $m = \frac{1}{2}$, pasa por $(-3, 2)$

50. $m = \frac{2}{3}$, pasa por $(0, 1)$

51. $m = -\frac{5}{4}$, pasa por $(-2, -1)$

52. $m = -\frac{3}{2}$, pasa por $(-1, -2)$

53. $m = -2$, pasa por $(-1, -4)$

54. $m = 3$, pasa por $(1, 2)$

55. $m = 0$, pasa por $(2, -5)$

56. $m = 0$, pasa por $(2, 4)$

57. pendiente indefinida, pasa por $(4, 2)$

58. pendiente indefinida, pasa por $(-3, 1)$

Determine si las rectas descritas son paralelas, perpendiculares *o* ni paralelas ni perpendiculares.

59. L_1 pasa por $(4, 6)$ y $(-8, 7)$, y L_2 pasa por $(7, 4)$ y $(-5, 5)$.

60. L_1 pasa por $(9, 15)$ y $(-7, 12)$, y L_2 pasa por $(-4, 8)$ y $(-20, 5)$.

61. L_1 pasa por $(2, 0)$ y $(5, 4)$, y L_2 pasa por $(6, 1)$ y $(2, 4)$.

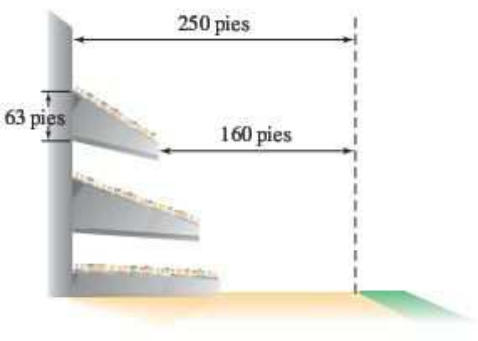
62. L_1 pasa por $(0, -7)$ y $(2, 3)$, y L_2 pasa por $(0, -3)$ y $(1, -2)$.

63. L_1 pasa por $(0, 1)$ y $(2, -3)$, y L_2 pasa por $(10, 8)$ y $(5, 3)$.

64. L_1 pasa por $(1, 2)$ y $(-7, -2)$, y L_2 pasa por $(1, -1)$ y $(5, -9)$.

Use el concepto de pendiente para resolver los siguientes problemas.

65. ***Inclinación de un nivel superior*** El nivel superior del U.S. Celular Field de los Medias blancas de Chicago ha generado, entre otros reclamos, disgustos por su inclinación. Se le ha comparado con una pista de salto con esquíes. Mide 160 pies de la almohadilla de "home" al frente del nivel superior, y 250 pies de la almohadilla de "home" a la parte posterior. La parte más alta del nivel superior está a 63 pies por encima de la parte inferior. ¿Cuál es la pendiente?

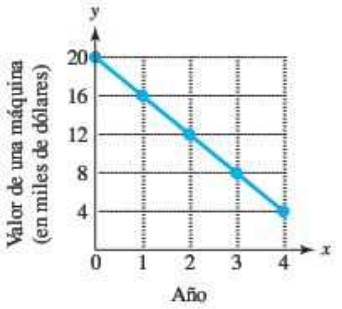


66. ***Grado (pendiente) de una rampa*** Cuando se diseñó el nuevo estadio TD Banknorth Garden en Boston, para sustituir al antiguo Boston Garden, los arquitectos tuvieron mucho cuidado al diseñar las rampas de acceso para que los elefantes del circo pudieran caminar por estas hacia arriba. La inclinación (o pendiente) máxima que un elefante caminará hacia arriba es del 13%. Suponga que una rampa así se construyera con una longitud horizontal de 150 pies. ¿Cuál sería la elevación máxima que los arquitectos podrían usar?

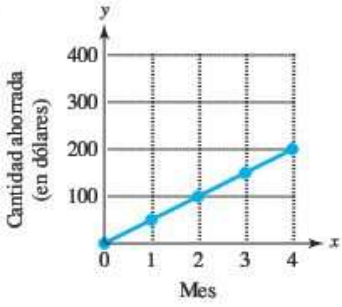


Tasa de cambio *Calcule e interprete la tasa de cambio promedio ilustrada en cada una de las siguientes gráficas.*

67.



68.



Use la idea de tasa de cambio promedio para resolver los siguientes problemas. Redondee las respuestas a la milésima más próxima.

69. ***Casas móviles*** La siguiente gráfica da una buena aproximación del número de casas móviles (en miles) puestas en uso en Estados Unidos de 2000 a 2006.

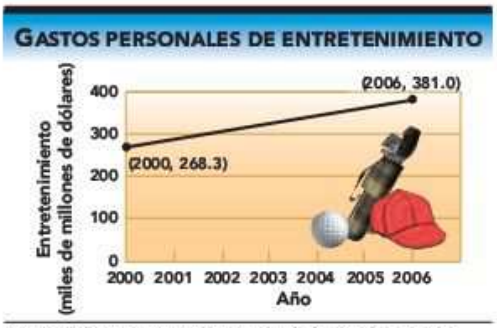


Fuente: U.S. Census Bureau.

a) Use los datos proporcionados para obtener la tasa de cambio promedio anual durante este periodo.

b) ¿Cómo se interpreta una pendiente negativa en este caso?

70. ***Gastos de entretenimiento*** La siguiente gráfica muestra una aproximación a los gastos personales de entretenimiento en Estados Unidos (en miles de millones de dólares) en años recientes.



Fuente: Departamento de Comercio de Estados Unidos.

a) Use los datos proporcionados para determinar la tasa de cambio promedio anual.

b) ¿Cómo se interpreta una pendiente positiva en este caso?

71. La cantidad total gastada en televisores de plasma en Estados Unidos varió de $1590 millones en 2003 a $5705 millones en 2006. Obtenga e interprete la tasa de cambio promedio en ventas, en millones de dólares por año. Redondee su respuesta a la centésima más próxima. (*Fuente:* Consumer Electronics Association).

72. La cantidad total gastada en televisores analógicos en Estados Unidos varió de $5836 millones en 2003 a $1424 millones en 2006. Obtenga e interprete la tasa de cambio promedio en ventas, en millones de dólares por año. Redondee su respuesta a la centésima más próxima. (*Fuente:* Consumer Electronics Association).

7.3 ECUACIONES DE LA RECTA Y MODELOS LINEALES

Forma punto-pendiente • Forma pendiente-intersección • Resumen de las formas de ecuaciones lineales • Modelos lineales

Forma punto-pendiente

Si se conoce la pendiente y un punto particular de una recta, es posible obtener su ecuación. Suponga que la pendiente de una recta es m y (x_1, y_1) es un punto determinado de la recta. Sea (x, y) cualquier otro punto sobre la recta. Entonces, por la definición de pendiente,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$ Fórmula de la pendiente

Multiplicando ambos lados por $x - x_1$ se obtiene la conocida *forma punto-pendiente* de la ecuación de la recta.

Forma punto-pendiente

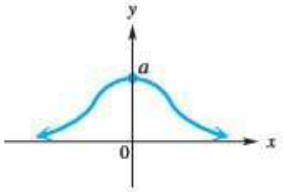
La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente igual a m se escribe en la **forma punto-pendiente** de la siguiente manera.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



Maria Gaetana Agnesi (1719-1799) realizó la mayor parte de su trabajo matemático en geometría de coordenadas. Creció en un ambiente intelectual. Su padre fue matemático en la facultad de la Universidad de Bolonia. En un sentido amplio, fue heredera de una larga tradición de matemáticos italianos.

Maria hablaba con fluidez varios idiomas a la edad de 13 años, pero eligió las matemáticas por encima de la literatura. La curva que se muestra a continuación, llamada la **bruja de Agnesi,** se estudia en cursos de geometría analítica.



$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$

EJEMPLO 1 Obtención de una ecuación a partir de la pendiente y un punto

Obtenga la forma general de la ecuación de la recta con pendiente $\frac{1}{3}$, que pasa por el punto $(-2, 5)$.

SOLUCIÓN

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ Forma punto-pendiente

$$y - 5 = \frac{1}{3}[x - (-2)]$$ Sea $(x_1, y_1) = (-2, 5)$ y $m = \frac{1}{3}$.

Se sustituye con cuidado.

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x + 2)$$

$$3y - 15 = x + 2$$ Se multiplica por 3.

$$x - 3y = -17$$ Forma general

Si se conocen dos puntos ubicados sobre una recta, es posible obtener la ecuación de esta última. Un método consiste en obtener primero la pendiente usando la fórmula de la pendiente, y luego usar la pendiente con uno de los puntos dados en la forma de punto-pendiente.

EJEMPLO 2 Obtención de una ecuación a partir de dos puntos

Obtenga la forma general de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-4, 3)$ y $(5, -7)$.

SOLUCIÓN

Primero se obtiene la pendiente, usando la definición.

$$m = \frac{-7 - 3}{5 - (-4)} = -\frac{10}{9}$$ $x_1 = -4, y_1 = 3,$ $x_2 = 5, y_2 = -7$

Se puede utilizar $(-4, 3)$ o $(5, -7)$ como (x_1, y_1) en la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta. Si se emplea $(-4, 3)$, entonces $-4 = x_1$ y $3 = y_1$.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{Forma punto-pendiente} \\ y - 3 &= -\frac{10}{9}[x - (-4)] && (x_1, y_1) = (-4, 3) \text{ y } m = -\tfrac{10}{9} \\ y - 3 &= -\frac{10}{9}(x + 4) && \text{Definición de la sustracción} \\ 9(y - 3) &= -10(x + 4) && \text{Se multiplica por 9.} \\ 9y - 27 &= -10x - 40 && \text{Propiedad distributiva} \\ 10x + 9y &= -13 && \text{Forma general} \end{aligned}$$

Forma pendiente-intersección

Suponga que se conoce la pendiente m de una recta, y que la intersección de la recta con el eje y tiene las coordenadas $(0, b)$. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{Forma punto-pendiente} \\ y - b &= m(x - 0) && \text{Sea } (x_1, y_1) = (0, b). \\ y - b &= mx \\ y &= mx + b && \text{Se suma } b \text{ a ambos lados.} \end{aligned}$$

Este último resultado se conoce como *forma pendiente-intersección* de la ecuación de la recta.

Forma pendiente-intersección

La ecuación de una recta con pendiente m y su intersección con el eje y igual a $(0, b)$ se escribe en la **forma pendiente-intersección** de la siguiente manera.

$$y = \underset{\text{Pendiente}}{mx} + \underset{\text{La intersección con el eje } y \text{ es } (0, b).}{b}$$

Todas las ecuaciones lineales (de una recta que no es vertical) tienen *una* (y solo una) forma pendiente-intersección. En la siguiente sección, donde estudiaremos las *funciones lineales*, será necesaria la forma pendiente-intersección para especificar tales funciones.

EJEMPLO 3 Escritura de una ecuación en la forma pendiente-intersección

Escriba cada una de las siguientes ecuaciones en la forma pendiente-intersección.

a) la recta $x - 3y = -17$ descrita en el **ejemplo 1**

b) la recta $10x + 9y = -13$ descrita en el **ejemplo 2**

SOLUCIÓN

a) Se despeja y para obtener la forma pendiente-intersección.

$$\begin{aligned} x - 3y &= -17 \\ -3y &= -x - 17 && \text{Se resta } x. \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{17}{3} && \text{Se divide entre } -3. \end{aligned}$$

La pendiente es $\frac{1}{3}$ y la intersección con y es $(0, \frac{17}{3})$.

b)
$$10x + 9y = -13$$
$$9y = -10x - 13 \quad \text{Se resta } 10x.$$
$$y = -\frac{10}{9}x - \frac{13}{9} \quad \text{Se divide entre 9.}$$

La pendiente es $-\frac{10}{9}$ y la intersección con y es $(0, -\frac{13}{9})$. ■■■

Si se conoce la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, es posible usar el método descrito en el **ejemplo 5** de la **sección 7.2** para graficar la recta.

EJEMPLO 4 Gráfica de una recta usando la pendiente y la intersección con y

Grafique la recta de la ecuación $y = -\frac{2}{3}x + 3$.

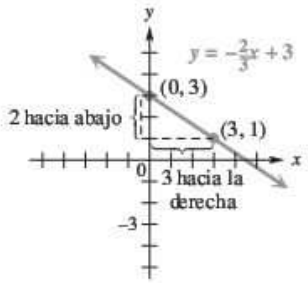


Figura 20

SOLUCIÓN

Como la ecuación está dada en la forma pendiente-intersección, podemos ver que la pendiente es $-\frac{2}{3}$ y la intersección con el eje y es $(0,3)$. Por ahora, se interpreta $-\frac{2}{3}$ como $\frac{-2}{3}$. Se grafica el punto $(0,3)$ y luego, usando la interpretación de la pendiente como "cambio vertical sobre cambio horizontal", nos movemos 2 unidades hacia *abajo* (debido al -2 en el numerador de la pendiente) y 3 unidades hacia la *derecha* (debido al 3 en el denominador), llegando al punto $(3, 1)$.

Se grafica el punto $(3,1)$, y se unen los dos puntos con una recta, como se muestra en la **figura 20**. (También podríamos haber interpretado $-\frac{2}{3}$ como $\frac{2}{-3}$ para así obtener un segundo punto diferente. Sin embargo, la recta sería la misma).

EJEMPLO 5 Obtención de una ecuación usando una pendiente asociada (rectas paralelas)

Obtenga en la forma pendiente-intersección, la ecuación de la recta paralela a la gráfica de $2x + 3y = 6$, que pasa por el punto $(-4, 5)$. Grafique ambas rectas.

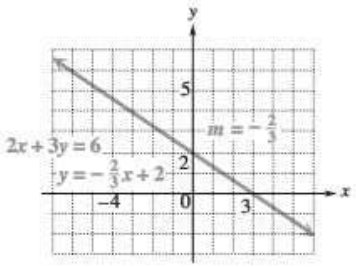


Figura 21

SOLUCIÓN

La pendiente de la recta $2x + 3y = 6$, mostrada en la **figura 21**, se obtiene despejando y.

$$2x + 3y = 6$$
$$3y = -2x + 6 \quad \text{Se resta } 2x.$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 2 \quad \text{Se divide entre 3.}$$
$$\uparrow \text{ Pendiente}$$

La pendiente está dada por el coeficiente de x, de modo que $m = -\frac{2}{3}$. La recta que pasa por $(-4, 5)$ y es paralela a $2x + 3y = 6$ debe tener la misma pendiente. Para obtener la ecuación requerida, se usa la forma punto-pendiente con $(x_1, y_1) = (-4, 5)$ y $m = -\frac{2}{3}$.

$$y - 5 = -\frac{2}{3}[x - (-4)] \quad y_1 = 5, m = -\tfrac{2}{3}, x_1 = -4$$
$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x + 4) \quad \text{Definición de la sustracción}$$
$$y - 5 = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} + \frac{15}{3} \quad \text{Se suma } 5 = \tfrac{15}{3}.$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \quad \text{Se reducen los términos semejantes.}$$

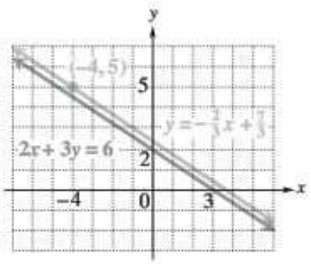


Figura 22

Ambas rectas se muestran en la **figura 22**. ■■■

EJEMPLO 6 Obtención de una ecuación usando una pendiente asociada (rectas perpendiculares)

Obtenga en la forma pendiente-intersección la ecuación de la recta perpendicular a la gráfica de $2x + 3y = 6$, que pasa por el punto $(-4, 5)$. Grafique ambas rectas.

SOLUCIÓN

En el **ejemplo 5** vimos que la pendiente de la recta $2x + 3y = 6$ es $-\frac{2}{3}$. Una recta perpendicular a esta debe tener una pendiente igual al recíproco negativo de $-\frac{2}{3}$, el cual es $\frac{3}{2}$. Se usa el punto $(-4, 5)$ y la pendiente $\frac{3}{2}$ en la forma punto-pendiente para obtener la ecuación de la recta perpendicular mostrada en la **figura 23**.

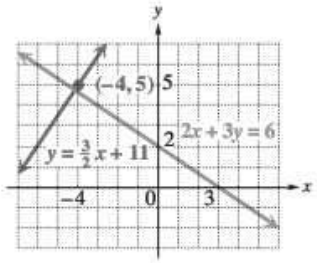


Figura 23

$$y - 5 = \frac{3}{2}[x - (-4)] \qquad y_1 = 5, m = \tfrac{3}{2}, x_1 = -4$$

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x + 4) \qquad \text{Definición de la sustracción}$$

$$y - 5 = \frac{3}{2}x + 6 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$y = \frac{3}{2}x + 11 \qquad \text{Se suma 5.}$$

Resumen de las formas de la ecuación lineal

A continuación se presenta un resumen de las diferentes formas de la ecuación lineal.

Resumen de formas de la ecuación lineal

$Ax + By = C$	**Forma general** (Ni A ni B son iguales a 0).
$x = a$	**Recta vertical** Pendiente indefinida y la intersección con x es $(a, 0)$.
$y = b$	**Recta horizontal** La pendiente es 0 y la intersección con y es $(0, b)$.
$y = mx + b$	**Forma pendiente-intersección** La pendiente es m y la intersección con y es $(0, b)$.
$y - y_1 = m(x - x_1)$	**Forma punto-pendiente** La pendiente es m y la recta pasa por (x_1, y_1).

Modelos lineales

Los ejercicios y ejemplos anteriores incluían ecuaciones que describían datos reales. Ahora mostraremos cómo se pueden obtener estas ecuaciones. El proceso de obtención de una ecuación que se ajuste a una gráfica se conoce como *ajuste de curva*. El siguiente ejemplo ilustra este concepto para una recta. La ecuación resultante se conoce como **modelo lineal**.

Tabla 1

Año	Costo (en dólares)
1990	2035
1994	2820
1996	3151
1998	3486
2000	3774
2002	4273
2004	4920

Fuente: U.S. National Center for Education Statistics.

EJEMPLO 7 Modelo de costos de inscripción

En la **tabla 1** se muestra el promedio de inscripción anual y colegiatura para estudiantes en universidades públicas con programas de estudio de cuatro años.

a) Grafique los datos. Considere que $x = 0$ corresponde a 1990, $x = 4$ corresponde a 1994, y así sucesivamente. ¿Qué tipo de ecuación podría modelar estos datos?

b) Obtenga la ecuación que modele los datos.

c) Use la ecuación del inciso ***b)*** para aproximar el costo de inscripción y colegiatura en universidades públicas con programas de estudio de cuatro años en 2006.

SOLUCIÓN

a) Los puntos están graficados en la **figura 24**, donde x corresponde al año, como se indicó, y y representa el costo en dólares. Parece que una ecuación lineal modelaría los datos.

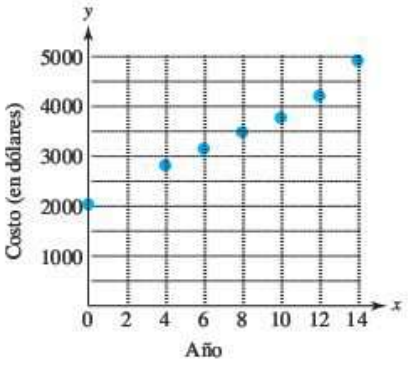




Figura 24

b) Como los puntos de la **figura 24** se encuentran aproximadamente en línea recta, podemos escribir una ecuación lineal que modele la relación entre el año x y el costo y. Se seleccionan dos datos puntuales $(0, 2035)$ y $(12, 4273)$, para obtener la pendiente de la recta.

$$m = \frac{4273 - 2035}{12 - 0} = \frac{2238}{12} = 186.5$$

Se inicia con los valores de x y y del mismo punto.

La pendiente de 186.5 indica que el costo de la inscripción y colegiatura se incrementó en aproximadamente \$186.50 por año de 1990 a 2002. Se usa esta pendiente, la intersección con y $(0, 2035)$ y la forma pendiente-intersección para escribir la ecuación de la recta. Por lo tanto,

$$y = 186.5x + 2035$$

c) El valor $x = 16$ corresponde al año de 2006.

$$y = 186.5x + 2035 \qquad \text{Ecuación del inciso } b)$$
$$y = 186.5(16) + 2035 \qquad \text{Se sustituye } x \text{ por } 16.$$
$$y = 5019 \qquad \text{Se multiplica y luego se suma.}$$

De acuerdo con el modelo, la inscripción y la colegiatura promedio para estudiantes del estado en universidades públicas con programas de estudio de cuatro años en 2006 fueron de aproximadamente \$5019. ▮▮▮

En el **ejemplo 7**, si hubiéramos elegido puntos diferentes, habríamos obtenido una ecuación ligeramente distinta. Sin embargo, todas estas ecuaciones producirían resultados similares, puesto que los puntos son aproximadamente lineales.

7.3 EJERCICIOS

Asocie cada ecuación de la columna I con la descripción correcta proporcionada en la columna II.

I	II
1. $y = 4x$	**A.** pendiente = –2, pasa por el punto (4, 1)
2. $y = \frac{1}{4}x$	**B.** pendiente = –2, con intersección en y igual a (0, 1)
3. $y = -2x + 1$	**C.** pasa a través de los puntos (0, 0) y (4, 1)
4. $y - 1 = -2(x - 4)$	**D.** pasa a través de los puntos (0, 0) y (1, 4)

En los ejercicios 5 a 12, asocie cada ecuación con la gráfica que más se parezca a alguna de las opciones A a H. (Sugerencia: Determinar los signos de m y b le ayudará a tomar su decisión).

5. $y = 2x + 3$

6. $y = -2x + 3$

7. $y = -2x - 3$

8. $y = 2x - 3$

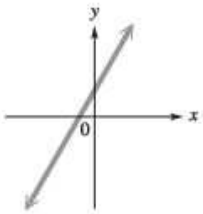
9. $y = 2x$

10. $y = -2x$

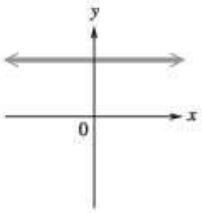
11. $y = 3$

12. $y = -3$

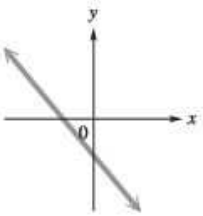
A.



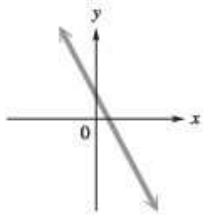
B.



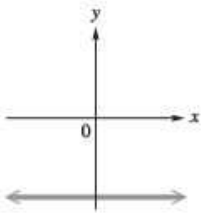
C.



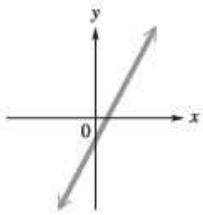
D.



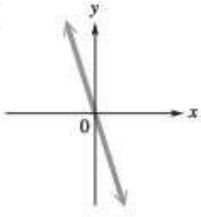
E.



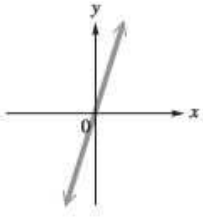
F.



G.

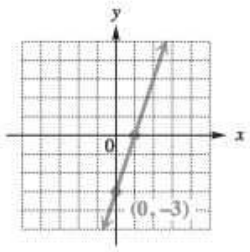


H.

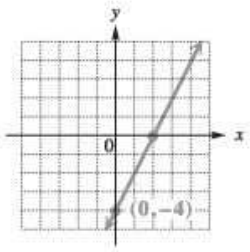


Use la interpretación geométrica de pendiente (el cambio vertical dividido entre el cambio horizontal) para obtener la pendiente de cada recta. Luego, identificando la intersección de la gráfica con el eje y, escriba en la forma pendiente-intersección la ecuación de la recta.

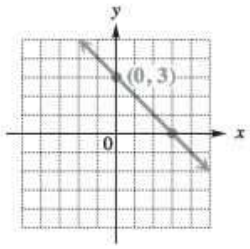
13.



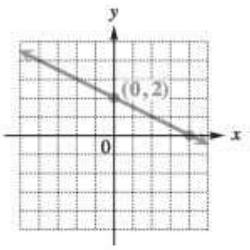
14.



15.



16.



Escriba en la forma pendiente-intersección la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones indicadas.

17. Pasa por (–2, 4); pendiente $-\frac{3}{4}$

18. Pasa por (–1, 6); pendiente $-\frac{5}{6}$

19. Pasa por (5, 8); pendiente –2

20. Pasa por (12, 10); pendiente 1

21. Pasa por (–5, 4); pendiente $\frac{1}{2}$

22. Pasa por (7, –2); pendiente $\frac{1}{4}$

23. Intersección con x (3, 0); pendiente 4

24. Intersección con x (–2, 0); pendiente –5

Escriba la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones indicadas.

25. Pasa por (9, 5); pendiente 0

26. Pasa por (–4, –2); pendiente 0

27. Pasa por (9, 10); pendiente indefinida

28. Pasa por (–2, 8); pendiente indefinida

29. Pasa por (0.5, 0.2); vertical

30. Pasa por $\left(\frac{5}{8}, \frac{2}{9}\right)$; vertical

31. Pasa por (–7, 8); horizontal

32. Pasa por (2, 7); horizontal

Si es posible, escriba en la forma pendiente-intersección la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos.

33. (3, 4) y (5, 8)

34. (5, −2) y (−3, 14)

35. (6, 1) y (−2, 5)

36. (−2, 5) y (−8, 1)

37. $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ y $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

38. $\left(\frac{3}{4}, \frac{8}{3}\right)$ y $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

39. (2, 5) y (1, 5)

40. (−2, 2) y (4, 2)

41. (7, 6) y (7, −8)

42. (13, 5) y (13, −1)

43. (1, −3) y (−1, −3)

44. (−4, 6) y (5, 6)

Obtenga en la forma pendiente-intersección la ecuación de la recta que satisfaga las siguientes condiciones.

45. $m = 5$; $b = 15$

46. $m = -2$; $b = 12$

47. $m = -\frac{2}{3}$; $b = \frac{4}{5}$

48. $m = -\frac{5}{8}$; $b = -\frac{1}{3}$

49. Pendiente $\frac{2}{5}$; intersección con y (0, 5)

50. Pendiente $-\frac{3}{4}$; intersección con y (0, 7)

51. Explique por qué no se puede usar la forma punto-pendiente de una ecuación para obtener la ecuación de una recta vertical.

52. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones está en forma general, de acuerdo con la definición de forma general presentada en este texto?

A. $3x + 2y - 6 = 0$ **B.** $y = 5x - 12$

C. $2y = 3x + 4$ **D.** $6x - 5y = 12$

*Para cada ecuación: **a)** escríbala en la forma pendiente-intersección, **b)** obtenga la pendiente de la recta y **c)** determine la intersección con y.*

53. $x + y = 12$

54. $x - y = 14$

55. $5x + 2y = 20$

56. $6x + 5y = 40$

57. $2x - 3y = 10$

58. $4x - 3y = 10$

Escriba en la forma pendiente-intersección la ecuación de la recta que satisfaga las siguientes condiciones.

59. Pasa por (7, 2); paralela a $3x - y = 8$

60. Pasa por (4, 1); paralela a $2x + 5y = 10$

61. Pasa por (−2, −2); paralela a $-x + 2y = 10$

62. Pasa por (−1, 3); paralela a $-x + 3y = 12$

63. Pasa por (8, 5); perpendicular a $2x - y = 7$

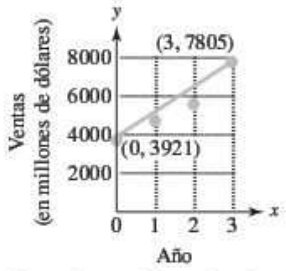
64. Pasa por (2, −7); perpendicular a $5x + 2y = 18$

65. Pasa por (−2, 7); perpendicular a $x = 9$

66. Pasa por (8, 4); perpendicular a $x = -3$

*Resuelva los siguientes problemas. En el inciso **a)**, proporcione las ecuaciones en la forma pendiente-intersección. (Redondee la pendiente a un decimal).*

67. ***Ventas de cámaras digitales*** En la gráfica se muestra el total de ventas de cámaras digitales en Estados Unidos (en millones de dólares), donde el año 2003 corresponde a $x = 0$.

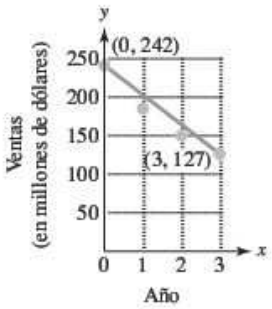


Fuente: Consumer Electronics Association.

a) Use los pares ordenados de la gráfica para escribir una ecuación que modele los datos. ¿Qué nos dice la pendiente en el contexto de este problema?

b) Use la ecuación del inciso ***a)*** para aproximar las ventas de cámaras digitales en Estados Unidos en 2007.

68. ***Venta de máquinas para enviar faxes*** En la gráfica se muestran las ventas totales de máquinas para enviar faxes en Estados Unidos (en millones de dólares), donde el año 2003 corresponde a $x = 0$.



Fuente: Consumer Electronics Association.

a) Use los pares ordenados de la gráfica para escribir una ecuación que modele los datos. ¿Qué nos dice la pendiente en el contexto de este problema?

b) Use la ecuación del inciso ***a)*** para aproximar las ventas en Estados Unidos de máquinas para enviar faxes en 2007.

Resuelva los siguientes problemas.

69. ***Graduados de preparatoria*** En la tabla de la siguiente página se muestra, para ciertos años, el porcentaje de la población estadounidense de 25 años en adelante que tiene, al menos, un diploma de preparatoria.

Graduados de preparatoria

Año	Porcentaje
1950	34.3
1960	41.1
1970	52.3
1980	66.5
1990	77.6
2000	84.1
2005	85.2

Fuente: U.S. Census Bureau.

a) Considere que $x = 0$ representa 1950, $x = 10$ representa 1960, y así sucesivamente. Use los datos de 1950 y 2000 para obtener una ecuación que modele los datos.

b) Use la ecuación del inciso ***a)*** para aproximar el porcentaje, a un decimal, de la población estadounidense de 25 años en adelante que tenía, al menos, un diploma de preparatoria en 1995.

70. *Residuos nucleares* La tabla indica los residuos nucleares de metales pesados (en miles de toneladas métricas) del combustible que usa un reactor, almacenados temporalmente dentro de este, en espera de almacenamiento permanente. (*Fuente:* "Burial of Radioactive Nuclear Waste under the Seabed", *Scientific American*, enero de 1998, p. 62).

Residuos nucleares de metales pesados

Año x	Residuos y
1995	32
2000*	42
2010*	61
2020*	76

*Estimaciones del Departamento de Energía de Estados Unidos.

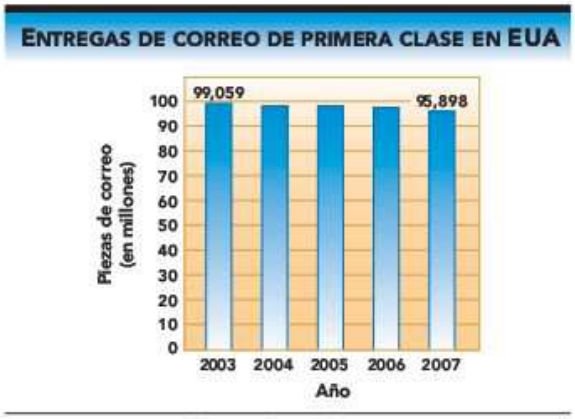
Considere que $x = 0$ representa 1995, $x = 5$ representa 2000 (puesto que $2000 - 1995 = 5$), y así sucesivamente.

a) Use (0, 32) y (25, 76) para obtener la ecuación de la recta que aproxime los otros pares ordenados. Use la forma $y = mx + b$.

b) Use la ecuación del inciso ***a)*** para estimar la cantidad de residuos nucleares en 2008.

71. *Entrega de correo* En la gráfica de barras de la siguiente columna se indica el número de piezas del correo de primera clase entregadas en Estados Unidos.

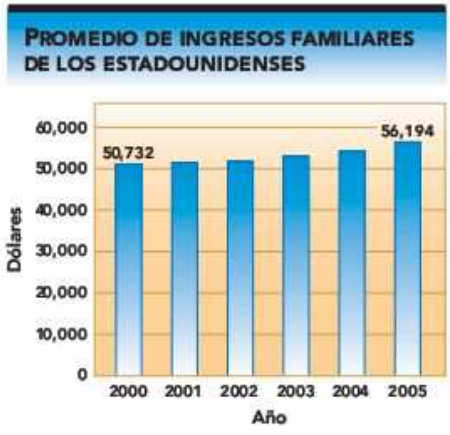
a) Escriba una ecuación que modele los datos con base en la información de los años 2003 y 2007, considerando que $x = 3$ representa 2003 y $x = 7$ representa 2007; considere, además, que y representa el número de piezas de correo (en millones).



Fuente: Servicio Postal de Estados Unidos.

b) Use la ecuación para aproximar el número de piezas de correo de primera clase entregadas en 2005. ¿Cómo se compara este resultado con el valor real de 98,071 millones de piezas?

72. *Ingresos familiares* En la gráfica de barras se muestra el promedio de ingresos familiares de todos los estadounidenses.



Fuente: U.S. Census Bureau.

a) Escriba una ecuación que modele el promedio de ingreso doméstico con base en los años 2000 y 2005, considerando que $x = 0$ representa 2000, $x = 5$ representa 2005, y que y representa el promedio de ingresos.

b) Use la ecuación para aproximar el promedio de ingresos de 2003. ¿Cómo se compara su resultado con el valor real de $52,680?

73. *Galaxias distantes* A finales de la década de 1920, el famoso astrónomo Edwin P. Hubble (1889-1963) determinó la distancia de varias galaxias y las velocidades a las que se están alejando de la Tierra. En la siguiente tabla se listan cuatro galaxias con sus distancias en años luz y sus velocidades en millas por segundo.

Galaxia	Distancia	Velocidad
Virgo	50	990
Osa menor	650	9300
Corona boreal	950	15,000
El pastor	1700	25,000

Fuente: Sharov, A. e I. Novikov, *Edwin Hubble, the Discoverer of the Big Bang Universe*, Cambridge University Press, 1993.

a) Considere que x representa la distancia y que y representa la velocidad. Use los datos de Virgo y El pastor para obtener la ecuación de una recta que modele los datos.

b) Si la galaxia Hydra se está alejando a una velocidad de 37,000 millas por segundo, estime su distancia de la Tierra, usando la ecuación del inciso ***a)***.

74. ***Opciones de aire acondicionado*** La gráfica muestra el tamaño del aparato de aire acondicionado recomendado (en unidades térmicas británicas, Btu) para el tamaño de una habitación específica en pies cuadrados. Use la información proporcionada para habitaciones de 150 pies cuadrados y 1400 pies cuadrados. Considere que x representa el número de pies cuadrados y y representa el tamaño en Btu del aparato de aire acondicionado. Obtenga una ecuación lineal que modele los datos. Escríbala de la forma pendiente-intersección.



Fuente: Carey, Morris y James, *Home Improvement for Dummies*, IDG Books.

75. ***Relación entre temperaturas Fahrenheit-Celsius*** Si pensamos en pares ordenados de la forma (C, F), entonces, los dos métodos más comunes de medir la temperatura, Celsius y Fahrenheit, se pueden relacionar como sigue. Cuando C = 0, F = 32, y cuando C = 100, F = 212. Este ejercicio muestra cómo se usa esta información para obtener la fórmula que relaciona las dos escalas de temperatura.

a) Existe una relación lineal entre temperaturas Celsius y Fahrenheit. Cuando C = 0°, F = _____, y cuando C = 100°, F = _____.

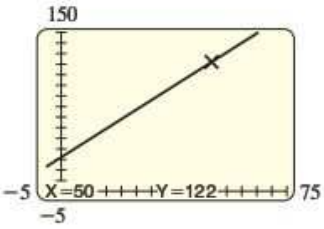
b) Piense en pares ordenados de temperaturas (C, F), donde C y F representan las temperaturas Celsius y Fahrenheit correspondientes. La ecuación que relaciona las dos escalas representa una recta que contiene los dos puntos determinados en el inciso ***a)***. ¿Cuáles son esos dos puntos?

c) Calcule la pendiente de la recta descrita en el inciso ***b)***.

d) Piense en la ecuación de la forma punto-pendiente en términos de C y F, donde C sustituye a x y F sustituye a y. Use la pendiente del inciso ***c)*** y uno de los dos puntos determinados anteriormente para obtener la ecuación que proporciona F en términos de C.

e) Para obtener otra forma de la fórmula, use la ecuación que obtuvo en el inciso ***d)*** y despeje C en términos de F.

f) La ecuación obtenida en el inciso ***d)*** está graficada en la pantalla de una calculadora graficadora que se muestra a continuación. Observe la parte inferior de la pantalla e interprétela en el contexto de este ejercicio.



76. ***Igualdad de temperaturas Fahrenheit-Celsius*** ¿A qué temperatura se igualan las escalas Fahrenheit y Celsius?

7.4 INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES: FUNCIONES LINEALES, APLICACIONES Y MODELOS

Relaciones y funciones • Dominio y rango • Gráficas de relaciones • Gráficas de funciones • Notación de funciones • Funciones lineales • Análisis del punto de equilibrio



¿Qué tipo de combustible se compró? Véase la **página 353** para conocer la respuesta.

Relaciones y funciones

Con frecuencia se describe una cantidad en función de otra. Para representar cantidades que se relacionan, podemos usar pares ordenados.

Por ejemplo, suponga que es tiempo de llenar el tanque de gasolina de su automóvil. En su estación local, la gasolina de 89 octanos cuesta $3.10 el galón. La experiencia le ha enseñado que el precio final que paga está determinado por el número de galones que usted compra multiplicado por el precio del galón (en este caso $3.10). Conforme bombea la gasolina, dos conjuntos de números van cambiando en la pantalla de la bomba: el número de galones y el precio de ese número de galones. La **tabla 2** de la siguiente página usa pares ordenados para ilustrar esta situación.

Tabla 2

Número de galones bombeados	Precio de este número de galones
0	\$0.00 = 0 (\$3.10)
1	\$3.10 = 1 (\$3.10)
2	\$6.20 = 2 (\$3.10)
3	\$9.30 = 3 (\$3.10)
4	\$12.40 = 4 (\$3.10)

Si hacemos que x denote el número de galones bombeados, entonces el precio y en dólares se puede obtener con la ecuación lineal $y = 3.10x$. Teóricamente, existen cantidades infinitas de pares de números (x, y) que satisfacen esta ecuación. En esta aplicación estamos limitados a valores no negativos de x, ya que no podemos tener un número negativo de galones. También existe un valor práctico máximo de x en esta situación, el cual varía de un automóvil a otro. ¿Qué determina este valor máximo?

En este ejemplo, el precio total depende de la cantidad de gasolina bombeada. Por esta razón, el precio se conoce como *variable dependiente*, y el número de galones se conoce como *variable independiente*. Generalizando, si el valor de la variable y depende del valor de la variable x, entonces y es la **variable dependiente** y x es la **variable independiente**.

Variable independiente → x, Variable dependiente → y

$$(x, y)$$

Como las cantidades que se relacionan se pueden escribir como pares ordenados, el concepto de *relación* se define como sigue.

Relación

Una **relación** es un conjunto de pares ordenados.

Por ejemplo, los conjuntos

$$F = \{(1, 2), (-2, 5), (3, -1)\} \quad \text{y} \quad G = \{(-4, 1), (-2, 1), (-2, 0)\}$$

son ambos relaciones. Una clase especial de relación, llamada *función*, es importante en matemáticas y sus aplicaciones.

Función

Una **función** es una relación en la cual, para cada valor del primer componente de los pares ordenados, hay *exactamente un valor* del segundo componente.

De los dos ejemplos de relación que acabamos de ver, solo el conjunto F es una función, debido a que para cada valor de x, existe exactamente un valor de y. En el conjunto G, los últimos dos pares ordenados tienen el mismo valor de x asociado con dos valores diferentes de y, de modo que G es una relación, pero no una función.

$F = \{(1, 2), (-2, 5), (3, -1)\}$ Función

Valores diferentes de x

$G = \{(-4, 1), (-2, 1), (-2, 0)\}$ No es una función

Valores iguales de x

En una función existe exactamente un valor de la variable dependiente, el segundo componente, para cada valor de la variable independiente, el primer componente.

Otro modo de pensar en la relación de una función es pensar en la variable independiente como la entrada y en la variable dependiente como salida. Por ejemplo, una calculadora es un dispositivo de entrada-salida. Para calcular 8^2, se debe introducir el 8, se presiona la tecla del cuadrado, y se observa que la salida es 64. Las entradas y salidas también se pueden determinar a partir de una gráfica o una tabla.

Un tercer modo de describir una función es a través de una regla que dice cómo determinar la variable dependiente para un valor específico de la variable independiente. Suponga que la regla se expresa en palabras como "la variable dependiente es el doble de la variable independiente". Como ecuación, esto se expresa como

$$\underset{\text{Variable dependiente}}{y} = 2\underset{\text{Variable independiente}}{x}.$$

EJEMPLO 1 Identificación de las variables dependiente e independiente



Identifique las variables dependiente e independiente de cada una de las siguientes funciones. Mencione un par ordenado que pertenezca a la función.

a) Los años y sedes de los cinco Juegos Olímpicos antes de 2012 mediante la relación

{(1992, Barcelona), (1996, Atlanta), (2000, Sidney), (2004, Atenas), (2008, Beijing)}.

b) El procedimiento por el cual alguien puede obtener raíces cuadradas en una calculadora.

c) La gráfica de la **figura 25** que muestra la relación entre el número de galones de agua en una pequeña alberca y el tiempo en horas.



Figura 25

Tabla 3

Año	Suscriptores de teléfonos celulares (en miles)
2002	140,766
2003	158,722
2004	182,140
2005	207,896
2006	233,041

Fuente: CTIA-The Wireless Association.

d) La tabla de suscriptores a teléfonos celulares (**tabla 3**).

e) $y = 3x + 4$.

SOLUCIÓN

a) La variable independiente (el primer componente de cada par ordenado) es el año. La variable dependiente (el segundo componente de cada par ordenado) es la ciudad. Por ejemplo, el par ordenado (2008, Beijing) pertenece a esta función.

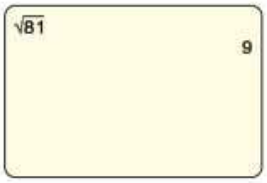


Figura 26

b) La variable independiente (la entrada) es un número real no negativo, ya que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real. La variable dependiente (la salida) es la raíz cuadrada no negativa. Por ejemplo, (81, 9) pertenece a esta función. Véase la **figura 26**.

c) La variable independiente es el tiempo, en horas, y la variable dependiente es el número de galones de agua en la alberca. Un par ordenado es (25, 3000).

d) La variable independiente es el año y la variable dependiente es el número de suscripciones. Un ejemplo de un par ordenado es (2006, 233,041).

e) La variable independiente es x, y la variable dependiente es y. Cuando $x = 1$, $y = 3(1) + 4 = 7$, de modo que el par ordenado es (1, 7). ■■■

Dominio y rango

Dominio y rango

En una relación formada por pares ordenados (x, y), el conjunto de todos los valores de la variable independiente (x) es el **dominio**. El conjunto de todos los valores de la variable dependiente (y) es el **rango**.

EJEMPLO 2 Determinación del dominio y del rango

Proporcione el dominio y el rango de cada función del **ejemplo 1**.

SOLUCIÓN

a) El dominio es el conjunto de años,

$$\{1992, 1996, 2000, 2004, 2008\},$$

y el rango es el conjunto de ciudades,

$$\{\text{Barcelona, Atlanta, Sidney, Atenas, Beijing}\}.$$

b) Como estamos manejando raíces cuadradas, el dominio está restringido a números *no negativos*: $[0, \infty)$. El rango también es $[0, \infty)$.

c) El dominio es el conjunto de valores posibles de t, el tiempo en horas, el cual es el intervalo $[0, 100]$. El rango es el número de galones en el tiempo t, el intervalo $[0, 3000]$.

d) El dominio es el conjunto de años,

$$\{2002, 2003, 2004, 2005, 2006\}.$$

El rango es el conjunto de suscripciones (en miles).

$$\{140{,}766,\ 158{,}722,\ 182{,}140,\ 207{,}896,\ 233{,}041\}.$$

e) En la definición de la ecuación (o regla), $y = 3x + 4$, x puede ser cualquier número real, de modo que el dominio es $\{x \mid x \text{ es un número real}\}$, o $(-\infty, \infty)$. Como se pueden obtener todos los números reales y por algún valor de x, el rango también es el conjunto $\{y \mid y \text{ es un número real}\}$, o $(-\infty, \infty)$. ■■■

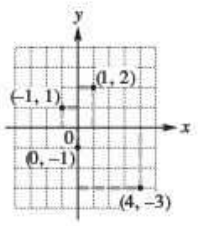
Gráficas de relaciones

La **gráfica de una relación** es la gráfica de sus pares ordenados. Da una fotografía de la relación, la cual se puede usar para obtener su dominio y su rango.

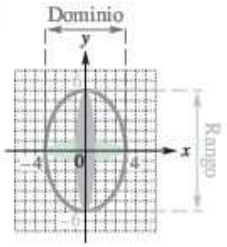
EJEMPLO 3 Determinación del dominio y del rango

Indique el dominio y el rango de cada relación.

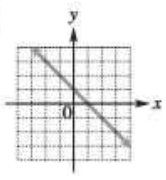
a)



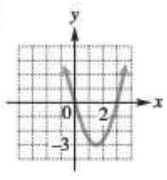
b)



c)



d)



SOLUCIÓN

a) El dominio es el conjunto de valores de x, $\{-1, 0, 1, 4\}$, y el rango es el conjunto de valores de y, $\{-3, -1, 1, 2\}$.

b) Los valores de x de los puntos de la gráfica incluyen todos los números entre -4 y 4, incluyendo ambos. Los valores de y incluyen todos los números entre -6 y 6, incluyendo ambos. Usando la notación de intervalos, el dominio es $[-4, 4]$ y el rango es $[-6, 6]$.

c) Las puntas de las flechas indican que la recta se extiende indefinidamente a la izquierda y a la derecha, así como hacia arriba y hacia abajo. Por lo mismo, tanto el dominio como el rango son el conjunto de todos los números reales, expresados como $(-\infty, \infty)$.

d) Las puntas de las flechas indican que la gráfica se extiende indefinidamente a la izquierda y a la derecha, así como hacia arriba. El dominio es $(-\infty, \infty)$. Debido a que existe por lo menos un valor y, es decir, -3, el rango incluye todos los números reales mayores que o iguales a -3, expresados como $[-3, \infty)$. ■■■

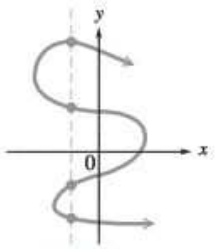
Hemos visto que las relaciones se pueden definir con ecuaciones tales como $y = 2x + 3$ y $y^2 = x$. Algunas veces es necesario determinar el dominio de una relación a partir de su ecuación. En este libro, se acepta el siguiente criterio respecto del dominio de la relación.

Acuerdo sobre el dominio

Se supone que el dominio de una relación está formado por todos los números reales que generan números reales cuando sustituyen a la variable independiente.

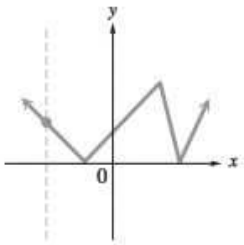
Para ilustrar este acuerdo, debido a que se puede usar cualquier número real para sustituir a x en $y = 2x + 3$, el dominio de esta función es el conjunto de números reales. La función definida por $y = \frac{1}{x}$ tiene como dominio todos los números reales excepto 0, porque y es indefinida solo si $x = 0$. Y $g(x) = \sqrt{x}$ tiene como dominio todos los números no negativos, puesto que la raíz cuadrada de un número negativo no es real.

En general, el dominio de una función definida por una expresión algebraica incluye a todos los números reales, excepto a aquellos números que llevan a la división entre 0 o la raíz par de un número negativo.



No es una función (el mismo valor de x corresponde a cuatro valores diferentes de y)

a)



Es una función (cada valor de x corresponde a un solo valor de y)

b)

Figura 27

Gráficas de funciones

La mayoría de las relaciones que hemos visto en los ejemplos son funciones, es decir, a cada valor de x le corresponde exactamente un valor de y. Ahora veamos las maneras para determinar si una relación, definida algebraicamente, es una función.

Cuando y es una función de x, cada valor de x conduce a un solo valor de y. Por lo tanto, cualquier recta vertical en el plano coordenado debe intersecar la gráfica de la función, cuando mucho, en un punto. Esto se conoce como la **prueba de la recta vertical para una función**.

Prueba de la recta vertical

Si una recta vertical interseca la gráfica de una relación en más de un punto, entonces la relación no es una función.

Por ejemplo, en la gráfica mostrada en la **figura 27*a)*** y no es una función de x, puesto que una recta vertical interseca la gráfica en más de un punto. En la **figura 27*b)***, y sí es una función de x.

La prueba de la recta vertical es un método sencillo para identificar una función definida por una gráfica. Resulta más difícil identificar si una relación definida por una ecuación representa a y como una función de x.

EJEMPLO 4 Determine si una relación es una función

Determine si cada ecuación define una función, y proporcione el dominio.

a) $y = x + 4$ ***b)*** $y = \sqrt{2x - 1}$ ***c)*** $y^2 = x$

d) $y \leq x - 1$ ***e)*** $y = \dfrac{5}{x - 1}$

SOLUCIÓN

a) En la ecuación definida por $y = x + 4$, y se obtiene siempre sumando 4 a x. Por lo tanto, cada valor de x corresponde exactamente a un valor de y y la ecuación define una función; x puede ser cualquier número real, de modo que el dominio es $(-\infty, \infty)$.

b) En la ecuación $y = \sqrt{2x - 1}$, para cualquier opción de x en el dominio, hay exactamente un valor correspondiente para y (el radical es un número no negativo). Por lo tanto, esta ecuación define una función. Como el radicando no puede ser negativo, tenemos que $2x - 1 \geq 0$.

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\geq 0 \\ 2x &\geq 1 \quad \text{Se suma 1.} \\ x &\geq \frac{1}{2} \quad \text{Se divide entre 2.} \end{aligned}$$

El dominio es $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

c) Los pares ordenados $(16, 4)$ y $(16, -4)$ satisfacen esta ecuación. Como solamente un valor de x, es decir, 16, corresponde a dos valores de y, 4 y -4, esta ecuación no define una función. Como x es igual al cuadrado de y, los valores de x siempre deben ser no negativos. El dominio de la relación es $[0, \infty)$.

d) Por definición, y es una función de x si cada valor de x tiene exactamente un valor de y. En la desigualdad $y \leq x - 1$, un valor particular de x, digamos 1, corresponde a muchos valores de y. Los pares ordenados $(1, 0)(1, -1)(1, -2)(1, -3)$, etcétera, satisfacen la desigualdad. Por esta razón, la desigualdad no define una función. Se puede usar cualquier número como valor de x, de modo que el dominio es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$.

e) Para la ecuación $y = \frac{5}{x - 1}$, dado cualquier valor de x en el dominio, se obtiene y restándole 1 y luego dividiendo 5 entre el resultado. Este proceso genera exactamente un valor de y para cada valor del dominio, de modo que esta ecuación define una función.

El dominio incluye todos los números reales con excepción de aquellos que hacen el denominador igual a 0. Se identifican estos números haciendo el denominador igual a 0 y despejando x.

$$\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \quad \text{Se suma 1.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el dominio incluye todos los números reales *excepto* 1, y se expresa como $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. ■■■

En resumen, ahora tenemos tres variaciones de la definición de una función.

Variaciones de la definición de una función

1. Una **función** es una relación en la cual, para cada valor del primer componente de los pares ordenados, hay exactamente un valor del segundo componente.
2. Una **función** es un conjunto de pares ordenados diferentes en los cuales no se repite el primer componente.
3. Una **función** es una regla o correspondencia que asigna exactamente un rango de valores para cada valor diferente del dominio.

Notación de funciones

Cuando una función f está definida por una regla o una ecuación usando x y y para las variables independiente y dependiente, decimos que "y es una función de x" para enfatizar que y *depende de* x. Para una función f se usa la notación

$$y = f(x),$$

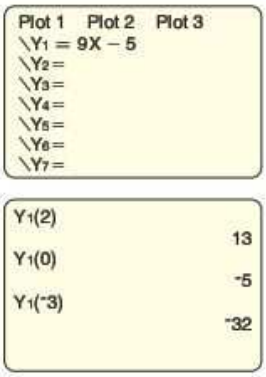
conocida como **notación de funciones**, para expresar esto y leer $f(x)$ como "f de x". (En esta notación los paréntesis no indican multiplicación). Por ejemplo, en la función f, si $y = 2x - 7$, se expresa como

$f(x)$ no se lee como "f por x".

$$f(x) = 2x - 7.$$

Observe que $f(x)$ es solo otro nombre de la variable dependiente y. Por ejemplo, si $y = f(x) = 9x - 5$, y $x = 2$, entonces obtenemos y, o $f(2)$, sustituyendo x por 2.

$$\begin{aligned} y &= f(2) \\ y &= 9 \cdot 2 - 5 \\ &= 13 \end{aligned}$$



Para $Y_1 = 9X - 5$, la opción de notación de funciones de la calculadora TI-83/84 Plus aquí apoya el análisis.

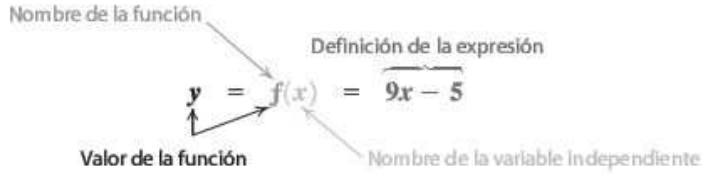
El enunciado "si $x = 2$, entonces $y = 13$" se expresa en notación de funciones de f como

$$f(2) = 13.$$

$f(2)$ se lee como "f de 2" o "f en 2". También,

$$f(0) = 9 \cdot 0 - 5 = -5, \quad \text{y} \quad f(-3) = 9(-3) - 5 = -32.$$

Estas ideas y los símbolos usados para representarlas se pueden explicar de la siguiente manera.



EJEMPLO 5 Uso de la notación de funciones

Sea $f(x) = x^2 + 5x - 3$. Obtenga lo siguiente.

a) $f(2)$ ***b)*** $f(-1)$ ***c)*** $f(2x)$

SOLUCIÓN

a) $f(x) = -x^2 + 5x - 3$

$f(2) = -2^2 + 5 \cdot 2 - 3$ Se sustituye x por 2.

-2^2 significa $-(2^2) = -4$.

$= -4 + 10 - 3$ Se desarrolla el exponente. Se multiplica.

$= 3$ Se suma y se resta.

b) $f(-1) = -(-1)^2 + 5(-1) - 3$ Se sustituye x por -1.

$= -1 - 5 - 3$ $-(-1)^2 = -(-1)(-1) = -1$

$= -9$ Se resta.

c) $f(2x) = -(2x)^2 + 5(2x) - 3$ Se sustituye x por $2x$.

$= -4x^2 + 10x - 3$ $-(2x)^2 = -2^2x^2 = -4x^2$

▮▮▮

Funciones lineales

Función lineal

Una función que se puede expresar como

$$f(x) = ax + b$$

con los números reales a y b es una **función lineal**.

Observe que la forma $f(x) = ax + b$ para definir una función lineal es la misma que la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta con pendiente a. Se sabe que la gráfica de $f(x) = ax + b$ es una recta con pendiente a e intersección con el eje y igual a $(0, b)$.

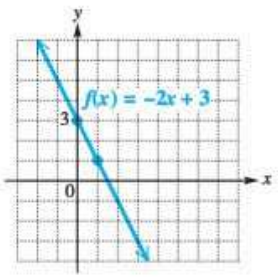
EJEMPLO 6 Gráficas de funciones lineales

Grafique las siguientes funciones lineales.

a) $f(x) = -2x + 3$ ***b)*** $f(x) = 3$

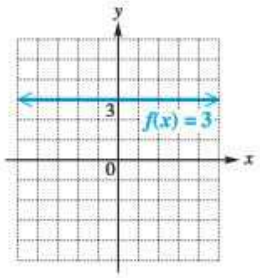
SOLUCIÓN

a) Para graficar la función, se localiza la intersección con y, $(0, 3)$. A partir de este punto se usa la pendiente de $-2 = \frac{-2}{1}$ para desplazarse 2 unidades hacia abajo y 1 unidad hacia la derecha. Este segundo punto se utiliza para obtener la gráfica de la **figura 28**.



Función lineal

Figura 28



Función constante

Figura 29

b) Por la sección anterior, sabemos que la gráfica de $y = 3$ es una recta horizontal. Por lo tanto, la gráfica de $f(x) = 3$ es una recta horizontal con la intersección en y $(0, 3)$ como se muestra en la **figura 29**. ■■■

La función definida en el **ejemplo 6 *b)*** y graficada en la **figura 29** es un ejemplo de una función constante. Una **función constante** es una función lineal de la forma

$$f(x) = b,$$

donde b es un número real. El dominio de cualquier función lineal es $(-\infty, \infty)$. El rango de una función lineal no constante [como la del **ejemplo 6 *a)***] también es $(-\infty, \infty)$, mientras que el rango de una función constante $f(x) = b$, es $\{b\}$.

Análisis del punto de equilibrio

El costo de una compañía por elaborar un producto y el ingreso por la venta de este último se pueden expresar como funciones lineales. Así, la idea del **análisis del punto de equilibrio** se puede explicar usando las gráficas de estas funciones.

1. Cuando el costo es mayor que el ingreso ganado, la compañía pierde dinero.
2. Cuando el costo es menor que el ingreso, la compañía gana dinero.
3. Cuando el costo es igual al ingreso, la compañía no gana ni pierde.

Respuesta a la pregunta de bombeo de gasolina de la página 346 Se divide la cantidad vendida entre el número de galones para encontrar que el precio por galón es el del combustible diesel.

EJEMPLO 7 Análisis del costo, ingreso y utilidad

Peripheral Visions, Inc., produce DVD con calidad de estudio, de conciertos en vivo. La compañía publicó un anuncio en un boletín de negocios. El costo del anuncio es de $100. La producción de cada DVD cuesta $20, y la compañía cobra $24 por disco.

a) Exprese el costo C como una función de x, es decir, el número de DVD producidos y vendidos.

b) Exprese el ingreso R como una función de x, es decir, el número de DVD vendidos.

c) ¿En qué momento la compañía no gana ni pierde? Es decir, ¿qué valor de x genera un ingreso igual que el costo?

d) Grafique las funciones de costo e ingreso sobre el mismo sistema de coordenadas e interprete la gráfica.

SOLUCIÓN

a) El **costo fijo** es de $100, y por cada DVD producido, el **costo variable** es de $20. Por lo tanto, el costo C se puede expresar como una función de x, el número de DVD producidos.

$$C(x) = 20x + 100 \quad (C \text{ en dólares})$$

b) Cada DVD se vende en $24, de modo que el ingreso R está dado por

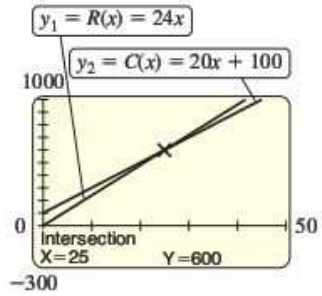
$$R(x) = 24x \quad (R \text{ en dólares}).$$

c) La compañía estará en equilibrio (es decir, sin pérdidas ni ganancias) si el ingreso iguala exactamente al costo, o $R(x) = C(x)$. En esta ecuación se despeja x.

$$\begin{aligned} R(x) &= C(x) \\ 24x &= 20x + 100 && \text{Se sustituyen } R(x) \text{ y } C(x). \\ 4x &= 100 && \text{Se resta } 20x. \\ x &= 25 && \text{Se divide entre 4.} \end{aligned}$$

Si se producen y se venden 25 DVD, la compañía no gana ni pierde.

d) La **figura 30** muestra las gráficas de las dos funciones. En el punto de equilibrio, vemos que cuando se producen y se venden 25 DVD, tanto el costo como el ingreso son iguales a $600. Si se producen y se venden menos de 25 DVD (es decir, cuando $x < 25$), la compañía pierde dinero. Cuando se producen y se venden más de 25 DVD (es decir, $x > 25$), hay una utilidad.



El punto de equilibrio es (25, 600), como se indica en la parte inferior de la pantalla. La calculadora puede obtener el punto de intersección de las gráficas. Compare con la **figura 30**.

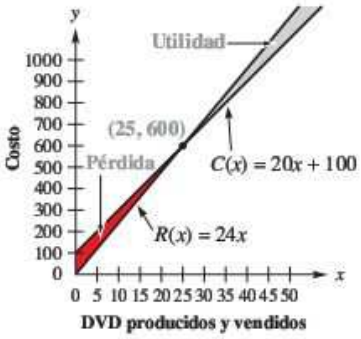


Figura 30

7.4 EJERCICIOS

1. Defina *función* y dé un ejemplo.

2. Defina el *dominio de una función* y dé un ejemplo.

En los ejercicios 3 a 14, determine si la relación es una función, e indique el dominio y el rango.

3. $\{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (4, 16)\}$

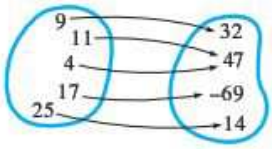
4. $\{(2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$

5. $\{(1, 1), (1, -1), (2, 4), (2, -4), (3, 9), (3, -9)\}$

6. El conjunto que incluye a ciertos países y la expectativa de vida pronosticada para las personas nacidas en 2050 es {(Estados Unidos, 83.90), (Japón, 90.91), (Canadá, 85.26),(Gran Bretaña, 83.79), (Francia, 87.01), (Alemania, 83.12), (Italia, 82.26)}. (*Fuente:* Shripad Tuljapurkar, Mountain View Research, Los Altos, California).

7. Un dispositivo de entrada-salida acepta como entradas números reales positivos, y como salidas sus raíces cuadradas tanto positivas como negativas.

8.



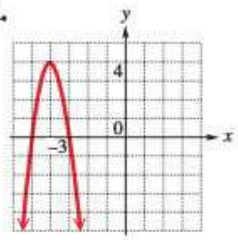
9. **Población en edad de votar en Estados Unidos (en millones)**

Hispanos	21.3
Nativos estadounidenses	1.6
Asiático-estadounidenses	8.2
Afroestadounidenses	24.6
Caucásicos	152.0

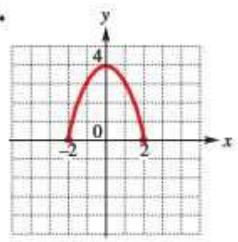
Fuente: U.S. Bureau of the Census.

10. $\{(x, y) \mid x = |y|\}$

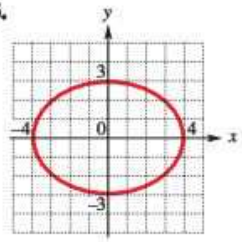
11.



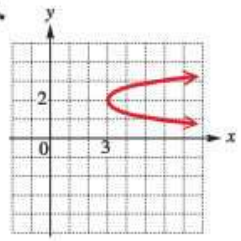
12.



13.



14.



Determine si las siguientes relaciones definen a y como una función de x. Proporcione el dominio.

15. $y = x^2$

16. $y = x^3$

17. $x = y^2$

18. $x = y^4$

19. $x + y < 4$

20. $x - y < 3$

21. $y = \sqrt{x}$

22. $y = -\sqrt{x}$

23. $y = \dfrac{1}{x}$

24. $y = \dfrac{-3}{x}$

25. $y = \sqrt{4x + 2}$

26. $y = \sqrt{9 - 2x}$

27. $y = \dfrac{2}{x - 2}$

28. $y = \dfrac{-7}{x - 7}$

29. ***Nivel del agua de una alberca*** Remítase al **ejemplo 1, figura 25**, para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Qué intervalo describe los valores de la variable dependiente?

b) ¿Durante cuánto tiempo va en aumento el nivel de agua? ¿Durante cuánto tiempo disminuye?

c) ¿Cuántos galones hay después de 90 horas?

d) Llamemos a esta función g. ¿Cuál es $g(0)$? ¿Qué significa esto en el ejemplo?

30. ***Consumo de electricidad*** La gráfica muestra los megawatts de electricidad consumidos en un día pico de verano en Sacramento, California.



Fuente: Distrito de Servicios Públicos Municipales de Sacramento.

a) ¿La gráfica es una función?

b) ¿Cuál es el dominio?

c) Estime el número de megawatts de electricidad consumidos a las 8 A.M.

d) ¿En qué momento se consume el nivel máximo de electricidad? ¿Y el nivel mínimo?

e) ¿En qué momento aproximadamente el consumo de electricidad fue de 1300 megawatts?

31. Llene los espacios para dar un ejemplo de una función de la vida diaria: _____ depende de _____, por lo que _____ es una función de _____).

32. Elija la respuesta correcta: La notación $f(3)$ significa

A. 3 veces la variable f, o $3f$.

B. el valor de la variable dependiente cuando la variable independiente es igual a 3.

C. el valor de la variable independiente cuando la variable dependiente es igual a 3.

D. f es igual a 3.

Sea $f(x) = 3 + 2x$ y $g(x) = x^2 - 2$. Obtenga el valor de cada función.

33. $f(1)$ **34.** $f(4)$ **35.** $g(2)$

36. $g(0)$ **37.** $g(-1)$ **38.** $g(-3)$

39. $f(-8)$ **40.** $f(-5)$ **41.** $f(0)$

42. $g(0)$ **43.** $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ **44.** $g(\sqrt{2})$

Trace la gráfica de cada función lineal. Proporcione el dominio y el rango.

45. $f(x) = -2x + 5$ **46.** $g(x) = 4x - 1$

47. $h(x) = \frac{1}{2}x + 2$ **48.** $F(x) = -\frac{1}{4}x + 1$

49. $G(x) = 2x$ **50.** $H(x) = -3x$

51. $f(x) = 5$ **52.** $g(x) = -4$

Se presenta una ecuación que define y como una función f de x. ***a)*** *Despeje y en términos de x y sustituya y por la notación de funciones $f(x)$.* ***b)*** *Obtenga $f(3)$.*

53. $y + 2x^2 = 3$ **54.** $y - 3x^2 = 2$

55. $4x - 3y = 8$ **56.** $-2x + 5y = 9$

57. Llene los espacios con las respuestas correctas:

La ecuación $2x + y = 4$ tiene una _____ recta como su gráfica. Un punto que se encuentra sobre la recta es (3, __). Si despejamos y en la ecuación y usamos notación de funciones, obtenemos una función lineal $f(x)$ = _____. Para esta función, $f(3)$ = _____, lo que significa que el punto (___, ___) se encuentra sobre la gráfica de la función.

58. ¿Cuál de las siguientes expresiones define una función lineal?

A. $y = \frac{x - 5}{4}$ **B.** $y = \frac{1}{x}$

C. $y = x^2$ **D.** $y = \sqrt{x}$

59. ***Tarifas de taxis***

a) Suponga que el conductor de un taxi cobra \$2.50 por milla. Complete la tabla con la respuesta correcta para el precio $f(x)$ que cobra el conductor por un viaje de x millas.

x	$f(x)$
0	
1	
2	
3	

b) La función lineal que establece una regla por la cantidad cobrada es $f(x)$ = _____.

c) Grafique esta función para el dominio $\{0, 1, 2, 3\}$.

60. ***Costo del envío de un paquete*** El envío a un lugar determinado de un paquete que pesa x libras cuesta $f(x)$ dólares, donde

$$f(x) = 2.75x.$$

a) Evalúe $f(3)$.

b) Describa lo que significa 3 y el valor de $f(3)$ en el inciso ***a)***, usando la terminología de *variable independiente* y *variable dependiente*.

c) ¿Cuánto cuesta enviar un paquete de 5 libras? Escriba la respuesta usando notación de funciones.

61. ***Estudios forenses*** Los científicos forenses usan las longitudes de la tibia (t) (el hueso del tobillo a la rodilla) y del fémur (r) (el hueso de la rodilla a la articulación de la cadera), para calcular la estatura de una persona. La estatura (h) de una persona se determina a partir de las longitudes de estos huesos usando funciones definidas por las siguientes fórmulas. Todas las medidas están en centímetros.

Para hombres:		*Para mujeres:*
$h(r) = 69.09 + 2.24r$		$h(r) = 61.41 + 2.32r$
o $h(t) = 81.69 + 2.39t$		o $h(t) = 72.57 + 2.53t$

a) Calcule la estatura de un hombre cuyo fémur mide 56 centímetros.

b) Calcule la estatura de un hombre cuya tibia mide 40 centímetros.

c) Calcule la estatura de una mujer cuyo fémur mide 50 centímetros.

d) Calcule la estatura de una mujer cuya tibia mide 36 centímetros.

62. ***Tamaño de los estanques para nutrias de mar*** Las leyes federales establecen normas para el tamaño de los estanques de mamíferos marinos. Un estanque para albergar nutrias de mar debe tener un volumen de "el cuadrado de la longitud promedio (en metros) de las nutrias de mar adultas multiplicado por 3.14 y por 0.91 metros". Si x representa la longitud promedio de las nutrias adultas y $f(x)$ representa el volumen del estanque correspondiente, esta fórmula se puede escribir como

$$f(x) = (0.91)(3.14)x^2.$$

Obtenga el volumen del estanque para cada una de las siguientes longitudes promedio de adultos (en metros). Redondee las respuestas a la centésima más próxima.

a) 0.8 **b)** 1.0

c) 1.2 **d)** 1.5

63. *Multa por exceso de velocidad* Suponga que las multas por exceso de velocidad se determinan por la función lineal

$$f(x) = 10(x - 65) + 50, \quad x > 65,$$

donde $f(x)$ es el costo en dólares de la multa si una persona es sorprendida conduciendo a x millas por hora.

a) El radar detectó a un conductor que conducía a 76 mph. ¿A cuánto asciende la multa?

b) Mientras revisaba su chequera, Johnny encontró un cheque que su esposa Gwen expidió al Departamento de Vehículos Automotores por una multa por exceso de velocidad. El monto del cheque fue de $100. ¿A qué velocidad conducía Gwen?

c) ¿A qué número entero de velocidad se expiden las primeras multas?

d) ¿A qué velocidades se expiden multas mayores de $200?

64. *Expansión y contracción de gases* En 1787 Jacques Charles observó que los gases se expandían cuando se calentaban y se contraían cuando se enfriaban. Suponga que un gas particular sigue el modelo

$$f(x) = \frac{5}{3}x + 455,$$

donde x es la temperatura en grados Celsius y $f(x)$ es el volumen en centímetros cúbicos. (*Fuente:* Bushaw, D. *et al.*, *A Sourcebook of Applications of School Mathematics*, MAA, 1980. Reimpreso con autorización).

a) Calcule el volumen cuando la temperatura es de 27° C.

b) ¿Cuál es la temperatura cuando el volumen es de 605 centímetros cúbicos?

c) Determine qué temperatura da un volumen de 0 centímetros cúbicos (es decir, cero absoluto, o la temperatura más fría posible).

Modelos de costo e ingreso *En los ejercicios 65 a 68, realice lo siguiente.*

a) *Exprese el costo C como una función de x, donde x representa la cantidad de artículos que se mencionan.*

b) *Exprese el ingreso R como una función de x.*

c) *Determine el valor de x para el cual el ingreso es igual al costo.*

d) *Grafique las ecuaciones*

$$y = C(x) \quad \text{y} \quad y = R(x)$$

sobre los mismos ejes, e interprete la gráfica.

65. Perian Herring rellena sobres durante su tiempo libre para tener un ingreso extra. El costo inicial para obtener la información necesaria del trabajo fue de $200.00. Cada sobre cuesta $0.02 y obtiene $0.04 como pago por cada sobre lleno. Considere que x representa el número de sobres llenos.

66. Bart Stewart tiene un servicio de copiado en su casa. Pagó $3500 por la copiadora y por un contrato de mantenimiento durante el tiempo de vida de la máquina. Cada hoja de papel que usa cuesta $0.01, y obtiene $0.05 como pago por cada copia que hace. Sea x el número de copias realizadas.

67. Frank Sesso opera un servicio de entregas en una ciudad del sur. Su costo de inicio fue de $2300. Él estima que cada entrega le cuesta (en términos de gasolina, desgaste por uso de su automóvil, etcétera) $3.00 por entrega. Cobra $5.50 por entrega. Sea x el número de entregas que realiza.

68. Jane Major hornea pasteles y los vende en las ferias parroquiales en Luisiana. Su costo inicial para la feria de la Pointe Coupee Parish este año fue de $40.00. Ella calcula que cada pastel tiene un costo de producción de $2.50, y cobra $6.50 por pastel. Sea x el número de pasteles vendidos. (Suponga que no hubo pasteles sobrantes).

7.5 FUNCIONES CUADRÁTICAS, GRÁFICAS Y MODELOS

Funciones cuadráticas y parábolas • Gráficas de funciones cuadráticas • Vértice de una parábola • Criterios generales para elaborar gráficas • Modelo de optimización

Funciones cuadráticas y parábolas

Ahora veremos las *funciones cuadráticas*, aquellas que están definidas por polinomios de segundo grado.

Función cuadrática

Una función f es una **función cuadrática** si

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.



La función cuadrática más sencilla está definida por $f(x) = x^2$. Al graficar los puntos de la siguiente tabla y dibujar una curva suave a través de ellos se obtiene la gráfica de la **figura 31**. Esta gráfica se conoce como **parábola**. Todas las funciones cuadráticas tienen una gráfica que es una parábola.

Las parábolas son simétricas con respecto a una recta (el eje y en la **figura 31**). La recta de simetría de una parábola se conoce como el **eje** de la parábola. El punto donde el eje corta la parábola es el **vértice** de la parábola. El vértice es el punto más bajo (o el más alto) en una parábola vertical.

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

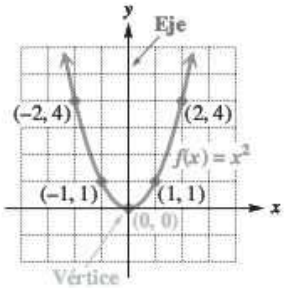


Figura 31

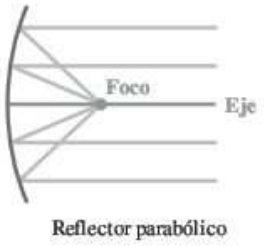


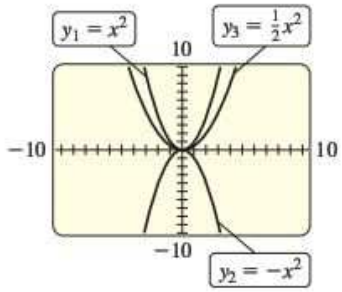
Figura 32

El **foco** de una parábola es un punto sobre su eje que determina la curvatura. Véase la **figura 32**. Cuando el reflector parabólico de un horno solar es orientado hacia el Sol, los rayos de luz rebotan en el reflector y coinciden en el foco, creando un calor intenso en ese punto.

Gráficas de funciones cuadráticas

El primer ejemplo muestra cómo la constante a afecta a la gráfica de una función de la forma $g(x) = ax^2$.

EJEMPLO 1 Gráfica de funciones cuadráticas $(g(x) = ax^2)$



La pantalla ilustra las tres gráficas consideradas en el **ejemplo 1** y las **figuras 33 y 34**.

Grafique las siguientes funciones definidas. Compárelas con la gráfica de $f(x) = x^2$.

a) $g(x) = -x^2$ ***b)*** $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

SOLUCIÓN

a) Para un valor dado de x, el valor correspondiente de $g(x)$ será el negativo del que fue para $f(x) = x^2$. (Véase la tabla de valores en la **figura 33**). Debido a esto, la gráfica de $g(x) = -x^2$ es de la misma forma que la de $f(x) = x^2$, pero se abre hacia abajo, como se observa en la **figura 33**. ***En general, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ se abre hacia abajo siempre que $a < 0$.***

x	y
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4

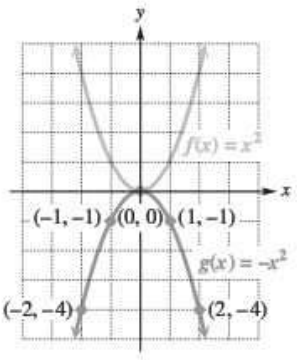


Figura 33

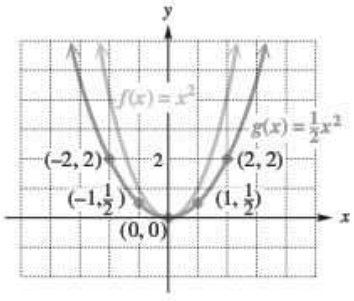


Figura 34

x	y
-2	2
-1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	2

b) Se elige un valor de x y luego se obtiene $g(x)$. El coeficiente igual a $\frac{1}{2}$ provoca que el valor resultante de $g(x)$ sea menor que el de $f(x) = x^2$, haciendo la parábola más ancha que la gráfica de $f(x) = x^2$. Véase la **figura 34**. En las dos parábolas de este ejemplo, el eje es la recta vertical $x = 0$ y el vértice es el origen $(0, 0)$. ■■■

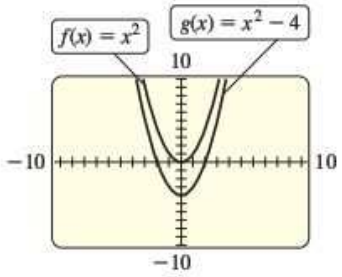
Los desplazamientos vertical y horizontal de la gráfica de $f(x) = x^2$ se conocen como **traslaciones**.

EJEMPLO 2 Gráfica de una función cuadrática (desplazamiento vertical)

Grafique $g(x) = x^2 - 4$. Compare con la gráfica de $f(x) = x^2$.

SOLUCIÓN

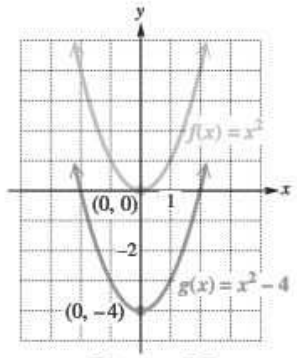
Al comparar las tablas de valores de $g(x) = x^2 - 4$ y $f(x) = x^2$ mostradas en la **figura 35**, se observa que para los valores de x, los valores correspondientes de y en g son 4 unidades menores que los de f. Esto trae consigo un *desplazamiento vertical*. Así, la gráfica de $g(x) = x^2 - 4$ es la misma que la de $f(x) = x^2$, pero trasladada 4 unidades hacia abajo. Véase la **figura 35**. El vértice de esta parábola (en este caso el punto más bajo) está en $(0, -4)$. El eje de la parábola es la recta vertical $x = 0$.



Compare con la **figura 35**.

$f(x) = x^2$

x	y
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4



$g(x) = x^2 - 4$

x	y
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0

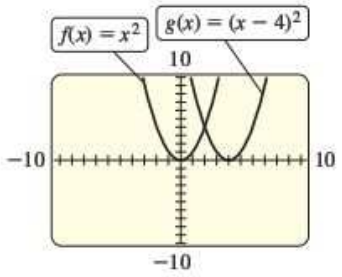
Figura 35 ■■■

EJEMPLO 3 Gráfica de una función cuadrática (desplazamiento horizontal)

Grafique $g(x) = (x - 4)^2$. Compare con la gráfica de $f(x) = x^2$.

SOLUCIÓN

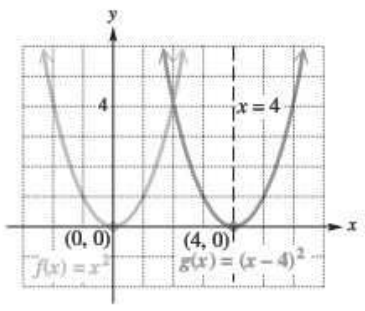
Al comparar las tablas de valores mostradas en la **figura 36**, se observa que la gráfica de $g(x) = (x - 4)^2$ es la misma que la de $f(x) = x^2$, pero trasladada 4 unidades hacia la derecha. Este es un *desplazamiento horizontal*. El vértice se localiza en $(4, 0)$. Como se muestra en la **figura 36**, el eje de esta parábola es la recta vertical $x = 4$.



Compare con la **figura 36**.

$f(x) = x^2$

x	y
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4



$g(x) = (x - 4)^2$

x	y
2	4
3	1
4	0
5	1
6	4

Figura 36 ■■■

Con frecuencia ocurren errores cuando hay desplazamientos horizontales implicados. Para determinar la dirección y magnitud de los desplazamientos horizontales, se obtiene el valor de x que causaría que la expresión $x - h$ fuera igual a cero. Por ejemplo, la gráfica de

$$f(x) = (x - 5)^2 \quad \text{se desplazaría 5 unidades hacia la } \textit{derecha},$$

porque $x = +5$ causaría que $x - 5$ fuera 0. Por otro lado, la gráfica de

$$f(x) = (x + 4)^2 \quad \text{se desplazaría 4 unidades hacia la } \textit{izquierda},$$

porque $x = -4$ causaría que $x + 4$ fuera igual a 0.

Los siguientes criterios generales se aplican para la elaboración de las gráficas de funciones de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

Criterios generales para gráficas de funciones cuadráticas

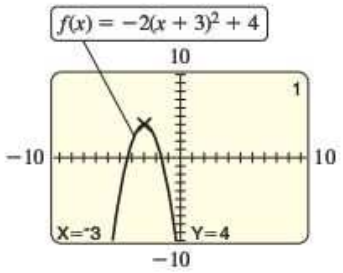
1. La gráfica de la función cuadrática definida por
$$f(x) = a(x - h)^2 + k, a \neq 0,$$
es una parábola con vértice en (h, k), y con la recta vertical $x = h$ como eje.
2. La gráfica se abre hacia arriba si a es positiva, y hacia abajo si es negativa.
3. La gráfica es más ancha que la de $f(x) = x^2$ si $0 < |a| < 1$. La gráfica es más estrecha que la de $f(x) = x^2$ si $|a| > 1$.

EJEMPLO 4 Gráfica de una función cuadrática usando los criterios generales

Grafique $f(x) = -2(x + 3)^2 + 4$.

SOLUCIÓN

La parábola se abre hacia abajo (porque $a < 0$), y es más estrecha que la gráfica de $f(x) = x^2$, puesto que $a = -2$, y $|-2| > 1$. Esta parábola tiene su vértice en $(-3, 4)$, como se muestra en la **figura 37**. Para completar la gráfica, localizamos los pares ordenados adicionales $(-4, 2)$ y $(-2, 2)$.



Compare con la **figura 37**. El vértice se localiza en (−3, 4).

x	y
−4	2
−3	4
−2	2

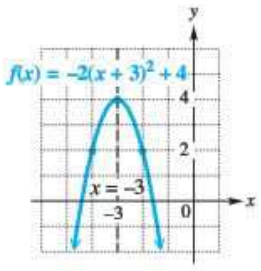


Figura 37

Vértice de una parábola

Cuando la ecuación de una parábola está dada en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, es necesario ubicar el vértice para trazar una gráfica exacta. Esto se logra de dos maneras.

1. Completando el cuadrado (**ejemplo 5**).
2. Usando una fórmula que se puede deducir completando el cuadrado (**ejemplo 6**).

EJEMPLO 5 Obtención del vértice completando el cuadrado



La trayectoria del proyectil de un cañón es una **parábola**. Para lograr el alcance máximo del cañón, se ha demostrado, a través del cálculo, que la boca del cañón debe estar a 45°. Si la boca del cañón se eleva por arriba de los 45°, el proyectil viajará demasiado alto y caerá muy pronto. Si la boca del cañón apunta por debajo de los 45°, el proyectil será atraído rápidamente por la gravedad de la Tierra.

Obtenga el vértice de la gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

SOLUCIÓN

Para obtener el vértice, se necesita expresar $x^2 - 4x + 5$ en la forma $(x - h)^2 + k$. Esto se logra completando el cuadrado. (Véase las **páginas 308 y 324**). Para simplificar la notación, se sustituye $f(x)$ por y.

$$y = x^2 - 4x + 5 \qquad \text{Sea } y = f(x).$$

$$y - 5 = x^2 - 4x \qquad \text{Se transforma de modo que la constante quede del lado izquierdo.}$$

$$y - 5 + 4 = x^2 - 4x + 4 \qquad \text{La mitad de } -4 \text{ es } -2;\ (-2)^2 = 4. \text{ Se suma 4 en ambos lados.}$$

$$y - 1 = (x - 2)^2 \qquad \text{Se reducen los términos de la izquierda y se factorizan los de la derecha.}$$

$$y = (x - 2)^2 + 1 \qquad \text{Se suma 1 en ambos lados.}$$

Ahora se escribe la ecuación original como $f(x) = (x - 2)^2 + 1$. Como se mostró antes, el vértice de esta parábola se localiza en $(2, 1)$. ■■■

Se puede encontrar una fórmula para obtener el vértice de la gráfica de la ecuación cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ completando el cuadrado de la forma general de la ecuación. Para hacerlo, se inicia dividiendo entre a, puesto que el coeficiente de x^2 debe ser igual a 1.

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \qquad \text{Se divide entre } a.$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x \qquad \text{Se resta } \frac{c}{a}.$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \qquad \text{Se suma } \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}.$$

$$\frac{y}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \text{Se reducen los términos del lado izquierdo y se factoriza el lado derecho.}$$

$$\frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \text{Se transforma de modo que el término que contiene } y \text{ quede solo en el lado izquierdo.}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad \text{Se multiplica por } a.$$

$$y = a\Big[x - \underbrace{\left(-\frac{b}{2a}\right)}_{h}\Big]^2 + \underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a}}_{k} \qquad \text{Se escribe la suma como la resta del opuesto.}$$



Johannes Kepler (1571-1630) estableció en 1609 la importancia de una curva conocida como **elipse**, cuando descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del Sol eran elípticas, no circulares. La órbita del cometa Halley, mostrada aquí, también es elíptica.

Véase el recuadro **Para reflexionar** al final de esta sección para mayor información sobre elipses.

La ecuación final muestra que el vértice (h, k) se puede expresar en términos de a, b y c. Sin embargo, no es necesario memorizar la expresión para k, porque se puede obtener sustituyendo x con $-\frac{b}{2a}$.

Fórmula del vértice

El vértice de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ tiene estas coordenadas:

$$\left(-\frac{b}{2a},\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

EJEMPLO 6 Obtención del vértice usando la fórmula correspondiente

Use la fórmula del vértice para obtener el vértice de la gráfica de la función

$$f(x) = x^2 - x - 6.$$

SOLUCIÓN

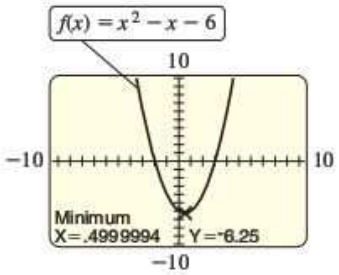
Para $f(x) = x^2 - x - 6$, es decir, $1x^2 - 1x - 6$, los valores son $a = 1$, $b = -1$ y $c = -6$. La coordenada x del vértice de la parábola está dada por

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(1)} = \frac{1}{2}.$$

La coordenada y es $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4}$$

Finalmente, el vértice es $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$. ■■■



Observe la ligera discrepancia cuando pedimos a la calculadora que obtenga el vértice (un *mínimo* aquí). Esto refuerza el hecho de que ***¡se deben entender los conceptos y no confiar totalmente en la tecnología!***

Criterios generales para elaborar gráficas

Ahora examinaremos un método general para graficar funciones cuadráticas usando intersecciones y vértices.

Elaboración de la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$

Paso 1 **Identifique si la gráfica se abre hacia arriba o hacia abajo.** Determine si la gráfica se abre hacia arriba (esto es, si $a > 0$) o se abre hacia abajo (si $a < 0$), como ayuda en el proceso de elaboración de la gráfica.

Paso 2 **Obtenga el vértice.** Se localiza el vértice, ya sea usando la fórmula o completando el cuadrado.

Paso 3 **Obtenga la intersección con el eje y.** Se ubica la intersección con y evaluando $f(0)$.

Paso 4 **Obtenga la intersección con el eje x.** Se localiza la intersección con x, si existe, resolviendo $f(x) = 0$.

Paso 5 **Elabore la gráfica.** Se obtienen y grafican los puntos adicionales que sean necesarios, usando la simetría con respecto a los ejes.



Galileo Galilei (1564-1642) murió en el año en que nació Newton. Su trabajo fue importante en el desarrollo del cálculo de Newton. La idea de **función** está implícita en el análisis de Galileo de la trayectoria parabólica de un proyectil, donde la altura y el alcance son funciones (en nuestros términos) del ángulo de elevación y de la velocidad inicial.

Cuenta la leyenda que Galileo dejó caer objetos de diferentes pesos desde lo alto de la torre de Pisa, para refutar el punto de vista aristotélico de que objetos más pesados caen más rápido que los objetos más ligeros. Desarrolló una fórmula para cuerpos en caída libre que se describe como

$$d = 16t^2,$$

donde d es la distancia en pies que cae un objeto específico (descontando la resistencia del aire) en un tiempo determinado t, en segundos, sin importar su peso.

EJEMPLO 7 Gráfica de una función cuadrática usando los criterios generales

Grafique la función cuadrática $f(x) = x^2 - x - 6$.

SOLUCIÓN

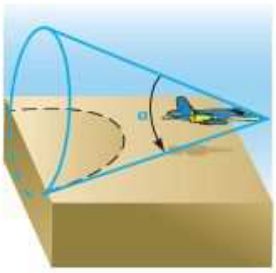
Paso 1 En la ecuación vemos que $a = 1 > 0$, de modo que la gráfica de la función se abre hacia arriba.

Paso 2 El vértice $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$, se obtuvo en el **ejemplo 6** usando la fórmula del vértice.

Paso 3 Para obtener la intersección con y se evalúa $f(0)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x - 6 \\ f(0) &= 0^2 - 0 - 6 \quad \text{Sea } x = 0. \\ f(0) &= -6 \quad \text{Se simplifica.} \end{aligned}$$

La intersección con y se encuentra en $(0, -6)$.



Un estampido sónico es una explosión de ruido causada por la onda de choque que acompaña a un avión que viaja a velocidad supersónica. La onda de choque del estampido sónico tiene la forma de un cono, y hace intersección con el suelo en una rama de la curva conocida como **hipérbola**. Todos los que se encuentran a lo largo de la curva hiperbólica en el suelo escuchan el sonido al mismo tiempo.

Véase la sección **Para reflexionar** en la **página 364** para mayor información sobre hipérbolas.

Paso 4 Se obtiene cualquier intersección con el eje x. Como el vértice $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ se encuentra en el cuadrante IV y la gráfica se abre hacia arriba, hay dos intersecciones con el eje x. Para ubicarlas, se considera que $f(x) = 0$ y se resuelve.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x - 6 \\ 0 &= x^2 - x - 6 && \text{Sea } f(x) = 0. \\ 0 &= (x-3)(x+2) && \text{Se factoriza.} \\ x - 3 = 0 \quad &\text{o} \quad x + 2 = 0 && \text{Propiedad del factor cero (sección 6.7)} \\ x &= 3 \quad \text{o} \quad x = -2 && \text{Se despeja } x. \end{aligned}$$

Las intersecciones con el eje x se localizan en $(3, 0)$ y $(-2, 0)$.

Paso 5 Se grafican los puntos obtenidos hasta ahora, y se grafican los puntos adicionales que sean necesarios. Aquí es útil la simetría de la gráfica. La gráfica se muestra en la **figura 38**.

x	y
-2	0
-1	-4
0	-6
$\frac{1}{2}$	$-\frac{25}{4}$
2	-4
3	0

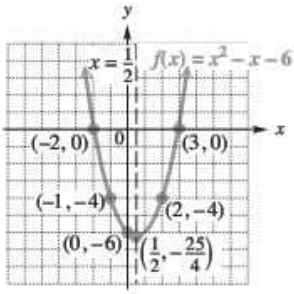


Figura 38

Modelo de optimización

Como se ha visto, el vértice de una parábola vertical es el punto más alto o el punto más bajo de la parábola. El valor de y del vértice proporciona el valor máximo o mínimo de y, mientras que el valor de x nos dice dónde se presenta ese valor máximo o mínimo. Con frecuencia es posible construir un modelo de modo que y se pueda *optimizar*.

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS En algunos problemas prácticos se desea conocer el valor mínimo o máximo de una cantidad. Cuando es factible expresar la cantidad con una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, como en el siguiente ejemplo, podemos utilizar el vértice para obtener el valor deseado.

EJEMPLO 8 Cálculo del área máxima



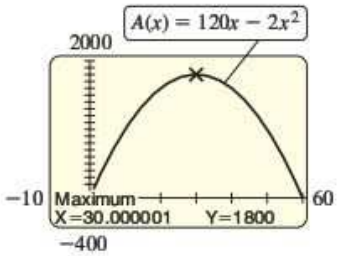
Figura 39

Un granjero tiene 120 pies de material para una valla y desea colocarla a lo largo de tres lados de un terreno rectangular, con un granero formando el cuarto lado. Determine el área máxima que se puede cercar. ¿Qué dimensión tiene esta área?

SOLUCIÓN

La **figura 39** muestra el terreno. Sea x el ancho del terreno. Entonces, como hay 120 pies de valla, podemos representar el largo en términos de x como sigue.

$$\begin{aligned} x + x + \text{largo} &= 120 && \text{La suma de los tres lados cercados es igual a 120 pies.} \\ 2x + \text{largo} &= 120 && \text{Se reducen términos.} \\ \text{largo} &= 120 - 2x && \text{Se resta } 2x. \end{aligned}$$



El vértice se encuentra en (30, 1800), apoyando el resultado analítico del **ejemplo 8**.

El área $A(x)$ se modela con el producto del largo y el ancho.

$$A(x) = (120 - 2x)x$$
$$= 120x - 2x^2$$

Para hacer $120x - 2x^2$ (y, por lo tanto, el área) tan grande como sea posible, primero se obtiene el vértice de la gráfica de la función $A(x) = 120x - 2x^2$.

$$A(x) = -2x^2 + 120x \quad \text{Forma estándar}$$

Aquí tenemos que $a = -2$ y $b = 120$. La coordenada x del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{120}{2(-2)} = 30.$$

El vértice de la parábola es (30, 1800). El vértice es un punto máximo (puesto que $a = -2 < 0$), de modo que el área máxima que puede cercar el granjero es

$$A(30) = -2(30)^2 + 120(30) = 1800 \text{ pies cuadrados.}$$

El granjero puede cercar una área máxima de 1800 pies cuadrados, cuando el ancho del terreno es de 30 pies y el largo es $120 - 2(30) = 60$ pies. ▮▮▮

Se debe tener cuidado al interpretar los significados de las coordenadas del vértice en problemas que implican valores máximos o mínimos. La primera coordenada, x, proporciona el valor para el cual el *valor de la función* es un máximo o un mínimo. Lea el problema con cuidado para determinar si le piden obtener el valor de la variable independiente, la variable dependiente (es decir, el valor de la función) o ambas.

Para reflexionar

Secciones cónicas

El círculo, presentado en la primera sección de este capítulo, la parábola, la elipse y la hipérbola se conocen como **secciones cónicas**. Como se observa en la **figura 40**, cada una de estas formas geométricas se puede obtener cortando con un plano un cono infinito (formado por dos *conos unidos por el vértice*).

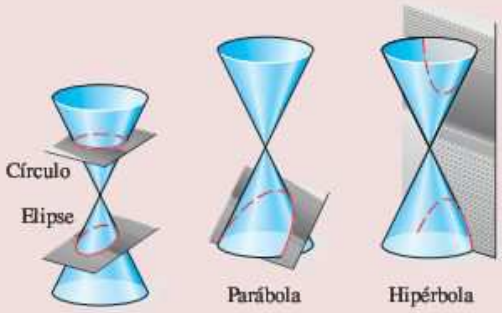
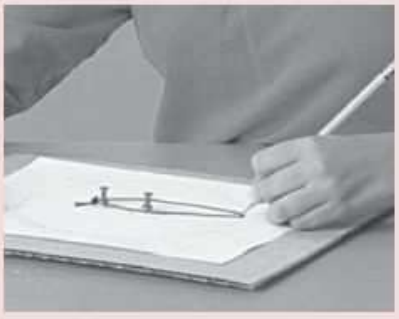


Figura 40

El geómetra griego Apolonio (alrededor de 225 a. C.) también fue astrónomo, e investigó exhaustivamente estas figuras en su obra *Secciones cónicas*. Apolonio es el responsable de nombres tales como "elipse", "parábola" e "hipérbola". Las notas al margen de esta sección muestran algunas formas en que estas figuras aparecen en el mundo que nos rodea.

Para investigación individual o en grupo

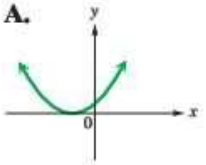
1. Los términos *elipse*, *parábola* e *hipérbola* son similares a los términos *elipsis*, *parábola* (en el sentido narrativo) e *hipérbole*. ¿Qué significan estos últimos tres términos? Usted podría tener necesidad de investigar las similitudes entre la terminología matemática y estos términos lingüísticos.
2. Identifique algunos lugares de su entorno donde haya secciones cónicas.
3. La siguiente fotografía muestra cómo se puede dibujar una elipse usando tachuelas y cuerda. Un voluntario debe pasar al pizarrón y usar una cuerda y tachuelas para modificar el método para dibujar un círculo. Luego, dos alumnos de la clase tienen que trabajar juntos para dibujar una elipse. (*Sugerencia:* ¡Presione fuerte!)



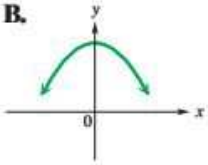
7.5 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 6, asocie cada ecuación con la figura de los incisos A a F que más se parezca a su gráfica.

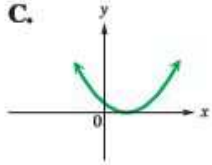
A.



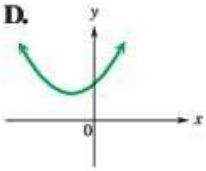
B.



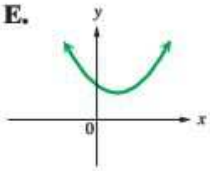
C.



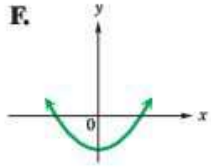
D.



E.



F.



1. $g(x) = x^2 - 5$

2. $h(x) = -x^2 + 4$

3. $F(x) = (x - 1)^2$

4. $G(x) = (x + 1)^2$

5. $H(x) = (x - 1)^2 + 1$

6. $K(x) = (x + 1)^2 + 1$

7. Explique en sus propias palabras el significado de cada término.

a) vértice de una parábola ***b)*** eje de una parábola

8. Explique por qué el eje de la gráfica de una función cuadrática no puede ser una recta horizontal.

Localice el vértice de la gráfica de cada una de las siguientes funciones cuadráticas.

9. $f(x) = -3x^2$

10. $f(x) = -0.5x^2$

11. $f(x) = x^2 + 4$

12. $f(x) = x^2 - 4$

13. $f(x) = (x - 1)^2$

14. $f(x) = (x + 3)^2$

15. $f(x) = (x + 3)^2 - 4$

16. $f(x) = (x - 5)^2 - 8$

17. Describa cómo se desplaza la gráfica de cada parábola en los **ejercicios 15 y 16**, en comparación con la gráfica de $y = x^2$.

Para cada función cuadrática, diga si la gráfica se abre hacia arriba o hacia abajo, e indique si la gráfica es más ancha, más angosta o igual que la gráfica de $f(x) = x^2$.

18. $f(x) = -2x^2$

19. $f(x) = -3x^2 + 1$

20. $f(x) = 0.5x^2$

21. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4$

22. ¿Qué le dice el valor de a en $f(x) = a(x - h)^2 + k$ acerca de la gráfica de la función comparada con la gráfica de $y = x^2$?

23. Para $f(x) = a(x - h)^2 + k$, ¿en qué cuadrante se encuentra el vértice si:

a) $h > 0,\ k > 0$? ***b)*** $h > 0,\ k < 0$?

c) $h < 0,\ k > 0$? ***d)*** $h < 0,\ k < 0$?

24. ***a)*** ¿Cuál es el valor de h si la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ tiene el vértice sobre el eje y?

b) ¿Cuál es el valor de k si la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ tiene el vértice sobre el eje x?

Trace la gráfica de cada función cuadrática usando los métodos descritos en esta sección. Señale dos puntos de cada gráfica.

25. $f(x) = 3x^2$

26. $f(x) = -2x^2$

27. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

28. $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

29. $f(x) = x^2 - 1$

30. $f(x) = x^2 + 3$

31. $f(x) = -x^2 + 2$

32. $f(x) = -x^2 - 4$

33. $f(x) = 2x^2 - 2$

34. $f(x) = -3x^2 + 1$

35. $f(x) = (x - 4)^2$

36. $f(x) = (x - 3)^2$

37. $f(x) = 3(x + 1)^2$

38. $f(x) = -2(x + 1)^2$

39. $f(x) = (x + 1)^2 - 2$

40. $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

Trace la gráfica de cada función cuadrática. Señale las coordenadas del vértice de la gráfica.

41. $f(x) = x^2 + 8x + 14$

42. $f(x) = x^2 + 10x + 23$

43. $f(x) = x^2 + 2x - 4$

44. $f(x) = 3x^2 - 9x + 8$

45. $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$

46. $f(x) = -5x^2 - 10x + 2$

Resuelva cada problema.

47. ***Dimensiones de un circuito de ejercicios*** Steve Stembridge tiene 100 metros de material para cercar una superficie rectangular para que su perro pueda correr. ¿Qué ancho proporcionará a ese terreno el área máxima?

48. ***Dimensiones de un estacionamiento*** Morgan'sDepartment Store desea construir un estacionamiento rectangular en un terreno limitado en un lado por una carretera. Hay material para construir una valla de 280 pies para los otros tres lados. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno si el área cercada debe ser la máxima? ¿Cuál es el área máxima?

49. ***Altura de un objeto lanzado*** Si un objeto sobre la Tierra se arroja hacia arriba con una velocidad inicial de 32 pies por segundo, entonces su altura después de t segundos está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 32t.$$

Calcule la altura máxima que alcanza el objeto y el número de segundos que tarda en llegar al suelo.

50. *Altura de un objeto lanzado* Un proyectil sobre la Tierra es disparado verticalmente hacia arriba de modo que su distancia (en pies) arriba del suelo t segundos después del disparo está dada por

$$s(t) = -16t^2 + 400t.$$

Calcule la altura máxima que alcanza el proyectil y el número de segundos que tarda en llegar a esa altura.

51. *Altura de un objeto lanzado* Si se desprecia la resistencia del aire, un proyectil disparado verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 40 metros por segundo, tendrá una altura s en metros dada por la función

$$s(t) = -4.9t^2 + 40t.$$

donde t es el número de segundos transcurridos después del lanzamiento. ¿Después de cuántos segundos alcanzará su altura máxima, y cuál es esta? Redondee sus respuestas a un decimal.

52. *Altura de un objeto lanzado* Un robot espacial es proyectado de la Luna con su altura en pies dada por

$$f(x) = -0.0013x^2 + 1.727x,$$

donde x es el tiempo en segundos. Calcule la altura máxima que puede alcanzar el robot y el tiempo que le toma llegar ahí. Redondee sus respuestas a un decimal.

53. *Exposición al monóxido de carbono* El monóxido de carbono (CO) se combina con la hemoglobina de la sangre para formar carboxihemoglobina (COHb), la cual reduce el transporte de oxígeno a los tejidos. Los fumadores normalmente tienen entre 4% y 6% de COHb en su sangre, lo que causa síntomas como alteración del flujo de la sangre, problemas de la vista y falta de atención. La función cuadrática definida por

$$T(x) = 0.00787x^2 - 1.528x + 75.89$$

aproxima el tiempo de exposición en horas necesario para alcanzar este nivel de 4% a 6%, donde $50 \le x \le 100$ es la cantidad de monóxido de carbono presente en el aire en partes por millón (ppm). (*Fuente: Indoor Air Quality Environmental Information Handbook: Combustion Sources*, Departamento de Energía de Estados Unidos).

a) Un calentador de queroseno o un cuarto lleno de fumadores es capaz de producir 50 ppm de monóxido de carbono. ¿Cuánto tiempo tardaría una persona que no fuma en comenzar a sentir los síntomas mencionados?

b) Calcule la concentración de monóxido de carbono necesaria para que un individuo pase del 4% al 6% de COHb en 3 horas.

54. *Exposición al monóxido de carbono* Remítase al **ejercicio 53**. Altas concentraciones de monóxido de carbono (CO) pueden causar coma y la muerte. El tiempo requerido para que una persona alcance un nivel de COHb capaz de causar estado de coma se aproxima mediante la función

$$T(x) = 0.0002x^2 - 0.316x + 127.9.$$

T es el tiempo necesario de exposición en horas para alcanzar ese nivel y $500 \le x \le 800$ es la cantidad de monóxido de carbono en partes por millón (ppm). (*Fuente: Indoor Air Quality Environmental Information Handbook: Combustion Sources*, Departamento de Energía de Estados Unidos).

a) ¿Cuál es el tiempo de exposición cuando $x = 600$ ppm?

b) Estime la concentración de CO necesaria para producir estado de coma en 4 horas.

55. *Distancia para detener un automóvil* En la siguiente tabla se muestran valores elegidos de la distancia y en pies para detener un automóvil que viaja a x mph.

Velocidad x (en mph)	Distancia y para detenerse (en pies)
20	46
30	87
40	140
50	240
60	282
70	371

Fuente: National Safety Institute Student Workbook.

La función cuadrática definida por

$$f(x) = 0.056057x^2 + 1.06657x$$

es un modelo de los datos. Calcule e interprete $f(45)$.

56. *Trayectoria de un objeto sobre un planeta* Cuando un objeto se desplaza bajo la influencia de una fuerza constante (sin resistencia del aire), su trayectoria es parabólica. Esta es la trayectoria de una pelota arrojada cerca de la superficie de un planeta u otro cuerpo celeste. Suponga que dos pelotas se arrojan simultáneamente hacia arriba a un ángulo de 45° sobre dos planetas diferentes. Si la velocidad inicial de ambas es de 30 mph, entonces las coordenadas x, y en pies se pueden expresar mediante la ecuación

$$y = x - \frac{g}{1922}x^2,$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. El valor de g variará con la masa y el tamaño del planeta. (*Fuente:* Zeilik, M., S. Gregory y E. Smith, *Introductory Astronomy and Astrophysics*, Saunders College Publishers).

En la Tierra, $g = 32.2$ y en marte, $g = 12.6$. Obtenga las dos ecuaciones y determine la diferencia en las distancias horizontales recorridas por cada una de las pelotas.



7.6 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS, APLICACIONES Y MODELOS

Funciones exponenciales y aplicaciones • Funciones logarítmicas y aplicaciones • Modelos exponenciales en la naturaleza

Funciones exponenciales y aplicaciones

En esta sección presentaremos dos nuevos tipos de funciones.

Funciones exponenciales

Una **función exponencial** de base b, donde $b > 0$ y $b \neq 1$, es una función f de la siguiente forma

$$f(x) = b^x, \qquad \text{donde } x \text{ es un número real.}$$

Observe que en la definición de función exponencial, la base b está restringida a números positivos, con b ≠ 1.

Hasta ahora, hemos definido solo exponentes enteros. En la definición de función exponencial, se permite que x tenga el valor de cualquier número real. Aplicando métodos que no se analizan en este libro, es factible aproximar expresiones como

$$2^{9/7}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{1.5}, \qquad \text{y} \qquad 10^{\sqrt{3}}$$

Una calculadora científica o graficadora es capaz de aproximar estos números. Véase la pantalla que aparece en el margen.

$2^{9/7}$ 2.438027308
$(1/2)^{1.5}$ .3535533906
$10^{\sqrt{3}}$ 53.95737429

Compare con el análisis del texto.

En la **figura 41** se muestran las gráficas de $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, y $h(x) = 10^x$. En cada caso, se presenta una tabla de puntos seleccionados. Los puntos están unidos por una curva suave. En cada gráfica la curva se aproxima al eje x, pero no lo toca. Por esta razón, el eje x se conoce como **asíntota horizontal** de la gráfica.

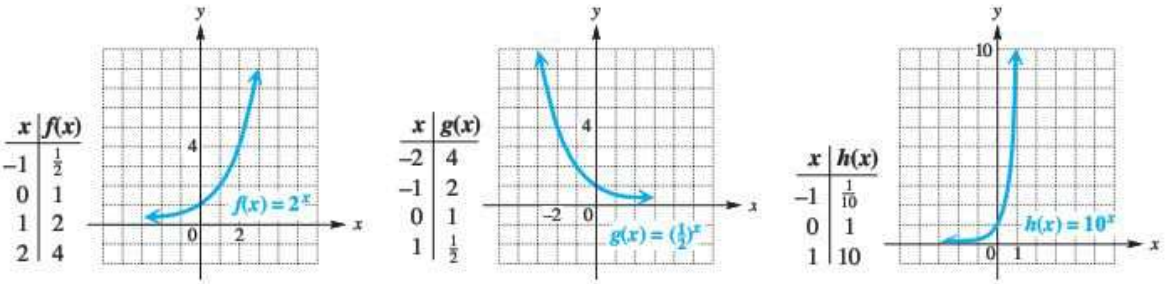


Figura 41

Características de la gráfica de $f(x) = b^x$

1. La gráfica siempre contiene el punto $(0, 1)$, porque $b^0 = 1$.
2. Cuando $b > 1$, la gráfica se *crece* de izquierda a derecha [como en las **figuras 41a) y c)**, con $b = 2$ y $b = 10$]. Cuando $0 < b < 1$, la gráfica *decrece* de izquierda a derecha [como en la **figura 41b)**, con $b = \frac{1}{2}$].
3. El eje x es la asíntota horizontal.
4. El dominio es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $(0, \infty)$.

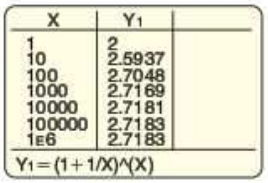
Probablemente la función exponencial más importante es la de base e. (Véase la **sección 5.4**). El número e fue llamado así en honor de Leonhard Euler (1707-1783) y es igual a 2.718281828 aproximadamente. Es un número irracional. Conforme n se vuelve tan grande que no tiene límite, la expresión

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ se aproxima a } e.$$

Esto se expresa como sigue.

$$\text{Conforme } n \to \infty, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2.718281828.$$

Véase la **tabla 4**.



Esta tabla muestra valores seleccionados de $Y_1 = \left(1+\frac{1}{X}\right)^X$. Compare con la **tabla 4**.

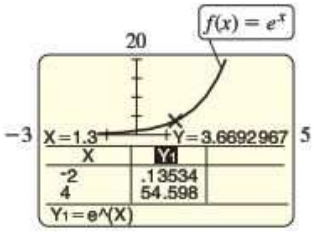
Tabla 4

n	Valor aproximado de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
100	2.70481
1000	2.71692
10,000	2.71815
1,000,000	2.71828

Las potencias de e se pueden aproximar en una calculadora científica o graficadora. Algunas potencias de e obtenidas en una calculadora son

$$e^{-2} \approx 0.1353352832, \qquad e^{1.3} \approx 3.669296668, \qquad e^4 \approx 54.59815003.$$

En la **figura 42** se ilustra la gráfica de la función $f(x) = e^x$.



Los valores de e^{-2}, $e^{1.3}$ y e^4 son aproximados en la gráfica, de pantalla dividida, de $f(x) = e^x$.

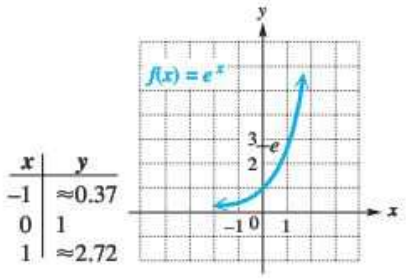


Figura 42

Una aplicación en la vida real de funciones exponenciales se presenta en el cálculo del **interés compuesto**.

Fórmula para el cálculo del interés compuesto

Suponga que un capital de P dólares se invierte a una tasa r de interés anual (como porcentaje, expresado en forma decimal), capitalizado n veces por año. Entonces la cantidad A acumulada después de t años está dada por la siguiente fórmula.

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$



Continuando su éxito de *Yo amo a Lucy*, **Lucille Ball** estelarizó *The Lucy Show*, que se transmitió por seis temporadas en la CBS en la década de 1960. Ella trabajaba con el señor Mooney (Gale Gordon), quien era muy cuidadoso con su dinero.

En el programa del 26 de septiembre de 1966, "Lucy, the Bean Queen", Lucy aprendió una lección acerca del **crecimiento exponencial**. El señor Mooney había rehusado prestarle $1500 para comprar muebles, argumentando que ella no conocía el valor del dinero. Mooney le explicó que si ahorraba un centavo el día 1, dos centavos el día 2, cuatro centavos el día 3, y así sucesivamente, ella tendría dinero más que suficiente para comprar sus muebles después de solo 19 días. (Tal vez usted desee verificar esto).

EJEMPLO 1 Aplicación de la fórmula de interés compuesto

Suponga que se invierten $1000 a una tasa de interés anual del 2%, capitalizado trimestralmente (cuatro veces por año). Calcule la cantidad total en la cuenta después de 10 años si no se realiza ningún retiro.

SOLUCIÓN

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$ Fórmula de interés compuesto

$$A = 1000\left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^{4 \cdot 10}$$ $P = 1000, r = 0.02, n = 4, t = 10$

$$A = 1000(1.005)^{40}$$ Se simplifica.

$$A \approx 1000(1.22079)$$ Se evalúa 1.005^{40} con una calculadora.

≈ significa "es aproximadamente igual a"

$$A = 1220.79$$ Al centavo más próximo

Habría $1220.79 en la cuenta al cabo de 10 años. ■■■

La fórmula de interés compuesto que se presentó anteriormente se aplica si la institución financiera capitaliza el interés para un número finito de periodos anuales de capitalización. Teóricamente, el número de periodos de capitalización por año puede ser cada vez mayor (sobre una base trimestral, mensual, diaria, etcétera), y si se permite que n se aproxime al infinito, se dice que el interés se capitaliza *continuamente*. La fórmula de **capitalización continua** incluye al número e.

Fórmula de interés compuesto de forma continua

Suponga que se invierte un capital de P dólares a una tasa de interés anual r (porcentaje expresado en forma decimal), capitalizado de forma continua. Entonces la cantidad A acumulada después de t años está dada por la siguiente fórmula.

$$A = Pe^{rt}$$

EJEMPLO 2 Aplicación de la fórmula de interés compuesto de forma continua

Suponga que se invierten $5000 a una tasa de interés anual del 2.5%, capitalizados de forma continua. Calcule la cantidad total en la cuenta después de cuatro años si no se efectúan retiros.

SOLUCIÓN

$$A = Pe^{rt}$$ Fórmula de interés compuesto continuamente

$$A = 5000e^{0.025(4)}$$ $P = 5000, r = 0.025, t = 4$

$$A = 5000e^{0.1}$$ Se simplifica.

$$A \approx 5000(1.10517)$$ Se usa la tecla e^x de una calculadora.

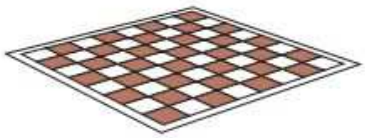
$$A = 5525.85$$ Al centavo más próximo

Habrá $5525.85 en la cuenta después de cuatro años. ■■■

La fórmula de interés compuesto de forma continua es un ejemplo de una **función con crecimiento exponencial**. En situaciones que implican crecimiento o disminución de una cantidad, la cantidad o el número presente en el tiempo t se puede aproximar con frecuencia mediante una función de la forma

$$A(t) = A_0 e^{kt},$$ Si $k > 0$, hay un *crecimiento* exponencial. Si $k < 0$, hay un *decaimiento* exponencial.

donde A_0 representa la cantidad o el número presente en el tiempo $t = 0$, y k es una constante.



Encontramos una variación de **crecimiento exponencial** en la leyenda de un rey persa que quería complacer a su primer ministro, el Gran Visir, con un regalo de su elección. El Gran Visir le explicó que le gustaría usar su tablero de ajedrez para acumular trigo. Un solo grano de trigo se colocaría en el primer cuadro del tablero, dos granos en el segundo cuadro, cuatro granos en el tercero, y así sucesivamente, duplicando el número de granos por cada uno de los 64 cuadros del tablero. Por increíble que parezca, el número de granos de trigo totalizaría ¡18.5 trillones!

Funciones logarítmicas y aplicaciones

Considere el enunciado

$$2^3 = 8.$$

En este caso, 3 es el exponente (o potencia) al cual se debe elevar la base 2 para obtener 8. El exponente 3 se conoce como el *logaritmo* en base 2 de 8, y se expresa como

$$3 = \log_2 8.$$

En general, tenemos la siguiente relación.

Definición de $\log_b x$

Para $b > 0, b \neq 1$:

$$\text{Si } b^y = x, \quad \text{entonces} \quad y = \log_b x.$$

Aquí $\log_b x$ es el exponente al cual se debe elevar b para obtener x.

La **tabla 5** ilustra la relación entre las ecuaciones exponenciales y las ecuaciones logarítmicas.

Tabla 5

Ecuación exponencial	Ecuación logarítmica
$3^4 = 81$	$4 = \log_3 81$
$10^5 = 100{,}000$	$5 = \log_{10} 100{,}000$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$	$-4 = \log_{1/2} 16$
$10^0 = 1$	$0 = \log_{10} 1$
$4^{-3} = \frac{1}{64}$	$-3 = \log_4 \frac{1}{64}$

El logaritmo es un exponente.

El concepto de funciones inversas (que se estudian en cursos más avanzados de álgebra) conduce a la definición de una segunda función.

Función logarítmica

Una **función logarítmica de base b**, donde $b > 0$ y $b \neq 1$, es una función g de la siguiente forma.

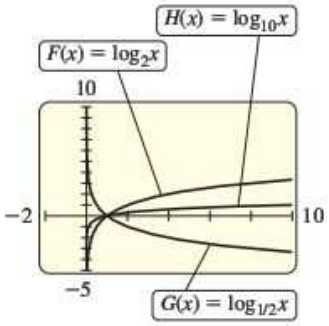
$$g(x) = \log_b x, \qquad \text{donde } x > 0$$

La gráfica de la función $g(x) = \log_b x$ se puede obtener intercambiando los roles de x y y en la función $f(x) = b^x$. Geométricamente, esto se lleva a cabo reflejando la gráfica de $f(x) = b^x$ en torno a la recta $y = x$.

Las gráficas de

$$F(x) = \log_2 x, \quad G(x) = \log_{1/2} x, \quad \text{y} \quad H(x) = \log_{10} x$$

se muestran en la **figura 43** de la siguiente página. Los puntos de cada tabla se obtuvieron intercambiando los roles de x y y de las tablas de los puntos proporcionadas en la **figura 41**.



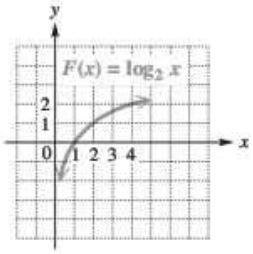
Compare con la **figura 43** de la siguiente página. Las gráficas de funciones logarítmicas con bases diferentes de 10 y e se obtuvieron utilizando la **regla de cambio de base**:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

De manera alternativa, se pueden dibujar usando la opción que permite al usuario obtener la gráfica de la inversa.

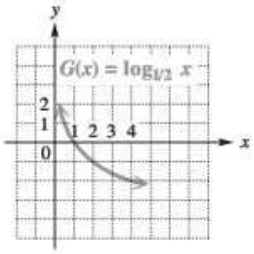
Observe que $\log x$ denota $\log_{10} x$ y $\ln x$ denota $\log_e x$.

x	$F(x)$
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



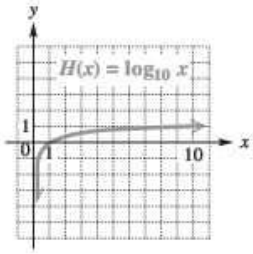
a)

x	$G(x)$
4	-2
2	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1



b)

x	$H(x)$
$\frac{1}{10}$	-1
1	0
10	1



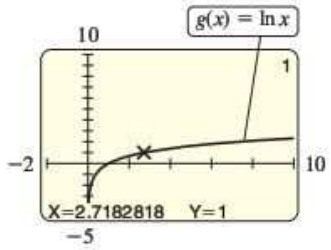
c)

Figura 43

Los puntos se unen con una curva suave, típica de las gráficas de funciones logarítmicas. En cada gráfica, la curva se aproxima al eje y, pero no lo toca. Por lo tanto, el eje y se conoce como **asíntota vertical** de la gráfica.

Características de la gráfica de $g(x) = \log_b x$

1. La gráfica siempre contiene el punto $(1, 0)$, porque $\log_b 1 = 0$.
2. Cuando $b > 1$, la gráfica *crece* de izquierda a derecha, del cuarto al primer cuadrante [como en las **figuras 43 a) y c)**, con $b = 2$ y $b = 10$]. Cuando $0 < b < 1$, la gráfica *decrece* de izquierda a derecha, del primer cuadrante al cuarto (como se ilustra en la **figura 43 b)**, con $b = \frac{1}{2}$).
3. El eje y es la asíntota vertical.
4. El dominio es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$.



Observe que cuando

$$x = e \approx 2.7182818,$$
$$y = \ln e = 1.$$

Una función logarítmica importante es la función en base e. Si se intercambian los roles de x y y en la gráfica de

$$f(x) = e^x \quad \textbf{(figura 42)},$$

se obtiene la gráfica de $g(x) = \log_e x$. El símbolo especial para el logaritmo en base e de x es *ln* x. Es decir,

$$\ln x = \log_e x.$$

La **figura 44** muestra la gráfica de $g(x) = \ln x$, la cual se conoce como **función logarítmica natural**.

El número *e* se llama así en honor de Leonhard Euler (1707-1783), el prolífico matemático suizo. El valor de e se puede expresar como una **serie infinita.**

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

También se puede expresar usando una **fracción continua.**

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{\ddots}}}}}$$

x	y
≈ 0.36	-1
1	0
≈ 2.72	1

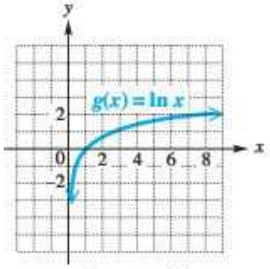


Figura 44

La expresión $\ln e^k$ es el único exponente al cual se debe elevar la base e para obtener e^k. Por lo tanto, para todos los números reales k,

$$\ln e^k = k.$$

Esto se usará en las aplicaciones que siguen.

EJEMPLO 3 Determinación del tiempo necesario para triplicar una cantidad

Suponga que se invierte cierta cantidad P a una tasa anual del 3.5%, capitalizada de forma continua. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la cantidad se triplique?

SOLUCIÓN

Se desea obtener el valor de t en la fórmula de interés con capitalización continua que hará que la cantidad A sea igual a $3P$ (puesto que deseamos que la inversión inicial, P, se triplique).

$$A = Pe^{rt} \quad \text{Fórmula de interés con capitalización continua}$$
$$3P = Pe^{0.035t} \quad \text{Se sustituye } A \text{ por } 3P \text{ y } r \text{ por } 0.035.$$
$$3 = e^{0.035t} \quad \text{Se dividen ambos lados entre } P.$$
$$\ln 3 = \ln e^{0.035t} \quad \text{Se aplica logaritmo natural de ambos lados.}$$
$$\ln 3 = 0.035t \quad \text{Se considera el hecho de que } e^k = k.$$
$$t = \frac{\ln 3}{0.035} \quad \text{Se dividen ambos lados entre } 0.035.$$

Una calculadora muestra que $\ln 3 \approx 1.098612289$. Al dividir esto entre 0.035 se obtiene

$$t \approx 31.4$$

redondeando a un decimal. Por lo tanto, en las condiciones indicadas, cualquier inversión P tardaría aproximadamente 31.4 años en triplicarse. ▮▮▮

La cantidad de tiempo que tardaría una cantidad determinada en duplicarse en las condiciones especificadas es el **tiempo de duplicación**. Verifique que el tiempo de duplicación del **ejemplo 3** sea $\frac{\ln 2}{0.035} \approx 19.8$ años.

Modelos exponenciales en la naturaleza

EJEMPLO 4 Modelo de crecimiento demográfico



De acuerdo con la Oficina del Censo de Estados Unidos (U.S. Census Bureau), la población mundial alcanzó los 6 mil millones de personas el 18 de julio de 1999, y su crecimiento era exponencial. A finales del 2000, la población había crecido a 6.079 miles de millones de personas. La población mundial pronosticada (en miles de millones de personas) x años después del 2000 está dada por la función definida por

$$f(x) = 6.079e^{0.0126x}.$$

a) Con base en este modelo, ¿cuál era la población mundial en 2010?

b) ¿En qué año la población mundial alcanzará los 7 mil millones de personas?

SOLUCIÓN

a) Como $x = 0$ representa el año 2000, en 2010 x sería $2010 - 2000 = 10$. Se debe de obtener $f(x)$ cuando x es igual a 10.

$$f(x) = 6.079e^{0.0126x} \quad \text{Función proporcionada}$$
$$f(10) = 6.079e^{0.0126(10)} \quad \text{Sea } x = 10.$$
$$\approx 6.895 \quad \text{Se usa una calculadora.}$$

De acuerdo con el modelo, la población era de 6.895 miles de millones al final de 2010.

b)

$$f(x) = 6.079e^{0.0126x} \quad \text{Función proporcionada}$$

$$7 = 6.079e^{0.0126x} \quad \text{Sea } f(x) = 7.$$

$$\frac{7}{6.079} = e^{0.0126x} \quad \text{Se divide entre 6.079.}$$

$$\ln\left(\frac{7}{6.079}\right) = \ln e^{0.0126x} \quad \text{Se aplica logaritmo de ambos lados.}$$

$$\ln\left(\frac{7}{6.079}\right) = 0.0126x \quad \ln e^x = x$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{7}{6.079}\right)}{0.0126} \quad \text{Se divide entre 0.0126; se escribe nuevamente.}$$

$$x \approx 11.2 \quad \text{Se usa una calculadora.}$$

La población mundial alcanzó los 7 mil millones de personas 11.2 años después del 2000, esto es, durante el año 2011. ■■■

Los materiales radiactivos se desintegran de acuerdo con funciones de decaimiento exponencial. La **vida media** de una sustancia que decae exponencialmente es la cantidad de tiempo que tarda la sustancia en desintegrar la mitad de su valor inicial.

EJEMPLO 5 Datación por carbono 14



El carbono 14 es una forma radiactiva de carbono que se encuentra en todas las plantas y los animales vivos. Después de que una planta o un animal muere, el radiocarbono se desintegra. Los científicos determinan la edad de los restos comparando la cantidad de carbono 14 presente con la cantidad encontrada en las plantas y los animales vivos. La cantidad de carbono 14 presente después de x años se modela con la ecuación exponencial

$$y = y_0 e^{-0.0001216x},$$

donde y_0 representa la cantidad inicial.

a) ¿Cuál es la vida media del carbono 14?

b) Si la muestra inicial contiene 1 gramo de carbono 14, ¿cuánto habrá después de 10,000 años?

SOLUCIÓN

a) Para obtener la vida media, se considera $y = \frac{1}{2}y_0$ en la ecuación.

$$\frac{1}{2}y_0 = y_0 e^{-0.0001216x} \quad \text{Sea } y = \tfrac{1}{2}y_0.$$

$$\frac{1}{2} = e^{-0.0001216x} \quad \text{Se divide entre } y_0.$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.0001216x \quad \text{Se aplica logaritmo natural en ambos lados.}$$

$$x \approx 5700 \quad \text{Se usa una calculadora.}$$

La vida media del carbono 14 es de 5700 años aproximadamente.

b) Se evalúa y para $x = 10{,}000$ y $y_0 = 1$.

$$y = 1e^{-0.0001216(10{,}000)} \approx 0.30 \quad \text{Se usa una calculadora.}$$

Habrá aproximadamente 0.30 gramos remanentes de carbono 14. ■■■

7.6 EJERCICIOS

Llene los espacios con la respuesta correcta.

1. En una función exponencial $f(x) = a^x$, si $a > 1$, la gráfica _____ (crece/decrece) de izquierda a derecha. Si $0 < a < 1$, la gráfica _____ (crece/decrece) de izquierda a derecha.

2. La intersección de la gráfica de $y = a^x$ con el eje y se localiza en _____.

3. La gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$, _____ (sí/no) tiene una intersección con el eje x.

4. El punto $(2, __)$ se encuentra en la gráfica de $f(x) = 3^{4x-3}$.

5. En una función logarítmica $g(x) = \log_a x$, si $a > 1$, la gráfica _____ (crece/decrece) de izquierda a derecha. Si $0 < a < 1$, la gráfica _____ (crece/decrece) de izquierda a derecha.

6. La intersección con el eje x de la gráfica $y = \log_a x$ se localiza en ____.

7. La gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log_a x$, _____ (sí/no) tiene una intersección con el eje y.

8. El punto $(98, __)$ se encuentra sobre la gráfica de $g(x) = \log_{10}(x + 2)$.

Use una calculadora para obtener una aproximación de cada número. Dé tantos dígitos como la calculadora despliegue.

9. $9^{3/7}$

10. $14^{2/7}$

11. $(0.83)^{-1.2}$

12. $(0.97)^{3.4}$

13. $(\sqrt{6})^{\sqrt{5}}$

14. $(\sqrt{7})^{\sqrt{3}}$

15. $\left(\frac{1}{3}\right)^{9.8}$

16. $\left(\frac{2}{5}\right)^{8.1}$

Trace la gráfica de cada función.

17. $f(x) = 3^x$

18. $f(x) = 5^x$

19. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

20. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Use una calculadora para aproximar cada número. Dé tantos decimales como la calculadora despliegue.

21. e^3

22. e^4

23. e^{-4}

24. e^{-3}

En los ejercicios 25 a 28 escriba la ecuación exponencial como una ecuación logarítmica. En los ejercicios 29 a 32, escriba nuevamente la ecuación logarítmica como una ecuación exponencial.

25. $4^2 = 16$

26. $5^3 = 125$

27. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$

28. $\left(\frac{1}{10}\right)^{-4} = 10{,}000$

29. $5 = \log_2 32$

30. $3 = \log_4 64$

31. $1 = \log_3 3$

32. $0 = \log_{12} 1$

Use una calculadora para aproximar cada número. Dé tantos dígitos como la calculadora despliegue.

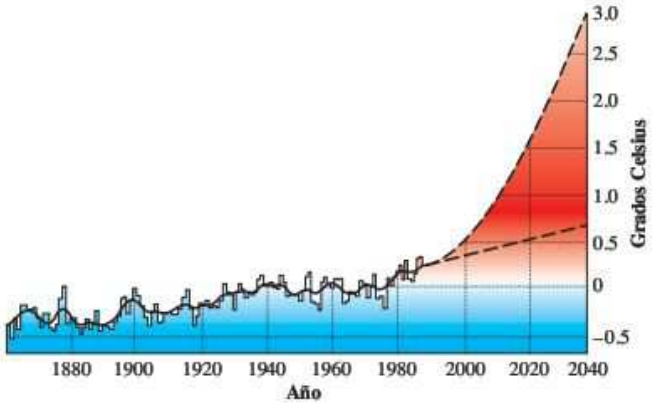
33. ln 4

34. ln 6

35. ln 0.35

36. ln 2.45

Calentamiento global *Esta figura muestra los incrementos de temperatura pronosticados usando dos gráficas: una curva de tipo exponencial y la otra lineal. A partir de la figura, aproxime el incremento* ***a)*** *en la curva exponencial y* ***b)*** *en la gráfica lineal para cada uno de los años indicados en los ejercicios 37 a 40.*



Fuente: "Zero Equals Average Global Temperature for the Period 1950-1979", por Dale D. Glasgow, de *National Geographic*, octubre de 1990. Reimpreso con autorización de National Geographic Society.

37. 2000

38. 2010

39. 2020

40. 2040

Trace la gráfica de cada función. (Sugerencia: Use las gráficas de las funciones exponenciales de los ejercicios 17 a 20 como ayuda).

41. $g(x) = \log_3 x$

42. $g(x) = \log_5 x$

43. $g(x) = \log_{1/4} x$

44. $g(x) = \log_{1/3} x$

Inversión *Determine la cantidad de dinero que se acumulará en una cuenta que paga interés compuesto, a partir del capital inicial en cada uno de los siguientes ejercicios.*

45. $20,000 invertidos al 3% de interés anual durante 4 años, capitalizados en forma ***a)*** anual; ***b)*** semestral.

46. $35,000 invertidos al 2.2% de interés anual durante 3 años, capitalizados en forma ***a)*** anual; ***b)*** trimestral.

47. $27,500 invertidos al 2.95% de interés anual durante 5 años, capitalizados en forma ***a)*** diaria ($n = 365$); ***b)*** continua.

48. $15,800 invertidos al 1.6% de interés anual durante 6.5 años, capitalizados en forma ***a)*** trimestral; ***b)*** continua.

Comparación de planes de inversión *En los ejercicios 49 y 50 identifique cuál de los dos planes ofrece un mejor rendimiento. (Las tasas de interés establecidas son tasas anuales).*

49. *Plan A*: $40,000 invertidos durante 3 años al 1.5% anual, capitalizados en forma trimestral.

Plan B: $40,000 invertidos durante 3 años al 1.4% anual, capitalizados en forma continua.

50. *Plan A*: $50,000 invertidos durante 10 años al 1.75% anual, capitalizados en forma diaria ($n = 365$).

Plan B: $50,000 invertidos durante 10 años al 1.7% anual, capitalizados en forma continua.

51. ***Comparación de inversiones*** Ronnie Virgets desea invertir $60,000 en un plan de pensiones. Una inversión ofrece el 7% de interés compuesto trimestralmente. Otra ofrece el 6.75% de interés compuesto de forma continua.

a) ¿Cuál inversión ganará más interés en 5 años?

b) ¿Cuánto más ganará el mejor plan?

52. ***Crecimiento de una cuenta*** Si Ronnie (véase el **ejercicio 51**) elige el plan con capitalización continua, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para que sus $60,000 se conviertan en $80,000?

Resuelva los siguientes problemas.

53. ***Tiempo de duplicación*** Determine el tiempo de duplicación de una inversión que gana el 2.5% anual si el interés se capitaliza de forma continua.

54. ***Tiempo de duplicación*** Si el interés se capitaliza continuamente y la tasa se triplica, ¿qué efecto tendrá esto en el tiempo requerido para que una inversión se duplique?

55. ***Crecimiento de una cuenta*** ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que una inversión se triplique, si el interés se capitaliza en forma continua a una tasa del 5% anual?

56. ***Crecimiento de una cuenta*** ¿Qué tasa de interés anual se requiere para que una inversión de $1000 crezca a $1200 en 4 años, si el interés se capitaliza en forma continua?

57. ***Presión atmosférica*** La presión atmosférica (en milibares) a una altitud determinada x (en metros) es aproximada por la función

$$f(x) = 1013e^{-0.0001341x}.$$



a) Pronostique la presión atmosférica a 1500 metros.

b) Pronostique la presión atmosférica a 11,000 metros.

58. ***Crecimiento de la población mundial*** Como se vio en el **ejemplo 4**, la población mundial en miles de millones de personas se ajusta estrechamente a la función exponencial

$$f(x) = 6.079e^{0.0126x},$$

donde x es el número de años a partir de 2000.

a) En 2006 la población mundial era de aproximadamente 6.555 miles de millones de personas. ¿Qué tanto aproxima la función este valor?

b) Pronostique la población para 2015.

c) Pronostique cuándo la población mundial será igual a 8 mil millones.

59. ***Población de Pakistán*** La Oficina del Censo de Estados Unidos pronostica que la población de Pakistán, en miles, crecerá aproximadamente de acuerdo con la función

$$f(x) = 146{,}250(2)^{0.0176x},$$

donde $x = 0$ representa el año 2000, $x = 25$ representa el año 2025 y $x = 50$ representa el año 2050.

a) De acuerdo con este modelo, ¿cuál era la población de Pakistán en el año 2000?

b) ¿Cuál será la población en 2025?

c) ¿Cómo se compara la población de 2025 con la población de 2000?

60. ***Población de Brasil*** La Oficina del Censo de Estados Unidos pronostica que la población de Brasil, en miles, crecerá aproximadamente de acuerdo con la función

$$f(x) = 176{,}000(2)^{0.008x},$$

donde $x = 0$ representa el año 2000, $x = 25$ representa el año 2025, y $x = 50$ representa el año 2050.

a) De acuerdo con este modelo, ¿cuál era la población de Brasil en 2000?

b) ¿Cuál será la población en 2025?

c) ¿Cómo se compara la población de 2025 con la población de 2000?

61. ***Decaimiento del plomo*** Una muestra de 500 gramos de plomo radiactivo 210 se convierte en polonio 210 de acuerdo con la función

$$A(t) = 500e^{-0.032t},$$

donde t es el tiempo en años. Calcule la cantidad de la muestra después de

a) 4 años ***b)*** 8 años

c) 20 años ***d)*** Obtenga la vida media.

62. *Decaimiento del plutonio* Repita el **ejercicio 61** para 500 gramos de plutonio 241, el cual decae de acuerdo con la función que se define a continuación, donde t es el tiempo en años.

$$A(t) = A_0 e^{-0.053t}$$

63. *Decaimiento del radio* Calcule la vida media del radio 226, el cual decae de acuerdo con la siguiente función, donde t es el tiempo en años.

$$A(t) = A_0 e^{-0.00043t}$$

64. *Decaimiento del yodo* ¿Cuánto tiempo tardará una cantidad de yodo 131 en decaer al 25% de su cantidad inicial, sabiendo que decae de acuerdo con la función que se define a continuación, donde t es el tiempo en días?

$$A(t) = A_0 e^{-0.087t}$$

65. *Datación por carbono 14* Suponga que se descubre una momia egipcia en la que la cantidad de carbono 14 presente es solo de un tercio de la cantidad encontrada en seres humanos vivos. ¿Aproximadamente hace cuánto tiempo murió el egipcio?

66. *Datación por carbono 14* La muestra de un depósito de residuos cerca del Estrecho de Magallanes tenía el 60% de carbono 14 de una muestra viviente contemporánea. ¿Qué edad tiene la muestra?

67. *Datación por carbono 14* Estime la antigüedad de una muestra que contiene el 20% de carbono 14 de una muestra viva comparable.

68. *Valor de una copiadora* Un pequeño negocio estima que el valor $V(t)$ de una copiadora disminuye de acuerdo con la función definida por

$$V(t) = 5000(2)^{-0.15t},$$

donde t es el número de años que han transcurrido desde que se compró la máquina, y $V(t)$ está en dólares.

a) ¿Cuál fue el valor original de la máquina?

b) ¿Cuál es el valor de la máquina 5 años después de la compra? Redondee su respuesta al dólar más cercano.

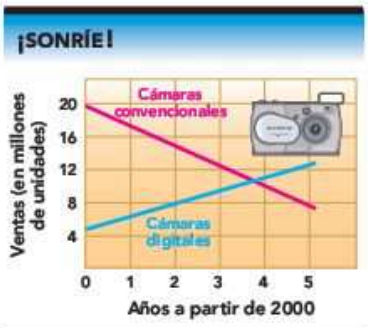
c) ¿Cuál es el valor de la máquina 10 años después de la compra? Redondee su respuesta al dólar más cercano.

7.7 SISTEMAS DE ECUACIONES

Sistemas lineales con dos variables • Método de eliminación • Método de sustitución • Sistemas lineales con tres variables

Sistemas lineales con dos variables

Durante la primera década del siglo XXI, la venta de cámaras digitales se incrementó, mientras que las ventas de las cámaras convencionales disminuyeron. Estas tendencias se representan en la gráfica de la **figura 45**. Las gráficas de las dos rectas se intersecan en el punto correspondiente al momento en que los dos tipos de cámaras registraron el *mismo* nivel de ventas.



Fuente: Consumer Electronics Association.

Figura 45

$$\begin{aligned} 2.5x + y &= 19.4 \\ -1.7x + y &= 4.4 \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones lineales

(En este caso, $x = 0$ representa el año 2000, $x = 1$ representa 2001, y así sucesivamente. La variable y representa las ventas en millones de unidades).

Como se muestra al costado de la **figura 45**, se puede usar una ecuación para modelar la gráfica de las ventas de las cámaras digitales (la segunda ecuación) y otra para modelar la gráfica de las ventas de las cámaras convencionales (la primera ecuación). Este conjunto de ecuaciones se conoce como **sistema de ecuaciones**. El punto donde las gráficas de la **figura 45** se intersecan es una solución de cada una de las ecuaciones individuales. También es la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Es posible ampliar la definición de la ecuación lineal presentada anteriormente para incluir más variables. Cualquier ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

para los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (algunos de los cuales pueden ser 0), y b, es una **ecuación lineal**. Si todas las ecuaciones de un sistema son lineales, el sistema es un **sistema de ecuaciones lineales** o un **sistema lineal**.

En la **figura 46**, las dos ecuaciones lineales $x + y = 5$ y $2x - y = 4$ están graficadas en el mismo sistema de coordenadas. Observe que su punto de intersección es (3, 2). Debido a que (3, 2) es el único par ordenado que satisface ambas ecuaciones al mismo tiempo, se dice que $\{(3, 2)\}$ es el conjunto solución del sistema

$$x + y = 5$$
$$2x - y = 4.$$

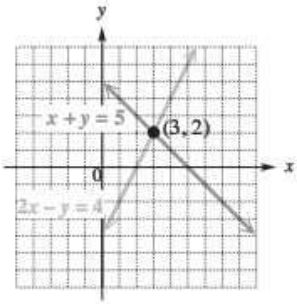
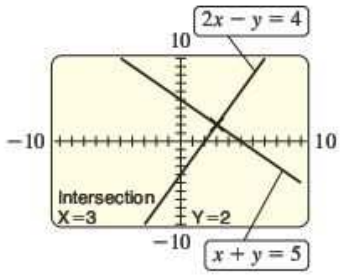


Figura 46

Debido a que la gráfica de una ecuación lineal con dos variables es una recta, existen tres posibilidades de solución en el conjunto solución de un sistema lineal.



Una calculadora graficadora apoya la aseveración de que (3, 2) es la solución del sistema.

$$x + y = 5$$
$$2x - y = 4.$$

Gráficas de un sistema lineal con dos variables (tres posibilidades)

1. Las dos gráficas tienen un solo punto de intersección. Las coordenadas de este punto dan la solución del sistema. En tal caso, el sistema es **consistente** y las ecuaciones son **independientes**. Este es el caso más común. Véase la **figura 47**.
2. Las gráficas son rectas paralelas. En este caso el sistema es **inconsistente** y las ecuaciones son **independientes**. Es decir, no existe una solución común para ambas ecuaciones del sistema, y el conjunto solución es $\emptyset$. Véase la **figura 48**.
3. Las gráficas se encuentran en la misma recta. En este caso, el sistema es **consistente** y las ecuaciones son **dependientes**, porque cualquier solución de una ecuación del sistema también es una solución de la otra. El conjunto solución es un conjunto infinito de pares ordenados que representan los puntos sobre la recta. Véase la **figura 49**.



Figura 47

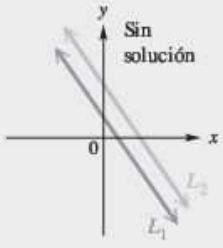


Figura 48

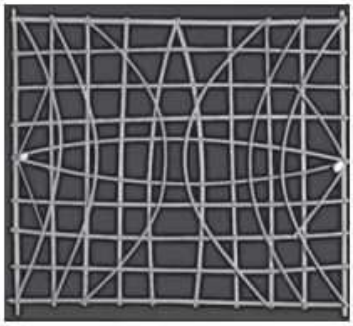


Figura 49

Método de eliminación

En la mayoría de los casos, no podemos confiar en las gráficas para resolver sistemas, de modo que se usan métodos algebraicos. El **método de eliminación** implica la combinación de dos ecuaciones del sistema, de manera que se pueda eliminar una variable. Esto se logra sabiendo que:

Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.



La solución de **sistemas de ecuaciones** con gráficas más complicadas que las que solo incluyen rectas es el principio subyacente del ***mattang***, una carta de navegación, formada con varas, usada por los pobladores de las Islas Marshall del Pacífico. Un *mattang* está hecho con raíces unidas con fibras de coco, y muestra el patrón de las olas existente al aproximarse a una isla.

Solución de sistemas lineales por eliminación

Paso 1 **Escriba ambas ecuaciones en la forma general** $Ax + By = C$.

Paso 2 **Haga opuestos los coeficientes de un par de términos que contengan la misma variable.** Se multiplica una o ambas ecuaciones por los números adecuados de modo que la suma de los coeficientes ya sea de x o y sea igual a cero.

Paso 3 **Sume** las nuevas ecuaciones para eliminar una variable. La suma debe ser una ecuación con una sola variable.

Paso 4 **Resuelva** la ecuación del paso 3.

Paso 5 **Obtenga el otro valor.** Sustituya el resultado del paso 4 en alguna de las ecuaciones proporcionadas y despeje la otra variable.

Paso 6 **Obtenga el conjunto solución.** Verifique la solución en las dos ecuaciones proporcionadas. Luego escriba el conjunto solución.

EJEMPLO 1 Solución de un sistema por eliminación (dos variables)

Resuelva el sistema.

$$5x - 2y = 4 \quad (1)$$
$$2x + 3y = 13 \quad (2)$$

SOLUCIÓN

Paso 1 Ambas ecuaciones se encuentran ya en forma general.

Paso 2 Nuestro objetivo es sumar las dos ecuaciones de modo que se elimine una de las variables. Para eliminar la variable x, primero debemos transformar una o ambas ecuaciones de modo que los coeficientes de x sean opuestos. Luego, cuando se reduzcan las ecuaciones, el término de x tendrá un coeficiente igual a 0, y podremos despejar y. Se inicia multiplicando la ecuación (1) por 2 y la ecuación (2) por -5.

$$\begin{aligned} 10x - 4y &= 8 && \text{2 por cada lado de la ecuación (1)} \\ -10x - 15y &= -65 && \text{-5 por cada lado de la ecuación (2)} \end{aligned}$$

Paso 3 Ahora se suman las dos ecuaciones para eliminar x.

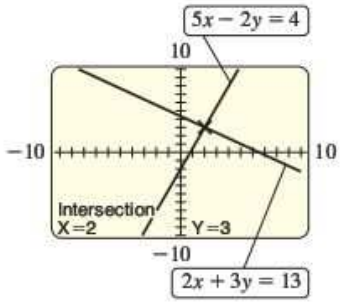
$$\begin{aligned} 10x - 4y &= 8 \\ -10x - 15y &= -65 \\ \hline -19y &= -57 && \text{Se suma.} \end{aligned}$$

Paso 4 Se resuelve la ecuación del paso 3 para obtener $y = 3$. (Se divide entre -19).

Paso 5 Para obtener x, se sustituye y por 3 en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 13 && \text{Se usa la ecuación (2).} \\ 2x + 3(3) &= 13 && \text{Sea } y = 3. \\ 2x + 9 &= 13 && \text{Se multiplica.} \\ 2x &= 4 && \text{Se resta 9.} \\ x &= 2 && \text{Se divide entre 2.} \end{aligned}$$

Paso 6 La solución parece ser $(2, 3)$. Para comprobarlo, se sustituye x por **2**, y y por **3** en ambas ecuaciones originales.



Una calculadora graficadora apoya la solución del **ejemplo 1**. Se despeja y en cada ecuación, se grafican ambas ecuaciones y se obtiene el punto de intersección de las dos rectas: (2, 3).

Verificación:

$5x - 2y = 4$ (1)	$2x + 3y = 13$ (2)
$5(2) - 2(3) \stackrel{?}{=} 4$	$2(2) + 3(3) \stackrel{?}{=} 13$
$10 - 6 \stackrel{?}{=} 4$	$4 + 9 \stackrel{?}{=} 13$
$4 = 4$ ✓ Verdadero	$13 = 13$ ✓ Verdadero

El conjunto solución es $\{(2, 3)\}$.

Método de sustitución

Los sistemas lineales también se pueden resolver por el **método de sustitución**. Este método es más útil para resolver sistemas lineales en los cuales una variable tiene un coeficiente igual a 1 o −1.

Solución de sistemas lineales por sustitución

Paso 1 **Escriba una variable en términos de la otra.** Despeje en una ecuación alguna de las variables. (Si una de las variables tiene un coeficiente igual a 1 o −1, elíjala, puesto que en el método de sustitución normalmente es más fácil este camino).

Paso 2 **Sustituya** la variable despejada en la otra ecuación. El resultado debe ser una ecuación con una sola variable.

Paso 3 **Resuelva** la ecuación del paso 2.

Paso 4 **Calcule la otra variable.** Sustituya el resultado del paso 3 en la ecuación del paso 1 para obtener el valor de la otra variable.

Paso 5 **Obtenga el conjunto solución.** Compruebe la solución en ambas ecuaciones. Luego, escriba el conjunto solución.

EJEMPLO 2 Solución de un sistema por sustitución (dos variables)

Resuelva el sistema.

$$3x + 2y = 13 \quad (1)$$
$$4x - y = -1 \quad (2)$$

SOLUCIÓN

Paso 1 Se selecciona primero una de las ecuaciones para despejar x o y. Como el coeficiente de y en la ecuación (2) es −1, es mucho más fácil despejar y en la ecuación (2).

$$-y = -1 - 4x \quad \text{Se reordena la ecuación (2)}$$
$$y = 1 + 4x \quad \text{Se multiplica por } -1.$$

Paso 2 Se sustituye y por $\mathbf{1 + 4x}$ en la ecuación (1) para obtener una ecuación en x.

$$3x + 2y = 13 \quad (1)$$
$$3x + 2(1 + 4x) = 13 \quad \text{Sea } y = 1 + 4x.$$

Paso 3 Se despeja x en la ecuación que acabamos de obtener.

$$3x + 2 + 8x = 13 \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$11x = 11 \quad \text{Se reducen términos; se resta 2.}$$
$$x = 1 \quad \text{Se divide entre 11.}$$

Paso 4 Ahora se despeja y. Como $y = 1 + 4x$, encontramos que $y = 1 + 4(\mathbf{1}) = 5$.

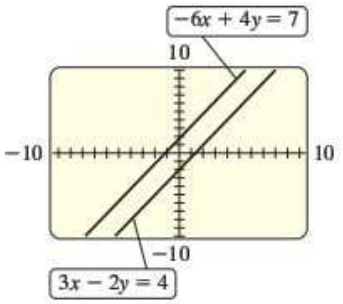
Paso 5 Se verifica para comprobar que el par ordenado (1, 5) satisfaga ambas ecuaciones originales. El conjunto solución es $\{(1, 5)\}$.

EJEMPLO 3 Solución de sistemas de casos especiales

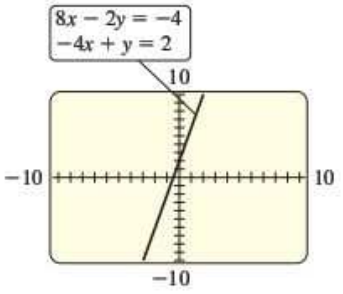
Resuelva los sistemas siguientes.

a) $3x - 2y = 4$ (1)
$-6x + 4y = 7$ (2)

b) $-4x + y = 2$ (3)
$8x - 2y = -4$ (4)



Las gráficas de las ecuaciones del **ejemplo 3*a)*** son paralelas. No hay solución.



Las gráficas de las ecuaciones del **ejemplo 3*b)*** coinciden. Solo se ve una recta. Hay soluciones infinitas.

SOLUCIÓN

a) Se elimina x multiplicando ambos lados de la ecuación (1) por 2 y luego se suma.

$$\begin{array}{rl} 6x - 4y = 8 & \text{2 por la ecuación (1)} \\ -6x + 4y = 7 & \text{(2)} \\ \hline 0 = 15 & \text{Falso} \end{array}$$

En este caso, se eliminaron ambas variables, quedando el enunciado falso $0 = 15$, lo que indica que estas dos ecuaciones no tienen soluciones comunes. El sistema es inconsistente, con el conjunto vacío $\emptyset$ como el conjunto solución.

b) Se elimina x multiplicando ambos lados de la ecuación (3) por 2 y luego sumando el resultado a la ecuación (4).

$$\begin{array}{rl} -8x + 2y = 4 & \text{2 por la ecuación (3)} \\ 8x - 2y = -4 & \text{(4)} \\ \hline 0 = 0 & \text{Verdadero} \end{array}$$

Este enunciado verdadero, es decir, $0 = 0$, indica que la solución de una ecuación también es solución de la otra, de modo que el conjunto solución es un conjunto infinito de pares ordenados. Las dos ecuaciones son dependientes.

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones dependientes se escribe como un conjunto de pares ordenados expresando x en términos de y, como se muestra a continuación. Se elige cualquier ecuación y se despeja x. Nosotros seleccionamos arbitrariamente la ecuación (3).

$$\begin{array}{rll} -4x + y = 2 & & \text{(3)} \\ x = \dfrac{2 - y}{-4} & & \\ x = \dfrac{y - 2}{4} & \text{Se multiplica por } \frac{-1}{-1}. & \end{array}$$

El conjunto solución se expresa como

$$\left\{\left(\frac{y - 2}{4}, y\right)\right\}.$$

Los pares ordenados del conjunto solución se pueden obtener seleccionando valores de y y calculando los valores correspondientes de x. Por ejemplo,

$$\text{si } y = -2, \text{ entonces } x = \frac{-2 - 2}{4} = -1$$

y la solución es el par ordenado $(-1, -2)$. ■■■

Sistemas lineales con tres variables

La solución de una ecuación con tres variables, como

$$2x + 3y - z = 4,$$

se conoce como **terna ordenada** y se expresa como (x, y, z). Por ejemplo, las ternas ordenadas $(1, 1, 1)$ y $(10, -3, 7)$ son soluciones de la ecuación $2x + 3y - z = 4$, porque los números de estas ternas ordenadas satisfacen la ecuación cuando se utilizan para sustituir los valores de x, y y z, respectivamente.

Los métodos de solución de sistemas con dos variables se pueden ampliar para resolver sistemas de ecuaciones con tres variables como el siguiente.

$$\begin{aligned} 4x + 8y + z &= 2 \\ x + 7y - 3z &= -14 \\ 2x - 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

Sistema de tres ecuaciones con tres variables.

(En algunos casos, tal vez falten una o más variables en una o más ecuaciones del sistema. Como ejemplo, véase los **ejercicios 47 a 52** de la página **384**).

La gráfica de una ecuación lineal con tres variables es un *plano*, no una recta. Como la gráfica de cada ecuación es un plano, cuya gráfica es tridimensional, el método gráfico no es un método práctico de solución. Sin embargo, ilustra el número de soluciones posibles de estos sistemas, como se observa en la **figura 50**.

Posibilidades para gráficas de sistemas lineales con tres variables

1. Los tres planos se pueden juntar en un punto común único que forma el conjunto solución del sistema. Véase la **figura 50 *a*)**.
2. Los tres planos se pueden juntar en una recta común, de modo que el conjunto de puntos a lo largo de la recta es el conjunto solución del sistema. Véase la **figura 50 *b*)**.
3. Los tres planos pueden coincidir en uno solo, de manera que el conjunto solución del sistema sea el conjunto de todos los puntos sobre ese plano. Véase la **figura 50 *c*)**.
4. Es posible que los tres planos carezcan de puntos comunes, de forma que no existe solución para el sistema. Véase la **figura 50 *d*) a *g*)**.

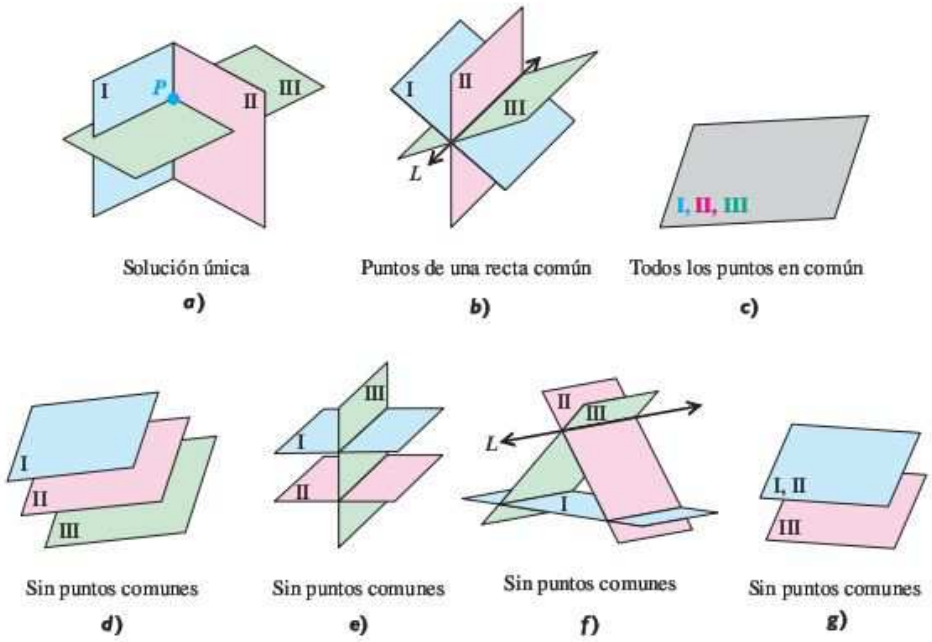


Figura 50

Los sistemas con tres variables se resuelven con una ampliación del método de eliminación, que se resume en la siguiente página.

Solución por eliminación de sistemas lineales con tres variables

Paso 1 **Elimine una variable.** Utilice el método de eliminación en dos ecuaciones cualesquiera para suprimir una de las variables. El resultado es una ecuación con dos variables.

Paso 2 **Elimine otra vez la misma variable.** Elimine la *misma* variable usando *otras* dos ecuaciones *cualesquiera*. El resultado es una ecuación con las mismas dos variables del paso 1.

Paso 3 **Elimine una variable diferente y resuelva.** Emplee el método de eliminación para excluir una segunda variable usando las dos ecuaciones con dos variables que resultaron de los pasos 1 y 2. El resultado es una ecuación con una variable que da el valor de esa variable.

Paso 4 **Obtenga un segundo valor.** Sustituya el valor de la variable calculada en el paso 3 en cualquiera de las ecuaciones con dos variables (obtenidas en el paso 1 o en el paso 2) para calcular el valor de una segunda variable.

Paso 5 **Obtenga un tercer valor.** Utilice los valores de las dos variables de los pasos 3 y 4 para calcular el valor de la tercera variable sustituyéndolas en cualquiera de las ecuaciones originales.

Paso 6 **Obtenga el conjunto solución.** Verifique la solución en todas las ecuaciones originales. Luego, escriba el conjunto solución.

EJEMPLO 4 Solución de un sistema con tres variables

Resuelva el sistema.

$$\begin{aligned} 4x + 8y + z &= 2 \quad (1)\\ x + 7y - 3z &= -14 \quad (2)\\ 2x - 3y + 2z &= 3 \quad (3) \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Paso 1 La elección de la variable que se va a eliminar es arbitraria. Suponga que decidimos iniciar eliminando z. Para ello, se multiplican ambos lados de la ecuación (1) por 3 y luego se suma el resultado a la ecuación (2).

$$\begin{array}{rl} 12x + 24y + 3z = 6 & \text{Se multiplican ambos lados de la ecuación (1) por 3.}\\ x + 7y - 3z = -14 & (2)\\ \hline 13x + 31y = -8 & \text{Se suman las ecuaciones. (4)} \end{array}$$

Paso 2 La nueva ecuación solo tiene dos variables, x y y. Para obtener otra ecuación sin z se multiplican ambos lados de la ecuación (1) por -2 y el resultado se suma a la ecuación (3). ***En este punto es esencial eliminar la misma variable, z.***

$$\begin{array}{rl} -8x - 16y - 2z = -4 & \text{Se multiplican ambos lados de la ecuación (1) por } -2.\\ 2x - 3y + 2z = 3 & (3)\\ \hline -6x - 19y = -1 & \text{Se suman las ecuaciones. (5)} \end{array}$$

Paso 3 Ahora se despejan x y y en el sistema de ecuaciones resultante de los pasos 1 y 2. (Este paso solo es posible si se elimina la *misma* variable en los primeros dos pasos).

$$\begin{array}{rl} 78x + 186y = -48 & \text{Se multiplican ambos lados de (4) por 6.}\\ -78x - 247y = -13 & \text{Se multiplican ambos lados de (5) por 13.}\\ \hline -61y = -61 & \text{Se suma.}\\ y = 1 & \text{Se divide entre } -61. \end{array}$$

Paso 4 Se sustituye 1 en lugar de y en cualquier ecuación de los pasos 1 y 2.

$$\begin{aligned} -6x - 19y &= -1 && \text{Se usa la ecuación (5).} \\ -6x - 19(1) &= -1 && \text{Sea } y = 1. \\ -6x - 19 &= -1 && \text{Se multiplica.} \\ -6x &= 18 && \text{Se suma 19.} \\ x &= -3 && \text{Se divide entre } -6. \end{aligned}$$

Paso 5 Se sustituye x por -3 y y por 1 en una de las ecuaciones originales para obtener z.

$$\begin{aligned} 4x + 8y + z &= 2 && \text{Se usa la ecuación (1).} \\ 4(-3) + 8(1) + z &= 2 && \text{Sea } x = -3 \text{ y } y = 1. \\ -4 + z &= 2 && \text{Se simplifica.} \\ z &= 6 && \text{Se suma 4.} \end{aligned}$$

Paso 6 Parece que la terna ordenada $(-3, 1, 6)$ es la única solución del sistema.

Verifique:
$$\begin{aligned} 4x + 8y + z &= 2 && (1) \\ 4(-3) + 8(1) + 6 &\stackrel{?}{=} 2 && \text{La verificación se realiza con la ecuación (1).} \\ -12 + 8 + 6 &\stackrel{?}{=} 2 && \text{Se verifica que la solución satisfaga las otras dos ecuaciones.} \\ 2 &= 2 \ \checkmark && \text{Verdadero} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{(-3, 1, 6)\}$.

7.7 EJERCICIOS

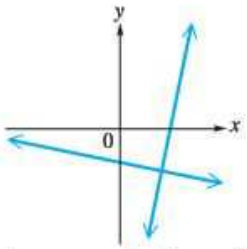
Llene los espacios con las respuestas correctas.

1. Si $(3, -6)$ es una solución de un sistema lineal en dos variables, entonces sustituir _____ en lugar de x y _____ en lugar de y conduce a enunciados verdaderos en *ambas* ecuaciones.

2. La solución de un sistema de ecuaciones lineales independientes con dos variables es un _____ _____ de números.

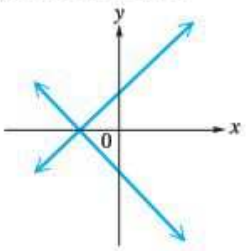
3. ¿Qué par ordenado es una solución posible del sistema de ecuaciones de la gráfica? ¿Por qué?

A. $(3, 3)$
B. $(-3, 3)$
C. $(-3, -3)$
D. $(3, -3)$



4. ¿Qué par ordenado es una solución posible del sistema de ecuaciones de la gráfica? ¿Por qué?

A. $(3, 0)$
B. $(-3, 0)$
C. $(0, 3)$
D. $(0, -3)$



Determine si el par ordenado es una solución del sistema especificado.

5. $x + y = 6$; $(5, 1)$
$x - y = 4$

6. $x - y = 17$; $(8, -9)$
$x + y = -1$

7. $2x - y = 8$; $(5, 2)$
$3x + 2y = 20$

8. $3x - 5y = -12$; $(-1, 2)$
$x - y = 1$

Asocie cada sistema de los ejercicios 9 a 12 con la gráfica correcta de los incisos A a D.

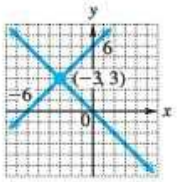
9. $x + y = 6$
$x - y = 0$

10. $x + y = -6$
$x - y = 0$

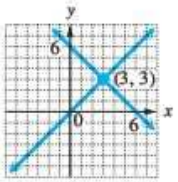
11. $x + y = 0$
$x - y = -6$

12. $x + y = 0$
$x - y = 6$

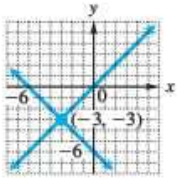
A.



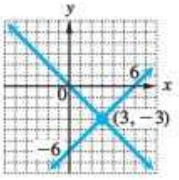
B.



C.



D.



Resuelva gráficamente los siguientes sistemas.

13. $x + y = 4$
$2x - y = 2$

14. $x + y = -5$
$-2x + y = 1$

Resuelva por eliminación los siguientes sistemas.

15. $2x - 5y = 11$
$3x + y = 8$

16. $-2x + 3y = 1$
$-4x + y = -3$

17. $3x + 4y = -6$
$5x + 3y = 1$

18. $4x + 3y = 1$
$3x + 2y = 2$

19. $3x + 3y = 0$
$4x + 2y = 3$

20. $8x + 4y = 0$
$4x - 2y = 2$

21. $7x + 2y = 6$
$-14x - 4y = -12$

22. $x - 4y = 2$
$4x - 16y = 8$

23. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{3}$
$\frac{x}{2} + 2y = -7$

24. $\frac{x}{5} + y = -\frac{12}{5}$
$\frac{x}{10} + \frac{y}{3} = -\frac{11}{30}$

25. $5x - 5y = 3$
$x - y = 12$

26. $2x - 3y = 7$
$-4x + 6y = 14$

Resuelva por sustitución los siguientes sistemas.

27. $4x + y = 6$
$y = 2x$

28. $2x - y = 6$
$y = 5x$

29. $3x - 4y = -22$
$-3x + y = 0$

30. $-3x + y = -5$
$x + 2y = 0$

31. $-x - 4y = -14$
$2x = y + 1$

32. $-3x - 5y = -17$
$4x = y - 8$

33. $5x - 4y = 9$
$3 - 2y = -x$

34. $6x - y = -9$
$4 + 7x = -y$

35. $x = 3y + 5$
$x = \frac{3}{2}y$

36. $x = 6y - 2$
$x = \frac{3}{4}y$

37. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3$
$y = 3x$

38. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y = 9$
$y = 5x$

39. Explique lo que significan los siguientes enunciados: El conjunto solución del sistema

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ 3x - y + z &= -2 \\ 4x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

es $\{(-1, 2, 3)\}$.

40. Escriba un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables que tenga el conjunto solución $\{(3, 1, 2)\}$. Luego resuelva el sistema. (*Sugerencia:* Inicie con la solución y genere tres ecuaciones que satisfaga la solución. Existen muchas maneras de hacer esto).

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones con tres variables.

41. $3x + 2y + z = 8$
$2x - 3y + 2z = -16$
$x + 4y - z = 20$

42. $-3x + y - z = -10$
$-4x + 2y + 3z = -1$
$2x + 3y - 2z = -5$

43. $2x + 5y + 2z = 0$
$4x - 7y - 3z = 1$
$3x - 8y - 2z = -6$

44. $5x - 2y + 3z = -9$
$4x + 3y + 5z = 4$
$2x + 4y - 2z = 14$

45. $x + y - z = -2$
$2x - y + z = -5$
$-x + 2y - 3z = -4$

46. $x + 2y + 3z = 1$
$-x - y + 3z = 2$
$-6x + y + z = -2$

47. $2x - 3y + 2z = -1$
$x + 2y + z = 17$
$2y - z = 7$

48. $2x - y + 3z = 6$
$x + 2y - z = 8$
$2y + z = 1$

49. $4x + 2y - 3z = 6$
$x - 4y + z = -4$
$-x + 2z = 2$

50. $2x + 3y - 4z = 4$
$x - 6y + z = -16$
$-x + 3z = 8$

51. $2x + y = 6$
$3y - 2z = -4$
$3x - 5z = -7$

52. $4x - 8y = -7$
$4y + z = 7$
$-8x + z = -4$

Venta de cámaras *Use la gráfica de la* **figura 45** *del principio de la sección (que aquí se repite) para resolver los ejercicios 53 a 55.*



Fuente: Consumer Electronics Association.

53. ¿En qué años del periodo 2000 a 2004 las ventas de cámaras digitales fueron menores que las ventas de cámaras convencionales?

54. Estime el año en el cual las ventas de los dos tipos de cámaras fueron iguales. ¿Aproximadamente cuál fue la cifra de ventas?

55. Si $x = 0$ representa el 2000 y $x = 4$ representa 2004, las ventas (y) en millones de unidades se pueden modelar mediante las ecuaciones lineales del siguiente sistema.

$$\begin{aligned} 2.5x + y &= 19.4 \quad \text{Cámaras convencionales} \\ -1.7x + y &= 4.4 \quad \text{Cámaras digitales} \end{aligned}$$

Resuelva este sistema. Exprese los valores como decimales redondeando a un decimal. Escriba la solución como un par ordenado de la forma (años, ventas).

7.8 APLICACIONES DE SISTEMAS

Introducción • Aplicaciones con dos variables • Una aplicación con tres variables

Introducción



El precio combinado de 9 cidras [frutos semejantes a los limones, como se observa en la fotografía] y 7 manzanas con olor a madera es de 107; en otra ocasión, el precio combinado de 7 cidras y 9 manzanas con olor a madera es de 101. Usted, aritmético, dígame rápidamente el precio de una cidra y el precio de una manzana, ya que tienen precios individuales distintos.

La respuesta se encuentra en la **página 390**.

En el inicio del capítulo se describe un problema de mezclas planteado en *El show de Bill Cosby*. Problemas como este han sido parte de las matemáticas por miles de años. Considere el problema que se plantea en el margen, el cual proviene de una obra de la India que se remonta al 850 d. C. Es posible resolver este problema usando un sistema de ecuaciones.

En esta sección se ilustran algunas estrategias para resolver aplicaciones usando sistemas de ecuaciones.

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Muchos problemas implican más de una incógnita. Aun cuando algunos problemas con dos incógnitas se pueden resolver usando solo una variable, muchas veces es más fácil usar dos variables. Escribimos dos ecuaciones que relacionen las incógnitas. El sistema formado por el par de ecuaciones se puede resolver usando los métodos de esta sección.

Los pasos siguientes, basados en el método de solución de problemas de seis pasos presentado por primera vez en el **capítulo 6**, constituyen una estrategia para resolver problemas que incluyen más de una variable.

Solución de un problema aplicado a través de un sistema de ecuaciones

Paso 1 **Lea** el problema cuidadosamente hasta que entienda qué datos se proporcionan y qué se debe calcular.

Paso 2 **Asigne variables** para representar los valores desconocidos, usando diagramas o tablas cuando sea necesario. *Escriba* lo que representa cada variable.

Paso 3 **Escriba un sistema de ecuaciones** que relacione las incógnitas.

Paso 4 **Resuelva** el sistema de ecuaciones.

Paso 5 **Enuncie la respuesta** del problema. ¿Parece razonable?

Paso 6 **Verifique** la respuesta con base en el planteamiento del problema original.

Aplicaciones con dos variables

EJEMPLO 1 Solución de un problema de perímetro

Un campo rectangular de futbol puede tener un ancho entre 50 y 100 yardas, y una longitud entre 50 y 100 yardas. Suponga que un campo determinado tiene un perímetro de 320 yardas. Su largo mide 40 yardas más que su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de este campo?

SOLUCIÓN

Paso 1 **Lea** el problema nuevamente. Nos piden obtener las dimensiones del campo.

Paso 2 **Asigne variables**. Sean L = el largo y W = el ancho.

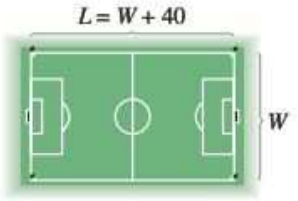


Figura 51

Paso 3 **Escriba un sistema de ecuaciones.** Como el perímetro es de 320 yardas, se obtiene una ecuación usando la fórmula del perímetro.

$$2L + 2W = 320$$

Como el largo es 40 yardas mayor que el ancho, tenemos

$$L = W + 40.$$

Véase la **figura 51**. Ahora tenemos un sistema para resolver.

$$2L + 2W = 320 \quad (1)$$
$$L = W + 40 \quad (2)$$

Paso 4 **Resuelva** el sistema de ecuaciones. Como la ecuación (2) tiene a L despejada, podemos sustituir L por $W + 40$ en la ecuación (1) y despejar W.



$$\begin{aligned} 2L + 2W &= 320 && (1)\\ 2(W + 40) + 2W &= 320 && L = W + 40\\ 2W + 80 + 2W &= 320 && \text{Propiedad distributiva}\\ 4W + 80 &= 320 && \text{Se reducen los términos semejantes.}\\ 4W &= 240 && \text{Se resta 80.}\\ W &= 60 && \text{Se divide entre 4.} \end{aligned}$$

Se considera $W = 60$ en la ecuación $L = W + 40$ para obtener L.

$$L = 60 + 40 = 100$$

Paso 5 **Enuncie la respuesta.** El largo es de 100 yardas, y el ancho es de 60 yardas. Ambas dimensiones están dentro de los rangos descritos por el problema.

Paso 6 **Verifique.** La respuesta es correcta, porque el perímetro de este campo de futbol es

$$2(100) + 2(60) = 320 \text{ yardas},$$

y el largo, de 100 yardas, es claramente 40 yardas más que el ancho, ya que

$$100 - 40 = 60.$$ ■■■

EJEMPLO 2 Solución de un problema relacionado con precios de boletos



Durante temporadas recientes de la Liga Nacional de Hockey y de la Asociación Nacional de Basquetbol, dos boletos de hockey y uno de basquetbol comprados a sus precios promedio costaban $148.79. Un boleto de hockey y dos boletos de basquetbol costaban $148.60 ¿Cuál era el precio promedio del boleto de los dos deportes? (*Fuente:* Team Marketing Report, Chicago).

SOLUCIÓN

Paso 1 **Lea** el problema nuevamente. Existen dos incógnitas.

Paso 2 **Asigne variables.** Considere que h representa el precio promedio del boleto de hockey, y b representa el precio promedio del boleto de basquetbol.

Paso 3 **Escriba un sistema de ecuaciones.** Como dos boletos de hockey y uno de basquetbol cuestan un total de $148.79, una ecuación del sistema es

$$2h + b = 148.79.$$

Con base en un razonamiento similar, la segunda ecuación es

$$h + 2b = 148.60.$$

Por lo tanto, el sistema es el siguiente.

$$2h + b = 148.79 \quad (1)$$
$$h + 2b = 148.60 \quad (2)$$

Paso 4 **Resuelva** el sistema de ecuaciones. Se elimina h.

$$\begin{aligned} 2h + b &= 148.79 && (1)\\ -2h - 4b &= -297.20 && \text{Se multiplica cada lado de (2) por } -2.\\ -3b &= -148.41 && \text{Se suma.}\\ b &= 49.47 && \text{Se divide entre } -3. \end{aligned}$$

Para obtener el valor de h, se considera $b = 49.47$ en la ecuación (2).

$$\begin{aligned} h + 2b &= 148.60 && (2)\\ h + 2(49.47) &= 148.60 && \text{Sea } b = 49.47.\\ h + 98.94 &= 148.60 && \text{Se multiplica.}\\ h &= 49.66 && \text{Se resta 98.94.} \end{aligned}$$

Paso 5 **Enuncie la respuesta**. El precio promedio de un boleto de basquetbol fue de \$49.47. Para un boleto de hockey, el precio promedio fue de \$49.66.

Paso 6 **Verifique** que estos valores satisfagan las condiciones establecidas en el problema. ■■■

Anteriormente resolvimos problemas de mezclas utilizando una variable. Otro método consiste en emplear dos variables y un sistema de ecuaciones.

EJEMPLO 3 Solución de un problema de mezclas

¿Cuántas onzas de ácido clorhídrico al 5% y ácido clorhídrico al 20% se deben combinar para obtener 10 onzas de una solución de ácido clorhídrico al 12.5%?

SOLUCIÓN

Paso 1 **Lea** el problema. Se están mezclando dos soluciones de diferentes concentraciones para obtener una cantidad específica de una solución con una concentración "intermedia".

Paso 2 Asigne **variables**. Considere que x representa el número de onzas de la solución al 5% y que y representa el número de onzas de la solución al 20%.

Porcentaje (en forma decimal)	Onzas de solución	Onzas de ácido puro
5% = 0.05	x	$0.05x$
20% = 0.20	y	$0.20y$
12.5% = 0.125	10	0.125(10)

Se resume la información del problema en una tabla.

La **figura 52** ilustra también lo que pasa en el problema.

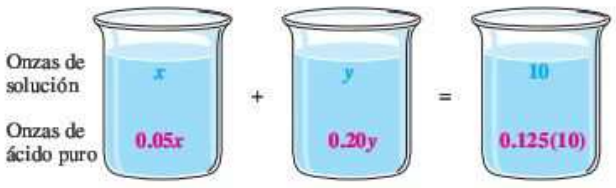


Figura 52



Solución al problema de inicio del capítulo Considere que x representa el número de libras de dulces de \$0.75, y que y representa el número de libras de dulces de \$1.25. El sistema que se debe resolver es

$$x + y = 9$$
$$0.75x + 1.25y = 0.96(9).$$

Encontramos que debe haber 5.22 libras de dulces de \$0.75 por libra y 3.78 libras de dulces de \$1.25 por libra.

Paso 3 **Escriba un sistema de ecuaciones.** Cuando x onzas de la solución al 5% y y onzas de la solución al 20% se combinan, el número total de onzas es 10.

$$x + y = 10 \quad (1)$$

Las onzas de ácido puro en la solución al 5% $(0.05x)$ más las onzas de ácido puro en la solución al 20% $(0.20y)$ deben ser iguales a las onzas totales de ácido puro de la mezcla, la cual es 0.125(10), o 1.25.

$$0.05x + 0.20y = 1.25 \quad (2)$$

Observe que estas ecuaciones se pueden determinar rápidamente leyendo la tabla hacia abajo o usando las etiquetas de la **figura 52**.

Paso 4 **Resuelva** el sistema de ecuaciones (1) y (2). Se elimina x.

$$\begin{array}{rl} 5x + 20y = 125 & \text{Se multiplica cada lado de la ecuación (2) por 100.} \\ -5x - 5y = -50 & \text{Se multiplica cada lado de la ecuación (1) por } -5. \\ \hline 15y = 75 & \text{Se suma.} \\ y = 5 & \text{Se divide entre 15.} \end{array}$$

Como $y = 5$ y $x + y = 10$, x también es igual a 5.

Paso 5 **Enuncie la respuesta.** La mezcla deseada requerirá 5 onzas de la solución al 5% y 5 onzas de la solución al 20%.

Paso 6 **Verifique** que estos valores satisfagan ambas ecuaciones del sistema. ▮▮▮

Los problemas que usan la fórmula de la distancia $d = vt$ se presentaron en el **capítulo 6**. En muchos casos, estos problemas se pueden resolver con sistemas de dos ecuaciones lineales.

EJEMPLO 4 Solución de un problema de movimiento

Dos ejecutivos en ciudades que se encuentran a 400 millas una de otra salen al mismo tiempo para asistir a una junta de negocios en una ubicación sobre la recta que une sus ciudades. Ellos se encuentran después de 4 horas. Calcule la velocidad de cada automóvil si uno viaja 20 millas por hora más rápido que el otro.

SOLUCIÓN

Paso 1 **Lea** el problema cuidadosamente.

Paso 2 **Asigne variables.**

Sean x = la velocidad del automóvil más rápido,

y y = la velocidad del automóvil más lento.

Se usa la fórmula $d = vt$. Cada automóvil viaja 4 horas, de modo que el tiempo, t, para cada auto es igual a 4, como se muestra en la tabla.

	v	t	d	
Auto más rápido	x	4	$4x$	Se obtiene d a partir de $d = vt$
Auto más lento	y	4	$4y$	

Dibuje lo que está pasando en el problema. Véase la **figura 53**.



Figura 53

François Viète, un matemático francés del siglo XVI, hizo una gran contribución al simbolismo de las matemáticas. Antes de él se usaban con frecuencia diferentes símbolos para distintas potencias de una cantidad. Viète usó la misma letra con una descripción de la potencia y el coeficiente. De acuerdo con Howard Eves, en su obra *An Introduction to the History of Mathematics*, Viète habría escrito

$$5BA^2 - 2CA + A^3 = D$$

como

B 5 en *A* cuad − *C* plano 2 en *A* + *A* cub aequatur *D* sólido.

Paso 3 **Escriba dos ecuaciones.** Como se observa en la figura, la distancia total recorrida por ambos automóviles es igual a 400 millas.

$$4x + 4y = 400 \quad (1)$$

El auto más veloz va 20 millas por hora más rápido que el auto más lento.

$$x = 20 + y \quad (2)$$

Paso 4 **Resuelva** este sistema de ecuaciones, por sustitución.

$$4x + 4y = 400 \quad (1)$$
$$x = 20 + y \quad (2)$$

Se sustituye $20 + y$ en lugar de x en la ecuación (1) y se despeja y.

$$\begin{aligned} 4(20 + y) + 4y &= 400 && \text{Sea } x = 20 + y. \\ 80 + 4y + 4y &= 400 && \text{Propiedad distributiva} \\ 80 + 8y &= 400 && \text{Se reducen los términos semejantes.} \\ 8y &= 320 && \text{Se resta 80.} \\ y &= 40 && \text{Se divide entre 8.} \end{aligned}$$

Como $x = 20 + y$, y $y = 40$,

$$x = 20 + 40 = 60.$$

Paso 5 **Enuncie la respuesta.** Las velocidades de los dos automóviles son de 40 millas por hora y de 60 millas por hora.

Paso 6 **Verifique** la respuesta. Como cada vehículo viaja durante 4 horas, la distancia total recorrida es

$$4(60) + 4(40) = 240 + 160 = 400 \text{ millas,} \quad \text{como se describió.}$$

Una aplicación con tres variables

EJEMPLO 5 Solución de un problema relacionado con precios



En la panadería Panera Bread, una barra de pan de trigo con miel cuesta $2.95, una barra de pan de girasol cuesta $2.99, y una barra de pan francés cuesta $5.79. Recientemente, se vendieron tres veces más barras de pan de trigo con miel que barras de pan de girasol. El número de barras de pan francés vendidas fue 5 menos que el número de barras de pan de trigo con miel vendidas. Los ingresos totales por estas barras de pan fueron $87.89. ¿Cuántas barras de pan de cada tipo se vendieron? (*Fuente:* Menú de Panera Bread).

Paso 1 **Lea** el problema nuevamente. Existen tres incógnitas en este problema.

Paso 2 **Asigne variables** para representar las tres incógnitas.

Sean x = el número de barras de pan de trigo con miel,

y = el número de barras de pan de girasol,

y z = el número de barras de pan francés.

Paso 3 **Escriba un sistema de tres ecuaciones.** Se vendieron tres veces más barras de pan de trigo con miel que pan de girasol, de modo que

$$x = 3y, \quad \text{o} \quad x - 3y = 0. \quad \text{Se resta } 3y. \quad (1)$$

Se necesitan dos ecuaciones más, puesto que existen tres incógnitas.

Número de barras de pan francés	igual	5 menos que el número de barras de pan de trigo con miel	
z	$=$	$x - 5,$	
	$-x + z = -5$	Se resta x.	
	$x - z = 5$	Se multiplica por -1.	(2)

Los ingresos totales se calculan multiplicando el costo de una barra de pan de cada clase por el número de barras vendidas de esa clase y luego sumándolas.

$$2.95x + 2.99y + 5.79z = 87.89$$

Se multiplica cada lado de esta ecuación por 100 para eliminar los decimales.

$$295x + 299y + 579z = 8789 \quad (3)$$

Paso 4 **Resuelva** el sistema de tres ecuaciones,

$$\begin{aligned} x - 3y &= 0 \quad (1) \\ x - z &= 5 \quad (2) \\ 295x + 299y + 579z &= 8789. \quad (3) \end{aligned}$$

Se usa el método de la **sección 7.7** para determinar que $x = 12, y = 4, y\ z = 7$.

Paso 5 **Enuncie la respuesta.** El conjunto solución es $\{(12, 4, 7)\}$, de modo que se vendieron 12 barras de pan de trigo con miel, 4 barras de pan de girasol y 7 barras de pan francés.

Paso 6 **Verifique.** Como $12 = 3 \cdot 4$, el número de barras de pan de trigo con miel es tres veces el número de barras de pan de girasol. Además, $12 - 7 = 5$, de modo que el número de barras de pan francés es 5 menos que el número de barras de pan de trigo con miel. Multiplique cada costo por el número de barras de pan vendidas y sume los resultados para comprobar que los ingresos totales fueron de \$87.89.

■■■

Solución al problema de cidras y manzanas Considere que c representa el precio de una sola cidra, y que w representa el precio de una manzana con olor a madera. El sistema de ecuaciones que se debe resolver es

$$9c + 7w = 107$$
$$7c + 9w = 101.$$

Encontramos que los precios son de 8 para la cidra y 5 para la manzana.

7.8 EJERCICIOS

Resuelva los siguientes problemas usando un sistema de ecuaciones.

1. ***Registro de juegos ganados y perdidos*** Durante la temporada 2009 de las Ligas Mayores de Béisbol, los Dodgers de Los Ángeles participaron en 162 juegos. Ganaron 28 juegos más de los que perdieron. ¿Cuál fue su registro de partidos ganados y perdidos ese año?

Posiciones finales de la división Oeste de la Liga Nacional de la MLB en 2009

Equipo	G	P
L.A. Dodgers	—	—
Colorado	92	70
San Francisco	88	74
San Diego	75	87
Arizona	—	—

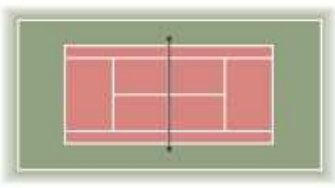
Fuente: The World Almanac and Book of Facts.

2. ***Registro de juegos ganados y perdidos*** Remítase al **ejercicio 1**. Durante la misma temporada de 162 juegos, los Diamondbacks de Arizona perdieron 22 juegos más de los que ganaron. ¿Cuál fue el registro de juegos ganados y perdidos del equipo?

3. ***Dimensiones de una cancha de basquetbol*** LeBron y Yao calcularon que el ancho de su cancha de basquetbol era 44 pies menor que el largo. Si el perímetro medía 288 pies, ¿cuál era el largo y el ancho de la cancha?



4. ***Dimensiones de una cancha de tenis*** Venus y Serena midieron una cancha de tenis y encontraron que tenía 42 pies más de largo que de ancho, y que su perímetro medía 228 pies. ¿Cuál era el largo y el ancho de la cancha de tenis?



5. ***Renta de automóviles*** Para hacer un viaje de 6 días Michael Schmitz rentó un automóvil en $53 por día de lunes a viernes y $35 por día en fin de semana. Si su pago total fue de $264, ¿cuántos días rentó a cada tarifa? (*Fuente:* Enterprise).

6. ***Costo de suministros de arte*** En un proyecto de arte, Nicole McHam compró 8 hojas de papel de color y tres marcadores en $6.50. Luego compró 2 hojas de papel de color y 2 marcadores. Estos artículos costaron $3.00. Calcule el costo de un marcador y de una hoja de papel de color.

7. ***Dimensiones de un cuadrado y un triángulo*** El lado de un cuadrado mide 4 centímetros más que el lado de un triángulo equilátero. El perímetro del cuadrado mide 24 centímetros más que el perímetro del triángulo. Calcule las longitudes del lado del cuadrado y del lado del triángulo.

8. ***Dimensiones de un rectángulo*** El largo de un rectángulo es 7 pies mayor que el ancho. Si el largo se redujera en 3 pies y el ancho se incrementara en 2 pies, el perímetro sería de 32 pies. Calcule el largo y el ancho del rectángulo original.

9. ***Precios de café*** En una junta de negocios en Panera Bread, la cuenta por dos capuchinos y tres cafés con leche fue de $10.95. En otra mesa, la cuenta por un capuchino y dos cafés con leche fue de $6.65. ¿Cuánto costó cada tipo de café? (*Fuente:* Menú de Panera Bread).

10. ***Conciertos con mayor recaudación*** La gira con mayor recaudación en un concierto en Norteamérica durante 2009 fue la de U2, seguida en segundo lugar por la de Bruce Springsteen y E Street Band. Juntas, las giras recaudaron $217.5 millones en boletos vendidos. Si Springsteen vendió $28.5 millones menos que U2, ¿cuánto dinero generó cada banda? (*Fuente:* Pollstar).

11. ***Costos de viaje*** Nueva York y Washington, D.C., fueron las ciudades más costosas para los viajes de negocios en 2009. Sobre una base del costo total promedio diario en cada ciudad (el cual incluye hospedaje, renta de automóvil y tres comidas), 2 días en Nueva York y tres días en Washington costaron $2772, mientras que 4 días en Nueva York y dos días en Washington costaron $3488. ¿Cuál fue el costo promedio diario en cada ciudad? (*Fuente: Business Travel News*).

12. ***Precios en Arby's*** Andrew McGinnis trabaja en Arby's. Un día vendió 15 emparedados Junior Roast Beef y 10 Big Montana, cuyo costo total ascendió a $75.25. Otro día vendió 30 emparedados Junior Roast Beef y 5 Big Montana, cuya cuenta ascendió a $84.65. ¿Cuánto costó cada tipo de emparedado? (*Fuente:* Menú de Arby's).

13. ***Precios de boletos*** En 2009 los Yanquis de Nueva York y los Medias Rojas de Boston registraban los precios más caros de boletos de las Ligas Mayores de Béisbol. El precio promedio de dos boletos de los Yanquis y 3 boletos de los Medias Rojas fue de $296.66, mientras que tres boletos de los Yanquis y dos de los Medias Rojas costaban $319.39. Calcule el precio promedio de un boleto de los Yanquis y un boleto de los Medias Rojas. (*Fuente:* Reporte de Team Marketing).

14. ***Costo del barro*** Para su clase de arte, Bryce compró 2 kilogramos de barro negro y tres kilogramos de barro claro, por lo que pagó $22 en total. Posteriormente necesitó 1 kilogramo de barro negro y dos kilogramos de barro claro, lo que tuvo un costo total de $13. ¿Cuál fue el costo por kilogramo de cada tipo de barro?

Índice de costos del aficionado *El Índice de costos del aficionado (ICF) representa el costo promedio de cuatro boletos, cuatro bebidas suaves, dos cervezas pequeñas, cuatro emparedados de salchicha, costo de estacionamiento para un automóvil, dos programas de juego y dos gorras de recuerdo en un evento deportivo. Por ejemplo, en 2008, el ICF en las Ligas Mayores de Béisbol fue de $191.75. Este fue el costo mínimo en los cuatro deportes profesionales principales. (Fuente:* www.teammarketing.com*). Use el concepto de ICF en los ejercicios 15 y 16.*

15. En la temporada 2008-2009, los precios del ICF en la Liga Nacional de Hockey y en la Asociación Nacional de Basquetbol totalizaron $580.16. El ICF del hockey fue $3.70 menor que el del basquetbol. ¿Cuáles fueron los ICF de cada deporte?

16. En 2009 los precios del ICF de las Ligas Mayores de Béisbol y de la Liga Nacional de Futbol totalizaron $609.53. El ICF del futbol fue mayor que el del béisbol por $215.75. ¿Cuáles fueron los ICF de cada deporte?

Fórmulas *Las fórmulas $p = br$ (porcentaje = base × tasa) e $I = prt$ (interés simple = capital × tasa × tiempo) se usan en las aplicaciones de los ejercicios 21 a 30. Como preparación para el uso de estas fórmulas, resuelva los ejercicios 17 a 20.*

17. Si un envase para líquidos contiene 120 onzas de una solución, ¿cuál es el número de onzas de ácido puro si la solución contiene las siguientes concentraciones de ácido?
    a) 10% *b)* 25%
    c) 40% *d)* 50%

18. Si se invierten $50,000 en una cuenta que paga interés anual simple, ¿cuánto se ganará de interés durante el primer año a las siguientes tasas?
    a) 0.5% *b)* 1%
    c) 1.25% *d)* 2.5%

19. Si una libra de jamón cuesta $2.29, obtenga una expresión para el costo de x libras.

20. Si un boleto para ver la película *Avatar* cuesta $9 y se venden y boletos, obtenga una expresión para la cantidad recaudada.

21. ***Mezcla de ácido*** ¿Cuántos litros de ácido al 15% y ácido al 33% deben mezclarse para obtener 40 litros de ácido al 21%?

Tipo de solución	Galones de solución	Cantidad de ácido puro
0.15	x	
0.33	y	
0.21	40	

22. ***Mezcla de alcohol*** ¿Cuántos galones de alcohol al 25% y de alcohol al 35% se deben mezclar para obtener 20 galones de alcohol al 32%?

Tipo de solución	Galones de solución	Cantidad de alcohol puro
0.25	x	$0.25x$
0.35	y	$0.35y$
0.32	20	0.32(20)

23. ***Mezcla de anticongelante*** El radiador de un camión contiene 18 litros de fluido. ¿Qué cantidad de anticongelante puro se debe agregar a una mezcla de anticongelante al 4% para llenar el radiador con una mezcla de anticongelante al 20%?

24. ***Mezcla de ácido*** Se agrega una solución de ácido al 10% para obtener 27 litros de una solución de ácido al 20%. ¿Qué cantidades de cada una se deben usar?

25. ***Mezcla de bebidas de frutas*** Una conocida bebida de frutas está elaborada a partir de una mezcla de jugos de frutas. Esta mezcla con el 50% de jugo se va a mezclar con otra que contiene el 30% de jugo para obtener 200 litros de una mezcla con 45% de jugo. ¿Cuánto se debe usar de cada mezcla?

Tipo de jugo	Número de litros	Cantidad de jugo puro
0.50	x	$0.50x$
0.30	y	
0.45		

26. ***Mezcla de dulces*** Eric Ryan planea mezclar dulces de enjambre de nueces, que se venden a \$3.60 la libra, con trufas de chocolate que se venden a \$7.20 la libra, para obtener una mezcla que puede vender en cajas de San Valentín a \$4.95 la libra. ¿Qué cantidad de enjambres de nuez de \$3.60 y de trufas de \$7.20 se deben usar para obtener 80 libras de la mezcla?

	Número de libras	Precio por libra	Valor de los dulces
Enjambres	x	3.60	$3.60x$
Trufas	y	7.20	$7.20y$
Mezcla	80	4.95	4.95(80)

27. ***Mezcla de dulces*** Un tendero planea mezclar dulces, que vende en \$1.20 la libra, con dulces que vende a \$2.40 la libra, para obtener una mezcla que planea vender en \$1.65 la libra. ¿Qué cantidad de dulces de \$1.20 y \$2.40 debe usar si desea 160 libras de mezcla?

28. ***Venta de boletos*** Los boletos para una función de teatro de *West Side Story* en Northeastern State University cuestan \$10.00 para el público en general y \$8.00 para estudiantes con credencial. Si 184 personas pagan por ver una función y se recaudan \$1624, ¿cuántas entradas de cada tipo se vendieron?

29. ***Mezcla de inversión*** Un inversionista deposita un total de \$15,000 en dos cuentas: una paga el 4% de interés anual simple y la otra el 3%. Si desea ganar \$550 de interés anual, ¿cuánto debe invertir a cada tasa?

Capital	Tasa	Interés
x	0.04	
y	0.03	
15,000		

30. ***Mezcla de inversión*** Se invierte un total de \$3000: una parte al 2% de interés y otra parte al 4%. Si el rendimiento total anual de las dos inversiones es de \$100, ¿cuánto se debe invertir a cada tasa?

Capital	Tasa	Interés
x	0.02	$0.02x$
y	0.04	$0.04y$
3000		100

Fórmulas *La fórmula $d = vt$ (distancia = velocidad × tiempo) se usa en las aplicaciones de los ejercicios 33 a 36. Como preparación para el uso de esta fórmula, resuelva los ejercicios 31 y 32.*

31. Si la velocidad de un bote en aguas tranquilas es de 10 mph, y la velocidad de la corriente de un río es de x mph, ¿cuál es la velocidad del bote en las siguientes situaciones?

a) Cuando se dirige corriente arriba (es decir, contra la corriente, lo cual disminuye su velocidad);

b) Cuando se dirige corriente abajo (es decir, en dirección de la corriente, lo cual aumenta su velocidad).



32. La velocidad de una orca es de 25 mph y nada por y horas. Obtenga una expresión para el número de millas que viaja la orca.

33. ***Velocidades de trenes*** Un tren viaja 150 millas al mismo tiempo que un avión recorre 400 millas. Si la velocidad del avión es 20 millas por hora menos que el triple de la velocidad del tren, calcule las velocidades de uno y otro.

34. ***Velocidades de trenes*** Un tren de carga y un tren de pasajeros salen al mismo tiempo de poblaciones separadas entre sí 390 millas, y cada uno viaja en dirección hacia el otro. El tren de carga viaja 30 mph más lento que el tren de pasajeros. Tres horas más tarde, uno pasa al lado del otro. ¿Cuáles son sus velocidades?

35. ***Velocidades de un bote y de la corriente*** En su bote de motor, Tran viaja corriente arriba a toda velocidad hacia su sitio favorito de pesca, a una distancia de 36 millas, en dos horas. Al regreso, se da cuenta de que el viaje corriente abajo, también a toda velocidad, le toma solo 1.5 horas. Calcule la velocidad del bote de Tran y la velocidad de la corriente.

36. ***Velocidades de una moto para nieve y el viento*** En las desafiantes condiciones de una tormenta de nieve en el planeta Hoth, Luke Skywalker parte a gran velocidad en su moto para nieve hacia una base rebelde que se encuentra a 3600 millas. Viaja en contra de un viento constante, y realiza el viaje en 2 horas. De regreso, se da cuenta de que el viaje, aún a gran velocidad pero no en contra del viento, le toma solo 1.5 horas. Calcule la velocidad de la moto de nieve de Luke y la velocidad del viento.

Resuelva los siguientes problemas que incluyen tres incógnitas.

37. ***Medallas de oro olímpicas*** En los Juegos Olímpicos de 2008 en Beijing, Rusia ganó 5 medallas de oro menos que de bronce. El número de medallas de plata ganadas fue 35 menos que el doble de las medallas de bronce. Rusia ganó un total de 72 medallas. ¿Cuántas medallas de cada metal ganó Rusia? (*Fuente: The World Almanac and Book of Facts*).



38. ***Filiación política de votantes*** En una muestra aleatoria de estadounidenses en edad de votar realizada en 2010, quienes se declararon independientes rebasaron en 8% a los republicanos, mientras que los que se declararon republicanos se quedaron un 6% atrás de los demócratas. De ese muestreo, el 2% no se identificó con ninguna de las tres categorías. ¿Qué porcentaje de personas de la muestra se identificaron con cada una de las tres filiaciones políticas? (*Fuente:* Gallup, Inc.).



39. ***Dimensiones de un triángulo*** El perímetro de un triángulo es igual a 56 pulgadas. El lado más largo mide 4 pulgadas menos que la suma de los otros dos lados. El triple del lado más corto es 4 pulgadas más largo que el lado más largo. Calcule las longitudes de los tres lados.

40. ***Dimensiones de un triángulo*** El perímetro de un triángulo es igual a 70 centímetros. El lado más largo mide 4 centímetros menos que la suma de los otros dos lados. El doble del lado más corto es 9 centímetros menos que el lado más largo. Calcule la longitud de cada lado del triángulo.

41. ***Producción de ferretería*** Un proveedor de ferreterías fabrica tres clases de abrazaderas, los tipos A, B y C. Limitaciones de producción requieren que se fabriquen 10 unidades más de abrazaderas del tipo C que el total de los otros tipos de abrazaderas, y el doble de abrazaderas del tipo B que el total del tipo A. La fábrica debe producir un total de 490 unidades de abrazaderas por día. ¿Cuántas unidades de cada tipo se pueden fabricar por día?

42. ***Producción de televisores*** Una compañía produce tres modelos de televisores a color, X, Y y Z. Cada modelo X requiere 2 horas de trabajo de electrónica, 2 horas de trabajo de ensamblaje y 1 hora de trabajo de terminado. Cada modelo Y requiere 1, 3 y 1 horas de electrónica, ensamblado y terminado, respectivamente. Cada modelo Z requiere 3, 2 y 2 horas del mismo trabajo, respectivamente. Hay 100 horas disponibles de electrónica, 100 horas disponibles de ensamblaje y 65 horas disponibles de terminado por semana. ¿Cuántos televisores se producen cada semana si se usa todo el tiempo disponible?

43. ***Precio de boletos para ver a los Harlem Globetrotters*** En 2010 los boletos del espectáculo de los Harlem Globetrotters en la Universidad Estatal de Michigan costaban \$16, \$23 y \$40 (esta última tarifa correspondía a los lugares VIP). Se vendieron nueve veces más boletos de \$16 que boletos VIP, y el número de los boletos de \$16 vendidos rebasó en 55 boletos a la suma de los boletos de \$23 y VIP; las ventas totales de los tres tipos de boletos ascendieron a \$46,575. ¿Cuántos boletos de cada clase se vendieron? (*Fuente:* Breslin Student Events Center).



44. ***Precios de los boletos de un concierto*** Hay tres clases de boletos disponibles para un concierto de Four Unplugged: luneta, primer piso y segundo piso (galería). Los boletos de luneta cuestan \$10 más que los boletos del primer piso, mientras que los boletos de primer piso cuestan \$10 más que los boletos del segundo piso. El doble del costo de un boleto de luneta rebasa por \$20 al triple del costo de un asiento de segundo piso. Calcule el precio de cada clase de boleto.

Sistema de puntuación de la NHL *Al principio de la temporada 2005-2006, la Liga Nacional de Hockey adoptó un nuevo sistema de puntuación para determinar las posiciones de los equipos. Un equipo obtiene 2 puntos por una victoria* (V), *0 puntos por una derrota en tiempo reglamentario* (D), *y un punto por una derrota en tiempo de compensación* (DTC). *Use esta información en los ejercicios 45 y 46.*

45. Durante la temporada regular 2008-2009 de la NHL, los Osos de Boston jugaron 82 partidos (PJ). Sus triunfos y derrotas en tiempo de compensación sumaron un total de 116 puntos. El equipo registró 9 derrotas más en tiempo normal que derrotas en tiempo de compensación. ¿Cuántas victorias, derrotas en tiempo normal y derrotas en tiempo de compensación registraron en el año?

Posiciones finales de la NHL 2008-2009
División Noreste, Conferencia del Este

Equipo	PJ	V	D	DTC	Puntos
Boston	82	—	—	—	116
Montreal	82	41	30	11	93
Búfalo	82	41	32	9	91
Ottawa	82	36	35	11	83
Toronto	82	34	35	13	81

Fuente: The World Almanac and Book of Facts.

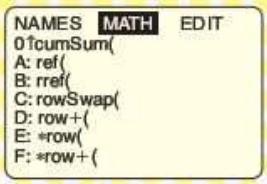
46. Durante la temporada regular 2008-2009 de la NHL, los Reyes de Los Ángeles jugaron 82 partidos (PJ). Sus triunfos y derrotas en tiempo de compensación sumaron un total de 79 puntos. Registraron 14 derrotas más (en tiempo normal y de compensación) que triunfos. ¿Cuántas victorias, derrotas en tiempo normal y derrotas en tiempo de compensación registraron en el año?

Posiciones finales de la NHL 2008-2009
División del Pacífico, Conferencia del Oeste

Equipo	PJ	V	D	DTC	Puntos
San José	82	53	18	11	117
Anaheim	82	42	33	7	91
Dallas	82	36	35	11	83
Phoenix	82	36	39	7	79
Los Ángeles	82	—	—	—	79

Fuente: The World Almanac and Book of Facts.

EXTENSIÓN Uso de las operaciones de renglón en las matrices para resolver sistemas de ecuaciones



Las opciones C, D, E y F proporcionan al usuario de la calculadora TI-83/84 Plus medios para efectuar operaciones de renglón con matrices.

Terminología de matrices • Operaciones de renglón con matrices • Método de Gauss-Jordan

Terminología de matrices

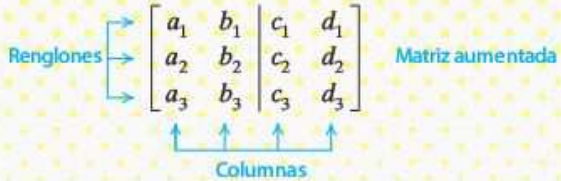
El método por eliminación, presentado en la sección 7.7, utilizado para resolver sistemas de ecuaciones puede convertirse en un método sistemático usando *matrices*. Las matrices resultan útiles para resolver sistemas de ecuaciones lineales, y los métodos matriciales son particularmente adecuados para soluciones por computadora de sistemas de muchas ecuaciones que incluyen muchas incógnitas.

Para empezar, considere un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas como

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

en forma simplificada se escribe como $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$.

Un arreglo rectangular de números como este, encerrado entre corchetes, se conoce como **matriz**. Cada número del arreglo es un **elemento** o una **entrada**. La matriz anterior tiene tres renglones y cuatro **columnas** de entradas, y se conoce como una matriz de 3×4 (se lee "3 por 4"). Las constantes de la última columna de la matriz se pueden separar de los coeficientes de las variables usando una recta vertical, como se muestra en la siguiente **matriz aumentada**.



Operaciones de renglón con matrices

Los renglones de esta matriz aumentada se pueden tratar de la misma manera que las ecuaciones de un sistema de ecuaciones, ya que la matriz aumentada es en realidad una forma abreviada del sistema. Se permite cualquier transformación de la matriz que dé por resultado un sistema equivalente. Las siguientes **operaciones de renglón con matrices** producen tales transformaciones.

Operaciones de renglón con matrices

Para cualquier número real k y cualquier matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, las siguientes operaciones producirán la matriz de un *sistema equivalente*, es decir, otro sistema con el mismo conjunto solución.

1. **Intercambiar dos renglones cualesquiera de la matriz.**
2. **Multiplicar los elementos de los renglones de una matriz por el mismo número k diferente de cero.**
3. **Sumar un múltiplo común de los elementos de un renglón a los elementos correspondientes de otro renglón.**

Método de Gauss-Jordan Si se sustituye la palabra "renglón" por "ecuación", se verá que las tres operaciones de renglón también se aplican a un sistema de ecuaciones, de modo que un sistema de ecuaciones se puede resolver transformando su matriz correspondiente en la matriz de un sistema equivalente, más sencillo. El objetivo es una matriz de la forma

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array}\right] \quad \text{o} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

para sistemas con dos o tres ecuaciones, respectivamente. A la izquierda de la barra vertical, hay unos en la diagonal desde arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha, y ceros en los demás lugares de la matriz. Cuando estas matrices se replantean como sistemas de ecuaciones, se obtienen los valores de las variables. El **método de Gauss-Jordan** es una manera sistemática de usar las operaciones de renglón con matrices para modificar la matriz aumentada de un sistema de forma que muestre su solución.

EJEMPLO 1 Solución de un sistema lineal usando el método de Gauss-Jordan (dos incógnitas)

Resuelva el siguiente sistema lineal.

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 1 \\ 5x + 2y &= 19 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Todas las ecuaciones deben estar en la misma forma, con los términos de las variables en el mismo orden a la izquierda de la ecuación, y el término constante a la derecha. Se inicia expresando la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 19 \end{array}\right]$$

El objetivo es convertir esta matriz aumentada en una en donde los valores de las variables se vean fácilmente. Es decir, como cada columna de la matriz representa los coeficientes de una variable, la matriz aumentada se debe transformar de modo que adopte la forma

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & j \end{array}\right]$$

para los números reales k y j. Una vez que la matriz aumentada toma esta forma, se puede escribir nuevamente como un sistema lineal para obtener

$$\begin{aligned} x &= k \\ y &= j. \end{aligned}$$

Se efectúan las transformaciones necesarias como se muestra a continuación. Es mejor trabajar con columnas, iniciando en cada columna con el elemento que se va a convertir en 1. En la matriz aumentada,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 19 \end{array}\right]$$

hay un 3 en la posición del primer renglón y la primera columna. Aplique la operación 2 de renglón, multiplicando cada entrada del primer renglón por $\frac{1}{3}$ para obtener un 1 en esta posición. (Este paso se abrevia como $\frac{1}{3}$R1).

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 5 & 2 & 19 \end{array}\right] \quad \tfrac{1}{3}\text{R1}$$

Se obtiene un 0 en el segundo renglón y la primera columna, multiplicando cada elemento del primer renglón por −5 y sumando el resultado al elemento correspondiente del segundo renglón, usando la tercera operación de renglón.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{26}{3} & \frac{52}{3} \end{array}\right] \quad -5\text{R1} + \text{R2}$$

Se obtiene un 1 en el segundo renglón, segunda columna, al multiplicar cada elemento del segundo renglón por $\frac{3}{26}$, usando la operación 2 de renglones.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \tfrac{3}{26}\text{R2}$$

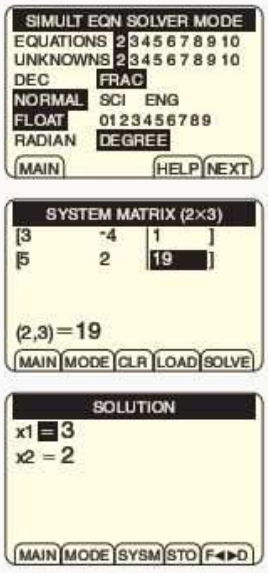
Finalmente, se obtiene 0 en el primer renglón y la segunda columna al multiplicar cada elemento del segundo renglón por $\frac{4}{3}$ y sumando el resultado al elemento correspondiente del primer renglón.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \tfrac{4}{3}\text{R2} + \text{R1}$$

Esta última matriz corresponde al sistema

$$x = 3$$
$$y = 2,$$

que tiene el conjunto solución $\{(3, 2)\}$. Esta solución se pudo haber leído directamente en la tercera columna de la matriz final. ▮▮▮



La calculadora TI-84 Plus incluye una aplicación que resuelve ecuaciones simultáneas. Compare esto con el **ejemplo 1**.

Un sistema lineal con tres ecuaciones se resuelve de manera similar. Las operaciones de renglón se usan para obtener unos debajo de la diagonal de izquierda a derecha, y ceros arriba y abajo de cada "uno".

EJEMPLO 2 Solución de un sistema usando el método de Gauss-Jordan (tres incógnitas)

Use el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema.

$$\begin{aligned} x - y + 5z &= -6 \\ 3x + 3y - z &= 10 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Como el sistema tiene la forma adecuada, se inicia escribiendo la matriz aumentada del sistema lineal.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

La matriz final debe ser de la forma

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right],$$

donde m, n y p son números reales. Esta forma final de la matriz nos da el sistema $x = m$, $y = n$, y $z = p$, de modo que el conjunto solución es $\{(m, n, p)\}$.

Ya existe un 1 en el primer renglón y la primera columna. Se obtiene un 0 en el segundo renglón y la primera columna multiplicando cada elemento del primer renglón por -3 y sumando el resultado al elemento correspondiente del segundo renglón, de acuerdo con la operación 3 de renglón.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 6 & -16 & 28 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right] \quad -3R1 + R2$$

Ahora, para transformar el último elemento de la primera columna a 0, se usa la operación 3 de renglón. Se multiplica cada elemento del primer renglón por -1, luego se suman los resultados a los elementos correspondientes del tercer renglón.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 6 & -16 & 28 \\ 0 & 4 & -3 & 11 \end{array}\right] \quad -1R1 + R3$$

Se aplica el mismo procedimiento para transformar la segunda y tercera columnas. Para estas dos columnas, primero se ejecuta el paso para obtener 1 en la posición adecuada de cada columna. Esto se hace multiplicando los elementos del renglón por el recíproco del número en esa posición.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 4 & -3 & 11 \end{array}\right] \quad \frac{1}{6}R2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 4 & -3 & 11 \end{array}\right] \quad R2 + R1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{23}{3} & -\frac{23}{3} \end{array}\right] \quad -4R2 + R3$$

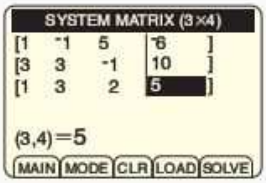
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \frac{3}{23}R3$$

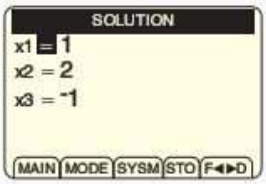
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad -\frac{7}{3}R3 + R1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \frac{8}{3}R3 + R2$$

El sistema lineal asociado con esta matriz final es

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= -1 \end{aligned}, \quad \text{y el conjunto solución es } \{(1, 2, -1)\}.$$





Compare con el **ejemplo 2**.

EJERCICIOS DE LA EXTENSIÓN

Use el método de Gauss-Jordan para resolver cada sistema de ecuaciones.

1. $x + y = 5$
$x - y = -1$

2. $x + 2y = 5$
$2x + y = -2$

3. $x + y = -3$
$2x - 5y = -6$

4. $3x - 2y = 4$
$3x + y = -2$

5. $2x - 3y = 10$
$2x + 2y = 5$

6. $4x + y = 5$
$2x + y = 3$

7. $3x - 7y = 31$
$2x - 4y = 18$

8. $5x - y = 14$
$x + 8y = 11$

9. $x + y - z = 6$
$2x - y + z = -9$
$x - 2y + 3z = 1$

10. $x + 3y - 6z = 7$
$2x - y + 2z = 0$
$x + y + 2z = -1$

11. $2x - y + 3z = 0$
$x + 2y - z = 5$
$2y + z = 1$

12. $4x + 2y - 3z = 6$
$x - 4y + z = -4$
$-x + 2z = 2$

13. $-x + y = -1$
$y - z = 6$
$x + z = -1$

14. $x + y = 1$
$2x - z = 0$
$y + 2z = -2$

15. $2x - y + 4z = -1$
$-3x + 5y - z = 5$
$2x + 3y + 2z = 3$

16. $5x - 3y + 2z = -5$
$2x + 2y - z = 4$
$4x - y + z = -1$

17. $x + y - 2z = 1$
$2x - y - 4z = -4$
$3x - 2y + z = -7$

18. $x + 3y - 6z = -26$
$3x + y - z = -10$
$2x - y - 3z = -16$

Resuelva los siguientes problemas escribiendo un sistema de ecuaciones y resolviéndolo con el método de Gauss-Jordan.

19. ***Ingresos empresariales*** En 2009 las dos compañías de telecomunicaciones estadounidenses con mayores ingresos fueron AT&T y Verizon. Entre las dos compañías obtuvieron ingresos por $221.4 miles de millones. Los ingresos de AT&T rebasaron por $26.6 miles de millones a los ingresos de Verizon. ¿Cuál fue el ingreso de cada compañía? (*Fuente:* Revista *Fortune*).

20. ***Suministro de perfumes*** Una tienda departamental exhibió tres clases de perfumes: Felice, Vivid y Joy. Hay 10 botellas más de Felice que de Vivid, y tres botellas menos de Joy que de Vivid. Cada botella de Felice cuesta $8, la de Vivid cuesta $15, y la de Joy cuesta $32. El valor total de todos los perfumes es de $589. ¿Cuántas botellas hay de cada perfume?

7.9 DESIGUALDADES LINEALES, SISTEMAS DE DESIGUALDADES Y PROGRAMACIÓN LINEAL

Desigualdades lineales con dos variables • Sistemas de desigualdades • Programación lineal

Desigualdades lineales con dos variables

En el **capítulo 6** se graficaron sobre una recta numérica desigualdades lineales con una variable. Las desigualdades lineales con dos variables se grafican en un sistema de coordenadas rectangulares.

Desigualdades lineales con dos variables

Una desigualdad que se puede escribir como

$$Ax + By < C \quad \text{o} \quad Ax + By > C,$$

donde A, B y C son números reales, y ni A ni B no son iguales a 0, es una desigualdad **lineal con dos variables**. Los símbolos $\leq$ y $\geq$ pueden sustituir a $<$ y $>$ en esta definición.

Una recta divide al plano en tres regiones: la recta misma y las dos mitades del plano a cada lado de la recta. Recuerde que las gráficas de las desigualdades lineales con una variable son *intervalos* sobre la recta numérica que puede incluir un extremo. Las gráficas de las desigualdades lineales con dos variables son *regiones* en el plano de números reales y pueden incluir una *recta límite*. La **recta límite** de la desigualdad $Ax + By < C$ o $Ax + By > C$ es la gráfica de la *ecuación* $Ax + By = C$.

Para graficar una desigualdad lineal, se aplican los siguientes pasos.

Gráfica de una desigualdad lineal

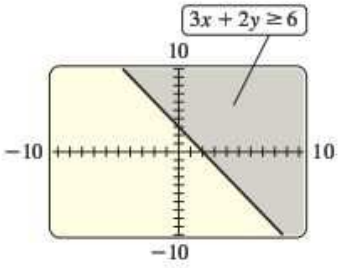
Paso 1 **Dibuje el límite.** Dibuje la gráfica de la recta que representa el límite. Trace una recta continua si la desigualdad implica $\leq$ o $\geq$. Trace una recta punteada si la desigualdad implica $<$ o $>$.

Paso 2 **Elija un punto de prueba.** Seleccione cualquier punto que no esté sobre la recta como punto de prueba.

Paso 3 **Sombree la región adecuada.** Sombree la región que incluye el punto de prueba si satisface la desigualdad original. Si no, se sombrea la región al otro lado de la recta que representa el límite.

EJEMPLO 1 Gráfica de una desigualdad lineal

Grafique $3x + 2y \geq 6$.



La calculadora TI-83/84 Plus nos permite sombrear la región adecuada de una desigualdad. Compare con la **figura 54**.

SOLUCIÓN

Primero se grafica la recta $3x + 2y = 6$. La gráfica de esta recta, que representa el límite de la gráfica de la desigualdad, se muestra en la **figura 54**. La gráfica de la desigualdad $3x + 2y \geq 6$ incluye los puntos de la recta $3x + 2y = 6$ y los puntos *arriba* de la recta $3x + 2y = 6$ o los puntos *debajo* de la recta. Para saber cuál es, se elige cualquier punto que no se encuentre sobre la recta $3x + 2y = 6$ como punto de prueba. El origen $(0, 0)$ es, con frecuencia, una buena elección. Se sustituyen los valores del punto de prueba $(0, 0)$ en lugar de x y y en la desigualdad lineal $3x + 2y \geq 6$.

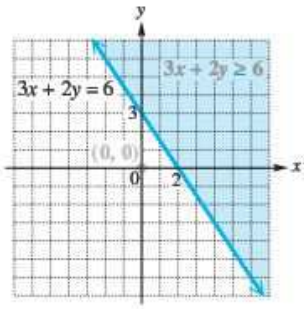


Figura 54

$$3(0) + 2(0) \stackrel{?}{\geq} 6$$
$$0 \geq 6 \quad \text{Falso}$$

Como el resultado es falso, $(0, 0)$ no satisface la desigualdad y, por lo tanto, el conjunto solución incluye todos los puntos al otro lado de la recta. Esta región es la sombreada en la **figura 54**. ■■■

EJEMPLO 2 Gráfica de una desigualdad lineal

Grafique $x - 3y > 4$.

SOLUCIÓN

Primero se grafica la recta que representa el límite, $x - 3y = 4$. La gráfica se muestra en la **figura 55**. Los puntos de la recta límite no pertenecen a la desigualdad $x - 3y > 4$ (puesto que el símbolo de desigualdad es $>$ y no $\geq$). Por esta razón, la recta es punteada. Para identificar qué lado de la recta corresponde a la gráfica del conjunto solución, se elige un punto que no se encuentre sobre la recta, por ejemplo, $(1, 2)$. En la desigualdad original se sustituye x por 1 y y por 2.

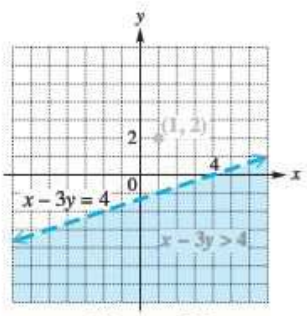


Figura 55

$$1 - 3(2) \stackrel{?}{>} 4$$
$$-5 > 4 \quad \text{Falso}$$

Debido al resultado falso, el conjunto solución se encuentra en el lado de la recta límite que *no* contiene el punto de prueba $(1, 2)$. El conjunto solución, graficado en la **figura 55**, solo incluye esos puntos en la región sombreada (no los de la recta). ■■■

Sistemas de desigualdades

Los sistemas de desigualdades con dos variables se pueden resolver gráficamente. Un sistema de desigualdades lineales consiste en dos o más desigualdades, y el conjunto solución de este sistema se integra con todos los puntos que hacen verdaderas a todas las desigualdades al mismo tiempo.

Gráfica de un sistema de desigualdades lineales

Paso 1 **Grafique cada desigualdad en el mismo sistema de coordenadas.** Grafique cada desigualdad del sistema, usando el método descrito en los **ejemplos 1 y 2**.

Paso 2 **Encuentre la intersección de las regiones de las soluciones.** Señale la intersección de las regiones de soluciones de las desigualdades individuales. Este es el conjunto solución del sistema.

EJEMPLO 3 Gráfica de un sistema de desigualdades

Grafique el conjunto solución del sistema lineal.

$$3x + 2y \le 6$$
$$2x - 5y \ge 10$$

SOLUCIÓN

Se inicia graficando $3x + 2y \le 6$. Para ello, se grafica $3x + 2y = 6$ como una recta continua. Como el punto $(0, 0)$ hace a la desigualdad *verdadera*, se sombrea la región que contiene a $(0, 0)$, como se muestra en la **figura 56**.

Ahora se grafica $2x - 5y \ge 10$. La recta límite continua es la gráfica de $2x - 5y = 10$. Como $(0, 0)$ hace a la desigualdad *falsa*, se sombrea la región que no contiene a $(0, 0)$, como se muestra en la **figura 57**.

El conjunto solución del sistema está dado por la intersección (el traslape) de las regiones de las gráficas de las **figuras 56 y 57**. El conjunto solución es la región sombreada de la **figura 58**, e incluye partes de las dos rectas límite.

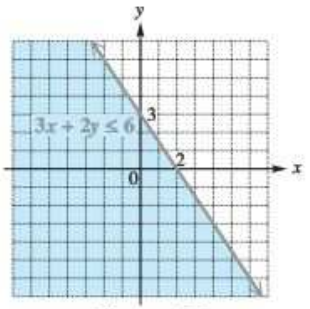


Figura 56

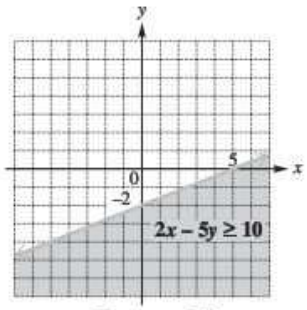


Figura 57

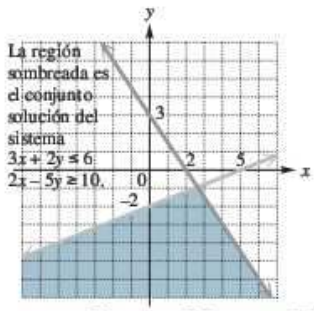


Figura 58

En la práctica, generalmente se realiza todo el trabajo en un solo sistema de coordenadas.

EJEMPLO 4 Gráfica de un sistema de desigualdades

Grafique el conjunto solución del sistema lineal.

$$2x + 3y \ge 12$$
$$7x + 4y \ge 28$$
$$y \le 6$$
$$x \le 5$$

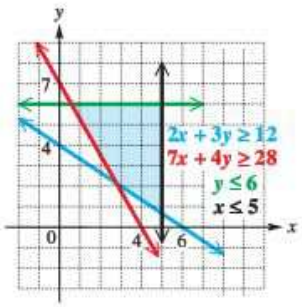


Figura 59

SOLUCIÓN

Se grafican las cuatro desigualdades en un sistema de coordenadas y se sombrea la región común a todas, como se ilustra en la **figura 59**. Como se observa, todas las rectas límite son continuas. ■■■

Programación lineal

Una aplicación importante de las matemáticas en los negocios y en las ciencias sociales es la **programación lineal**. La programación lineal se usa para calcular un valor óptimo; por ejemplo, el costo mínimo o la utilidad máxima. Los procedimientos para resolver problemas de programación lineal fueron desarrollados en 1947 por George Dantzig, mientras trabajaba en un problema de asignación de suministros de la Fuerza Aérea de Estados Unidos, con la finalidad de que los costos fueran mínimos.

En general, para resolver un problema de programación lineal se aplican los siguientes pasos. (Los términos *restricción, función objetivo, región de soluciones factibles* y *vértice* se definen en el **ejemplo 5**).

Solución de un problema de programación lineal

Paso 1 Escriba todas las restricciones necesarias y la función objetivo.

Paso 2 Grafique la región de soluciones factibles.

Paso 3 Identifique todos los vértices.

Paso 4 Determine el valor de la función objetivo de cada vértice.

Paso 5 La solución está dada por el vértice que produce el valor óptimo de la función objetivo.

EJEMPLO 5 Utilidad máxima

La Smartski Company fabrica dos productos: grabadoras de DVD y reproductores MP3. Cada grabadora de DVD genera una utilidad de $3, mientras que cada reproductor MP3 ofrece una utilidad de $7. La compañía debe fabricar al menos 1 grabadora de DVD al día para satisfacer a uno de sus clientes, pero no más de 5 debido a problemas de producción. Por otro lado, los reproductores MP3 fabricados no pueden exceder el número de 6 unidades al día. Como requerimiento adicional, el número de grabadoras de DVD no debe exceder el de reproductores MP3. ¿Cuántas unidades de cada producto debe fabricar la compañía para obtener la utilidad máxima?

SOLUCIÓN

Paso 1 Convertimos los enunciados del problema en símbolos:

x = número de grabadoras de DVD fabricadas diariamente

y = número de reproductores MP3 fabricados diariamente.

De acuerdo con el enunciado del problema, la compañía debe fabricar al menos una grabadora de DVD (una o más), de modo que

$$x \geq 1.$$

No se deben fabricar más de 5 DVD.

$$x \leq 5$$

No se deben fabricar más de 6 MP3 en un día.

$$y \leq 6$$

El número de grabadoras de DVD no puede exceder el número de reproductores MP3.

$$x \leq y$$

El número de grabadoras de DVD y el de reproductores MP3 no pueden ser negativos.

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0$$

George B. Dantzig (1914-2005) de la Universidad de Stanford fue una de las personas clave detrás de la **investigación de operaciones** (IDO). Como ciencia de la administración, la investigación de operaciones no es una disciplina aislada. Está relacionada con las matemáticas, la teoría de probabilidades, la estadística y la economía. El nombre dado a esta "multidisciplina" recuerda sus orígenes históricos en la Segunda Guerra Mundial, cuando las operaciones de carácter militar requerían los esfuerzos de muchos científicos para investigar las aplicaciones bélicas de sus respectivos campos y para resolver problemas tácticos.

Se resumen todas las limitaciones, o **restricciones**, de producción.

$$x \geq 1, \quad x \leq 5, \quad y \leq 6, \quad x \leq y, \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Como cada grabadora de DVD genera una ganancia de \$3, la utilidad diaria de la producción de x grabadoras de DVD es de $3x$ dólares. Por otro lado, la utilidad de la producción de y reproductores MP3 es de $7y$ dólares al día. Por lo tanto, la utilidad total diaria está dada por la siguiente **función objetivo**.

$$\text{Utilidad} = 3x + 7y$$

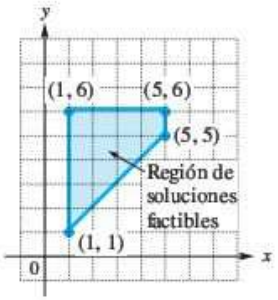


Figura 60

Paso 2 La utilidad máxima posible que la compañía puede obtener, sujeta a estas restricciones, se calcula trazando la gráfica del conjunto solución del sistema. Véase la **figura 60**. Los únicos valores factibles de x y y son aquellos que satisfacen todas las restricciones. Estos valores corresponden a los puntos que se encuentran en el límite o en la región sombreada, conocida como **región de soluciones factibles**.

Paso 3 El problema se puede enunciar ahora como sigue: Encuentre los valores de x y y en la región de soluciones factibles, como se muestra en la **figura 60**, que producirán el valor máximo posible de $3x + 7y$. Es posible demostrar que cualquier valor óptimo (máximo o mínimo) siempre se presentará en un **vértice** (o **un punto esquina**) de la región de soluciones factibles.

Paso 4 Localice el punto (x, y) que genera la utilidad máxima verificando las coordenadas de los vértices, como se muestra en la **figura 60** y en la **tabla 6**. Determine la utilidad que corresponde a cada par de coordenadas.

Tabla 6

Punto	Utilidad = $3x + 7y$
(1, 1)	$3(1) + 7(1) = 10$
(1, 6)	$3(1) + 7(6) = 45$
(5, 6)	$3(5) + 7(6) = 57$
(5, 5)	$3(5) + 7(5) = 50$

Los puntos son los de la figura 60.

57 es la utilidad máxima.

Paso 5 Se elige el vértice que corresponde a la utilidad máxima. La utilidad máxima de \$57 se obtiene cuando se producen diariamente 5 grabadoras de DVD y 6 reproductores MP3. ▮▮▮

Hacer la tarea conviene George Dantzig narra cómo se graduó sin escribir una tesis.

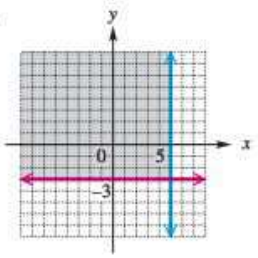
Un día llegó tarde a una de sus clases y en el pizarrón había dos problemas. Suponiendo que eran problemas de tarea, trabajó en ellos y los entregó pocos días después, disculpándose con su profesor por tomar tanto tiempo para resolverlos.

Varias semanas después, temprano en la mañana, recibió la visita de su profesor. Los problemas no habían sido asignados como tarea: ¡En realidad eran dos famosos problemas *sin resolver* en estadística! Más adelante, cuando Dantzig comenzó a pensar en su tema de tesis, su profesor le dijo que las dos soluciones servirían como tesis.

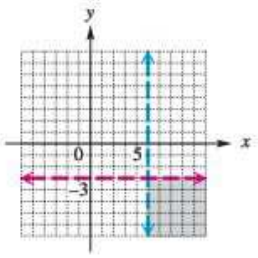
7.9 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 4, asocie cada sistema de desigualdades con la gráfica correspondiente de las opciones A a D.

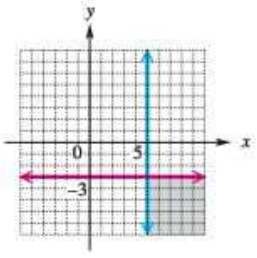
A.



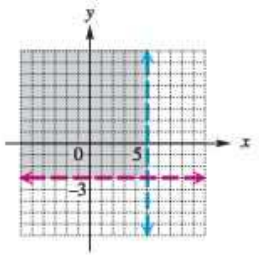
B.



C.



D.



1. $x \geq 5$
$y \leq -3$

2. $x \leq 5$
$y \geq -3$

3. $x > 5$
$y < -3$

4. $x < 5$
$y > -3$

Grafique las siguientes desigualdades lineales.

5. $x + y \le 2$

6. $x - y \ge -3$

7. $4x - y \le 5$

8. $3x + y \ge 6$

9. $x + 3y \ge -2$

10. $4x + 6y \le -3$

11. $x + 2y \le -5$

12. $2x - 4y \le 3$

13. $4x - 3y < 12$

14. $5x + 3y > 15$

15. $y > -x$

16. $y < x$

Grafique los siguientes sistemas de desigualdades.

17.
$$x + y \le 1$$
$$x \ge 0$$

18.
$$3x - 4y \le 6$$
$$y \ge 1$$

19.
$$2x - y \ge 1$$
$$3x + 2y \ge 6$$

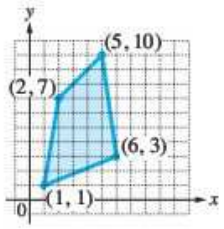
20.
$$x + 3y \ge 6$$
$$3x - 4y \le 12$$

21.
$$-x - y < 5$$
$$x - y \le 3$$

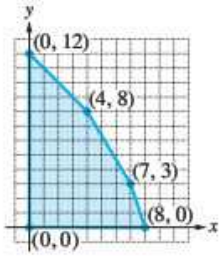
22.
$$6x - 4y < 8$$
$$x + 2y \ge 4$$

En los ejercicios 23 y 24 se muestran las regiones de soluciones factibles. Encuentre los valores máximo y mínimo de las expresiones indicadas.

23. $3x + 5y$



24. $40x + 75y$



Use métodos gráficos para obtener los valores de x y y que satisfagan las condiciones indicadas. (Tal vez sea necesario resolver un sistema de ecuaciones para encontrar los vértices). Obtenga el valor del máximo o mínimo, como se solicite.

25. Obtenga $x \ge 0$ y $y \ge 0$ tales que

$$2x + 3y \le 6$$
$$4x + y \le 6$$

y $5x + 2y$ se maximiza.

26. Obtenga $x \ge 0$ y $y \ge 0$ tales que

$$x + y \le 10$$
$$5x + 2y \ge 20$$
$$2y \ge x$$

y $x + 3y$ se minimiza.

27. Obtenga $x \ge 2$ y $y \ge 5$ tales que

$$3x - y \ge 12$$
$$x + y \le 15$$

y $2x + y$ se minimiza.

28. Obtenga $x \ge 10$ y $y \ge 20$ tales que

$$2x + 3y \le 100$$
$$5x + 4y \le 200$$

y $x + 3y$ se maximiza.

Resuelva los siguientes problemas de programación lineal.

29. ***Costos de embarque de refrigeradores*** Un fabricante de refrigeradores debe enviar al menos 100 refrigeradores a sus dos almacenes de la costa oeste. Cada almacén tiene un cupo máximo de 100 refrigeradores. El almacén A ya tiene 25 refrigeradores, mientras que el almacén B cuenta con 20 lugares disponibles. Cuesta \$12 embarcar un refrigerador al almacén A, y \$10 embarcar uno al almacén B. ¿Cuántos refrigeradores se deben enviar a cada almacén para minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?

30. ***Costos de complementos alimenticios*** Renee McKim requiere dos complementos alimenticios, I y II. Ella puede obtener estos complementos de dos productos diferentes, A y B. El producto A brinda 3 gramos por ración del complemento I y 2 gramos por ración del complemento II. El producto B ofrece 2 gramos por ración del complemento I y 4 gramos por ración del complemento II. Su dietista, el doctor Dawson, le recomendó que incluyera al menos 15 gramos de cada complemento en su dieta diaria. Si el producto A cuesta \$0.25 por ración y el producto B cuesta \$0.40 por ración, ¿cómo podrá Renee satisfacer sus requerimientos de la manera más económica?

31. ***Costos de píldoras de vitaminas*** Elizabeth Lamulle toma píldoras de vitaminas. Diariamente debe tomar al menos 16 unidades de vitamina A, al menos 5 unidades de vitamina B_1, y al menos 20 unidades de vitamina C. Ella puede elegir entre píldoras rojas que cuestan 10 centavos cada una y que contienen 8 unidades de vitamina A, 1 de vitamina B_1 y 2 de vitamina C; y píldoras azules que cuestan 20 centavos cada una y contienen 2 unidades de vitamina A, 1 de vitamina B_1 y 7 de vitamina C. ¿Cuántas píldoras de cada clase debe tomar para minimizar su costo y cumplir con sus requerimientos diarios?

32. ***Costos de pernos*** Una fábrica produce dos tipos de pernos. Cada uno se puede fabricar en cualquiera de tres grupos de máquinas, pero el tiempo requerido de cada grupo es diferente, como se muestra en la siguiente tabla.

		Grupos de máquinas		
		I	**II**	**III**
Pernos	**Tipo A**	0.1 min	0.1 min	0.1 min
	Tipo B	0.1 min	0.4 min	0.5 min

Los horarios de producción se elaboran por un día completo. En un día hay 240, 720 y 160 minutos disponibles, respectivamente, en las máquinas. Los pernos de tipo A se venden en \$0.10 y los de tipo B en \$0.12. ¿Cuántos pernos de cada tipo se pueden fabricar por día para maximizar los ingresos? ¿Cuál es el ingreso máximo?

33. ***Costos de gasolina y aceite combustible*** Un proceso de manufactura requiere que las refinerías de petróleo fabriquen al menos 2 galones de gasolina por cada galón de aceite combustible. Para satisfacer la demanda invernal de aceite combustible, se deben producir al menos 3 millones de galones al día. La demanda de gasolina no es mayor que 6.4 millones de galones al día. Si el precio de la gasolina es de \$2.90 por galón, y el precio del aceite combustible es de \$3.50 por galón, ¿qué cantidad de cada clase de combustible se debe producir para maximizar el ingreso?

34. ***Producción de pasteles y galletas*** Una pastelería elabora pasteles y galletas. Cada lote de pasteles requiere dos horas en el horno y tres horas en el área de decoración. Cada lote de galletas necesita una hora y media en el horno y dos tercios de una hora en el área de decoración. El horno está disponible no más de 15 horas al día, mientras que el área de decoración se puede usar hasta 13 horas al día. ¿Cuántos lotes de pasteles y galletas se deben elaborar para maximizar las utilidades, si las galletas generan una utilidad de \$20 por lote y los pasteles generan una utilidad de \$30 por lote?

35. ***Ayuda a víctimas de terremoto*** Las víctimas de un terremoto en China necesitan medicamentos y agua embotellada. Cada paquete de medicamentos mide 1 pie cúbico y pesa 10 libras. Cada contenedor de agua también mide un pie cúbico, pero pesa 20 libras. El avión solamente puede transportar 80,000 libras y un volumen total de 6000 pies cúbicos. Cada paquete de medicamentos ayudará a 6 personas, mientras que cada contenedor de agua servirá para 10 personas. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe enviar para maximizar el número de personas que reciben ayuda?

36. ***Ayuda a víctimas de terremoto*** Si cada paquete de medicamentos puede ayudar a 4 personas y no a 6, ¿cómo se modificarían los resultados del **ejercicio 35**?

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

Rastreo epidemiológico

La gráfica muestra una comparación del número de afroestadounidenses y caucásicos que vivían con SIDA en Estados Unidos entre 1993 y 2000. Formen grupos de 2 o 3 estudiantes para trabajar en lo siguiente.



Fuente: U.S. Centers for Disease Control.

Temas de análisis

1. Las dos rectas de la figura se obtuvieron uniendo los puntos que siguen la forma

(año, número de personas en miles).

Consideren que $x = 0$ representa el año 1993, $x = 1$ representa 1994, y así sucesivamente, y que se aproxima el valor de y para cada año en el caso de los afroestadounidenses. Estimen los valores faltantes y completen la tabla. Recuerden que y está en miles.

Año	Número de afroestadounidenses con SIDA (y, en miles)
1993 ($x = 0$)	60
1994 ($x = 1$)	
1995 ($x = 2$)	
1996 ($x = 3$)	
1997 ($x = 4$)	
1998 ($x = 5$)	
1999 ($x = 6$)	
2000 ($x = 7$)	140

Ahora usen dos puntos cualesquiera para obtener una ecuación de la recta que describe estos datos.

2. Repitan el procedimiento de la parte 1, aplicando los datos de la recta para caucásicos que viven con SIDA.

Año	Número de caucásicos con SIDA (y, en miles)
1993 ($x = 0$)	80
1994 ($x = 1$)	
1995 ($x = 2$)	
1996 ($x = 3$)	
1997 ($x = 4$)	
1998 ($x = 5$)	
1999 ($x = 6$)	
2000 ($x = 7$)	128

Ahora usen dos puntos cualesquiera para obtener la ecuación de la recta que describe estos datos.

3. Las dos ecuaciones de las partes 1 y 2 forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables. Resuelvan este sistema usando el método que deseen.

4. La coordenada x de la solución del sistema en la parte 3 debe corresponder al año en el cual las dos rectas se intersecan. Observen la gráfica otra vez. ¿El valor de x es el que debería ser?

5. Comenten por qué los resultados de esta actividad podrían variar entre los grupos que la realizan.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 7

1. Determine la distancia entre los puntos $(-3, 5)$ y $(2, 1)$.

2. Obtenga la ecuación del círculo cuyo centro tiene las coordenadas $(-1, 2)$, y cuyo radio es igual a 3. Trace la gráfica.

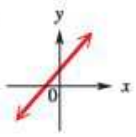
3. Obtenga las intersecciones con x y con y de la gráfica de $3x - 2y = 8$, y grafique la ecuación.

4. Obtenga la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(6, 4)$ y $(-1, 2)$.

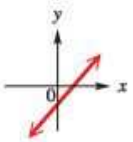
5. Obtenga la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta descrita.
   a) Pasa por el punto $(-1, 3)$, con pendiente igual a $-\frac{2}{5}$
   b) Pasa por $(-7, 2)$ y es perpendicular a $y = 2x$
   c) Pasa por $(-2, 3)$ y $(6, -1)$

6. ¿En cuál de las siguientes figuras hay una pendiente positiva y una coordenada de y negativa para su intersección con y?

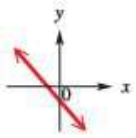
A.



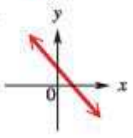
B.



C.



D.



7. ***Expectativa de vida*** La tabla muestra la expectativa de vida, en años, para ciertos años entre 1943 y 2003.

Año	Expectativa de vida (en años) al momento de nacer
1943	63.3
1953	68.8
1963	69.9
1973	71.4
1983	74.6
1993	75.5
2003	77.6

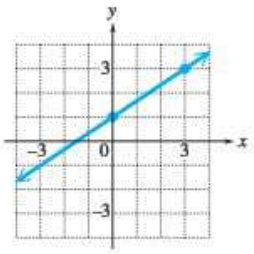
Fuente: Centers for Disease Control and Prevention.

   a) Use la información de los años 1943 y 2003, considerando que $x = 0$ representa 1943 y $x = 60$ representa 2003. Por otro lado, y representa la expectativa de vida en años. Considere estos dos años para escribir una ecuación que modele la expectativa de vida.
   b) Use la ecuación del inciso *a)* para predecir la expectativa de vida en 2013.
   c) Use la fórmula del punto medio para determinar la expectativa de vida para el año que se encuentra a la mitad entre 1973 y 1983.

8. ***Ventas de discos compactos*** En el año 2000 se vendieron 942.5 millones de discos compactos en Estados Unidos. En 2006 se vendieron 614.9 millones. Calcule la tasa de cambio promedio de discos compactos vendidos por año. (*Fuente:* Recording Industry Association of America).

9. ***Multas en la biblioteca*** Un usuario de una biblioteca que no entrega a tiempo los libros tiene que pagar una multa de \$0.05 por día de retraso, más un cargo fijo de \$0.50 por todos los libros prestados. Considere que x representa el número de días después de la fecha de vencimiento del préstamo del libro, y que y representa la multa total por la tardanza del usuario. Escriba una ecuación de la forma $y = mx + b$ que represente esta situación. Luego dé una tripleta de valores ordenados con valores de x de 1, 5 y 10 que satisfagan la ecuación.

10. Escriba la ecuación de la recta mostrada en la forma pendiente-intersección.



11. Considere la función $f(x) = x^2 - 3x + 12$.
   a) Proporcione su dominio.
   b) Obtenga $f(-2)$.

12. Considere la función $f(x) = \dfrac{2}{x - 3}$.
   a) Proporcione su dominio.
   b) Obtenga $f(3)$.

13. ***Producción de calculadoras*** Si el costo para fabricar x unidades de calculadoras es $C(x) = 50x + 5000$ dólares, mientras que el ingreso es $R(x) = 60x$ dólares, determine el número de calculadoras que se deben producir para ubicarse en el punto de equilibrio (es decir, cuando no hay ganancias ni pérdidas). ¿Cuál es el ingreso en el punto de equilibrio?

14. Grafique la función cuadrática

$$f(x) = -(x+3)^2 + 4.$$

Proporcione el eje, el vértice, el dominio y el rango.

15. ***Dimensiones de un estacionamiento*** El Colegio Comunitario de Kirkwood desea construir un estacionamiento rectangular en un terreno limitado en un lado por una carretera. Hay material para construir una valla de 320 pies para los otros tres lados. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno si el área cercada debe ser la máxima?

16. Use una calculadora científica para obtener una aproximación de una de las siguientes expresiones. Proporcione tantos dígitos como despliegue la calculadora.

a) $5.1^{4.7}$ ***b)*** $e^{-1.85}$

c) $\ln 23.56$.

17. ***Inversión*** Suponga que se invierten \$12,000 en una cuenta que paga el 2% de interés anual, y que permanecen sin movimientos durante 3 años. ¿Cuánto habrá en la cuenta si

a) el interés se capitaliza en forma trimestral (cuatro veces al año)?;

b) el interés se capitaliza en forma continua?

18. ***Decaimiento del plutonio-241*** Suponga que la cantidad, en gramos, de plutonio 241 presente en una muestra dada se determina mediante la función

$$A(t) = 2.00e^{-0.053t},$$

donde t se mide en años. Calcule la cantidad presente en la muestra después del número de años que se indica.

a) 4 ***b)*** 10 ***c)*** 20

d) ¿Cuál era la cantidad inicial presente?

Resuelva los siguientes sistemas usando los métodos de eliminación, sustitución o una combinación de ambos.

19.
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ 3x - 4y &= 20 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y + z &= 5 \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 2x + 3y - 6z &= 11 \\ x - y + 2z &= -2 \\ 4x + y - 2z &= 7 \end{aligned}$$

Resuelva los siguientes problemas usando un sistema de ecuaciones.

22. ***Éxitos de taquilla de Harrison Ford*** Harrison Ford es una de las estrellas más famosas de Hollywood. En enero de 2010, sus dos películas con mayor recaudación, *La guerra de las galaxias, Episodio IV: Una nueva esperanza* e *Indiana Jones y el reino de la calavera de cristal*, obtuvieron \$778 millones juntas. Si *Indiana Jones y el reino de la calavera de cristal* recaudó \$144 millones menos que *La guerra de las galaxias, Episodio IV: Una nueva esperanza*, ¿cuánto recaudó cada película? (*Fuente:* www.the-numbers.com).



23. ***Comisión inmobiliaria*** Doug Niles vende propiedades inmobiliarias. En tres ventas recientes, ganó comisiones del 10%, 6% y 5%, respectivamente. El total de comisiones por estas ventas fue de \$17,000, y el valor total de las propiedades que vendió ascendió a \$280,000. Si la cantidad recibida por la venta que generó la comisión del 5% equivale a la suma de las otras dos, ¿cuáles fueron los precios de cada una de las tres propiedades?

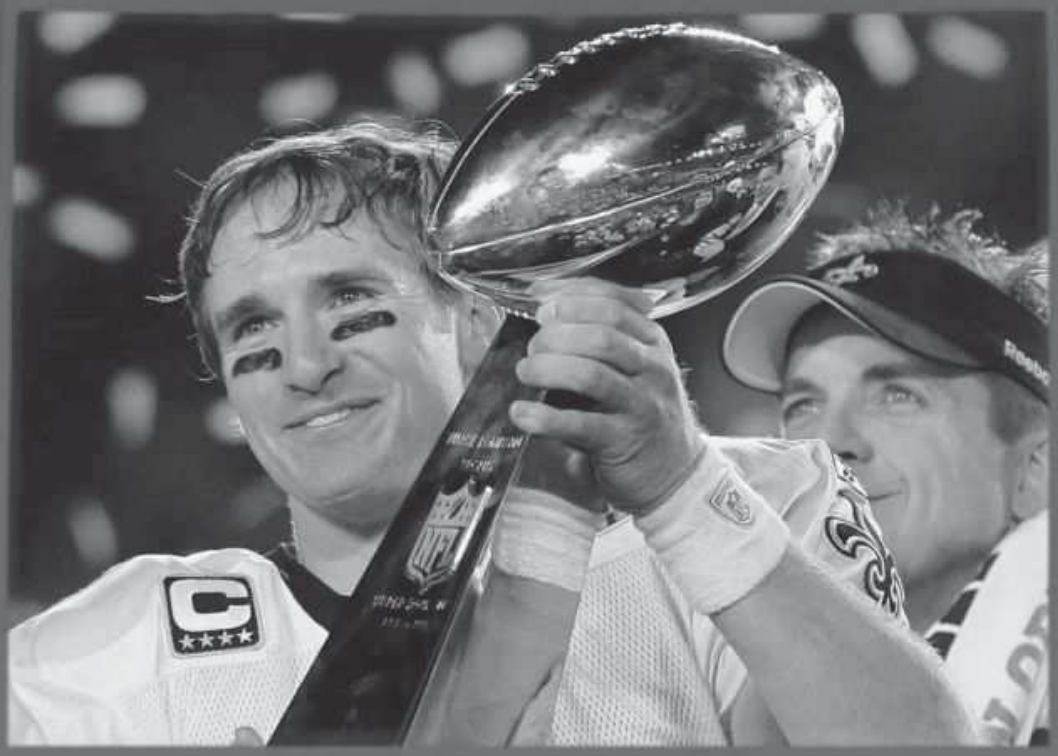
24. Grafique el conjunto solución del sistema de desigualdades.

$$\begin{aligned} x + y &\le 6 \\ 2x - y &\ge 3 \end{aligned}$$

25. ***Utilidades de animales de granja*** Callie Daniels solamente cría cerdos y gansos. Ella quiere criar no más de 16 animales, con no más de 12 gansos. Gasta \$50 para criar un cerdo y \$20 para criar un ganso. Tiene \$500 disponibles para este propósito. Determine la utilidad máxima que puede obtener si cada ganso genera una utilidad de \$80 y cada cerdo genera \$40. Indique cuántos cerdos y gansos debe criar para lograr este máximo.

MÉTODOS DE CONTEO

8



El 7 de febrero de 2010, en Miami, Florida, en el XLIV Súper Bowl se enfrentaron los Santos de Nueva Orleans, de la Conferencia Nacional de Futbol (NFC), contra los Potros de Indianápolis, de la Conferencia Americana (AFC). Los Santos, guiados por el mariscal de campo Drew Brees, ganaron un emocionante juego, cuyo marcador final quedó 31 a 17.

Antes de iniciar el partido, la moneda lanzada por Emmitt Smith, ante la mirada vigilante del árbitro Scott Green, cayó "cara", la opción del equipo visitante de los Santos.

NARRADOR: "¿Pueden creer esto? Durante 13 años consecutivos, la Conferencia Nacional ha ganado en los lanzamientos de la moneda. Las probabilidades de que cualquiera de los participantes gane 13 veces consecutivas al lanzar una moneda al aire son de 8100 a 1".

¿El narrador estaba en lo correcto? Los métodos de este capítulo nos permiten contar esas probabilidades con exactitud. La respuesta se encuentra en la página 419.

8.1 Conteo mediante una lista sistemática

8.2 Uso del principio fundamental de conteo

8.3 Uso de permutaciones y combinaciones

8.4 Uso del triángulo de Pascal

Extensión Cuadrados mágicos

8.5 Problemas de conteo que implican "no" y "o"

Investigación colaborativa Solución del problema del viajero

Examen del capítulo 8

8.1 CONTEO MEDIANTE UNA LISTA SISTEMÁTICA

Conteo • Tareas de una etapa • Tablas de resultados para tareas de dos etapas • Diagramas de árbol para tareas con varias etapas • Otros métodos de listas sistemáticas



Es posible usar **métodos de conteo** para conocer el número de movimientos requeridos para resolver el cubo de Rubik. El cubo sin resolver se debe manipular de modo que cada cara tenga un solo color. Las regalías que obtuvo Rubik por las ventas del cubo en los países occidentales lo convirtieron en el hombre más rico de Hungría.

Aun cuando la locura por el cubo ha disminuido desde la década de 1980, cuando tuvo un auge, ciertos grupos han permanecido muy interesados no solo en la solución del cubo, sino en realizar esta tarea lo más rápido posible. Durante 30 años se trató afanosamente de determinar el número exacto y suficiente de movimientos (llamados giros de cara) que permiten solucionar el cubo en todos los casos. La búsqueda terminó finalmente en julio de 2010. Ahora se sabe que ese número es igual a 20.

No obstante, todavía no se sabe si existe un algoritmo "eficiente" para obtener una solución real en cada caso. De modo que el cubo sigue conservando misterios en espera de resolución por parte de los científicos del cálculo.

Actualmente, la popularidad del cubo rivaliza, entre mucha gente, con los acertijos llamados sudokus.

Conteo

En este capítulo, "conteo" significa la obtención de un número de objetos existentes de cierto tipo. Entre muchas posibles razones para formular y contestar esta pregunta, una de las principales es poder calcular la probabilidad de que ocurra algún acontecimiento, es decir, la probabilidad del evento. (Probabilidad es la materia del **capítulo 9**).

Los métodos de conteo que se presentan en esta sección implican listas de los resultados posibles de una tarea determinada. Este enfoque solo es práctico para listas bastante cortas. Cuando se listan los resultados posibles, es extremadamente importante usar un método sistemático, de modo que no se omitan posibilidades.

Tareas de una etapa

Los resultados de tareas sencillas de una etapa con frecuencia se pueden listar fácilmente. Por ejemplo, para la tarea de arrojar al aire una sola moneda, la lista es *cara* o *cruz*, dos resultados posibles. Si la tarea consiste en arrojar un solo dado (un cubo con números del 1 al 6), los diferentes resultados son 1, 2, 3, 4, 5, 6, un total de seis posibilidades.

EJEMPLO 1 Selección del presidente de un club

Considere el club N integrado por cinco miembros:

$$N = \{\text{Alan, Bill, Cathy, David, Evelyn}\}, \quad \text{abreviado como} \quad N = \{A, B, C, D, E\}.$$

¿De cuántas maneras puede este grupo seleccionar a un presidente (suponiendo que todos los miembros son elegibles)?

SOLUCIÓN

La tarea en este caso consiste en seleccionar a uno de los cinco miembros como presidente. Hay cinco resultados posibles:

$$A,\ B,\ C,\ D \text{ y } E.$$

■■■

Tablas de resultados para tareas de dos etapas

EJEMPLO 2 Generación de números a partir de un conjunto de dígitos

Determine la cantidad de números de dos dígitos que se pueden escribir usando solamente los dígitos 1, 2 y 3.

SOLUCIÓN

Esta tarea consiste en dos etapas:

1. Seleccionar el primer dígito. **2.** Seleccionar el segundo dígito.

Los resultados de una tarea de dos etapas se pueden visualizar en una **tabla de resultados** como la **tabla 1**. A partir de la tabla se obtiene la lista de posibles resultados:

11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

Existen nueve posibilidades. ■■■

Tabla 1

		Segundo dígito		
		1	2	3
Primer dígito	1	11	12	13
	2	21	22	23
	3	31	32	33



EJEMPLO 3 Lanzamiento de un par de dados

Determine el número de los diferentes resultados posibles cuando se arrojan dos dados normales.

SOLUCIÓN

Suponga que los dados se distinguen fácilmente entre sí. Tal vez uno es rojo y el otro verde. Entonces, la tarea está integrada por dos partes.

1. Se arroja el dado rojo. **2.** Se arroja el dado verde.

La **tabla 2** muestra que existen 36 resultados posibles.

Tabla 2 Lanzamiento de dos dados

		Dado verde					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado rojo	**1**	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Usted querrá consultar la* tabla 2 *cuando se presenten varios problemas de lanzamiento de dados en el resto de este capítulo y en el siguiente.

EJEMPLO 4 Elección de dos funcionarios

Calcule el número de maneras en que el club N del **ejemplo 1** puede elegir tanto a un presidente como a un secretario. Suponga que todos los miembros son elegibles, pero ninguno puede ocupar los dos puestos.

SOLUCIÓN

Nuevamente, la tarea requerida consta de dos etapas.

1. Seleccionar al presidente. **2.** Seleccionar al secretario.

La elaboración de la **tabla 3** nos indica las posibilidades (donde, por ejemplo, AB representa al presidente A y al secretario B, mientras que BA representa al presidente B y al secretario A).

Tabla 3 Elección de dos funcionarios

		Secretario				
		A	***B***	***C***	***D***	***E***
Presidente	***A***		*AB*	*AC*	*AD*	*AE*
	B	*BA*		*BC*	*BD*	*BE*
	C	*CA*	*CB*		*CD*	*CE*
	D	*DA*	*DB*	*DC*		*DE*
	E	*EA*	*EB*	*EC*	*ED*	

Observe que algunas entradas (las de la diagonal principal, de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha) se omitieron en la tabla, ya que los casos AA, BB, etcétera, implicarían que una persona ocupa dos cargos. En total, existen 20 posibilidades.



Este **dado de hueso** fue descubierto en los restos de un fuerte romano, en Vindolanda, cerca de la frontera entre Inglaterra y Escocia. La vida en la frontera romana transcurría entre el juego y la guerra. Algunos dados romanos estaban cargados a favor del 6 y del 1.

La vida en el Continente Americano se reflejaba en las marcas del ganado que se concebían para mantener vivos los recuerdos de momentos difíciles, disputas familiares y amores. Un ranchero llamado Ellis, de Paradise Valley en Arizona, diseñó su marca de ganado en la forma de un par de dados. Como se podrá imaginar, los puntos de los dados eran el 6 y el 1.

EJEMPLO 5 Elección de comisiones de un club

Calcule el número de posibilidades en que el club N puede designar una comisión de dos miembros para representarlos en un congreso.

SOLUCIÓN

La tarea requerida consta, una vez más, de dos etapas. De hecho, podemos observar la **tabla 3** nuevamente, pero en esta ocasión, el orden de las dos letras (personas) en un par determinado no hace diferencia. Por ejemplo, BD y DB son la misma comisión. (En el **ejemplo 4**, BD y DB eran resultados diferentes, porque las dos personas tenían distintos cargos).

En el caso de las comisiones, se pueden eliminar no solo las entradas de la diagonal principal, sino también todas las entradas debajo de la misma diagonal. La lista resultante contiene 10 posibilidades.

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE,\ BC,\ BD,\ BE,\ CD,\ CE,\ DE.$$ ■■■

Diagramas de árbol para tareas con varias etapas

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Una tarea que consta de más de dos etapas no es fácil de analizar con una tabla. Otra herramienta útil es el **diagrama de árbol.**

EJEMPLO 6 Generación de números a partir de un conjunto de dígitos

Determine la cantidad de números de tres dígitos que se pueden obtener usando solo los dígitos 1, 2 y 3, suponiendo que ***a)*** se permiten dígitos repetidos y ***b)*** no se permiten dígitos repetidos.

SOLUCIÓN

a) La tarea de construir estos números incluye tres etapas:

1. Elegir el primer dígito. **2.** Elegir el segundo dígito **3.** Elegir el tercer dígito.

Conforme nos movemos de izquierda a derecha a través del diagrama de árbol de la **figura 1**, las tres ramas del árbol de la primera etapa cubren todas las posibilidades para el primer dígito. Luego, cada rama de la primera etapa se ramifica otra vez, o se divide, en la segunda etapa, para cubrir todas las posibilidades del segundo dígito. Por último, la ramificación de la tercera etapa muestra las posibilidades del tercer dígito. Esta lista de resultados posibles (27) se muestra en la **figura 1**.

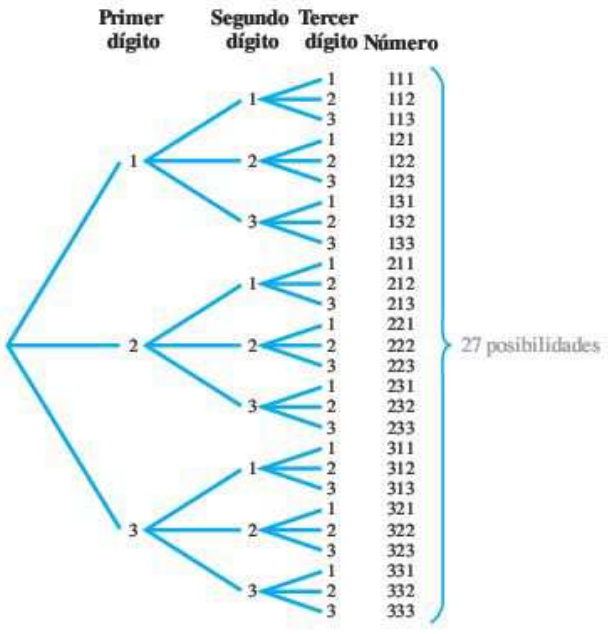


Diagrama de árbol para números de tres dígitos usando 1, 2 y 3.

Figura 1

b) Para el caso donde no se permite la repetición de dígitos, podríamos construir otra vez un diagrama de árbol completamente nuevo, como el de la **figura 2**, o simplemente podríamos revisar hacia abajo la lista de números del primer diagrama de árbol y dar de baja aquellos que tengan algún dígito repetido. En cualquier caso, solo se obtienen seis posibilidades.



Diagrama de árbol para números de tres dígitos sin repetición usando 1, 2 y 3.

Figura 2

■■■

Observe la diferencia entre los incisos ***a)*** y ***b)*** del **ejemplo 6**. Hay 27 posibilidades cuando "se permiten las repeticiones (de dígitos)", pero solo seis cuando "no se permiten las repeticiones".

A continuación se presenta otra manera de enunciar el problema del **ejemplo 6**

> Se va a determinar un número de tres dígitos colocando en un sombrero tres trozos de papel (identificados con un 1, un 2 y un 3) y extrayendo los trozos sucesivamente. Calcule el número de resultados posibles si la extracción se hace ***a)*** *con remplazo* y ***b)*** *sin remplazo*.

Extracción "con remplazo" significa extraer un trozo, escribir el dígito que lo identifica y volver a colocar el trozo en el sombrero de modo que esté disponible nuevamente para extracciones subsiguientes.

> ***La extracción "con remplazo" tiene el mismo efecto de "permitir las repeticiones", mientras que la extracción "sin remplazo" tiene el efecto de "no permitir las repeticiones".***

Las palabras "repeticiones" y "remplazo" son importantes en el enunciado del problema. En el **ejemplo 2**, como no hay restricciones, se supuso que *las repeticiones* (de los dígitos en el número) *estaban permitidas*, o de igual manera, que los dígitos iban a elegirse *con remplazo*.

EJEMPLO 7 Elección de las configuraciones de los interruptores de una impresora

La impresora de la computadora de Pamela DeMar permite configuraciones opcionales en un panel de cuatro interruptores en hilera. ¿Cuántas configuraciones diferentes pueden seleccionarse, si ningún par de interruptores adyacentes puede estar apagado al mismo tiempo?

SOLUCIÓN

Esta situación es típica de opciones seleccionables por un usuario de varios dispositivos, como son los equipos de computación, los equipos para abrir la puerta de una cochera y otros más. En la **figura 3** se identifica "encendido" y "apagado" con los números 1 y 0, respectivamente. El número de configuraciones posibles es ocho.

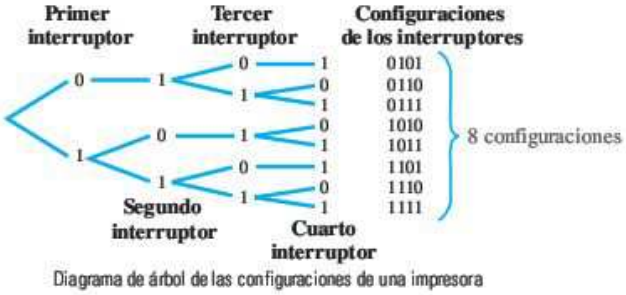


Diagrama de árbol de las configuraciones de una impresora

Figura 3

Observe que cada vez que un interruptor indica que está apagado (0), el siguiente interruptor solo puede estar encendido (1). Esto es para satisfacer la restricción de que ningún par de interruptores adyacentes puede estar apagado al mismo tiempo.

EJEMPLO 8 Asientos para asistentes a un concierto

Arne, Bobbette, Chuck y Deirdre tienen boletos para cuatro lugares, en una misma fila, para un concierto. ¿De cuántas maneras posibles se pueden sentar de modo que Arne y Bobbette se sienten juntos?

SOLUCIÓN

En este caso tenemos una tarea de cuatro etapas:

> Asignar una persona al primero, segundo, tercero y cuarto asientos.

En el diagrama de árbol de la **figura 4** en la siguiente página, se eliminan las repeticiones porque ninguna persona puede ocupar más de un asiento. Además, una vez que A y B aparecen en el árbol, la otra aparición debe ocurrir en la etapa siguiente. (¿A qué se debe esto?). No ocurre ninguna ramificación de la etapa tres a la etapa cuatro, porque a esas alturas, solo hay una persona a la que no se le ha asignado asiento. La columna de la derecha de la figura muestra los 12 arreglos posibles.

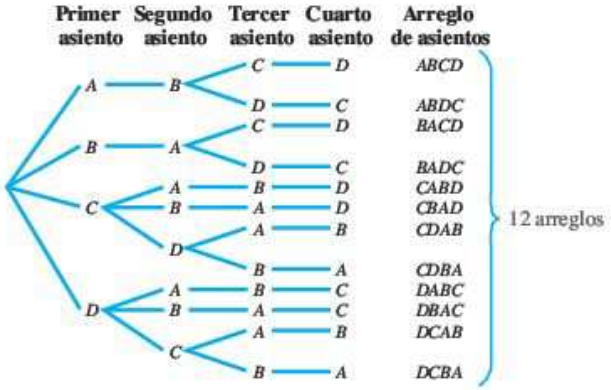


Diagrama de árbol de los asientos para un concierto

Figura 4

Si bien solo hemos aplicado diagramas de árbol a tareas con tres o más etapas, también se pueden usar en tareas de dos etapas o incluso en la más sencilla de una etapa. Las tablas de resultados, por otro lado, solo son prácticas para tareas de dos etapas.

Otros métodos de listas sistemáticas

Existen otras maneras sistemáticas para elaborar listas completas de resultados posibles, además de las tablas de resultados y los diagramas de árbol.

En el **ejemplo 4**, donde se usó una tabla de resultados (**tabla 3**) para listar todos los pares posibles de presidente-secretario, en el caso del club $N = \{A, B, C, D, E\}$, se pudo haber construido sistemáticamente la misma lista usando un tipo de método alfabético o de izquierda-derecha.

Primero, considere los resultados donde A es presidente. Cualquiera de los miembros restantes (B, C, D o E) pudo ser el secretario. Esto nos da los pares AB, AC, AD y AE. Luego se supone que B es presidente. El secretario pudo ser entonces A, C, D o E. Se obtienen los pares BA, BC, BD y BE. Continuando en orden, obtenemos la lista completa justo como en el **ejemplo 4**:

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE,\ BA,\ BC,\ BD,\ BE,\ CA,\ CB,$$
$$CD,\ CE,\ DA,\ DB,\ DC,\ DE,\ EA,\ EB,\ EC,\ ED.$$

EJEMPLO 9 Conteo de triángulos en una figura

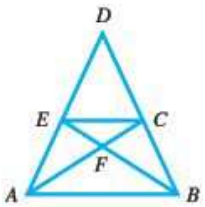


Figura 5

¿Cuántos triángulos diferentes (de cualquier tamaño) se pueden trazar en la **figura 5**?

SOLUCIÓN

Un método sistemático consiste en identificar los puntos como se muestra, iniciando con A, y proceder en orden alfabético para escribir todas las combinaciones de tres letras; después se eliminan las que no son triángulos en la figura.

$$ABC,\ ABD,\ ABE,\ ABF,\ ACD,\ ACE,\ ACF,\ ADE,\ ADF,\ AEF,$$
$$BCD,\ BCE,\ BCF,\ BDE,\ BDF,\ BEF,\ CDE,\ CDF,\ CEF,\ DEF$$

Finalmente, quedan 12 triángulos diferentes en la figura. ¿Por qué no están incluidos en la lista los triángulos ACB y CBF (y muchos otros)?

Otro método podría consistir en identificar primero los triángulos formados por regiones únicas: DEC, ECF, AEF, BCF, ABF. Luego, listar aquellos formados por dos regiones: AEC, BEC, ABE, ABC; y aquellos con tres regiones cada uno: ACD, BED. No hay triángulos con cuatro regiones, pero existe uno con cinco: ABD. Otra vez el total es 12. ¿Se le ocurren otras maneras sistemáticas para obtener la misma lista? ▮▮▮

Observe que en el primer método mostrado en el **ejemplo 9**, la identificación de puntos se consideró en orden alfabético. En el segundo método se listaron los triángulos formados por una región única usando un orden de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. El uso de un sistema sólido garantiza la obtención de la lista completa.

8.1 EJERCICIOS

Elección de funcionarios de un club Remítase a los ***ejemplos 1 y 4***, que implican al club

$$N = \{\text{Alan, Bill, Cathy, David, Evelyn}\}.$$

Suponiendo que todos los miembros son elegibles, pero que ninguno de ellos puede ocupar más de un puesto, liste y cuente las diferentes maneras en que el club puede elegir cada grupo de funcionarios.

1. un presidente y un tesorero

2. un presidente y un tesorero, si el presidente debe ser una mujer

3. un presidente y un tesorero, si los dos deben ser del mismo sexo

4. un presidente, un secretario y un tesorero, si el presidente y el tesorero deben ser mujeres

5. un presidente, un secretario y un tesorero, si el presidente debe ser un hombre y los otros dos deben ser mujeres

6. un presidente, un secretario y un tesorero, si los tres deben ser hombres

Designación de comisiones *Liste y cuente las maneras en que el club N puede designar una comisión de tres miembros en cada condición.*

7. No hay restricciones.

8. La comisión debe incluir más hombres que mujeres.

Remítase a la **tabla 2** *(la tabla de resultados del lanzamiento de dos dados). De las 36 posibilidades, determine el número para el cual la suma (de ambos dados) es la siguiente.*

9. 2 **10.** 3 **11.** 4

12. 5 **13.** 6 **14.** 7

15. 8 **16.** 9 **17.** 10

18. 11 **19.** 12 **20.** impar

21. par

22. de 6 a 8 inclusive

23. entre 6 y 10

24. menor que 5

25. Construya una tabla de resultados que muestre todos los números posibles de dos dígitos usando los dígitos del conjunto:

$$\{2, 3, 5, 7\}.$$

De los 16 números de la tabla de resultados del ejercicio 25, liste los que pertenecen a cada una de las siguientes categorías.

26. números pares

27. números con dígitos repetidos

28. múltiplos de 3

29. números primos

30. Construya un diagrama de árbol que muestre todos los resultados posibles cuando se arrojan al aire tres monedas. Luego liste las maneras de obtener cada uno de los siguientes resultados.

a) por lo menos dos caras

b) más de dos caras

c) no más de dos caras

d) menos de dos caras

31. Amplíe el diagrama de árbol del **ejercicio 30** para cuatro monedas. Luego liste las maneras para obtener cada uno de los siguientes resultados.

a) más de tres cruces

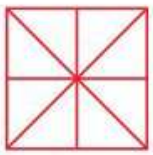
b) menos de tres cruces

c) al menos tres cruces

d) no más de tres cruces

Determine el número de triángulos (de cualquier tamaño) en cada una de las siguientes figuras.

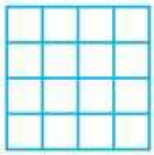
32. 

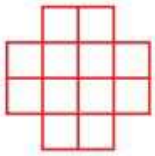
33. 

34. 

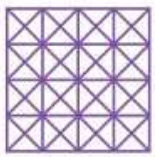
35. 

Determine el número de cuadrados (de cualquier tamaño) en cada una de las siguientes figuras.

36. 

37. 

38. 

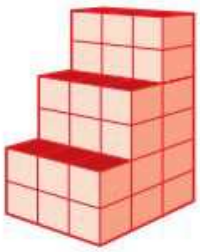
39. 

Considere solo los cubos individuales más pequeños y suponga montones sólidos (sin espacios). Determine el número de cubos que no son visibles en cada montón, desde la perspectiva mostrada.

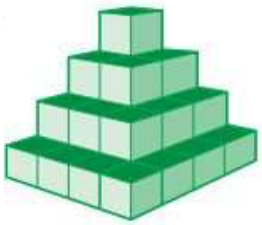
40.



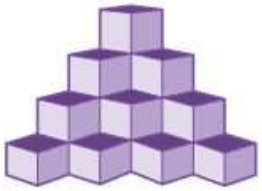
41.



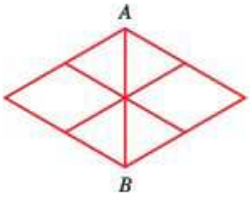
42.



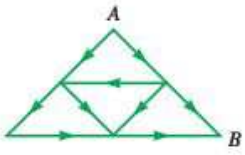
43.



44. En la figura plana que se ilustra en seguida, solo se permite movimiento descendente. Determine el número total de trayectorias de A a B.



45. Determine el número de trayectorias de A a B en la figura que se ilustra a continuación, si las direcciones en varios segmentos están restringidas como se indica.



En los ejercicios 46 a 48, determine de cuántas maneras distintas se puede escribir el número indicado como la suma de dos primos.

46. 30 **47.** 40 **48.** 95

49. ***Lanzamiento de un dado inusual*** Un dado inusual tiene los números 2, 2, 3, 3, 5 y 8 sobre sus seis caras. Se arrojan dos de estos dados y se suman los dos números de las caras superiores. ¿Cuántas sumas diferentes son posibles? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

50. ***Apretón de manos en un grupo*** Un grupo de 6 extraños están sentados en círculo, y cada uno está familiarizado solo con la persona de la izquierda y la persona de la derecha. Luego, las seis personas se ponen de pie y se estrechan las manos (una vez) con cada uno de los otros que aún eran extraños. ¿Cuántos apretones de mano se realizaron?

51. ***Número de juegos en un torneo de ajedrez*** Cincuenta personas entran a un torneo de ajedrez con eliminatorias sencillas. (Si usted pierde un juego, está fuera). Suponiendo que no hay empates, ¿cuál es el número de juegos requeridos para determinar al campeón del torneo?

52. ***Sumas de dígitos*** ¿Cuál es la cantidad de números enteros positivos menores que 100 cuya suma de sus dígitos es igual a un cuadrado perfecto?

53. ***Sumas de dígitos*** ¿Cuál es la cantidad de números de tres dígitos cuya suma de sus dígitos es igual a 22?

54. ***Números enteros que contienen el dígito 2*** ¿Cuántos números enteros entre 100 y 400 contienen el dígito 2?

55. ***Solicitud de un pedido*** Un cliente ordenó 15 pastelillos. Los pastelillos se colocan en paquetes de cuatro, tres o uno. ¿De cuántas maneras diferentes puede despacharse este pedido? (Problema del calendario de *Mathemathics Teacher*).

56. ***Selección de platillos para la comida*** Michael Bailey y sus amigos están comiendo en el Clam Shell Restaurant esta tarde, donde la comida completa consta de tres platillos:

(1) sopa (crema de almejas o minestrone) o ensalada (de espinacas frescas o camarones),

(2) rollos de masa agria o pan de salvado, y

(3) plato principal (lasaña, langosta o asado de pavo).

Michael selecciona su menú de acuerdo con las siguientes restricciones. Él no tolera más de una clase de mariscos en una comida. Además, siempre que prueba la sopa minestrone, no puede comer lasaña. Utilice un diagrama de árbol para determinar el número de opciones diferentes que tiene Michael.

Configuración de opciones de la impresora de una computadora En los ejercicios 57 a 59, consulte el ***ejemplo 7***. ¿Cuántas configuraciones diferentes puede elegir Pamela en cada uno de los siguientes casos?

57. No se aplican restricciones a los interruptores adyacentes.

58. Dos interruptores adyacentes no pueden estar apagados y dos interruptores adyacentes no pueden estar encendidos.

59. Hay cinco interruptores en lugar de cuatro, y no pueden estar encendidos dos interruptores adyacentes.

60. ***Generación de números a partir de conjuntos de dígitos*** Determine la cantidad de números de tres dígitos impares, sin repeticiones, que se pueden escribir usando solo los dígitos 0, 1, 2 y 3.

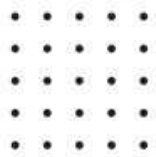
61. ***Puntos de rejilla sobre una recta*** Una recta une los puntos

$$(8, 12) \text{ y } (53, 234)$$

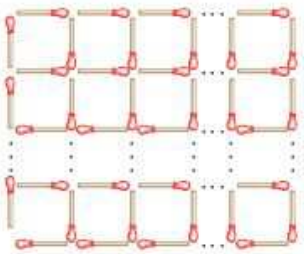
en un plano cartesiano. Incluyendo los extremos, ¿cuántos puntos de rejilla contiene la recta? (Un *punto de rejilla* es un punto con coordenadas indicadas con números enteros).

62. ***Longitudes de rectas que unen puntos de rejilla*** En el patrón que se ilustra a continuación, los puntos están separados horizontal y verticalmente una unidad. Si un segmento puede unir dos puntos cualesquiera, ¿cuántas rectas se pueden dibujar sobre cada una de las siguientes longitudes?

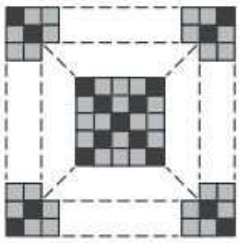
a) 1 ***b)*** 2 ***c)*** 3 ***d)*** 4 ***e)*** 5



63. ***Conteo de cerillos en una cuadrícula*** Se usan cerillos de longitud uniforme para construir una cuadrícula rectangular como la que se ilustra aquí. Si la cuadrícula tiene 12 cerillos de alto y 25 cerillos de ancho, ¿cuántos cerillos se utilizan?



64. ***Patrones en los azulejos del piso*** Se va a embaldosar un piso cuadrado con azulejos cuadrados como los que se muestran a continuación, con azulejos negros sobre las diagonales principales y azulejos grises en el resto del piso. (En todos los casos, se deben usar tanto los azulejos negros como los azulejos grises, y las dos diagonales deben tener un azulejo negro común en el centro del piso).



a) Si se usan 81 azulejos negros, ¿cuántos azulejos grises serán necesarios?

b) ¿Para qué número de azulejos en lugar de 81 se podría resolver aún este problema?

c) Obtenga una expresión en k que dé el número de azulejos grises requeridos en general.

65. ***Apretón de manos en un grupo*** Chris Heister y su hijo estaban reunidos entre cuatro parejas de padres e hijos para intercambiar tarjetas de béisbol. Conforme cada persona llegó, estrechó la mano de cualquiera que no conocía anteriormente. Cada persona terminó haciendo un número diferente de nuevos conocidos (entre 0 y 6), excepto Chris y su hijo, quienes saludaron al mismo número de personas. ¿Cuántas manos estrechó Chris?

En los ejercicios 66 y 67, replantee el problema de conteo de dos maneras, primero ***a)*** *usando la palabra* repetición, *y luego* ***b)*** *usando la palabra* remplazo.

66. Ejemplo 2

67. Ejemplo 4

8.2 USO DEL PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE CONTEO

Uniformidad y el principio fundamental de conteo • Factoriales
• Arreglos de objetos

Uniformidad y el principio fundamental de conteo

En la **sección 8.1** se obtuvieron listas completas de todos los resultados posibles de varias actividades. Sin embargo, si todo lo que necesitamos conocer es el número total de posibilidades, entonces normalmente no es necesaria una lista completa, y con frecuencia es laborioso o difícil obtenerla, especialmente cuando la lista es grande.

La **figura 6** es la misma **figura 2** de la **sección 8.1** [del **ejemplo 6*b***)], la cual muestra todos los números de tres dígitos, sin repeticiones, usando los dígitos 1, 2 y 3.



Figura 6

El diagrama de árbol de la **figura 6** es "uniforme" en el sentido de que una etapa determinada de la tarea se puede realizar en el mismo número de maneras, sin importar cuáles opciones se eligieron en las etapas anteriores. Por ejemplo, siempre existen dos opciones para el segundo dígito. (Si el primer dígito es 1, el segundo puede ser 2 o 3. Si el primer dígito es 2, el segundo dígito puede ser 1 o 3. Si el primer dígito es 3, el segundo puede ser 1 o 2).

El **ejemplo 6*a)*** de la **sección 8.1** se enfoca en la misma situación básica:

> ***Determine la cantidad de números de tres dígitos que se pueden obtener usando los dígitos 1, 2 y 3.***

En ese caso se permitían las repeticiones y, por consiguiente, había muchas más posibilidades (27 en lugar de 6; véase la **figura 1** de la **sección 8.1**). Pero el criterio de uniformidad mencionado anteriormente aún se aplica sin problemas. Sin importar cuál sea el primer dígito, existen tres opciones para el segundo (1, 2, 3). Y no importa cuáles sean el primer dígito y el segundo, existen tres opciones para el tercero. Este criterio de uniformidad se puede generalizar de la siguiente manera.

Criterio de uniformidad para tareas con múltiples etapas

Se dice que una tarea con múltiples etapas satisface el **criterio de uniformidad** si el número de opciones de cualquier etapa particular es el mismo *sin importar cuáles opciones se eligieron en etapas anteriores.*

El criterio de uniformidad no siempre se satisface. Volvamos al **ejemplo 7** (y la **figura 3**) de la **sección 8.1**. Después del primer interruptor (dos posibilidades), los otros interruptores tenían una o dos posibilidades, dependiendo de cómo se hubieran configurado los interruptores anteriores. (Esta "falta de uniformidad" surge, en ese caso, por el requerimiento de que no puede haber dos interruptores adyacentes apagados).

En la mayoría de los casos donde hay uniformidad, no habrá necesidad de construir un diagrama de árbol si se recurre al **principio fundamental de conteo**, que dice lo siguiente.

Principio fundamental de conteo

Cuando una tarea está integrada por k etapas separadas y satisface el criterio de uniformidad, si la primera etapa se puede realizar de n_1 maneras, entonces la segunda etapa se puede efectuar de n_2 maneras, y así sucesivamente hasta la k-ésima etapa, la cual se puede realizar de n_k maneras. Por lo tanto, el número total de maneras para completar la tarea está determinado por el producto

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Una estrategia para la solución de problemas sugerida en el **capítulo 1** fue: "*Si se puede aplicar una fórmula, úsela*". El principio fundamental de conteo ofrece una fórmula que se aplica a una variedad de problemas. El truco consiste en considerar que la "tarea" en cuestión se realiza en una secuencia de dos o más etapas separadas.

Una técnica útil en la aplicación del principio fundamental de conteo es escribir por separado todas las etapas de la tarea, dejando un espacio entre cada una. Determine de cuántas maneras se puede realizar cada etapa y anote ese número en los espacios. Finalmente, multiplique todos estos números.



Richard Dedekind (1831-1916) estudió en la Universidad de Gotinga, Alemania, donde fue el último discípulo de Gauss. Mientras vivió, su trabajo no fue reconocido, pero en la actualidad su tratamiento del infinito y de lo que representa un número real aún tienen influencia.

Mientras vacacionaba en Suiza, Dedekind conoció a Georg Cantor (mencionado en la **página 44**) Dedekind estaba interesado en el trabajo de Cantor sobre los conjuntos infinitos. Quizá porque ambos estaban trabajando en temas de matemáticas nuevos e inusuales, como la teoría de números, y porque ninguno de los dos recibió la atención profesional que merecía en vida, forjaron una amistad duradera.

EJEMPLO 1 Conteo de números de dos dígitos

¿Cuántos números de dos dígitos existen en nuestro sistema de conteo de números (de base 10)? **(Mientras que 40 es un número de dos dígitos, 04 no lo es).**

SOLUCIÓN

En este caso, nuestra "tarea" consiste en seleccionar, o construir, un número de dos dígitos. Organice el trabajo de la siguiente manera.

Etapa de la tarea	**Seleccionar el primer dígito**	**Seleccionar el segundo dígito**
Número de posibilidades	_____	_____

Existen nueve opciones para el primer dígito (1 a 9). Puesto que no se establecieron restricciones, se supone que está permitida la repetición de dígitos. Por lo tanto, sin importar qué dígito diferente de cero se use como primer dígito, las nueve opciones son elegibles para el segundo dígito. Asimismo, a diferencia del primer dígito, el segundo dígito puede ser cero, de modo que tenemos 10 opciones para el segundo dígito. Ahora se pueden llenar los espacios en blanco y multiplicar.

Etapa de la tarea	**Seleccionar el primer dígito**		**Seleccionar el segundo dígito**	
Número de posibilidades	9	·	10	= 90

Existen 90 números con dos dígitos. (Como comprobación, observe que son los números del 10 al 99, un total de $99 - 10 + 1 = 90$). ■■■

EJEMPLO 2 Generación de números de dos dígitos con restricciones

Obtenga la cantidad de números de dos dígitos que no contengan dígitos repetidos.

SOLUCIÓN

Nuevamente, la tarea básica consiste en seleccionar un número de dos dígitos, e incluye dos etapas:

1. Elegir el primer dígito. **2.** Elegir el segundo dígito.

Ahora se aplica una restricción: no es posible repetir dígitos. Existen nueve opciones para el primer dígito (1 a 9). Las nueve opciones se mantienen para el segundo dígito, puesto que ya se utilizó un dígito diferente de cero y no se puede repetir, pero ahora también está disponible el cero. Entonces, el número total es $9 \cdot 9 = 81$. ■■■

EJEMPLO 3 Elección con restricciones de funcionarios de un club

¿De cuántas maneras puede el club N de la sección anterior elegir a un presidente y un secretario si ningún miembro puede ocupar más de un cargo y el secretario debe ser varón?

SOLUCIÓN

Recuerde que $N = \{A, B, C, D, E\} = \{\text{Alan, Bill, Cathy, David, Evelyn}\}$. Considerando primero al presidente, existen cinco opciones (sin restricciones). Pero ahora tenemos un problema para obtener el número de opciones para el secretario. Si una mujer fuera electa como presidente (C o E), habría tres opciones para el secretario (A, B y D). Si un hombre resultara electo como presidente, solo quedarían dos opciones para el cargo de secretario (los otros dos hombres). ***En otras palabras, el criterio de uniformidad no se cumple y nuestro intento de aplicar el principio fundamental de conteo es inadecuado.***

Sin embargo, no todo está perdido. Para obtener el número total de posibilidades, podemos considerar primero al secretario. Hay tres opciones (A, B y D). Ahora, sin importar qué varón resultara electo como secretario, cualquiera de los otros hombres y cualquiera de las mujeres serían elegibles para el cargo de presidente (cuatro opciones en cada caso). En este orden, se satisface el criterio de uniformidad y se puede usar el principio fundamental de conteo. El número total de posibilidades para elegir a un presidente y un secretario es $3 \cdot 4 = 12$. ■■■

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS El **ejemplo 3** sugiere una buena estrategia para la solución de problemas: siempre que una o más etapas de una tarea tengan restricciones especiales, intente considerar esa etapa (o esas etapas) antes que las otras.

EJEMPLO 4 Conteo de números de tres dígitos con restricciones

¿Cuántos números naturales impares de tres dígitos sin repetir existen?

SOLUCIÓN

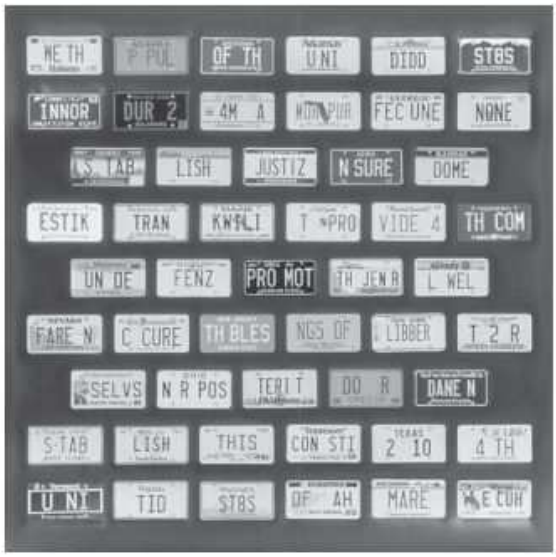
El dígito más restringido es el tercero, puesto que debe ser impar. Existen cinco opciones (1, 3, 5, 7 y 9). A continuación, considere el primer dígito. Puede ser cualquier dígito diferente de cero, con excepción del 1 que ya fue seleccionado en el tercer dígito. Existen ocho opciones. Finalmente, el segundo dígito puede ser cualquier dígito (incluyendo 0) con excepción de los dos dígitos (diferentes de cero) ya utilizados. Existen ocho opciones.

Etapa de la tarea	Seleccionar el tercer dígito		Seleccionar el primer dígito		Seleccionar el segundo dígito	
Número de posibilidades	5	·	8	·	8	= 320

Existen 320 números naturales impares de tres dígitos sin repetir. ■■■

EJEMPLO 5 Conteo de placas de circulación

En general, las placas de circulación de automóviles incluyen tres letras seguidas por tres dígitos. ¿Cuántas de estas placas son posibles?



SOLUCIÓN

La tarea básica consiste en diseñar una placa de circulación con tres letras seguidas por tres dígitos. Existen seis partes componentes de esta tarea. Como no hay restricciones en las letras o en los dígitos, el principio fundamental de conteo nos da

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^3 = 17{,}576{,}000 \text{ placas de circulación posibles.}$$

(En la práctica, algunas de estas secuencias posibles de letras se consideran indeseables y no se usan). ■■■

EJEMPLO 6 Generación de números con dígitos específicos



Respuesta a la pregunta de inicio del capítulo El narrador del Súper Bowl estuvo muy cerca de la respuesta exacta. Como cada moneda tiene una de dos posibilidades (cara o cruz), los 13 lanzamientos consecutivos ganados por la NFC fueron justamente

$2^{13} = 8192$ posibilidades.

Se va a construir un número de cuatro dígitos usando solo los dígitos 1, 2 y 3.

a) ¿Cuántos de estos números son posibles?

b) ¿Cuántos de estos números son impares y menores que 2000?

SOLUCIÓN

a) Para generar este número se deben elegir cuatro dígitos, en sucesión, a partir del conjunto de los tres dígitos indicados; la selección se realiza con remplazo (puesto que, al parecer, las repeticiones de dígitos se permiten). El número de posibilidades es

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$ Principio fundamental de conteo

b) El número es menor que 2000 solo si el primer dígito es 1 (justo una opción) y es impar solo si el cuarto dígito es 1 o 3 (dos opciones). El segundo dígito y el tercero no tienen restricciones (tres opciones para cada uno). La respuesta es

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18.$$

Como comprobación, ¿podría listar las 18 posibilidades? ■■■

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Dos de las estrategias para la solución de problemas en el **capítulo 1** fueron "Resuelva primero un problema similar más sencillo", y "Busque un patrón". De hecho, algunas veces un problema de conteo puede ser esencialmente el mismo, o al menos se ajusta al mismo patrón, que otro problema ya resuelto.

EJEMPLO 7 Distribución de palos de golf



Vern tiene cuatro palos de golf antiguos con cabeza de madera y desea regalarlos a sus tres hijos: Mark, Chris y Scott.

a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los palos de golf?

b) ¿Cuántas posibilidades existen si el palo conductor debe ser de Mark y el palo de madera número 3 debe ser para Chris o Scott?

SOLUCIÓN

a) La tarea consiste en distribuir cuatro palos de golf entre tres personas. Considere los palos uno tras otro y, por cada uno, pregúntese cuántos hijos podrían recibirlo. En efecto, se deben elegir cuatro hijos, uno tras otro, a partir de la lista Mark, Chris y Scott, eligiendo con remplazo. Compare esto con el **ejemplo 6*a)***, en el cual se seleccionaron cuatro dígitos, uno tras otro, a partir de los dígitos 1, 2 y 3, y donde se permitió el remplazo. En este caso, se están seleccionando hijos en lugar de dígitos, pero el patrón es igual y los números son los mismos. Nuevamente, la respuesta es

$$3^4 = 81.$$

b) Exactamente como en el **ejemplo 6*b)***, una etapa de la tarea está restringida ahora a una sola opción y otra etapa está restringida a dos opciones. Como en ese ejemplo, el número de posibilidades es

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18.$$ ■■■

EJEMPLO 8 Asientos para asistentes a un concierto

Trabaje nuevamente el **ejemplo 8** de la **sección 8.1**, usando esta vez el principio fundamental de conteo.

SOLUCIÓN

Recuerde que Arne, Bobbette, Chuck y Deirdre (A, B, C y D) se van a sentar en cuatro asientos adyacentes (digamos 1, 2, 3 y 4), de modo que A y B estén juntos. Un método para llevar a cabo esta tarea es tomar tres decisiones sucesivas como sigue.

1	2	3	4
X	X	_	_
_	X	X	_
_	_	X	X

Asientos disponibles para A y B

1. ¿Qué par de asientos deberían ocupar A y B? Existen *tres* opciones (1 y 2, 2 y 3, y 3 y 4, como se muestra en la figura del margen).
2. ¿Qué orden deberían tener A y B? Existen *dos* opciones (A a la izquierda de B, o B a la izquierda de A).
3. ¿Qué orden deberían tener C y D? Existen *dos* opciones (C a la izquierda de D, o D a la izquierda de C, no necesariamente uno junto del otro).

(¿Por qué no preguntamos qué asientos deberían ocupar C y D?) El principio fundamental de conteo indica ahora el número total de opciones:

$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$ Resultado igual al de la **sección 8.1**

Factoriales

Esta sección inició con un análisis de números de tres dígitos que no se repiten, usando los dígitos 1, 2 y 3. El número de posibilidades era

$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 6.$$ Principio fundamental de conteo

Ese producto también se puede entender como el número de total de *arreglos* distintos de los tres dígitos 1, 2 y 3.

De manera similar, el número de arreglos distintos de cuatro objetos, por ejemplo, A, B, C y D, es

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$ Principio fundamental de conteo

Como este tipo de producto ocurre con mucha frecuencia en las aplicaciones, le damos el nombre y el símbolo especiales que se mencionan a continuación. Para cualquier número natural n, el producto de *todos* los números naturales de n hacia abajo hasta llegar a 1 se llama ***n* factorial**, y se representa por ***n*!**

Breve tabla de factoriales Los valores factoriales crecen rápidamente. El valor de 100! es un número con 158 dígitos.

0! = 1
1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120
6! = 720
7! = 5040
8! = 40,320
9! = 362,880
10! = 3,628,800

Fórmula factorial

Para cualquier número natural n, la cantidad ***n* factorial** está determinada por la siguiente fórmula:

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1$$

Unos cuantos de los primeros valores factoriales se calculan con facilidad mediante una sencilla multiplicación, pero rápidamente se vuelven muy grandes. Se recomienda el uso de una calculadora en la mayoría de los casos.

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Algunas expresiones que implican factoriales se pueden calcular fácilmente sabiendo que, en general, $n! = n(n-1)!$, $n! = n(n-1)(n-2)!$, y así sucesivamente. Por ejemplo,

$$8! = 8 \cdot 7!, \qquad 12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!, \qquad \text{y así sucesivamente.}$$

Este patrón es especialmente útil en la evaluación de cocientes de factoriales, como

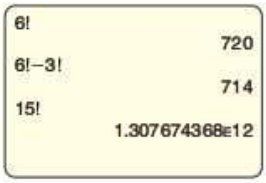
$$\frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90.$$

EJEMPLO 9 Evaluación de expresiones que contienen factoriales

Evalúe cada una de las siguientes expresiones.

a) $3!$ ***b)*** $6!$ ***c)*** $(6-3)!$ ***d)*** $6!-3!$

e) $\dfrac{6!}{3!}$ ***f)*** $\left(\dfrac{6}{3}\right)!$ ***g)*** $15!$ ***h)*** $100!$



Los resultados del **ejemplo 9*b)***, ***d)*** y ***g)*** se ilustran en esta pantalla de una calculadora.

SOLUCIÓN

a) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

b) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

c) $(6-3)! = 3! = 6$

d) $6! - 3! = 720 - 6 = 714$

e) $\dfrac{6!}{3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ Observe cómo se aplica la sugerencia para la solución de problemas.

f) $\left(\dfrac{6}{3}\right)! = 2! = 2 \cdot 1 = 2$

g) $15! = 1.307674368000 \times 10^{12}$ ← Se realizó con una calculadora

h) $100! = 9.332621544 \times 10^{157}$ ← Demasiado grande para la mayoría de las calculadoras

Observe la diferencia entre los incisos ***c)*** y ***d)*** y entre los incisos ***e)*** y ***f)***. ■■■

Con la finalidad de que los factoriales estén definidos para todos los números enteros no negativos, incluyendo el cero, se define 0! como sigue.



Aquí se ilustra la definición de $0! = 1$.

Definición de cero factorial

$$\mathbf{0! = 1}$$

(Más tarde veremos que esta definición especial facilita expresar otros resultados).

Arreglos de objetos

Cuando se calcula el número total de posibilidades para *arreglar* un número determinado de objetos distintos, se puede utilizar un factorial. El principio fundamental de conteo podría lograrlo, pero los factoriales ofrecen un atajo.

Arreglos de *n* objetos distintos

El número total de diferentes posibilidades para arreglar n objetos distintos es $\boldsymbol{n!}$

EJEMPLO 10 Arreglo de ensayos

Michelle Cook tiene siete ensayos para incluirlos en su carpeta de inglés 1A. ¿En cuántos órdenes diferentes los puede arreglar?

SOLUCIÓN

El número de posibilidades de arreglar siete objetos diferentes es $7! = 5040$. ■■■

EJEMPLO 11 Arreglo de niños en edad preescolar

Tricia Caruso lleva a 13 niños al parque. ¿De cuántas maneras se pueden formar los niños, en una fila, para abordar su transporte?

SOLUCIÓN

Trece niños se pueden formar de $13! = 6{,}227{,}020{,}800$ diferentes maneras. ■■■

N_1ON_2
N_2ON_1

N_1N_2O
N_2N_1O

ON_1N_2
ON_2N_1

Al contar arreglos que contienen objetos semejantes, la fórmula factorial normal se debe modificar para obtener el número de arreglos realmente diferentes. Por ejemplo, el número de arreglos distinguibles de las letras de la palabra NON no es $3! = 6$, sino $\frac{3!}{2!} = 3$. La lista del margen muestra cómo los seis arreglos totales consisten justamente en tres grupos de dos arreglos, donde los dos arreglos de un grupo determinado son similares.

Arreglos de *n* objetos que contienen algunos similares

El número de **arreglos distinguibles** de n objetos, donde uno o más subconjuntos están formados por objetos similares (digamos n_1 son de una clase, n_2 son de otra clase,..., y n_k son de otra clase), está dado por

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

EJEMPLO 12 Conteo de arreglos distinguibles

Determine el número de arreglos distinguibles de cada palabra.

a) ATTRACT ***b)*** NIGGLING

SOLUCIÓN

a) Para las letras de ATTRACT, el número de arreglos diferentes es

$$\begin{matrix}\text{7 letras en total} \longrightarrow \\ \text{3 tes, 2 aes} \longrightarrow\end{matrix} \frac{7!}{3!\,2!} = 420.$$

b) Para las letras de NIGGLING, el número de arreglos distinguibles es

$$\begin{matrix}\text{8 letras en total} \longrightarrow \\ \text{2 enes, 2 ies, 3 ges} \longrightarrow\end{matrix} \frac{8!}{2!\,2!\,3!} = 1680.$$ ■■■

Para reflexionar

Aproximación de Stirling para *n!*

Aun cuando todos los valores factoriales son números naturales, se pueden aproximar usando la **fórmula de Stirling**,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n},$$

la cual implica a dos famosos números irracionales, π y e. Por ejemplo, mientras que el valor exacto de 5! es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, la aproximación correspondiente es

$$5! \approx \sqrt{2\pi \cdot 5} \cdot 5^5 \cdot e^{-5} \approx 118.019168,$$

la cual difiere por menos de 2, un error de tan solo el 1.65%.

Para investigación individual o en grupo

Use una calculadora para introducir todos los valores de la tabla de la siguiente página. Los valores de la columna están definidos como sigue.

$C = n!$ (Valor exacto, por calculadora)
$S \approx n!$ (Aproximación de Stirling, por calculadora)
$D =$ Diferencia $(C - S)$
$P =$ Porcentaje de diferencia $\left(\frac{D}{C} \cdot 100\%\right)$

n	C	S	D	P
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Intente obtener el porcentaje de diferencia con dos decimales.
Con base en sus cálculos, conteste las siguientes preguntas.

1. En general, la aproximación de Stirling ¿es muy baja o muy alta?
2. Observe los valores de la tabla conforme n se hace más grande.
   - **a)** ¿Las diferencias (D) se hacen más grandes o más pequeñas?
   - **b)** ¿Las diferencias de porcentaje (P) se hacen más grandes o más pequeñas?
   - **c)** ¿La fórmula de Stirling se vuelve más o menos precisa?

8.2 EJERCICIOS

1. Con sus propias palabras, explique el principio fundamental de conteo.

2. Describa cómo se pueden usar factoriales en problemas de conteo.

En los ejercicios 3 a 6, n y m son números naturales. Realice lo siguiente: ***a)*** *diga si el enunciado proporcionado es verdadero en general, y* ***b)*** *explique su respuesta, usando ejemplos específicos.*

3. $(n + m)! = n! + m!$ **4.** $(n \cdot m)! = n! \cdot m!$

5. $(n - m)! = n! - m!$ **6.** $n! = n(n - 1)!$

Evalúe cada expresión sin usar una calculadora.

7. $4!$ **8.** $6!$ **9.** $\dfrac{9!}{7!}$

10. $\dfrac{16!}{14!}$ **11.** $\dfrac{5!}{(5-2)!}$ **12.** $\dfrac{6!}{(6-3)!}$

13. $\dfrac{8!}{6!(8-6)!}$ **14.** $\dfrac{10!}{4!(10-4)!}$

15. $\dfrac{n!}{(n-r)!}$, donde $n = 7$ y $r = 4$

16. $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, donde $n = 12$ y $r = 4$

Evalúe las siguientes expresiones usando una calculadora.

17. $10!$ **18.** $14!$ **19.** $\dfrac{12!}{5!}$

20. $\dfrac{13!}{(13-6)!}$ **21.** $\dfrac{20!}{10! \cdot 10!}$ **22.** $\dfrac{19!}{9! \cdot 10!}$

23. $\dfrac{n!}{(n-r)!}$, donde $n = 17$ y $r = 8$

24. $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, donde $n = 24$ y $r = 18$

Arreglos de letras *Determine el número de arreglos de letras diferentes de cada palabra.*

25. GOOGOL **26.** HEEBIE-JEEBIES

Configuraciones en un panel de interruptores *Se va a configurar un panel que contiene tres interruptores de apagado-encendido en fila.*

27. Suponiendo que no hay restricciones sobre los interruptores individuales, use el principio fundamental de conteo para obtener el número total de configuraciones posibles del panel.

28. Suponiendo que no hay restricciones, construya un diagrama de árbol para listar todas las configuraciones posibles del panel del **ejercicio 27**.

29. Ahora suponga que dos interruptores adyacentes no pueden estar apagados. Explique por qué no es posible aplicar el principio fundamental de conteo.

30. Construya un diagrama de árbol para listar todas las configuraciones posibles del panel de acuerdo con las restricciones del **ejercicio 29**.

31. ***Lanzamiento de dados*** La **tabla 2** de la sección anterior indica que existen 36 resultados posibles cuando se arrojan dos dados. ¿Cuántos resultados habría si se arrojaran tres dados?



32. ***Conteo de números de cinco dígitos*** ¿Cuántos números de cinco dígitos hay en nuestro sistema de conteo de números?

33. ***Bolos*** Después de que rueda la primera bola por una bolera en un juego de 10 pinos, ¿cuántas configuraciones diferentes de pinos quedan (suponiendo que todas las configuraciones son físicamente posibles)? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

34. ***Bolos*** Conteste la pregunta del **ejercicio 33** suponiendo que los pinos 1, 2 y 3 fueron derribados en el primer tiro.

Asociación de miembros de un club con tareas *Recuerde el club*

$$N = \{\text{Allan, Bill, Cathy, David, Evelyn}\}.$$

¿De cuántas maneras pueden realizar cada una de las siguientes actividades?

35. alinear a los cinco miembros para una fotografía

36. asignar el trabajo de oficina a un miembro del club cada día de la semana, suponiendo que los miembros pueden trabajar más de un día

37. elegir a un hombre y una mujer para encargarse de la decoración de un local para una fiesta

38. elegir a dos miembros, uno para inaugurar la reunión siguiente y otro para clausurarla, considerando que Bill no estará presente

Construcción de números con dígitos especificados *En los ejercicios 39 a 42, los números naturales se van a formar usando solo los dígitos 3, 4 y 5. Determine el número de posibilidades diferentes para cada tipo de número descrito.*

39. números de dos dígitos

40. números impares de tres dígitos

41. números de cuatro dígitos con un par de cuatros adyacentes y sin repetir los otros dígitos [*Sugerencia*: Tal vez usted desee separar la tarea de diseño de estos números en tres etapas, tales como (1) posición del par de cuatros, (2) posición del 3 y (3) posición del 5].

42. números de cinco dígitos que inician y terminan con 3, y con repeticiones ilimitadas permitidas

Selección de platillos de comida *El restaurante Gourmet de Coeur ofrece cinco opciones en la categoría de sopas y ensaladas (dos sopas y tres ensaladas), dos opciones en la categoría de pan y cuatro opciones en la categoría del platillo principal. Obtenga el número de platillos disponibles en cada caso.*

43. Se va a incluir un platillo de cada una de las tres categorías.

44. Solo se incluirán ensalada y plato principal.

Selección de las respuestas de un examen *Determine el número de maneras posibles para marcar su hoja de respuestas de cada examen (con una respuesta por cada pregunta).*

45. un examen con seis preguntas de verdadero-falso

46. un examen de 10 preguntas de opción múltiple con cinco opciones de respuesta por cada pregunta

Selección del horario de clase en la universidad *El horario de clases de Jessica Elbern para el siguiente semestre se debe formar exactamente con una clase de cada una de las cuatro categorías mostradas en la siguiente tabla.*

En cada situación de los ejercicios 47 a 52, use la tabla para determinar el número de conjuntos de clases diferentes que Jessica puede tomar.

Categoría	Opciones	Número de opciones
Economía	Mercado libre Mercado controlado	2
Matemáticas	Historia de las matemáticas Álgebra universitaria Matemáticas finitas	3
Educación	Tecnología en el salón de clases Dinámica de grupos Supervisión del lenguaje Relaciones padres/maestros	4
Sociología	Problemas sociales Sociología del Oriente Medio Envejecimiento en Estados Unidos Minorías en Estados Unidos Las mujeres en la cultura estadounidense	5

47. Todas las clases mostradas están disponibles.

48. Ella no puede inscribirse en Mercado libre ni en Dinámica de grupos.

49. Todos los grupos de Minorías en Estados Unidos y Las mujeres en la cultura estadounidense están llenos y ya no hay cupo.

50. Ella no cumple los prerrequisitos para Mercado controlado, Álgebra universitaria o Supervisión del lenguaje.

51. Se ha retirado el financiamiento para tres de los cursos de Educación y para dos cursos de Sociología.

52. Ella debe cursar Matemáticas finitas y Problemas sociales el siguiente semestre si quiere cumplir con los requerimientos para obtener el grado.

53. ***Selección de ropa*** Durante un viaje, Don Beville compró dos pares de zapatos, cuatro pares de pantalones y seis camisas. Si todas las prendas combinan, ¿cuántos conjuntos puede usar?

54. ***Selección de equipo de música*** Una tienda de equipo de música ofrece 10 tipos diferentes de guitarras, tres estuches de guitarras, seis amplificadores y cinco procesadores de efectos especiales; todos los equipos son compatibles y todos son adecuados para principiantes. ¿Cuántos conjuntos completos diferentes puede elegir Lionel para iniciar su carrera musical?

55. ***Conteo de códigos postales*** El código postal de Tonya es 85726. ¿Cuántos códigos postales se pueden formar con los mismos dígitos del código de Tonya?

56. ***Lista de números telefónicos*** John Cross tiene los números de teléfono de sus siete amigos más cercanos (tres hombres y cuatro mujeres), en la memoria de su teléfono digital. (Remítase al **ejemplo 8**). ¿De cuántas manera se pueden listar si

a) los hombres aparecen en la lista antes que las mujeres?

b) los hombres aparecen juntos en la lista?

c) no se debe listar un hombre al lado de otro?

57. ***Conteo de códigos de áreas telefónicas*** Hasta 1995, las reglas para formar códigos de área de tres dígitos en Estados Unidos eran como sigue:

- El primer dígito no debía ser 0 o 1.
- El segundo dígito tenía que ser 0 o 1.
- El tercer dígito no tenía estas restricciones.

En 1955 se eliminó la restricción sobre el segundo dígito de los códigos de área. Actualmente, ¿cuántos códigos de área son posibles? (Problema del calendario de *Matemathics Teacher*).

Arreglos de asientos en un teatro *En los ejercicios 58 a 61, Arne, Bobbette, Chuck, Deirdre, Ed y Fran reservaron seis asientos en fila en un teatro, iniciando con el asiento al lado de un pasillo. (Remítase al* ***ejemplo 8****).*

58. ¿De cuántas maneras se pueden sentar? (*Sugerencia*: Divida la tarea en las series de seis etapas indicadas a continuación, y realícelas en orden).

a) Si *A* se sienta primero, ¿cuántos asientos están disponibles para él?

b) Ahora, ¿cuántos asientos están disponibles para *B*?

c) Ahora, ¿cuántos asientos están disponibles para *C*?

d) Ahora, ¿cuántos asientos están disponibles para *D*?

e) Ahora, ¿cuántos asientos están disponibles para *E*?

f) Ahora, ¿cuántos asientos están disponibles para *F*?

Ahora multiplique las seis respuestas anteriores.

59. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar los asientos de modo que Arne y Bobbette estén uno al lado del otro?

1	2	3	4	5	6
X	X	_	_	_	_
_	X	X	_	_	_
_	_	X	X	_	_
_	_	_	X	X	_
_	_	_	_	X	X



Asientos disponibles para *A* y *B*

(*Sugerencia*: Conteste las siguientes preguntas en orden).

a) ¿Cuántos pares de asientos adyacentes pueden ocupar *A* y *B*?

b) Ahora, dados los dos asientos para *A* y *B*, ¿en qué secuencias se pueden sentar?

c) Ahora, ¿cuántos asientos están disponibles para *C*?

d) Ahora, ¿cuántos para *D*?

e) Ahora, ¿cuántos para *E*?

f) Ahora, ¿cuántos para *F*?

Ahora multiplique sus seis respuestas anteriores.

60. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar considerando que hombres y mujeres deben alternar asientos, y que un hombre debe sentarse al lado del pasillo? (*Sugerencia*: Conteste en orden las siguientes preguntas).

a) ¿Cuántas opciones existen para la persona que ocupará el primer asiento, al lado del pasillo? (Debe ser un hombre).

b) Ahora, ¿cuántas opciones de personas pueden ocupar el segundo asiento a partir del pasillo? (Debe ser una mujer).

c) Ahora, ¿cuántas opciones existen para el tercer asiento? (Uno de los hombres restantes).

d) Ahora, ¿cuántas opciones hay para el cuarto asiento? (Una mujer).

e) Ahora, ¿cuántas opciones hay para el quinto asiento? (Un hombre).

f) Ahora, ¿cuántas opciones hay para el sexto asiento? (Una mujer).

Ahora multiplique las seis respuestas anteriores.

61. ¿Cuántos arreglos posibles habrá, si hombres y mujeres se deben alternar, ya sea con un hombre o una mujer al lado del pasillo? (*Sugerencia*: Conteste las siguientes preguntas).

a) ¿Cuántas opciones de personas hay para el asiento del pasillo?

b) Ahora, ¿cuántas opciones hay para el segundo asiento? (Esta persona puede no ser del mismo sexo que la persona del pasillo).

c) Ahora, ¿cuántas opciones existen para el tercer asiento?

d) Ahora, ¿cuántas opciones hay para el cuarto asiento?

e) Ahora, ¿cuántas opciones hay para el quinto asiento?

f) Ahora, ¿cuántas opciones hay para el sexto asiento?

Ahora multiplique las seis respuestas anteriores.

62. Intente trabajar el **ejemplo 4** considerando el orden tradicional de los dígitos, esto es: primero, segundo y tercero. Explique qué es incorrecto.

63. Intente trabajar el **ejemplo 4** considerando el siguiente orden de los dígitos: tercero, segundo, primero. Explique qué es incorrecto.

64. Repita el **ejemplo 4**, pero esta vez se permiten dígitos repetidos. ¿En este caso importa el orden en que se consideran los dígitos?

65. Si todos los números de seis dígitos que se forman usando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, sin repeticiones, se listan del más pequeño al más grande, ¿qué número será el quingentésimo de la lista (es decir, el que ocupa la posición número 500)? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

66. El número $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^3$ es divisible entre muchos cuadrados perfectos. ¿Cuántos? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

67. ¿Cuántos de los anagramas (arreglos de letras) de INDIANA son palíndromos, es decir, arreglos que se leen igual hacia delante y hacia atrás? (*Sugerencia*: Considere que un ejemplo de palíndromo es INADANI). (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

68. ¿Cuántos arreglos distinguibles de las letras de la palabra CONTEST inician con las dos vocales? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

8.3 USO DE PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Permutaciones • Combinaciones • Criterios sobre cuál método usar

Permutaciones

Nuevamente recuerde el club

$$N = \{\text{Alan, Bill, Cathy, David, Evelyn}\} = \{A, B, C, D, E\},$$

y considere dos preguntas:

1. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar todos los miembros del club en una fila para tomarse una fotografía?
2. ¿De cuántas maneras puede elegir el club a un presidente, un secretario y un tesorero, si nadie puede ocupar más de un cargo?

Considerando la **sección 8.2** la respuesta a la primera pregunta es

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120,$$

el número de arreglos posibles de 5 objetos distintos. Anteriormente se contestaron preguntas como la segunda usando un diagrama de árbol, o bien, el principio fundamental de conteo. La respuesta es

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Una buena manera de plantear la segunda pregunta es:

¿Cuántos arreglos de cinco elementos existirán si se forman grupos de tres?

Los factores inician con 5 y se procede hacia abajo, exactamente como en el producto factorial, pero sin recorrer el camino hasta 1. (En este ejemplo, el producto se detiene donde todavía existen tres factores).

En el contexto de problemas de conteo, los arreglos se conocen como **permutaciones**. El número de permutaciones de n objetos distintos, tomados en grupos de r a la vez, se denota por ${}_nP_r$.* Como el número de objetos que se arreglará no puede exceder el número total de objetos disponibles, se supone que $r \leq n$. Aplicando el principio fundamental de conteo obtenemos

$$\boldsymbol{{}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)].}$$

El primer factor es $n - 0$, el segundo es $n - 1$, el tercero es $n - 2$, y así sucesivamente. El r-ésimo factor, el último del producto, será el que resulte de restar $r - 1$ de n, como se muestra arriba. Las permutaciones se pueden expresar, en general, en términos de factoriales, para obtener una fórmula como sigue.

$$\begin{aligned}
{}_nP_r &= n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)] \\
&= n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) && \text{Se simplifica el último factor.} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 2 \cdot 1} && \text{Se multiplica y se divide entre } (n-r)(n-r-1)\ldots 2 \cdot 1. \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} && \text{Definición de factorial}
\end{aligned}$$

*Notaciones alternativas son $P(n, r)$ y P_r^n.

Fórmula factorial de permutaciones

El número de **permutaciones**, o *arreglos*, de n objetos distintos tomados en grupos de r a la vez, donde $r \leq n$, se calcula como sigue.

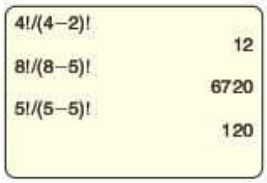
$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Aun cuando algunas veces nos referimos a un símbolo tal como $_4P_2$ como "una permutación" (véase los **ejemplos 1 y 2**), el símbolo en realidad representa "el número de permutaciones de 4 objetos distintos tomados de 2 en 2" (o "el número de arreglos de tamaño 2 que se pueden seleccionar a partir de 4 objetos distintos").

EJEMPLO 1 Uso de la fórmula factorial para permutaciones

Evalúe las siguientes permutaciones.

a) $_4P_2$ ***b)*** $_8P_5$ ***c)*** $_5P_5$



Esta pantalla usa los factoriales para apoyar los resultados del **ejemplo 1.**

SOLUCIÓN

a) $_4P_2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{24}{2} = 12$

b) $_8P_5 = \dfrac{8!}{(8-5)!} = \dfrac{8!}{3!} = \dfrac{40{,}320}{6} = 6720$

c) $_5P_5 = \dfrac{5!}{(5-5)!} = \dfrac{5!}{0!} = \dfrac{120}{1} = 120$ ■■■

Observe que $_5P_5$ es igual a 5!. Lo siguiente es verdadero para todos los números enteros no negativos n.

$$_nP_n = n!$$

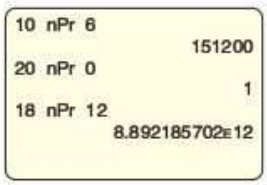
(Este es el número de arreglos de n objetos distintos tomados en grupos de n a la vez).

La mayoría de las calculadoras graficadoras y científicas permiten el cálculo directo de permutaciones; en tal caso, no es necesaria la fórmula factorial.

EJEMPLO 2 Cálculo directo de permutaciones

Evalúe las siguientes permutaciones.

a) $_{10}P_6$ ***b)*** $_{28}P_0$ ***c)*** $_{18}P_{12}$



Esta pantalla usa el modo de permutaciones para apoyar los resultados del **ejemplo 2.**

SOLUCIÓN

a) $_{10}P_6 = 151{,}200$ ***b)*** $_{28}P_0 = 1$ ***c)*** $_{18}P_{12}$ 8,892,185,702,400

En relación con el inciso ***c)***, muchas calculadoras no despliegan tantos dígitos, de modo que usted podría obtener una respuesta tal como 8.8921857×10^{12}. ■■■

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Las permutaciones se pueden usar cuando se necesite conocer el número de arreglos de r objetos que se pueden elegir a partir de una colección de n objetos. La palabra *arreglo* implica un orden, de modo que usamos permutaciones solo en los casos en que

1. no se permiten repeticiones, y **2. el orden es importante.**



Cambio de tonos, el método inglés para tañer las campanas de una iglesia, combina las matemáticas y la música. Las campanas suenan primero en secuencia, 1, 2, 3,.... Luego, la secuencia se permuta ("cambia"). Con seis campanas, se pueden realizar 720 "cambios" (diferentes permutaciones del tono): ${}_6P_6 = 6!$.

Las campanas de la iglesia se balancean por medio de cuerdas atadas a las ruedas ubicadas a un lado. Un campanero balancea cada campana, oyendo atentamente y observando con cuidado a los otros campaneros. Si un campanero se equivoca y permanece en el error, no es posible mantener el ritmo del tono, y todos los campaneros tendrán que detenerse.

Un campanero tendrá que dedicar varias semanas a aprender cómo mantener una campana funcionando, y transcurrirán varios meses antes de que aprenda cómo lograr que la campana suene en el momento exacto. Errores de $\frac{1}{4}$ de segundo implican que dos campanas suenen al mismo tiempo. Incluso es posible detectar errores de una décima de segundo.

EJEMPLO 3 Construcción de números a partir de un conjunto de dígitos

¿Cuántos números de tres dígitos no repetitivos se pueden escribir usando solo los dígitos 3, 4, 5, 6, 7 y 8?

SOLUCIÓN

No se permiten las repeticiones, ya que los números van a ser "no repetitivos". (Por ejemplo, 448 no es aceptable). Además, el orden es importante. (Por ejemplo, 476 y 746 son casos distintos). Entonces se usan las permutaciones.

$${}_6P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$ ■■■

EJEMPLO 4 Diseño de números de cuenta

Suponga que ciertos números de cuenta están formados por dos letras seguidas por cuatro dígitos y luego tres letras más; las repeticiones de letras o dígitos no están permitidas *dentro* de cualquiera de los tres grupos, pero el último grupo de letras puede contener una o ambas de las usadas en el primer grupo. ¿Cuántas de estas cuentas son posibles?

SOLUCIÓN

La tarea de diseño de un número como el descrito consta de tres etapas:

1. Determinar el primer conjunto de dos letras.
2. Determinar el conjunto de cuatro dígitos.
3. Determinar el conjunto final de tres letras.

Cada etapa requiere un arreglo sin repeticiones, lo cual es una permutación. Se multiplican los resultados de las tres etapas.

$$\begin{aligned} {}_{26}P_2 \cdot {}_{10}P_4 \cdot {}_{26}P_3 &= \underbrace{650}_{\text{Etapa 1}} \cdot \underbrace{5040}_{\text{Etapa 2}} \cdot \underbrace{15{,}600}_{\text{Etapa 3}} \\ &= 51{,}105{,}600{,}000 \end{aligned}$$ ■■■

Combinaciones

Introdujimos las permutaciones para evaluar el número de arreglos de n objetos tomados en grupos de r a la vez, donde no se permiten las repeticiones. El orden de los elementos era importante. Recuerde que el club

$$N = \{\text{Alan, Bill, Cathy, David, Evelyn}\}$$

podía elegir a tres funcionarios de ${}_5P_3 = 60$ maneras diferentes. Por otro lado, con las comisiones de tres miembros, el orden no es importante. Las comisiones B, D, E y E, B, D no son diferentes. El número posible de comisiones no es el número de arreglos de tamaño 3, sino que es el número de *subconjuntos* de tamaño 3.

Recuerde que en el estudio de conjuntos (**capítulo 2**), un **conjunto** es una colección o un grupo de objetos, designados comúnmente con una lista dentro de llaves, como lo hemos hecho al designar el club

$$N = \{A, B, C, D, E\}.$$

El orden de la lista de los miembros (de cualquier conjunto) no es importante. Por ejemplo, $\{D, B, A, E, C\}$ es el mismo club. El **subconjunto** de un conjunto es una colección de algunos miembros. Puede incluir a todos los miembros del conjunto original, o incluso a ninguno de ellos, o bien, puede tratarse de cualquier posibilidad intermedia. Nuevamente, el orden en que se listan los miembros carece de importancia.

En el estudio de métodos de conteo, los subconjuntos se conocen como **combinaciones**. El número de combinaciones de n objetos tomados en grupos de r a la vez (es decir, el número de subconjuntos de tamaño r, a partir de un conjunto de tamaño n) se escribe como ${}_nC_r$.*

Como existen n objetos disponibles y estamos seleccionando r de ellos, ${}_nC_r$ se lee como "r seleccionados de n".

Los comités (subconjuntos) de tamaño 3 del club (conjunto) $N = \{A, B, C, D, E\}$ son:

$$\{A, B, C\}, \quad \{A, B, D\}, \quad \{A, B, E\}, \quad \{A, C, D\}, \quad \{A, C, E\},$$
$$\{A, D, E\}, \quad \{B, C, D\}, \quad \{B, C, E\}, \quad \{B, D, E\}, \quad \{C, D, E\}.$$

Existen 10 subconjuntos de tamaño 3, de manera que 10 es el número de comisiones posibles de tres miembros. Igual que en las permutaciones, no se permiten las repeticiones. Por ejemplo, $\{E, E, B\}$ no es un subconjunto válido de tres miembros, por lo que EEB no es un arreglo válido de tres miembros.

Para ver cómo se obtiene el número de estos subconjuntos sin listarlos a todos, observe que cada subconjunto de tamaño 3 (combinación) da origen a seis arreglos (permutaciones) de tamaño 3. Por ejemplo, con la combinación ADE se obtienen estas seis permutaciones.

$$A, D, E \quad A, E, D \quad D, A, E \quad D, E, A \quad E, A, D \quad E, D, A.$$

Así, debe haber seis veces más permutaciones de tamaño 3 que combinaciones de tamaño 3, o en otras palabras, tantas combinaciones como un sexto de permutaciones.

$${}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

Nuevamente, aparece un 6 en el denominador porque existen 6 maneras diferentes de arreglar un conjunto de tres objetos (ya que $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$). Generalizando a partir de este ejemplo, obtenemos una fórmula para determinar el número de combinaciones.

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \qquad r \text{ objetos se pueden arreglar de } r! \text{ maneras.}$$
$$= \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!} \qquad \text{Se sustituye } {}_nP_r \text{ por la fórmula factorial.}$$
$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \text{Se simplifica algebraicamente.}$$



El **"cifrado bilateral"** (arriba) fue inventado por **Francis Bacon** a principios del siglo XVII para codificar secretos políticos. Este código binario, usando *a* y *b*, en combinaciones de cinco en cinco, tiene 32 permutaciones. El "alfabeto binario" de Bacon (en las cuatro filas de abajo) usa dos tipos de letras para ocultar un mensaje de texto. El decodificador descifra un conjunto de "aes" y "bes" agrupadas de cinco en cinco; luego, descifra letras y palabras. Este código se aplicó a las obras de Shakespeare para probar que Bacon fue el autor legítimo.

Fórmula factorial de combinaciones

El número de **combinaciones**, o subconjuntos, de n objetos distintos tomados en grupos de r a la vez, donde $r \le n$, se calcula como sigue.

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

En los **ejemplos 5 y 6**, nos referimos a ${}_nC_r$ como una "combinación", aun cuando en realidad representa "el número de combinaciones de n objetos distintos tomados en grupos de r a la vez" (o "el número de subconjuntos de tamaño r que se pueden seleccionar de un conjunto de n objetos").

*Notaciones alternativas son $C(n, r)$, C_r^n y $\binom{n}{r}$.

EJEMPLO 5 Uso de la fórmula factorial para combinaciones

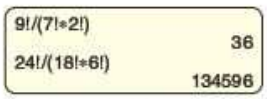
Evalúe las siguientes combinaciones.

a) ${}_9C_7$ *b)* ${}_{24}C_{18}$

SOLUCIÓN

a) $${}_9C_7 = \frac{9!}{7!(9-7)!} = \frac{9!}{7!2!} = \frac{362{,}880}{5040 \cdot 2} = 36$$

b) $${}_{24}C_{18} = \frac{24!}{18!(24-18)!} = \frac{24!}{18!6!} = 134{,}596$$



Esta pantalla usa factoriales para apoyar los resultados del **ejemplo 5.**

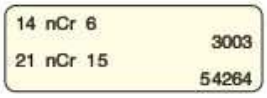
EJEMPLO 6 Cálculo directo de combinaciones

Evalúe las siguientes combinaciones.

a) ${}_{14}C_6$ *b)* ${}_{21}C_{15}$

SOLUCIÓN

a) ${}_{14}C_6 = 3003$ *b)* ${}_{21}C_{15} = 54{,}264$ Use una calculadora en cada caso.



Esta pantalla usa la opción de combinaciones para apoyar los resultados del **ejemplo 6.**

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Las combinaciones tienen una propiedad común con las permutaciones (las repeticiones no se permiten), pero también una diferencia importante (en las combinaciones, el orden *no* es importante). Las combinaciones se aplican solo cuando

1. no se permiten repeticiones y **2. el orden *no* es importante.**

EJEMPLO 7 Determinación del número de subconjuntos

Calcule el número de subconjuntos diferentes de tamaño 2 en el conjunto $\{a, b, c, d\}$. Lístelos para comprobar la respuesta.

SOLUCIÓN

Un subconjunto de tamaño 2 tiene dos elementos diferentes, de modo que no se permiten repeticiones. Y como el orden en el cual se listan los conjuntos de elementos no hace diferencia, el orden no es importante. Use la fórmula de combinaciones con $n = 4$ y $r = 2$.

$${}_4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Los seis subconjuntos de tamaño 2 son $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$.

EJEMPLO 8 Cálculo del número posible de manos de póquer

Una modalidad común del póquer implica "manos" (conjuntos) de cinco naipes cada una, repartidas de un mazo normal integrado por 52 naipes diferentes. ¿Cuántas manos diferentes de 5 cartas son posibles?

SOLUCIÓN

Una mano de cinco naipes contiene cinco naipes distintos, de modo que no se permiten repeticiones. Tampoco es importante el orden, puesto que una mano determinada depende solo de los naipes que contiene, y no del orden en el cual se repartieron o el orden en el cual se despliegan o se juegan.



El conjunto de 52 naipes del mazo normal tiene cuatro "palos":

♠ espadas ♦ diamantes
♥ corazones ♣ tréboles

El "as" es el uno. Las sotas, reinas y reyes son "naipes con figuras". Cada palo tiene trece denominaciones: as, 2, 3,. . ., 10, sota, reina, rey. (En algunos juegos, el as vale más que el rey, en lugar de considerarse como 1).

Como el orden no importa, se usan combinaciones (y una calculadora).

$$_{52}C_5 = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52!}{5!\,47!} = 2{,}598{,}960$$

EJEMPLO 9 Determinación del número de subconjuntos de pinturas

A Keri Beers le gustaría comprar 10 pinturas diferentes, pero solo le alcanza para cuatro. ¿De cuántas maneras puede hacer su selección?

SOLUCIÓN

Las cuatro pinturas seleccionadas deben ser distintas (no se permiten las repeticiones), y el orden de las cuatro selecciones no tiene relevancia en este caso, de modo que se usan combinaciones.

$$_{10}C_4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210 \text{ maneras}$$

Observe que, de acuerdo con la fórmula de combinaciones,

$$_{10}C_6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10!}{6!\,4!} = 210,$$

lo cual es lo mismo que $_{10}C_4$. De hecho, en el **ejercicio 62** se pide probar el siguiente hecho, en general, para todos los números enteros no negativos n y r, con $r \le n$.

$$_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

Criterios sobre cuál método usar

La siguiente tabla resume las similitudes y diferencias entre las permutaciones y las combinaciones, así como las fórmulas adecuadas para el cálculo de sus valores.

Permutaciones	Combinaciones
Número de maneras para seleccionar r objetos de n objetos	
No se permiten repeticiones.	
El orden es importante.	El orden no es importante.
Arreglos de n objetos tomados en grupos de r a la vez	Subconjuntos de n objetos tomados en grupos de r a la vez
$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
Palabras clave: arreglo, programa, orden	Palabras clave: conjunto, grupo, muestra, selección

En casos donde se van a seleccionar r objetos a partir de n objetos y se permiten las repeticiones, normalmente es mejor aplicar directamente el principio fundamental de conteo.

La mayoría de los ejercicios de esta sección, si no es que todos, solicitarán permutaciones y/o combinaciones. Y en el caso de tareas con etapas múltiples, también puede requerirse el principio fundamental de conteo. ***En todos los casos, identifique cuidadosamente si el orden es importante, ya que esto determina si se usan permutaciones o combinaciones.***

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Muchos problemas de conteo implican la selección de algunos objetos a partir de un conjunto determinado de objetos. Las condiciones particulares del problema determinarán la técnica específica que se debe emplear.

1. **Si los objetos seleccionados se pueden repetir, se usa el principio fundamental de conteo.**
   Ejemplo: ¿Cuántos números de cuatro dígitos existen?
   $$9 \cdot 10^3 = 9000$$
2. **Si los objetos seleccionados no se pueden repetir, y el orden es importante, se usan permutaciones.**
   Ejemplo: ¿De cuántas maneras pueden formarse tres de ocho personas en una fila para comprar boletos?
   $$_8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$
3. **Si los objetos seleccionados no se pueden repetir, y el orden *no* es importante, se usan combinaciones.**
   Ejemplo: ¿De cuántas maneras puede seleccionarse una comisión de tres personas a partir de un grupo de 12 personas?
   $$_{12}C_3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = 220$$

EJEMPLO 10 Distribución de juguetes a niños



¿De cuántas maneras puede una madre distribuir tres juguetes diferentes entre sus siete hijos, si un niño puede recibir desde cero hasta los tres juguetes?

SOLUCIÓN

Como un niño puede ser un receptor repetido, en este caso se permiten las repeticiones, de modo que se usa el principio fundamental de conteo. Cada uno de los tres juguetes puede destinarse a cualquiera de los siete niños. El número de distribuciones posibles es $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$. ■■■

EJEMPLO 11 Selección de comisiones

¿Cuántas comisiones diferentes de tres miembros puede elegir el club N, de modo que haya exactamente una mujer en la comisión?

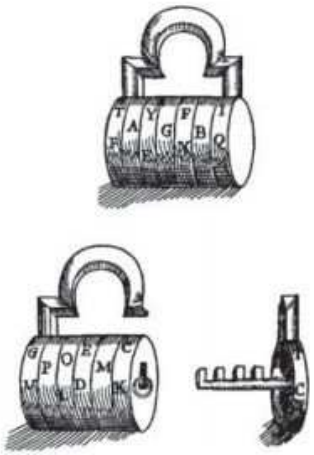
SOLUCIÓN

Recuerde que $N = \{\text{Alan, Bill, Cathy, David, Evelyn}\}$. Dos miembros son mujeres; tres son hombres. Si bien la pregunta solo menciona que exactamente una mujer debe estar en la comisión, para completar la comisión se debe seleccionar a dos hombres también. La tarea de selección de los miembros de la comisión consta de dos etapas:

1. Elegir a una mujer. **2.** Elegir a dos hombres.

Como el orden no es importante en las comisiones, se usan combinaciones en las dos etapas. Una mujer se puede elegir de $_2C_1 = \frac{2!}{1!\,1!} = 2$ maneras, y dos hombres se pueden elegir de $_3C_2 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$ maneras. Finalmente, se usa el principio fundamental de conteo para obtener $2 \cdot 3 = 6$ comisiones diferentes. Este número pequeño se puede comprobar con una lista.

$$\{C, A, B\},\ \{C, A, D\},\ \{C, B, D\},\ \{E, A, B\},\ \{E, A, D\},\ \{E, B, D\}$$ ■■■



La ilustración corresponde al texto ***Logística,*** de la década de 1560, del matemático J. Buteo. Entre otros temas, el libro analiza el número de lanzamientos posibles de cuatro dados y el número de arreglos de los cilindros de un candado de combinación. Observe que "combinación" es un nombre engañoso para estos candados, ya que se permiten las repeticiones, y además, el orden hace una diferencia.

EJEMPLO 12 Selección de asistentes a un evento

A todos los miembros de la fraternidad Alfa Beta Gama les gustaría asistir a un evento especial este fin de semana, pero solo se permitirá la asistencia de 10 miembros. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar a los 10 afortunados si existe un total de 48 miembros?

SOLUCIÓN

En este caso se requieren 10 hombres distintos (no se permiten las repeticiones), y el orden de selección no hace diferencia, de modo que se usan combinaciones.

$$_{48}C_{10} = \frac{48!}{10!\,38!} = 6{,}540{,}715{,}896$$ Use una calculadora. ■■■

EJEMPLO 13 Selección de escoltas

Cuando los 10 hombres de la fraternidad del **ejemplo 12** llegaron al evento especial, cuatro de ellos fueron seleccionados para escoltar a las cuatro candidatas a reinas de la recepción. ¿De cuántas maneras se puede hacer esta selección?

SOLUCIÓN

De los 10, se requieren cuatro hombres distintos, y en este caso el orden es importante porque diferentes órdenes aparejarían a los hombres con distintas mujeres. Se usan permutaciones.

$$_{10}P_4 = \frac{10!}{6!} = 5040 \text{ selecciones posibles}$$ ■■■

EJEMPLO 14 División en grupos

¿De cuántas maneras los 9 miembros de una alineación de béisbol se pueden dividir en grupos de 4, 3 y 2 jugadores?

SOLUCIÓN

El orden no es importante dentro de los grupos. Los jugadores dentro de un grupo se pueden intercambiar de su orden de lista. Se usan combinaciones.

Primero, se pueden elegir 4 de 9 de $_9C_4 = 126$ maneras.

Luego, se pueden elegir 3 de los 5 restantes de $_5C_3 = 10$ maneras.

Luego, se pueden elegir 2 de los 2 restantes de $_2C_2 = 1$ manera.

Los tres grupos no son intercambiables. Todos ellos tienen diferentes tamaños. Se aplica el principio fundamental de conteo.

$$_9C_4 \cdot {}_5C_3 \cdot {}_2C_2 = 126 \cdot 10 \cdot 1 = 1260.$$ ■■■

EJEMPLO 15 División en grupos

¿De cuántas maneras se pueden dividir los 9 jugadores del **ejemplo 14** en tres grupos de 3?

SOLUCIÓN

Después del patrón del **ejemplo 14**, la respuesta *parece* ser

$$_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 = 84 \cdot 20 \cdot 1 = 1680.$$

Sin embargo, esto impondría un *orden indeseable*, no dentro de los grupos, pero sí *entre* los grupos. El orden de las selecciones de los tres grupos fue adecuado en el **ejemplo 14**, porque esos tres grupos eran distinguibles. Todos eran de diferentes tamaños. Pero en este caso, todos los grupos son de tamaño 3.

Si los jugadores se representan como A, B, C, D, E, F, G, H e I, entonces la lista

1) *BIG, HEF, CAD* **2)** *BIG, CAD, HEF* **3)** *HEF, BIG, CAD*
4) *HEF, CAD, BIG* **5)** *CAD, BIG, HEF* **6)** *CAD, HEF, BIG*

contiene seis ordenamientos de los mismos tres grupos. Como el producto calculado de esta manera, a partir del principio fundamental de conteo, duplicó cada conjunto de tres grupos, se debe ajustar el valor dividiendo entre $3! = 6$ para obtener el número verdadero de conjuntos *desordenados* de tres grupos. La idea es la misma que cuando se ajusta el número de arreglos (ordenamientos) de n objetos tomados en grupos de r a la vez, para obtener el número de conjuntos desordenados de n objetos tomados en grupos de r a la vez de acuerdo con la fórmula

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}. $$

El número de maneras en que se puede distribuir a 9 jugadores en tres grupos de 3 es

$$ \frac{{}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{3!} = \frac{1680}{6} = 280. $$

Para reflexionar

Manos de póquer

En el póquer de 5 cartas, jugado con un mazo normal de 52 naipes, existen 2,598,960 manos diferentes posibles. (Véase el **ejemplo 8**). El atractivo de las manos depende de la probabilidad relativa de su ocurrencia, la cual, a la vez, depende del número de diferentes maneras en que se pueden presentar, como se muestra en la **tabla 4**. Observe que un as se puede colocar generalmente debajo del 2 (como 1), o arriba del rey (como 14). Esto es importante en el conteo de las manos de escaleras (normal y de color).

Tabla 4 **Categorías de manos en el póquer de 5 naipes**

Evento E	Descripción del evento E	Número de resultados favorables a E
Escalera real de color	As, rey, reina, sota y 10 naipes, todos del mismo palo	4
Escalera de color	5 naipes de denominaciones consecutivas, todos del mismo palo (excluyendo la escalera real de color)	36
Póquer	Cuatro cartas de la misma denominación, más una carta adicional	_____
Full	3 cartas de una denominación, más dos de una segunda denominación	3744
Color	5 cartas cualesquiera, todas del mismo palo (excluyendo la escalera real de color y la escalera de color)	_____
Escalera	5 cartas de denominaciones consecutivas (no todas del mismo palo)	10,200
Tercia	3 cartas de una denominación, más 2 cartas con 2 denominaciones adicionales	54,912
Dos pares	2 cartas de una denominación, más 2 cartas de una segunda denominación, más una carta de una tercera denominación	_____
Un par	2 cartas de una denominación, más 3 cartas de tres diferentes denominaciones	1,098,240
Carta alta	No hay cartas de la misma denominación (y se excluyen las manos de color o escalera)	1,302,540
Total		**2,598,960**

Para investigación individual o en grupo

Como muestra la tabla, un full es una ocurrencia relativamente poco común. (Solo el póquer, la escalera de color y la escalera real de color son menos probables). Para comprobar que existen 3744 manos posibles diferentes de full, siga estos pasos.

1. Explique por qué hay ${}_4C_3$ diferentes maneras de seleccionar tres ases del mazo.
2. Explique por qué hay ${}_4C_2$ diferentes maneras de seleccionar dos ochos del mazo.
3. Si "los ases y ochos" (tres ases y dos ochos) forman un tipo de full, demuestre que hay ${}_{13}P_2$ diferentes clases de full.
4. Multiplique las expresiones de los pasos 1, 2 y 3. Explique por qué este producto da el número total de manos de full posibles.
5. Obtenga los tres valores que faltan en la columna derecha de la **tabla 4**. (Las respuestas se encuentran en la **página 463**).
6. Compruebe el total de la columna derecha mostrado en la **tabla 4.**

8.3 EJERCICIOS

Evalúe las siguientes expresiones.

1. ${}_9P_3$ **2.** ${}_{12}P_5$

3. ${}_{11}C_7$ **4.** ${}_{14}C_6$

Determine el número de permutaciones (arreglos) de cada una de las siguientes situaciones.

5. 20 objetos tomados en grupos de 4 a la vez

6. 15 objetos tomados en grupos de 5 a la vez

Determine el número de combinaciones (subconjuntos) de cada una de las siguientes situaciones.

7. 9 objetos tomados en grupos de 4 a la vez

8. 13 objetos tomados en grupos de 6 a la vez

Use una calculadora para evaluar las siguientes expresiones.

9. ${}_{22}P_9$ **10.** ${}_{32}C_{12}$

11. ¿Es posible evaluar ${}_8P_{10}$? Explique.

12. ¿Es posible evaluar ${}_9C_{14}$? Explique.

13. Explique la diferencia entre permutaciones y combinaciones.

14. Explique cómo se relacionan los factoriales con las permutaciones.

15. ***¿Permutaciones o combinaciones?*** Identifique si cada objeto es una permutación o una combinación.

a) un número telefónico
b) un número de seguridad social
c) una mano de naipes de póquer
d) una comisión de políticos
e) la "combinación" del candado del casillero del gimnasio de un estudiante
f) la elección de un número de 6 dígitos de la lotería donde no importa el orden
g) el número de la placa de un automóvil
h) una contraseña de Internet

Los ejercicios 16 a 23 se pueden resolver con permutaciones, aun cuando los enunciados del problema no siempre incluyen una forma de la palabra "permutación" o "arreglo" u "orden".

16. ***Posición en una carrera*** ¿De cuántas diferentes maneras pueden presentarse los lugares primero, segundo y tercero en una carrera de seis competidores?

17. ***Arreglos de modelos nuevos de casas*** Tyler Aunan, un contratista, construye casas de ocho modelos diferentes y actualmente tiene cinco lotes para construir. ¿De cuántas diferentes maneras puede arreglar las casas en estos lotes? Suponga que se construyen cinco modelos diferentes.



18. ***Números de identificación personal en cajeros automáticos*** Un cajero automático requiere un número de identificación personal (NIP) de cuatro dígitos, usando los dígitos del 0 al 9. (El primer dígito puede ser cero). ¿Cuántos de estos NIP no tienen dígitos repetidos?

19. ***Elección de funcionarios de un club*** ¿De cuántas maneras se puede elegir al presidente y al vicepresidente de un club integrado por 12 miembros?

20. ***Conteo de ganadores de premios*** Los premios primero, segundo y tercero se van a otorgar a tres personas diferentes. Si existen 10 candidatos elegibles, ¿cuántos resultados son posibles?

21. ***Conteo de ganadores de premios*** ¿Cuántas maneras tiene un maestro para otorgar cinco diferentes premios a cinco de sus 25 alumnos?

22. ***Programación de visitas de un equipo de seguridad*** Un equipo de seguridad visita 12 oficinas cada noche. ¿De cuántas diferentes maneras puede programar sus visitas el equipo de seguridad?

23. ***Sumas de dígitos*** ¿Cuántos números naturales tienen cuatro dígitos diferentes de cero tales que la suma de los cuatro dígitos es

a) 10? ***b)*** 11?

Los ejercicios 24 a 31 se pueden resolver con combinaciones, aun cuando los enunciados del problema no siempre incluyen la palabra "combinación" o "subconjunto".

24. ***Muestreo de teléfonos celulares*** ¿De cuántas maneras se puede seleccionar una muestra de cinco teléfonos celulares de un embarque de 24?

25. ***Detección de teléfonos celulares defectuosos*** Si el embarque del **ejercicio 24** incluye seis teléfonos defectuosos, ¿cuántas muestras de tamaño 5 no incluirían teléfonos defectuosos?

26. ***Comisiones de senadores de Estados Unidos*** ¿Cuántas comisiones diferentes de cinco miembros se pueden formar con 100 senadores estadounidenses?



27. ***Selección de manos de naipes*** Revise el mazo normal de 52 cartas de la fotografía de la **página 431** y observe que el mazo contiene cuatro ases, 12 naipes de figuras, 13 corazones (todos rojos), 13 diamantes (todos rojos), 13 espadas (todas negras) y 13 tréboles (todos negros). De las 2,598,960 diferentes manos de naipes posibles, determine cuántas se forman con los siguientes naipes.

a) todos los diamantes ***b)*** todos los naipes negros

c) todos los ases

28. ***Selección de entradas de lotería*** En un juego de lotería del tipo $\frac{7}{39}$, usted elige siete números distintos del conjunto 1 a 39, donde el orden no hace diferencia. ¿De cuántas diferentes maneras puede usted hacer su selección?

29. ***Arreglo de modelos de casas nuevas*** Tyler Aunan (el contratista) va a construir seis casas en un bloque de un nuevo fraccionamiento, usando dos modelos diferentes: el estándar y el de lujo. (Todas las casas de modelo estándar son iguales y las casas de los modelos de lujo son iguales).

a) ¿Cuántas opciones diferentes tiene Tyler para ubicar las seis casas si decide construir tres modelos estándar y tres de lujo?

b) Si Tyler construye dos casas de lujo y cuatro estándar, ¿cuántas ubicaciones diferentes puede usar?

30. ***Elección de un monograma*** Sheryl Jett quiere llamar a su nuevo bebé de modo que su monograma (primera, media y última iniciales) sean letras distintas en orden alfabético y que forme parte de su apellido. ¿Cuántos monogramas diferentes puede elegir?

31. ***Número de trayectorias de un punto a otro*** En cierta ciudad, hay siete calles que van de norte a sur y cuatro calles que van de este a oeste. ¿Cuántas trayectorias inician en la esquina suroeste de la ciudad, terminan en la esquina noreste de la ciudad y tienen la longitud más corta posible? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

En los ejercicios 32 a 60 se pueden usar permutaciones, combinaciones, el principio fundamental de conteo u otros métodos de conteo que resulten adecuados.

32. ***Selección de entradas de lotería*** En el SuperLotto Plus, un juego de lotería del estado de California, usted selecciona cinco números distintos del 1 al 47 y un MEGA número del 1 al 27, esperando que su elección coincida con una lista seleccionada aleatoriamente por funcionarios de la lotería.

a) ¿Cuántos diferentes conjuntos de seis números puede usted seleccionar?

b) Paul Burke siempre incluye su edad y la edad de su esposa como dos de los primeros cinco números en sus opciones de SuperLotto Plus. ¿De cuántas maneras puede completar su lista de seis números?



33. ***Extracción de naipes*** ¿Cuántos naipes se deben extraer (sin remplazo) de un mazo normal de 52 naipes para garantizar lo siguiente?

a) Dos de los naipes serán del mismo palo.

b) Tres de los naipes serán del mismo palo.

34. ***Manos de color en póquer*** ¿Cuántas diferentes manos de 5 cartas de póquer contendrán naipes únicamente de un palo?

35. ***Identificación de números en investigación*** Los números de identificación de los temas de cierto proyecto de investigación científica se forman con tres letras seguidas por tres dígitos y luego tres letras más. Suponga que no se permiten repeticiones dentro de cualquiera de los tres grupos, pero las letras del primer grupo de tres se pueden repetir también en el último grupo de tres. ¿Cuántos diferentes números de investigación son posibles?

36. ***Siglas de identificación de estaciones de radio*** Las estaciones de radio en Estados Unidos tienen siglas de identificación que inician con K o W (para el oeste o el este del río Mississippi, respectivamente). Algunas tienen tres letras, como WBZ en Boston, WLS en Chicago, y KGO en San Francisco. Suponiendo que las letras no se repiten, ¿cuántos conjuntos de siglas de identificación de tres letras son posibles? (Cuente todas las posibilidades aun cuando, en la práctica, algunas resulten inadecuadas).

37. ***Siglas de identificación de estaciones de radio*** La mayoría de las estaciones que fueron concesionadas después de 1927 tienen cuatro letras que inician con K o W, como WXYZ en Detroit o KRLD en Dallas. Suponiendo que las letras no se repiten, ¿cuántos conjuntos de cuatro letras son posibles? (Cuente todas las posibilidades aun cuando, en la práctica, algunas resulten inadecuadas).

38. ***Programación de juegos en una liga de basquetbol*** Cada equipo en una liga de basquetbol de 8 equipos se programa para jugar tres veces con cada uno de los otros equipos. ¿Cuántos partidos se jugarán en total?

39. ***Programación de turnos al bate en el béisbol*** Los Coyotes, un equipo de béisbol de la liga juvenil, tiene siete lanzadores, que solo lanzan, y otros 12 jugadores, todos los cuales pueden jugar en cualquier posición, con excepción de la de lanzador. Para el partido del sábado, el entrenador no ha determinado aún los nueve jugadores que participarán, ni cuál será el orden al bate, excepto que el lanzador será el último en batear. ¿Cuántos órdenes para batear puede haber?

40. ***Orden de ejecutantes en un recital*** Un grupo de alumnos de música de cinco niñas y cuatro niños va a ofrecer un recital. Si cada miembro va a tocar una vez, ¿de cuántas maneras se puede arreglar el programa en cada uno de los siguientes casos?



a) Todas las niñas deben tocar primero.

b) Una niña debe tocar primero y un niño al final.

c) Elisa y Doug tocarán al principio y al final, respectivamente.

d) El programa completo alternará niñas y niños.

e) El primero, quinto y noveno ejecutantes deben ser niñas.

41. ***Programación de lectura diaria*** Carole inicia cada día con la lectura de uno de siete libros de superación personal. ¿De cuántas maneras puede arreglar su lectura para una semana si la selección se hace

a) con remplazo? ***b)*** sin remplazo?

42. ***Conteo de manos de naipes*** ¿Cuántas manos posibles de 5 naipes de un mazo normal de 52 cartas se formarían con los siguientes naipes?

a) cuatro tréboles y un naipe que no es un trébol

b) dos naipes de figuras y tres naipes que no lo son

c) dos naipes rojos, dos tréboles y una espada

43. ***Grupos de personas*** ¿De cuántas maneras se pueden dividir 15 personas en cinco grupos, que contengan, respectivamente, uno, dos, tres, cuatro y cinco miembros?

44. ***Grupos de personas*** ¿De cuántas maneras se pueden dividir 15 personas en cinco grupos de tres miembros?

45. ***Grupos de personas*** ¿De cuántas maneras se pueden dividir ocho personas en dos grupos de tres personas y un grupo de dos personas?

46. ***Puntos y rectas en un plano*** Si dos puntos cualesquiera determinan una recta, ¿cuántas rectas se determinan con siete puntos en un plano, si tres de los puntos no son colineales?

47. ***Puntos y triángulos en un plano*** ¿Cuántos triángulos se determinan mediante 20 puntos en un plano, si tres de los puntos son colineales?

48. ***Conteo de posibilidades en la combinación de un candado*** ¿Cuántas "combinaciones" diferentes de tres números son posibles en un candado de combinación que tiene 40 números en su disco? (*Sugerencia*: Recuerde que "combinación" es un nombre engañoso en estos candados, puesto que se permiten repeticiones y el orden hace una diferencia).



49. ***Selección de conductores y pasajeros en un viaje*** Natalie Graham, su esposo, su hijo y cuatro amigos conducen, en dos vehículos, a la playa.

a) Si las siete personas pueden conducir, ¿de cuántas maneras se pueden seleccionar los dos conductores? (Todos quieren conducir el automóvil deportivo, de modo que es importante a qué conductor se asigna qué automóvil).

b) Si Natalie, su esposo o su hijo deben manejar el automóvil deportivo, ¿de cuántas maneras se pueden determinar ahora los conductores?

c) Si el automóvil deportivo solo tiene lugar para dos personas y no existen otras restricciones, ¿de cuántas maneras se pueden asignar tanto conductores como pasajeros en ambos automóviles?

50. *Ganador de la apuesta doble diaria en carreras de caballos* Usted gana la "doble diaria" comprando un boleto y seleccionando los ganadores de dos carreras específicas. Si hay 6 y 8 caballos corriendo en esas carreras, respectivamente, ¿cuántos boletos debe comprar para asegurar el triunfo?



51. *Ganador de la trifecta en carreras de caballos* Muchas carreras de caballos ofrecen una apuesta "trifecta". Usted gana seleccionando los caballos que finalizarán la carrera en los primeros tres lugares. Si compiten ocho caballos, ¿cuántos boletos debe comprar para garantizar que uno de ellos será el ganador de la trifecta?

52. *Selección de comisiones* Nueve personas se van a distribuir entre tres comisiones de dos, tres y cuatro miembros, y se va a elegir un presidente para cada comisión. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto? (*Sugerencia*: Descomponga la tarea en la siguiente secuencia de etapas).

a) Elija los miembros de la comisión de dos personas.

b) Elija los miembros de la comisión de tres personas.

c) Elija el presidente de la comisión de dos personas.

d) Elija el presidente de la comisión de tres personas.

e) Elija el presidente de la comisión de cuatro personas.

53. *Selección de los miembros de una comisión* Repita el **ejercicio 52** en el caso de tres comisiones que van a tener tres miembros cada una. (*Sugerencia*: Use la misma secuencia general de etapas de la tarea, pero recuerde hacer un ajuste por orden *indeseable* de las tres comisiones).

54. *Arreglo de modelos de casas nuevas* (Véase el **ejercicio 29**). Debido a la calidad de su trabajo, Tyler Aunan ganó un contrato para construir casas en tres bloques adicionales de un fraccionamiento, con seis casas en cada bloque. Él decide construir nueve casas de lujo en estos tres bloques: dos en el primero, tres en el segundo y cuatro en el tercero. Las nueve casas restantes serán estándar.

a) En el tramo de tres bloques, ¿cuántas opciones diferentes tiene Tyler para posicionar las 18 casas? (*Sugerencia*: Considere los tres bloques por separado y utilice el principio fundamental de conteo).

b) ¿Cuántas opciones tendría si construye 2, 3 y 4 modelos de lujo en los tres diferentes bloques como antes, pero no necesariamente en el orden de primero, segundo y tercer bloque?

55. *Construcción de números a partir de conjuntos de dígitos*

a) ¿Cuántos números naturales de seis dígitos usan los números 4, 5, 6, 7, 8 y 9?

b) Suponga que todos estos números se arreglaron en orden ascendente: 456,789; 456,798; etcétera. ¿Qué número sería el tricentésimo sexagésimo cuarto de la lista?

56. *Arreglo de palabras de cinco letras* Las 120 permutaciones de AHSME están arregladas en orden alfabético, como si cada una fuera una palabra normal de 5 letras. Obtenga la última letra de la octogésima sexta palabra de la lista. (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

57. *Arreglo de la fila de una recepción de bodas* En la recepción de una boda, los novios, junto con cuatro asistentes más, forman la línea de recepción. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en cada uno de los siguientes casos?



a) En cualquier orden.

b) La novia y el novio deben estar al final de la línea.

c) El novio debe estar al final de la línea con la novia a su lado.

58. *Asignación de calificaciones a estudiantes* Un profesor da clases a un grupo de 60 estudiantes y a otro de 40 estudiantes. El 5% de los alumnos de cada grupo van a recibir una calificación de A. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir las calificaciones de A?

59. *Sumas de dígitos* ¿Cuántos números naturales se forman con cuatro dígitos diferentes de cero tales que la suma de los cuatro dígitos es

a) 12? ***b)*** 13?

60. *Examen de procesadores de computadora* Una compañía de computadoras revisará un embarque de 30 procesadores probando una muestra al azar de cinco de ellos. ¿Cuántas muestras diferentes son posibles?

61. Compruebe que ${}_{12}C_9 = {}_{12}C_3$.

62. Use la fórmula factorial de combinaciones para probar que, en general,

$$ {}_nC_r = {}_nC_{n-r}. $$

8.4 USO DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

Triángulo de Pascal • Aplicaciones

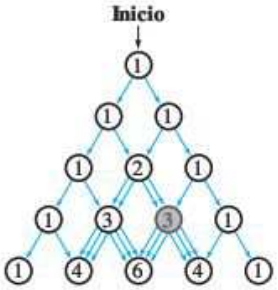


Figura 7

Triángulo de Pascal

El arreglo triangular de la **figura 7** representa lo que podemos llamar "rutas aleatorias" que comienzan en INICIO y continúan hacia abajo de acuerdo con la siguiente regla:

> En cada círculo (punto de ramificación) se arroja una moneda al aire. Cuando cae cara, bajamos hacia la izquierda; cuando cae cruz, bajamos hacia la derecha. En cada punto, izquierda y derecha tienen las mismas probabilidades.

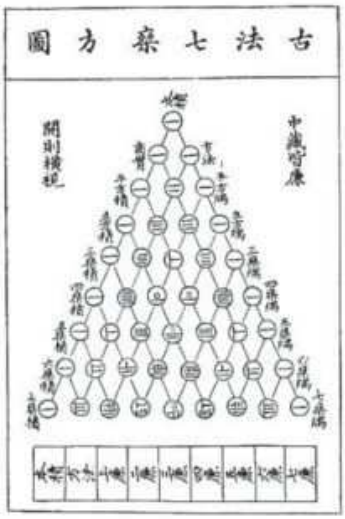
Para cada círculo se han registrado las diferentes rutas que nos llevarían a ese punto. Por ejemplo, al círculo sombreado que tiene en su interior el número 3, se puede llegar como resultado de tres secuencias de lanzamientos de monedas:

cara-cruz-cruz, cruz-cara-cruz y cruz-cruz-cara.

Otra manera de generar el mismo patrón de números es iniciar con los "unos" hacia abajo de ambas diagonales, y luego rellenar las entradas siguientes sumando los dos números justo arriba de una posición determinada (el de la izquierda y el de la derecha). Por ejemplo, el 28 resaltado en negritas en la **tabla 5** es el resultado de sumar 7 y 21 de la fila de arriba.

Tabla 5 Triángulo de Pascal

Número de fila											Suma de la fila
0						1					1
1					1		1				2
2				1		2		1			4
3			1		3		3		1		8
4		1		4		6		4		1	16
5	1		5		10		10		5		1	32
6		1		6		15		20		15		6		1	64
7			1		7		21		35		35		21		7		1	128
8		1		8		**28**		56		70		56		28		8		1	256
9	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	512
10	1	10		45		120		210		252		210		120		45		10		1	1024



Triángulo de "Pascal" mostrado en un texto de 1303 de ***Szu-yuen Yu-chien*** (*The Precious Mirror of the Four Elements*) del matemático chino Chu Shih-chieh.

Si se continúa con la suma de pares de números, el arreglo se extiende indefinidamente hacia abajo, iniciando y terminando siempre la fila con "unos". (La tabla muestra solamente las filas 0 a 10). Este arreglo de números "triangular" sin final se conoce como **triángulo de Pascal**, porque Pascal escribió un tratado acerca de él en 1653. Sin embargo, hay evidencia de que en el año 1100 ya se conocía, y pudo haberse estudiado en China o India aun en épocas anteriores.

De cualquier forma, el "triángulo" posee muchas propiedades interesantes. En aplicaciones de conteo, la propiedad más importante es que, en general, el número r de la fila n es igual a ${}_nC_r$ (el número de combinaciones de n objetos tomados en grupos de r a la vez). Esta correspondencia se muestra (hasta la fila 7) en la **tabla 6** de la siguiente página.

Tabla 6 Combinación de valores en el triángulo de Pascal

Número de fila	
0	${}_0C_0$
1	${}_1C_0$ ${}_1C_1$
2	${}_2C_0$ ${}_2C_1$ ${}_2C_2$
3	${}_3C_0$ ${}_3C_1$ ${}_3C_2$ ${}_3C_3$
4	${}_4C_0$ ${}_4C_1$ ${}_4C_2$ ${}_4C_3$ ${}_4C_4$
5	${}_5C_0$ ${}_5C_1$ ${}_5C_2$ ${}_5C_3$ ${}_5C_4$ ${}_5C_5$
6	${}_6C_0$ ${}_6C_1$ ${}_6C_2$ ${}_6C_3$ ${}_6C_4$ ${}_6C_5$ ${}_6C_6$
7	${}_7C_0$ ${}_7C_1$ ${}_7C_2$ ${}_7C_3$ ${}_7C_4$ ${}_7C_5$ ${}_7C_6$ ${}_7C_7$
	Etcétera

Tener a la mano un triángulo de Pascal nos da otra opción para evaluar combinaciones. Siempre que necesitemos conocer el número de combinaciones de n objetos tomados en grupos de r a la vez (es decir, el número de subconjuntos de tamaño r en un conjunto de tamaño n), basta con leer el número r de la fila número n. ***Tenga en mente que la primera fila mostrada es la fila número 0.*** Además, la primera entrada de cada fila se conoce como entrada número 0. Esta entrada indica el número de subconjuntos de tamaño 0 (el cual siempre es 1, ya que solo existe un conjunto vacío).

Aplicaciones

EJEMPLO 1 Aplicación del triángulo de Pascal al conteo de personas

Un grupo de 10 personas está formado por seis mujeres y cuatro hombres. Si cinco de estas personas se eligen aleatoriamente para llenar un cuestionario, ¿cuántas muestras diferentes de cinco personas son posibles?

SOLUCIÓN

Esto simplemente es cuestión de elegir un subconjunto de cinco a partir de un conjunto de 10 (o combinaciones de 10 elementos tomados en grupos de cinco a la vez).

$${}_{10}C_5 = 252$$ Véase la fila 10 del triángulo de Pascal en la **tabla 5.** ■■■

EJEMPLO 2 Aplicación del triángulo de Pascal al conteo de personas

Entre las 252 muestras posibles de cinco personas del **ejemplo 1**, ¿cuántas de ellas están formadas exactamente por 2 mujeres y tres hombres?

SOLUCIÓN

Es posible seleccionar a dos de seis mujeres de ${}_6C_2$ maneras diferentes, y se puede seleccionar a tres de cuatro hombres de ${}_4C_3$ maneras diferentes. Estos valores de las combinaciones se pueden leer directamente del triángulo de Pascal. Luego, como la tarea para elegir a dos mujeres y tres hombres requiere de ambas etapas individuales, el principio fundamental de conteo dice que se deben multiplicar los dos valores.

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_3 = 15 \cdot 4 = 60$$ Filas 6 y 4 del triángulo de Pascal ■■■



Esta **versión japonesa** del triángulo data del siglo XVIII. Los "numerales" evolucionaron a partir de piezas de bambú contadas en una tabla pautada. Posiblemente Omar Khayyam, un poeta y matemático persa del siglo XII, descubrió sus patrones al buscar soluciones algebraicas. (El triángulo lista los coeficientes del desarrollo del binomio, explicado en la sección de **Para reflexionar** de las **páginas 441 y 442**).

EJEMPLO 3 Aplicación del triángulo de Pascal al lanzamiento de una moneda

Si se lanzan al aire cinco monedas no cargadas, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden obtener exactamente tres caras?

SOLUCIÓN

Existen varios "caminos" para obtener exactamente tres caras, porque las tres caras pueden presentarse en diferentes subconjuntos de monedas. Por ejemplo, cara-cara-cruz-cara-cruz y cruz-cara-cara-cruz-cara son dos de muchas posibilidades. Cuando se escriben estas posibilidades, se ocupan exactamente tres posiciones para una cara y las otras dos para una cruz. Cada diferente ruta para seleccionar tres posiciones a partir de un conjunto de cinco posiciones ofrece una posibilidad diferente. (Una vez que se han determinado tres posiciones para "cara", cada una de las otras dos posiciones recibe automáticamente una cruz).

De modo que nuestra respuesta es justamente el número de subconjuntos de tamaño tres de un conjunto de tamaño cinco, es decir, el número de combinaciones de cinco objetos tomados en grupos de tres a la vez.

$${}_5C_3 = 10$$ Fila 5 del triángulo de Pascal ■■■

Observe que la fila 5 del triángulo de Pascal también brinda respuestas para muchas otras preguntas acerca del lanzamiento de cinco monedas, las cuales se resumen en la **tabla 7**.

Tabla 7 Lanzamiento al aire de cinco monedas no cargadas

Número de caras n	Maneras de obtener exactamente n caras	Listas*
0	${}_5C_0 = 1$	xxxxx
1	${}_5C_1 = 5$	cxxxx, xcxxx, xxcxx, xxxcx, xxxxc
2	${}_5C_2 = 10$	ccxxx, cxcxx, cxxcx, cxxxc, xccxx, xcxcx, xcxxc, xxccx, xxcxc, xxxcc
3	${}_5C_3 = 10$	cccxx, ccxcx, ccxxc, cxccx, cxcxc, cxxcc, xcccx, xccxc, xcxcc, xxccc
4	${}_5C_4 = 5$	ccccx, cccxc, ccxcc, cxccc, xcccc
5	${}_5C_5 = 1$	ccccc

*x significa cruz y c, cara.

Para analizar el lanzamiento al aire de diferentes números de monedas, podemos tomar simplemente los números pertinentes de una fila diferente del triángulo de Pascal. El lanzamiento repetido de monedas es un ejemplo de un experimento "binomial" (debido a que cada lanzamiento tiene dos resultados posibles, cara o cruz).

Para reflexionar

El teorema del binomio

La combinación de valores que comprende el triángulo de Pascal también se presenta en un contexto matemático totalmente diferente. En álgebra, "binomio" se refiere a una expresión de dos términos como

$$x + y, \quad o \quad a + 2b, \quad o \quad w^3 - 4.$$

Aquí se muestran unas cuantas de las primeras potencias del binomio $x + y$.

$$(x + y)^0 = 1$$
$$(x + y)^1 = x + y$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

(continúa)

Para reflexionar (continuación)

Los coeficientes numéricos del desarrollo de estas potencias forman las seis primeras filas del triángulo de Pascal. En el estudio de conteo hemos llamado a estos números combinaciones, pero en álgebra se conocen como **coeficientes binomiales** y, por lo general, se representan como

$$\binom{n}{r} \quad \text{en lugar de} \quad {}_nC_r.$$

Al generalizar el patrón de las potencias mostradas en la página anterior, se obtiene un resultado importante conocido como **teorema del binomio.**

Teorema del binomio

Para cualquier número entero no negativo n,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}\cdot x^n + \binom{n}{1}\cdot x^{n-1}y + \binom{n}{2}\cdot x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}\cdot x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}\cdot xy^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot y^n,$$

donde cada coeficiente binomial se puede calcular mediante la fórmula

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Observe que si $n = 0$, entonces el primer término mostrado en el desarrollo es, al mismo tiempo, el último término, para

$$\binom{n}{0}\cdot x^n = \binom{0}{0}\cdot x^0 = \frac{0!}{0!0!}\cdot 1 = 1,$$

y $$\binom{n}{n}\cdot y^n = \binom{0}{0}\cdot y^0 = \frac{0!}{0!0!}\cdot 1 = 1.$$

EJEMPLO Aplicación del teorema del binomio

Desarrolle el binomio $(2a+5)^4$.

SOLUCIÓN

Tomamos los coeficientes iniciales de la fila 4 del triángulo de Pascal y luego simplificamos algebraicamente.

$$\begin{aligned}(2a+5)^4 &= \binom{4}{0}\cdot(2a)^4 + \binom{4}{1}\cdot(2a)^3\cdot 5 \\ &\quad + \binom{4}{2}\cdot(2a)^2\cdot 5^2 + \binom{4}{3}\cdot(2a)\cdot 5^3 \\ &\quad + \binom{4}{4}\cdot 5^4 \\ &= 1\cdot 2^4\cdot a^4 + 4\cdot 2^3\cdot a^3\cdot 5 + 6\cdot 2^2\cdot a^2\cdot 5^2 \\ &\quad + 4\cdot 2\cdot a\cdot 5^3 + 1\cdot 5^4 \\ &= 16a^4 + 160a^3 + 600a^2 + 1000a + 625\end{aligned}$$

Recuerde que $(xy)^n = x^n\cdot y^n$.

Para investigación individual o en grupo

Desarrolle el binomio para cada una de las siguientes potencias.

1. $(x-y)^6$
2. $(x+y)^7$
3. $(w+4)^5$
4. $(4x+2y)^4$
5. $(u-v)^6$ (*Sugerencia*: Primero cambie $u-v$ por $u+(-v)$).
6. $(5m-2n)^3$
7. ¿Cuántos términos hay en el desarrollo del binomio $(x+y)^n$?
8. Identifique el decimoquinto término del desarrollo de $(a+b)^{18}$.

8.4 EJERCICIOS

Lea el valor de cada combinación directamente del triángulo de Pascal.

1. ${}_4C_2$
2. ${}_5C_3$
3. ${}_6C_3$
4. ${}_7C_5$
5. ${}_8C_5$
6. ${}_9C_6$
7. ${}_9C_2$
8. ${}_{10}C_7$

Selección de comisiones de congresistas *Se elegirá una comisión de cuatro congresistas a partir de un grupo de siete demócratas y tres republicanos. Determine el número de maneras de obtener cada uno de los siguientes resultados.*

9. exactamente un demócrata
10. exactamente dos demócratas
11. exactamente tres demócratas
12. exactamente cuatro demócratas

Lanzamiento de monedas al aire *Suponga que se lanzan al aire ocho monedas no cargadas. Determine el número de maneras para obtener los siguientes resultados.*

13. exactamente tres caras
14. exactamente cuatro caras
15. exactamente cinco caras
16. exactamente seis caras

Selección de salones de clase *Diana Baniak busca una clase de Ecología que se va a impartir en uno de nueve salones. Como el profesor no permite entrar a los alumnos después de que la clase ha comenzado, y falta muy poco tiempo para que inicie la clase, Diana decide intentar justamente cuatro salones al azar.*

17. ¿Cuántas opciones diferentes de cuatro salones son posibles?

18. ¿Cuántas de las opciones del **ejercicio 17** no podrán localizar la clase?

19. ¿Cuántas de las opciones del **ejercicio 17** tendrán éxito para localizar la clase?

20. ¿Qué fracción de las opciones posibles llevará al "éxito"? (Use tres decimales).

En un conjunto de cinco objetos, determine el número de diferentes subconjuntos de cada tamaño. (Use la fila 5 del triángulo de Pascal para obtener las respuestas).

21. 0

22. 1

23. 2

24. 3

25. 4

26. 5

27. ¿Cuántos subconjuntos (de cualquier tamaño) existen en un conjunto de cinco elementos?

28. En una fila determinada del triángulo de Pascal, sea n el número de fila y s la suma de la fila.

a) Escriba una ecuación que relacione n y s.

b) Explique la relación del inciso ***a)***.

29. ¿Cuáles filas del triángulo de Pascal tienen la entrada individual más grande?

30. ¿Cuál es el menor número de cuatro dígitos del triángulo de Pascal? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

Durante muchos años, se han descubierto muchos patrones interesantes en el triángulo de Pascal. Se explorarán algunos de ellos en los ejercicios 31 a 37.*

31. Remítase a la **tabla 5**.

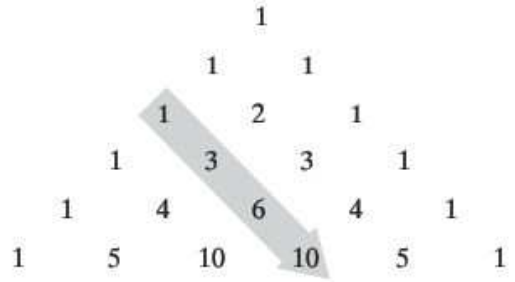
a) Elija una fila cuyo número de fila sea primo. Excepto por los "unos" en esta fila, ¿qué es verdadero en las demás entradas?

b) Elija una segunda fila con número de fila primo y vea si se conserva el mismo patrón.

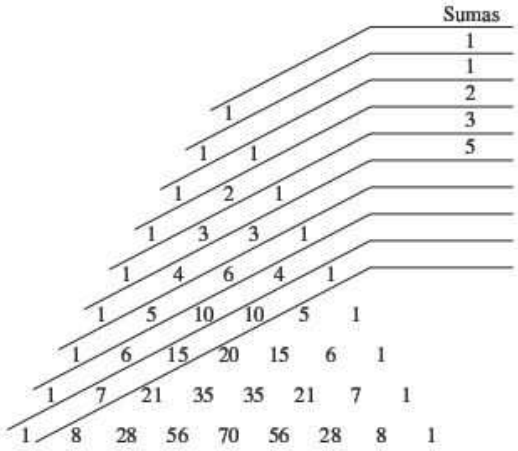
c) Utilice el método usual para construir la fila 11 de la **tabla 5**, y verifique si se mantiene el mismo patrón en esa fila.

*Como ejemplo, vea el artículo "Serendipitous Discovery of Pascal's Triangle", de Francis W. Stanley en *Mathematics Teacher*, febrero de 1975.

32. Mencione los siguientes cinco números de la secuencia diagonal de la figura. ¿Cómo se llaman estos números? (Véase la **sección 1.2**).



33. Complete la secuencia de sumas sobre las diagonales que muestra la figura. ¿Qué patrón tienen estas sumas? ¿Cuál es el nombre de esta importante secuencia de números? Al parecer, Pascal no reconoció la presencia de esta secuencia en el triángulo.

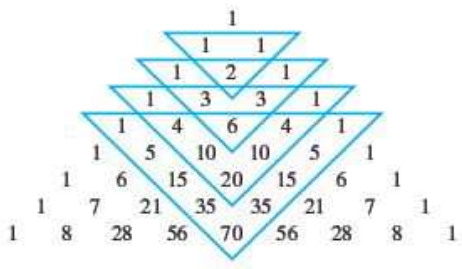


34. Construya otro "triángulo" sustituyendo cada número en el triángulo de Pascal (filas **0** a **5**) por su residuo, luego de dividirlo entre 2. ¿Qué propiedad especial comparten las filas **2** y **4** de este nuevo triángulo?

35. ¿Cuál es la siguiente fila que tendría la misma propiedad que las filas **2** y **4** del **ejercicio 34**?

36. ¿Cuántos números pares existen en la fila **256** del triángulo de Pascal? (Trabaje primero los **ejercicios 34 y 35**).

37. La figura muestra una parte del triángulo de Pascal delineada con varias regiones triangulares invertidas. Para cualquiera de estas regiones, ¿qué se puede decir de la suma de los cuadrados de las entradas que forman la fila superior?



38. Más de un siglo antes de que se encontrara el tratado de Pascal sobre el "triángulo", otro trabajo del matemático italiano Niccolo Tartaglia (1506-1559) salió a la luz e incluía la tabla de números que se muestra a continuación.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
1	8	36	120	330	792

Explique la relación entre el triángulo de Pascal y el "rectángulo" de Tartaglia.

39. Se ha dicho en el texto que cada entrada interior en el triángulo de Pascal se puede obtener sumando los dos números justo arriba de la entrada (el de la izquierda y el de la derecha). Este hecho, conocido como la "identidad de Pascal", se puede representar como

$$ {}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r $$

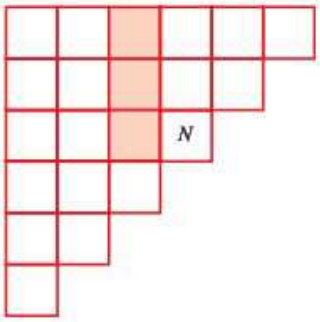
Use la fórmula factorial de combinaciones (junto con un poco de álgebra) para comprobar la identidad de Pascal.

El "triángulo" de Pascal estudiado y publicado en su tratado en realidad era similar a una esquina truncada del rectángulo de Tartaglia, como se muestra aquí.

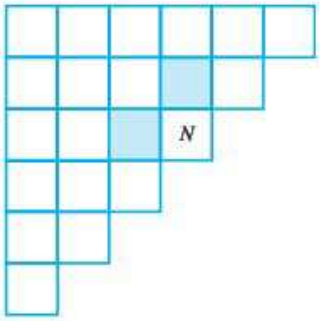
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Cada número de la esquina truncada del rectángulo de Tartaglia se puede calcular de varias maneras. En cada uno de los ejercicios 40 a 43, considere que el número N está localizado en algún lugar del arreglo. Verifique varias ubicaciones en el arreglo proporcionado, y determine cómo se relaciona N con la suma de todas las entradas en las celdas sombreadas. Describa la relación con palabras.

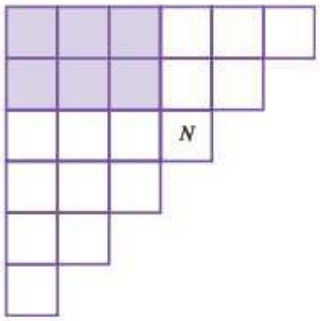
40.



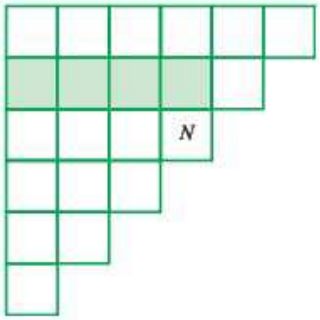
41.



42.



43.



EXTENSIÓN Cuadrados mágicos

Cuadrado mágico • Fórmula de la suma mágica

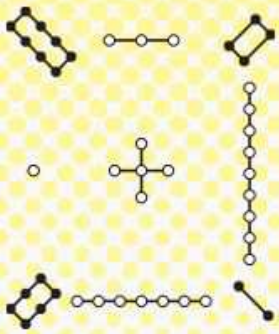


Figura 8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Figura 9

Cuadrado mágico

El arreglo de números conocido como el triángulo de Pascal tiene tantos patrones interesantes que podríamos pensar que se trata casi de un triángulo "mágico". Esta **extensión** se ocupa de otra clase de arreglos de números conocidos como *cuadrados mágicos*.

Cuenta la leyenda que aproximadamente en el año 2200 a. C., el emperador chino Yu descubrió en uno de los bancos del Río Amarillo, una tortuga cuyo caparazón mostraba el diagrama de la **figura 8**. Este llamado *lo-shu* es uno de los primeros ejemplos de un **cuadrado mágico**. Si se cuentan los puntos y se arreglan en la forma de un cuadrado, se obtiene el arreglo de la **figura 9**. Un cuadrado mágico es un arreglo cuadrado de números con la propiedad de que la suma a lo largo de cada fila, columna y diagonal, es igual. Este valor común se conoce como "suma mágica". El **orden** de un cuadrado mágico es simplemente el número de filas (y columnas) del cuadrado. El cuadrado mágico de la **figura 9** es un cuadrado mágico de orden 3.

Fórmula de la suma mágica

Usando la fórmula de la suma de los primeros n términos de una secuencia aritmética, es posible demostrar que si un cuadrado mágico de orden n tiene las entradas $1, 2, 3, \ldots, n^2$, entonces la suma de todas las *entradas* del cuadrado es

$$\frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

Como hay n filas (y columnas), la suma mágica del cuadrado se puede obtener dividiendo la expresión anterior entre n. Esto da como resultado la siguiente fórmula.

Fórmula de la suma mágica

Si un cuadrado mágico de orden n tiene las entradas $1, 2, 3, \ldots, n^2$, entonces la suma mágica SM está determinada por la siguiente fórmula

$$\mathbf{SM} = \frac{\boldsymbol{n(n^2+1)}}{\mathbf{2}}$$

La suma mágica del cuadrado de la **figura 9** es

$$\text{SM} = \frac{3(3^2+1)}{2} = 15. \quad \text{Sea } n = 3 \text{ en la fórmula.}$$

Se puede construir un cuadrado mágico de orden impar usando el "método de escalera", atribuido a un embajador francés: *De la Loubere*. El método se describe a continuación para un cuadrado de orden 5, con entradas de $1, 2, 3, \ldots, 25$.

Se inicia dibujando un cuadrado con 25 celdas, en las cuales se van a introducir los números 1 a 25. Se procede como se describe a continuación, en referencia a las **figura 10 y 11**.

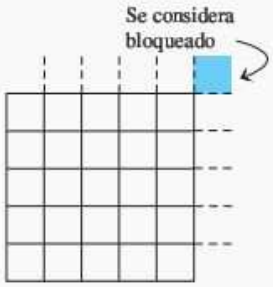


Figura 10

	18	25	2	9	16
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

Figura 11

Paso 1 Escriba 1 en la celda de en medio de la fila superior.

Paso 2 Intente siempre introducir números en secuencia en las celdas desplazándose diagonalmente de abajo a la izquierda hacia arriba a la derecha, con dos excepciones:

a) Cuando quede fuera del cuadrado mágico, desplácese a lo largo de toda la fila o a lo largo de la columna hacia abajo para introducir el número. Luego continúe con el movimiento diagonal.

b) Si llega a una celda que ya está ocupada (es decir, si usted se encuentra "bloqueado"), baje una celda a partir de la última entrada que anotó e introduzca el siguiente número ahí. Luego continúe con el movimiento diagonal.

Paso 3 Su última entrada, el 25, estará en la celda de en medio de la fila inferior.

La **figura 11** muestra el cuadrado mágico completo. La suma mágica es 65.

Si le interesan los cuadrados mágicos, una buena fuente de exploración es el sitio

http://mathforum.org/alejandre/magic.square.html.



Benjamín Franklin admitió que se divertía con cuadrados o círculos mágicos "o cualquier cosa que le permitiera combatir el desánimo", mientras sesionaba en la Asamblea de Pensilvania. Escribió acerca de lo útil de las matemáticas en la ***Gazette*** en 1735, argumentando que no se puede desempeñar ningún empleo sin aritmética, ni realizar una invención mecánica sin geometría. También pensaba que las demostraciones matemáticas son mejores que la lógica académica para ayudar a la mente a razonar con exactitud y discernir entre la verdad y la falsedad inclusive en campos ajenos a las matemáticas.

El cuadrado mostrado aquí fue desarrollado por Franklin. Tiene sumas iguales a 2056 en cada fila y diagonal; en palabras de Franklin, tiene la propiedad adicional de que "si se recorta un agujero cuadrado en una pieza de papel de tamaño suficiente para que a través de él puedan verse justamente 16 de los cuadrados pequeños, cuando se le coloca sobre el cuadrado grande, la suma de los 16 números que aparecen en el agujero, dondequiera que se coloque el papel recortado sobre el cuadrado mayor, es 2056". Dijo que era "el cuadrado mágico más mágicamente construido hasta la fecha por un mago".



A usted probablemente le gustaría verificar la siguiente propiedad de este cuadrado mágico: la suma de cuatro números cualesquiera que son opuestos uno de otro y equidistantes del centro es 514 (que equivale a un cuarto de la suma mágica).

EJERCICIOS DE LA EXTENSIÓN

Dado un cuadrado mágico, es posible obtener otros cuadrados mágicos si hacemos girar el primero. Por ejemplo, iniciando con el cuadrado mágico de la **figura 9,** *un giro de 90° en sentido horario (es decir, siguiendo el sentido de las manecillas del reloj) genera un cuadrado mágico como el mostrado aquí.*

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Inicie con la **figura 9** *y encuentre el cuadrado mágico que se obtiene con el giro descrito a continuación.*

1. 180° en sentido horario

2. 90° en sentido antihorario (es decir, en sentido contrario a las manecillas del reloj)

Inicie con la **figura 11** *y encuentre el cuadrado mágico que se obtiene con cada giro descrito a continuación.*

3. 90° en sentido horario

4. 180° en sentido horario

5. 90° en sentido antihorario

6. Intente construir un cuadrado mágico de orden 2 que contenga las entradas 1, 2, 3, 4. ¿Qué pasa?

A partir de un cuadrado mágico, es posible obtener otros cuadrados mágicos sumando un valor constante a cada entrada o restándoselo, multiplicando cada entrada por un valor constante, o dividiendo cada entrada entre un valor constante diferente de cero. En los ejercicios 7 a 10 inicie con el cuadrado mágico cuyo número de figura se indica, y efectúe la operación descrita para obtener un nuevo cuadrado mágico. Proporcione la nueva suma mágica.

7. Figura 9, multiplique por 3 **8. Figura 9,** sume 7

9. Figura 11, divida entre 2 **10. Figura 11,** reste 10

De acuerdo con una historia fantástica de Charles Trigg, publicada en Mathematics Magazine *(septiembre de 1976, página 212), el emperador Carlomagno (742-814) ordenó que se construyera un fuerte de cinco lados en un lugar importante de su reino. Como amuleto de la buena suerte, mandó colocar cuadrados mágicos en los cinco lados del fuerte. Él tenía una restricción para esos cuadrados mágicos: todos los números en ellos debían ser primos.*



En los ejercicios 11 a 15 se ilustran los cuadrados mágicos de Carlomagno con una entrada faltante. Obtenga la entrada faltante de cada cuadrado.

11.

	71	257
47	269	491
281	467	59

12.

389		227
107	269	431
311	347	149

13.

389	227	191
71	269	
347	311	149

14.

401	227	179
47	269	491
359		137

15.

401	257	149
17		521
389	281	137

16. Compare las sumas mágicas de los **ejercicios 11 a 15**. Carlomagno había estipulado que cada suma mágica debía ser igual al año en que se había construido el fuerte. ¿Cuál era ese año?

Obtenga las entradas faltantes de cada cuadrado mágico.

17.

75	68	*a)*
b)	72	*c)*
71	76	*d)*

18.

1	8	13	*a)*
b)	14	7	2
16	9	4	*c)*
d)	*e)*	*f)*	15

19.

3	20	*a)*	24	11
b)	14	1	18	10
9	21	13	*c)*	17
16	8	25	12	*d)*
e)	2	*f)*	*g)*	*h)*

20.

3	36	2	35	31	4
10	12	*a)*	26	7	27
21	13	17	14	*b)*	22
16	*c)*	23	*d)*	18	15
28	30	8	*e)*	25	9
f)	1	32	5	6	34

21. Use el "método de la escalera" para construir un cuadrado mágico de orden 7, que contenga las entradas $1, 2, 3, \ldots, 49$.

El cuadrado mágico mostrado en la fotografía fue tallado en madera por Alberto Durero, y se llama Melancolía.



Los dos números del centro en la parte inferior muestran el 1514, la fecha en que se talló el cuadrado. Consulte este cuadrado mágico para resolver los ejercicios 22 a 30.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Cuadrado mágico de Durero

22. ¿Cuál es la suma mágica?

23. Compruebe: La suma de las entradas en las cuatro esquinas es igual a la suma mágica.

24. Compruebe: La suma de las entradas en cualquier cuadrado de 2 por 2 ubicado en una esquina del cuadrado mágico es igual a la suma mágica.

25. Compruebe: La suma de las entradas en las diagonales es igual a la suma de las entradas que no están en las diagonales.

26. Compruebe: La suma de los cuadrados de las entradas en las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las entradas que no están en las diagonales.

27. Compruebe: La suma de los cubos de las entradas en las diagonales es igual a la suma de los cubos de las entradas que no están en las diagonales.

28. Compruebe: La suma de los cuadrados de las entradas de las dos filas superiores es igual a la suma de los cuadrados de las entradas de las dos filas inferiores.

29. Compruebe: La suma de los cuadrados de las entradas de la primera y tercera filas es igual a la suma de los cuadrados de las entradas de la segunda y cuarta filas.

30. Obtenga otra propiedad interesante del cuadrado mágico de Durero y enúnciela.

31. Se puede construir un cuadrado mágico de orden 4 de la siguiente manera.

1) Dibuje suavemente las diagonales del cuadrado mágico.

2) Iniciando arriba a la izquierda, desplácese a lo largo de cada fila de izquierda a derecha, contando las celdas conforme avance. Si una celda queda sobre la diagonal, cuéntela, pero no introduzca su número. Si no está en la diagonal, introduzca su número.

3) Cuando termine esto, invierta el procedimiento, iniciando abajo a la derecha y desplazándose de derecha a izquierda. Conforme cuente las celdas, introduzca el número si la celda no está ocupada; si ya está ocupada, cuéntela, pero no introduzca su número.

Debe obtener un cuadrado mágico similar al de los **ejercicios 22 a 30**. ¿Cuáles son sus diferencias?

Con valores elegidos de a, b y c se puede construir un cuadrado mágico de orden 3 sustituyendo estos valores en la forma generalizada mostrada a continuación.

$a+b$	$a-b-c$	$a+c$
$a-b+c$	a	$a+b-c$
$a-c$	$a+b+c$	$a-b$

Use los valores proporcionados de a, b y c para construir un cuadrado mágico de orden 3, usando esta forma generalizada.

32. $a=5,\quad b=1,\quad c=-3$

33. $a=16,\quad b=2,\quad c=-6$

34. $a=5,\quad b=4,\quad c=-8$

35. Es posible demostrar que si un cuadrado mágico de orden n tiene la mínima entrada igual a k, y sus entradas son números naturales consecutivos, entonces su suma mágica está determinada por la fórmula

$$\text{SM} = \frac{n(2k + n^2 - 1)}{2}.$$

Construya un cuadrado mágico de orden 7 con la mínima entrada igual a 10 usando el método de la escalera. Obtenga la suma mágica.

36. Use la fórmula del **ejercicio 35** para obtener las entradas que faltan en el siguiente cuadrado mágico de orden 4, cuya mínima entrada es 24.

a)	38	37	27
35	***b)***	30	32
31	33	***c)***	28
d)	26	25	***e)***

En una carta que envió Benjamín Franklin en 1769 al señor Peter Collinson, Franklin presentó el siguiente cuadrado semimágico de orden 8. (Nota: Un cuadrado semimágico es mágico, excepto que una o ambas diagonales no dan la suma mágica.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

37. ¿Cuál es la suma mágica?

Verifique las siguientes propiedades de este cuadrado semimágico.

38. Las sumas de la primera mitad de cada fila y las sumas de la segunda mitad de cada fila son iguales a la mitad de la suma mágica.

39. Las cuatro entradas de las esquinas sumadas a las cuatro entradas del centro dan como resultado la suma mágica.

40. Las "diagonales dobladas", formadas por ocho entradas, van hacia arriba cuatro entradas de izquierda a derecha, y hacia abajo cuatro entradas de izquierda a derecha, integrando la suma mágica. (Por ejemplo, iniciando con 16, una suma de la diagonal doblada es $16+63+57+10+23+40+34+17$).

Si usamos un "movimiento de caballo" (hacia arriba dos, a la derecha uno) en un juego de ajedrez, una variación del método de escalera proporciona el cuadrado mágico mostrado aquí. (Cuando se bloquea, nos movemos a la celda justamente debajo de la entrada anterior).

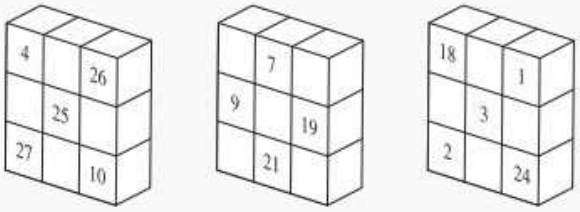
10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15
4	12	25	8	16

Use un proceso similar para construir un cuadrado mágico de orden 5, iniciando con 1 en la celda descrita.

41. cuarta fila, segunda columna (arriba dos, a la derecha uno; cuando esté bloqueada, desplácese a la celda justamente debajo de la entrada anterior)

42. tercera fila, tercera columna (arriba uno, a la derecha dos; cuando esté bloqueada, desplácese a la celda justo a la izquierda de la entrada anterior)

43. Se colocan números enteros del 1 al 27 en las celdas de un cubo de 3×3, de modo que la suma de las nueve filas y las nueve columnas es la misma. Concluya la solución. (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).



frontal medio posterior

44. Considere el "cubo mágico" del **ejercicio 43.**

a) ¿Cuál es la suma mágica?

b) ¿Cuántas "diagonales" de tres celdas contiene el cubo?

c) ¿La suma de las entradas de todas las diagonales también equivale a la suma mágica?

d) ¿Cuántas filas tiene *realmente* el cubo?

e) ¿Todas las filas adicionales tienen también la suma mágica?

8.5 PROBLEMAS DE CONTEO QUE IMPLICAN "NO" Y "O"

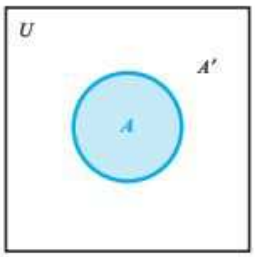
Problemas que implican "no" • Problemas que implican "o"

Las técnicas de conteo de esta sección, las cuales se pueden considerar como técnicas indirectas, se basan en algún tipo de correspondencia (de los **capítulos 2 y 3**) entre la teoría de conjuntos, la lógica y la aritmética, como se muestra en la **tabla 8**.

Tabla 8 Correspondencia entre teoría de conjuntos/lógica/aritmética

	Teoría de conjuntos	Lógica	Aritmética
Operación o conector (símbolo)	Complemento ($'$)	No ($\sim$)	Sustracción ($-$)
Operación o conector (símbolo)	Unión ($\cup$)	O ($\vee$)	Suma ($+$)

Problemas que implican "no"



Complemento de un conjunto

Figura 12

Suponga que U es el conjunto de todos los resultados posibles de algún tipo. (El "conjunto universal U" comprende todas las posibilidades, como se vio en el **capítulo 2**). Sea A el conjunto de todos los resultados que satisfacen una condición determinada. Para cualquier conjunto S, su número cardinal se escribe como $n(S)$, y su complemento se escribe como S'. La **figura 12** sugiere que

$$n(A) + n(A') = n(U).$$

Además, $$n(A) = n(U) - n(A') \quad \text{y} \quad n(A') = n(U) - n(A).$$

En este caso nos enfocamos en la forma que expresa el siguiente principio de conteo indirecto (basado en la correspondencia de complemento/no/sustracción de la **tabla 8**).

Principio del conteo de complementos

El número de maneras en que se puede satisfacer cierta condición es el número total de resultados posibles menos el número de maneras en que la condición **no** sería satisfecha. Simbólicamente, si A es cualquier conjunto dentro del conjunto universal U, entonces

$$n(A) = n(U) - n(A')$$

EJEMPLO 1 Conteo de subconjuntos propios de un conjunto

Obtenga los subconjuntos propios del conjunto $S = \{a, b, c, d, e, f\}$.

SOLUCIÓN

Un subconjunto propio de S es cualquier subconjunto con menos de seis elementos. Varios subconjuntos de diferentes tamaños pueden satisfacer esta condición. Sin embargo, es más fácil considerar el subconjunto que no es propio, a saber, S mismo. Por la teoría de conjuntos, sabemos que el conjunto S tiene un total de

$$2^6 = 64 \text{ subconjuntos.}$$

Por lo tanto, usando el principio del conteo de complementos, el número de subconjuntos propios es

$$64 - 1 = 63.$$

En palabras, el número de subconjuntos que *son* propios es el número total de subconjuntos menos el número de subconjuntos que *no* son propios. ■■■

Considere el lanzamiento al aire de tres monedas no cargadas. Como cada moneda caerá con cara (c) o cruz (x), los resultados posibles se pueden listar como sigue.

ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xcx, xxc, xxx Resultados del lanzamiento al aire de tres monedas

(Inclusive sin la lista, pudimos haber concluido que existen ocho posibilidades. Hay dos resultados posibles para cada moneda, de modo que el principio fundamental de conteo da $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$).

Suponga que queríamos saber el número de maneras para obtener al menos una cara. En este caso, "al menos una" significa una o dos o tres. En lugar de manejar los tres casos, podemos ver que "al menos uno" es lo opuesto (o el complemento) de "menos que uno" (lo cual es cero). Como solo existe una manera de obtener cero caras (xxx) y hay un total de ocho posibilidades, el principio del conteo de complementos indica el número de maneras para obtener al menos una cara:

$$8 - 1 = 7.$$

Los métodos indirectos de conteo se aplican con frecuencia a problemas que implican "al menos", "cuando mucho", "menos que" o "más que".

EJEMPLO 2 Conteo de resultados de lanzamiento de monedas al aire

Si se arrojan al aire cuatro monedas no cargadas, ¿de cuántas maneras se puede obtener al menos una cruz?

SOLUCIÓN

Por el principio fundamental de conteo, son posibles $2^4 = 16$ resultados diferentes. Exactamente uno de estos no puede satisfacer la condición de "al menos una" (a saber, cero cruces o cccc). De modo que la respuesta (de acuerdo con el principio de complementos) es $16 - 1 = 15$. ■■■

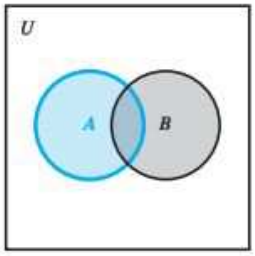
EJEMPLO 3 Conteo de selecciones de asientos en un avión comercial

Carol Britz y tres amigos abordan un avión comercial justo antes de la hora de partida. Solo existen 10 asientos libres, tres de los cuales son asientos ubicados junto al pasillo. ¿De cuántas maneras se pueden asignar los asientos disponibles a las cuatro personas (es decir, cuántos posibles arreglos existen) para que al menos una se siente en un asiento junto al pasillo?

SOLUCIÓN

La palabra "arreglo" implica que el orden es importante, de modo que usaremos permutaciones. "Al menos un asiento junto al pasillo" es el opuesto (o complemento) de "sin asientos junto al pasillo". El número total de maneras para distribuir a las cuatro personas entre 10 asientos es

$$_{10}P_4 = 5040.$$



Conjuntos no disjuntos

Figura 13

El número de maneras para distribuir a cuatro personas entre siete asientos (no ubicados junto al pasillo) es

$$_7P_4 = 840.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el principio del conteo de complementos, el número de arreglos con al menos un asiento junto al pasillo es

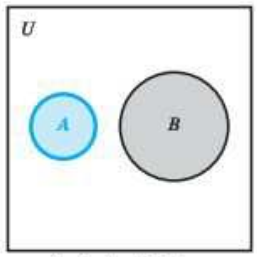
$$\underset{\downarrow}{_{10}P_4} \quad \underset{\downarrow}{_7P_4}$$
$$5040 - 840 = 4200.$$

Problemas que implican "o"

El principio del conteo de complementos es una manera de conteo indirecta. Otra técnica consiste en contar los elementos de un conjunto descomponiendo ese conjunto en componentes más simples. Si

$$S = A \cup B,$$

la fórmula del número cardinal (de la **sección 2.4**) dice que para obtener el número de elementos de S se suma el número de elementos de A al número de elementos de B. Entonces debemos restar el número de elementos de la intersección $A \cap B$ si A y B no son disjuntos, como en la **figura 13**. Pero si A y B son disjuntos, como en la **figura 14**, la resta no es necesaria.



Conjuntos disjuntos

Figura 14

El siguiente principio refleja la correspondencia unión/o/suma de la **tabla 8**.

Principio aditivo de conteo

El número de maneras en que se puede satisfacer una **o** la otra de dos condiciones es el número de maneras en que una de ellas se puede satisfacer más el número de maneras en que la otra se puede satisfacer menos el número de maneras en que ambas se satisfacen juntas.

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).}$$

Si los conjuntos A y B son disjuntos, entonces

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B).}$$

EJEMPLO 4 Conteo de manos de naipes

¿Cuántas manos de 5 naipes de póquer se forman con todos los naipes de tréboles o todos los rojos?

SOLUCIÓN

Ninguna mano que satisfaga una de estas condiciones puede satisfacer también la otra, de modo que los dos conjuntos de posibilidades (todos los tréboles, todos los naipes rojos) son disjuntos. Por lo tanto, se aplica la segunda fórmula del principio aditivo.

n (todos los tréboles o todos los naipes rojos) =
n (todos los tréboles) + n (todos los naipes rojos) — Principio aditivo de conteo

$= {}_{13}C_5 + {}_{26}C_5$ — 13 tréboles, 26 naipes rojos

$= 1287 + 65{,}780$ — Se sustituyen los valores.

$= 67{,}067$ — Se suma.

```
(10 nPr 4)−(7 nPr 4)
                  4200
(13 nCr 5)+(26 nCr 5)
                 67067
```

Los resultados de los **ejemplos 3 y 4** se apoyan en esta pantalla.

EJEMPLO 5 Conteo de opciones de una delegación diplomática

La **tabla 9** categoriza una delegación diplomática de 18 miembros del Congreso como facción política y de género. Si se elige aleatoriamente a uno de los miembros para que sea el vocero del grupo, ¿de cuántas maneras podría resultar que esa persona fuera un demócrata o una mujer?

Tabla 9

	Hombres (H)	Mujeres (M)	Totales
Republicanos (R)	5	3	8
Demócratas (D)	4	6	10
Totales	9	9	18

SOLUCIÓN

Como D y M no son disjuntos (6 delegados son tanto demócratas como mujeres), se requiere la primera fórmula del principio aditivo.

$$\begin{aligned} n(D \text{ o } M) &= n(D \cup M) && \text{Unión/o correspondencia} \\ &= n(D) + n(M) - n(D \cap M) && \text{Principio aditivo} \\ &= 10 + 9 - 6 && \text{Se sustituyen los valores.} \\ &= 13 && \text{Se suma y se resta.} \end{aligned}$$

■■■

EJEMPLO 6 Conteo de opciones de cursos de un programa de estudios

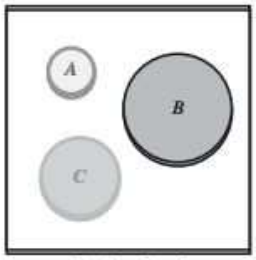
Chrissy Jenkins necesita tomar 12 cursos más específicos para el grado de licenciatura, incluyendo cuatro de matemáticas, tres de física, tres de ciencias de la computación y dos de negocios. Si de estos 12 se eligen cinco cursos aleatoriamente, para el programa del semestre próximo, ¿cuántas de las elecciones posibles incluirían al menos dos cursos de matemáticas?

SOLUCIÓN

De toda la información presentada aquí, lo importante es que hay cuatro cursos de matemáticas y otros ocho cursos de dónde seleccionar, y que cinco de ellos se deben elegir para el próximo semestre. Si T representa el conjunto de selecciones que incluyen al menos dos cursos de matemáticas, entonces se puede escribir

$$T = A \cup B \cup C$$

donde A = el conjunto de opciones con exactamente dos cursos de matemáticas,
B = el conjunto de opciones con exactamente tres cursos de matemáticas,
y C = el conjunto de opciones con exactamente cuatro cursos de matemáticas.



$T = A \cup B \cup C$

Figura 15

(En este caso, *al menos dos* significa exactamente dos **o** exactamente tres **o** exactamente cuatro). Las situaciones se ilustran en la **figura 15**. Por métodos anteriores, sabemos que

$$n(A) = {}_4C_2 \cdot {}_8C_3 = 6 \cdot 56 = 336,$$
$$n(B) = {}_4C_3 \cdot {}_8C_2 = 4 \cdot 28 = 112,$$
y $$n(C) = {}_4C_4 \cdot {}_8C_1 = 1 \cdot 8 = 8,$$

de modo que, por el principio aditivo,

$$n(T) = 336 + 112 + 8 = 456.$$

■■■

EJEMPLO 7 Conteo de números de tres dígitos con condiciones

¿Cuántos números naturales de tres dígitos son múltiplos de 2 o múltiplos de 5?

SOLUCIÓN

Un múltiplo de 2 debe terminar con un dígito par (0, 2, 4, 6 u 8), de modo que hay $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ múltiplos de 2 de tres dígitos. Un múltiplo de 5 debe terminar en 0 o 5, de modo que hay $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ de ellos. Un múltiplo tanto de 2 como de 5 es un múltiplo de 10 y debe terminar en 0. Existen $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$ de ellos. De acuerdo con el principio aditivo, existen

$$450 + 180 - 90 = 540$$

números posibles de tres dígitos que son múltiplos de 2 o múltiplos de 5. ■■■

EJEMPLO 8 Conteo de resultados de extracción de naipes

Se extrae un naipe de un mazo normal de 52 naipes.

a) ¿De cuántas maneras puede ser un corazón o un rey?

b) ¿De cuántas maneras puede ser un trébol o una figura?

SOLUCIÓN

a) Un solo naipe puede ser tanto un corazón como un rey (el rey de corazones), de modo que se usa la primera fórmula aditiva. Existen 13 corazones, cuatro reyes, y una carta que es corazón y rey al mismo tiempo.

$$13 + 4 - 1 = 16$$

b) Hay 13 tréboles, 12 figuras, y 3 naipes que son tanto tréboles como figuras.

$$13 + 12 - 3 = 22$$ ■■■

EJEMPLO 9 Conteo de subconjuntos de un conjunto, con condiciones

¿Cuántos subconjuntos de un conjunto de 25 elementos tienen más de tres elementos?

SOLUCIÓN

Sería realmente difícil contar directamente todos los subconjuntos de tamaño 4, 5, 6,..., 25. Es mucho más fácil contar los que tienen tres o menos elementos y aplicar el principio del conteo de complementos.

Existen	$_{25}C_0 = 1$	subconjuntos de tamaño 0.
Existen	$_{25}C_1 = 25$	subconjuntos de tamaño 1.
Existen	$_{25}C_2 = 300$	subconjuntos de tamaño 2.
Existen	$_{25}C_3 = 2300$	subconjuntos de tamaño 3.

El número total de subconjuntos (de todos los tamaños, 0 a 25) es $2^{25} = 33{,}554{,}432$ (use una calculadora). De modo que los números con más de tres elementos deben ser

$$\begin{aligned} 33{,}554{,}432 - (1 + 25 + 300 + 2300) &= 33{,}554{,}432 - 2626 \\ &= 33{,}551{,}806. \end{aligned}$$ ■■■

En el **ejemplo 9**, usamos tanto el principio aditivo (para obtener el número de subconjuntos con no más de tres elementos) como el principio del conteo de complementos.

8.5 EJERCICIOS

¿Cuántos subconjuntos propios existen en cada conjunto?

1. {A, B, C, D}
2. {u, v, w, x, y, z}

Lanzamiento de monedas al aire *Si usted lanza siete monedas al aire, ¿de cuántas maneras se puede obtener cada uno de los siguientes resultados?*

3. al menos una cara ("al menos una" es el complemento de "ninguna").
4. al menos dos caras ("al menos dos" es el complemento de "cero o una").
5. al menos dos cruces
6. al menos una de cada una (una cara y una cruz)

Lanzamiento de dados *Si usted lanza dos dados (digamos uno rojo y uno verde), ¿de cuántas maneras se puede obtener cada uno de los siguientes resultados? (Remítase a la* **tabla 2** *de la* ***sección 8.1****).*

7. al menos 2 en el dado verde
8. una suma de al menos 3
9. un cuatro en al menos uno de los dados
10. un número diferente en cada dado

Extracción de naipes *Si usted extrae un solo naipe de un mazo normal de 52 naipes, ¿de cuántas maneras puede obtener cada uno de los siguientes resultados?*

11. un naipe diferente al as de espadas
12. un naipe que no sea figura

Identificación de propiedades de números naturales *¿Cuántos números naturales de dos dígitos cumplen con cada requerimiento?*

13. no son múltiplos de 10
14. mayores que 70 o múltiplos de 10
15. ***Selección de álbumes de música country*** La colección de Jeanne Bronson de 10 álbumes de música country incluye *Southern Voice* de Tim McGraw. Jeanne elegirá tres de sus álbumes para tocarlos durante un viaje a Nashville. (Suponga que el orden no es importante).
    - ***a)*** ¿Cuántos conjuntos de tres álbumes diferentes puede elegir?
    - ***b)*** ¿Cuántos de estos conjuntos no incluirían *Southern Voice*?
    - ***c)*** ¿Cuántos de estos conjuntos incluirían *Southern Voice*?
16. ***Elección de éxitos de Broadway*** Las 10 funciones más duraderas de Broadway incluyen *El fantasma de la ópera* y *Los miserables*. Cuatro de las 10 se eligen aleatoriamente. (Suponga que el orden no es importante).
    - ***a)*** ¿De cuántas maneras se pueden elegir las cuatro?
    - ***b)*** ¿Cuántos de estos grupos de cuatro no incluirían ninguna de las dos producciones mencionadas?
    - ***c)*** ¿Cuántos incluirían al menos una de las dos producciones mencionadas?
17. ***Elección de días de la semana*** ¿De cuántas maneras se pueden elegir tres distintos días de la semana, de modo que al menos uno inicie con la letra M? (Suponga que el orden de selección no es importante).
18. ***Elección de tareas escolares para conclusión de estudios*** Diona Brown tiene que realizar nueve tareas principales para concluir la presente semana escolar. Dos de ellas implican la escritura de ensayos. Diona decide trabajar sobre dos de las tareas esta noche. ¿Cuántas elecciones diferentes de dos tareas incluirían al menos un ensayo? (Suponga que el orden no es importante).

Elección de restaurantes *Jason Ignacio desea comer en cuatro restaurantes diferentes durante una escapada veraniega. Si en tres de ocho restaurantes disponibles sirven mariscos, determine el número de maneras en que en al menos uno de los restaurantes elegidos sirvan mariscos, considerando las siguientes condiciones.*

19. El orden de selección es importante.
20. El orden de selección no es importante.
21. ***Arreglo de asientos en un avión comercial*** Remítase al **ejemplo 3**. Si un miembro del grupo decide en el último minuto que no viajará, ¿de cuántas maneras se pueden distribuir los tres restantes en los 10 asientos disponibles, de modo que al menos uno de ellos se siente junto al pasillo?
22. ***Identificación de propiedades de números naturales*** Determine la cantidad de números naturales de cuatro dígitos que contienen al menos un cero, en cada una de las siguientes condiciones.
    - ***a)*** Se permite la repetición de dígitos.
    - ***b)*** No se permite la repetición de dígitos.
23. ***Conteo de letras de identificación de estaciones de radio*** Todas las estaciones en Estados Unidos tienen siglas de identificación que inician con K o W. Algunas tienen un total de tres letras y otras tienen cuatro. ¿Cuántas combinaciones diferentes de letras son posibles? Cuente todas las posibilidades, aun cuando, en la práctica, algunas resulten inadecuadas. (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*) (*Sugerencia*: No aplique combinaciones).
24. ***Elección de comisiones de la facultad*** Una comisión de cuatro miembros de la facultad será seleccionada de un departamento de 25 miembros, el cual incluye a los profesores Fontana y Spradley. ¿De cuántas maneras puede incluir la comisión al menos a uno de estos dos profesores?
25. ***Elección de equipos de búsqueda y rescate*** La unidad de una patrulla aérea civil integrada por 12 miembros incluye a cuatro oficiales. ¿De cuántas maneras se pueden elegir cuatro miembros para una misión de búsqueda y rescate que incluya al menos un oficial?

26. ***Elección de miembros de un equipo*** Tres estudiantes de una clase de 12 alumnos van a formar un equipo para un concurso de matemáticas, que debe incluir al menos un niño y una niña. Si se pueden formar 160 equipos diferentes con los 12 estudiantes, ¿cuál de las siguientes posibilidades puede ser la diferencia entre el número de niños y el número de niñas en la clase?

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6 **E.** 8

(Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

Extracción de naipes *Si se extrae una carta de un mazo normal de 52 naipes, ¿de cuántas maneras podría ser la que se menciona a continuación? (Use el principio aditivo)*

27. un trébol o una sota

28. una figura o un naipe negro

Conteo de estudiantes amantes de la música y del cine *De un grupo de 30 estudiantes, a 25 les gusta la música, a 22 el cine, y a 18 les gusta tanto la música como el cine. ¿Cuántos de ellos disfrutan lo siguiente?*

29. al menos uno de los dos entretenimientos (Use el principio aditivo).

30. ninguno de los dos entretenimientos (complemento de "al menos uno").

Conteo de manos de naipes *Entre las 2,598,960 posibles manos de 5 naipes de póquer de un mazo normal de 52 naipes, ¿cuántas contienen los siguientes naipes?*

31. al menos un naipe que no es un corazón (complemento de "todos los corazones")

32. naipes de más de un palo (complemento de "todos los palos iguales")

33. al menos una figura (complemento de "sin figuras")

34. al menos un trébol, pero no todos los tréboles (complemento de "ningún trébol o todos los tréboles").

35. ***Selección de rosquillas*** Una tienda de rosquillas tiene una orden especial en sus opciones Mix-n-Match, lo que permite a los clientes seleccionar tres rosquillas de las siguientes variedades: sencilla, jarabe de maple, glaseada y con jalea. ¿Cuántas opciones diferentes de Mix-n-Match son posibles? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

36. ***Lanzamiento de tres dados*** Se lanzan tres dados no cargados de seis caras y de diferentes colores. ¿De cuántas maneras se pueden lanzar los dados de modo que la suma de los números obtenidos sea 10? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

Tamaño de subconjuntos de un conjunto *Si un conjunto determinado consta de 10 elementos, ¿cuántos de sus subconjuntos tienen los números de elementos que se indican a continuación?*

37. cuando mucho dos elementos

38. al menos ocho elementos

39. más de dos elementos

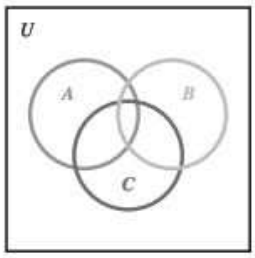
40. de tres a siete elementos

41. ***Conteo de números de licencias*** Si el número de licencia se forma con dos letras seguidas por tres dígitos, ¿cuántas licencias diferentes se pueden expedir que tengan al menos una letra o un dígito repetido? (*Sugerencia*: Use el principio del conteo de complementos).

42. ***Extracción de naipes*** Si se extraen dos naipes de un mazo de 52 naipes sin remplazo (es decir, el primer naipe no se vuelve a colocar en el mazo antes de extraer el segundo), ¿de cuántas maneras diferentes es posible obtener un rey en la primera extracción y un corazón en la segunda? (*Sugerencia*: Divida esta operación en dos componentes disjuntos: "rey de corazones y luego otro corazón" y "rey que no es de corazones y luego un corazón". Use el principio fundamental de conteo con cada componente, y luego aplique el principio aditivo).

43. Amplíe el principio aditivo de conteo a tres conjuntos que se traslapan (como en la figura) para demostrar que

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$



44. ¿Cuántos números naturales del 1 al 300 *no* son divisibles entre 2, 3 o 5? (*Sugerencia*: Use el principio del conteo de complementos y el resultado del **ejercicio 43**).

Selección de sitios turísticos para visitar *Megan Lozano está planeando un viaje en automóvil. Aun cuando está interesada en visitar los 12 sitios turísticos listados aquí, tiene que decidirse por visitar solo tres de ellos.*

Nuevo México	Arizona	California
Viviendas del risco de Gila	Cañón de Chelly	Demonios Postpile
Petroglifos	Cactus del cañón del órgano	Árbol de Joshua
Arenas blancas	Saguaro	Camas de lava
Ruinas aztecas		Bosque de Muir
		Pináculos



¿De cuántas maneras pueden seleccionarse tres sitios turísticos para incluir lo siguiente? (Suponga que el orden de selección no es importante).

45. sitos de un solo estado

46. al menos un sitio que no esté en California

47. sitios en menos de tres estados

48. sitios en exactamente dos de los tres estados

Conteos de categorías de manos de póquer *La* **tabla 4** *de este capítulo (**Para reflexionar** en la **sección 8.3**) describe las diferentes clases de manos de 5 cartas en el póquer. Verifique cada enunciado de los ejercicios 49 a 52. (Explique todos los pasos de su argumento).*

49. Existen cuatro maneras para obtener una escalera real de color.

50. Existen 36 maneras para obtener una escalera de color.

51. Existen 10,200 maneras para obtener una escalera.

52. Existen 54,912 maneras de obtener una tercia.

53. Explique por qué el principio del conteo de complementos se conoce como método "indirecto".

54. Explique la diferencia entre las dos fórmulas del principio aditivo de conteo.

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

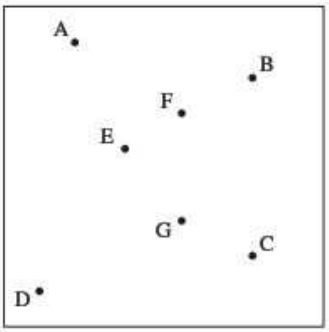
Solución del problema del viajero



En 1985 Shen Lin elaboró la ruta mostrada en la figura anterior para un representante de ventas que deseaba visitar todas las ciudades capitales de los 48 estados contiguos, iniciando y terminando en la misma ciudad y viajando la menor distancia total posible. Él no podía probar que la distancia de 10,628 millas de la ruta era la menor posible, pero ofreció $100 a quien pudiera encontrar una ruta más corta.

Este es un ejemplo de un problema clásico, el llamado **problema del viajero**, el cual tiene muchas aplicaciones prácticas en la industria y los negocios, pero ha desconcertado a los matemáticos durante años. En el caso planteado, existen 47! rutas posibles, si bien muchas de ellas se pueden eliminar rápidamente, dejando solo $\frac{24!}{3}$ a considerar. Este todavía es un número de 24 dígitos, demasiado grande para que las computadoras modernas puedan analizarlo directamente.

Aun cuando los científicos del cálculo no han podido hasta ahora obtener un "algoritmo eficiente" para resolver el problema general del viajero, se logran éxitos periódicos en casos particulares. En 2005 se calculó una ruta óptima para el caso de 33,810 ciudades, el cual surgió como un problema del diagrama de un microchip.



Aquí se muestra un conjunto mucho más pequeño (de siete ciudades, de la *A* a la *G*), el cual se puede analizar completamente usando una calculadora.

Observe que ciertas rutas claramente *no* son las más cortas. Por ejemplo, es evidente que la ruta ACEDFGBA implica demasiados saltos hacia atrás y hacia delante en el diagrama, para dar como resultado la distancia total mínima posible. (De hecho, la distancia total de esta ruta es de 360 millas, considerablemente más de la necesaria). Las 15 distancias proporcionadas en este caso (en millas) entre pares de ciudades deben ser datos suficientes para calcular la ruta más corta posible.

AB = 51	AF = 36	BF = 22	CG = 22	EF = 22
AD = 71	BC = 50	BG = 45	DE = 45	EG = 28
AE = 32	BE = 45	CD = 61	DG = 45	FG = 30

Temas de análisis

Dividan la clase en grupos de 3 o 4 estudiantes cada uno. Cada grupo debe realizar lo siguiente.

1. Estudiar el diagrama y elaborar una lista de todas las rutas que se consideren las más cortas.
2. Para cada ruta propuesta, sumen los siete términos adecuados para obtener la distancia total.
3. Obtengan el consenso del grupo para determinar cuál es la ruta más corta.

Ahora reúnan nuevamente a la clase completa y realicen lo siguiente.

1. Elaboren una lista de rutas, con distancias totales, que los diferentes grupos consideraron que eran las más cortas.
2. Observen si los diferentes grupos están de acuerdo sobre cuál fue la ruta más corta.
3. Intenten alcanzar un consenso en la clase sobre la ruta más corta. ¿Creen que alguien más podría obtener una ruta más corta?

Las rutas óptimas que unen puntos, calculadas con las teorías del viajero (véase la **investigación colaborativa**) se han usado para producir una gran variedad de obras artísticas. Por ejemplo, el retrato mostrado a la derecha, basado en el trabajo de Andy Warhol, consiste en una ruta que, si se imprime en papel de $8\frac{1}{2}$ por 11 pulgadas, mediría 45.5 pies de largo.

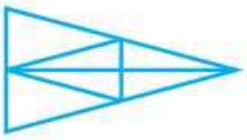


Reproducido con permiso de Robert Bosch.

EXAMEN DEL CAPÍTULO 8

Conteo de números de tres dígitos *Si solo se pueden usar los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, obtenga el número de posibilidades de cada categoría.*

1. números de tres dígitos
2. números impares de tres dígitos
3. números de tres dígitos sin dígitos repetidos
4. múltiplos de cinco, de tres dígitos, sin repeticiones
5. ***Conteo de triángulos en una figura*** Determine el número de triángulos (de cualquier tamaño) en la figura mostrada a continuación.



6. ***Lanzamiento de monedas al aire*** Elabore un diagrama de árbol que muestre todos los resultados posibles cuando se arroja al aire una moneda justa cuatro veces, si dos lanzamientos consecutivos no pueden ser caras.
7. ***Sumas de dígitos*** ¿Cuántos números de cuatro dígitos, sin repeticiones, arrojan un resultado de 30 cuando se suman sus dígitos?
8. ***Arreglo de personas*** Tia, Jo y cuatro amigos más están sentados en torno a una mesa. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar si Tia y Jo no desean sentarse juntas? Suponga que cualquier rotación de un arreglo determinado, es decir, cuando todos se mueven el mismo número de asientos en sentido horario o antihorario, es el mismo que el arreglo original. (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

Evalúe cada expresión.

9. $6!$
10. $\dfrac{8!}{6!}$
11. ${}_{12}P_3$
12. ${}_8C_5$

13. ***Construcción depalabrasa partirde un conjunto de letras*** ¿Cuántas "palabras" de cinco letras sin repeticiones son posibles usando el abecedario inglés? (Suponga que cinco letras cualesquiera forman una "palabra").
14. ***Construcción de palabras a partir de un conjunto de letras*** Usando el alfabeto ruso (el cual tiene 32 letras), y permitiendo la repetición de letras, ¿cuántas "palabras" de cinco letras son posibles?

Programación de tareas *Eileen Burke tiene que realizar siete tareas escolares. Ella desea hacer dos el jueves y las otras cinco el sábado.*

15. ¿De cuántas maneras puede ordenar el trabajo del jueves?
16. Suponiendo que termina correctamente el trabajo del jueves, ¿de cuántas maneras puede ordenar el trabajo del sábado?
17. ***Arreglo de letras*** Obtenga el número de arreglos diferentes de las letras de la palabra GOOGOL.

Selección de grupos de jugadores de basquetbol *Si hay 10 jugadores en un equipo de basquetbol, determine el número de opciones que tiene el entrenador para seleccionar lo siguiente.*

18. cuatro jugadores para transportar el equipamiento del equipo
19. dos jugadores de defensa y dos delanteros

20. cinco iniciadores y cinco sustitutos

21. dos grupos de cuatro

22. un grupo de tres o más jugadores

Selecciones de configuraciones de interruptores *Determine el número de configuraciones posibles para una fila de cinco interruptores de encendido-apagado en las siguientes condiciones.*

23. Sin restricciones.

24. El primer interruptor y el quinto deben estar encendidos.

25. El primer interruptor y el quinto deben tener el mismo estado.

26. Dos interruptores adyacentes no pueden estar apagados.

27. Dos interruptores adyacentes no pueden tener el mismo estado.

28. Al menos dos interruptores deben estar encendidos.

Selección de subconjuntos de letras *Se van a seleccionar tres letras distintas del conjunto*

$$\{A, B, C, D, E, F, G\}.$$

Determine el número de maneras para obtener un subconjunto que incluya lo siguiente.

29. la letra B

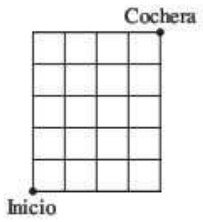
30. tanto la letra A como la E

31. ya sea A o E, pero no ambas

32. letras para deletrear el vocablo AD

33. más consonantes que vocales

34. ***Número de trayectorias de un punto a otro*** Un camión de transporte puede viajar solo en dos direcciones, al norte y al este. A partir del punto inicial en el mapa mostrado, determine cuántas trayectorias existen para llegar a la cochera. (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).



35. Defina el principio fundamental de conteo en sus propias palabras.

36. Si ${}_nC_r = 495$ y ${}_nC_{r+1} = 220$, obtenga el valor de ${}_{n+1}C_{r+1}$.

37. Si usted escribe la segunda entrada de cada fila del triángulo de Pascal (iniciando en la fila 1), ¿qué secuencia de números obtiene?

38. Explique por qué hay $r!$ permutaciones de n objetos tomando grupos de r a la vez correspondientes a cada combinación de n objetos tomados en grupos de r a la vez.

PROBABILIDAD

9



Suponga que usted está en un concurso que se transmite por televisión y tiene que elegir entre tres puertas: detrás de una de estas hay un automóvil, y detrás de las otras dos hay cabras. Desde luego, usted quiere ganar el automóvil y selecciona una de las puertas, digamos, la número 1. El conductor sabe lo que hay detrás de las otras dos puertas, y abre una de ellas, digamos, la 3, para mostrar una cabra. Entonces le pregunta: "¿Desea cambiar su elección?". ¿Será ventajoso para usted cambiar a la puerta 2?

Esta pregunta apareció en la revista *Parade* en una columna escrita por Marilyn vos Savant al principio de la década de 1990. Este problema de probabilidad, conocido como el problema de Monty Hall, fue llamado así en honor del animador del célebre programa televisivo de concurso *Let's Make a Deal*. La respuesta a Marilyn generó una cantidad increíble de polémicas y discusiones entre el público en general de aquel tiempo.

La respuesta y su justificación se pueden obtener también en el sitio Web interactivo www.math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html. ¿USTED cambiaría de puerta? (Véase la página 495 para conocer la respuesta).

9.1 Conceptos básicos

9.2 Eventos que implican "no" y "o"

9.3 Probabilidad condicional; eventos que implican "y"

9.4 Probabilidad binomial

9.5 Valor esperado

Extensión Estimación de probabilidades por simulación

Investigación colaborativa Obtención de valores empíricos de π

Examen del capítulo 9

9.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Antecedentes históricos • Probabilidad • Ley de los grandes números • Probabilidad en genética • Momios



Si bien la **correspondencia entre Fermat y Pascal** durante 1654 marca el inicio de la teoría de probabilidad, no fue un nacimiento fácil. En su libro de 2010, *The Unfinished Game: Pascal, Fermat, and the Seventeenth-Century Letter that Made the World Modern* (véase la fotografía), Keith Devlin narra cómo ambos matemáticos "se esforzaron por varias semanas" para resolver el problema de un juego inconcluso. De hecho, esta no es la excepción, sino más bien la regla, incluso para los matemáticos más connotados. La gran cantidad de arduo trabajo detrás de los resultados elegantes rara vez se ve o se publica.

Antecedentes históricos

La teoría matemática moderna de probabilidad fue obra principalmente de los estudiosos rusos Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1922), Andrei Andreyevich Markov (1856-1922) y Andrei Nicolaevich Kolmogorov (1903-1987). Pero la idea básica surgió mucho antes, sobre todo a partir de las preguntas generadas en los juegos de azar. En 1654 dos matemáticos franceses, Pierre de Fermat (1601-1665 aproximadamente) y Blaise Pascal (1623-1662), mantuvieron correspondencia en relación con un problema planteado por el Caballero de Méré, un aristócrata jugador.

> *Si los dos participantes en un juego son forzados a retirarse antes de que el juego termine, ¿cómo se deben dividir las apuestas?*

Pascal y Fermat resolvieron el problema desarrollando métodos básicos para determinar la posibilidad de cada jugador, o la probabilidad de cada uno, de ganar el juego.

El matemático y científico holandés Christiaan Huygens (1629-1695) escribió un tratado formal sobre probabilidad, el cual se publicó en 1657 y cuya base era la correspondencia entre Pascal y Fermat.

Uno de los primeros en aplicar la probabilidad a asuntos diferentes del juego fue el matemático francés Pierre Simon de Laplace (1749-1827), a quien generalmente se le reconoce como el "padre" de la teoría de probabilidad.

Probabilidad

Si usted va a un supermercado y selecciona cinco libras de duraznos a 89 centavos la libra, podrá pronosticar fácilmente la cantidad que le cobrarán en la caja registradora.

$$5 \cdot \$0.89 = \$4.45.$$

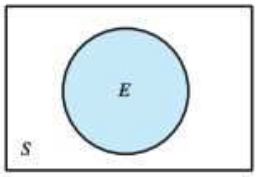
Este es un ejemplo de un **fenómeno determinístico**. Es posible predecir exactamente sobre la base de la información disponible; en este caso, los datos sobre el número de libras de duraznos y el costo de una libra.

Por otro lado, considere el problema que enfrenta el gerente de suministros del supermercado, quien debe ordenar duraznos para tenerlos disponibles todos los días, sin saber exactamente cuántas libras comprarán los clientes durante el día. La demanda de los clientes es un ejemplo de un **fenómeno aleatorio**, que fluctúa de tal modo que no es posible predecir con exactitud su valor (en un día determinado) a partir de la información disponible.

El estudio de probabilidades está relacionado con estos fenómenos aleatorios. Aun cuando no se tenga la certeza de que ocurrirá cierto resultado, con frecuencia es posible obtener una buena medida de su *posibilidad* o **probabilidad**. Este capítulo analiza varias maneras de obtener y usar probabilidades.

Cualquier observación, o medición, de un fenómeno aleatorio es un **experimento**. Las posibles consecuencias del experimento son los **resultados**, y el conjunto de todos los resultados posibles es el **espacio muestral**.

Por lo general, estamos interesados en alguna colección particular de resultados posibles. Cualquier subconjunto como este del espacio muestral es un **evento**. Los resultados que pertenecen al evento son "resultados favorables" o "éxitos". Cada vez que se observa un éxito, decimos que el evento ha "ocurrido". La probabilidad de un evento es una medida numérica de la posibilidad del evento y se determina de dos maneras: *teóricamente* (mediante el uso de las matemáticas) o *empíricamente* (esto es, de forma experimental).



Cada evento es un subconjunto del espacio muestral.



Pascal preguntó: **"¿Es probable que la probabilidad brinde seguridad?** Nada brinda la seguridad, si no es la verdad; nada ofrece el reposo si no es la sincera búsqueda de la verdad". Pascal escribió esto mientras vivía en un convento jansenista de Port-Royal, donde se refugió después de sufrir un accidente en carruaje durante 1654.

Las notas de Pascal sobre cristianismo, incluyendo la cita anterior, fueron recopiladas después de su muerte en los *Pensées* (pensamientos). Otra de sus notas se denomina la "regla de la apuesta": Si usted apuesta que Dios existe y vive como si así fuera, habrá ganado mucho, incluso si Dios no existe. Si usted apuesta lo contrario y Dios existe, habrá perdido la razón de vivir correctamente (por lo tanto, habrá perdido todo).

EJEMPLO 1 Determinación de la probabilidad cuando se lanza una moneda al aire

Si se lanza una moneda al aire, determine la probabilidad de obtener cara.

SOLUCIÓN

No hay razón aparente para que un lado de la moneda caiga (a la larga) con más frecuencia que el otro, de modo que se supone que las caras y las cruces son igualmente probables.

El experimento aquí es que en el lanzamiento al aire de una moneda, el espacio muestral es $S = \{\text{cara, cruz}\}$, y el evento cuya probabilidad buscamos es $E = \{\text{cara}\}$. Como uno de los dos resultados igualmente probables es una cara, la probabilidad de caras es el cociente de 1 y 2.

$$\text{Probabilidad (caras)} = \frac{1}{2}, \quad \text{se escribe} \quad P(\text{caras}) = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad P(E) = \frac{1}{2}.$$

EJEMPLO 2 Determinación de la probabilidad cuando se lanza al aire un vaso

Si se arroja al aire un vaso de plástico, obtenga la probabilidad de que caiga sobre la parte superior.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la intuición, parece ser que un vaso como este caerá de lado con mucha más frecuencia que sobre su parte superior o inferior. Pero no está claro exactamente con cuánta más frecuencia. Para tener una idea, realizamos el experimento lanzando al aire el vaso 50 veces y observamos que cae de lado 44 veces, sobre la parte superior 5 veces, y sobre la parte inferior solo una vez. Por la frecuencia del "éxito" en este experimento, concluimos que para el vaso utilizado

$$P(\text{parte superior}) \approx \frac{5}{50} = \frac{1}{10}.$$

Escriba los términos en forma simplificada.

En el **ejemplo 1** que implica el lanzamiento al aire de una moneda, el número de resultados posibles, evidentemente, era dos, porque ambos eran igualmente probables, y uno de los resultados era una cara. No se requirió un experimento real. La probabilidad deseada se obtuvo *teóricamente*. Las probabilidades teóricas se aplican al lanzamiento de dados, juegos de naipes, ruleta, loterías, etcétera, y aparentemente a muchos fenómenos naturales.

Laplace, en su famosa obra *Teoría analítica de la probabilidad*, publicada en 1812, dio una fórmula que se aplica a cualquier probabilidad teórica, siempre y cuando el espacio muestral S sea finito y todos los resultados sean igualmente probables. (Algunas veces se menciona como *definición clásica de probabilidad*).

Fórmula de probabilidad teórica

Si todos los resultados de un espacio muestral S son igualmente probables, y E es un evento dentro de ese espacio muestral, entonces la **probabilidad teórica** del evento E está dada por la siguiente fórmula.

$$P(E) = \frac{\textbf{número de resultados favorables}}{\textbf{número total de resultados}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Por otro lado, el **ejemplo 2** implicaba el lanzamiento de un vaso, donde las probabilidades de varios resultados no eran claras a la luz de la intuición. Hubo necesidad de hacer un experimento real para obtener el valor de probabilidad $\frac{1}{10}$, y ese valor, con base en una parte de todos los lanzamientos posibles del vaso, debe considerarse como una aproximación de la probabilidad teórica verdadera. El valor se encontró de acuerdo con una fórmula de probabilidad *experimental* o *empírica*.



En 1827 **Robert Brown** (1773-1858), un físico y botánico escocés, describió el movimiento irregular de granos microscópicos de polen suspendidos en agua. Este "movimiento browniano", como terminó llamándose, no se comprendió plenamente sino hasta 1905, cuando Albert Einstein lo explicó a través del movimiento molecular como un fenómeno aleatorio.

Fórmula de probabilidad empírica

Si E es un evento que puede suceder cuando se realiza un experimento, entonces la **probabilidad empírica** del evento E está dada por la siguiente fórmula.

$$P(E) = \frac{\text{número de veces que ocurre el evento } E}{\text{número de veces que se realiza el experimento}}$$

Normalmente es claro qué fórmula de probabilidad se debe usar en las aplicaciones.

EJEMPLO 3 Determinación de la probabilidad de tener hijas

Kathy Campbell desea tener exactamente dos hijas. Suponiendo que un niño (b) y una niña (g) son igualmente probables, determine la probabilidad de éxito si

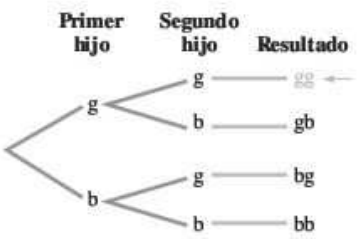
a) ella tiene un total de dos hijos. ***b)*** ella tiene un total de tres hijos.

SOLUCIÓN

a) El supuesto de igual probabilidad permite el uso de la probabilidad teórica. Pero, ¿cómo se puede determinar el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles?

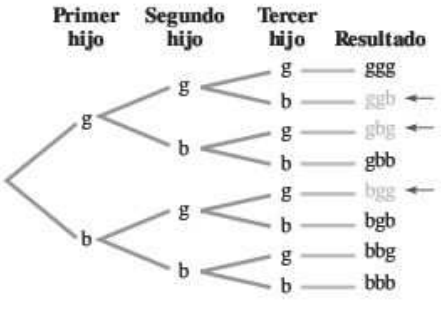
Una manera es usar un diagrama de árbol (véase la **sección 8.1**) para listar las posibilidades, como se muestra en la **figura 1**. A partir de la columna de resultados, se obtiene el espacio muestral $S = \{gg, gb, bg, bb\}$. Solo un resultado, marcado con una flecha, es favorable para el evento de tener exactamente dos hijas: $E = \{gg\}$.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$ Fórmula de probabilidad teórica



Exactamente dos niñas entre dos hijos

Figura 1



Exactamente dos niñas entre tres hijos

Figura 2

b) Para tres niños, se construye otro diagrama, como el mostrado en la **figura 2**. En este caso vemos que

$$S = \{ggg, ggb, gbg, gbb, bgg, bgb, bbg, bbb\} \text{ y } E = \{ggb, gbg, bgg\},$$

por lo que $P(E) = \frac{3}{8}$. ▮▮▮

Cuando se reparten (o se extraen) naipes, como en el siguiente ejemplo, el reparto se hace generalmente "sin remplazo". Una vez repartida, una carta *no* se remplaza en el mazo. De modo que todos los naipes de una mano son distintos. (*No* se permiten las repeticiones). En muchos casos, tal como en la generación de números de tres dígitos, las repeticiones de dígitos se permiten. Por ejemplo, 255 es un número legítima de tres dígitos. De modo que la selección de dígitos se hace "con remplazo".

Tabla 1 Número de manos de póquer de 5 cartas

Evento E	Número de resultados favorables para E
Escalera real de color	4
Escalera de color	36
Póquer	624
Full	3744
Colores	5108
Escalera	10,200
Tercia	54,912
Dos pares	123,552
Un par	1,098,240
Carta alta	1,302,540
Total	2,598,960

EJEMPLO 4 Determinación de la probabilidad en el reparto de naipes

Determine la probabilidad de que se reparta cada una de las siguientes manos de póquer de cinco naipes. Use la calculadora para obtener respuestas con 8 lugares decimales.

a) un full (tres naipes de una denominación y dos de otra)

b) una escalera real de color (las cinco cartas más altas: as, rey, reina, sota, diez, de un solo palo)

SOLUCIÓN

a) La **tabla 1** resume las diferentes clases de manos de cinco naipes. (Para mayor información sobre manos, véase la **sección 8.3**). Puesto que son igualmente probables 2,598,960 manos individuales, podemos introducir los números adecuados de la tabla en la fórmula de probabilidad teórica.

$$P(\text{full}) = \frac{3744}{2{,}598{,}960} = \frac{6}{4165} \approx 0.00144058$$

b) La tabla muestra que existen cuatro escaleras reales de color, una por cada palo.

$$P(\text{escalera real de color}) = \frac{4}{2{,}598{,}960} = \frac{1}{649{,}740} \approx 0.00000154$$

Los **ejemplos 3 y 4** utilizan la fórmula de probabilidad teórica porque se pudieron listar todos los resultados posibles y todos eran igualmente probables. Sin embargo, en el **ejemplo 3**, la probabilidad equivalente de niñas y niños fue un *supuesto*. De hecho, el nacimiento de varones ocurre con un poco más de frecuencia. (Al mismo tiempo, normalmente hay más mujeres vivas todo el tiempo, debido a las altas tasas de mortalidad infantil entre varones y la mayor esperanza de vida para las mujeres en general). El **ejemplo 5** muestra una manera de incorporar esta información empírica.

EJEMPLO 5 Determinación de la probabilidad del género de un vecino

De acuerdo con *Pocket World in Figures*, edición 2009, publicado por *The Economist*, la población estadounidense al final de 2006 estaba integrada por 148.2 millones de hombres y 152.8 millones de mujeres. Si se seleccionara aleatoriamente a una persona de la población de ese año, ¿cuál es la probabilidad de que la persona sea un hombre?

SOLUCIÓN

En este caso, se calcula la probabilidad empírica a partir de los datos experimentales existentes.

$$P(\text{hombres}) = \frac{\text{número de hombres}}{\text{total del número de personas}}$$

$$= \frac{148.2 \text{ millones}}{148.2 \text{ millones} + 152.8 \text{ millones}}$$

$$\approx 0.492$$

Ley de los grandes números

Recuerde el vaso del **ejemplo 2**. Si se hubiera lanzado al aire 50 veces más, tendríamos un total de 100 lanzamientos sobre los que se basaría una probabilidad empírica de la caída sobre su parte superior. El nuevo valor quizá sería diferente (al menos ligeramente) del que se obtuvo antes. Aún sería una probabilidad empírica, pero sería "mejor" en el sentido de que estaría basada en un conjunto más grande de resultados.

La **ley de los grandes números** también se puede definir como sigue.

Una probabilidad teórica en realidad no dice nada acerca de un experimento, ni siquiera acerca de unas cuantas repeticiones de dicho experimento, sino solo acerca de la proporción de éxitos que esperaríamos a la larga.

Si conforme se incrementa el número de lanzamientos, los valores de la probabilidad empírica resultante se aproximan a algún número particular, se puede definir ese número como la probabilidad teórica de que el vaso caiga sobre su parte superior. Este valor "límite" se podría determinar solo cuando el número real de lanzamientos observados se aproximara al número total de lanzamientos posibles del vaso. Como potencialmente existe un número infinito de lanzamientos posibles del vaso, nunca podríamos obtener realmente la probabilidad teórica. Pero podemos suponer que tal número existe. Y conforme el número de lanzamientos reales se incrementa, las probabilidades empíricas resultantes tienden a acercarse cada vez más al valor teórico.

Este principio tan importante se conoce como **ley de los grandes números** (o algunas veces como la "ley de promedios").

Ley de los grandes números

Conforme un experimento se repite más y más veces, la proporción de resultados favorables de cualquier evento particular tiende a acercarse más y más a la probabilidad teórica de ese evento.

EJEMPLO 6 Gráfica de una secuencia de proporciones

Se lanzó al aire una moneda no cargada (o justa) 35 veces, produciendo la siguiente secuencia de resultados.

xxccc, xxxcc, cxcxx, ccxcc, xxxcc, xcxxx, ccxcc

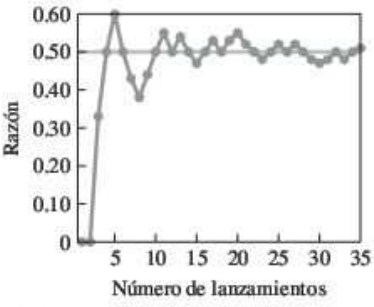
Calcule la razón entre las caras y el total de lanzamientos después del primer lanzamiento, después del segundo lanzamiento, y así sucesivamente hasta cubrir los 35 lanzamientos; represente esas razones en una gráfica.

SOLUCIÓN

Después del primer lanzamiento, tenemos 0 caras y 1 lanzamiento, para una razón de $\frac{0}{1} = 0.00$. Después de dos lanzamientos tenemos $\frac{0}{2} = 0.00$. Después de tres lanzamientos tenemos $\frac{1}{3} \approx 0.33$. Compruebe que las primeras seis razones son

0.00, 0.00, 0.33, 0.50, 0.60, 0.50.

Las 35 razones están graficadas como puntos en la **figura 3**. Las fluctuaciones alejadas de 0.50 se vuelven más pequeñas conforme el número de lanzamientos se incrementa, y las razones parecen aproximarse a 0.50 en el lado derecho de la gráfica, de conformidad con la ley de los grandes números.



Razón entre caras y el total de lanzamientos

Figura 3

Comparación de probabilidades empíricas y teóricas

Una serie de experimentos repetidos indica la *probabilidad empírica* de un evento, el cual, por *razonamiento inductivo*, es una *estimación* de la probabilidad *teórica del evento*. (El incremento del número de repeticiones aumenta la confiabilidad de la estimación).

Asimismo, una *probabilidad teórica* definida para un evento nos facilita, por *razonamiento deductivo*, *predecir* la proporción de veces que el evento ocurrirá en una serie de experimentos repetidos. (El pronóstico es más preciso para grandes números de repeticiones).



Gregor Johann Mendel (1822-1884) nació en una familia campesina que se las arregló para enviarlo a la escuela. En 1847 se ordenó sacerdote e impartía clases en la abadía de Saint Thomas. Terminó su educación en la Universidad de Viena y regresó a la abadía para enseñar matemáticas y ciencias naturales.

Mendel comenzó a realizar experimentos con plantas en el jardín de la abadía, con plantas de chícharos (guisantes) en particular, cuyos rasgos distintivos (o características individuales) lo dejaron perplejo. En 1865 publicó sus resultados. Su trabajo no fue reconocido en ese tiempo, aun cuando había fundado la **genética clásica**.

Probabilidad en genética

Las probabilidades, tanto empíricas como teóricas, son herramientas valiosas en muchas áreas de la ciencia. Uno de los primeros ejemplos importantes fue el trabajo del monje austriaco Gregor Mendel, quien aplicó la idea de aleatoriedad para contribuir al establecimiento del estudio de la genética.

En un esfuerzo por comprender el mecanismo de transmisión de caracteres de una generación de plantas a otra, Mendel contó el número de ocurrencias de varias características. Descubrió que el color de la flor en ciertas plantas de chícharos (guisantes) obedecía al siguiente esquema:

Rojo puro cruzado con blanco puro produce rojo.

Mendel especuló que el rojo era "dominante" (simbolizado con la letra mayúscula R), mientras que el blanco es "recesivo" (simbolizado con la letra minúscula r). El rojo puro progenitor tenía solo genes rojos (R), y el blanco puro progenitor tenía solo genes blancos (r). Los descendientes recibirían un gen de cada progenitor; por lo tanto, producirían una de las combinaciones mostradas en la **tabla 2**. Como cada descendiente recibe un gen rojo, esa característica domina y el descendiente presenta el color rojo.

Tabla 2 Primera a segunda generación

		Segundo progenitor	
		r	r
Primer progenitor	R	Rr	Rr
	R	Rr	Rr

Tabla 3 Segunda a tercera generación

		Segundo progenitor	
		R	r
Primer progenitor	R	RR	Rr
	r	rR	rr

Ahora, cada uno de esta segunda generación de descendientes, aun cuando presente el color rojo, posee un gen de cada color. De modo que cuando dos de ellos se crucen, cada descendiente de la tercera generación recibirá una de las combinaciones de genes mostradas en la **tabla 3**. Mendel supuso que cada una de estas posibilidades sería igualmente probable y realizó conteos experimentales que estuvieron lo suficientemente cerca para apoyar su hipótesis.

EJEMPLO 7 Determinación de probabilidades del color de flores

En relación con la **tabla 3**, determine la probabilidad de que una tercera generación de descendientes presente una flor de cada color requerido en los incisos ***a)*** y ***b)***. Base las probabilidades en un espacio muestral de resultados igualmente probables: $S = \{\text{RR}, \text{Rr}, \text{rR}, \text{rr}\}$.

a) rojo ***b)*** blanco

SOLUCIÓN

a) Como el rojo domina al blanco, cualquier combinación con al menos un gen rojo (R) producirá flores rojas. Como tres de las cuatro posibilidades cumplen este criterio, $P(\text{rojo}) = \frac{3}{4}$.

b) Solo la combinación rr no tiene un gen rojo, de modo que $P(\text{blanco}) = \frac{1}{4}$. ■■■

Momios

Mientras que la probabilidad compara el número de resultados favorables con el número total de resultados, los **momios** comparan el número de resultados favorables con el número de resultados no favorables. Los momios se citan normalmente, en lugar de las probabilidades, en carreras de caballos, loterías y en la mayoría de situaciones que implican apuestas. Y los momios citados normalmente son momios "en contra", más que momios "a favor".

Fumar 1.4 cigarrillos
Permanecer una hora en una mina de carbón
Vivir dos días en Nueva York o Boston
Comer 40 cucharaditas de mantequilla de maní
Vivir dos meses con un fumador de cigarrillos
Volar 1000 millas en un jet
Viajar 300 millas en un automóvil
Conducir 10 millas una bicicleta

Riesgo es la probabilidad de que ocurra un evento dañino. Casi toda acción o sustancia expone a una persona a un riesgo, y la evaluación y reducción del riesgo trae consigo un estudio y trabajo exhaustivo en nuestro mundo. La lista anterior, tomada de *Calculated Risk*, de J. Rodricks, incluye actividades que conllevan el incremento de las probabilidades de muertes anuales de una en un millón.

Momios

Si todos los resultados de un espacio muestral son igualmente probables, a de ellos son favorables al evento E, y los resultados restantes b son desfavorables a E, entonces los **momios a favor** de E son de a a b, y los **momios en contra** de E son de b a a.

EJEMPLO 8 Obtención de los momios para conseguir una posición interna

A Theresa Cortesini le han prometido uno de seis empleos, tres de los cuales son plazas como practicante en el Congreso estatal. Si tiene las mismas oportunidades para los seis empleos, determine los momios para que obtenga una de las plazas como practicante.

SOLUCIÓN

Como tres posibilidades son favorables y tres no lo son, los momios de convertirse en empleada del Congreso estatal son de 3 a 3 (o de 1 a 1 en términos simplificados). A los momios de 1 a 1 se les conoce con frecuencia como "momios parejos" u "oportunidades de 50 a 50". ■■■

EJEMPLO 9 Obtención de los momios para ganar un sorteo

Bob Barickman compró 12 boletos para un sorteo en la oficina en el cual el ganador recibirá un iPad. Si se vendieron 104 boletos y cada uno tiene la misma oportunidad de ganar, ¿cuáles son los momios en contra de que Bob gane el iPad?

SOLUCIÓN

Bob tiene 12 oportunidades de ganar y $104 - 12 = 92$ oportunidades de perder, de modo que los momios en contra de ganar son de 92 a 12, o de 23 a 3. (Se dividen ambos números entre 4). ■■■

Conversión entre probabilidades y momios

Considere que E representa un evento.

1. Si $P(E) = \frac{a}{b}$, entonces los momios a favor de E son de a a $(b - a)$.
2. Si los momios a favor de E son de a a b, entonces $P(E) = \frac{a}{a + b}$.

EJEMPLO 10 Conversión de probabilidades a momios

Hay 30% de probabilidad de que llueva mañana. Exprese esta información en términos de momios.

SOLUCIÓN

$$P(\text{lluvia}) = 0.30 = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

La fracción decimal se convierte a un cociente de números enteros y se simplifica.

■■■

Por la fórmula anterior de conversión número 1, los momios a favor de que llueva son de 3 a $10 - 3$, o de 3 a 7. O bien, se puede decir que los momios son de 7 a 3 en contra de que llueva mañana. ■■■

EJEMPLO 11 Conversión de momios a probabilidad

Los momios de ganar en cierta lotería son de 1 a 99,999. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

SOLUCIÓN

$$P(\text{ganar}) = \frac{1}{1 + 99{,}999} = \frac{1}{100{,}000} = 0.00001$$

Conversión de la fórmula 2

■■■

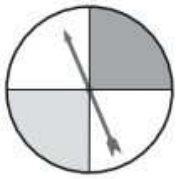
9.1 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 4, indique la probabilidad de que la aguja se detenga en **a)** *el color blanco,* **b)** *el color gris medio,* **c)** *el color gris oscuro.*

1.



2.



3.

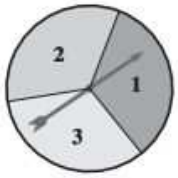


4.



Resuelva los siguientes problemas de probabilidad.

5. ***Uso de agujas giratorias para generar números*** Suponga que la aguja mostrada aquí es impulsada una vez, para determinar un número de un dígito, y estamos interesados en que el número resultante del evento E sea impar. Indique lo siguiente:



- **a)** el espacio muestral
- **b)** el número de resultados favorables
- **c)** el número de resultados desfavorables
- **d)** el número total de resultados posibles
- **e)** la probabilidad de un número impar
- **f)** los momios a favor de un número impar

6. ***Fila de niños de preescolar*** El grupo de preescolares de Kim Lenaghan está formado por nueve niñas y siete niños. Si Kim selecciona aleatoriamente a un pequeño para que esté al frente de la fila, considerando que el evento E es la selección de una niña, indique lo siguiente:

- **a)** el número total de resultados posibles
- **b)** el número de resultados favorables
- **c)** el número de resultados desfavorables
- **d)** la probabilidad del evento E
- **e)** los momios a favor del evento E

7. ***Uso de agujas giratorias para generar números*** La aguja del **ejercicio 5** es impulsada dos veces sucesivas para determinar un número de dos dígitos. Indique lo siguiente:

- **a)** el espacio muestral
- **b)** la probabilidad de un número impar
- **c)** la probabilidad de un número con dígitos repetidos
- **d)** la probabilidad de un número mayor que 30
- **e)** la probabilidad de un número primo

8. ***Probabilidades en el lanzamiento al aire de una moneda*** Se lanzan dos monedas no cargadas (o justas) al aire (digamos, una de 10 centavos y una de 25 centavos). Indique lo siguiente:

- **a)** el espacio muestral
- **b)** la probabilidad de caras en la moneda de 10 centavos
- **c)** la probabilidad de caras en la moneda de 25 centavos
- **d)** la probabilidad de obtener caras en ambas monedas
- **e)** la probabilidad de obtener el mismo resultado en ambas monedas

9. ***Extracción de pelotas de una urna*** Anne Kelly elige aleatoriamente una pelota de la urna mostrada aquí. Obtenga los momios en contra de cada uno de los siguientes eventos.



- **a)** obtener una pelota gris oscuro
- **b)** pelota gris claro **c)** pelota negra

10. ***Selección aleatoria de funcionarios de un club*** Cinco personas (Alan, Bill, Cathy, David y Evelyn) forman el club $N = \{A, B, C, D, E\}$. Si ellos eligen a un presidente aleatoriamente, obtenga los momios en contra de los siguientes resultados:

- **a)** elegir a Cathy **b)** elegir a una mujer
- **c)** elegir a una persona cuyo nombre inicia con una consonante

11. ***Selección aleatoria de música de la década de 1950*** Butch LeBeau tiene 50 éxitos de los años 50, incluyendo exactamente uno de Smiley Lewis, dos de The Drifters, tres de Bobby Darin, cuatro de The Coasters, y cinco de Fats Domino. Si Butch elige aleatoriamente un éxito de su colección, determine la probabilidad de que sea uno de los siguientes:

- **a)** Smiley Lewis **b)** The Drifters
- **c)** Bobby Darin **d)** The Coasters
- **e)** Fats Domino

12. ***Probabilidades en el lanzamiento al aire de una moneda*** Se lanzan tres monedas justas al aire.

- **a)** Escriba el espacio muestral.

Determine la probabilidad de los siguientes eventos:

- **b)** no obtener caras **c)** obtener exactamente una cara
- **d)** obtener exactamente dos caras **e)** obtener tres caras

13. ***Número de sumas del lanzamiento de dos dados*** En la **tabla 2** de la **sección 8.1** aparece el espacio muestral del lanzamiento de dos dados no cargados (esto es, justos). Reproduzca esa tabla, pero sustituya cada uno de los 36 pares ordenados igualmente probables por sus sumas correspondientes (de los dos dados). Luego, determine la probabilidad de obtener cada una de las sumas siguientes.

- **a)** 2 **b)** 3 **c)** 4
- **d)** 5 **e)** 6 **f)** 7
- **g)** 8 **h)** 9 **i)** 10
- **j)** 11 **k)** 12

En los ejercicios 14 y 15, dé las respuestas con tres decimales.

14. ***Probabilidad de germinación de semillas*** En un proyecto de investigación de maíz híbrido, se sembraron 200 semillas, y 175 de ellas germinaron. Determine la probabilidad empírica de que cualquier semilla particular de este tipo germinará.

15. ***Probabilidad de bosque en California*** De acuerdo con *The World Almanac and Book of Facts 2010*, California tiene 155,959 millas cuadradas de terreno, de las cuales 51,250 millas cuadradas son de bosques. Determine la probabilidad de que la selección aleatoria de alguna área en California tenga bosques.

16. ***Probabilidad de tener dos niñas entre cuatro hijos*** En el **ejemplo 3**, ¿cuál sería la probabilidad de que Kathy tuviera exactamente dos niñas si fuera a tener cuatro hijos? (Usted podría usar un diagrama de árbol para construir el espacio muestral).

17. ***Lanzamiento de dados alterados*** Un dado de seis caras se ha alterado de modo que la cara que tenía un punto ahora está en blanco. Otro dado tiene una cara en blanco en lugar de la cara de cuatro puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de un lanzamiento de los dos dados sea 7? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

18. ***Probabilidad de ubicación en un túnel*** El señor Davis está conduciendo a través de un túnel que tiene 8 millas de longitud. En este instante, ¿cuál es la probabilidad de que esté por lo menos a 6 millas de un extremo del túnel? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

Genética en las bocas de dragón (plantas) *Mendel no encontró dominancia en las plantas llamadas bocas de dragón (en contraste con los chícharos), en relación con el color rojo y blanco de las flores. Cuando se cruzan plantas progenitoras rojo puras y blanco puras (véase la* **tabla 2***), la combinación resultante Rr (uno de cada gen) produce una segunda generación de plantas boca de dragón con flores* rosas. *Sin embargo, esta segunda generación rosa, todavía lleva un gen blanco y un gen rojo, de modo que cuando esas plantas se cruzan, la tercera generación se rige por la* **tabla 3**.

Obtenga las siguientes probabilidades para la tercera generación de bocas de dragón.

19. P(rojas) **20.** P(rosas) **21.** P(blancas)

Genética en plantas de chícharos *Mendel también investigó otras características, además del color de las flores. Por ejemplo, los chícharos lisos son dominantes sobre los chícharos arrugados recesivos. La primera, segunda y tercera generaciones pueden analizarse otra vez usando las* **tablas 2 y 3**, *donde* R *representa los chícharos lisos y* r *representa los chícharos arrugados.*

22. Explique por qué al cruzar la primera generación de progenitores lisos puros y arrugados puros, se obtienen siempre chícharos lisos en la segunda generación.

23. Cuando se cruza una segunda generación de plantas de chícharos lisos (cada una de las cuales lleva tanto genes R como r), determine la probabilidad de que la tercera generación de descendientes tenga

a) chícharos lisos. ***b)*** chícharos arrugados.

Genética de fibrosis quística *La* fibrosis quística *es una de las enfermedades hereditarias más comunes en Norteamérica (incluyendo Estados Unidos); se presenta en aproximadamente* 1 *de cada* 2,000 *nacimientos de caucásicos y en* 1 *de cada* 250,000 *nacimientos de individuos no caucásicos. Incluso con tratamientos modernos, las víctimas normalmente mueren de males pulmonares poco después de cumplir 20 años de edad.*

Si representamos un gen de la fibrosis quística con una c *y un gen sano con una* C *(puesto que la enfermedad es recesiva), entonces solo una persona* cc *tendrá realmente la enfermedad. Estas personas normalmente morirían antes de tener hijos, pero un niño también puede heredar la enfermedad de padres* Cc *(quienes están sanos, es decir, no tienen síntomas, pero son "portadores" de la enfermedad). Esto es similar al caso de una planta de chícharos que hereda flores blancas a partir de dos progenitores de flores rojas que son portadores de genes blancos.*

24. Determine la probabilidad empírica (con cuatro decimales) de que se presente la fibrosis quística en el nacimiento de un niño elegido aleatoriamente entre caucásicos estadounidenses.

25. Determine la probabilidad empírica (con seis decimales) de que se presente la fibrosis quística en el nacimiento de un niño elegido aleatoriamente entre estadounidenses no caucásicos.

26. Entre 150,000 nacimientos de caucásicos norteamericanos, ¿cuántos casos de fibrosis quística se esperarían?

Suponga que ambos cónyuges de un matrimonio son portadores de fibrosis quística (un caso raro). Construya una tabla similar a la **tabla 3** *y determine la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.*

27. Su primer hijo tendrá la enfermedad.

28. Su primer hijo será portador.

29. Su primer hijo no tendrá la enfermedad ni será portador.

Suponga que un niño nació de un progenitor portador de la fibrosis quística y un progenitor no portador. Determine la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.

30. El niño tendrá fibrosis quística.

31. El niño será un portador sano de la fibrosis quística.

32. El niño no tendrá la enfermedad ni será portador de esta.

Genética de la anemia falciforme *La* anemia falciforme *se presenta aproximadamente en* 1 *de cada* 500 *nacimientos de bebés de raza negra y aproximadamente en* 1 *de cada* 160,000 *nacimientos de bebés que no son de raza negra. Normalmente es fatal en la niñez temprana. Existe una prueba para identificar a los portadores. A diferencia de la fibrosis quística, la cual es recesiva, la anemia falciforme es* **codominante**. *Esto significa que la herencia de dos genes de anemia falciforme causa la enfermedad, mientras que la herencia de un solo gen de anemia falciforme causa una versión benigna (no fatal, la cual se conoce como* **rasgo falciforme**). *Esto es similar a una planta boca de dragón que manifiesta flores rosas cuando hereda un gen rojo y un gen blanco.*

En los ejercicios 33 y 34 obtenga las probabilidades empíricas de los eventos descritos.

33. Un bebé de raza negra seleccionado aleatoriamente tendrá anemia falciforme. (Dé su respuesta con tres decimales).

34. Un bebé que no es de raza negra seleccionado aleatoriamente tendrá anemia falciforme. (Dé su respuesta con seis decimales).

35. Entre 80,000 nacimientos de bebés de raza negra, ¿aproximadamente cuántos casos de anemia falciforme se esperarían?

Determine la probabilidad teórica de las siguientes condiciones en un niño cuyos padres tienen el rasgo falciforme.

36. El niño tendrá anemia falciforme.

37. El niño tendrá el rasgo falciforme.

38. El niño estará sano.

39. ***Carrera femenil de 100 metros*** En la historia de las carreras de pista y campo, ninguna mujer ha roto la barrera de los 10 segundos en los 100 metros planos.

a) A partir del enunciado anterior, determine la probabilidad de que una corredora rompa la barrera de los 10 segundos el próximo año.

b) ¿Puede usted obtener la probabilidad teórica del evento del inciso ***a)***?

c) ¿Es posible que ocurra el evento del inciso ***a)***?

40. ¿Existe alguna manera de que una moneda pueda dejar de ser "justa"? Explique.

41. En la página 27 de su libro *Descartes' Dream*, Philip Davis y Reuben Hersh hicieron la siguiente pregunta: "¿La probabilidad es real, o solo es un encubrimiento de la ignorancia?". ¿Qué piensa usted? ¿Existen acontecimientos verdaderamente aleatorios o todo es potencialmente determinístico?

42. Si $P(E) = 0.37$, obtenga

a) los momios a favor de E,
b) los momios en contra de E.

43. Si los momios a favor del evento E son de 12 a 19, obtenga $P(E)$.

44. Si los momios en contra del evento E son de 10 a 3, obtenga $P(E)$.

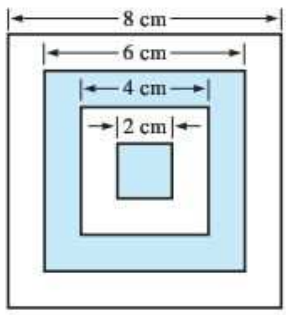
Probabilidades de manos de póquer *En un póquer de 5 naipes determine la probabilidad de repartir lo siguiente. Dé las respuestas con ocho decimales. (Remítase a la* **tabla 1***).*

45. una escalera de color **46.** dos pares

47. póquer de alguna clase **48.** cuatro reinas

49. corazones de color (no una escalera real de color, ni una escalera de color).

50. ***Probabilidades en lanzamiento de dardos*** Si un dardo golpea aleatoriamente el blanco mostrado aquí, ¿cuál es la probabilidad de que golpee una región sombreada? (*Sugerencia*: Compare el área de las regiones sombreadas con el área total del blanco).



51. ***Probabilidades en curling olímpico*** En un evento olímpico de curling, el área del blanco (mostrada aquí) consiste en cuatro círculos concéntricos sobre el hielo con radios de 6 pulgadas, 2 pies, 4 pies y 6 pies.



Si el miembro de un equipo deja caer *aleatoriamente* una piedra (de 43 libras) dentro del área del blanco, determine la probabilidad de que termine en el área

a) negra, ***b)*** blanca, ***c)*** gris.

52. ***Extracción de naipes*** Cuando se extraen cartas sin remplazo de un mazo normal de 52 naipes, determine el número máximo de cartas que es posible extraer para obtener

a) menos de tres naipes negros
b) menos de seis espadas
c) menos de cuatro figuras
d) menos de dos reyes.

Los ejercicios restantes requieren mucha concentración para determinar n(E) y n(S). (En algunos casos, usted podría emplear los métodos de conteo del capítulo 8, como el principio fundamental de conteo, permutaciones o combinaciones).

Probabilidades de arreglos de asientos *Seis personas (tres parejas casadas) se sentaron aleatoriamente en seis asientos consecutivos de una fila. Determine la probabilidad de cada evento en los ejercicios 53 a 56. (Sugerencia: En todos los casos, el denominador de la fracción de probabilidad será igual a* $6! = 720$*, es decir, el número total de maneras de arreglar seis elementos).*

53. Todos los hombres se sentarán inmediatamente a la izquierda de sus esposas.

54. Todos los hombres se sentarán inmediatamente a la izquierda de una mujer.

55. Las mujeres estarán en tres asientos adyacentes.

56. Las mujeres estarán en tres asientos adyacentes, al igual que los hombres.

57. ***Selección de pendientes*** Si se eligen aleatoriamente dos números del conjunto $\{-2, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 3\}$, calcule la probabilidad de que sean las pendientes de dos rectas perpendiculares. (Véase la **sección 7.2**).

58. ***Apuestas de carreras*** En la mayoría de las pistas de carreras de caballos, la "trifecta" es una carrera particular en la cual usted gana si selecciona correctamente los tres primeros lugares, en el orden adecuado. Si se incluyen cinco caballos igual de habilidosos en la trifecta de hoy, y Tracy Light selecciona una llegada, ¿cuál es la probabilidad de que ella sea una ganadora?

59. ***Probabilidades del horario de cursos de un estudiante*** Suponga que usted planea tomar tres cursos el próximo ciclo escolar. Si los elige aleatoriamente a partir de una lista de 12 cursos, cinco de los cuales son cursos de ciencias, ¿cuál es la probabilidad de que los tres cursos que seleccione sean cursos de ciencias?

60. ***Selección de programas de sinfonías*** Rhonda Goedeker seleccionó aleatoriamente tres conciertos sinfónicos para asistir esta temporada, eligiendo a partir de un programa de 10 conciertos, tres de los cuales son de obras de Beethoven. Determine la probabilidad de que Rhonda elija todos los conciertos de obras de Beethoven.



Selección de reportes de clase *Suponiendo que Ben, Jill y Pam son 3 de 26 alumnos de la clase y que se eligen aleatoriamente tres alumnos para entregar sus reportes durante la siguiente clase, determine la probabilidad (con seis decimales) de cada uno de los siguientes eventos.*

61. Ben, Jill y Pam son seleccionados, en ese orden.

62. Ben, Jill y Pam son seleccionados, en cualquier orden.

63. ***Selección aleatoria de números primos*** Si se eligen aleatoriamente dos números primos distintos entre los primeros ocho números primos, ¿cuál es la probabilidad de que su suma sea igual a 24?

64. ***Generación de números a partir de conjuntos de dígitos*** Los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 se arreglan aleatoriamente para formar un número de cinco dígitos. Determine la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.

a) El número es par.

b) El primero y el último dígitos del número son pares.

65. ***Sumas aleatorias*** Se eligen aleatoriamente dos números enteros del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y se suman. Determine la probabilidad de que su suma sea 11 si se eligen

a) con remplazo, ***b)*** sin remplazo.

66. ***Sumas y productos aleatorios*** Tamika selecciona aleatoriamente dos números diferentes del conjunto $\{8, 9, 10\}$ y los suma. Carlos toma aleatoriamente dos números diferentes del conjunto $\{3, 5, 6\}$ y los multiplica. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de Tamika sea mayor que el resultado de Carlos? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

67. ***Divisibilidad de productos aleatorios*** Cuando se arroja un dado justo de seis caras sobre una mesa, la cara inferior del dado no se puede ver. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números de las cinco caras que se pueden ver sea divisible entre 6? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

68. ***Obtención de fracciones con un dado*** Lisa tiene un dado rojo y uno verde, los cuales arroja para obtener fracciones. El dado verde indica el numerador y el dado rojo indica el denominador. Algunas de las fracciones tienen representaciones decimales exactas. ¿Cuántos resultados decimales exactos se pueden representar con estos dos dados? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una fracción con una representación decimal exacta? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

Obtención de números capicúa *Los números capicúa o palíndromos se leen igual hacia delante y hacia atrás. Por ejemplo, 30203 es un palíndromo de cinco dígitos. Si se elige un número aleatoriamente de cada uno de los siguientes conjuntos, determine la probabilidad de que sea un número capicúa o palíndromo.*

69. el conjunto de todos los números de dos dígitos

70. el conjunto de todos los números de tres dígitos

Seis personas, designadas como A, B, C, D, E y F, se dividen aleatoriamente en tres grupos de dos miembros. Obtenga las probabilidades de cada evento. (No imponga un orden indeseado entre los grupos).

71. *A* y *B* están en el mismo grupo, como lo están *C* y *D*.

72. *E* y *F* están en el mismo grupo.

9.2 EVENTOS QUE IMPLICAN "NO" Y "O"

Propiedades de la probabilidad • Eventos que implican "no" • Eventos que implican "o"

Propiedades de la probabilidad

Recuerde que una probabilidad empírica, basada en observaciones experimentales, puede ser el mejor valor disponible, pero es solo una aproximación a la ("verdadera") probabilidad teórica. Por ejemplo, no se ha sabido que un humano haya saltado alguna vez más de 8.5 pies verticalmente, de modo que la probabilidad empírica de este evento es cero. Observando los registros con los que se han roto los récords de saltos de altura, sospechamos que el evento es, de hecho, posible y que puede ocurrir algún día. Por lo tanto, debe tener una probabilidad teórica diferente de cero, aun cuando no tengamos manera de obtener su valor exacto.



Pierre Simon de Laplace (1749-1827) comenzó en 1773 a resolver el problema de por qué la órbita de Júpiter parece contraerse, mientras que la órbita de Saturno parece expandirse. Con el tiempo, Laplace elaboró una teoría completa del Sistema Solar. Su *Mecánica celeste* fue el fruto de casi una vida de trabajo. Fue publicada, en cinco volúmenes, entre 1799 y 1825. Laplace obtuvo el título de "el Newton francés".

El trabajo de Laplace sobre probabilidad fue realmente un complemento de su mecánica celeste. Él necesitaba demostrar que la probabilidad es útil en la interpretación de datos científicos.

Recuerde también que la fórmula de probabilidad teórica,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)},$$

es válida solo cuando todos los resultados del espacio muestral S son igualmente probables. Para el experimento de lanzar dos monedas al aire, podemos escribir $S = \{\text{cara-cara, cara-cruz, cruz-cara, cruz-cruz}\}$ y se calcula

$$P(\text{ambas caras}) = \frac{1}{4}, \qquad \text{lo cual es } \textit{correcto},$$

mientras que si definimos el espacio muestral con resultados que no son igualmente probables como $S = \{\text{ambas caras, ambas cruces, una de cada una}\}$, llegamos a

$$P(\text{ambas caras}) = \frac{1}{3}, \qquad \text{lo cual es } \textit{incorrecto}.$$

(Para convencerse de que $\frac{1}{4}$ es mejor valor que $\frac{1}{3}$, lance al aire dos monedas 100 veces o más, para ver a cuál fracción empírica parece acercarse).

Para cualquier evento E dentro de un espacio muestral S, sabemos que $0 \le n(E) \le n(S)$. Dividir todos los miembros de esta desigualdad entre $n(S)$ nos da

$$\frac{0}{n(S)} \le \frac{n(E)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)}, \quad \text{o} \quad \mathbf{0 \le P(E) \le 1}.$$

En palabras, la probabilidad de cualquier evento es un número de 0 a 1, inclusive.

Si el evento E es imposible (esto es, no puede pasar), entonces $n(E)$ debe ser 0 (E es el conjunto vacío), de modo que $P(E) = 0$. Si el evento E es cierto (no puede ayudar, pero puede pasar), entonces $n(E) = n(S)$, de modo que.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1.$$

Propiedades de la probabilidad

Sea E un evento dentro del espacio muestral S. Es decir, E es un subconjunto de S. Entonces, se aplican las siguientes propiedades.

1. $\mathbf{0 \le P(E) \le 1}$ (La probabilidad de un evento es un número entre 0 y 1, inclusive).
2. $\mathbf{P(\emptyset) = 0}$ ((La probabilidad de un evento imposible es 0).
3. $\mathbf{P(S) = 1}$ (La probabilidad de un evento cierto es 1).

EJEMPLO 1 Determinación de la probabilidad en el lanzamiento de un dado

Determine la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos cuando se arroja un dado justo:

a) se obtiene el número 2 ***b)*** se obtiene un número diferente de 2

c) se obtiene el número 7 ***d)*** se obtiene un número menor que 7

SOLUCIÓN

a) Como una de seis posibilidades es un 2, $P(2) = \frac{1}{6}$.

b) Hay cinco números de estos, 1, 3, 4, 5 y 6, de manera que $P(\text{un número diferente de } 2) = \frac{5}{6}$.

c) Ninguno de los resultados posibles es 7. Por lo tanto, $P(7) = \frac{0}{6} = 0$.

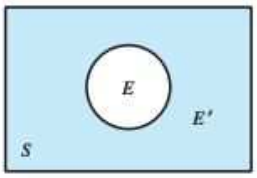
d) Como los seis resultados posibles son menores que 7,

$$P = (\text{un número menor que } 7) = \frac{6}{6} = 1.$$

Ninguna probabilidad en el **ejemplo 1** fue menor que 0 o mayor que 1, lo que ilustra la propiedad 1 de la probabilidad. El evento "imposible" del inciso ***c)*** tenía probabilidad 0, ilustrando la propiedad 2. El evento "cierto" del inciso ***d)*** tenía probabilidad 1, ilustrando la propiedad 3.

Eventos que implican "no"

La **tabla 4** repite la información de la **tabla 8** de la **sección 8.5**, con una tercera correspondencia agregada en la fila 3. Estas correspondencias son las bases de las reglas de probabilidad. Por ejemplo, la probabilidad de un evento que *no* sucede implica el *complemento* y la *sustracción*, de acuerdo con la fila 1 de la tabla.



El conector lógico "no" corresponde al "complemento" en teoría de conjuntos.

$$P(\text{no } E) = P(S) - P(E)$$
$$= 1 - P(E)$$

Figura 4

Tabla 4 Correspondencias entre teoría de conjuntos, lógica y aritmética

	Teoría de conjuntos	Lógica	Aritmética
1. Operación o conector (símbolo)	Complemento ($'$)	No ($\sim$)	Sustracción ($-$)
2. Operación o conector (símbolo)	Unión ($\cup$)	O ($\vee$)	Suma ($+$)
3. Operación o conector (símbolo)	Intersección ($\cap$)	Y ($\wedge$)	Multiplicación ($\cdot$)

A continuación se presenta la regla de la probabilidad de un complemento y se ilustra en la **figura 4**.

Probabilidad de un complemento (para no *E*)

La probabilidad de que un evento E *no* ocurra es igual a 1 menos la probabilidad de que *ocurra*.

$$P(\text{no } E) = 1 - P(E)$$

Observe que los eventos de los **ejemplos 1** ***a)*** y ***b)***, a saber, "2" y "no 2" son complementos uno del otro, y que sus probabilidades suman 1. Esto ilustra la regla de probabilidad anterior. La ecuación

$$P(E) + P(E') = 1$$

es un replanteamiento de la fórmula de la probabilidad de un complemento. Otra forma de la ecuación que también resulta útil en ocasiones es:

$$P(E) = 1 - P(E')$$

EJEMPLO 2 Determinación de la probabilidad de un complemento

Cuando se extrae un solo naipe de un mazo normal de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que no sea un rey?

SOLUCIÓN

$$P(\text{no un rey}) = 1 - P(\text{rey}) = 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

Recuerde escribir los términos en forma simplificada.

■■■

EJEMPLO 3 Determinación de la probabilidad de un complemento



A **Mary Somerville** (1780-1872) se le asocia con Laplace debido a su brillante exposición de la *Mecánica celeste*.

Somerville estudió a Euclides exhaustivamente y perfeccionó su latín para poder leer los *Principia* de Newton. Aproximadamente en 1816 fue a Londres y pronto se convirtió en parte de sus círculos científicos y literarios.

El libro de Somerville sobre las teorías de Laplace fue publicado en 1831 con gran aceptación. Luego publicó su obra *La conexión de las ciencias físicas* (1834). Un enunciado en una de sus ediciones sugería que las irregularidades en la órbita de Urano podrían indicar que existía un planeta más remoto, aún no descubierto. Esto captó la atención de los científicos que trabajaron en los cálculos de la órbita de Neptuno.

Si se lanzan al aire cinco monedas justas, calcule la probabilidad de obtener al menos dos caras.

SOLUCIÓN

Existen $2^5 = 32$ resultados posibles para el experimento de lanzar al aire cinco monedas justas. La mayoría incluye al menos dos caras. De hecho, solo los resultados

xxxxx, cxxxx, xcxxx, xxcxx, xxxcx y xxxxc

no incluyen al menos dos caras. Si E representa el evento "al menos dos caras", entonces E' es el evento "no al menos dos caras",

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{6}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$$

Eventos que implican "o"

Los **ejemplos 2 y 3** muestran cómo la probabilidad de un evento se puede aproximar *indirectamente*, considerando primero el complemento del evento. Otro método indirecto consiste en descomponer el evento en eventos componentes más simples. La fila 2 de la **tabla 4** indica que la probabilidad de un evento "*o*" del otro implica la *unión* y la *suma*.

EJEMPLO 4 Selección de un conjunto de números

Si se elige aleatoriamente un número del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, calcule la probabilidad de que sea

a) impar o un múltiplo de 4 ***b)*** impar o un múltiplo de 3.

SOLUCIÓN

Se definen los siguientes eventos:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ Espacio muestral
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ Resultados impares
$B = \{4, 8\}$ Múltiplos de 4
$C = \{3, 6, 9\}$ Múltiplos de 3

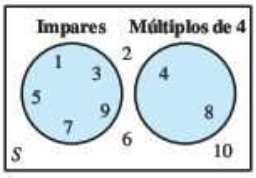


Figura 5

a) La **figura 5** muestra el posicionamiento de los 10 números enteros dentro del espacio muestral y dentro de los conjuntos pertinentes A y B. El evento compuesto "A o B" corresponde al conjunto $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$. Aplicando la fórmula de probabilidad teórica,

$$P(A \text{ o } B) = \frac{7}{10}.$$

De 10 resultados totales, 7 son favorables.

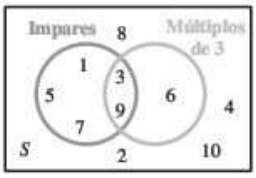


Figura 6

b) La **figura 6** muestra esta situación.

De 10 resultados totales, 6 son favorables.

$$P(A \text{ o } C) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

¿Podría haber funcionado la fórmula de la adición en el **ejemplo 4**? Comprobemos.

Inciso ***a)***: $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$ Correcto

Inciso ***b)***: $P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ Incorrecto

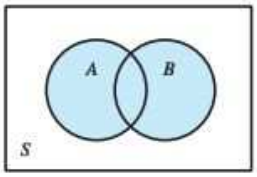
El problema del inciso ***b)*** es que A y C no son conjuntos disjuntos. Tienen resultados en común. Al igual que con el principio aditivo de conteo del **capítulo 8**, se debe efectuar un ajuste para compensar la duplicación de resultados comunes en el conteo.

$$P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C) - P(A \text{ y } C)$$
$$= \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$ Correcto

En teoría de probabilidad, los eventos que son conjuntos disjuntos se conocen como *eventos mutuamente excluyentes*.

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B son **eventos mutuamente excluyentes** si no tienen resultados en común. (Los eventos mutuamente excluyentes no ocurren de manera simultánea).



El conector lógico "o" corresponde a la "unión" en teoría de conjuntos.

$P(A \text{ o } B)$
$= P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$

Figura 7

Los resultados observados en el **ejemplo 4** se generalizan como sigue. Las dos posibilidades se ilustran en las **figuras 7** y **8**.

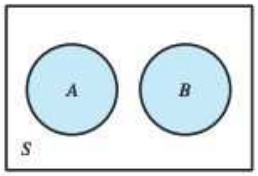
Regla de la suma de probabilidades (para *A* o *B*)

Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces

$$\boldsymbol{P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B).}$$

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces

$$\boldsymbol{P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B).}$$



Cuando A y B son mutuamente excluyentes,

$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$.

Figura 8

En realidad, la primera fórmula de la regla de la suma se aplica en todos los casos. (El tercer término de la derecha se elimina cuando A y B son mutuamente excluyentes, porque $P(A \text{ y } B) = 0$). También es útil recordar la segunda fórmula del recuadro anterior para varios casos donde los eventos componentes son mutuamente excluyentes. En esta sección, solo consideramos casos donde el evento "A y B" es sencillo. Trataremos con más enunciados compuestos que implican "y" en la siguiente sección.

EJEMPLO 5 Determinación de la probabilidad de un evento que implica "o"

Si se extrae un solo naipe del mazo normal de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que sea una carta de espadas o roja?

SOLUCIÓN

Observe primero que "espada" y "rojo" no pueden ocurrir al mismo tiempo, porque no existen espadas rojas. (Todas las espadas son negras). Por lo tanto, podemos usar la fórmula para eventos mutuamente excluyentes. Hay 13 espadas y 26 naipes rojos en el mazo.

$$P(\text{espada o rojo}) = P(\text{espada}) + P(\text{rojo}) = \frac{13}{52} + \frac{26}{52} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$$ ■■■

Con frecuencia es necesario considerar enunciados compuestos de más de dos eventos. Cuando cada evento implicado es mutuamente excluyente en relación con los demás, ampliamos la regla de la suma al número adecuado de componentes.

EJEMPLO 6 Tratamiento de uniones de varios componentes

Amy Hogan planea dedicar entre 1 y 6 horas a realizar su tarea. Si x representa el número de horas que dedicará, entonces las probabilidades de varios valores de x, redondeados a la hora más próxima, se muestran en la **tabla 5**. Obtenga las probabilidades de que Amy dedique

Tabla 5

x	$P(x)$
1	0.05
2	0.10
3	0.20
4	0.40
5	0.10
6	0.15

a) menos de 3 horas

b) más de 2 horas

c) más de 1, pero no más de 5 horas

d) menos de 5 horas.

SOLUCIÓN

Como los periodos de tiempo de la **tabla 5** son mutuamente excluyentes entre sí, basta con sumar los componentes de probabilidad adecuados.

a) $P(\text{menos de 3}) = P(1 \text{ o } 2)$ Menos de 3 significa 1 o 2.

$= P(1) + P(2)$ Regla de la suma

$= 0.05 + 0.10$ Se sustituyen los valores de la **tabla 5**.

$= 0.15$

b) $P(\text{más de 2}) = P(3 \text{ o } 4 \text{ o } 5 \text{ o } 6)$ Más de 2 significa 3, 4, 5 o 6.

$= P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$ Regla de la suma

$= 0.20 + 0.40 + 0.10 + 0.15$ Se sustituyen los valores de la **tabla 5**.

$= 0.85$

c) $P(\text{más de 1 pero no más de 5})$

$= P(2 \text{ o } 3 \text{ o } 4 \text{ o } 5)$ 2, 3, 4 y 5 son más de 1 y no más de 5.

$= P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$ Regla de la suma

$= 0.10 + 0.20 + 0.40 + 0.10$ Se sustituyen los valores de la **tabla 5**.

a) $= 0.80$

d) Aun cuando en este caso podemos aplicar un método directo, como en los incisos ***a)***, ***b)*** y ***c)***, combinaremos la regla del complemento con la regla de la suma.

$P(\text{menos de 5}) = 1 - P(\text{no menos de 5})$ Regla del complemento

$= 1 - P(5 \text{ o más})$ 5 o más es equivalente a no menos de 5.

$= 1 - P(5 \text{ o } 6)$ 5 o más significa 5 o 6.

$= 1 - [P(5) + P(6)]$ Regla de la suma

$= 1 - (0.10 + 0.15)$ Se sustituyen los valores de la **tabla 5**.

$= 1 - 0.25$ Se suman primero los valores dentro del paréntesis.

$= 0.75$

La **tabla 5** del **ejemplo 6** lista todos los intervalos de tiempo posibles de modo que las probabilidades correspondientes sumen 1, una condición necesaria para la manera en que se resolvió el inciso ***d)***. El tiempo dedicado a la tarea en este caso es un ejemplo de una **variable aleatoria**. (Es "aleatoria" porque no se puede pronosticar cuál de sus valores posibles se presentará).

Una lista como la **tabla 5**, que muestra todos los valores posibles de una variable aleatoria, junto con las probabilidades de que esos valores ocurran, se conoce como **distribución de probabilidad** de esa variable aleatoria. Como se listan *todos* los valores posibles, forman el espacio muestral completo, y así las probabilidades deben sumar 1 (de acuerdo con la propiedad 3 de probabilidades). Las distribuciones de probabilidad se presentarán en los **ejercicios 32 y 33** de esta sección y se analizarán con mayor detalle en secciones posteriores.

EJEMPLO 7 Determinación de la probabilidad de un evento que implica "o"

Determine la probabilidad de que un solo naipe extraído de un mazo normal de 52 cartas sea un diamante o una figura.

SOLUCIÓN

Los eventos componentes "diamante" y "figura" se pueden presentar de forma simultánea. (La sota, la reina y el rey de diamantes pertenecen a ambos eventos). Entonces, debemos usar la primera fórmula de la regla de la suma. Considere que D representa "diamante" y F representa "figura".

$$P(D \text{ o } F) = P(D) + P(F) - P(D \text{ y } F) \quad \text{Regla de la adición}$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} \quad \text{Hay 13 diamantes, 12 figuras y 3 que son ambas.}$$

$$= \frac{22}{52} \quad \text{Se suma y se resta.}$$

$$= \frac{11}{26} \quad \text{Se escriben los términos de forma simplificada.}$$

■■■

EJEMPLO 8 Determinación de la probabilidad de un evento que implica "o"

De 20 cursos optativos, Emily Horowitz planea inscribirse en uno, el cual elegirá lanzando un dardo al programa de cursos. Si 8 de los cursos son recreativos, 9 son interesantes y 3 son tanto recreativos como interesantes, determine la probabilidad de que el curso que elija Emily tenga al menos uno de estos dos atributos.

SOLUCIÓN

Si R representa "recreativo" e I representa "interesante", entonces $P(R) = \frac{8}{20}$, $P(I) = \frac{9}{20}$, y $P(R \text{ e } I) = \frac{3}{20}$. R e I no son mutuamente excluyentes.

$$P(R \text{ o } I) = \frac{8}{20} + \frac{9}{20} - \frac{3}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} \quad \text{Regla de la suma; términos de forma simplificada}$$

■■■

9.2 EJERCICIOS

1. ***Determine si los eventos son mutuamente excluyentes*** Amanda Crotts tiene tres asistentes de oficina. Si A es el evento de que al menos dos de ellos son hombres, y B es el evento de que al menos dos de ellos son mujeres, ¿A y B son mutuamente excluyentes?

2. ***Determine si los eventos son mutuamente excluyentes*** Jeanne Jalufka obtuvo su título universitario hace varios años. Considere los cuatro eventos siguientes.

   Su alma máter está en el Este.

   Su alma máter es una universidad privada.

   Su alma máter está en el noroeste.

   Su alma máter está en el sur.

   ¿Estos eventos son mutuamente excluyentes entre sí?

3. Explique la diferencia entre las dos fórmulas de la regla de la suma de probabilidades de la **página 474**, ilustrando cada una con un ejemplo adecuado.

Probabilidades en el lanzamiento de un dado *Para el experimento de arrojar un solo dado, determine la probabilidad de cada uno de los siguientes resultados.*

4. un número no menor que 2
5. un número que no es primo
6. un número impar o menor que 5
7. un número par o primo
8. un número impar o par
9. un número menor que 3 o mayor que 4

Probabilidades y momios en la extracción de una carta *Para el experimento de extraer una sola carta de un mazo normal de 52 naipes, determine* ***a)*** *la probabilidad, y* ***b)*** *los momios a favor de cada uno de los siguientes eventos.*

10. la carta no es un as
11. obtener rey o reina
12. obtener trébol o corazón

13. obtener espada o figura

14. no un corazón, o un 7

15. ni un corazón ni un 7

Sumas de números de un par de dados lanzados *Para el experimento de arrojar un par de dados ordinarios, determine las probabilidades de que la suma sea cada uno de los siguientes números. (Puede usar una tabla que muestre la suma de cada uno de los 36 resultados igualmente probables).*

16. 11 o 12

17. par o múltiplo de 3

18. impar o mayor que 9

19. menor que 3 o mayor que 9

20. Calcule la probabilidad de obtener un número primo en cada caso.

a) Se elige un número aleatoriamente del conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 12\}$

b) Se arrojan dos dados y se observa la suma.

21. Suponga que en un experimento determinado, A, B, C y D son eventos, todos mutuamente excluyentes entre sí, tales que $A \cup B \cup C \cup D = S$ (el espacio muestral). Ampliando la regla de la suma de la **página 474** para este caso, y utilizando la propiedad 3 de las probabilidades, ¿qué enunciado podría formular?

Probabilidades de manos de póquer *Si usted reparte una mano de 5 naipes (esto implica sin remplazo) de una mazo normal de 52 cartas, determine la probabilidad de obtener lo siguiente. Remítase a la* **tabla 1** *de la* ***sección 9.1****, y dé las respuestas con seis decimales.*

22. una carta de color o una tercia

23. un full o una escalera

24. un color negro o dos pares

25. nada mejor que dos pares

Probabilidades en los resultados del golf *La tabla indica las probabilidades de puntuación del golfista Brian Donahue en varios rangos, en el curso de un par 70. En un recorrido determinado, calcule la probabilidad de cada evento en los ejercicios 26 a 30.*

x	$P(x)$
Abajo de 60	0.04
60–64	0.06
65–69	0.14
70–74	0.30
75–79	0.23
80–84	0.09
85–89	0.06
90–94	0.04
95–99	0.03
100 o arriba	0.01

26. 95 o mayor

27. par o arriba

28. en los 80

29. menos de 90

30. no en los 70, 80 o 90

31. ¿Cuáles son los momios de que Brian anote un bajo par?

32. ***Extracción de pelotas de una urna*** Anne Kelly selecciona aleatoriamente una pelota de la urna mostrada aquí, y x representa el color de la pelota elegida. Elabore la distribución de probabilidad completa para la variable aleatoria x.



33. Sea x la suma de dos números diferentes elegidos aleatoriamente del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Construya la distribución de probabilidad de la variable aleatoria x.

34. ***Comparación de las probabilidades empírica y teórica del lanzamiento de dos dados*** Se lanzan dos dados 50 veces, llevando el registro del número de veces que la suma es "menor que 3 o mayor que 9" (es decir, 2, 10, 11 o 12).

a) A partir de sus resultados, calcule la probabilidad empírica del evento "menor que 3 o mayor que 9".

b) ¿Cómo difiere su respuesta en comparación con la probabilidad teórica del **ejercicio 19**?

Para los ejercicios 35 a 38, sea A un evento dentro del espacio muestral S, y sea $n(A) = a$ y $n(S) = s$.

35. Use el principio de conteo de complementos con la finalidad de obtener una expresión para $n(A')$.

36. Use la fórmula de probabilidad teórica para expresar $P(A)$ y $P(A')$.

37. Evalúe y simplifique $P(A) + P(A')$.

38. ¿Qué regla sometió a prueba?

Los ejercicios restantes requieren mucha atención para la determinación de n(E) y n(S). (En algunos casos, podría emplear los métodos de conteo del capítulo 8, como el principio fundamental de conteo, permutaciones o combinaciones).

Generación de números a partir de conjuntos de dígitos *Suponga que deseamos formar números de tres dígitos usando el conjunto de dígitos*

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

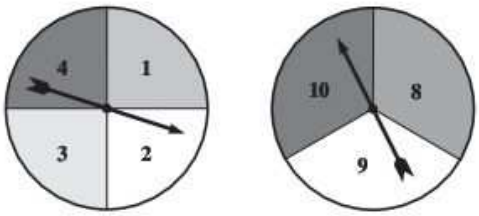
Por ejemplo, 501 *y* 224 *son ejemplos de tales números, pero* 035 *no lo es.*

39. ¿Cuántos de estos números son posibles?

40. ¿Cuántos de estos números son múltiplos de 5?

41. Si se elige aleatoriamente un número de tres dígitos de todos aquellos que pueden hacerse con el conjunto de dígitos anterior, calcule la probabilidad de que una elección no sea múltiplo de 5.

42. ***Multiplicación de números generados por agujas giratorias*** Un experimento consiste en girar las agujas mostradas aquí y multiplicar los números resultantes. Calcule la probabilidad de que el producto resultante sea par.



43. ***Extracción de canicas de colores*** Una bolsa contiene 50 canicas azules y 50 verdes. Dos canicas se seleccionan aleatoriamente al mismo tiempo. Si ambas son verdes, se colocan en la caja A; si ambas son azules, se colocan en la caja B; si una es verde y la otra es azul, se colocan en la caja C. Después de que se extraen todas las canicas, ¿cuál es la probabilidad de que los números de canicas en la caja A y en la caja B sean iguales? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

44. ***Nacimientos aleatorios en el mismo día de la semana*** ¿Cuál es la probabilidad de que, de tres personas elegidas aleatoriamente, al menos dos hayan nacido el mismo día de la semana? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

9.3 PROBABILIDAD CONDICIONAL; EVENTOS QUE IMPLICAN "Y"

Probabilidad condicional • Eventos que implican "y"



Incluso **una ocurrencia poco común** en ocasiones puede generar una gran controversia. Hace algunos años, cuando Mattel comercializó una nueva muñeca Barbie que hablaba, algunas de las Barbie se programaron para decir "La clase de matemáticas es difícil". El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), la American Association of University Women (AAUW) y numerosos consumidores se quejaron por el daño que este mensaje podría generar en la autoconfianza de los niños y en sus actitudes hacia la escuela y las matemáticas. Mattel estuvo de acuerdo en borrar la frase del microchip que se iba a usar en la futura producción de muñecas.

Cada Barbie fue programada para decir cuatro frases diferentes, seleccionadas aleatoriamente de un grupo de 270 frases pregrabadas. Por lo tanto, la probabilidad de obtener una que dijera "La clase de matemáticas es difícil" era solo de

$$\frac{1 \cdot {}_{269}C_3}{{}_{270}C_4} \approx 0.015.$$

Otros mensajes incluidos en el grupo eran "Amo la escuela, ¿tú no?", "Estudio para ser doctora" y "Estudiemos para el examen".

Probabilidad condicional

Algunas veces la probabilidad de un evento se debe calcular usando el conocimiento de que algún otro evento sucedió (o está sucediendo o sucederá: el tiempo no es importante). Este tipo de probabilidad se conoce como *probabilidad condicional*.

Probabilidad condicional

La probabilidad del evento B, calculada con base en el supuesto de que el evento A sucedió, se conoce como la **probabilidad condicional de B dado A**, y se representa por

$$P(B|A).$$

EJEMPLO 1 Selección de un conjunto de números

Del espacio muestral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, se va a seleccionar aleatoriamente un solo número. Calcule cada probabilidad, dados los eventos

A: El número seleccionado es impar, y B: El número seleccionado es un múltiplo de 3.

a) $P(B)$ ***b)*** $P(A \text{ y } B)$ ***c)*** $P(B|A)$

SOLUCIÓN

a) $B = \{3, 6, 9\}$, por lo que $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{10}$.

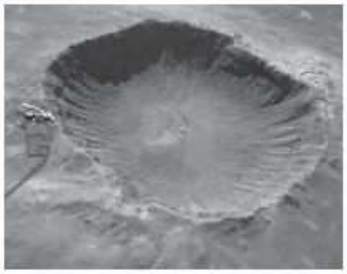
b) A y B es el conjunto $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{3, 6, 9\} = \{3, 9\}$.

$$P(A \text{ y } B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

c) La condición dada, que ocurra A, reduce efectivamente el espacio muestral de S a A, y los elementos del nuevo espacio muestral A que también están en B son los elementos de $A \cap B$.

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{5}$$

▮▮▮



Un **impacto cósmico**, es decir, la colisión de un meteorito, cometa o asteroide con la Tierra, podría ser tan catastrófico como una guerra nuclear a gran escala y matar a mil millones de personas o más. El sitio Web www.impact.arc.nasa.gov informa que un objeto lo suficientemente grande (de un kilómetro o más de diámetro) podría poner en riesgo de aniquilación a la especie humana causando cambios drásticos en el clima y destruyendo los cultivos para el consumo humano.

El Spaceguard Survey ha descubierto más de la mitad del número estimado de asteroides cercanos a la Tierra en el rango de esas dimensiones y espera localizar el 90% de ellos en la próxima década. Aun cuando el riesgo de encontrar uno en el curso de colisión con la Tierra es mínimo, se ha previsto que si sucediera, deberíamos estar en condiciones de desviarlo antes del impacto.

La fotografía que aquí se presenta muestra un cráter, en Arizona, de 4000 pies de diámetro y 570 pies de profundidad, que se formó hace 20,000 o 50,000 años, por un meteorito de 50 metros de ancho que se impactó contra el suelo a varios kilómetros por segundo. (Véase http://en.wikipedia.org/wiki/Meteor_Crater).

El **ejemplo 1** ilustra algunos aspectos importantes. Primero porque

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}$$ Se multiplican el numerador y el denominador por $\frac{1}{n(S)}$.

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$ Fórmula de probabilidad teórica

la última línea del ejemplo proporciona la siguiente fórmula.

Fórmula de probabilidad condicional

La **probabilidad condicional de B dado A** se calcula como sigue.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)}$$

Una segunda observación del **ejemplo 1** es que la probabilidad condicional de B, dado A, fue de $\frac{2}{5}$, mientras que la probabilidad "sin condición" de B (es decir, sin condición de por medio) fue de $\frac{3}{10}$; por lo tanto, la condición hizo la diferencia.

EJEMPLO 2 Cálculo de probabilidades de niños y niñas en una familia

Dada una familia con dos hijos, encuentre las probabilidades de que

a) ambos sean niñas, considerando que al menos uno es niña, y

b) ambos sean niñas, considerando que el hijo mayor es una niña.

(Suponga que los niños y niñas son igualmente probables).

SOLUCIÓN

Se definen los siguientes eventos.

$S = \{gg, gb, bg, bb\}$ Espacio muestral

$A = \{gg\}$ Ambos hijos son niñas.

$B = \{gg, gb, bg\}$ Al menos uno es niña.

$C = \{gg, gb\}$ El hijo mayor es una niña.

Observe que $A \cap B = \{gg\}$.

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \text{ y } B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4} \div \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(A|C) = \dfrac{P(A \text{ y } C)}{P(C)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \dfrac{1}{4} \div \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{4}{2} = \dfrac{1}{2}$

Algunas veces una probabilidad condicional no es diferente a la probabilidad no condicionada correspondiente; en tal caso, las dos se conocen como *independientes*.

Eventos independientes

Dos eventos A y B se conocen como **eventos independientes** si el conocimiento acerca de la ocurrencia de uno de ellos no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia del otro, es decir, si

$$P(B|A = PB), \quad \text{o, de manera equivalente,} \quad P(A|B = PA).$$

EJEMPLO 3 Verificación de la independencia de eventos

Se extrae un solo naipe de un mazo normal de 52 cartas. (El espacio muestral S tiene 52 elementos). Considere los eventos

A: El naipe seleccionado es una figura, y B: El naipe seleccionado es una carta negra.

a) Determine $P(B)$.

b) Determine $P(B|A)$.

c) Determine si los eventos A y B son independientes.

SOLUCIÓN

a) Existen 26 cartas negras en el mazo de 52 naipes.

$$P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$ Fórmula de probabilidad teórica

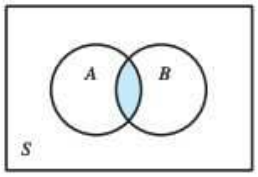
b) $P(B|A) = \dfrac{P(B \text{ y } A)}{P(A)}$ Fórmula de probabilidad condicional

$= \dfrac{\frac{6}{52}}{\frac{12}{52}}$ De 52 cartas, 12 son figuras y 6 son figuras negras.

$= \dfrac{6}{52} \cdot \dfrac{52}{12}$ Para dividir, se multiplica por el recíproco.

$= \dfrac{1}{2}$ Se calcula y se escriben los términos en forma simplificada.

c) Como $P(B|A) = P(B)$, los eventos A y B son independientes. ■■■



El conector lógico "y" corresponde a la "intersección" en teoría de conjuntos.

$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Figura 9

Eventos que implican "y"

Si se multiplican ambos lados de la fórmula de probabilidad condicional por $P(A)$, se obtiene una expresión para $P(A \cap B)$, la cual se aplica a los eventos de la forma "A y B". La fórmula resultante está relacionada con el principio fundamental de conteo del **capítulo 8**. Esto se ilustra en la **figura 9**.

Así como el cálculo de $P(A \text{ o } B)$ es más sencillo cuando A y B son mutuamente excluyentes, el cálculo de $P(A \text{ y } B)$ es más sencillo cuando A y B son independientes.

Regla de la multiplicación de probabilidades (para A y B)

Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces

$$\boldsymbol{P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B|A).}$$

Si A y B son independientes, entonces

$$\boldsymbol{P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B).}$$

La primera fórmula de la regla de la multiplicación en realidad se aplica en todos los casos. ($P(B|A) = P(B)$ cuando A y B son independientes). Aun así, la independencia de los eventos componentes es evidente en muchos casos, de modo que es conveniente recordar también la segunda fórmula.

EJEMPLO 4 Selección de un conjunto de libros

Cada año, Jacqui Carper agrega a su colección de libros varias publicaciones nuevas que, en su opinión, tendrán valor e interés duraderos. Ella clasificó cada una de sus 20 adquisiciones de 2011 con base en las siguientes categorías: edición de lujo o rústica, y ficción u obras que no son historias de ficción. El número de libros en las diferentes categorías se muestra en la **tabla 6**.

Tabla 6 Libros del año 2011

	Obras de ficción (F)	Obras que no son de ficción (N)	Totales
Edición de lujo (H)	3	5	8
Edición rústica (P)	8	4	12
Totales	11	9	20

Si Jacqui selecciona al azar uno de estos 20 libros, calcule la probabilidad de que sea

a) edición de lujo, ***b)*** obra de ficción, dado que es una edición de lujo,

c) edición de lujo y obra de ficción.

SOLUCIÓN

a) Ocho de los 20 libros son edición de lujo, de manera que $P(H) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

b) La condición de que el libro sea una edición de lujo reduce el espacio muestral a ocho libros. De esos ocho, solo tres son de ficción, de modo que $P(F|H) = \frac{3}{8}$.

c) $P(H \text{ y } F) = P(H) \cdot P(F|H) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$ Regla de la multiplicación

En este caso es más fácil si vemos, directamente en la **tabla 6**, que 3 de los 20 libros son de "lujo y ficción". Esto comprueba que la regla general de multiplicación de probabilidades nos dio la respuesta correcta. ■■■

EJEMPLO 5 Selección de un conjunto de planetas

Tabla 7 Distancia media entre planetas y el Sol

Mercurio	58
Venus	108
Tierra	150
Marte	228
Júpiter	778
Saturno	1430
Urano	2870
Neptuno	4500

La **tabla 7** lista los ocho planetas de nuestro sistema solar con sus distancias medias al Sol, en millones de kilómetros. (Datos obtenidos de *The World Almanac and Book of Facts 2010*). Carrie Ayers debe elegir dos planetas distintos para elaborar un informe en su clase de astronomía. Si los elige aleatoriamente, calcule la probabilidad de que el primero que elija esté más cerca del Sol que Marte, y que el segundo esté más cerca del Sol que Saturno.

SOLUCIÓN

Se definen los eventos

A: El primero está más cerca que Marte, y B: El segundo está más cerca que Saturno.

Entonces $P(A) = \frac{3}{8}$. (Tres, de los ocho de la selección original, son aceptables). Si el primer planeta elegido está más cerca del Sol que Marte, también está más cerca que Saturno, y como ese planeta ya no está disponible para la segunda elección, $P(B|A) = \frac{4}{7}$. (Cuatro de los siete restantes son aceptables).

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{14} \approx 0.214$$ Regla de la multiplicación ■■■

En el **ejemplo 5**, la condición de que A había ocurrido alteró la probabilidad de B, puesto que la selección se realizó, en efecto, sin remplazo. (No se permitían las repeticiones). Los eventos A y B no eran independientes. Por otro lado, en el siguiente ejemplo, los mismos eventos, A y B, serán independientes.

EJEMPLO 6 Selección de un conjunto de planetas

Carrie debe seleccionar otra vez dos planetas, pero esta vez uno es para una presentación oral, y el otro es para redactar un informe escrito, y no necesariamente deben ser distintos. (Se puede elegir el mismo planeta para ambos trabajos). Obtenga nuevamente la probabilidad de que, si su elección es aleatoria, el primero esté más cerca del Sol que Marte, y el segundo esté más cerca del Sol que Saturno.

SOLUCIÓN

Al definir los eventos A y B como en el **ejemplo 5**, tenemos que $P(A) = \frac{3}{8}$, igual que antes. Pero la selección se hace ahora *con* remplazo. (Se permiten las repeticiones). El evento B es independiente del evento A, de modo que podemos usar la segunda forma de la regla de la multiplicación.

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64} \approx 0.234$$

La respuesta es diferente de la del **Ejemplo 5.**

■■■

EJEMPLO 7 Extracción a partir de un mazo de naipes

Se extrae una sola carta de un mazo normal de 52 naipes. Considere que B representa el evento de que la carta sea negra, y D representa el evento de que la carta sea un diamante. ¿Los eventos B y D son

a) independientes? ***b)*** mutuamente excluyentes?

SOLUCIÓN

a) Para la probabilidad no condicionada de D, obtenemos $P(D) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. (Trece de los 52 naipes son diamantes). Pero para la probabilidad condicional de D, dado B, tenemos $P(D|B) = \frac{0}{26} = 0$. (Ninguna de las 26 cartas negras es un diamante). Como la probabilidad condicional $P(D|B)$ es diferente de la probabilidad no condicionada $P(D)$, B y D no son independientes.

b) Los eventos mutuamente excluyentes son eventos que no pueden ocurrir ambos en la ejecución de un experimento. Como ninguna carta del mazo es tanto negra como diamante, B y D son mutuamente excluyentes. ■■■

EJEMPLO 8 Selección de pelotas de una urna



Anne está extrayendo pelotas de la misma urna (mostrada en el margen). Esta vez ella extrae tres pelotas, sin remplazo. Calcule la probabilidad de que saque una gris oscuro, una gris claro y una negra, en ese orden.

SOLUCIÓN

Usando las letras adecuadas para representar los colores y subíndices para indicar la primera, segunda y tercera extracciones, el evento se puede representar como GO_1 y GC_2 y N_3.

$$\begin{aligned} P(GO_1 \text{ y } GC_2 \text{ y } N_3) &= P(GO_1) \cdot P(GC_2|GO_1) \cdot P(N_3|GO_1 \text{ y } GC_2) \\ &= \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{99} \approx 0.0404 \end{aligned}$$

■■■

EJEMPLO 9 Extracción a partir de un mazo de cartas

Si se extraen cinco cartas sin remplazo de un mazo normal de 52 naipes, calcule la probabilidad de que sean corazones.

SOLUCIÓN

Cada vez que se extrae un corazón, el número de naipes disponibles disminuye en 1, y el número de corazones disminuye en uno.

$$P(\text{todos los corazones}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} = \frac{33}{66{,}640} \approx 0.000495$$

■■■



La **búsqueda de inteligencia extraterrestre** inició con seriedad en 1961, cuando el doctor Frank Drake presentó una ecuación de la estimación del número de civilizaciones posibles en la Vía Láctea cuyas comunicaciones se podrían detectar. Durante años, muchos científicos han impulsado el trabajo en esa área, incluyendo al extinto astrónomo y astrobiólogo Carl Sagan, quien difundió el asunto en sus presentaciones televisivas y en su libro *La conexión cósmica*. "Debe haber otro astro habitado", dijo Sagan. De hecho, algunos astrónomos han calculado que los momios en contra de que la vida en la Tierra sea la única en el Universo son de 100 miles de millones de miles de millones contra uno.

Otros expertos no están de acuerdo. Freeman Dyson, un físico, matemático y astrónomo notable, dice en su libro *Disturbing the Universe* que después de considerar la misma evidencia y argumentos, cree que es exactamente tan probable como no (aun con momios) que haya otra vida inteligente allí afuera.

Si usted estudió métodos de conteo (**capítulo 8**), tal vez desee resolver el problema del **ejemplo 9** usando la fórmula de la probabilidad teórica y combinaciones. El número total posible de manos de cinco naipes, extraídos sin remplazo, es ${}_{52}C_5$, y el número de aquellos que contienen solo corazones es ${}_{13}C_5$.

$$P(\text{todos los corazones}) = \frac{{}_{13}C_5}{{}_{52}C_5} = \frac{\frac{13!}{5!8!}}{\frac{52!}{5!47!}} \approx 0.000495$$ Use una calculadora.

EJEMPLO 10 Uso de las reglas de la suma y la multiplicación

Un taller local emplea a dos mecánicos, Arnie y Burt. Los clientes han descubierto que Arnie realiza dos veces más reparaciones que Burt, y que Arnie hace un buen trabajo en tres de cuatro reparaciones, y que Burt realiza un buen trabajo solo en dos de cinco reparaciones. Si usted planea enviar su automóvil a reparación, calcule la probabilidad de que realicen un buen trabajo.

SOLUCIÓN

Se definen los eventos

A: trabajo realizado por Arnie; B: trabajo realizado por Burt; G: un buen trabajo.

Como Arnie hace el doble de trabajos que Burt, las probabilidades (no condicionadas) de los eventos A y B son, respectivamente, $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$. Como Arnie hace un buen trabajo en tres de cuatro reparaciones, la probabilidad de un buen trabajo, cuando Arnie lo realiza, es de $\frac{3}{4}$. Y como Burt realiza un buen trabajo en dos de cinco reparaciones, la probabilidad de un buen trabajo, cuando lo realiza Burt es de $\frac{2}{5}$. (Estas dos últimas son probabilidades condicionales). Estos cuatro valores se pueden resumir de la siguiente forma.

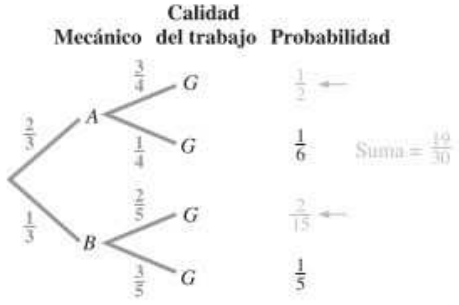
$$P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(G|A) = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad P(G|B) = \frac{2}{5}.$$

El evento G puede ocurrir de dos maneras mutuamente excluyentes: Arnie se encarga del trabajo y lo realiza bien ($A \cap G$), o Burt se encarga del trabajo y lo realiza bien ($B \cap G$).

$$\begin{aligned} P(G) &= P(A \cap G) + P(B \cap G) && \text{Regla de la suma} \\ &= P(A) \cdot P(G|A) + P(B) \cdot P(G|B) && \text{Regla de la multiplicación} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} && \text{Se sustituyen valores.} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{15} = \frac{19}{30} \approx 0.633 \end{aligned}$$

Primero se multiplica, luego se suma.

El diagrama de árbol de la **figura 10** muestra un método gráfico de organizar el trabajo del **ejemplo 10**. Use la información disponible para dibujar el diagrama de árbol, luego calcule la probabilidad de un buen trabajo sumando las probabilidades de las ramas indicadas del árbol.



Experimento del taller mecánico

Figura 10

EJEMPLO 11 Selección de premios con los boletos de entrada



La **búsqueda de inteligencia extraterrestre (search for extraterrestrial intelligence, SETI)** se ha realizado principalmente durante la última década a través del **SETI@HOME**, el programa de computadoras distribuidas más grande de la Tierra. La mayoría de los datos se recaban gracias al radiotelescopio más grande del mundo, construido en 20 acres de una cavidad natural en Arecibo, Puerto Rico (fotografiado arriba), y se procesan en millones de computadoras personales alrededor del mundo.

Para mayor información, o para una oportunidad de ser el primero en tener "contacto" con una civilización extraterrestre, visite www.setiathome.ssl.berkeley.edu.

Rob Brown se encuentra entre los cinco ganadores de premios en una fiesta de Navidad. Se pide a los cinco ganadores que elijan, sin mirar, uno de cinco vales colocados en el interior de una bolsa; cuatro de esos vales son canjeables por latas de dulces, y uno es un certificado de regalo de $100. ¿Puede Rob mejorar su posibilidad de obtener el certificado de regalo sacando su vale antes que las cinco personas?

SOLUCIÓN

Las latas de dulces se representan por C, el certificado de regalo por G, y el primer retiro de un vale, el segundo retiro, etcétera, por los subíndices 1, 2,... De esta forma, si Rob hace la extracción primero, su probabilidad de obtener el certificado de regalo es

$$P(G_1) = \frac{1}{5}.$$

Si es el segundo en retirar el vale, su probabilidad de obtener el certificado es

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(C_1 \text{ y } G_2) \\ &= P(C_1) \cdot P(G_2|C_1) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

El mismo resultado de arriba

Para el tercer retiro,

$$\begin{aligned} P(G_3) &= P(C_1 \text{ y } C_2 \text{ y } G_3) \\ &= P(C_1) \cdot P(C_2|C_1) \cdot P(G_3|C_1 \text{ y } C_2) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

El mismo resultado de arriba

La probabilidad de obtener el certificado de regalo es de $\frac{1}{5}$ cuando se extrae el vale en cuarto o quinto lugar. El orden en el cual los cinco ganadores retiren los vales no afecta las posibilidades de Rob. ■■■

Para reflexionar

El problema del cumpleaños

Un problema clásico (con un resultado sorprendente) se relaciona con la probabilidad de que en un grupo determinado de personas haya al menos un par de personas con la misma fecha de cumpleaños (el mismo día del año, no necesariamente el mismo año). Este problema se puede analizar usando la probabilidad de una fórmula de complementos (**sección 9.2**) y la regla de la multiplicación de probabilidades de esta sección. Suponga que el grupo es de 3 personas.

P(por lo menos una duplicación de nacimientos)

$= 1 - P$(sin duplicaciones) Fórmula de complemento

$= 1 - P$(el 2o. es diferente del 1o., y el 3o. es diferente del 1o. y 2o.)

$= 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$ Regla de la multiplicación

$\approx 1 - 0.992$

$= 0.008$

(Para simplificar los cálculos, supusimos 365 fechas de nacimiento posibles, ignorando el 29 de febrero).

Al efectuar más cálculos como el anterior, encontramos que cuanto más pequeño es el grupo, la probabilidad de duplicación se reduce. Cuanto más grande es el grupo, la probabilidad de duplicación aumenta. La tabla de la siguiente página muestra la probabilidad de encontrar al menos una duplicación para grupos de 2 a 52 personas.

Para investigación individual o en grupo

1. Con base en los datos mostrados en la tabla, ¿cuáles son los momios a favor de una duplicación en un grupo de 30 personas?
2. Partiendo de la tabla, estime el número mínimo de personas para el cual la probabilidad de duplicación es al menos de $\frac{1}{2}$.
3. ¿Qué tan pequeño se requiere que sea el grupo para que la probabilidad de una duplicación sea *exactamente* 0?
4. ¿Qué tan grande se requiere que sea el grupo para que la probabilidad de duplicación sea *exactamente* 1?

Número de personas	Probabilidad de al menos una duplicación	Número de personas	Probabilidad de al menos una duplicación	Número de personas	Probabilidad de al menos una duplicación
2	0.003	19	0.379	36	0.832
3	0.008	20	0.411	37	0.849
4	0.016	21	0.444	38	0.864
5	0.027	22	0.476	39	0.878
6	0.040	23	0.507	40	0.891
7	0.056	24	0.538	41	0.903
8	0.074	25	0.569	42	0.914
9	0.095	26	0.598	43	0.924
10	0.117	27	0.627	44	0.933
11	0.141	28	0.654	45	0.941
12	0.167	29	0.681	46	0.948
13	0.194	30	0.706	47	0.955
14	0.223	31	0.730	48	0.961
15	0.253	32	0.753	49	0.966
16	0.284	33	0.775	50	0.970
17	0.315	34	0.795	51	0.974
18	0.347	35	0.814	52	0.978

9.3 EJERCICIOS

Para cada experimento, determine si los dos eventos descritos son independientes.

1. ***Lanzamiento al aire de monedas*** Se lanza dos veces una moneda justa al aire. Los eventos son "cara en el primero" y "cara en el segundo".
2. ***Lanzamiento de dados*** Se arroja un par de dados. Los eventos son "par en el primero" e "impar en el segundo".
3. ***Comparación de la distancia media de planetas al Sol*** Se eligen dos planetas, sin remplazo, de la lista de la **tabla 7**. Los eventos son "el primer planeta seleccionado está más cerca del Sol que Júpiter" y "el segundo planeta seleccionado está más lejos del Sol que Marte".
4. ***Comparación de distancias medias a partir del Sol*** Se eligen dos cuerpos celestes, sin remplazo, de la lista de la **tabla 7**. Los eventos son "el primer astro seleccionado está más cerca del Sol que la Tierra" y "el segundo astro seleccionado está más lejos del Sol que Urano".
5. ***Adivinación de respuestas en un examen de elección múltiple*** En un examen de 20 preguntas de elección múltiple se adivinan todas las respuestas. Los eventos son "la primera respuesta es correcta" y "la última respuesta es correcta".
6. ***Selección de comisiones de senadores estadounidenses*** Se elige al azar una comisión de cinco personas a partir de 100 senadores estadounidenses. Los eventos son "el primer seleccionado es un republicano" y "el segundo seleccionado es un republicano". (Suponga que en el Senado hay republicanos y no republicanos).

Comparación de género y motivación profesional en estudiantes universitarios *Cien estudiantes universitarios de los últimos semestres de la carrera fueron clasificados de acuerdo con el género y con la principal motivación de su profesión, como se resume a continuación.*

	Principal motivación profesional			
	Dinero	Desarrollo de creatividad	Sentido de contribución a la sociedad	Total
Hombres	19	15	14	48
Mujeres	12	23	17	52
Total	31	38	31	100

Si se va a elegir al azar a uno de estos estudiantes, calcule la probabilidad de que el estudiante seleccionado cumpla las condiciones requeridas en los ejercicios 7 a 12.

7. es mujer
8. su motivación principal es el desarrollo de la creatividad
9. no está motivado principalmente por el dinero
10. es hombre y está motivado principalmente por el dinero
11. es hombre, dado que la principal motivación es el sentido de contribuir a la sociedad
12. está motivado principalmente por el dinero o el desarrollo de la creatividad, dado que el estudiante es una mujer

Selección de mascotas *Una tienda de mascotas tiene siete perritos, incluyendo 4 poodles, dos terriers y un retriever. Si Rebecka y Aaron, en ese orden, eligen cada quien aleatoriamente un perrito,* con remplazo *(pueden seleccionar al mismo), determine la probabilidad de cada evento en los ejercicios 13 a 16.*

13. Ambos seleccionan un poodle

14. Rebecka selecciona un retriever, Aaron selecciona un terrier

15. Rebecka selecciona un terrier, Aaron selecciona un retriever

16. Ambos seleccionan un retriever

Selección de mascotas *Suponga que se eligen dos perritos como antes, pero esta vez sin remplazo (Rebecka y Aaron no pueden seleccionar la misma mascota). Calcule la probabilidad de cada evento en los ejercicios 17 a 22.*

17. Ambos seleccionan un poodle

18. Aaron selecciona un terrier, dado que Rebecka elige un poodle

19. Aaron selecciona un retriever, dado que Rebecka elige un poodle

20. Rebecka selecciona un retriever

21. Aaron selecciona un retriever, dado que Rebecka elige un retriever

22. Ambos seleccionan un retriever

Repartición de naipes *Considere que dos naipes se repartan sucesivamente, sin remplazo, de un mazo normal de 52 naipes. Calcule la probabilidad de cada evento en los ejercicios 23 a 27.*

23. la segunda carta es espada, dado que la primera es una espada

24. la segunda carta es trébol, dado que la primera es un diamante

25. los dos naipes son de figuras

26. no se obtienen naipes de figuras

27. el primer naipe es una sota, y el segundo es una figura

28. Dados los eventos A y B dentro del espacio muestral S, la siguiente secuencia de pasos establece fórmulas que se pueden usar para calcular probabilidades condicionales. Justifique cada enunciado.

a) $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

b) Por lo tanto, $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \text{ y } B)}{P(A)}$.

c) Por lo tanto, $P(B \mid A) = \dfrac{n(A \text{ y } B)/n(S)}{n(A)/n(S)}$.

d) Por lo tanto, $P(B \mid A) = \dfrac{n(A \text{ y } B)}{n(A)}$.

Consideración de condiciones en la extracción de cartas *Use los resultados del* ***ejercicio 28*** *para determinar cada probabilidad cuando se extrae una sola carta de un mazo normal de 52 naipes.*

29. $P(\text{reina} \mid \text{figura})$

30. $P(\text{figura} \mid \text{reina})$

31. $P(\text{rojo} \mid \text{diamante})$

32. $P(\text{diamante} \mid \text{rojo})$

Investigación sobre P(A y B) *Complete los ejercicios 33 y 34 para descubrir la propiedad general de la probabilidad de un evento de la forma A y B.*

33. Si se elige al azar un número a partir del grupo de números enteros 1 a 10, la probabilidad de obtener un número que es *impar y primo*, por la regla de la multiplicación es

$$P(\text{impar}) \cdot P(\text{primo} \mid \text{impar}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}.$$

Calcule el producto $P(\text{primo}) \cdot P(\text{impar} \mid \text{primo})$, y compárelo con el producto anterior.

34. ¿Qué implica el **ejercicio 33**, en general, acerca de la probabilidad de un evento de la forma A y B?

35. ***Género en secuencias de bebés*** Dos autores de este libro tienen cada uno tres hijos varones y no tienen hijas. Suponiendo que los niños y las niñas son igualmente probables, ¿cuál es la probabilidad de este evento?

36. ***Lanzamiento de dados*** Se lanzan tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los números mostrados sean todos diferentes? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

Los ejercicios restantes, y grupos de ejercicios, pueden requerir conceptos de secciones anteriores, tales como el principio de conteo de los complementos y la regla de la suma, así como la regla de la multiplicación de la presente sección.

Probabilidades en el almacenamiento de compra de comestibles *Therese Felser administra un almacén de comestibles, el cual estimula la compra en volumen por parte de sus clientes. Therese ha descubierto que, en cualquier día de la semana, el 70% de las ventas a clientes rebasan los* \$100. *Es decir, cualquier venta en estos días tiene la probabilidad de* 0.70 *de ser de más de* \$100. *(En realidad, las probabilidades condicionales a lo largo del día podrían cambiar ligeramente, dependiendo de las ventas anteriores, pero este efecto sería insignificante para muchas de las primeras ventas del día, de modo que podemos tratarlas como independientes).*

Calcule la probabilidad de cada evento en los ejercicios 37 a 40. (Dé sus respuestas con tres decimales).

37. Las primeras dos ventas del miércoles son ambas por más de \$100.

38. Las primeras tres ventas del miércoles son todas por más de \$100.

39. Ninguna de las primeras tres ventas del miércoles rebasa \$100.

40. Exactamente una de las primeras tres ventas del miércoles rebasa \$100.

Polución en el sitio de lanzamiento del transbordador espacial *Un problema detectado por los desarrolladores del programa del transbordador espacial es la polución del aire en el área que rodea el sitio de lanzamiento. Cierta dirección del sitio de lanzamiento se considera crítica en términos de polución de cloruro de hidrógeno de la nube de escape. Se ha determinado que las condiciones del tiempo causan el movimiento de la nube de emisión en la dirección crítica en el 5% de los lanzamientos.*



En los ejercicios 41 a 44, calcule la probabilidad de cada evento. Suponga que las probabilidades para un lanzamiento particular de ninguna manera dependen de las probabilidades de otros lanzamientos. (Dé las respuestas con dos decimales).

41. Un lanzamiento determinado no provocará el movimiento de la nube en la dirección crítica.

42. No ocurrirá movimiento en la dirección crítica durante cinco lanzamientos cualesquiera.

43. Cinco lanzamientos cualesquiera darán por resultado al menos un movimiento de la nube en la dirección crítica.

44. Diez lanzamientos cualesquiera darán por resultado al menos un movimiento de la nube en la dirección crítica.

Ordenamiento de entrevistas de trabajo *Tres hombres y tres mujeres están esperando ser entrevistados para un empleo. Si todos ellos son seleccionados en orden aleatorio, calcule la probabilidad de cada evento en los ejercicios 45 a 47.*

45. Todas las mujeres serán entrevistadas primero.

46. Los primeros tres entrevistados serán personas del mismo sexo.

47. No se entrevistará a ningún hombre sino hasta que al menos dos mujeres hayan sido entrevistadas.

48. ***Corte de un cubo*** Se pinta un cubo de 4" × 4" × 4" y luego se corta en 64 cubos de 1" × 1" × 1". Entonces se elige aleatoriamente un cubo unitario y se hace rodar. ¿Cuál es la probabilidad de que la cara superior del cubo que rueda esté pintada? Exprese su respuesta como una fracción común. (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

49. ***¿Lanzamiento de una moneda con dos caras?*** Un jugador tiene dos monedas en su bolsillo (una moneda normal y una moneda con dos caras). Elige una moneda aleatoriamente y la lanza dos veces. Si obtiene dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado la moneda normal? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

50. En el **ejemplo 8**, donde Anne extrajo tres pelotas sin remplazo, ¿cuál sería la probabilidad de obtener una de cada color, considerando que el orden no importa?

51. ***Género en secuencias de bebés*** Suponiendo que los niños y niñas son igualmente probables, calcule la probabilidad de que haya

a) al menos tres nacimientos para obtener dos niñas,

b) al menos cuatro nacimientos para obtener dos niñas,

c) al menos cinco nacimientos para obtener dos niñas.



52. ***Extracción de naipes*** Se extraen naipes, sin remplazo, de un mazo normal de 52 cartas.

a) ¿Cuántos se deben extraer antes de que la probabilidad de obtener al menos una figura sea mayor que $\frac{1}{2}$?

b) ¿Cuántos naipes se deben extraer antes de que la probabilidad de obtener al menos un rey sea mayor que $\frac{1}{2}$?

Decisiones adecuadas a partir de monedas cargadas *Muchas decisiones diarias, como quién conducirá para ir a almorzar o quién pagará el café, se toman lanzando al aire una moneda (presumiblemente justa) y usando el criterio de "cara, te toca; cruz, me toca". Sin embargo, este criterio no es muy justo si la moneda está cargada (quizá debido a una ligera irregularidad en el proceso de acuñación o por el uso). John von Neumann sugirió una manera para tomar decisiones perfectamente correctas incluso con una moneda cargada. Si se arroja dos veces una moneda cargada, de modo que*

$$P(\text{cara}) = 0.5200 \quad \text{y} \quad P(\text{cruz}) = 0.4800,$$

calcule cada unas de las siguientes probabilidades. (Dé las respuestas con cuatro decimales).

53. P(cara-cara)

54. P(cara-cruz)

55. P(cruz-cara)

56. P(cruz-cruz)

57. Después de resolver los **ejercicios 53 a 56**, ¿puede usted sugerir cuál era el esquema de Neumann?

Programación del control que abre la puerta de una cochera *Kevin Frye instaló cierta marca de control automático para abrir la puerta de la cochera, el cual utiliza un transmisor con seis interruptores independientes, cada uno con la configuración de encendido-apagado. El receptor (instalado en la puerta) debe configurarse con el mismo patrón del transmisor. (Los ejercicios 58 a 61 se basan en ideas similares a las del "problema del cumpleaños" del recuadro* ***Para reflexionar*** *de esta sección).*



58. ¿De cuántas maneras diferentes puede configurar Kevin los interruptores?

59. Si uno de los vecinos de Kevin tiene también esta misma marca de control de apertura, y ambos configuran los interruptores aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad, con cuatro decimales, de que ambos puedan abrir la puerta de la cochera del vecino?

60. Si cinco vecinos con el mismo tipo de control de apertura configuran sus interruptores de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos un par de vecinos utilicen las mismas configuraciones? (Dé su respuesta con cuatro decimales).

61. ¿Cuál es el número mínimo de vecinos que deben usar este tipo de control antes de que la probabilidad de que se presente al menos una duplicación sea mayor que $\frac{1}{2}$?

62. ***Elección de tarjetas*** Hay tres tarjetas, una es verde por ambos lados, una es roja por ambos lados, y la tercera es verde por un lado y roja por el otro. Se elige al azar una de las tres tarjetas y se coloca sobre la mesa. Si la tarjeta sobre la mesa tiene el lado de arriba rojo, ¿cuál es la probabilidad de que también sea roja por el otro lado?

Condiciones del tiempo en días sucesivos *En noviembre, la lluvia en cierto valle tiende a caer en forma de tormenta durante varios días. La probabilidad no condicionada de lluvia en cualquier día del mes es de* 0.500. *Pero la probabilidad de lluvia en un día que sigue a un día lluvioso es de* 0.800, *y la probabilidad de lluvia en un día que sigue a un día no lluvioso es de* 0.300. *Calcule la probabilidad de cada evento en los ejercicios 63 a 66. Dé las respuestas con tres decimales.*

63. lluvia en dos días consecutivos de noviembre, seleccionados al azar

64. lluvia en tres días consecutivos de noviembre, seleccionados al azar

65. lluvia el 1 y 2 de noviembre, pero no el 3

66. lluvia en los primeros cuatro días de noviembre, dado que el 31 de octubre estuvo soleado todo el día

Fallas en el motor de un avión *En cierto avión de cuatro motores (actualmente estos modelos son muy desconfiables), cada motor tiene un* 10% *de probabilidad de fallar en cualquier vuelo, siempre y cuando esté transportando una cuarta parte de su carga. Pero si un motor falla, entonces la probabilidad de falla se incrementa al* 20% *para cada uno de los otros tres motores. Y si un segundo motor falla, cada uno de los dos restantes tiene un* 30% *de probabilidad de fallar.*

Suponiendo que dos motores nunca fallan simultáneamente, y que el avión puede continuar volando con solo dos motores, determine cada una de las siguientes probabilidades en un vuelo determinado de este avión. (Dé sus respuestas con cuatro decimales).

67. no hay fallas en los motores

68. falla exactamente un motor (cualquiera de los cuatro motores)

69. fallan exactamente dos motores (dos motores cualesquiera)

70. una falla total

Tiros libres "uno y uno" en basquetbol *En basquetbol el lanzamiento de dos tiros libres "uno y uno" (conocido normalmente como tiro de foul) se hace como sigue: si el jugador encesta el primer tiro (1 punto), se le concede un segundo tiro. Si el jugador falla el primer tiro, no se le concede un segundo (véase el diagrama de árbol).*



Christine Ellington, una jugadora de basquetbol, tiene un récord del 70% *en tiros de foul. (Anota el* 70% *de sus tiros de foul). Calcule la probabilidad de que en una oportunidad de tiros uno y uno, Christine anote el número indicado de puntos.*

71. sin puntos

72. un punto

73. dos puntos

74. ***Comparación de probabilidades empírica y teórica en el lanzamiento de dados*** Lance un par de dados hasta que aparezca una suma igual a siete, llevando registro de cuántos lanzamientos se realizaron. Repita el proceso un total de 50 veces; registre cada vez el número de lanzamientos realizados para obtener la suma de 7.

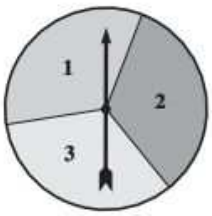
a) Use sus datos experimentales para calcular la probabilidad empírica (con dos decimales) que requeriría al menos tres lanzamientos, para obtener la suma de 7.

b) Determine la probabilidad teórica (con dos decimales) que requeriría al menos tres lanzamientos, para obtener la suma de 7.

75. Visite el sitio Web mencionado en la nota al margen del *impacto cósmico* de esta sección y redacte un informe sobre la amenaza que representan los impactos cósmicos para la humanidad. Incluya una explicación de la abreviatura *NEO*.

9.4 PROBABILIDAD BINOMIAL

Distribución de la probabilidad binomial • Fórmula de la probabilidad binomial



Distribución de la probabilidad binomial

Suponga que la aguja giratoria del margen es impulsada dos veces. Nos interesa el número de veces en que se obtiene un 2. (Suponga que 1, 2 y 3 son igualmente probables en un impulso determinado). Podemos considerar el resultado 2 como un "éxito", mientras que un 1 o un 3 serían un "fracaso".

Cuando los resultados de un experimento se dividen solamente en dos categorías, de éxito y fracaso, las probabilidades asociadas se conocen como "binomiales" (el prefijo *bi* significa *dos*). Ejecuciones repetidas de un experimento como este, donde las probabilidades de éxito permanecen latentes en todas las repeticiones, se conocen también como **intentos de Bernoulli** (en honor de James Bernoulli). Si se usa un par ordenado para representar el resultado de cada par de giros, entonces el espacio muestral de este experimento es

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Tabla 8 **Distribución de probabilidad del número de veces que se obtiene 2 en dos intentos de giro**

x	$P(x)$
0	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$
Suma = $\frac{9}{9} = 1$	

Los nueve resultados de S son igualmente probables. (Esto es porque los números 1, 2 y 3 son igualmente probables en un intento particular).

Si x representa el número de 2 que ocurren en cada par de intentos, entonces x es un ejemplo de una *variable aleatoria*. Aun cuando no es posible predecir el resultado de cualquier par de giros determinados, podemos obtener las probabilidades de varios eventos a partir de la lista del espacio muestral. En S, el número de 2 obtenidos es 0 en cuatro casos, en cuatro casos se obtuvo un 2, y en un caso se obtuvieron dos números 2, como se refleja en la **tabla 8**. Puesto que la tabla incluye todos los valores posibles de x, junto con sus probabilidades, es un ejemplo de una *distribución de probabilidad*. En este caso, tenemos una **distribución de probabilidad binomial**. Observe que la columna de probabilidad en la **tabla 8** tiene una suma igual a 1, en concordancia con la propiedad 3 de las probabilidades (**sección 9.2**).

Para desarrollar una fórmula general de las propiedades binomiales, podemos considerar otra manera de obtener los valores de probabilidad de la **tabla 8**. Los diferentes giros de la aguja son independientes unos de otros, y en cada giro, la probabilidad de éxito (S) es $\frac{1}{3}$, mientras que la probabilidad de fracaso (F) es $\frac{2}{3}$. En el primer giro, el éxito se representa como S_1, el fracaso en el segundo se representa como F_2, y así sucesivamente.

$$\begin{aligned} P(x = 0) &= P(F_1 \text{ y } F_2) \\ &= P(F_1) \cdot P(F_2) && \text{Regla de la multiplicación} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} && \text{Se sustituyen valores.} \\ &= \frac{4}{9} && \text{Se multiplica.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x = 1) &= P[(S_1 \text{ y } F_2) \text{ o } (F_1 \text{ y } S_2)] && \text{2 maneras de obtener } x = 1 \\ &= P(S_1 \text{ y } F_2) + P(F_1 \text{ y } S_2) && \text{Regla de la suma} \\ &= P(S_1) \cdot P(F_2) + P(F_1) \cdot P(S_2) && \text{Regla de la multiplicación} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} && \text{Se sustituyen valores.} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} && \text{Se multiplica.} \\ &= \frac{4}{9} && \text{Se suma.} \end{aligned}$$



James Bernoulli (1654-1705), también conocido como Jacob o Jacques Bernoulli, se alejó de la teología por la fascinación que en él despertaron los escritos de Leibniz, de quien se convirtió en discípulo. Posteriormente dirigió la facultad de matemáticas en la Universidad de Basilea. Sus resultados en probabilidad están contenidos en el libro *El arte de la conjetura*, publicado en 1713, después de su muerte, y en el cual se incluye la reimpresión de uno de los primeros trabajos de Huygens. También realizó muchas contribuciones al cálculo y la geometría analítica.

$$\begin{aligned} P(x = 2) &= P(S_1 \text{ y } S_2) \\ &= P(S_1) \cdot P(S_2) && \text{Regla de la multiplicación} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} && \text{Se sustituyen valores.} \\ &= \frac{1}{9} && \text{Se multiplica.} \end{aligned}$$

Observe el siguiente patrón en los cálculos anteriores. Hay solo una manera de obtener $x = 0$ (a saber, F_1 y F_2). Y solo hay una manera de obtener $x = 2$ (a saber, S_1 y S_2). Pero hay dos maneras de obtener $x = 1$. Una es S_1 y F_2; la otra es F_1 y S_2. Existen dos maneras porque el único éxito requerido puede ocurrir en el primer giro o en el segundo. ¿De cuántas maneras puede ocurrir exactamente un éxito en dos intentos de giro repetidos? Esta pregunta equivale a:

¿Cuántos subconjuntos de tamaño 1 existen en el conjunto de dos intentos?

La respuesta es ${}_2C_1 = 2$. (La expresión ${}_2C_1$ quiere decir "combinaciones de 2 objetos tomados de uno en uno". Las combinaciones se analizaron en la **sección 8.3**). Cada una de las dos maneras de obtener exactamente un éxito tiene una probabilidad igual a $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$, es decir, la probabilidad de éxito por la probabilidad de fracaso.

Si la misma aguja que gira es impulsada tres veces en lugar de dos, entonces x, el número de éxitos (2) tendría valores de 0, 1, 2 o 3. De modo que el número de maneras para obtener exactamente un éxito es ${}_3C_1 = 3$. Estas son: S_1 y F_2 y F_3, F_1 y S_2 y F_3, F_1 y F_2 y S_3. La probabilidad de cada una de estas tres maneras es $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$.

$$P(x = 1) = 3 \cdot \frac{4}{27} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

La **figura 11** muestra todas las posibilidades de los tres giros, y la **tabla 9** es la distribución de probabilidad asociada. En el diagrama de árbol, el número de maneras de obtener dos éxitos en tres intentos es 3, en concordancia con el hecho de que ${}_3C_2 = 3$. Además, la suma de la columna $P(x)$ de la **tabla 9** nuevamente es igual a 1.

Tabla 9 **Distribución de probabilidad del número de veces que se obtiene 2 en tres intentos de giro**

x	$P(x)$
0	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{12}{27}$
2	$\frac{6}{27}$
3	$\frac{1}{27}$
	Suma $= \frac{27}{27} = 1$

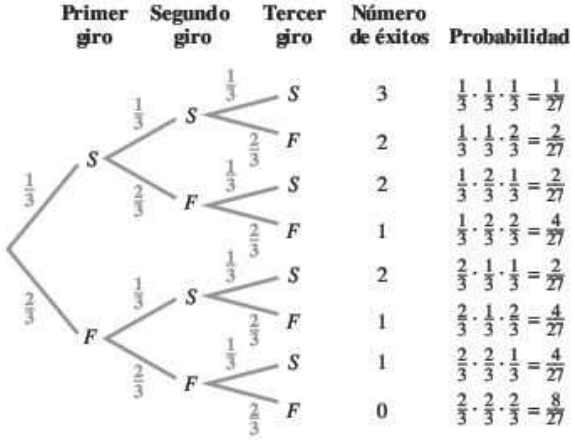


Diagrama de árbol de tres intentos de giro

Figura 11

SUGERENCIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Una de las estrategias para la solución de problemas en el **capítulo 1** fue "buscar un patrón". Luego de construir las distribuciones completas de probabilidad para experimentos binomiales con 2 y 3 intentos repetidos (y probabilidades de éxito iguales a $\frac{1}{3}$), podemos generalizar el patrón observado para cualquier experimento binomial, como se muestra a continuación.

Fórmula de probabilidad binomial

Se definen las siguientes cantidades.

n = el número de intentos repetidos
p = la probabilidad de éxito en un intento determinado
$q = 1 - p$ = la probabilidad de fracaso en un intento determinado
x = el número de éxitos que se presentan

Observe que p permanece fijo durante todos los n intentos. Esto significa que todos los intentos son independientes unos de otros. La variable aleatoria x (número de éxitos) puede tener cualquier valor entero de 0 a n. En general, se pueden asignar x éxitos en n intentos repetidos de ${}_nC_x$ diferentes maneras, puesto que este es el número de subconjuntos diferentes de x posiciones en un conjunto de n posiciones. Además, independientemente de cuántos intentos x resulten exitosos, siempre habrá x éxitos y $n - x$ fracasos, de modo que se multiplican x factores de p y $n - x$ factores de q.

Fórmula de la probabilidad binomial

Cuando ocurren n intentos repetidos independientes, donde

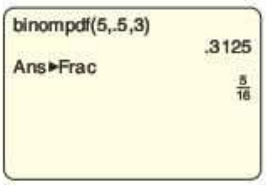
p = probabilidad de éxito y q = probabilidad de fracaso

con p y q (donde $q = 1 - p$) constantes durante todos los intentos n, la probabilidad de exactamente x éxitos se calcula como sigue.

$$P(x) = {}_nC_x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

Las probabilidades binomiales para valores particulares de n, p y x se pueden obtener directamente usando tablas, software estadístico y algunas calculadoras manuales. En los siguientes ejemplos se usa la fórmula anterior.

Del menú DISTR



La calculadora TI-83/84 Plus obtiene la probabilidad analizada en el **ejemplo 1**.

EJEMPLO 1 Cálculo de probabilidad en el lanzamiento de una moneda

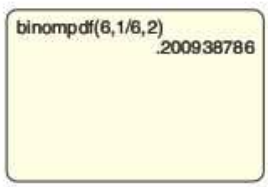
Calcule la probabilidad de obtener exactamente tres caras en cinco lanzamientos de una moneda.

SOLUCIÓN

Consideremos que las caras son el "éxito". Este es un experimento binomial con $n = 5$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ y $x = 3$.

$$P(3) = {}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

Fórmula de probabilidad binomial



Esta pantalla apoya la respuesta del **ejemplo 2**.

EJEMPLO 2 Cálculo de probabilidad en el lanzamiento de un dado

Calcule la probabilidad de obtener exactamente dos 5 en seis lanzamientos de un dado.

SOLUCIÓN

Consideremos que 5 es el "éxito". Entonces, $n = 6$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$ y $x = 2$.

$$P(2) = {}_6C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 15 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{625}{1296} = \frac{3125}{15{,}552} \approx 0.201$$

En el caso de intentos repetidos independientes, cuando un evento implica más de un número específico de éxitos, se puede utilizar la fórmula de probabilidad binomial junto con las reglas de complemento o de la suma.

EJEMPLO 3 Cálculo de la probabilidad de tener hijas

Una pareja planea tener 5 hijos. Calcule la probabilidad de que tengan más de 3 niñas. (Suponga que niñas y niños son igualmente probables).

SOLUCIÓN

Consideremos que tener una niña representa "éxito". Entonces, $n = 5, p = q = \frac{1}{2}$ y $x > 3$.

$$P(x > 3) = P(x = 4 \text{ o } 5) \qquad \text{Mas de 3 significa 4 o 5.}$$

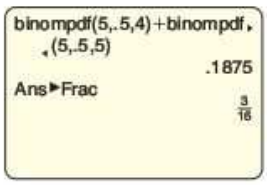
$$= P(4) + P(5) \qquad \text{Regla de la suma}$$

$$= {}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 + {}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 \qquad \text{Fórmula de probabilidad binomial}$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{32} \cdot 1 \qquad \text{Se simplifica.}$$

$$= \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16} = 0.1875$$

■■■



Esta pantalla apoya la respuesta del **ejemplo 3**.

EJEMPLO 4 Cálculo de la probabilidad de anotar un hit en el béisbol

Andrew Crowley, un jugador de béisbol, tiene una carrera sólida bateando un promedio de 0.300. En una breve serie con un equipo rival, Andrew bateará 10 veces. Calcule la probabilidad de que logre más de 2 hits en la serie.

SOLUCIÓN

Este "experimento" implica $n = 10$ intentos repetidos de Bernoulli, con probabilidad de éxito (un hit) dada por $p = 0.3$ (lo cual implica que $q = 1 - 0.3 = 0.7$). Como, en este caso, "más de 2" significa

"3 o 4 o 5 o 6 o 7 u 8 o 9 o 10" (ocho diferentes posibilidades),

será más fácil aplicar la regla del complemento.

$$P(x > 2) = 1 - P(x \le 2) \qquad \text{Regla del complemento}$$

$$= 1 - P(x = 0 \text{ o } 1 \text{ o } 2) \qquad \text{Solo tres posibilidades diferentes}$$

$$= 1 - [P(0) + P(1) + P(2)] \qquad \text{Regla de la suma}$$

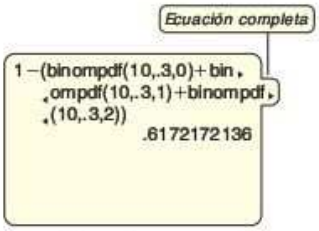
$$= 1 - [{}_{10}C_0(0.3)^0(0.7)^{10} + {}_{10}C_1(0.3)^1(0.7)^9 + {}_{10}C_2(0.3)^2(0.7)^8] \qquad \text{Fórmula de probabilidad binomial}$$

$$\approx 1 - [0.0282 + 0.1211 + 0.2335] \qquad \text{Se simplifica.}$$

$$= 1 - 0.3828$$

$$= 0.6172$$

■■■



Esta pantalla apoya la respuesta del **ejemplo 4**.

9.4 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 24, dé todas las respuestas numéricas como fracciones comunes reducidas a sus términos simplificados. En los ejercicios 25 a 54, dé todas las respuestas numéricas con tres decimales.

Lanzamiento al aire de monedas *Si se lanzan tres monedas al aire, calcule la probabilidad de obtener los siguientes números de caras.*

1. 0 **2.** 1 **3.** 2

4. 3 **5.** 1 o 2 **6.** al menos 1

7. no más de 1 **8.** menos de 3

9. ***Género en secuencias de bebés*** Suponiendo que los niños y las niñas son igualmente probables, calcule la probabilidad de que una familia con tres hijos tenga exactamente dos varones.

10. ***Relación del triángulo de Pascal con el lanzamiento de una moneda*** El triángulo de Pascal se presentó en la **tabla 5** de la **sección 8.4**. Explique cómo las probabilidades de los **ejercicios 1 a 4** presentados aquí se relacionan con la fila 3 del "triángulo". (Recuerde que nos referimos a la fila superior del triángulo como "fila número 0", y a la entrada ubicada más a la izquierda de cada fila como "entrada número 0").

11. Generalice el patrón del **ejercicio 10** para completar el siguiente enunciado. Si n monedas justas se lanzan al aire, la probabilidad de obtener exactamente x caras está representada por la fracción cuyo numerador es la entrada número ____ de la fila número ____ del triángulo de Pascal, y cuyo denominador es la suma de las entradas de la fila número ____.

Probabilidad binomial aplicada al lanzamiento de monedas *Use el patrón observado en los* ***ejercicios 10 y 11*** *para determinar las probabilidades de obtener los siguientes números de caras cuando se lanzan al aire 7 monedas justas.*

12. 0 **13.** 1 **14.** 2 **15.** 3

16. 4 **17.** 5 **18.** 6 **19.** 7

Probabilidad binomial aplicada al lanzamiento de dados *Se lanza un dado justo tres veces. Un 4 se considera "éxito", mientras que todos los demás resultados son "fracasos". Calcule la probabilidad de obtener los siguientes números de éxitos.*

20. 0 **21.** 1 **22.** 2 **23.** 3

24. En los **ejercicios 10 y 11** se estableció una manera de usar el triángulo de Pascal en lugar de la fórmula de probabilidad binomial para calcular las probabilidades de diferentes números de éxitos en experimentos de lanzamiento de monedas. Explique por qué el mismo proceso no funcionaría para los **ejercicios 20 a 23**.

Para n intentos independientes repetidos, con una probabilidad constante de éxito p en todos los intentos, calcule la probabilidad de exactamente x éxitos en cada uno de los ejercicios 25 a 28.

25. $n = 5,\ p = \frac{1}{3},\ x = 4$

26. $n = 10,\ p = 0.7,\ x = 5$

27. $n = 20,\ p = \frac{1}{8},\ x = 2$

28. $n = 30,\ p = 0.6,\ x = 22$

En los ejercicios 29 a 31, remítase al ***ejemplo 4****.*

29. ***Promedios de bateo en béisbol*** ¿La probabilidad de Andrew de lograr un hit en realidad permanece constante en 0.300 a lo largo de las 10 oportunidades al bate? Explique su razonamiento.

30. ***Promedios de bateo en béisbol*** Si el promedio de bateo de Andrew es exactamente 0.300 a lo largo de la serie, y ese valor se basa en exactamente 1 200 hits en su carrera de 4 000 oportunidades anteriores al bate, ¿cuál podría ser su mayor promedio (expresado con tres decimales) cuando tome el bate la décima vez en la serie de oportunidades? ¿Cuál podría ser el promedio mínimo cuando tome el bate la décima vez en la serie de oportunidades?

31. ¿Cree usted que el uso de la fórmula de probabilidad binomial se justificaba en el **ejemplo 4**, aun cuando p no es estrictamente constante? Explique su razonamiento.

Selección aleatoria de respuestas en un examen de opciones múltiples *Beth Dahlke está resolviendo un examen de opción múltiple de 10 preguntas en el cual cada pregunta tiene tres opciones, y solo una de ellas es correcta. Beth decide contestar lanzando un dado y marcando la primera opción de la respuesta si el dado cae en el 1 o 2, la segunda si cae en el 3 o 4, y la tercera si cae en el 5 o 6. Determine la probabilidad de cada evento en los ejercicios 32 a 35.*

32. exactamente cuatro respuestas correctas

33. exactamente siete respuestas correctas

34. menos de tres respuestas correctas

35. al menos siete respuestas correctas

Efectos colaterales de la prescripción de medicamentos *Se sabe que la prescripción de medicamentos produce efectos colaterales indeseables en un 35% de todos los pacientes que los consumen. En una muestra aleatoria de ocho pacientes que toman medicamentos, calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.*

36. Nadie sufre efectos colaterales indeseables.

37. Exactamente uno sufre efectos colaterales indeseables.

38. Exactamente dos sufren efectos colaterales indeseables.

39. Más de dos sufren efectos colaterales indeseables.



Probabilidad de estudiantes competentes que asisten a la universidad *En cierto estado, se ha demostrado que solo el 60% de los graduados de preparatoria que son capaces de cursar estudios universitarios se inscriben realmente en ese nivel. Calcule la probabilidad de que, entre nueve graduados de preparatoria en ese estado que están preparados para cursar estudios universitarios, se inscriban en la universidad los números indicados de alumnos.*

40. exactamente 4 **41.** de 4 a 6

42. los 9 **43.** al menos 3

44. ***Estudiantes propietarios de una computadora personal*** En una universidad grande del medio oeste, el 90% de los estudiantes tienen su propia computadora personal. Si se eligen al azar 5 estudiantes de esa universidad, calcule la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan su propia computadora.

45. ***Árboles de naranjo que sobreviven a una helada*** Se sabe que el 65% de los naranjos sobrevivirán a heladas fuertes. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos la mitad de un grupo de seis árboles sobreviva a una fuerte helada?

46. ***Medios de comunicación favorables a un presidente en turno*** Durante una campaña presidencial, el 64% de las columnas políticas de cierto grupo de los principales periódicos eran favorables al presidente en el cargo. Si se elige al azar una muestra de 15 de estas columnas, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 10 de ellas sean favorables?

Selección de pelotas de una bolsa *Una bolsa contiene pelotas blancas y pelotas negras. Sea p la probabilidad de que una pelota seleccionada al azar sea negra. Cada vez que se elige una pelota, se devuelve a la bolsa antes de elegir la siguiente pelota. Se han seleccionado al azar cuatro pelotas.*

47. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de las cuatro pelotas sean negras y dos sean blancas? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*) (*Sugerencia*: Use la fórmula de probabilidad binomial para expresar la probabilidad en términos de p).

48. Evalúe la probabilidad en el **ejercicio 47** en el caso de que la bolsa contenga 15 pelotas negras y 25 blancas. Dé su respuesta con cuatro decimales.

Tomando un camino al azar *Abby Gartland se estacionó junto a un señalamiento de kilometraje en una carretera rural de este a oeste. Ella decidió lanzar 10 veces una moneda al aire, y manejar una milla hacia el este si caía una cara y una milla al oeste si caía una cruz. El término "camino al azar" se aplica a este proceso, aun cuando Abby conduce en lugar de caminar. Se trata de un modelo simplificado del movimiento browniano, mencionado en la* ***página 462****. (Véase también los* ***ejercicios 9 a 12*** *en la* ***Extensión*** *al final de este capítulo).*

En los ejercicios 49 a 56, calcule la probabilidad de que el "camino" de Abby termine como se describe.

49. 10 millas al este del inicio

50. 6 millas al este del inicio

51. 6 millas al oeste del inicio

52. 5 millas al oeste del inicio

53. 2 millas al este del inicio

54. al menos 2 millas al este del inicio

55. al menos a 2 millas del inicio

56. exactamente al inicio

9.5 VALOR ESPERADO

Valor esperado • Juegos y apuestas • Inversiones • Negocios y seguros

Valor esperado

Tabla 10

x	$P(x)$
1	0.05
2	0.10
3	0.20
4	0.40
5	0.10
6	0.15

La distribución de probabilidad de la **tabla 10**, en el **ejemplo 6** de la **sección 9.2**, muestra las probabilidades asignadas por Amy a los diferentes intervalos de tiempo que podría dedicar a hacer su tarea en una noche determinada. Si su amiga Tara le pregunta cuántas horas dedicará a su estudio, ¿cuál sería su mejor estimación? Son posibles seis valores de tiempo, unos más probables que otros. Algo que Amy podría hacer es calcular un "promedio ponderado" multiplicando cada valor posible de tiempo por su probabilidad y luego sumando los seis productos.

$$1(0.05) + 2(0.10) + 3(0.20) + 4(0.40) + 5(0.10) + 6(0.15)$$
$$= 0.05 + 0.20 + 0.60 + 1.60 + 0.50 + 0.90 = 3.85$$

De modo que 3.85 horas es el **valor esperado** (o la **esperanza matemática**) de la cantidad de tiempo que dedicará a su tarea. Como los valores originales de tiempo de la tabla se redondearon a la hora más próxima, el valor esperado también debe redondearse, a 4 horas.

Valor esperado

Si una variable aleatoria x puede tener cualquiera de los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, y las probabilidades correspondientes de estos valores son $P(x_1)$, $P(x_2)$, $P(x_3), \ldots, P(x_n)$, entonces el **valor esperado de** x se calcula como sigue.

$$E(x) = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + x_3 \cdot P(x_3) + \cdots + x_n \cdot P(x_n)$$

EJEMPLO 1 Cálculo del número esperado de hijos varones



Determine el número esperado de hijos varones en una familia de tres hijos (es decir, el valor esperado del número de varones). Suponga que las niñas y los niños son igualmente probables.

SOLUCIÓN

$$g = \text{niña}, b = \text{niño}$$

El espacio muestral de este experimento es

$$S = \{ggg, ggb, gbg, bgg, gbb, bgb, bbg, bbb\}.$$

La distribución de probabilidad se muestra en la **tabla 11**, junto con los productos y su suma, lo cual indica el valor esperado.

Tabla 11

Número de varones x	Probabilidad $P(x)$	Producto $x \cdot P(x)$
0	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
	Valor esperado: $E(x) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$	

El número esperado de varones es igual a $\frac{3}{2}$, o 1.5. Este resultado parece razonable. Como los niños y las niñas son igualmente probables, se espera que "la mitad" de los bebés sean varones. ■■■

El valor esperado de hijos varones en la familia tal vez nunca se manifieste en realidad. Esto solo es un promedio a largo plazo de varios valores que *podrían* ocurrir. (Para mayor información sobre "promedios", véase la **sección 10.2**). Si registramos el número de hijos varones en varias familias de tres hijos, entonces, de acuerdo con la ley de los grandes números, conforme el número de familias observadas se incrementa, el número promedio de varones debería aproximarse al valor esperado.

Solución al problema de inicio del capítulo Una manera de ver el problema, considerando que el automóvil no está detrás de la puerta 3, es que las puertas 1 y 2 ahora tienen igual probabilidad de ocultar el automóvil. Así que el hecho de intercambiar las puertas no favorece, pero tampoco perjudica, las probabilidades de ganar el automóvil.

Sin embargo, existe otra manera de enfocar el problema. Cuando usted seleccionó la puerta 1, la probabilidad era de $\frac{1}{3}$ de que allí detrás estuviera el automóvil. Saber que hay una cabra detrás de la puerta 3 en realidad no brinda nueva información; después de todo, usted sabía que había una cabra en al menos una de las otras puertas. De modo que ver la cabra detrás de la puerta 3 no cambia en nada su evaluación de la probabilidad de que el automóvil esté detrás de la puerta 1. Sigue siendo $\frac{1}{3}$. Pero como la puerta 3 se excluyó, la probabilidad de que el auto se encuentre detrás de la puerta 2 es ahora de $\frac{2}{3}$. Por lo tanto, a usted le convendría cambiar su decisión.

El análisis de este problema depende de la psicología del conductor del programa. Si suponemos que el conductor *siempre* debe mostrar una puerta equivocada y luego le da la opción de cambiar su decisión, entonces usted debería cambiar. Esto no estaba establecido específicamente en el problema como se planteó en los párrafos anteriores, pero muchos matemáticos que realizaron análisis así lo señalaron.

(Los autores desean agradecer a David Berman de la Universidad de Nueva Orleans por su ayuda con esta explicación).

Para una simulación convincente del problema de Monty Hall, visite el sitio http://www.grand-illusions.com/simulator/montysim.htm.

Juegos y apuestas

EJEMPLO 2 Cálculo de ganancias esperadas

Un individuo paga \$3 para participar en el siguiente juego. Lanza tres monedas justas al aire y recibe "pagos" de \$1 si no salen caras, \$2 por una cara, \$3 por dos caras, y \$4 por tres caras. Calcule las ganancias netas esperadas por el jugador.

SOLUCIÓN

Despliegue la información como en la **tabla 12** de la siguiente página. [Observe que, para cada evento posible, las "ganancias netas" son las "ganancias brutas" (pagos) menos el costo de participar en el juego]. Las probabilidades se deducen del espacio muestral.

$$S = \{xxx, cxx, xcx, xxc, ccx, cxc, xcc, ccc\}$$

La pérdida neta esperada de 50 centavos es solo un promedio a largo plazo. En cualquier jugada particular, el jugador perdería \$2, o perdería \$1, o quedaría en equilibrio, o ganaría \$1. Durante una serie larga de juegos, digamos, 100, habría algunas ganancias y algunas pérdidas, pero el resultado total neto estaría probablemente alrededor de una *pérdida* igual a $100 \cdot (\$0.50) = \$50$.

Tabla 12

Número de caras	Pago	Ganancias netas x	Probabilidad $P(x)$	Producto $x \cdot P(x)$
0	\$1	−\$2	$\frac{1}{8}$	$-\$\frac{2}{8}$
1	2	−1	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$
2	3	0	$\frac{3}{8}$	0
3	4	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
			Valor esperado:	$E(x) = -\$\frac{1}{2} = -\$0.50$

■■■

Un juego en el cual las ganancias netas esperadas son iguales a cero se conoce como **juego justo**. El juego del **ejemplo 2** tiene ganancias netas esperadas negativas, de modo que es injusto para el jugador. Un juego con ganancias netas esperadas positivas es injusto a favor del jugador.

EJEMPLO 3 Cálculo del costo justo para participar en un juego

El costo de \$3 para participar en el juego del **ejemplo 2** convierte el juego en injusto para el jugador (puesto que las ganancias netas esperadas del jugador son negativas). ¿Qué costo haría de este un juego justo?

SOLUCIÓN

Ya calculamos, en el **ejemplo 2**, que el costo de \$3 para jugar generó una pérdida neta esperada de \$0.50. Por lo tanto, podemos concluir que el costo de \$3 era demasiado alto por 50 centavos. Un costo justo para participar en el juego sería entonces \$3 − \$0.50 = \$2.50. ■■■

El resultado del **ejemplo 3** se puede comprobar. Ignore el costo de participar en el juego y calcule las ganancias *brutas* esperadas (sumando los productos de los pagos y multiplicando el resultado por la probabilidad).

$$E(\text{ganancias brutas}) = \$1 \cdot \frac{1}{8} + \$2 \cdot \frac{3}{8} + \$3 \cdot \frac{3}{8} + \$4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{\$20}{8} = \$2.50$$

Las ganancias brutas esperadas (pagos) son de \$2.50, de modo que esta cantidad es un costo justo para participar en el juego.

EJEMPLO 4 Cálculo del costo justo para participar en un juego

En cierta lotería estatal, un jugador elige tres números en un orden específico. (Los dígitos iniciales pueden ser 0, de modo que números como 028 y 003 son entradas legítimas). Los operadores de la lotería seleccionan al azar una secuencia de tres dígitos, y el jugador que tiene los mismos tres dígitos recibe un pago de \$600. ¿Cuál es el costo justo para participar en esta lotería?

SOLUCIÓN

En este caso, no se ha mencionado el costo, así que debemos calcular las ganancias *brutas* esperadas. La probabilidad de elegir los tres dígitos correctamente es $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$, y la probabilidad de no seleccionar los tres dígitos correctamente es de $1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}$.

Las ganancias brutas esperadas son

$$E(\text{ganancias brutas}) = \$600 \cdot \frac{1}{1000} + \$0 \cdot \frac{999}{1000} = \$0.60.$$

Por lo tanto, el costo justo para participar en este juego es de 60 centavos. (De hecho, la lotería cobra \$1 por jugar, de modo que los participantes deben esperar una pérdida, *en promedio*, de 40 centavos por jugada). ■■■



La **ruleta** ("rueda pequeña") fue inventada en Francia en el siglo XVII o a principios del XVIII. Es un juego de azar en el casino de apuestas de Monte Carlo.

El disco está dividido en compartimentos rojos y negros que se alternan, y están numerados del 1 al 36 (pero no en ese orden). También existe un compartimento para 0 (y para 00 en Estados Unidos). En la ruleta, el disco se pone en movimiento, y una bola de marfil se arroja en el sentido opuesto al movimiento de la rueda. Cuando la rueda se detiene, la bola llega al reposo en uno de los compartimentos; el número y color determinan quién gana.

Los jugadores apuestan contra la banca (la persona encargada del dinero) colocando dinero o el equivalente en fichas en los compartimentos de la ruleta correspondientes a colores o números de la rueda. Las apuestas se pueden hacer a favor de un número o de varios, de un número impar o par, o de rojo o negro, o combinaciones. La banca paga de acuerdo con los momios contra la(s) apuesta(s) particular(es). Por ejemplo, el pago clásico por un número individual ganador es de $36 por cada $1 apostado.

Las loterías estatales deben ser injustas con los jugadores porque están diseñadas para ayudar a la beneficencia pública (como el sistema escolar), así como para cubrir gastos administrativos y otros costos. Sin duda, hay quienes juegan motivados por la buena voluntad para colaborar con estas causas, pero la mayoría de la gente juega para tener la oportunidad de "vencer a los momios" y ser uno de los pocos afortunados ganadores.

Los casinos son empresas de negocios mayores, pero esto no significa que estén diseñados para no ganar ni perder; los juegos que ofrecen siempre son injustos a favor de la casa. Sin embargo, el sesgo no necesita ser grande, puesto que incluso pérdidas relativamente pequeñas por jugador, multiplicadas por numerosos jugadores, dan como resultado inmensas ganancias para la casa.

EJEMPLO 5 Cálculo de ganancias esperadas en la ruleta

Un tipo sencillo de *ruleta* se juega con una bola de marfil y una rueda en movimiento. La rueda contiene 38 compartimentos. Dieciocho compartimentos son negros, 18 son rojos, uno se identifica como "cero", y otro como "doble cero". (Estos últimos dos no son rojos ni negros). En este caso, suponga que el jugador coloca $1 sobre el rojo o el negro. Si el jugador selecciona el color correcto del compartimento en el cual se detiene finalmente la bola, el pago es de $2; de otra forma, el pago es cero. Calcule las ganancias netas esperadas.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la fórmula del valor esperado, las ganancias netas esperadas son

$$E(\text{ganancias netas}) = (\$1)\frac{18}{38} + (-\$1)\frac{20}{38} = -\$\frac{1}{19}.$$

Las *pérdidas* netas esperadas en este caso son $\$\frac{1}{19}$, o 5.30 centavos aproximadamente, por jugada. ■■■

Inversiones

EJEMPLO 6 Cálculo de utilidades esperadas de una inversión

Nick Jovanovich tiene $5000 para invertir e invierte la cantidad completa, durante seis meses, en una de tres acciones de tecnología. Varios factores de incertidumbre afectan los precios de estas acciones; sin embargo, Nick confía, con base en su investigación, en que solo uno de varios escenarios de utilidades posibles será verdadero al final del periodo de seis meses. Su análisis completo se muestra en la **tabla 13**. (Por ejemplo, la acción *ABC* podría perder $400, ganar $800, o ganar $1500).

Tabla 13

Compañía *ABC*		Compañía *RST*		Compañía *XYZ*	
Utilidad o pérdida x	Probabilidad $P(x)$	Utilidad o pérdida x	Probabilidad $P(x)$	Utilidad o pérdida x	Probabilidad $P(x)$
−$400	0.2	$500	0.8	$0	0.4
800	0.5	1000	0.2	700	0.3
1500	0.3			1200	0.1
				2000	0.2

Calcule la utilidad (o pérdida) esperada de cada una de las tres acciones, y seleccione la mejor opción para Nick con base en estos cálculos. (La solución se encuentra en la siguiente página).



La primera **máquina tragamonedas** fue creada en 1929 por la Fey Manufacturing Company, de San Francisco, el mismo inventor de la máquina de tres carretes (1895).

SOLUCIÓN

Se aplica la fórmula de valor esperado.

$$ABC: \quad -\$400 \cdot (0.2) + \$800 \cdot (0.5) + \$1500 \cdot (0.3) = \$770$$

$$RST: \quad \$500 \cdot (0.8) + \$1000 \cdot (0.2) = \$600$$

$$XYZ: \quad \$0 \cdot (0.4) + \$700 \cdot (0.3) + \$1200 \cdot (0.1) + \$2000 \cdot (0.2) = \$730$$

La mayor utilidad esperada es de \$770. Con base en este análisis, Nick debe invertir el dinero en la acción de *ABC*. ■■■

Desde luego, al invertir en la acción de *ABC*, Nick podría de hecho *perder* \$400 en el transcurso de los seis meses. El rendimiento "esperado" de \$770 es solo un promedio a largo plazo de muchas situaciones idénticas. Como este caso de inversión particular tal vez nunca ocurra, usted podría argumentar que el uso de los valores esperados no es el mejor enfoque para que lo aplique Nick.

Un optimista ignoraría la mayoría de posibilidades y se enfocaría en lo *mejor* que se puede esperar de cada inversión, mientras que un pesimista se enfocaría en la *peor* posibilidad de cada inversión.

EJEMPLO 7 Elección de inversiones en acciones

Determine cuál acción del **ejemplo 6** elegiría Nick en cada caso.

a) Es un optimista. ***b)*** Es un pesimista.

SOLUCIÓN

a) Sin tomar en cuenta las probabilidades, él podría enfocarse en el mejor caso de cada acción. Como *ABC* puede ganar \$1500, *RST* \$1000, y *XYZ* \$2000, la mejor de todas es la que ofrece \$2000. Nick compraría la acción de *XYZ* (el mejor de los tres *mejores* casos).

b) En esta situación, Nick se enfocaría en el peor de los casos posibles. Como *ABC* podría tener un rendimiento de −\$400 (es decir, una pérdida de \$400), *RST* \$500, y *XYZ* \$0, compraría la acción de *RST* (la mejor opción entre los tres *peores* casos). ■■■

Negocios y seguros

EJEMPLO 8 Cálculo del ingreso esperado por la reventa de madera

Mike Crenshaw, un mayorista maderero está considerando la compra de un vagón de piezas de madera de diferentes dimensiones. Mike calcula que las probabilidades de revender la carga en \$10,000, \$9 000 u \$8 000 son de 0.22, 0.33 y 0.45, respectivamente. Para garantizar una utilidad *esperada* de al menos \$3 000, ¿cuánto puede pagar Mike por la carga?

SOLUCIÓN

Las ganancias esperadas (o ingreso esperado) de las reventas se encuentran registradas en la **tabla 14**.

Tabla 14 Ganancia esperada por reventa de madera

Ingreso x	Probabilidad $P(x)$	Producto $x \cdot P(x)$
\$10,000	0.22	\$2200
9000	0.33	2970
8000	0.45	3600
	Ganancia esperada:	\$8770

En general, tenemos la relación

$$\text{utilidad} = \text{ingreso} - \text{costo}.$$

Por lo tanto, en términos de esperanzas,

$$\text{utilidad esperada} = \text{ingreso esperado} - \text{costo}.$$

De modo que \$3000 = \$8770 – costo, o bien, de manera equivalente, costo = \$8770 – \$3000 = \$5770. Mike puede pagar hasta \$5770 y todavía tendría una utilidad esperada de al menos \$3000. ■■■

EJEMPLO 9 Análisis de una decisión de seguros

Jeff Marsalis, un granjero, obtendrá una utilidad de \$150,000 en la cosecha de trigo, a menos que llueva antes de la siega; en este último caso, solamente ganará \$40,000. El pronóstico del tiempo a largo plazo indica que hay un 0.16 de probabilidad de lluvia. (La probabilidad de que no llueva es de $1 - 0.16 = 0.84$). Una compañía de seguros ofrece asegurar la cosecha de \$150,000 contra la lluvia por una prima de \$20,000. ¿Jeff debería comprar el seguro?

SOLUCIÓN

Para tomar la decisión correcta, Jeff calcula la utilidad esperada de ambas opciones: con seguro y sin seguro. Los cálculos completos se resumen en las **tablas 15 y 16** de "esperanzas".

Por ejemplo, si compra el seguro y llueve, la utilidad neta de Jeff es

$$\underset{\downarrow}{\left[\begin{array}{c}\text{Cobertura}\\ \text{del seguro}\end{array}\right]} + \underset{\downarrow}{\left[\begin{array}{c}\text{Utilidad}\\ \text{reducida}\\ \text{de la cosecha}\end{array}\right]} - \underset{\downarrow}{\left[\begin{array}{c}\text{Prima}\\ \text{del seguro}\end{array}\right]} \quad \underset{\downarrow}{\text{Utilidad neta}}$$

$$\$150{,}000 + \$40{,}000 - \$20{,}000 = \$170{,}000.$$

Tabla 15 Esperanzas con seguro

	Utilidad neta x	Probabilidad $P(x)$	Producto $x \cdot P(x)$
Con lluvia	\$170,000	0.16	\$27,200
Sin lluvia	130,000	0.84	109,200
		Utilidad esperada:	\$136,400

Tabla 16 Esperanzas sin seguro

	Utilidad neta x	Probabilidad $P(x)$	Producto $x \cdot P(x)$
Con lluvia	\$40,000	0.16	\$6400
Sin lluvia	150,000	0.84	126,000
		Utilidad esperada:	\$132,400

Al comparar las utilidades esperadas (136,400 > 132,400), se concluye que Jeff estará mejor si compra el seguro. ■■■

Para reflexionar

Valor esperado de juegos de probabilidad

Las máquinas tragamonedas son un juego muy popular para aquellos que desean perder su dinero con muy poco esfuerzo mental. No es posible calcular un valor esperado aplicable a todas las máquinas tragamonedas, porque los pagos varían de una máquina a otra. Pero podemos calcular el "valor típico esperado".

Un jugador opera una máquina tragamonedas tirando de una palanca después de insertar una o más monedas. Entonces los carretes interiores de la máquina giran, y se detienen en algún orden aleatorio. Suponga que tres carretes muestran las figuras listadas en la **tabla 17**. Por ejemplo, de las 20 figuras en el primer carrete, 2 son cerezas, 5 son naranjas, 5 son ciruelas, 2 son campanas, 2 son melones, 3 son barras, y una es el número 7.

Una figura de cerezas en el primer carrete, pero no en el segundo, corresponde a un pago de tres monedas (ganancias *netas*: 2 monedas); una figura de cerezas en los primeros dos carretes, pero no en el tercero, corresponde a un pago de 5 monedas (ganancias *netas*: 4 monedas). Estas y otras combinaciones ganadoras se muestran en la **tabla 18**.

Puesto que, de acuerdo con la **tabla 17**, existen dos maneras de obtener cerezas en el primer carrete, 15 maneras de *no* obtener cerezas en el segundo carrete, y 20 posibilidades de obtener cualquier figura en el tercer carrete, tenemos un total de $2 \cdot 15 \cdot 20 = 600$ posibilidades de obtener un pago neto de 2. Puesto que hay 20 figuras por carrete, hay un total de $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$ resultados posibles. Por lo tanto, la posibilidad de recibir un pago neto de 2 monedas es de 600/8000.



Este fanático de los Indios de Cleveland obtuvo cuatro sietes en fila en una máquina tragamonedas, en el Sands Casino de Las Vegas, en 1988.

Tabla 17 Figuras en los carretes

	Carretes		
Figuras	**1**	**2**	**3**
Cerezas	2	5	4
Naranjas	5	4	5
Ciruelas	5	3	3
Campanas	2	4	4
Melones	2	1	2
Barras	3	2	1
Sietes	1	1	1
Totales	20	20	20

Tabla 18 Cálculo de la pérdida esperada en una máquina tragamonedas de tres carretes

Combinaciones ganadoras	Número de posibilidades	Probabilidad	Número de monedas recibidas	Ganancias netas (en monedas)	Probabilidad por ganancias netas
1 cereza (en el primer carrete)	$2 \cdot 15 \cdot 20 = 600$	600/8000	3	2	1200/8000
2 cerezas (en los primeros dos carretes)	$2 \cdot 5 \cdot 16 = 160$	160/8000	5	4	640/8000
3 cerezas	$2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$	40/8000	10	9	360/8000
3 naranjas	$5 \cdot 4 \cdot 5 = 100$	100/8000	10	9	900/8000
3 ciruelas	$5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$	45/8000	14	13	585/8000
3 campanas	_ · _ · _ = ___	___/8000	18	___	___/8000
3 melones (premio mayor)	_ · _ · _ = ___	___/8000	100	___	___/8000
3 barras (premio mayor)	_ · _ · _ = ___	___/8000	200	___	___/8000
3 sietes (premio mayor)	_ · _ · _ = ___	___/8000	500	___	___/8000
Totales	___				6318/8000

La **tabla 18** toma en cuenta todos los resultados *ganadores*, con los productos necesarios en la última columna para determinar las esperanzas. Sin embargo, como puede presentarse un resultado *no ganador* en

$$8000 - 988 = 7012 \text{ posibilidades (con ganancias de } -1 \text{ monedas)},$$

el producto $(-1) \cdot 7012/8000$ se debe incluir también. Por lo tanto, el valor esperado de esta máquina particular es

$$\frac{6318}{8000} + (-1) \cdot \frac{7012}{8000} \approx -0.087 \text{ moneda.}$$

En una máquina que cobra un dólar por juego, la *pérdida* esperada (por juego) es de aproximadamente

$$(0.87)\ (1 \text{ dólar}) = 8.7 \text{ } \textit{centavos}.$$

Las tragamonedas reales varían en la pérdida esperada por dólar de juego. Pero el autor Hornsby pudo ganar en una máquina tragamonedas de Las Vegas en 1988. (Véase la fotografía de la página anterior.

La **tabla 19** proviene de un artículo de Andrew Sterrett en *The Mathematics Teacher* (marzo de 1967), en el cual analiza las reglas de varios juegos de probabilidad y calcula los valores esperados. Usa los valores esperados para determinar el tiempo que tomaría perder $1000 si se juega continuamente apostando $1 por juego, y participando en un juego por minuto.

Para investigación individual o en grupo

1. Explique por qué las entradas de la columna "Ganancias netas" de la **tabla 18** son todas menores que las entradas correspondientes de la columna "Número de monedas recibidas".
2. Obtenga los 29 valores faltantes en la **tabla 18**. (Remítase a la **tabla 17** para conocer los valores de la columna "Número de posibilidades").
3. Para hacer que su dinero dure tanto como sea posible en un casino, ¿en cuál juego debería participar?

Tabla 19 Tiempo esperado para perder $1000

Juego	Valor esperado	Días	Horas	Minutos
Ruleta (con un 0)	−$0.027	25	16	40
Ruleta (con 0 y 00)	−$0.053	13	4	40
Chuck a luck (juego de dados)	−$0.079	8	19	46
Keno (un número)	−$0.200	3	11	20
Números	−$0.300	2	7	33
Futbol (4 ganadores)	−$0.375	1	20	27
Futbol (10 ganadores)	−$0.658	1	1	19

9.5 EJERCICIOS

1. Explique en palabras lo que significa "valor esperado de una variable aleatoria".
2. Explique lo que una pareja quiere decir con el enunciado: "Esperamos tener 1.5 hijos varones".
3. ***Lanzamiento de monedas*** Se lanzan cinco monedas justas al aire. Calcule el número esperado de caras.
4. ***Extracción de naipes*** Se extraen dos naipes, con remplazo, de un mazo normal de 52 cartas. Obtenga el número esperado de diamantes.

Ganancias esperadas en un juego de lanzamiento de dados *En los ejercicios 5 y 6, el juego consiste en el lanzamiento de un solo dado justo y se paga como sigue:* $3 *por un* 6, $2 *por un* 5, $1 *por un* 4, *y ningún pago por otro resultado.*

5. Calcule las ganancias esperadas en este juego.
6. ¿Cuál es un precio justo para este juego?

Ganancias esperadas en un juego de lanzamiento de dados *En los ejercicios 7 y 8 considere un juego que consiste en el lanzamiento de un dado, en el cual se paga como sigue. Si sale un número par de puntos, usted recibe tantos dólares como puntos salgan. Pero si sale un número impar, usted debe pagar tantos dólares como puntos hayan salido.*

7. Determine las ganancias netas esperadas en este juego.
8. ¿Este juego es justo o injusto en contra del jugador, o injusto a favor del jugador?
9. ***Ganancias esperadas en el lanzamiento de una moneda*** Cierto juego implica el lanzamiento de 3 monedas justas al aire. Se pagan 10 centavos por 3 caras, 5 centavos por 2 caras, y 3 centavos por 1 cara. ¿Una cuota de 5 centavos es un precio justo a pagar por participar en este juego? (Es decir, ¿el costo de 5 centavos por participar hace justo el juego?)

10. ***Ganancias esperadas en la ruleta*** En una ruleta ligeramente diferente a la del **ejemplo 5**, una administración más generosa usa una rueda que tiene solo 37 compartimentos, con 18 rojos, 18 negros y un cero. Determine las ganancias netas esperadas si usted apuesta al rojo en este juego.

11. ***Número de ausencias esperado en la clase de matemáticas*** En cierta clase de matemáticas, se han determinado empíricamente las probabilidades de varios números de personas ausentes en un día determinado. Estos valores se muestran en la siguiente tabla. Calcule el número esperado de ausentes en un día cualquiera. (Dé la respuesta con dos decimales).

Número de ausentes	0	1	2	3	4
Probabilidad	0.18	0.26	0.29	0.23	0.04

12. ***Utilidad esperada de una compañía de seguros*** Una compañía de seguros asegurará una casa de $200,000 por su valor total, a cambio de una prima anual de $650. Si la compañía gasta $25 anuales por administrar la póliza, la probabilidad de pérdida total de la casa en un año determinado es de 0.002, y se supone que puede ocurrir o no la pérdida total del inmueble, ¿cuál es la ganancia (o utilidad) anual esperada por la compañía en este tipo de póliza?

Utilidades del sorteo en una fundación universitaria *Una fundación universitaria recauda fondos vendiendo boletos para el sorteo de un automóvil nuevo que cuesta* $36,000.

13. Si se venden 600 boletos a $120 cada uno, determine

- ***a)*** las ganancias *netas* esperadas de una persona que compra uno de los boletos.
- ***b)*** la utilidad total de la fundación suponiendo que se tiene que comprar el automóvil.
- ***c)*** la utilidad total de la fundación, suponiendo que el automóvil es donado.

14. Para el sorteo descrito en el **ejercicio 13**, si se venden 720 boletos en $120 cada uno, determine

- ***a)*** las ganancias *netas* esperadas de una persona que compra uno de los boletos.
- ***b)*** la utilidad total de la fundación suponiendo que se tiene que comprar el automóvil.
- ***c)*** la utilidad total de la fundación suponiendo que el automóvil es donado.

Ganancias y utilidades de un sorteo *Se venden* 5000 *boletos de un sorteo. El primer premio es de* $1000, *hay dos segundos premios de* $500 *cada uno, y tres terceros premios de* $100 *cada uno. Todos los ganadores serán seleccionados aleatoriamente.*

15. Si usted compra un boleto, ¿cuáles son sus ganancias brutas esperadas?

16. Si usted compra 10 boletos, ¿cuáles son sus ganancias brutas esperadas?

17. Si los boletos se vendieran a $1 cada uno, ¿qué utilidad obtiene el patrocinador del sorteo?

18. ***Ventas esperadas en la dulcería de una sala de cine*** En una sala de cine para niños se aplicó una encuesta a individuos elegidos al azar, y se averiguó que 58 clientes compraron un artículo, 49 compraron dos, 31 compraron tres, 4 compraron 4, y 8 no compraron. Use esta información para calcular el número de artículos por cliente. (Redondee su respuesta a la décima más próxima).



19. ***Número esperado de niños que asistirán a un parque de diversiones*** Un parque de diversiones está considerando incorporar algunas atracciones nuevas. Por eso, realizó un estudio durante varios días típicos y encontró que, de 10,000 familias que asistieron al parque, 1020 llevaron a un niño (menor de 12 años de edad), 3370 llevaron a dos niños, 3510 llevaron a tres niños, 1340 llevaron a cuatro niños, 510 llevaron a cinco niños, 80 llevaron a seis niños, y 170 no llevaron niños. Determine el número esperado de niños por familia que asistieron a este parque. (Redondee su respuesta a la décima más próxima).

20. ***Sumas esperadas de números seleccionados al azar*** Se numeran cuatro tarjetas del 1 al 4. Dos de estas tarjetas se eligen al azar (sin remplazo), y se suman los números anotados sobre ellas. Calcule el valor esperado de esta suma.

21. ***Prospectos de empleos en electrónica en una ciudad*** En cierta ciudad de California, las proyecciones para el año próximo indican que hay un 20% de probabilidad de que los empleos en el sector electrónico se incrementen en 200, un 50% de que se incrementen en 300, y un 30% de que disminuyan en 800. ¿Cuál es el cambio esperado en el número de empleos en el sector electrónico en esa ciudad para el próximo año?

22. ***Ganancias esperadas en el Keno*** En una versión del juego de Keno, la casa tiene un recipiente que contiene 80 bolas, numeradas del 1 al 80. Un jugador compra un boleto de $1 y marca un número sobre él (del 1 al 80). Luego, la casa selecciona al azar 20 de los 80 números. Si el número seleccionado por el jugador está entre los 20 seleccionados por la administración, se pagan $3.20 al jugador. Calcule las ganancias netas esperadas en este juego.

23. Remítase a los **ejemplos 6 y 7**. Considerando los tres enfoques diferentes (valores esperados, optimista y pesimista), ¿cuál parece más razonable para usted y por qué?

Decisiones de un contratista con base en ganancias esperadas *Lori Hales, una contratista de construcciones comerciales, comprometerá a su compañía en uno de tres proyectos dependiendo de su análisis de utilidades o pérdidas potenciales que se muestra a continuación.*

Proyecto *A*		Proyecto *B*		Proyecto *C*	
Utilidad o pérdida x	**Probabilidad** $P(x)$	**Utilidad o pérdida** x	**Probabilidad** $P(x)$	**Utilidad o pérdida** x	**Probabilidad** $P(x)$
\$60,000	0.10	\$0	0.20	\$40,000	0.65
180,000	0.60	210,000	0.35	340,000	0.35
250,000	0.30	290,000	0.45		

Determine cuál proyecto debe elegir Lori de acuerdo con cada uno de los siguientes enfoques.

24. valores esperados **25.** el punto de vista optimista

26. el punto de vista pesimista

Ganancias esperadas en un concurso *En un programa de concurso se ofrece a un participante la opción de recibir un sistema de cómputo con valor de* \$2300 *o aceptar una oportunidad para ganar un paquete vacacional que cuesta* \$5000 *o un bote con valor de* \$8000. *Si se elige la segunda opción, las probabilidades del concursante de ganar las vacaciones o el bote son de* 0.20 *y* 0.15, *respectivamente.*

27. Si el concursante descarta el sistema de cómputo y optara por la oportunidad de ganar uno de los otros premios, ¿cuáles serían las ganancias esperadas?

28. Considerando exclusivamente el valor monetario, ¿cuál es la selección más conveniente para el concursante?

Evaluación de la compra de una póliza de seguro *David Glenn, el promotor de un concierto al aire libre, espera una utilidad por entradas de* \$100,000, *a menos que llueva, lo cual reduciría la utilidad por entradas a* \$30,000. *La probabilidad de que llueva es de* 0.20. *Por una prima de* \$25,000 *David puede comprar un seguro que le pagaría* \$100,000 *en caso de lluvia.*

Use esta información en los ejercicios 29 a 32.

29. Calcule la utilidad neta esperada si David compra el seguro.

30. Calcule la utilidad neta esperada si David no compra el seguro.

31. Con base en los valores esperados, ¿cuál es la elección más conveniente para David en esta situación?

32. Si usted fuera el promotor, ¿basaría su decisión en los valores esperados? Explique su razonamiento.

Valores esperados de ventas de libros *Jessica Lasda, una representante de ventas de libros de texto, tiene actualmente cinco cuentas, y su gerente está considerando asignarle otras tres cuentas. Las nuevas cuentas traerían un volumen potencial a su negocio, y algunas de sus cuentas actuales tienen potencial para crecer también. Observe la siguiente tabla y continúe en la siguiente página.*

1	2	3	4	5	6
Número de cuenta	**Volumen actual**	**Volumen potencial adicional**	**Probabilidad de obtener volumen adicional**	**Valor esperado del volumen adicional**	**Volumen existente más valor esperado del volumen adicional**
1	\$10,000	\$10,000	0.40	\$4000	\$14,000
2	30,000	0	—	—	30,000
3	25,000	15,000	0.20	3000	
4	35,000	0	—	—	
5	15,000	5,000	0.30		
6	0	30,000	0.10		
7	0	25,000	0.70		
8	0	45,000	0.60		

Use la tabla anterior para trabajar los ejercicios 33 a 37.

33. Calcule los cuatro valores esperados que faltan en la columna 5.

34. Calcule las seis cantidades que faltan en la columna 6.

35. ¿Cuál es el volumen adicional total "esperado" de Jessica?

36. Si Jessica logra su volumen adicional esperado en todas las cuentas, ¿cuál sería el volumen total de sus cuentas?

37. Si Jessica logra su volumen adicional esperado en todas las cuentas, ¿en qué porcentaje (redondeado a la décima más próxima) se incrementaría su volumen total?

38. ***Ganancias esperadas en el Keno*** Recuerde que en el juego de Keno del **ejercicio 22**, la casa elige al azar 20 números del 1 al 80. En la variación llamada Keno de 6 puntos, el jugador paga 60 centavos por su boleto y marca 6 números de su elección. Si los 20 números seleccionados por la casa incluyen al menos 3 de esos números, el jugador obtiene un premio de acuerdo con este esquema.

3 de los números del jugador entre los 20	\$0.35
4 de los números del jugador entre los 20	2.00
5 de los números del jugador entre los 20	60.00
6 de los números del jugador entre los 20	1250.00

Calcule las ganancias netas esperadas del jugador en este juego. [*Sugerencia*: Las cuatro probabilidades requeridas aquí se pueden obtener usando combinaciones (**sección 8.3**), el principio fundamental de conteo (**sección 8.2**) y la fórmula de probabilidad teórica (**sección 9.1**).

EXTENSIÓN Estimación de probabilidades por simulación

Simulación de características genéticas • Simulación de nacimientos humanos

Simulación de características genéticas

Un campo importante de la teoría de probabilidad es el proceso llamado **simulación**. Es posible estudiar un fenómeno complicado o poco claro *simulándolo*, o imitándolo, mediante un fenómeno más sencillo que implique las mismas probabilidades básicas.

Por ejemplo, recuerde la **sección 9.1** en relación con el descubrimiento de Mendel de que cuando se cruzan dos plantas de chícharo Rr (de flores rojas, pero portadoras de genes rojos y blancos), los descendientes tendrán flores rojas si reciben un gen R de un progenitor o de ambos. Esto se debe a que el rojo es dominante y el blanco es recesivo. La **tabla 3**, reproducida en el margen de esta página, muestra que tres de cuatro ocurrencias igualmente probables dan como resultado plantas descendientes con flores rojas.

		Segundo progenitor	
		R	**r**
Primer progenitor	**R**	RR	Rr
	r	rR	rr

Ahora suponga que queremos estimar la probabilidad de que tres descendientes en una fila tengan flores rojas. Es mucho más fácil (y rápido) lanzar monedas al aire que cruzar plantas de chícharos. Y se pueden usar los resultados igualmente probables, caras y cruces, para simular la transferencia de los genes igualmente probables, R y r. Si lanzamos dos monedas, digamos de cinco y diez centavos, entonces podemos interpretar los resultados como sigue.

cc ⇒ RR ⇒ gen rojo del primer progenitor y gen rojo del segundo progenitor ⇒ flores rojas
cx ⇒ Rr ⇒ gen rojo del primer progenitor y gen blanco del segundo progenitor ⇒ flores rojas
xc ⇒ rR ⇒ gen blanco del primer progenitor y gen rojo del segundo progenitor ⇒ flores rojas
xx ⇒ rr ⇒ gen blanco del primer progenitor y gen blanco del segundo progenitor ⇒ flores blancas

Aun cuando no hay certeza tratándose de unos cuantos lanzamientos al aire de monedas, la ley de los grandes números indica que números más y más grandes de lanzamientos se vuelven indicadores cada vez más precisos de las tendencias generales en el proceso genético.

Los **métodos de simulación**, también llamados **métodos Monte Carlo**, requieren números enormes de dígitos aleatorios, de modo que se usan computadoras para generarlos. Sin embargo, una computadora no puede lanzar monedas al aire. Debe usar un proceso algorítmico programado, el cual se conoce como **generador de números aleatorios**. Es muy difícil eliminar todos los patrones no aleatorios de los resultados, de manera que los números generados se conocen como números "seudoaleatorios". Deben pasar una batería de pruebas de aleatoriedad antes de "ser aprobados para su uso".

Los científicos de las computadoras y los físicos se han encontrado con dificultades inesperadas incluso en los generadores más complejos de números aleatorios. Por lo tanto, se deben verificar con mucho cuidado junto con cada nueva aplicación de simulación propuesta.

EJEMPLO 1 Simulación de procesos genéticos

Lance dos monedas al aire 50 veces y use los resultados para aproximar la probabilidad de que el cruzamiento de plantas de chícharos Rr produzca tres plantas descendientes sucesivas de flores rojas.

SOLUCIÓN

Se lanzaron dos monedas al aire 50 veces y se obtuvo la siguiente secuencia.

xc, cc, xc, xx, xc, cc, cx, xc, cx, xc, cc, cc, xx, xc, cc,
cx, cx, cx, cx, xc, cc, cc, cc, xx, cx, xx, cc, cx, cx, cc, xx,
xx, xx, xc, xx, xx, cc, cx, cx, cx, cc, xx, xc, cc, xx, cc, cx,
xx, xx, xx

De acuerdo con la interpretación de color descrita en la página anterior, esto da la siguiente secuencia de colores de flores en la descendencia.

Solo "dos cruces" producen un blanco.

rojo-rojo-rojo-blanco-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-blanco-
rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-rojo-blanco-rojo-blanco-
rojo-rojo-rojo-rojo-blanco-blanco-blanco-rojo-blanco-blanco-rojo-rojo-
rojo-rojo-rojo-blanco-rojo-rojo-blanco-rojo-rojo-blanco-blanco-blanco

Ahora tenemos una lista experimental de 48 conjuntos de tres plantas sucesivas, la primera, segunda y tercera entradas, luego la segunda, tercera y cuarta entradas, etcétera. ¿Sabe por qué son 48 en total?

Ahora solo contamos los números de estos conjuntos de tres que son "rojo-rojo-rojo". Como hay 20 de ellos, nuestra probabilidad empírica de tres plantas descendientes sucesivas con flores rojas, obtenida a través de simulación, es de $\frac{20}{48} = \frac{5}{12}$, o 0.417 aproximadamente. Aplicando la regla de la multiplicación de probabilidad (con todos los resultados independientes unos de otros), obtenemos el valor teórico de $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$, o 0.422 aproximadamente, de modo que nuestra aproximación es muy cercana. ■■■

Simulación de nacimientos humanos En los nacimientos humanos, los niños y las niñas son (en esencia) igualmente probables. Por lo tanto, un nacimiento individual se puede simular lanzando una moneda al aire, y considerando que la cara corresponda a una niña y la cruz a un varón.

EJEMPLO 2 Simulación de nacimientos lanzando una moneda al aire



Los pilotos, astronautas, corredores de automóviles y otras personas se capacitan en **simuladores**. Estos son dispositivos muy complejos o versiones muy costosas de videojuegos, que imitan las condiciones que se presentarán más adelante en la "vida real". La sesión en un simulador permite estimar la posibilidad, o probabilidad, de las diferentes respuestas que el aprendiz podría manifestar en condiciones reales. Sesiones repetidas permiten al aprendiz desarrollar respuestas más adecuadas antes de utilizar el equipo real y sin poner vidas en riesgo.

Una secuencia de 40 lanzamientos al aire de una moneda produjo los siguientes resultados.

bbggb, gbbbg, gbgbb, bggbg, bbbbg, gbbgg, gbbgg, bgbbg

(Para todas las caras hemos escrito g, que representa niña. Por cada cruz se anotó b, que significa niño).

a) ¿Cuántos pares de dos nacimientos sucesivos están representados en la secuencia?

b) ¿Cuántos de estos pares están formados solo por varones?

c) Determine la probabilidad empírica, con base en esta simulación, de que dos nacimientos sucesivos den como resultado dos varones. Dé su respuesta con tres decimales.

SOLUCIÓN

a) Se inicia con el par 1o.-2o. y se termina con el par 39-40; hay 39 pares.

b) Observando la secuencia de niños y niñas, contamos 11 pares de dos varones consecutivos.

c) Con base en los incisos ***a)*** y ***b)***, tenemos $\frac{11}{39} \approx 0.282$. ■■■

Tabla 20

→51592
77876
36500
40571
04822
→53033
92080
01587
36006
63698
→17297
22841
→91979
96480
74949
76896
47588
45521
02472
55184
40177
84861
86937
20931
22454
→73219
→55707
48007
→65191
06772
94928
→15709
39922
96365
14655
65587
76905
12369
54219
89329
90060
06975
05050
69774
→78351
11464
84086
→51497
12307
68009

Otra manera de simular nacimientos u otros fenómenos es mediante números aleatorios. La aguja giratoria de la **figura 12** se puede usar para obtener una tabla de dígitos aleatorios, como la **tabla 20**. Los 250 dígitos aleatorios generados se agruparon convenientemente para que podamos seguir con facilidad una columna hacia abajo o a lo largo de una fila para llevar a cabo una simulación.



Figura 12

EJEMPLO 3 Simulación de nacimientos mediante números aleatorios

Una pareja planea tener cinco hijos. Use una simulación con números aleatorios para estimar la probabilidad de que tengan más de tres hijos varones.

SOLUCIÓN

Hagamos que cada secuencia de cinco dígitos, como aparecen en la **tabla 20**, representen una familia con cinco hijos, y asocie (arbitrariamente) dígitos impares para los varones, y los dígitos pares para las niñas. (Recuerde que 0 es par). Verifique que, de las 50 familias simuladas, solo las 10 marcadas con flechas tienen más de tres varones (cuatro o cinco). Por lo tanto, la probabilidad (empírica) estimada es

$$P(\text{más de tres varones}) = \frac{10}{50} = 0.20. \qquad \blacksquare\blacksquare\blacksquare$$

El valor teórico de la probabilidad en este **ejemplo 3** sería el mismo que se obtuvo en el **ejemplo 3** de la **sección 9.4**, que era de 0.1875. Nuestra estimación anterior estuvo muy cerca. A la luz de la ley de los grandes números, una muestra grande de dígitos aleatorios (más de 50 familias simuladas) probablemente generaría una aproximación más cercana.

EJEMPLO 4 Simulación de la extracción de un naipe con números aleatorios

Use una simulación con números aleatorios para estimar la probabilidad de que dos naipes extraídos de un mazo normal de 52 cartas, con remplazo, sean del mismo palo.

SOLUCIÓN

Use esta correspondencia: 0 y 1 significan tréboles, 2 y 3 significan diamantes, 4 y 5 significan corazones, 6 y 7 representan espadas, 8 y 9 se ignoran. Ahora remítase a la **tabla 20**. Si (arbitrariamente) usamos el primer dígito de cada número de cinco dígitos, omitiendo los 8 y los 9, obtenemos la secuencia

5–7–3–4–0–5–0–3–6–1–2–7–7–4–4–0–5–4–2–2–
7–5–4–6–0–1–3–1–6–7–1–5–0–0–6–7–1–5–1–6.

Primeros dígitos de todos los grupos

Esta secuencia de 40 dígitos produce la secuencia de palos mostrada a continuación.

El 5 representa corazones, el 7 representa espadas, el 3 representa diamantes, etcétera.

corazones-espadas-diamantes-corazones-tréboles-corazones-tréboles-diamantes-espadas-tréboles-diamantes-espadas-espadas-corazones-corazones-tréboles-corazones-corazones-diamantes-diamantes-espadas-corazones-corazones-espadas-tréboles-tréboles-diamantes-tréboles-espadas-espadas-tréboles-corazones-tréboles-tréboles-espadas-espadas-tréboles-corazones-tréboles-espadas

Verifique que, de los 39 pares sucesivos de palos (corazones-espadas, espadas-diamantes, diamantes-corazones, etcétera), 9 de ellos sean pares del mismo palo. Esto arroja una probabilidad estimada de $\frac{9}{39} \approx 0.23$. (Para efectos de comparación, el valor teórico es de 0.25). ■■■

EJERCICIOS DE LA EXTENSIÓN

1. ***Simulación de reproducción de plantas de chícharos mediante el lanzamiento al aire de monedas*** Explique por qué, en el **ejemplo 1**, 50 lanzamientos al aire de las monedas produjeron solo 48 conjuntos de tres descendientes sucesivos.

2. ***Simulación de reproducción de plantas de chícharos mediante el lanzamiento al aire de monedas*** Use la secuencia de colores de flores del **ejemplo 1** para aproximar la probabilidad de que *cuatro* descendientes sucesivos tengan flores rojas.

3. ***Comparación de probabilidades de nacimientos de niños y niñas*** ¿La probabilidad de nacimientos sucesivos de dos niñas es diferente de la de dos varones sucesivos?

4. ***Determinación de la probabilidad empírica*** Simule 40 nacimientos lanzando usted mismo monedas al aire, y determine la probabilidad empírica de que nazcan dos niñas de forma sucesiva.

5. ***Simulación de niños y niñas mediante números aleatorios*** Use la **tabla 20** para simular 50 familias con tres hijos. Haga que 0 a 4 representen varones y 5 a 9 representen niñas, y use los tres dígitos intermedios de los agrupamientos de cinco dígitos (159, 787, 650, etcétera). Estime la probabilidad de que haya exactamente dos hijos varones en una familia de tres hijos. Compare con la probabilidad teórica, la cual es igual a $\frac{3}{8} = 0.375$.

Simulación de tiros uno y uno mediante números aleatorios *En los* ***ejercicios 71 a 73*** *de la* ***sección 9.3*** *Christine, quien llevaba un récord de 70% de tiros encestados, tenía probabilidades iguales a 0.30, 0.21 y 0.49 de anotar 0, 1 o 2 puntos, respectivamente.*

Use la **tabla 20** *(con los dígitos 0 a 6 representando anotaciones y 7 a 9 representando fallas) para simular 50 oportunidades de tiros uno y uno de Christine. Inicie en la parte superior izquierda (5, 7, 3, etcétera, a la parte inferior), y luego desplácese a la segunda columna (1, 7, 6, etcétera) hasta llegar a 50 oportunidades de tiros uno y uno. (Algunas "oportunidades" implican un tiro y un dígito aleatorio, mientras que otras implican dos tiros y dos dígitos aleatorios). Conserve un registro del número de veces que se anotan 0, 1 y 2 puntos.*

Número de puntos	Registro
0	
1	
2	

A partir del registro, determine la probabilidad empírica (con dos decimales) de cada evento.

6. cero puntos **7.** 1 punto **8.** 2 puntos

Determinación de la trayectoria de una caminata aleatoria usando un dado y una moneda *Los* ***ejercicios 49 a 56*** *de la* ***sección 9.4*** *ilustraron una versión sencilla de la idea de una "caminata aleatoria". Las partículas atómicas liberadas en una fisión nuclear también se mueven de manera aleatoria. Durante la Segunda Guerra Mundial, John von Neumann y Stanislaw Ulam usaron una simulación con números aleatorios para estudiar el movimiento de las partículas en las reacciones nucleares. Von Neumann acuñó el nombre "Monte Carlo" para identificar el método utilizado.*

La figura sugiere un modelo de movimiento aleatorio en dos dimensiones. Suponga que una partícula se mueve en una serie de "saltos" igual a la unidad, cada uno en una dirección aleatoria: cualquiera de 12 posibilidades igualmente probables. Una manera de elegir las direcciones es lanzar un dado y lanzar al aire una moneda. El dado determina una de las direcciones 1 a 6, las cuales se asocian con las caras de la moneda. Las cruces de la moneda invierten la dirección del dado, de modo que el dado asociado con la moneda determina las direcciones 7 a 12. Así, 3c (con 3 del dado y c de la moneda) representa la dirección 3; 3x representa la dirección 9 (opuesta a 3); y así sucesivamente.



9. Simule el movimiento descrito arriba con 10 lanzamientos del dado (y lanzamientos de la moneda). Dibuje la trayectoria de 10 saltos que obtiene. Elabore su dibujo con precisión suficiente para que pueda estimar (por medición) la distancia de la posición inicial a la posición final de la partícula.

10. Repita el experimento del **ejercicio 9** cuatro veces más. Mida la distancia del inicio al final de cada uno de los 5 "viajes aleatorios". Sume estas 5 distancias y divida el resultado entre 5, para determinar la "distancia neta esperada" de este viaje.

En los ejercicios 11 y 12, considere otra caminata aleatoria bidimensional regida por las siguientes condiciones.

- *Inicie a partir de una esquina determinada y camine una cuadra hacia al norte. En cada intersección:*
- *Dé vuelta a la izquierda con una probabilidad igual a* $\frac{1}{6}$.
- *Siga adelante con una probabilidad igual a* $\frac{2}{6}\ (=\frac{1}{3})$.
- *Dé vuelta a la derecha con una probabilidad de* $\frac{3}{6}\ (=\frac{1}{2})$.

(Nunca dé una vuelta completa).

11. ***Caminata aleatoria usando un dado*** Explique cómo se puede usar un dado justo para simular una caminata aleatoria.

12. ***Caminata aleatoria usando una tabla de números aleatorios*** Use la **tabla 20** para simular esta caminata aleatoria. Por cada 1 encontrado en la tabla, dé vuelta a la izquierda y avance otra cuadra. Por cada 2 o 3, siga derecho y avance otra cuadra. Por cada 4, 5 o 6, dé vuelta a la derecha y avance otra cuadra. Se ignoran los demás dígitos, es decir, ceros, sietes, ochos y nueves. (¿Advierte cómo este esquema satisface las probabilidades indicadas anteriormente en el **ejercicio 11**?) Esta vez inicie en la esquina superior derecha de la tabla, pasando por la columna 2, 6, 0, etcétera, hacia abajo. Cuando esta columna de números se agote, detenga la "caminata". Describa, en términos de distancia y dirección, dónde se encuentra al final en relación con el punto inicial.

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

Obtención de valores empíricos de π

La información de esta investigación se obtuvo de David Burton, History of Mathematics: An Introduction, *3a. edición, publicada por Wm. C. Brown, 1995, página 440.*

El siguiente problema fue planteado por Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707-1788) en su *Histoire Naturelle* en 1777. Cierta área plana grande está dividida por rectas paralelas equidistantes; la distancia entre dos rectas consecutivas de la serie es a. Se arroja aleatoriamente sobre el plano una aguja delgada de longitud

$$\ell < a$$

¿Cuál es la probabilidad de que la aguja haga intersección con una de estas rectas?

La respuesta a este problema se obtiene usando cálculo integral, y se demuestra que la probabilidad p es $p = \frac{2\ell}{\pi a}$. Despejando π se obtiene la fórmula

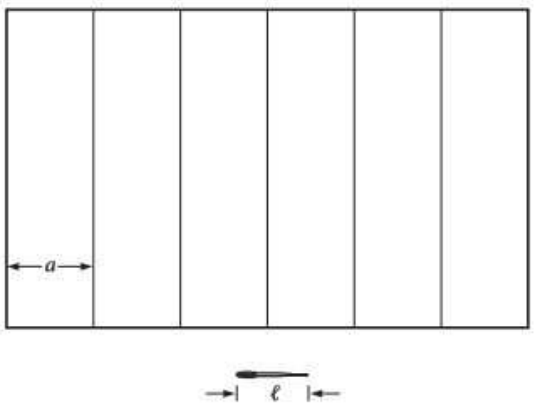
$$\pi = \frac{2\ell}{pa}, \qquad \textbf{(1)}$$

la cual se puede usar para aproximar el valor de π de forma experimental. Pierre Simon de Laplace fue el primero en observar esto, y Johann Wolf, un profesor de astronomía de Berna, realizó el experimento en 1850 aproximadamente. En esta investigación, realizaremos un experimento similar.

Visite el sitio http://webspace.ship.edu/deensley/mathdl/stats/Buffon.html para observar una demostración dinámica de este "problema de la aguja de Buffon".

Temas de análisis

Se divide la clase en grupos de 3 o 4 estudiantes cada uno. Cada grupo necesitará los materiales listados a continuación.



1. una hoja de papel con una serie de rectas paralelas equidistantes entre sí
2. una aguja delgada, o un objeto similar a una aguja, con una longitud menor que la distancia entre rectas paralelas adyacentes sobre el papel

Cada grupo debe realizar los siguientes pasos:

1. Medir y registrar la distancia (a) entre las rectas y la longitud de la aguja (ℓ), usando las mismas unidades para ambas.
2. Elegir a un miembro del grupo para que deje caer la aguja sobre el papel, otro para determinar si la aguja "golpea" o no una recta, y otro para actualizar el registro de golpes y fallas.
3. Comentar las maneras de minimizar sesgos, de manera que la posición y orientación de la aguja que cae sean lo más aleatorias posible.
4. Dejar caer la aguja 100 veces, y registrar el número de golpes.
5. Calcular la probabilidad p = (número de golpes)/100. ¿Es este un valor teórico o empírico de la probabilidad?
6. Introducir el valor calculado de p y los valores medidos de a y ℓ en la fórmula (1) para obtener un valor de π. Redondeen este valor a cuatro decimales.

Ahora se reúne de nuevo toda la clase para registrar los diferentes valores obtenidos de π. Comenten lo siguiente.

1. El valor correcto de π, con cuatro decimales, es 3.1416. ¿Cuál valor de π de los reportados por los grupos es el más exacto? ¿Qué tan diferente es?
2. ¿Fue necesario dejar caer la aguja 100 veces, o se podrían haber usado más o menos caídas de la aguja?
3. Wolf arrojó su aguja 5000 veces y esta golpeó una recta 2532 veces, lo que dio como resultado un valor experimental de π igual a 3.1596. ¿Qué tan diferente es este valor de Wolf?
4. ¿Cómo se podría modificar el experimento para obtener "mejores valores" de π?
5. ¿Por qué podrían los diferentes grupos usar diversos valores de razones entre ℓ y a, y aun así obtener aproximaciones legítimas de π?
6. ¿El método de simulación investigado aquí parece una manera razonable de aproximar π? ¿Por qué?

EXAMEN DEL CAPÍTULO 9

1. Explique la diferencia entre probabilidades *empíricas* y *teóricas*.

2. Enuncie la *ley de los grandes números*, y use lanzamiento al aire de monedas para ilustrarla.

Extracción de naipes *Se elige de manera aleatoria una sola carta de un mazo normal de 52 naipes. Obtenga los momios en contra de cada uno de los siguientes eventos.*

3. un corazón

4. una reina roja

5. un rey o una figura negra

Genética de fibrosis quística *La siguiente tabla representa la transmisión genética de la fibrosis quística.* C *representa un gen normal, mientras que* c *representa un gen de la fibrosis quística. (El normal es dominante). En este caso ambos padres son* Cc*, lo cual significa que heredarán un gen de cada uno, y son, por lo tanto, portadores, aunque no tienen la enfermedad.*

		Segundo progenitor	
		C	**c**
Primer progenitor	**C**		Cc
	c		

6. Complete la tabla, mostrando los cuatro arreglos de genes igualmente probables.

7. Determine la probabilidad de que un hijo de estos padres también sea portador sin padecer la enfermedad.

8. ¿Cuáles son los momios de que un hijo de estos padres realmente tenga fibrosis quística?

Días libres de los empleados de una pizzería *El gerente de una pizzería (la cual opera siete días a la semana), permite que cada uno de los tres empleados elija su día libre de la siguiente semana. Suponiendo que la selección se hace aleatoriamente y de manera independiente, calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.*

9. Los tres seleccionan días diferentes.

10. Los tres seleccionan el mismo día, dado que los tres eligen un día que inicia con la misma letra.

11. Exactamente dos de ellos eligen el mismo día.

Generación de números a partir de conjuntos de dígitos *Se eligen aleatoriamente dos números, sin remplazo, del conjunto* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$*. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.*

12. Ambos números son pares.

13. Ambos números son primos.

14. La suma de los dos números es impar.

15. El producto de los dos números es impar.

Selección de comisiones *Se elige aleatoriamente una comisión de tres miembros a partir de un grupo formado por tres hombres y dos mujeres.*

16. Sea x el número de hombres en la comisión y complete la tabla de distribución de probabilidad.

x	$P(x)$
0	0
1	
2	
3	

17. Calcule la probabilidad de que no todos los miembros de la comisión sean hombres.

18. Calcule el número esperado de hombres en la comisión.

Lanzamiento de dados *Se lanza un par de dados. Obtenga lo siguiente.*

19. La probabilidad de "dobles" (el mismo número en ambos dados).

20. Los momios a favor de una suma mayor que 2.

21. Los momios en contra de una suma de "7 u 11".

22. La probabilidad de una suma que sea par y menor que 5.

Par en el golf *Ted Krischak tiene* 0.78 *de posibilidades de hacer un par en cada hoyo de golf. Hoy planea jugar solamente* 3 *hoyos. Determine la probabilidad de cada evento. Dé sus respuestas con tres decimales.*

23. Hace un par en los tres hoyos.

24. Hace un par en exactamente dos de los tres hoyos.

25. Hace un par en al menos uno de los tres hoyos.

26. Hace un par en el primer hoyo y en el tercero, pero no en el segundo.

Extracción de naipes *Se extraen dos naipes, sin remplazo, de un mazo normal de 52 cartas. Calcule la probabilidad de cada evento.*

27. Ambos naipes son rojos.

28. Ambos naipes son del mismo color.

29. El segundo naipe es una reina, dado que el primer naipe es un as.

30. El primer naipe es una figura y el segundo es negro.

ESTADÍSTICA

10



La serie de televisión de la CBS, NUMB3RS, se enfoca en la forma como se usan las matemáticas para resolver crímenes. En el episodio del 5 de diciembre de 2008, titulado "Teoría de conspiración", el agente Charlie Eppes quiere probar un argumento a uno de sus colegas: "Actúa de acuerdo con lo que sabes, no con lo que no sabes", y cita el caso de la paradoja de Simpson, una rareza estadística enigmática:

> *En estos dos años, David Justice tuvo un promedio de bateo más alto que Derek Jeter. Pero si se toma en cuenta el número desigual de turnos al bate, Jeter gana.*

Lo que sabemos es que durante el periodo de dos años, Jeter fue el mejor bateador, a pesar del hecho de que en ambos años individuales, Justice tuvo promedios más altos. Para verificar la paradoja por usted mismo, vea la sección Para reflexionar en la página 531.

10.1 Representaciones visuales de datos

10.2 Medidas de tendencia central

10.3 Medidas de dispersión

10.4 Medidas de posición

10.5 La distribución normal

Extensión Regresión y correlación

Investigación colaborativa Combinación de conjuntos de datos

Examen del capítulo 10

10.1 REPRESENTACIONES VISUALES DE DATOS

Conceptos básicos • Distribuciones de frecuencias • Distribuciones de frecuencias agrupadas • Diagramas de tallo y hoja • Gráficas de barras, circulares y lineales

Conceptos básicos

Los gobiernos acumulan y analizan una cantidad sorprendente de datos estadísticos. La palabra misma proviene del latín *statisticus*, que significa "del Estado".



En estadística, una **población** incluye *todos* los datos de interés, y una **muestra** incluye *algunos* de los datos de la población (normalmente no todos). Véase el diagrama de Venn del margen.

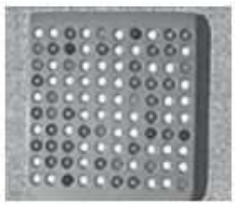
Para predecir el resultado aproximado de una elección presidencial, nos debe interesar una población de muchos millones de preferencias electorales (las de todos los votantes potenciales en el país). Sin embargo, para efectos prácticos, inclusive las grandes encuestadoras con recursos considerables manejarán solo una muestra relativamente pequeña, digamos, 2000 de esas preferencias.

El estudio de la estadística se divide en dos áreas principales. La **estadística descriptiva** tiene que ver con la recolección, organización, resumen y presentación de los datos (información). La **estadística inferencial** tiene que ver con la obtención de inferencias o conclusiones (por medio de conjeturas) acerca de las poblaciones, con base en la información de las muestras.

Las siguientes fotografías presentan dos muestras aleatorias extraídas de un tazón grande de 10,000 cuentas de colores. La muestra de 25 cuentas contiene 9 cuentas verdes, de lo cual inferimos, por razonamiento inductivo, que el tazón (la población) debe contener aproximadamente $\frac{9}{25}$, o 36%, es decir, aproximadamente 3600 cuentas verdes.


Población de 10,000

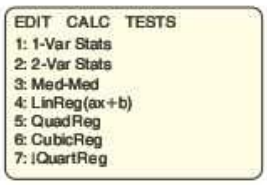

Muestra aleatoria de 25

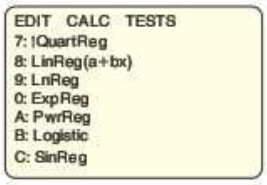

Muestra aleatoria de 100

La muestra de 100 cuentas contiene 28 cuentas verdes, lo cual nos lleva a inferir que la población debe contener aproximadamente $\frac{28}{100}$, o 28%, es decir, 2800 cuentas verdes. Esta estimación, con base en una muestra más grande, debe ser más exacta. De hecho lo es, ya que el tazón tiene realmente el 30%, es decir, 3000 cuentas verdes, y 2800 está más cerca de 3000 que 3600. (El "error" es de un tercio cuando mucho).

Resumiendo, si sabemos cómo es una población, la teoría de probabilidad nos ayuda a predecir lo que probablemente sucede en una muestra (razonamiento deductivo). Si sabemos cómo es una muestra, entonces la estadística inferencial nos permite inferir estimaciones acerca de la población (razonamiento inductivo).

La información que se ha reunido, pero que aún no está organizada o procesada se conoce como **datos en bruto**. Con frecuencia es **cuantitativa** (o **numérica**), pero también puede ser **cualitativa** (o **no numérica**), como se ilustra en la **tabla 1**.





Varias opciones estadísticas de la calculadora TI-83/84 Plus.

Tabla 1 Ejemplos de datos en bruto

Datos cuantitativos: el número de hermanos en 10 familias diferentes: 3, 1, 2, 1, 5, 4, 3, 3, 8, 2
Datos cualitativos: Los fabricantes de seis automóviles diferentes: Toyota, Ford, Nissan, Toyota, Chevrolet, Honda

La mayoría de las calculadoras científicas y graficadoras realizan todos los cálculos que se describen en este capítulo, incluyendo la clasificación de datos (una vez que se han introducido). De modo que el objetivo en el estudio de este material debe ser comprender los significados de las diferentes cantidades calculadas. Se recomienda que los cálculos reales, especialmente para colecciones de datos considerables, se realicen con una calculadora (o una computadora con el software estadístico adecuado).

Los datos cuantitativos generalmente son más útiles cuando están **clasificados** o arreglados en orden numérico. Ya clasificada, la primera lista de la **tabla 1** es como sigue.

1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 8

Distribuciones de frecuencias

Cuando un conjunto de datos incluye muchos elementos repetidos, se puede organizar en una **distribución de frecuencias**, la cual lista los distintos valores de datos (x) junto con sus frecuencias (f). La frecuencia representa el número de veces que se presenta el elemento correspondiente en el conjunto de datos.

También es útil mostrar la **frecuencia relativa** de cada elemento diferente. Esta es la fracción o el porcentaje del conjunto de datos representado por el elemento. Si n representa el número total de elementos, y un elemento determinado, x, se presenta f veces, entonces la frecuencia relativa de x es $\frac{f}{n}$. El **ejemplo 1** ilustra estas ideas.

EJEMPLO 1 Construcción de la distribución de frecuencias y la distribución de frecuencias relativas

Los 25 miembros de una clase de psicología fueron encuestados en relación con el número de integrantes de sus familias individuales. Construya la distribución de frecuencias y la distribución de frecuencias relativas con base en sus respuestas, las cuales se muestran a continuación.

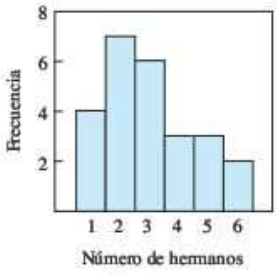
2, 3, 1, 3, 3, 5, 2, 3, 3, 1, 1, 4, 2, 4, 2, 5, 4, 3, 6, 5, 1, 6, 2, 2, 2

SOLUCIÓN

Los datos van de un valor mínimo de 1 a un valor máximo de 6. Las frecuencias (obtenidas por observación) y las frecuencias relativas se muestran en la **tabla 2**.

Tabla 2 **Distribuciones de frecuencias y de frecuencias relativas del número de hermanos**

Número x	Frecuencia f	Frecuencia relativa $\frac{f}{n}$
1	4	$\frac{4}{25} = 16\%$
2	7	$\frac{7}{25} = 28\%$
3	6	$\frac{6}{25} = 24\%$
4	3	$\frac{3}{25} = 12\%$
5	3	$\frac{3}{25} = 12\%$
6	2	$\frac{2}{25} = 8\%$



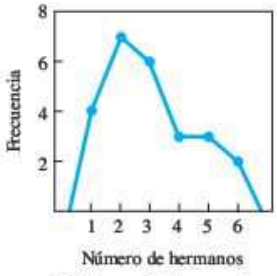
Histograma

Figura 1

Los datos numéricos de la **tabla 2** se pueden interpretar más fácilmente con la ayuda de un **histograma**. Una serie de rectángulos, cuyas longitudes representan las frecuencias, se colocan uno enseguida del otro como se muestra en la **figura 1**. Sobre los ejes, horizontal y vertical, se anota la identificación de los datos y la escala numérica.

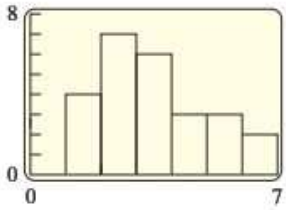
La información mostrada en el histograma de la **figura 1** también se puede expresar mediante un **polígono de frecuencias**, como en la **figura 2**. Simplemente se dibuja un punto a la altura adecuada de cada frecuencia, se unen los puntos con una serie de rectas, y se completa el polígono con segmentos hacia abajo que se conectan con el eje más allá del 1 y el 6.

El polígono de frecuencias es una forma de la *gráfica lineal* más general, usada para muchas clases de datos, no solo para frecuencias. Las gráficas lineales se presentaron antes en el **capítulo 1**.

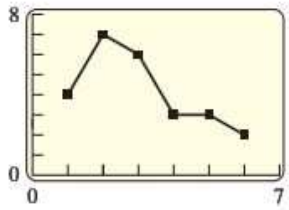


Polígono de frecuencias

Figura 2



Este histograma se generó con una graficadora usando los datos de la **tabla 2**. Compare con la **figura 1** de la **página 513**.



Esta gráfica lineal se parece al polígono de frecuencias de la **figura 2** de la **página 513**. Se generó con una graficadora usando los datos de la **tabla 2**.

Distribuciones de frecuencias agrupadas

Los conjuntos de datos que contienen gran cantidad de elementos, a menudo se arreglan en grupos o *clases*. Todos los datos se asignan a la clase adecuada, y luego se obtiene y se grafica una **distribución de frecuencias agrupadas**. Aun cuando no hay reglas fijas para el establecimiento de las clases, la mayoría de los estadísticos están de acuerdo en algunos criterios generales.

Criterios generales para las clases de una distribución de frecuencias agrupadas

1. Asegúrese de que cada dato se ajustará a una clase y solo a una.
2. Intente construir todas las clases con la misma amplitud.
3. Asegúrese de que las clases no se traslapen.
4. Use de 5 a 12 clases. (Muy pocas o demasiadas clases podrían ocultar las tendencias de los datos).

EJEMPLO 2 Construcción de un histograma y un polígono de frecuencias

A 40 estudiantes, elegidos aleatoriamente una mañana en la cafetería de la escuela, se les pidió estimar el número de horas que habían dedicado al estudio la semana anterior (incluyendo tanto el tiempo de clases como el tiempo fuera de clases). Sus respuestas están anotadas a continuación.

18	60	72	58	20	15	12	26	16	29
26	41	45	25	32	24	22	55	30	31
55	39	29	44	29	14	40	31	45	62
36	52	47	38	36	23	33	44	17	24

Tabule una distribución de frecuencias agrupadas y una distribución de frecuencias relativas agrupadas y construya un histograma y un polígono de frecuencias con los datos proporcionados.

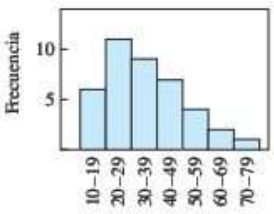
SOLUCIÓN

Los datos van del más bajo, igual a 12, al más alto, que es 72 (es decir, un intervalo de $72 - 12 = 60$ unidades). Las extensiones de las clases deben ser uniformes (criterio 2), y debería haber de 5 a 12 clases (criterio 4). Cinco clases implicarían una amplitud de clase de aproximadamente $\frac{60}{5} = 12$, mientras que 12 clases implicarían una amplitud de clase de aproximadamente $\frac{60}{12} = 5$. Una amplitud de clase igual a 10 sería lo más conveniente. Hagamos que nuestras clases vayan de 10 a 19, de 20 a 29, y así sucesivamente hasta llegar a 70-79, para obtener un total de siete clases. Con esto se cumplen los cuatro criterios.

Luego revise el conjunto de datos, registrando cada dato en la clase adecuada. Los totales del registro generan las frecuencias por clase, las cuales, a la vez, producen las frecuencias relativas, como se muestra en la **tabla 3** de la siguiente página. El histograma se presenta en la **figura 3**.

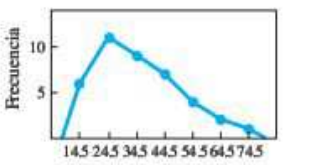
En la **tabla 3** (y la **figura 3**) los números 10, 20, 30, etcétera, se conocen como **límites inferiores de clase**. Son los valores de datos más pequeños posibles dentro de las clases respectivas. Los números 19, 29, 39, etcétera, se conocen como **límites superiores de clase**. La **amplitud de clase** común de la distribución es la diferencia entre dos límites inferiores de clase sucesivos cualesquiera (como 30 y 20), o dos límites superiores de clase sucesivos cualesquiera (como 59 y 49). La amplitud de la clase de esta distribución es 10, como se vio anteriormente.

Para construir un polígono de frecuencias, observe que, en una distribución de frecuencias *agrupadas*, los datos de una clase determinada normalmente no son todos iguales. Se puede obtener el valor "a la mitad", o **marca de clase** del intervalo, sumando los límites más bajo y más alto de la clase y dividiendo la suma entre 2. Se localizan todas las marcas de clase a lo largo del eje horizontal y se grafican los puntos arriba de las marcas de clase. Las alturas de los puntos graficados representan las frecuencias de clase. Los puntos resultantes se unen exactamente como en una distribución de frecuencias (agrupadas) normal. El resultado se presenta en la **figura 4**.



Histograma de frecuencias agrupadas

Figura 3



Polígono de frecuencias agrupadas

Figura 4

Tabla 3 Distribuciones de frecuencias agrupadas y de frecuencias relativas del tiempo semanal de estudio

Límites de clase	Registro	Frecuencia f	Frecuencia relativa $\frac{f}{n}$
10–19	𝍸 |	6	$\frac{6}{40} = 15.0\%$
20–29	𝍸 𝍸 |	11	$\frac{11}{40} = 27.5\%$
30–39	𝍸 ||||	9	$\frac{9}{40} = 22.5\%$
40–49	𝍸 ||	7	$\frac{7}{40} = 17.5\%$
50–59	||||	4	$\frac{4}{40} = 10.0\%$
60–69	||	2	$\frac{2}{40} = 5.0\%$
70–79	|	1	$\frac{1}{40} = 2.5\%$
Total: $n = 40$			

Tabla 4 Distribución de frecuencias agrupadas para el tiempo semanal de estudio

Límites de clase	Frecuencia
10–19	6
20–29	11
30–39	9
40–47	7
50–59	4
60–69	2
70–79	1

Diagramas de tallo y hoja

En la **tabla 3**, las marcas del registro ofrecen una buena visión de cómo están distribuidos los datos. De hecho, las marcas del registro son casi como un histograma girado sobre uno de sus lados. Sin embargo, una vez que se ha hecho el conteo, las marcas de registro normalmente se eliminan, y la distribución de frecuencias agrupadas se presenta como en la **tabla 4**.

Ahora, las ventajas gráficas de las marcas del registro se han perdido. Adicionalmente, no se puede decir, a partir de la distribución de frecuencias agrupadas (o lo que es más, de las marcas de registro), cuáles eran los datos originales. Solo sabemos, por ejemplo, que había siete datos en la clase 40-49. No sabemos específicamente cuáles eran.

Una manera de eliminar esta dificultad es emplear una herramienta del análisis exploratorio de datos, el **diagrama de tallo y hoja**, como se muestra en el **ejemplo 3**.

EJEMPLO 3 Construcción de un diagrama de tallo y hoja

Muestre los datos de tiempo de estudio del **ejemplo 2** en un diagrama de tallo y hoja.

SOLUCIÓN

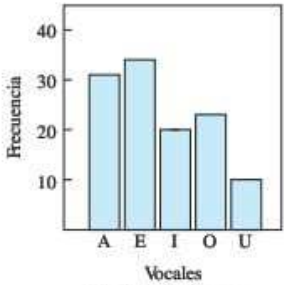
Vea los datos en bruto originales del **ejemplo 2**. Los números están arreglados en la **tabla 5**. Los dígitos de las decenas, a la izquierda de la recta vertical, son los "tallos", mientras que los dígitos de las unidades correspondientes de la derecha son las "hojas". Se han introducido todos los datos de la primera fila de los datos originales, de izquierda a derecha, luego los datos de la segunda a la cuarta fila.

Tabla 5 Diagrama de tallo y hoja del tiempo semanal de estudio

1	8	5	2	6	4	7					
2	0	6	9	6	5	4	2	9	9	3	4
3	2	0	1	9	1	6	8	6	3		
4	1	5	4	0	5	7	4				
5	8	5	5	2							
6	0	2									
7	2										

Observe que el diagrama de tallo y hoja del **ejemplo 3** transmite de un vistazo la misma impresión que el histograma, sin necesidad de elaborar el dibujo. También conserva los valores exactos de los datos.

Gráficas de barras, circulares y lineales



Gráfica de barras

Figura 5

Es posible representar una distribución de frecuencias de observaciones no numéricas en forma de una **gráfica de barras**, la cual es similar al histograma, salvo que los rectángulos (las barras) normalmente no se tocan entre sí y algunas veces se colocan horizontalmente en lugar de la forma vertical. La gráfica de barras de la **figura 5** muestra las frecuencias con que se presentan las vocales A, E, I, O y U en este párrafo (en inglés).

Una alternativa a la gráfica de barras es la **gráfica circular**, o **gráfica de pastel**, la cual se vale de un círculo para representar el total de todas las categorías, y divide al círculo en sectores o trozos (como las rebanadas de un pastel), cuyos tamaños muestran las magnitudes relativas de las categorías. El ángulo total del círculo mide 360°. Por ejemplo, una categoría que represente el 20% de un entero debe corresponder a un sector cuyo ángulo central es un 20% de 360°, es decir,

$$0.20(360°) = 72°.$$

Una gráfica circular muestra, a primera vista, las magnitudes relativas de varias categorías.

EJEMPLO 4 Construcción de una gráfica circular

Cheri Goldberg encontró que, durante el primer semestre de universidad, sus gastos cayeron en las categorías mostradas en la **tabla 6**. Presente esta información en una gráfica circular.

SOLUCIÓN

El ángulo central del sector de alimentos es $0.30(360°) = 108°$. La renta equivale a $0.25(360°) = 90°$. Calcule los otros cuatro ángulos de manera similar. Luego, trace un círculo, marcando los ángulos con un transportador. La gráfica circular completa se muestra en la **figura 6**.

Tabla 6 Gastos escolares

Gastos	Porcentaje del total
Alimentos	30%
Renta	25%
Diversión	15%
Ropa	10%
Libros	10%
Otros	10%



Clasificación de gastos

Figura 6

Para mostrar cómo *cambia* una cantidad, digamos, en relación con el tiempo, se usa una **gráfica lineal**. Se une una serie de rectas que suben y bajan con el tiempo, de acuerdo con la magnitud de la cantidad representada. Para comparar los patrones de cambio de dos o más cantidades, podemos incluso trazar varias gráficas lineales juntas en una "gráfica lineal comparativa". (Una gráfica lineal se parece un poco a un polígono de frecuencias, pero las cantidades graficadas no necesariamente son frecuencias).

EJEMPLO 5 Construcción e interpretación de una gráfica lineal

Suponga que Cheri, del **ejemplo 4**, quería tener un registro de los gastos de alimentos y renta, durante el transcurso de cuatro años de universidad (ocho semestres), para ver en qué porcentaje cambiaba el presupuesto de cada categoría con el tiempo y cómo se comparaban ambas. Use los datos que ella recolectó (**tabla 7**) para mostrar esta información en una gráfica lineal, y enuncie cualquier conclusión significativa que sea evidente en la gráfica.

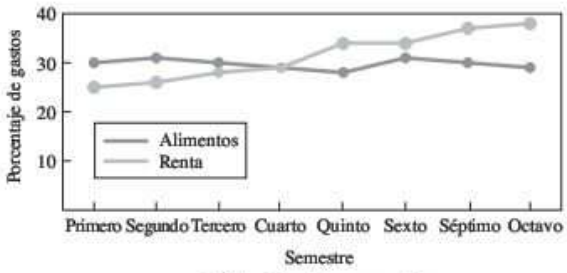
Tabla 7 Porcentajes de gastos de alimentos y renta

Semestre	Alimentos	Renta
Primero	30%	25%
Segundo	31	26
Tercero	30	28
Cuarto	29	29
Quinto	28	34
Sexto	31	34
Séptimo	30	37
Octavo	29	38



SOLUCIÓN

Una gráfica lineal comparativa de los datos proporcionados (**figura 7**) indica que el porcentaje destinado a los alimentos permaneció relativamente constante durante los cuatro años (cerca del 30%), mientras que el porcentaje destinado a la renta, que inició varios puntos por debajo del porcentaje de alimentos, se elevó de forma continua hasta rebasar a este último después del cuarto semestre. Al final, el porcentaje de renta terminó significativamente más alto que el de alimentos.



Gráfica lineal comparativa

Figura 7

Para reflexionar

Frecuencias esperadas y observadas

Cuando se lanzan monedas al aire, los resultados de un lanzamiento determinado no se pueden predecir con seguridad. Pero cuantas más y más veces se lanzan las monedas, las proporciones de caras y cruces se vuelven más predecibles. Esta es una consecuencia de la "ley de los grandes números".

Por ejemplo, si se lanzan cinco monedas, entonces el número resultante de caras, representado por x, es una "variable aleatoria", cuyos valores posibles son

0, 1, 2, 3, 4 y 5.

Si las cinco monedas se lanzan repetidamente, digamos, 64 veces, entonces se puede usar la fórmula de probabilidad binomial para obtener las **frecuencias esperadas** (o **frecuencias teóricas**), como se muestra en la tabla de la página siguiente. Las primeras dos columnas de la tabla contienen la **distribución de frecuencias esperadas** para 64 lanzamientos de cinco monedas.

(*continúa*)

Para reflexionar (*continuación*)

En un experimento real, se podrían obtener las **frecuencias observadas** (o **frecuencias empíricas**), las cuales muy probablemente diferirían un poco de las frecuencias esperadas. Pero 64 repeticiones del experimento deberían ser suficientes para obtener consistencia entre el valor esperado y el valor observado.

Para investigación individual o en grupo

Lance cinco monedas al aire un total de 64 veces y registre los resultados.

1. Anote sus resultados en la tercera columna de la tabla de la derecha, para generar una **distribución de frecuencias observadas**.
2. Compare las entradas de la segunda y tercera columnas.
3. Construya dos histogramas, uno para la distribución de frecuencias esperadas y otro para su distribución de frecuencias observadas.
4. Compare los dos histogramas.

Número de caras x	Frecuencia esperada e	Frecuencia observada o
0	2	
1	10	
2	20	
3	20	
4	10	
5	2	

10.1 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 y 2 use los datos que se proporcionan para hacer lo siguiente:

a) Construya las distribuciones de frecuencias y de frecuencias relativas, en una tabla similar a la **tabla 2**.

b) Construya un histograma.

c) Construya un polígono de frecuencias.

1. ***Preparación para el verano*** De acuerdo con el *Newsmax* (mayo de 2010, página 76), las siguientes son cinco actividades comunes de "mantenimiento" que se realizan conforme se aproxima el verano.
   1. Preparar el automóvil para viajar por carretera.
   2. Limpiar la casa o el apartamento.
   3. Arreglar el jardín.
   4. Ejercitar el cuerpo.
   5. Organizar el guardarropa.

   Los siguientes datos son las respuestas de 30 personas a quienes se preguntó, el 1 de junio, cuántas de las cinco actividades habían realizado.

   1 1 3 1 0 3 0 0 2 1
   2 2 0 0 5 3 4 0 1 0
   4 2 0 2 0 1 0 1 2 3

2. ***Respuestas para "elegir un número"*** Los siguientes datos son las respuestas de 28 personas a quienes se pidió "elegir un número del 1 al 10".

   4 7 2 7 6 3 1
   7 4 9 8 5 6 10
   4 10 8 9 5 4 5
   9 2 6 6 6 8 7

En los ejercicios 3 a 6, use los datos que se proporcionan para hacer lo siguiente:

a) Construya distribuciones de frecuencias agrupadas y de frecuencias relativas, en una tabla similar a la **tabla 3**. *(Siga los criterios sugeridos para los límites y la amplitud de las clases).*

b) Construya un histograma.

c) Construya un polígono de frecuencias.

3. ***Calificaciones de examen*** Las calificaciones de 54 alumnos de una clase de sociología, en un examen de 70 puntos, fueron las siguientes.

   60 63 64 52 60 58 63 53 56
   64 48 54 64 57 51 67 60 49
   59 54 49 52 53 60 58 60 64
   52 56 56 58 66 59 62 50 58
   53 51 65 62 61 55 59 52 62
   58 61 65 56 55 50 61 55 54

   Use cinco clases con una amplitud uniforme de 5 puntos, y use un límite inferior igual a 45 puntos para la primera clase.

4. ***Saldos de tarjeta de crédito*** Los siguientes datos en bruto representan los saldos mensuales (al dólar más próximo) de una muestra de 50 usuarios de tarjetas de crédito.

   78 175 46 138 79 118 90 163 88 107
   126 154 85 60 42 54 62 128 114 73
   67 119 116 145 129 130 81 105 96 71
   100 145 117 60 125 130 94 88 136 112
   85 165 118 84 74 62 81 110 108 71

   Use siete clases con una amplitud uniforme de 20 dólares, donde el límite inferior de la primera clase es de 40 dólares.

5. ***Altas temperaturas diarias*** Los siguientes datos representan las altas temperaturas diarias (en grados Fahrenheit), del mes de junio, en una ciudad del suroeste de Estados Unidos.

79	84	88	96	102	104	99	97	92	94
85	92	100	99	101	104	110	108	106	106
90	82	74	72	83	107	111	102	97	94

Use nueve clases con una amplitud uniforme de 5 grados, donde el límite inferior de la primera clase es de 70 grados.

6. ***Niveles de CI en estudiantes universitarios de primer año*** Los siguientes datos representan los niveles de cociente intelectual (CI) de un grupo de 50 estudiantes universitarios de primer año.

113	109	118	92	130	112	114	117	122	115
127	107	108	113	124	112	111	106	116	118
121	107	118	118	110	124	115	103	100	114
104	124	116	123	104	135	121	126	116	111
96	134	98	129	102	103	107	113	117	112

Use nueve clases con una amplitud uniforme de 5, donde el límite inferior de la primera clase es de 91.

En cada uno de los ejercicios 7 a 10, elabore un diagrama de tallo y hoja para los datos que se proporcionan. En todos los casos, trate los dígitos de las unidades como las hojas. Para cualquier dato de un dígito, use un tallo igual a 0.

7. ***Juegos ganados en la Asociación Nacional de Basquetbol*** Aproximadamente a media temporada, los equipos de la Asociación Nacional de Basquetbol habían ganado los siguientes números de juegos.

27	20	29	11	26	11	12	7	26	18
22	19	14	13	22	9	25	11	10	15
38	10	22	23	31	8	24	15	24	15



8. ***Créditos universitarios acumulados*** Se preguntó a los estudiantes de biología cuántos créditos habían acumulado a la fecha. Sus respuestas se muestran a continuación.

12	4	13	12	21	22	15	17	33	24
32	42	26	11	53	62	42	25	13	8
54	18	21	14	19	17	38	17	20	10

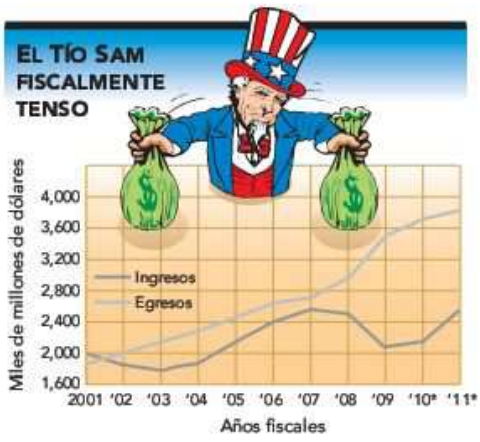
9. ***Distancias a la escuela*** Los siguientes datos son las distancias diarias de los viajes de ida y vuelta a la escuela (en millas) de 30 estudiantes elegidos al azar, que asisten a un colegio comunitario en California.

16	30	10	11	18	26	34	18	8	12
21	14	5	22	4	25	9	10	6	21
12	18	9	16	44	23	4	13	36	8

10. ***Yardas ganadas en la Liga Nacional de Futbol*** Los siguientes datos representan las yardas netas ganadas por juego por los corredores de la Liga Nacional de Futbol que jugaron en una semana determinada de la temporada.

25	19	36	73	37	88	67	33	54	123	79
19	39	45	22	58	7	73	30	43	24	36
65	43	33	55	40	29	112	60	94	86	62
52	29	18	25	41	3	49	102	16	32	46

Ingresos del gobierno federal *La gráfica muestra los ingresos y egresos del gobierno de Estados Unidos (tanto presupuestados como no presupuestados) de 2001 a 2011. Remítase a la gráfica, para resolver los ejercicios 11 a 15.*



Fuente: Departamento del Tesoro, Oficina de Administración y Presupuesto.
*Los datos son estimados.

11. Para el periodo de 2001 a 2011, liste todos los años donde los ingresos exceden los egresos.

12. Identifique cada una de las siguientes cantidades y cuándo se presentó.

a) la mayor caída anual en los ingresos

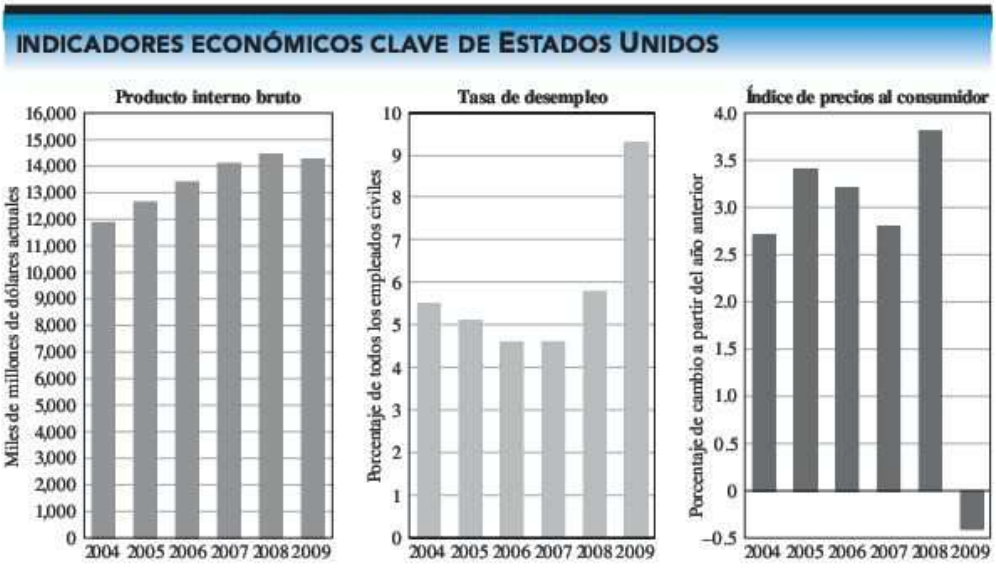
b) el mayor crecimiento anual en los egresos

13. ¿En qué años los ingresos parecen crecer más rápido que los egresos?

14. ¿Aproximadamente cuál fue el mayor déficit federal, y en qué año ocurrió?

15. Grafique un punto para cada año y trace una gráfica lineal mostrando el superávit (+) o déficit (−) federal de 2001 a 2011.

Lectura de gráficas de barras de indicadores económicos *En este caso las gráficas de barras muestran las tendencias de varios indicadores económicos durante el periodo de 2004 a 2009. Remítase a estas gráficas para resolver los ejercicios 16 a 20.*



Fuentes: Oficina de Análisis Económico del Departamento de Comercio de Estados Unidos. Bureau of Labor Statistics, Departamento del Trabajo de Estados Unidos.

16. ¿Aproximadamente cuál fue el producto interno bruto en 2008?

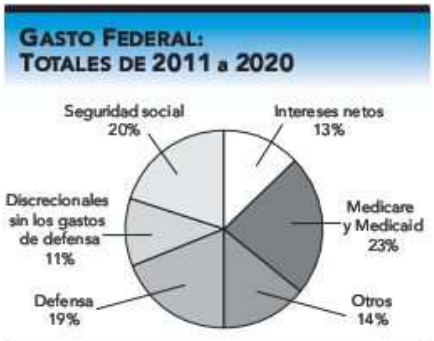
17. Durante el periodo de seis años, ¿aproximadamente cuál fue el índice de precios al consumidor más alto, y cuándo ocurrió?

18. ¿Cuál fue el mayor cambio de un año a otro en la tasa de desempleo, y cuándo ocurrió?

19. Observando las gráficas, ¿cuál diría usted que fue la ocurrencia más inusual durante los seis años representados?

20. Explique por qué el producto interno bruto generalmente se incrementa cuando disminuye la tasa de desempleo.

Lectura de gastos gubernamentales en una gráfica circular *La siguiente gráfica circular muestra las categorías de los gastos federales planeados de 2011 a 2020. Use la gráfica en los ejercicios 21 y 22.*



Fuente: Oficina de Administración y Presupuesto, enero de 2010.

21. ¿Cuál es la mayor categoría de gasto individual? Al grado más próximo, ¿cuál es el ángulo central de ese sector de categoría?

22. Si el gasto federal durante la década que llega hasta el 2020 se incrementara en aproximadamente 7.5% por año (como sucedió en la década anterior), el gasto total de la década sería de aproximadamente $54,200 miles de millones. De ese total, ¿qué cantidad iría a seguridad social, Medicare y Medicaid (combinados)?

23. ***Fuentes de capacitación en el trabajo*** En una investigación se preguntó a empleados estadounidenses cómo se habían capacitado para sus trabajos. Los porcentajes de quienes respondieron en varias categorías se muestran en la siguiente tabla. Use la información de la tabla para trazar una gráfica circular.

Fuente principal de capacitación	Porcentaje aproximado de empleados
Capacitación en la escuela	33%
Capacitación informal en el trabajo	25
Capacitación formal impartida por los empleadores	12
Capacitación en el ejército, o por correspondencia, u otros cursos	10
Sin capacitación específica, o no pudo identificar una fuente	20

Fuente: Bureau of Labor Statistics.

24. ***Correspondencia entre educación e ingresos*** Los datos de 2008 mostraron que los ingresos promedio anuales de los empleados estadounidenses correspondían al nivel de educación indicado en la siguiente tabla. Trace una gráfica de barras que muestre esta información.

Nivel educativo	Mediana de ingresos semanales
Menor de preparatoria	$453
Graduado de preparatoria	618
Algunos años de universidad, sin graduarse	699
Grado de asociado (o de técnico)	757
Grado de licenciatura	1012
Grado de maestría	1233
Grado profesional	1531
Grado de doctorado	1561

Fuente: Bureau of Labor Statistics.

Valor neto de ahorros para el retiro *Claire Kozar desea retirarse a la edad de 60 años, y estudia la gráfica lineal comparativa que muestra (con ciertos supuestos) cómo cambiará el valor neto de sus ahorros para el retiro (inicialmente de* $400,000 *a la edad de 60 años), conforme envejezca y conforme retire dinero para vivir de sus ahorros. Remítase a la gráfica, para resolver los ejercicios 25 a 28.*



Fuente: TSA Guide To Retirement Planning for California Educators.

25. Suponiendo que Claire puede mantener un rendimiento promedio anual del 9%, ¿qué edad tendrá cuando se termine su dinero?

26. Si pudiera ganar un rendimiento del 12% anual, ¿qué valor neto máximo alcanzaría Claire? ¿Aproximadamente a qué edad se presentaría el máximo?

27. Suponga que Claire llega a los 70 años, con buena salud, y el rendimiento anual promedio es del 6%.

a) ¿Aproximadamente cuánto más puede esperar que dure su dinero?

b) ¿Qué opciones podría considerar para ampliar ese tiempo?

28. A la edad de 77, ¿aproximadamente cuántas veces más tendría su valor neto si ella promediara un rendimiento del 12% en lugar de un rendimiento del 9%?

Muestra de masas en un laboratorio de geología *Los diagramas de tallo y hoja pueden modificarse de varias maneras para obtener un número razonable de tallos. Los siguientes datos, que representan las masas medidas (en gramos) de 30 muestras minerales en un laboratorio de geología, se ilustran en un diagrama de* **tallo doble** *en la* **tabla 8**.

60.7	41.4	50.6	39.5	46.4
58.1	49.7	38.8	61.6	55.2
47.3	52.7	62.4	59.0	44.9
35.6	36.2	40.6	56.9	42.6
34.7	48.3	55.8	54.2	33.8
51.3	50.1	57.0	42.8	43.7

Tabla 8 **Diagrama de tallo y hoja de masas de muestras minerales**

(30–34)	3	4.7	3.8				
(35–39)	3	9.5	8.8	5.6	6.2		
(40–44)	4	1.4	4.9	0.6	2.6	2.8	3.7
(45–49)	4	6.4	9.7	7.3	8.3		
(50–54)	5	0.6	2.7	4.2	1.3	0.1	
(55–59)	5	8.1	5.2	9.0	6.9	5.8	7.0
(60–64)	6	0.7	1.6	2.4			

29. Describa cómo se construyó el diagrama de tallo y hoja de la **tabla 8**.

30. Explique por qué la **tabla 8** se conoce como un diagrama de "tallo doble".

31. En general, ¿cuántos tallos (en total) son adecuados para un diagrama de tallo y hoja? Explique su razonamiento.

32. ***Registro de temperaturas*** De acuerdo con el Centro Nacional de Datos del Clima, las temperaturas más altas (en grados Fahrenheit) registradas en los 50 estados de EUA (a partir de agosto de 2006) fueron las siguientes.

112	100	128	120	134	118	106	110	109	112
100	118	117	116	118	121	114	114	105	109
107	112	114	115	118	117	118	125	106	110
122	108	110	121	113	120	119	111	104	111
120	113	120	117	105	110	118	112	114	115

Presente estos datos en un diagrama de doble tallo.

33. ***Frecuencia de ocurrencia de letras en la lengua inglesa*** La siguiente tabla muestra los porcentajes de frecuencia con que se presentan comúnmente varias letras en el uso de la lengua inglesa. (Los descifradores de códigos han analizado con cuidado estos porcentajes como una ayuda en la decodificación de códigos secretos).

Por ejemplo, observe que la E es la letra que se utiliza con mayor frecuencia, seguida por las letras T, A, O, N, etcétera. Las letras Q y Z son las que menos se utilizan. En relación con la **figura 5** del texto, ¿diría usted que las frecuencias relativas con que se presentan las vocales en el párrafo asociado fueron típicas o inusuales? Explique su razonamiento.

Letra	Porcentaje	Letra	Porcentaje
E	13	L	$3\frac{1}{2}$
T	9	C, M, U	3
A, O	8	F, P, Y	2
N	7	W, G, B	$1\frac{1}{2}$
I, R	$6\frac{1}{2}$	V	1
S, H	6	K, X, J	$\frac{1}{2}$
D	4	Q, Z	$\frac{1}{5}$

Frecuencias y probabilidades de ocurrencia de una letra *Los porcentajes mostrados en el* ***ejercicio 33*** *están basados en una muestra muy grande de textos en inglés. Como están basados en experimentos, son "empíricos" y no "teóricos". Al convertir los porcentajes de esa tabla en una fracción decimal, usted obtiene una* ***distribución de probabilidad empírica.***

Por ejemplo, si se elige al azar una sola letra de un pasaje de un texto, también elegido al azar, la probabilidad de que sea una E *es de* 0.13. *La probabilidad de que una letra elegida al azar sea una vocal (*A, E, I, O o U*) es*

$$(0.08 + 0.13 + 0.065 + 0.08 + 0.03) = 0.385.$$

34. Escriba nuevamente la distribución mostrada en el **ejercicio 33** como una distribución de probabilidad empírica. Indique los valores con tres decimales. Observe que las 26 probabilidades en esta distribución (una por cada letra del alfabeto inglés) deben sumar 1 (excepto por, quizá, un pequeño error de redondeo).

35. ***a)*** A partir de la distribución del **ejercicio 34**, construya una distribución de probabilidad empírica solo para las vocales A, E, I, O y U. (*Sugerencia:* Divida cada probabilidad de una vocal, del **ejercicio 34**, entre 0.385 para obtener una distribución de cinco valores cuya suma sea igual a 1). Indique los valores con tres decimales.

b) Construya una gráfica con los rótulos adecuados a partir de la distribución del inciso ***a)***.

36. Con base en la ocurrencia de vocales en el párrafo representado por la **figura 5**, construya una distribución de probabilidad para las vocales. Indique las probabilidades con tres decimales. Las frecuencias son:

A–31, E–34, I–20, O–23, U–10.

37. ¿La distribución de probabilidad del **ejercicio 36** es teórica o empírica? ¿Es diferente de la distribución del **ejercicio 35**? ¿Cuál es más exacta? Explique su razonamiento.

38. ***Frecuencias y probabilidades de tiempos de estudio*** Convierta la distribución de frecuencias agrupadas de la **tabla 3** en una distribución de probabilidad empírica, usando las mismas clases; indique los valores de probabilidad con tres decimales.

39. ***Probabilidades de tiempos de estudio*** Recuerde que la distribución del **ejercicio 38** estaba basada en tiempos semanales de estudio de una muestra de 40 estudiantes. Suponga que uno de estos estudiantes se eligió al azar. Usando su distribución, obtenga la probabilidad de que el tiempo de estudio de la semana pasada del estudiante elegido estuviera en uno de los siguientes intervalos.

a) de 30 a 39 horas ***b)*** de 40 a 59 horas

c) menos de 30 horas ***d)*** al menos 50 horas

Deportes favoritos en la clase de educación física *Se pidió a los 40 alumnos de una clase de educación física que mencionaran sus deportes favoritos. La tabla muestra los números de los entrevistados de varias maneras.*

Deporte	Número de alumnos en la clase
Regatas	9
Parapente	5
Deslizamiento en la nieve	7
Ciclismo	3
Canotaje	12
Descenso de rápidos	4

Use esta información en los ejercicios 40 a 42.

40. Si se elige al azar un alumno de esta clase, ¿cuál es la probabilidad de que el deporte favorito de la persona seleccionada sea el deslizamiento en la nieve?

41. ***a)*** Con base en los datos de la tabla, construya una distribución de probabilidad, indicando las probabilidades con tres decimales.

b) ¿La distribución del inciso ***a)*** es teórica o empírica?

c) Explique la respuesta del inciso ***b)***.

42. Explique por qué un polígono de frecuencias se cierra hacia abajo sobre el eje en ambos extremos, mientras que no es así en una gráfica lineal normal.

10.2 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Media • Mediana • Moda • Tendencia central de diagramas de tallo y hoja • Simetría en conjuntos de datos • Resumen

Un pequeño negocio de reciclamiento de videos registró las siguientes ventas diarias durante un periodo de seis días.

$305, $285, $240, $376, $198, $264

Un número representativo, en algún sentido, de este conjunto de números, es decir, un tipo de valor ubicado "a la mitad", sería una **medida de tendencia central**.

Media

Muchas calculadoras, cuando reciben un conjunto de datos, obtienen automáticamente la **media** (así como otras medidas estadísticas). Para identificar estas calculadoras busque una tecla marcada con $\bar{x}$, o quizá μ, o busque en un menú designado como "LIST" una lista de medidas matemáticas.

La medida más común de tendencia central es la **media** (o **media aritmética**). La media de una muestra se denota por $\bar{x}$ (se lee "x testada"), mientras que la media de una población completa se denota por μ (la letra griega *mi* minúscula). Para nuestros propósitos, los conjuntos de datos se consideran como muestras, de modo que usamos $\bar{x}$.

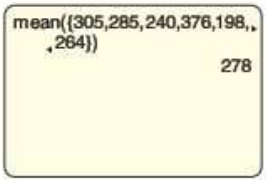
La media de un conjunto de datos se obtiene sumando todos los datos y dividiendo luego la suma entre el número de datos. (La media es lo que la mayoría de las personas asocian con la palabra "promedio"). Como la suma, o sumatoria, de una lista de datos es un procedimiento común en estadística, usamos el símbolo de "sumatoria" Σ (la letra griega *sigma* mayúscula). Por lo tanto, la suma de n datos, por ejemplo, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se representa como

$$\Sigma x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Media

La **media** de n datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se calcula como sigue.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$



Una calculadora puede obtener la media de los datos de una lista. Esta pantalla apoya el análisis en el texto de las cifras de ventas diarias.

Esta fórmula se usa para obtener la tendencia central de las cifras de ventas diarias citadas anteriormente.

$$\text{Media} = \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{305 + 285 + 240 + 376 + 198 + 264}{6} \quad \text{Se suman las ventas diarias. / Se divide entre el número de días.}$$

$$= \frac{1668}{6}, \quad \text{o} \quad 278$$

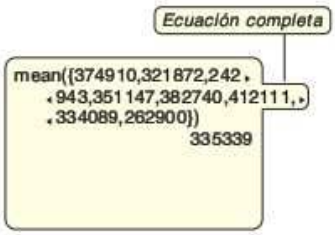
El valor de la media (el "promedio de ventas diarias") de la semana es $278.

EJEMPLO 1 Obtención de la media de una lista de cifras de ventas

Las ventas anuales del año anterior de ocho florerías fueron las siguientes.

$374,910 $321,872 $242,943 $351,147
$382,740 $412,111 $334,089 $262,900

Obtenga la media de las ventas anuales de las ocho florerías.



La pantalla apoya el resultado del **ejemplo 1**.

SOLUCIÓN

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{2{,}682{,}712}{8} = 335{,}339 \quad \text{Se suman las ventas. / Se divide entre el número de tiendas.}$$

La media de las ventas anuales es $335,339.

La siguiente tabla muestra los créditos y las calificaciones que obtuvo un estudiante en el último ciclo escolar.

Curso	Calificación	Unidades
Matemáticas	A	3
Historia	C	3
Química	B	5
Arte	B	2
Educación física	A	1

En un método común para encontrar el **promedio de calificación**, a una A se le asignan 4 puntos, 3 puntos a la B, 2 a la C y 1 a la D. Calcule el promedio de calificación de la siguiente forma.

Paso 1 Multiplique el número de unidades de un curso por el número asignado a cada calificación.

Paso 2 Sume estos productos.

Paso 3 Divida entre el número total de unidades.

Curso	Calificación	Puntos de calificación	Unidades	(Puntos de calificación) · (Unidades)
Matemáticas	A	4	3	12
Historia	C	2	3	6
Química	B	3	5	15
Arte	B	3	2	6
Educación física	A	4	1	4
			Totales: 14	43

$$\text{Promedio de puntos de calificación} = \frac{43}{14} = 3.07 \text{ (redondeado)}$$

El cálculo del promedio de calificación es ejemplo de una **media ponderada**, porque los puntos de calificación para cada calificación del curso se deben ponderar de acuerdo con el número de unidades del curso. (Por ejemplo, cinco unidades de A son mejores que dos unidades de A). El número de unidades se conoce como **factor de ponderación**.

Media ponderada

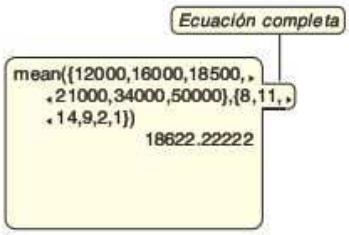
La **media ponderada** de n números, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que se ponderan por sus respectivos factores $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se calcula como sigue.

$$\overline{w} = \frac{\Sigma(x \cdot f)}{\Sigma f}$$

En palabras, la media ponderada de un grupo de datos (ponderados) es la suma de todos los productos de los datos por los factores de ponderación, dividida entre la suma de todos los factores de ponderación.

La fórmula de la media ponderada se usa normalmente para calcular la media de una distribución de frecuencias. En este caso, los factores de ponderación son las frecuencias.

Salario x	Número de empleados f
$12,000	8
$16,000	11
$18,500	14
$21,000	9
$34,000	2
$50,000	1



En esta pantalla que apoya el **ejemplo 2**, la primera lista contiene los salarios y la segunda lista contiene sus frecuencias.

EJEMPLO 2 Obtención de la media de una distribución de frecuencias de salarios

Calcule el salario medio de una pequeña compañía que paga salarios anuales a sus empleados, como se muestra en la distribución de frecuencias del margen.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la fórmula de la media ponderada, podemos obtener la solución como sigue.

Salario x	Número de empleados f	Salario · Número $x \cdot f$
$12,000	8	$ 96,000
$16,000	11	$176,000
$18,500	14	$259,000
$21,000	9	$189,000
$34,000	2	$ 68,000
$50,000	1	$ 50,000
	Totales: 45	$838,000

$$\text{Media de salarios} = \frac{\$838,000}{45} = \$18,622 \quad \text{(redondeada)}$$

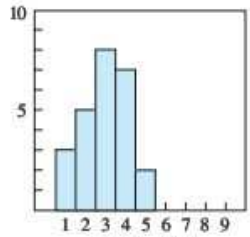
En algunos conjuntos de datos la media puede ser un indicador engañoso del promedio. Considere a Barry Matlock, quien tiene un pequeño negocio que emplea a cinco trabajadores con los siguientes salarios anuales.

$$\$16,500, \quad \$16,950, \quad \$17,800, \quad \$19,750, \quad \$20,000$$

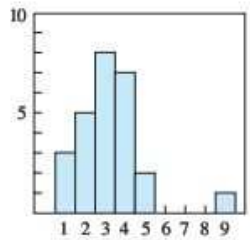
Los empleados, sabiendo que Barry acumula muchas ganancias para él, deciden declararse en huelga y demandar un aumento. Para obtener el apoyo público, van a la televisión y hablan acerca de sus miserables salarios, mencionando el salario medio de la compañía.

$$\bar{x} = \frac{\$16,500 + \$16,950 + \$17,800 + \$19,750 + \$20,000}{5}$$

$$= \frac{\$91,000}{5}, \quad \text{o} \quad \$18,200 \quad \text{Salario medio (empleados)}$$



Media = 3.00
Mediana = 3.00



Media = 3.23
Mediana = 3.00

La introducción de un solo valor "atípico" incrementa la media en 8%, pero no afecta a la mediana.

Los **valores atípicos** generalmente se consideran como *posibles* errores en los datos.

La estación de televisión local programó una entrevista con Barry para investigar. Para poder argumentar, Barry calcula el salario medio de *todos* los empleados (incluyendo su propio salario de $188,000).

$$\bar{x} = \frac{\$16,500 + \$16,950 + \$17,800 + \$19,750 + \$20,000 + \$188,000}{6}$$

$$= \frac{\$279,000}{6}, \quad \text{o} \quad \$46,500 \quad \text{Salario medio (incluyendo el salario de Barry)}$$

Cuando llega el equipo de televisión, Barry les asegura con tranquilidad que no hay razón para que los empleados se quejen, puesto que la compañía paga un salario medio generoso de $46,500.

Los empleados, desde luego, argumentan que cuando Barry incluyó su propio salario en el cálculo, provocó que la media se convirtiera en un indicador engañoso del promedio. Esto es así porque el salario de Barry no es típico. Se encuentra a una buena distancia del agrupamiento general de los datos (salarios). Un valor extremo como este, se conoce como un valor **atípico**. Como un solo valor atípico puede tener un efecto significativo sobre el valor de la media, se dice que la media es "altamente sensible a los valores extremos".

Mediana

Otra medida de la tendencia central, la cual no es sensible a los valores extremos, es la **mediana**. Esta medida divide un grupo de números en dos partes: la mitad de los números se encuentran por debajo de la mediana y la otra mitad se ubican por arriba de ella.

Mediana

La **mediana** de un grupo de datos se obtiene como sigue.

Paso 1 Clasifique los datos (es decir, acomódelos en orden numérico del más pequeño al más grande).

Paso 2 Si el número de datos es *impar*, la mediana es el dato ubicado en medio de la lista.

Paso 3 Si el número de datos es *par*, la mediana es la media de los dos datos ubicados en medio.

Para el negocio de Barry Matlock, todos los salarios (incluyendo el de Barry), arreglados en orden numérico, se muestran a continuación.

$$\$16{,}500, \quad \$16{,}950, \quad \$17{,}800, \quad \$19{,}750, \quad \$20{,}000, \quad \$188{,}000$$

Por lo tanto, $$\text{mediana} = \frac{\$17{,}800 + \$19{,}750}{2} = \frac{\$37{,}550}{2} = \$18{,}775.$$

Esta cantidad es un promedio representativo, con base en los seis salarios, y los empleados probablemente estarían de acuerdo en que el cálculo es razonable.

EJEMPLO 3 Obtención de medianas de listas de números

Obtenga la mediana de cada lista siguiente de números.

a) 6, 7, 12, 13, 18, 23, 24 ***b)*** 17, 15, 9, 13, 21, 32, 41, 7, 12

c) 147, 159, 132, 181, 174, 253

SOLUCIÓN

a) Esta lista ya se encuentra en orden numérico. El número de valores en la lista, 7, es impar, de modo que la mediana es el valor ubicado en medio, es decir, 13.

b) Primero, se colocan los números en orden numérico, del más pequeño al más grande.

$$7, 9, 12, 13, \underset{\uparrow}{15}, 17, 21, 32, 41$$
Mediana

Ahora ya se puede seleccionar el número ubicado en medio. La mediana es 15.

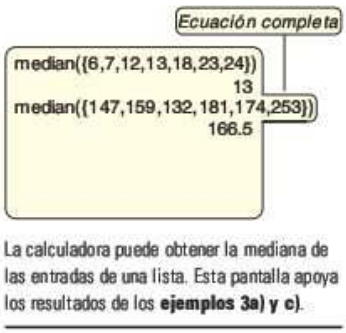
c) Primero se anotan los números en orden numérico.

$$132, 147, \underset{\uparrow}{159}, \underset{\uparrow}{174}, 181, 253$$

Como la lista contiene un número par de datos, a saber, 6, no hay un dato solo en medio. La mediana se obtiene tomando la media de los dos datos ubicados en medio, 159 y 174.

$$\frac{159 + 174}{2} = \frac{333}{2} = 166.5 \leftarrow \text{Mediana}$$

■■■



La calculadora puede obtener la mediana de las entradas de una lista. Esta pantalla apoya los resultados de los **ejemplos 3a) y c)**.

La ubicación del dato ubicado en medio (la mediana) de una distribución de frecuencias es un tanto diferente. Primero se obtiene el número total de datos en el conjunto sumando las frecuencias ($n = \Sigma f$). Entonces la mediana es el dato cuya *posición* está dada por la siguiente fórmula.

Posición de la mediana en una distribución de frecuencia

$$\textbf{Posición de la mediana} = \frac{n+1}{2} = \frac{\Sigma f + 1}{2}$$

Esta fórmula indica solo la posición, no el valor real de la mediana.

EJEMPLO 4 Obtención de medianas de distribuciones de frecuencias

Obtenga las medianas de las siguientes distribuciones.

a)

Valor	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	1	3	2	4	8	2

b)

Valor	2	4	6	8	10
Frecuencia	5	8	10	6	6

SOLUCIÓN

a) Se organiza el trabajo como sigue. Se tabulan los valores y las frecuencias, así como las **frecuencias acumuladas**, las cuales indican, para cada valor diferente, cuántos datos tienen ese valor o un valor menor.

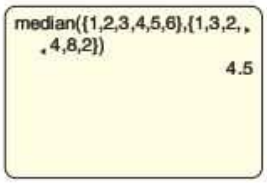
Valor	Frecuencia	Frecuencia acumulada	
1	1	1	1 dato es igual a 1 o menos
2	3	4	1 + 3 = 4 datos son iguales a 2 o menos
3	2	6	4 + 2 = 6 datos son iguales a 3 o menos
4	4	10	6 + 4 = 10 datos son iguales a 4 o menos
5	8	18	10 + 8 = 18 datos son iguales a 5 o menos
6	2	20	18 + 2 = 20 datos son iguales a 6 o menos
Total:	20		

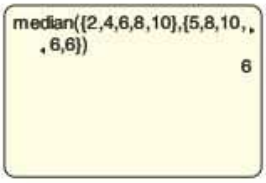
La suma de las frecuencias indica que existen 20 datos en total.

$$\text{posición de la mediana} = \frac{20+1}{2} = \frac{21}{2} = 10.5$$

La mediana, entonces, es el promedio del décimo y undécimo datos. Para obtener estos datos, se hace uso de las frecuencias acumuladas. Como el valor 4 tiene una frecuencia acumulada de 10, el décimo dato es igual a 4 y el undécimo dato es igual a 5, por lo que la mediana es igual a

$$\frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5.$$





Estas dos pantallas apoyan los resultados del **ejemplo 4**.

b)

Valor	Frecuencia	Frecuencia acumulada
2	5	5
4	8	13
6	10	23
8	6	29
10	6	35
Total:	35	

Hay 35 datos en total.

$$\text{posición de la mediana} = \frac{35+1}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

De la columna de frecuencia acumulada, los datos del decimocuarto al vigésimo tercero son 6. Esto significa que el decimoctavo dato es un 6, de manera que la mediana es 6.

Moda

La tercera medida importante de tendencia central es la **moda**. Suponga que 10 estudiantes obtuvieron las siguientes calificaciones en un examen de derecho mercantil.

$$74, 81, 39, 74, 82, 80, 100, 92, 74, 85$$

Observe que la calificación más frecuente entre los estudiantes es 74, es decir, fue más frecuente que cualquier otra.

Moda

La **moda** de un conjunto de datos es el valor que ocurre con más frecuencia.

EJEMPLO 5 Obtención de modas de conjuntos de datos

Obtenga la moda de cada uno de los siguientes conjuntos.

a) 51, 32, 49, 49, 74, 81, 92 ***b)*** 482, 485, 483, 485, 487, 487, 489

c) 10,708, 11,519, 10,972, 17,546, 13,905, 12,182

d)

Valor	19	20	22	25	26	28
Frecuencia	1	3	8	7	4	2

SOLUCIÓN

a) 51, 32, 49, 49, 74, 81, 92
El número 49 se presenta con más frecuencia que cualquier otro. Por lo tanto, 49 es la moda. ***Los números no necesitan estar en orden numérico cuando se busca la moda.***

b) 482, 485, 483, 485, 487, 487, 489
Tanto el 485 como el 487 se presentan dos veces. Se dice que esta lista tiene *dos* modas, o que es **bimodal**.

c) En este caso ningún número se presenta más de una vez. Esta lista no tiene moda.

d)

Valor	**Frecuencia**	
19	1	
20	3	
22	8	← Frecuencia mayor
25	7	
26	4	
28	2	

La distribución de frecuencias indica que el valor que se presenta con mayor frecuencia es 22 (y, por lo tanto, es la moda).

■■■

Es común incluir la moda como una medida de *tendencia central*, porque muchos tipos importantes de conjuntos de datos tienen sus valores más frecuentes ubicados en el "centro". Sin embargo, no hay razón para que la moda no pueda ser uno de los valores más pequeños del conjunto o uno de los más grandes. En estos casos, la moda no es una buena medida de "tendencia central".

Cuando los datos que se están analizando no son numéricos, la moda puede ser la única medida razonable de la tendencia central. Por ejemplo, la gráfica de barras de la **figura 5** de la **sección 10.1** señala las frecuencias de ocurrencia de las vocales en un párrafo de muestra. Como A, E, I, O y U no son números, no se pueden sumar, ni se pueden ordenar numéricamente. Por lo tanto, en este caso no existe media ni mediana. La moda, sin embargo, sí existe. Como indica la gráfica de barras, la moda es la letra E.

Algunas veces, una distribución es **bimodal** (literalmente, "dos modas"), como en el **ejemplo 5*b***). En una distribución grande, este término se aplica comúnmente incluso cuando las dos modas no tienen exactamente la misma frecuencia. Tres o más datos diferentes que comparten la frecuencia de ocurrencia más alta, por lo general, no constituyen información útil. Se dice que esta distribución *no* tiene moda.

Tendencia central de diagramas de tallo y hoja

Como se vio en la **sección 10.1**, los datos se presentan algunas veces en un diagrama de tallo y hoja, para brindar una visión gráfica de su distribución. También se pueden calcular medidas de tendencia central de un diagrama de tallo y hoja. La mediana y la moda se identifican más fácilmente cuando las "hojas" se **clasifican** (se arreglan en orden numérico) sobre sus "tallos".

En la **tabla 9** se han reagrupado las hojas de la **tabla 5** de la **sección 10.1** (las cuales mostraban los tiempos de estudio semanal en el **ejemplo 2** de esa sección).

Tabla 9 **Diagrama de tallo y hoja de tiempos de estudio semanal con las hojas clasificadas**

1	2	4	5	6	7	8					
2	0	2	3	4	4	5	6	6	9	9	9
3	0	1	1	2	3	6	6	8	9		
4	0	1	4	4	5	5	7				
5	2	5	5	8							
6	0	2									
7	2										

EJEMPLO 6 Obtención de media, mediana y moda de un diagrama de tallo y hoja

Para los datos de la **tabla 9**, obtenga lo siguiente.

a) la media

b) la mediana

c) la moda

SOLUCIÓN

a) Una calculadora con capacidades estadísticas calculará automáticamente la media. Si no, se suman todos los datos (leyéndolos del diagrama de tallo y hoja) y luego se divide entre $n = 40$.

$$\text{media} = \frac{12 + 14 + 15 + \cdots + 60 + 62 + 72}{40} = \frac{1395}{40} = 34.875$$

b) En este caso, $n = 40$ (un número par), de modo que la mediana es el promedio de los datos vigésimo y vigésimo primero, en el orden. Contando las hojas, vemos que estas serán los datos tercero y cuarto del tallo 3.

$$\text{mediana} = \frac{31 + 32}{2} = 31.5$$

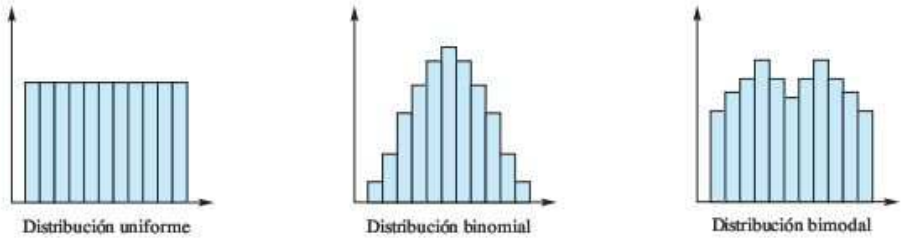
c) Por observación, vemos que el 29 se presenta tres veces, y ningún otro valor ocurre con esa frecuencia.

$$\text{moda} = 29$$

Simetría en conjuntos de datos

La manera más adecuada de analizar un conjunto de datos a menudo depende de si la distribución es **simétrica** o **asimétrica**. En una distribución "simétrica", conforme nos desplazamos fuera del punto central, el patrón de frecuencias del lado izquierdo es el mismo (o aproximadamente el mismo) que el del lado derecho. En una distribución "asimétrica", los patrones de la izquierda y de la derecha son diferentes.

La **figura 8** muestra varios tipos de distribuciones simétricas, mientras que la **figura 9** muestra algunas distribuciones asimétricas. Una distribución asimétrica con una cola que se extiende hacia la izquierda, en forma de J, se conoce como **sesgada hacia la izquierda**. Si la cola se extiende hacia la derecha, la distribución se conoce como **sesgada hacia la derecha**. Observe que una distribución bimodal puede ser tanto simétrica como asimétrica.



Algunas distribuciones simétricas

Figura 8



Algunas distribuciones asimétricas

Figura 9

Resumen

Esta sección concluye con un resumen de las medidas presentadas y un análisis breve de sus ventajas y desventajas relativas.

Resumen de las medidas comunes de tendencia central

La **media** de un conjunto de números se obtiene sumando todos los valores del conjunto y dividiendo entre el número de valores.

La **mediana** es un tipo de número ubicado "en medio". Para obtener la mediana, se arreglan primero los valores en orden numérico. Para un número *impar* de valores, la mediana es el valor ubicado en medio de la lista. Para un número *par* de valores, la mediana es la media de los dos valores ubicados en medio.

La **moda** es el valor que se presenta con más frecuencia. Algunos conjuntos de números tienen dos valores que se presentan con más frecuencia y, por lo mismo, son **bimodales**. Otros conjuntos no tienen moda en absoluto (si ningún valor se presenta con más frecuencia que los otros, o si más de dos valores se presentan con mayor frecuencia).



Algunos puntos de comparación útiles son los siguientes.

1. En las distribuciones de datos numéricos, siempre existen la media y la mediana, mientras que la moda puede existir o no. Por otro lado, tratándose de datos no numéricos, es posible que no exista ninguna de las tres medidas, o que solo exista la moda.
2. Como incluso un solo cambio en los datos puede causar que la media se altere, mientras que la mediana y lo moda no se afectan en lo absoluto, ***la media es la medida más "sensible"***.
3. En una distribución simétrica, la media, la mediana y la moda (si solo existe una moda) son todas iguales. En una distribución asimétrica, la media a menudo se afecta demasiado con relativamente pocos valores extremos y, por lo tanto, tal vez no sea una buena medida representativa de tendencia central. Por ejemplo, las distribuciones de salarios, ingresos familiares o precios de casas a menudo incluyen unos cuantos valores que son mucho más altos que la mayoría de los datos. En estos casos, la mediana es una medida más útil.
4. ***La moda es la única medida presentada aquí que siempre debe ser igual a uno de los datos de la distribución.*** De hecho, los datos más numerosos son iguales a la moda más que a cualquier otro número. Una tienda de ropa que planea adquirir solo un tamaño de sombreros para la siguiente temporada querría conocer la moda (el más común) de todos los tamaños entre sus clientes potenciales. Asimismo, un diseñador de automóviles familiares estaría interesado en conocer el tamaño más común de una familia. En ejemplos como estos, el diseño que se realiza considerando la media o la mediana podría ser inadecuado para alguien.

Para reflexionar

La paradoja de Simpson

En las estadísticas de béisbol, el "promedio de bateo" de un jugador indica el número promedio de *hits* por turnos al bate. Por ejemplo, un jugador que ha conseguido 84 *hits* en 250 turnos al bate, tiene un promedio de bateo de $\frac{84}{250} = .336$. Este "promedio" se puede interpretar como la probabilidad empírica de que ese jugador consiga un *hit* en su próximo turno al bate.

A continuación se presentan comparaciones reales de *hits* y turnos al bate de dos jugadores de ligas mayores en las temporadas de 1995, 1996 y 1997. Los números ilustran una desconcertante ocurrencia estadística, conocida como la **paradoja de Simpson**. El siguiente ejemplo, relacionado con Dave Justice y Derek Jeter, se mencionó en el episodio de televisión "Teoría de conspiración" de la serie NUMB3RS. (*Fuente*: www.wikipedia.org).

Para investigación individual o en grupo

1. Llene los 12 espacios de la tabla, indicando los promedios de bateo con tres decimales.
2. ¿Qué jugador obtuvo mejor promedio de bateo en 1995?
3. ¿Qué jugador obtuvo mejor promedio de bateo en 1996?
4. ¿Qué jugador obtuvo mejor promedio de bateo en 1997?
5. ¿Qué jugador obtuvo mejor promedio de bateo en los años 1995, 1996 y 1997 combinados?
6. ¿Le sorprenden los resultados anteriores? ¿Cómo es posible que el promedio de bateo de un jugador conduzca a un resultado para cada uno de los tres años, y a otro para los años combinados?

	Dave Justice			Derek Jeter		
	Hits	Turnos al bate	Promedio de bateo	Hits	Turnos al bate	Promedio de bateo
1995	104	411	_____	12	48	_____
1996	45	140	_____	183	582	_____
1997	163	495	_____	190	654	_____
Combinados (1995 a 1997)	_____	_____	_____	_____	_____	_____

10.2 EJERCICIOS

Para cada lista de datos, calcule **a)** *la media,* **b)** *la mediana y* **c)** *la moda o modas (si existe alguna). Redondee los valores de la media a la décima más cercana.*

1. 7, 9, 12, 14, 34

2. 20, 27, 42, 45, 53, 62, 62, 64

3. 218, 230, 196, 224, 196, 233

4. 26, 31, 46, 31, 26, 29, 31

5. 3.1, 4.5, 6.2, 7.1, 4.5, 3.8, 6.2, 6.3

6. 14,320, 16,950, 17,330, 15,470

7. 0.78, 0.93, 0.66, 0.94, 0.87, 0.62, 0.74, 0.81

8. 0.53, 0.03, 0.28, 0.18, 0.39, 0.28, 0.14, 0.22, 0.04

9. 128, 131, 136, 125, 132, 128, 125, 127

10. 8.97, 5.64, 2.31, 1.02, 4.35, 7.68

Víctimas mortales en aerolíneas de Estados Unidos *La siguiente tabla contiene datos de los transportadores aéreos comerciales programados. Los datos de víctimas mortales incluyen los acontecidos en tierra, con excepción de los ataques terroristas del 11 de septiembre de 2001. Use esta información en los ejercicios 11 a 16.*

Seguridad aérea en Estados Unidos, de 1999 a 2008

Año	Vuelos (en millones)	Accidentes fatales	Víctimas mortales
1999	10.2	2	12
2000	11.1	2	89
2001	10.6	6	531
2002	10.3	0	0
2003	10.2	2	22
2004	10.8	1	13
2005	10.9	3	22
2006	10.6	2	50
2007	10.7	0	0
2008	10.6	0	0

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2010.

Para cada rubro en los ejercicios 11 a 16, obtenga **a)** *la media,* **b)** *la mediana y* **c)** *la moda (si existe).*

11. vuelos

12. accidentes fatales

13. víctimas mortales

El año 2001 fue notablemente atípico. Si los datos de ese año se reducen a 4 accidentes mortales y a 265 víctimas mortales, ¿cuáles de las tres medidas cambian y cuáles son sus nuevos valores para los siguientes casos?

14. Ejercicio 12

15. Ejercicio 13

16. Después de 2001, ¿en qué año comenzaron a incrementarse los vuelos nuevamente?

Gastos de los viajeros estadounidenses *La siguiente tabla muestra los cinco estados de EUA con gastos más altos en vuelos domésticos durante 2007.*

Estado	Gastos (en miles de millones de dólares)
California	$96.2
Florida	68.9
Nueva York	51.3
Texas	47.4
Nevada	34.5

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2010.

Calcule cada una de las siguientes cantidades para esos cinco estados.

17. la media de los gastos

18. la mediana de los gastos

Medición de tiempos transcurridos *Mientras hacía un experimento, un estudiante de física registró la siguiente secuencia de tiempos transcurridos (en segundos) en un cuaderno de laboratorio.*

2.16, 22.2, 2.96, 2.20, 2.73, 2.28, 2.39

19. Obtenga la media.

20. Obtenga la mediana.

Cuando el estudiante de los ***ejercicios 19 y 20*** *revisó los cálculos posteriormente, se dio cuenta de que la entrada 22.2 debería haberse registrado como 2.22, así que realizó el cambio en la lista.*

21. Obtenga la media de la nueva lista.

22. Obtenga la mediana de la nueva lista.

23. ¿Cuál medida se alteró más con la corrección del error, la media o la mediana?

24. En general, ¿cuál medida, la media o la mediana, se altera menos por la presencia de un valor extremo en los datos?

Calificaciones en exámenes de administración *Rob Bates obtuvo las siguientes calificaciones en sus seis exámenes de administración el semestre pasado.*

79, 81, 44, 89, 79, 90

25. Obtenga la media, la mediana y la moda de las calificaciones de Rob.

26. ¿Cuál de los tres promedios es probablemente el mejor indicador del aprovechamiento de Rob?

27. Si el profesor de Rob le da una oportunidad de sustituir su calificación de 44 presentando un examen de "compensación", ¿cuál debería ser la calificación del examen de compensación para obtener un promedio general (media) de 85?

En los ejercicios 28 y 29 se presentan las distribuciones de frecuencias de conjuntos de valores de datos. Para cada conjunto obtenga ***a)*** *la media (redondeada a la décima más próxima),* ***b)*** *la mediana y* ***c)*** *la moda o modas (si existe alguna).*

28.

Valor	Frecuencia
12	3
14	1
16	8
18	4

29.

Valor	Frecuencia
615	17
590	7
605	9
579	14
586	6
600	5

30. ***Salarios promedio de empleados*** Una compañía tiene

5 empleados con un salario de $19,500,
11 empleados con un salario de $23,000,
7 empleados con un salario de $28,300,
2 empleados con un salario de $31,500,
4 empleados con un salario de $38,900,
1 empleado con un salario de $147,500.

Calcule la media del salario de los empleados (redondeada a la centena de dólares más cercana).

Promedio de calificaciones *Obtenga el promedio de calificación de cada uno de los siguientes estudiantes. Suponga que* A = 4, B = 3, C = 2, D = 1 y F = 0. *Redondee a la centésima más próxima.*

31.

Unidades	Calificación
4	C
7	B
3	A
3	F

32.

Unidades	Calificación
2	A
6	B
5	C

Países más poblados *La tabla indica la población (en 2009) y la superficie de los cinco países más poblados del mundo.*

País	Población (en millones de habitantes)	Superficie (en miles de millas cuadradas)
China	1339	3601
India	1157	1148
Estados Unidos	307	3537
Indonesia	240	741
Brasil	199	3265

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2010.

Use esta información en los ejercicios 33 a 36.

33. Obtenga la media de la población (redondeando al millón más próximo) de los cinco países.

34. Obtenga la media de la superficie (redondeando al millar más próximo de millas cuadradas) de los cinco países.

35. Para cada país, calcule la densidad de población (redondeando al número entero más próximo de personas por milla cuadrada).

36. Para los cinco países combinados, obtenga la media de la densidad de población.

Uso de computadoras personales *La mitad de las computadoras personales que existen en el mundo se utilizan tan solo en seis países. La tabla muestra las cifras de 2008. Use esta información en los ejercicios 37 y 38.*

País	PC en uso (en millones)	Población (en millones)
Estados Unidos	303.8	264.10
China	1330.0	98.67
Japón	127.3	86.22
Alemania	82.4	61.96
Reino Unido	60.9	47.04
Francia	64.7	43.11

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2010.

37. Estime la media del número de PC en uso durante 2008 para estos seis países.

38. En Estados Unidos, el uso fue del 22.19% del total mundial. ¿Cuántas PC se usaron en el mundo en 2008?

Tripulación, pasajeros y secuestradores en aerolíneas el 11 de septiembre *La tabla muestra, para cada vuelo secuestrado el 11 de septiembre de 2001, los números de miembros de la tripulación, pasajeros y secuestradores (no incluidos como pasajeros). Para los números de los ejercicios 39 a 41, calcule*

a) *la media, y* ***b)*** *la mediana.*

Vuelo	Tripulación	Pasajeros	Secuestradores
American #11	11	76	5
United #175	9	51	5
American #77	6	53	5
United #93	7	33	4

Fuente: www.911research.wtc7.net

39. número de miembros de la tripulación por avión

40. número de pasajeros por avión

41. número total de personas por avión

Posiciones por medallas olímpicas ganadas *En la tabla se listan las 10 naciones que ganaron más medallas en los Juegos Olímpicos de Invierno de 2010 en Vancouver, Canadá. Use la información para resolver los ejercicios 42 a 45.*

Medallero de los Juegos Olímpicos de Invierno 2010

Nación	Oro	Plata	Bronce	Total
Estados Unidos	9	15	13	37
Alemania	10	13	7	30
Canadá	14	7	5	26
Noruega	9	8	6	23
Austria	4	6	6	16
Rusia	3	5	7	15
Corea del Sur	6	6	2	14
Suecia	5	2	4	11
China	5	2	4	11
Francia	2	3	6	11

Fuente: www.nbcolympics.com

Calcule lo siguiente para todas las naciones listadas.

42. la media de las medallas de oro

43. la mediana de las medallas de plata

44. la moda, o modas, del número de medallas de bronce

45. cada una de las siguientes medidas para el total de medallas

a) media

b) mediana

c) moda o modas

En los ejercicios 46 y 47 use los diagramas de tallo y hoja con la finalidad de identificar

a) *la media,* ***b)*** *la mediana, y* ***c)*** *la moda (si existe) para los datos representados.*

46. ***Costo de reparación de automóvil*** El diagrama muestra los precios (redondeados al dólar más próximo) que cobran 23 talleres mecánicos diferentes por un alternador (instalado). Redondee las respuestas al centavo más próximo.

9	7
10	2 4
10	5 7 9
11	1 3 4 4
11	5 5 8 8 9
12	0 4 4
12	5 7 7 9
13	8

47. ***Calificaciones en un examen de biología*** El desplegado aquí representa las calificaciones obtenidas en un examen de biología de 100 puntos por los 34 alumnos de la clase.

4	7
5	1 3 6
6	2 5 5 6 7 8 8
7	0 4 5 6 7 7 8 8 8 8 9
8	0 1 1 3 4 5 5
9	0 0 0 1 6

48. ***Cálculo de calificaciones de exámenes perdidas*** El profesor de negocios de Katie Campbell perdió su libreta de calificaciones, la cual contenía las calificaciones de Katie de cinco exámenes del curso. Un resumen de las calificaciones (cada una de las cuales es un número entero de 0 a 100) indica lo siguiente:

La media era igual a 88.

La mediana era igual a 87.

La moda era igual a 92.

(El conjunto de datos no era bimodal). ¿Cuál es el número mínimo posible entre las calificaciones que faltan?

49. Explique lo que es un "atípico" y cómo afecta a las medidas de tendencia central.

50. ***Preferencias del consumidor en alimentos empacados*** Una compañía procesadora de alimentos que empaca vasos individuales de sopa instantánea desea conocer cuál es la cantidad más conveniente de vasos para incluir en un paquete. En una investigación de 22 consumidores, se encontró que cinco prefieren un paquete de 1, cinco prefieren un paquete de 2, tres prefieren un paquete de 3, seis prefieren un paquete de 4, y tres prefieren un paquete de 6.

a) Calcule los valores de la media, mediana y moda del tamaño preferido del paquete.

b) ¿Qué medida del inciso ***a)*** debe usar la compañía procesadora de alimentos?

c) Explique su respuesta del inciso ***b)***.

51. ***Calificaciones en un concurso de matemáticas*** Las siguientes son las calificaciones obtenidas por 15 estudiantes universitarios en un concurso de matemáticas de 20 puntos.

0, 1, 3, 14, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 20

a) Calcule los valores de la media, mediana y moda.

b) ¿Qué medida del inciso ***a)*** es más representativa de los datos?

En los ejercicios 52 a 55, inicie una lista de los números dados, en orden, comenzando con el menor. Continúe la lista solo hasta que la mediana de los números listados sea un múltiplo de 4. Deténgase en ese punto y obtenga ***a)*** *la cantidad de números listados, y* ***b)*** *la media de los números listados (con dos decimales).*

52. números naturales

53. números primos

54. números de Fibonacci (véase la **página 170**)

55. números triangulares (véase las **páginas 13-14**)

56. Siete números enteros consecutivos suman 147. ¿Qué resultado se obtiene cuando se resta su media de su mediana?

57. Si la media, mediana y moda son todas iguales para el conjunto $\{70, 110, 80, 60, x\}$, obtenga el valor de x.

58. Mike Coons desea incluir un quinto número natural, n, junto con los números 2, 5, 8 y 9, de forma que la media y la mediana de los cinco números sean iguales. ¿Cuántas opciones tiene Mike para el número n, y cuáles son estas opciones?

Para los ejercicios 59 a 61, remítase a la distribución de frecuencias agrupadas que se presenta a continuación.

Límites de clase	Frecuencia f
21–25	5
26–30	3
31–35	8
36–40	12
41–45	21
46–50	38
51–55	35
56–60	20

59. ¿Es posible identificar, con base en los datos mostrados en la tabla, algunos datos específicos que se presentaron en esta muestra?

60. ¿Es posible calcular la media real de esta muestra?

61. Describa cómo podría usted aproximar la media de esta muestra. Justifique su procedimiento.

62. ***Salarios promedio de empleados*** Remítase a los datos de salario del **ejemplo 2**, específicamente a las cantidades en dólares listadas en la columna de salario de la tabla. Explique cuál es el error al calcular la media de los salarios sumando simplemente esos seis números y dividiendo el resultado entre seis.

10.3 MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Rango • Desviación estándar • Interpretación de las medidas de dispersión • Coeficiente de variación

Tabla 10

	A	B
	5	1
	6	2
	7	7
	8	12
	9	13
Media	7	7
Mediana	7	7

La media es un buen indicador de la tendencia central de un conjunto de valores de datos, pero no describe por completo los datos. Compare la distribución A con la distribución B de la **tabla 10**.

Ambas distribuciones tienen la misma media y la misma mediana, pero son bastante diferentes. En la primera, 7 es un valor muy típico, pero en la segunda, la mayoría de los valores difieren considerablemente de 7. Lo que aquí se necesita es una medida de la **dispersión**, o *propagación*, de los datos. Dos de las medidas más comunes de dispersión, el *rango* y la *desviación estándar*, se analizan en esta sección.

Rango

El **rango** de un conjunto de datos es una medida sencilla de dispersión.

Rango

En cualquier conjunto de datos, el **rango** del conjunto se define como sigue.

Rango = (valor más grande del conjunto) − (valor más pequeño del conjunto)

En una lista pequeña de datos, el cálculo del rango es sencillo. Para una lista muy grande, es más difícil asegurarse de que se han identificado de manera exacta el valor más grande y el más pequeño.

Una vez que se introducen los datos, una calculadora con funciones estadísticas puede mostrar realmente el rango (entre otras cosas), o por lo menos clasificar los datos e identificar los datos mínimo y máximo. (Los símbolos asociados pueden ser [MIN Σ] y [MAX Σ], o min*X* y max*X*) Dados estos dos valores, una sencilla resta indica el rango.

EJEMPLO 1 Obtención y comparación de valores de rangos

Obtenga los rangos de las distribuciones A y B de la **tabla 10**, y describa lo que implican.

SOLUCIÓN

En la distribución A, el valor más grande es 9 y el menor es 5.

$$\text{Rango} = \text{mayor} - \text{menor} = 9 - 5 = 4$$

La distribución B se maneja de manera similar.

$$\text{Rango} = 13 - 1 = 12$$

Se puede decir que aun cuando las dos distribuciones tienen promedios idénticos, la distribución B presenta tres veces más dispersión, o *propagación*, que la distribución A. ■■■

Tabla 11

Examen	Max	Molly
1	28	27
2	22	27
3	21	28
4	26	6
5	18	27
Media	23	23
Mediana	22	27
Rango	10	22

El rango puede ser engañoso si se interpreta con ligereza. Por ejemplo, revise los puntos alcanzados por Max y Molly en cinco exámenes diferentes, que se muestran en la **tabla 11**. Los rangos de los dos estudiantes hacen tentadora la conclusión de que las calificaciones de Max son más consistentes que las de Molly. Sin embargo, Molly es realmente más consistente, con excepción de una calificación muy mala. Esa calificación, 6, es un valor atípico que, si se registró correctamente, se debe sin duda a una circunstancia especial. (Observe que el valor atípico no afecta seriamente la mediana de las calificaciones de Molly, la cual es más congruente con su rendimiento general que la puntuación de su media).

Desviación estándar

Una de las medidas más útiles de dispersión es la *desviación estándar*, la cual se basa en las *desviaciones* de los valores de los datos *respecto de la media.*

EJEMPLO 2 Obtención de las desviaciones respecto de la media

Obtenga las desviaciones respecto de la media de los datos de la siguiente muestra.

$$32, 41, 47, 53, 57$$

SOLUCIÓN

Se suman estos valores y se divide entre el número total de valores, es decir, 5. La media es 46. Para obtener las desviaciones respecto de la media, se resta 46 de cada valor de los datos.

Valor de los datos	32	41	47	53	57
Desviación	**−14**	**−5**	**1**	**7**	**11**

32 − 46 = −14 ↑ 57 − 46 = 11 ↑

Para comprobar, se suman las desviaciones. ***La suma de las desviaciones de un conjunto de datos siempre es 0.*** ■■■

No es posible obtener una medida de dispersión calculando la media de las desviaciones porque este número siempre es 0, puesto que las desviaciones positivas cancelan exactamente a las negativas. Para eliminar este problema de números positivos y negativos que se cancelan unos a otros, se *eleva al cuadrado* cada desviación.

La siguiente tabla muestra los cuadrados de las desviaciones de los datos del **ejemplo 2**.

Valor de los datos	32	41	47	53	57
Desviación	−14	−5	1	7	11
Cuadrado de la desviación	**196**	**25**	**1**	**49**	**121**

$(-14) \cdot (-14) = 196$ $\qquad$ $11 \cdot 11 = 121$

Ahora se puede obtener un promedio de las desviaciones elevadas al cuadrado dividiendo su suma entre el número de datos n (5 en este caso), lo que haríamos si nuestros datos formaran una población. Sin embargo, como estamos considerando los datos de una muestra, dividimos entre $n-1$ en lugar de eso.*

El promedio que resulta es en sí mismo una medida de la dispersión, conocido como **varianza**; pero una medida más común se obtiene calculando la raíz cuadrada de la varianza. Esto compensa, de alguna manera, el cuadrado de la desviación anterior, y da un tipo de promedio de las desviaciones respecto de la media, el cual se conoce como la **desviación estándar** de la muestra. Se denota con la letra s. (La desviación estándar de una población se denota con σ, la letra griega *sigma* minúscula).

Continuando con los cálculos de la tabla anterior, se obtiene

$$s = \sqrt{\frac{196 + 25 + 1 + 49 + 121}{4}} = \sqrt{\frac{392}{4}} = \sqrt{98} \approx 9.90.$$

La mayoría de las calculadoras pueden obtener raíces cuadradas, como $\sqrt{98}$, con tantos dígitos como usted necesite, usando la tecla $\boxed{\sqrt{x}}$. En este libro, normalmente consideramos de dos a cuatro cifras significativas en estos cálculos.

El algoritmo (o proceso) descrito antes para obtener la desviación estándar de la muestra se resume como sigue.

stdDev({32,41,47,53,57})
9.899494937
$\sqrt{98}$
9.899494937

La pantalla apoya el análisis del texto. Observe que la desviación estándar reportada concuerda con la aproximación para $\sqrt{98}$.

Cálculo de la desviación estándar

Hagamos que una muestra de n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tenga una media $\bar{x}$. Entonces la **desviación estándar de la muestra, s,** de los números se calcula mediante la siguiente fórmula.

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Los pasos específicos para realizar este cálculo son los siguientes.

Paso 1 Calcule $\bar{x}$, la media de los números.

Paso 2 Calcule las desviaciones respecto de la media.

Paso 3 Eleve al cuadrado cada desviación.

Paso 4 Sume las desviaciones elevadas al cuadrado.

Paso 5 Divida la suma del paso 4 entre $n-1$.

Paso 6 Obtenga la raíz cuadrada del cociente del paso 5.

La descripción anterior ayuda a comprender por qué la desviación estándar mide la cantidad de dispersión en un conjunto de datos. Para efectos de cálculos reales, se recomienda el uso de una calculadora científica, o estadística, que realice automáticamente todos los pasos especificados. En el **ejemplo 3** de la siguiente página se ilustran ambos métodos.

*Aun cuando no se pueden explicar las razones en este nivel, la división entre $n-1$, en vez de n, produce una medida de la muestra que es más exacta para efectos de inferencia. En la mayoría de los casos, los resultados de los divisores son solo ligeramente diferentes.

L_1	L_2	L_3 1
7	-----	------
9		
18		
22		
27		
29		
32		
$L_1(1)=7$		

La muestra del **ejemplo 3** se almacena en una lista. (La última entrada, 40, no se muestra aquí).

```
1-Var Stats
x̄=23
Σx=184
Σx²=5132
Sx=11.33893419
σx=10.60660172
n=8
```

Las flechas apuntan a la media y a las desviaciones estándar de la muestra y de la población. Véase el **ejemplo 3**.

EJEMPLO 3 Obtención de la desviación estándar de una muestra

Obtenga la desviación estándar de la siguiente muestra, usando ***a)*** el proceso por pasos, y ***b)*** las funciones estadísticas de una calculadora.

$$7, 9, 18, 22, 27, 29, 32, 40$$

SOLUCIÓN

a) Realice los seis pasos resumidos anteriormente.

Paso 1 Obtenga la media de los valores.

$$\frac{7 + 9 + 18 + 22 + 27 + 29 + 32 + 40}{8} = 23$$

Paso 2 Obtenga las desviaciones respecto de la media.

Valor de los datos	7	9	18	22	27	29	32	40
Desviación	−16	−14	−5	−1	4	6	9	17

Paso 3 Eleve al cuadrado cada desviación.

Cuadrados de las desviaciones: 256 196 25 1 16 36 81 289

Paso 4 Sume las desviaciones elevadas al cuadrado.

$$256 + 196 + 25 + 1 + 16 + 36 + 81 + 289 = 900$$

Paso 5 Divida entre $n - 1 = 8 - 1 = 7$: $\frac{900}{7} \approx 128.57$.

Paso 6 Obtenga la raíz cuadrada: $\sqrt{128.57} \approx 11.3$.

b) Introduzca los ocho valores en la calculadora. (La tecla para introducir datos tal vez tenga el aspecto $\boxed{\Sigma+}$. Averigüe cuál tecla es en su calculadora). Luego presione la tecla de la desviación estándar. La tecla puede parecerse a alguna de estas.

$\boxed{\text{STDEV}}$ o $\boxed{\text{SD}}$ o $\boxed{S_{n-1}}$ o $\boxed{\sigma_{n-1}}$

Si su calculadora también tiene una tecla que se parece a σ_n, probablemente es la de la desviación estándar de la *población*, la cual implica dividir entre n, y no entre $n-1$, como se mencionó antes.

El resultado debería ser nuevamente 11.3.

Si usted usó erróneamente la tecla de la desviación estándar de la población, el resultado sería igual a 10.6.

▮▮▮

Para datos que se presentan en la forma de una distribución de frecuencias, algunas calculadoras permiten la entrada tanto de valores como de frecuencias, o se puede introducir cada valor por separado, el número de veces indicadas por su frecuencia. Luego se presiona la tecla de la desviación estándar.

El siguiente ejemplo se incluye solo para reforzar la comprensión de las distribuciones de frecuencias y de la desviación estándar, no como un algoritmo práctico de cálculo.

Tabla 12

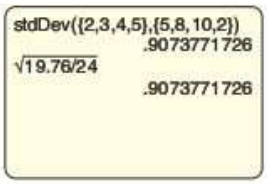
Valor	Frecuencia
2	5
3	8
4	10
5	2

EJEMPLO 4 Obtención de la desviación estándar de una distribución de frecuencias

Obtenga la desviación estándar de la muestra para la distribución de frecuencias mostrada en la **tabla 12**.

SOLUCIÓN

Complete los cálculos como se indica en la **tabla 13** de la siguiente página. Para obtener los números de la columna "Desviación", primero se calcula la media, y luego se resta la media de los números de la columna "Valor".



La pantalla apoya el resultado del **ejemplo 4**.

Tabla 13

Valor	Frecuencia	Valor multiplicado por la frecuencia	Desviación	Desviación al cuadrado	Desviación al cuadrado por la frecuencia
2	5	10	−1.36	1.8496	9.2480
3	8	24	−0.36	0.1296	1.0368
4	10	40	0.64	0.4096	4.0960
5	2	10	1.64	2.6896	5.3792
Sumas	25	84			19.76

$$\bar{x} = \frac{84}{25} = 3.36 \qquad s = \sqrt{\frac{19.76}{24}} \approx \sqrt{0.8233} \approx 0.91$$

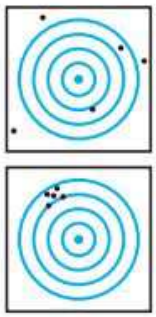
La tendencia central y la dispersión (o "tendencia de propagación") son aspectos diferentes e independientes de un conjunto de datos. Para determinar cuál es más trascendente, deberá evaluarse la situación en particular.

Por ejemplo, suponga que los tomates se venden por cestas. Cada cesta cuesta lo mismo, y cada una contiene una docena de tomates. Si usted desea la mayor cantidad posible de tomates por dólar gastado, buscaría la cesta con el peso promedio más alto por tomate (sin importar la dispersión de sus pesos). Por otro lado, si los tomates van a ser servidos como entremeses en una bandeja, donde la "presentación" es importante, usted buscaría la cesta con tomates de tamaño uniforme, es decir, la cesta con la dispersión del peso más baja (sin importar el promedio de los pesos). Véase la ilustración del margen.



La cesta más deseable depende del objetivo que usted busque.

Otra situación implica el tiro al blanco (que también se ilustra en el margen). Los cinco impactos en el blanco superior están, *en promedio*, muy cerca del ojo de buey, pero la gran dispersión (propagación) implica que para mejorar se requiere mucho esfuerzo. Por otro lado, el blanco inferior presenta un promedio menos representativo, pero la menor dispersión significa que la mejora requerirá solo un ajuste menor de la mira del arma. (En general, los errores consistentes se pueden corregir más fácilmente que los errores más dispersos).



En este caso, una buena consistencia (menor dispersión) es más deseable que un buen promedio (tendencia central).

Interpretación de las medidas de dispersión

El uso principal de las medidas de dispersión es comparar las cantidades de propagación en dos (o más) conjuntos de datos, como se hizo con las distribuciones A y B al principio de esta sección. Una técnica común en la estadística inferencial consiste en realizar comparaciones entre poblaciones analizando muestras que provienen de esas poblaciones.

EJEMPLO 5 Comparación de poblaciones con base en muestras

Dos compañías, A y B, venden botes de café instantáneo de 12 onzas. Se seleccionaron aleatoriamente 5 botes de cada compañía disponibles en el mercado, y se pesó cuidadosamente su contenido, con los siguientes resultados.

A: 12.02, 12.08, 11.99, 11.96, 11.99
B: 12.40, 12.21, 12.36, 12.22, 12.27

Determine ***a)*** cuál compañía ofrece más café en sus botes, y ***b)*** cuál compañía llena sus botes más consistentemente.

SOLUCIÓN

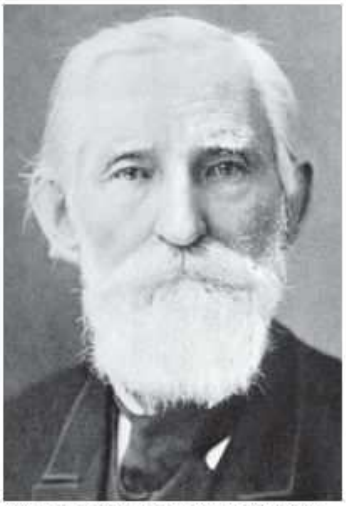
Los valores de la media y de la desviación estándar de ambas muestras se presentan en la **tabla 14**.

Tabla 14

Muestra A	Muestra B
$\bar{x}_A = 12.008$	$\bar{x}_B = 12.292$
$s_A = 0.0455$	$s_B = 0.0847$

a) Como $\bar{x}_B$ es mayor que $\bar{x}_A$, se *infiere* que la compañía B muy probablemente ofrece más café (más que la media) por bote.

b) Como s_A es menor que s_B, se *infiere* que la compañía A parece más consistente (menor desviación estándar).



Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) fue un matemático ruso conocido principalmente por su trabajo sobre la teoría de los números primos. Chebyshev y el matemático y estadístico francés **Jules Bienaymé** (1796-1878) desarrollaron, de forma independiente, una desigualdad importante de probabilidad conocida ahora como la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev.

Las conclusiones extraídas del **ejemplo 5** son tentativas, porque las muestras eran pequeñas. Tendríamos más confianza en nuestras inferencias si se utilizaran muestras de mayor tamaño; de esa manera, probablemente las muestras serían más representativas de sus respectivas poblaciones.

Es evidente que una dispersión más grande significa más "propagación" que una pequeña. Pero es difícil decir exactamente lo que un valor de dispersión revela acerca del conjunto de datos. *Es imposible* (aunque sería deseable) enunciar una afirmación como: "Exactamente la mitad de los datos de una distribución se encuentra dentro de una desviación estándar de la media de la distribución". Un enunciado como este solo se puede hacer en tipos especializados de distribución. (Véase, por ejemplo, la **sección 10.5** acerca de la distribución normal). Existe, sin embargo, un resultado útil que se aplica a todos los conjuntos de datos, sin importar cómo sean sus distribuciones. Este resultado tiene el nombre del matemático ruso Pafnuty Lvovich Chebyshev.

Teorema de Chebyshev

En cualquier conjunto de números, sin importar cómo estén distribuidos, la parte de ellos que se encuentra dentro de k desviaciones estándar de su media (donde $k > 1$) es *al menos*

$$1 - \frac{1}{k^2}.$$

Preste atención a las palabras *al menos* en el teorema. En ciertas distribuciones, la fracción de datos dentro de k desviaciones estándar de la media puede ser mayor que $1 - \frac{1}{k^2}$, pero en ningún caso será menor. El teorema es significativo para cualquier valor de k mayor que 1 (sea o no un número entero).

EJEMPLO 6 Aplicación del teorema de Chebyshev

¿Cuál es el porcentaje mínimo de elementos del conjunto de datos que permanece dentro de 3 desviaciones estándar de la media?

SOLUCIÓN

Con $k = 3$, se calcula como sigue.

$3^2 = 3 \cdot 3$, no $3 \cdot 2$

$$1 - \frac{1}{3^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0.889 = 88.9\% \quad \leftarrow \text{Porcentaje mínimo}$$

Coeficiente de variación

Observe otra vez la representación superior del blanco en la **página 539**. La dispersión, o propagación, entre los cinco agujeros de las balas no sería especialmente relevante si los disparos se hubieran realizado a 100 yardas de distancia, pero lo sería mucho más si se hubieran realizado a, digamos, 300 yardas. Existe otra medida, el *coeficiente de variación*, el cual toma en cuenta esta diferencia. No es estrictamente una medida de dispersión, ya que combina la tendencia central y la dispersión. Expresa la desviación estándar como un porcentaje de la media. ***A menudo esta es una medida más significativa que una simple medida de dispersión, en especial cuando se comparan distribuciones cuyas medias son apreciablemente diferentes.***

Coeficiente de variación

Para cualquier conjunto de datos, el **coeficiente de variación** se calcula como sigue.

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \quad \text{para una muestra} \quad \text{o} \quad V = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100 \quad \text{para una población}$$

Tabla 15

Muestra A	Muestra B
$\bar{x}_A = 16.167$	$\bar{x}_B = 153.167$
$s_A = 3.125$	$s_B = 25.294$
$V_A = 19.3$	$V_B = 16.5$

EJEMPLO 7 Comparación de muestras

Compare la dispersión en las dos muestras A y B.

A: 12, 13, 16, 18, 18, 20 B: 125, 131, 144, 158, 168, 193

SOLUCIÓN

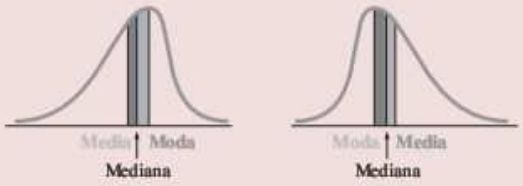
Usando una calculadora se obtienen los valores mostrados en la **tabla 15**. Los valores de V_A y V_B se calcularon usando la fórmula de la página anterior. Partiendo de los valores calculados, vemos que la muestra B tiene una dispersión (desviación estándar) mucho mayor que la muestra A. Pero la muestra A en realidad tiene la mayor dispersión *relativa* (coeficiente de variación). La dispersión dentro de la muestra A es mayor que el porcentaje de la media de la muestra.

Para reflexionar

Medida de la asimetría en una distribución

En la **sección 10.2** se presentó un análisis de la "simetría en conjuntos de datos". Aquí presentamos un método común para medir la asimetría o "sesgo", inherente en una distribución.

En una distribución asimétrica, la media está más lejos aproximándose a la cola en comparación con la mediana, como se muestra en la gráfica.



Sesgada hacia la izquierda Sesgada hacia la derecha

El grado de asimetría se puede medir con el **coeficiente de asimetría**, el cual implica tanto a la tendencia central como a la dispersión, y se calcula como sigue.

$$CA = \frac{3 \cdot (\text{media} - \text{mediana})}{\text{desviación estándar}}$$

Para investigación individual o en grupo

1. ¿En qué condiciones el coeficiente de asimetría sería como se indica a continuación?
   a) positivo *b)* negativo
2. Explique por qué la media de una distribución asimétrica siempre está más lejos de la cola que la mediana.
3. En una distribución asimétrica, ¿a cuántas desviaciones estándar se encuentran separadas la media y la mediana en cada uno de los siguientes casos?
   a) $CA = \frac{1}{2}$ *b)* $CA = 1$ *c)* $CA = 3$

10.3 EJERCICIOS

1. Si su calculadora procesa ambas clases de desviaciones estándar (la desviación estándar de la muestra y la desviación estándar de la población), ¿cuál de las dos será más grande en un conjunto de datos determinado? (*Sugerencia:* Recuerde la diferencia en la manera de calcular ambas desviaciones).

2. Si su calculadora procesa solo una clase de desviación estándar, explique cómo identificaría si se trata de la desviación estándar de una muestra o la desviación estándar de una población (suponiendo que su calculadora manual no está disponible).

Obtenga ***a)*** *el rango y* ***b)*** *la desviación estándar de cada muestra en los ejercicios 3 a 12. Redondee las respuestas a la centésima más próxima.*

3. 2, 5, 6, 8, 9, 11, 15
4. 6, 5, 10, 8, 9, 15, 22, 16, 5
5. 27, 34, 22, 41, 30, 25, 31
6. 57, 81, 55, 63, 77, 61, 84, 72, 65
7. 348, 326, 330, 308, 316, 322, 310, 319, 324, 330
8. 4.7, 5.3, 9.4, 6.6, 7.4, 6.2, 7.1, 8.0, 8.8, 7.9, 7.1, 7.4, 7.9, 8.1
9. 84.96, 84.60, 84.58, 84.48, 84.72, 85.62, 85.03, 85.10, 84.53
10. 312.3, 310.4, 309.3, 311.1, 310.8, 313.5, 312.6, 310.5, 311.0, 314.2

11.

Valor	Frecuencia
13	3
10	4
7	7
4	5
1	2

12.

Valor	Frecuencia
14	6
16	12
18	14
20	15
22	10
24	4
26	3

Use el teorema de Chebyshev en los ejercicios 13 a 28.

Calcule la fracción mínima posible de los elementos de un conjunto de datos que se encuentran dentro del número indicado de desviaciones estándar de la media. Dé las respuestas como fracciones normales simplificadas.

13. 2 **14.** 4 **15.** $\frac{5}{2}$ **16.** $\frac{7}{4}$

Obtenga el porcentaje mínimo posible (redondeado a la décima más próxima del porcentaje) de los datos de una distribución que se ubican dentro del número indicado de desviaciones estándar de la media.

17. 3 **18.** 6 **19.** $\frac{5}{3}$ **20.** $\frac{9}{2}$

En cierta distribución de números, la media es igual a 80 *y la desviación estándar es* 8. *¿Al menos qué fracción de los números se encuentran entre los siguientes pares de números? Dé las respuestas como fracciones comunes simplificadas.*

21. 64 y 96 **22.** 56 y 104

23. 48 y 112 **24.** 40 y 120

En la misma distribución (media igual a 80 *y desviación estándar igual a* 8*), determine la fracción más grande de los números que podrían cumplir los siguientes requerimientos. Dé las respuestas como fracciones comunes simplificadas.*

25. menor que 64 o mayor que 96

26. menor que 60 o mayor que 100

27. menor que 52 o mayor que 108

28. menor que 62 o mayor que 98

Pago de un bono en un equipo de béisbol *Mairead Jacoby posee un equipo de béisbol en las ligas menores. Cada vez que el equipo gana un juego, Mairead paga un bono a los nueve jugadores, el administrador y los dos entrenadores, el cual representa cierto porcentaje de sus salarios normales. Las cantidades pagadas se listan a continuación.*

$80,	$105,	$120,	$175,	$185,	$190,
$205,	$210,	$215,	$300,	$320,	$325

Use esta distribución de bonos en los ejercicios 29 a 34.

29. Calcule la media de la distribución.

30. Calcule la desviación estándar de la distribución.

31. ¿Cuántos de los montos de los bonos se ubican dentro de una desviación estándar de la media?

32. ¿Cuántos de los montos de los bonos se ubican dentro de dos desviaciones estándar de la media?

33. ¿Qué dice el teorema de Chebyshev acerca del número de montos que están dentro de dos desviaciones estándar de la media?

34. Explique cualquier discrepancia entre las respuestas de los **ejercicios 32 y 33**.

En los ejercicios 35 y 36 se presentan dos muestras. En cada caso, ***a)*** *obtenga las desviaciones estándar de las muestras,* ***b)*** *determine los coeficientes de variación de ambas muestras,* ***c)*** *identifique la muestra que tiene la mayor dispersión, y* ***d)*** *identifique la muestra que tiene la mayor dispersión relativa.*

35. *A:* 3, 7, 4, 3, 8 *B:* 10, 8, 10, 6, 7, 3, 5

36. *A:* 68, 72, 69, 65, 71, 72, 68, 71, 67, 67
B: 26, 35, 30, 28, 31, 36, 38, 29, 34, 33

37. ***Comparación del tiempo de vida de unas baterías*** Dos marcas de baterías de automóviles, ambas con garantías de 6 años, se muestrearon y probaron en condiciones controladas. Cinco baterías de cada marca fallaron después de los números de meses indicados a continuación.

Marca A: 74, 65, 70, 64, 71

Marca B: 69, 70, 62, 72, 60

a) Calcule las medias de ambas muestras.

b) Calcule las desviaciones estándar de ambas muestras.

c) ¿Qué marca aparentemente es más durable?

d) ¿Qué marca tiene el tiempo de vida más consistente?

Tiempos de vida de módulos de control de motores *Chris Englert administra el departamento de mantenimiento en una compañía de camiones. Cada camión de la flota utiliza un módulo de control electrónico en el motor. Son deseables módulos de control de larga duración. Un programa preventivo de sustitución también evita descomposturas costosas. Para ello, es deseable que los módulos sean muy consistentes en sus tiempos de vida, de modo que las sustituciones preventivas puedan programarse de manera eficiente.*

Chris probó una muestra de 20 *módulos de la marca A, y observó que duraron en promedio (media)* 48,560 *millas en carretera, con una desviación estándar de* 2116 *millas. La siguiente lista indica cuánto tiempo duraron los módulos de una muestra de* 20 *unidades de la marca B. Use estos datos en los ejercicios 38 a 40.*

44,660,	51,300,	45,680,	48,840,	47,510,
61,220,	49,100,	48,660,	47,790,	47,210,
48,050,	49,920,	47,420,	45,880,	50,110,
52,910,	47,930,	45,800,	46,690,	49,240

38. De acuerdo con el muestreo, ¿qué marca de módulo tiene el mayor promedio de vida? (en millas en carretera).

39. ¿Qué marca de módulo tiene aparentemente una duración más consistente (o uniforme) (en millas en carretera)?

40. Si las marcas A y B son los únicos módulos disponibles, ¿cuál debería adquirir Chris para el programa de mantenimiento? Explique su razonamiento.

Utilice la siguiente muestra en los ejercicios 41 a 46.

13, 14, 17, 19, 21, 22, 25

41. Calcule la media y la desviación estándar de la muestra (redondeando cada una a la centésima más próxima).

42. Ahora sume 5 a cada dato de la muestra proporcionada, y calcule la media y la desviación estándar de la nueva muestra.

43. Regrese a la muestra original. Esta vez reste 10 de cada dato, y calcule la media y la desviación estándar de la nueva muestra.

44. Con base en las respuestas de los **ejercicios 41 a 43**, haga conjeturas acerca de lo que pasa con la media y la desviación estándar cuando todos los datos de la muestra tienen la misma constante k sumada o restada.

45. Regrese nuevamente a la muestra original. Esta vez multiplique cada dato por 3, y calcule la media y la desviación estándar de la nueva muestra.

46. Con base en las respuestas de los **ejercicios 41 y 45**, haga conjeturas acerca de lo que pasa con la media y la desviación estándar cuando todos los datos de la muestra se multiplican por la misma constante k.

47. En la **sección 10.2** se demostró que la media, como medida de tendencia central, es altamente sensible a los valores extremos. ¿Cuál medida de dispersión, presentada en esta sección, sería más sensible a los valores extremos? Ilustre su respuesta con uno o más ejemplos.

Investigación de mercado de un cereal *Una compañía distribuidora de alimentos realizó una investigación para determinar si un premio incluido en las cajas de su cereal era lo suficientemente atractivo para generar más ventas. Se eligieron cuatro ciudades como mercados de prueba, donde el cereal se distribuyó con el premio, y cuatro ciudades como mercados de control, donde el cereal se distribuyó sin el premio. Las ocho ciudades se eligieron sobre la base de su semejanza en términos de población, ingreso per cápita y volumen total de compra del cereal. Los resultados son los siguientes.*

		Cambio porcentual mensual en el promedio de participación de mercado
Ciudades de prueba	1	+18
	2	+15
	3	+7
	4	+10
Ciudades de control	1	+1
	2	−8
	3	−5
	4	0

48. Calcule la media del cambio porcentual en la participación de mercado en las cuatro ciudades de prueba.

49. Calcule la media del cambio porcentual en la participación de mercado en las cuatro ciudades de control.

50. Calcule la desviación estándar del cambio porcentual en la participación de mercado en las ciudades de prueba.

51. Calcule la desviación estándar del cambio porcentual en la participación de mercado en las ciudades de control.

52. Calcule la diferencia entre las medias de las ciudades de prueba y las ciudades de control. Esta diferencia representa la estimación del cambio porcentual en las ventas debido al premio.

53. Las dos desviaciones estándar de las ciudades de prueba y las ciudades de control se usaron para calcular un "error" de ±7.95 para la estimación del **ejercicio 52**. Con esta cantidad de error, ¿cuáles son las estimaciones mínima y máxima del incremento en las ventas?

(Sobre la base del intervalo estimado en el **ejercicio 53**, la compañía decidió producir en masa el premio y distribuirlo a nivel nacional).

*En los ejercicios 54 a 56 remítase a la distribución de frecuencias agrupadas que se presenta a continuación. (También remítase a los **ejercicios 59 a 61** de la **sección 10.2**).*

Límites de clase	Frecuencia f
21–25	5
26–30	3
31–35	8
36–40	12
41–45	21
46–50	38
51–55	35
56–60	20

54. ¿Es posible identificar datos específicos cualesquiera que se presentaron en esta muestra?

55. ¿Es posible calcular la desviación estándar real de esta muestra?

56. Describa cómo se podría aproximar la desviación estándar de esta muestra. Justifique su procedimiento.

57. Suponga que la distribución de frecuencias del **ejemplo 4** implica a 50 o 100 (o incluso más) valores de datos distintos, en lugar de cuatro. Explique por qué el procedimiento de aquel ejemplo sería entonces muy ineficiente.

58. Una distribución "en forma de J" puede estar sesgada hacia la derecha o hacia la izquierda. (Cuando es sesgada hacia la derecha, algunas veces se conoce como distribución "J invertida").

a) En una distribución en forma de J sesgada hacia la derecha, ¿qué dato sería la moda: el elemento más grande o el más pequeño?

b) En una distribución en forma de J sesgada hacia la izquierda, ¿qué dato sería la moda: el elemento más grande o el más pequeño?

c) Explique por qué la moda es una medida débil de tendencia central en una distribución en forma de J.

10.4 MEDIDAS DE POSICIÓN

El valor z • Percentiles • Deciles y cuartiles • Diagrama de caja

Las medidas de la tendencia central y las medidas de dispersión nos ofrecen una manera eficaz de conocer integralmente un conjunto de datos. La tendencia central indica dónde se ubica el centro de los datos a lo largo de una escala numérica. La dispersión indica la cantidad de propagación de los datos del conjunto a partir del punto central. Y el teorema de Chebyshev, presentado en la sección anterior, nos dice en un sentido general qué partes del conjunto de datos pueden estar dispersas en diferentes cantidades a partir del punto central.

En algunos casos, tal vez nos interesen ciertos datos individuales dentro del conjunto de datos, y no el conjunto como un todo. De modo que nos gustaría medir cómo se ajusta un elemento a la colección, cómo se compara con otros elementos de la colección, o incluso cómo se compara con un elemento de otra colección. Existen varios métodos comunes para obtener estas medidas. Puesto que miden la posición de un elemento dentro del conjunto de datos, generalmente se conocen como **medidas de posición**.

Los **diez mejores empleos de 2010** no variaron mucho en relación con las clasificaciones recientes, a pesar de los cambios en la economía de 2008 a 2010. Los 10 requieren preparación académica y/o capacitación considerables, y la mayoría requiere de buenas habilidades matemáticas. Las clasificaciones están basadas en los cinco criterios siguientes.

a) nivel de tensión
b) ambiente laboral
c) demandas físicas
d) ingresos
e) perspectiva de contratación

Las clasificaciones son:

1. Actuario
2. Ingeniero de software
3. Analista de sistemas computacionales
4. Biólogo
5. Historiador
6. Matemático
7. Asistente legal
8. Especialista en estadística
9. Contador
10. Mecánico dental

Para mayor información, visite www.careercast.com

El valor z

A cada elemento individual de una muestra se le puede asignar un **valor z**, el cual se define como sigue.

El valor z

Si x es un dato de una muestra con una media igual a $\bar{x}$ y desviación estándar s, entonces el **valor z** de x se calcula como sigue.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Como $x - \bar{x}$ nos da la cantidad por la que difiere x (o se desvía) de la media $\bar{x}$, $\frac{x - \bar{x}}{s}$ indica el número de desviaciones estándar por las cuales x difiere de $\bar{x}$. Observe que z es positiva si x es mayor que $\bar{x}$, y negativa si x es menor que $\bar{x}$. El teorema de Chebyshev nos asegura que, en cualquier distribución, al menos el 89% (aproximadamente) de los datos se localizan dentro de tres desviaciones estándar de la media. Es decir, al menos el 89% de los datos tienen valores z entre -3 y 3. De hecho, muchas distribuciones comunes, especialmente las simétricas, tienen mucho más del 89% de sus datos dentro de tres desviaciones estándar de la media (como veremos en la siguiente sección). Por lo tanto, un valor z mayor que 3 o menor que -3 es una ocurrencia inusual.

EJEMPLO 1 Comparación de posiciones usando valores z

Dos amigos, Ann Kuick y Kay Allen, quienes toman clases diferentes de historia, presentaron exámenes parciales el mismo día. La calificación de Ann fue de 86, mientras que la calificación de Kay fue de 78. ¿Qué estudiante tuvo relativamente un mejor desempeño, considerando los siguientes datos?

	Ann	Kay
Media de la clase	73	69
Desviación estándar de la clase	8	5

SOLUCIÓN

Calcule lo siguiente.

$$\text{Ann: } z = \frac{86 - 73}{8} = 1.625 \qquad \text{Kay: } z = \frac{78 - 69}{5} = 1.8$$

Como el valor z de Kay es más alto, se coloca en una posición relativamente más alta dentro de su clase que Ann dentro de la propia.

Percentiles

Cuando un estudiante presenta el Scholastic Aptitude Test (SAT) o cualquier otro examen estandarizado que se aplica a un número grande de estudiantes, su calificación normalmente se convierte a un valor **percentil**, el cual se define como sigue.

Percentil

Si aproximadamente n por ciento de los datos en una distribución son menores que el número x, entonces x es el ***n*-ésimo percentil** de la distribución, denotado por P_n.

Por ejemplo, si un estudiante obtuvo una calificación del percentil 83 del SAT, significa que superó aproximadamente al 83% de todos los que presentaron el examen. (Esto *no* significa que ese estudiante haya obtenido el 83% de respuestas correctas). Como el valor percentil indica la posición de un elemento dentro de un conjunto de datos, se trata de otra "medida de posición". El siguiente ejemplo aproxima los percentiles de una colección de datos bastante pequeña.

EJEMPLO 2 Obtención de percentiles

Los siguientes son los números de clientes que comen en un restaurante durante 40 días consecutivos. (Los números se clasificaron del menor al mayor).

46	51	52	55	56	56	58	59	59	59
61	61	62	62	63	63	64	64	64	65
66	66	66	67	67	67	68	68	69	69
70	70	71	71	72	75	79	79	83	88

Para este conjunto de datos, obtenga ***a)*** el percentil 35, y ***b)*** el percentil 86.

SOLUCIÓN

a) El percentil 35 se puede tomar como el dato debajo del cual se encuentra el 35% de los datos clasificados. Como el 35% de 40 es $0.35(40) = 14$, tomamos el decimoquinto dato, es decir, el 63, como el percentil 35.

b) Como el 86% de 40 es $0.86(40) = 34.4$, redondeamos hacia *arriba* y tomamos como el percentil 86 el dato en la posición número 35, es decir, el 72. ■■■

Técnicamente, los percentiles se concibieron en un inicio como un conjunto de 99 valores $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{99}$ (no necesariamente elementos de datos) a lo largo de una escala que divide al conjunto de datos en 100 partes iguales. Se calculaban solo para conjuntos de datos muy grandes. En los conjuntos de datos más pequeños, como los del **ejemplo 2**, la división de los datos en 100 partes dejaría muchas de esas partes vacías. Sin embargo, las técnicas modernas del análisis de exploración de datos buscan aplicar el concepto de percentiles a conjuntos de datos pequeños. Por lo tanto, se usan técnicas de aproximación como en el **ejemplo 2**. Otra opción es dividir los datos en un número más pequeño de partes de igual tamaño (o aproximadamente del mismo tamaño).

Deciles y cuartiles

Los **deciles** son nueve valores (representados por $D_1, D_2, \ldots, D_9$) a lo largo de una escala que divide un conjunto de datos en 10 partes de igual tamaño (aproximadamente), y los **cuartiles** son los tres valores (Q_1, Q_2 y Q_3) que dividen un conjunto de datos en cuatro partes iguales (aproximadamente). Como los cuartiles y deciles sirven para posicionar datos específicos dentro de una distribución, también son "medidas de posición". Es posible evaluar los deciles obteniendo sus percentiles equivalentes.

$$D_1 = P_{10}, \quad D_2 = P_{20}, \quad D_3 = P_{30}, \quad \ldots, \quad D_9 = P_{90}$$

EJEMPLO 3 Obtención de deciles

Obtenga el cuarto decil de los datos de los clientes del restaurante del **ejemplo 2**.

SOLUCIÓN

Remítase a la tabla de datos clasificada en rangos. El cuarto decil es el percentil 40, y el 40% de 40 es 0.40(40) = 16. Hacemos que el cuarto decil sea el decimoséptimo dato, es decir, el 64.

Si bien los tres cuartiles están relacionados con los percentiles correspondientes, observe que el segundo cuartil, Q_2, también es equivalente a la mediana, una medida de tendencia central presentada en la **sección 10.2**. Una convención común en el cálculo de cuartiles nos lleva de regreso a la manera como se calcula la mediana.

Obtención de cuartiles

Para cualquier conjunto de datos (clasificados del menor al mayor):

El **segundo cuartil, Q_2,** es exactamente la mediana, es decir, el dato ubicado en medio cuando el número de datos es impar, o la media de los dos datos ubicados en medio cuando el número de datos es par.

El **primer cuartil, Q_1,** es la mediana de todos los datos por debajo de Q_2.

El **tercer cuartil, Q_3,** es la mediana de todos los datos por arriba de Q_2.

EJEMPLO 4 Obtención de cuartiles

Obtenga los tres cuartiles de los datos del **ejemplo 2**.

SOLUCIÓN

Remítase a los datos clasificados. Los dos datos ubicados en medio son 65 y 66.

$$Q_2 = \frac{65 + 66}{2} = 65.5$$

Los 20 datos más pequeños (un número par) están por debajo de Q_2, y los dos datos ubicados en medio en el conjunto son 59 y 61.

$$Q_1 = \frac{59 + 61}{2} = 60$$

Los 20 datos más grandes están por arriba de Q_2.

$$Q_3 = \frac{69 + 70}{2} = 69.5$$

Diagrama de caja

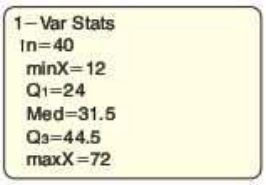
Un **diagrama de caja**, o **diagrama de caja y bigotes**, implica a la mediana (una medida de tendencia central), el rango (una medida de dispersión), y el primer y tercer cuartiles (medidas de posición), todos incluidos en una representación visual sencilla.

Diagrama de caja

Para un conjunto de datos determinado, un **diagrama de caja** (o **diagrama de caja y bigotes**) consiste en una caja rectangular colocada arriba de una escala numérica, la cual se extiende de Q_1 a Q_3, con el valor de Q_2 (la mediana) indicado dentro de la caja, y con "bigotes" (rectas) que se extienden a la izquierda y a la derecha de la caja hacia los datos mínimo y máximo.

EJEMPLO 5 Construcción de un diagrama de caja

Construya un diagrama de caja para los datos de tiempo de estudio semanal del **ejemplo 2** de la **sección 10.1**.



Esta pantalla apoya los resultados del **ejemplo 5**.

SOLUCIÓN

Para determinar los cuartiles y los valores mínimo y máximo más fácilmente, se usa el diagrama de tallo y hoja (con las hojas clasificadas) de la **tabla 9** de la **sección 10.2**.

1	2 4 5 6 7 8
2	0 2 3 4 4 5 6 6 9 9 9
3	0 1 1 2 3 6 6 8 9
4	0 1 4 4 5 5 7
5	2 5 5 8
6	0 2
7	2

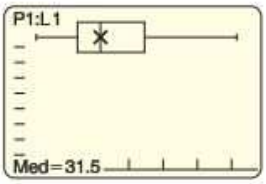
La mediana (determinada antes en el **ejemplo 6** de la **sección 10.2**) es

$$\frac{31 + 32}{2} = 31.5.$$

A partir del diagrama de tallo y hoja,

$$Q_1 = \frac{24 + 24}{2} = 24 \quad \text{y} \quad Q_3 = \frac{44 + 45}{2} = 44.5.$$

Los datos mínimo y máximo se hacen evidentes en el diagrama de tallo y hoja. Son 12 y 72. El diagrama de caja se muestra en la **figura 10**.



Este diagrama de caja corresponde a los resultados del **ejemplo 5**. Muestra la mediana en la parte inferior de la pantalla. La función TRACE de la calculadora TI-83/84 Plus ubicará también los valores mínimo, máximo y el cuartil.

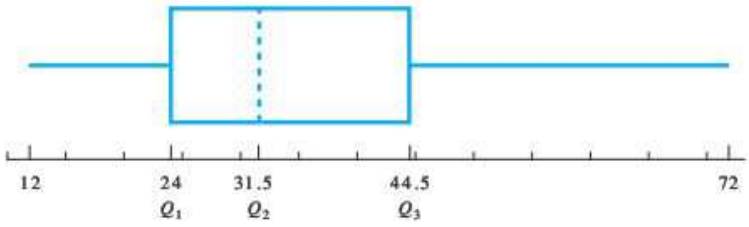


Diagrama de caja

Figura 10

El diagrama de caja de la **figura 10** nos brinda la siguiente información:

1. la tendencia central (la ubicación de la mediana);
2. la ubicación de los datos centrales (la amplitud de la caja);
3. la dispersión (el rango es la amplitud de los bigotes); y
4. la asimetría o el sesgo (la asimetría tanto de la caja como de los bigotes).

10.4 EJERCICIOS

Números de clientes en un restaurante *Remítase a los datos de los clientes del* **ejemplo 2**. *Aproxime los siguientes percentiles y deciles. (Use los métodos presentados en esta sección).*

1. el percentil 15
2. el percentil 75
3. el tercer decil
4. el octavo decil

En los ejercicios 5 a 8 utilice los valores z.

5. ***Posiciones relativas en exámenes de geometría*** En una clase de geometría, Neil Hunnewell obtuvo 5 de calificación en un examen, en el cual la media de la clase y la desviación estándar fueron 4.6 y 2.1, respectivamente. Janet Hunnius obtuvo 6 de calificación en otro examen para el cual la media de la clase y la desviación estándar fueron 4.9 y 2.3, respectivamente. En términos relativos, ¿qué estudiante tuvo mejor desempeño?

6. *Rendimientos relativos en eventos de pista* En el encuentro de pista del sábado, Edgar Espina, un atleta de salto de altura, saltó 6 pies 3 pulgadas. Los registros de salto de altura de la conferencia en la temporada pasada tuvieron una media igual a 6 pies exactos y una desviación estándar de 3.5 pulgadas. Kurt Massey, compañero de equipo de Edgar, logró 18 pies 4 pulgadas en salto de longitud. En ese evento el promedio (la media) y la desviación estándar de la temporada de la conferencia fueron de 16 pies 6 pulgadas y 1 pie 10 pulgadas, respectivamente. En relación con la temporada pasada en esta conferencia, ¿cuál atleta tuvo un mejor desempeño el sábado?



7. *Tiempos de vida relativos de neumáticos* Los tiempos de vida de los neumáticos de la marca A están distribuidos con una media de 45,000 millas y una desviación estándar de 4 500 millas, mientras que los neumáticos de la marca B duran solo 38,000 millas en promedio (media) con una desviación estándar de 2080 millas. Los neumáticos de la marca A de Nicole Britt duraron 37,000 millas y los de la marca B de Yvette Angel duraron 35,000 millas. En términos relativos, dentro de sus propias marcas, ¿qué conductor obtuvo el mejor rendimiento?

8. *Tasas relativas de pesca* En cierto lago, el promedio del tamaño de las truchas es de 12 pulgadas con una desviación estándar de 2.75 pulgadas. El promedio del peso de las lubinas es de 4 libras con una desviación estándar de 0.8 libras. Si Tobi Casper atrapó una trucha de 18 pulgadas y Katrina Bass atrapó una lubina de 6 libras, entonces, en términos relativos, ¿quién merecía el trofeo?

Socios comerciales de Estados Unidos *Los países de la siguiente tabla están clasificados con base en los valores de las importaciones que hizo Estados Unidos de productos provenientes de esos países durante 2008. La columna de exportaciones se refiere a las ventas de productos de Estados Unidos hacia esos países. Use esta información en los ejercicios 9 a 20.*

País	Población (millones)	Volumen comercial (miles de millones de $)	
		Importaciones	Exportaciones
Canadá	33	339	261
China	1339	338	70
México	110	216	151
Japón	127	139	65
Alemania	82	97	55
Reino Unido	61	59	54
Arabia Saudita	28	55	12
Venezuela	26	51	13
Corea del Sur	48	48	35
Francia	64	44	29

Fuentes: The World Almanac and Book of Facts 2010, www.google.com

Calcule los valores z (con precisión de un decimal) en los ejercicios 9 a 12.

9. población de Japón

10. importaciones provenientes de China

11. exportaciones hacia México

12. importaciones provenientes de Venezuela

En cada uno de los ejercicios 13 a 16, determine cuál país ocupó la posición indicada.

13. el percentil 15 de población

14. el tercer cuartil en exportaciones

15. el cuarto decil en importaciones

16. el primer cuartil en exportaciones

17. Determine quién fue relativamente mayor: China en importaciones o Canadá en exportaciones.

18. Construya diagramas de caja tanto para exportaciones como para importaciones, uno arriba del otro en el mismo dibujo.

19. ¿Qué indica su diagrama de caja del **ejercicio 18** *para las exportaciones* acerca de las siguientes características de los datos de exportaciones?

a) la tendencia central ***b)*** la dispersión

c) la ubicación de los datos centrales

20. Comparando sus dos diagramas de caja del **ejercicio 18**, ¿qué puede decir acerca de la balanza comercial de Estados Unidos durante 2008 con este grupo de países?

21. En el texto se dice que, para *cualquier* distribución de datos, al menos el 89% de los datos estarán dentro de tres desviaciones estándar de la media. ¿Por qué no podemos mover algunos datos más lejos de la media para obtener una nueva distribución que viole esta condición?

22. Describa la diferencia básica entre una medida de tendencia central y una medida de posición.

En este capítulo se han presentado tres de las características principales de los datos numéricos (la tendencia central, la dispersión y la posición), y se han desarrollado varias maneras de medirlas. En cada uno de los ejercicios 23 a 26, se describe una medida nueva. Explique en cada caso, cuál de las tres características cree que mediría y por qué.

23. Mitad del rango $= \dfrac{\text{dato mínimo} + \text{dato máximo}}{2}$

24. Mitad del cuartil $= \dfrac{Q_1 + Q_3}{2}$

25. Rango intercuartílico $= Q_3 - Q_1$

26. Rango semiintercuartílico $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

27. El "coeficiente de asimetría" se definió en el recuadro **Para reflexionar** de la sección anterior, y se calcula como sigue

$$CA = \frac{3 \cdot (\bar{x} - Q_2)}{s}$$

¿Es esta una medida de datos individuales o de la distribución completa?

28. En los datos de los socios comerciales de Estados Unidos que preceden al **ejercicio 9**, calcule el coeficiente de asimetría de ***a)*** las exportaciones y ***b)*** las importaciones.

29. Partiendo del **ejercicio 28**, ¿cómo compararía la asimetría de las exportaciones frente a las importaciones?

30. En un examen nacional estandarizado, Kimberly Austin obtuvo una calificación correspondiente al percentil 92. Si 67,500 individuos presentaron el examen, ¿aproximadamente cuántos obtuvieron una calificación más alta que Kimberly?

31. Considere que tres cuartiles (del más pequeño al más grande) de una población grande de calificaciones están representados por Q_1, Q_2 y Q_3.

a) ¿Es necesariamente verdadero que

$$Q_2 - Q_1 = Q_3 - Q_2?$$

b) Explique su respuesta al inciso ***a)***.

*En los ejercicios 32 a 35, conteste sí o no y explique su respuesta. (Consulte los **ejercicios 23 a 26** para las definiciones).*

32. ¿La mitad del cuartil es necesariamente igual que la mediana?

33. ¿La mitad del cuartil es necesariamente igual que la mitad del rango?

34. ¿El rango intercuartílico es necesariamente la mitad del rango?

35. El rango semiintercuartílico es necesariamente la mitad del rango intercuartílico?

	Puntuación bruta	Valores z
Homero	60	0.69
Alessandro	72	1.67

36. ***Posiciones relativas en un examen estandarizado de química*** Homero y Alessandro participaron en el proceso de estandarización de un nuevo examen estatal de química. Dentro del gran grupo de participantes, sus puntuaciones brutas y sus correspondientes valores z fueron como se registra en la tabla anterior.

Obtenga la media y la desviación estándar totales de la distribución de puntuaciones. (Dé las respuestas con dos decimales).

Tasas de pases en la Liga Nacional de Futbol *Desde que la Liga Nacional de Futbol comenzó a realizar datos estadísticos oficiales en 1932, la eficacia en los pases de los mariscales de campo se ha medido con varios métodos. El sistema actual, adoptado en 1973, está basado en cuatro componentes de desempeño: pases completos, pases para anotaciones, yardas ganadas e intercepciones, como porcentajes del número de pases intentados. El cálculo se puede efectuar mediante la siguiente fórmula.*

$$\text{Clasificación} = \frac{\left(250 \cdot \frac{C}{A}\right) + \left(1000 \cdot \frac{T}{A}\right) + \left(12.5 \cdot \frac{Y}{A}\right) + 6.25 - \left(1250 \cdot \frac{I}{A}\right)}{3},$$

donde A = pases intentados,
C = pases completos,
T = pases para anotación,
Y = yardas ganadas por pase
e I = intercepciones.

Además de los factores de ponderación (coeficientes) que aparecen en la fórmula, las cuatro clases de razones están limitadas a valores no negativos con los siguientes máximos.

$$0.775 \text{ para } \frac{C}{A}, \quad 0.11875 \text{ para } \frac{T}{A}, \quad 12.5 \text{ para } \frac{Y}{A}, \quad 0.095 \text{ para } \frac{I}{A}$$

Estas limitaciones intentan evitar cualquier componente de desempeño que tenga un efecto indebido sobre la clasificación total. Normalmente no se utilizan, pero en casos especiales pueden tener un efecto significativo.

La fórmula anterior mide a todos los pasadores contra el mismo estándar de desempeño, y se aplica, por ejemplo, a un juego, a una temporada completa, o a una carrera. Las clasificaciones de los 10 pasadores líderes en la liga para la temporada regular de 2009 se muestran en la siguiente tabla.

Clasificación	Pasador NFL	Puntos
1	Drew Brees, Nueva Orleans	109.6
2	Brett Favre, Minnesota	107.2
3	Philip Rivers, San Diego	104.4
4	Aaron Rodgers, Green Bay	103.2
5	Ben Roethlisberger, Pittsburgh	100.5
6	Peyton Manning, Indianápolis	99.9
7	Matt Schaub, Houston	98.6
8	Tony Romo, Dallas	97.6
9	Tom Brady, Nueva Inglaterra	96.2
10	Kurt Warner, Arizona	93.2

Fuente: www.espn.go.com

Obtenga las medidas (con un decimal) en los ejercicios 37 a 42.

37. los tres cuartiles

38. el tercer decil

39. el percentil 65

40. la mitad del rango (véase el **ejercicio 23**).

41. la mitad del cuartil (véase el **ejercicio 24**).

42. el rango intercuartílico (véase el **ejercicio 25**).

43. construya un diagrama de caja con los datos de la clasificación.

44. El pasador clasificado en undécimo lugar de la temporada regular de 2009 fue Eli Manning de los Gigantes de Nueva York. Eli intentó 509 pases, completó 317, realizó pases para 27 anotaciones, ganó 4,021 yardas en sus pases, y fue interceptado 14 veces. Determine su lugar en la clasificación.

45. Si Eli Manning hubiera completado un pase más en 2009, ¿cuál habría sido su lugar en la clasificación?



46. En el caso del **ejercicio 45**, ¿cómo se habría clasificado Eli Manning en 2009?

47. Steve Young, de los 49 de San Francisco, estableció un récord en la temporada de 1994 de 112.8 y mantuvo ese récord hasta que Peyton Manning logró una puntuación de 121.1 en 2004. (Hasta 2010, el récord de Manning de todos los tiempos se mantenía). Si en 2004, Manning había logrado 336 pases completos, 49 anotaciones y 4557 yardas ganadas, en 497 intentos, ¿cuántas intercepciones tuvo en el año?

48. Remítase a la fórmula para obtener la clasificación de los pasadores de futbol americano y determine la clasificación más alta posible (considerada la clasificación "perfecta" del pasador).

Archie Manning, padre de los pasadores de la NFL, Peyton y Eli, autografió esta fotografía para Jack, el hijo del autor Hornsby.

10.5 LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Variables aleatorias discretas y continuas • Definición y propiedades de una curva normal • Tabla de áreas de curvas normales estándar • Interpretación de áreas de una curva normal

Variables aleatorias discretas y continuas

Una variable aleatoria que solo puede tener ciertos valores fijos se conoce como **variable aleatoria discreta**. Por ejemplo, el número de caras en cinco lanzamientos al aire de una moneda es discreto, puesto que sus únicos valores posibles son 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Una variable cuyos valores no están restringidos de esta manera es una **variable aleatoria continua**. Por ejemplo, el diámetro de las flores de la camelia sería una variable continua, que se extiende sobre una escala de 5 a 25 centímetros. Los valores no estarían restringidos a números enteros, o ni siquiera a décimas, o centésimas, etcétera. Una variable aleatoria discreta toma solo un número contable de valores, mientras que una variable aleatoria continua adopta un número incontable de valores.

La mayoría de las distribuciones analizadas anteriormente en este capítulo fueron *empíricas* (se basaban en la observación). Las distribuciones que se presentan en esta sección son *teóricas* (se basan en probabilidades teóricas). El conocimiento de distribuciones teóricas nos permite identificar cuándo las observaciones reales son incongruentes con los supuestos establecidos, lo cual es la clave en la estadística inferencial.

En la **tabla 16** se muestra la distribución teórica de probabilidades de una variable aleatoria discreta, como el "número de caras" cuando cinco monedas justas (no cargadas) se lanzan al aire. La **figura 11** ilustra el histograma correspondiente. Los valores de probabilidad se pueden obtener usando la fórmula de probabilidad binomial (**sección 9.4**) o usando el triángulo de Pascal (**sección 8.4**).



El primero en desarrollar la curva normal fue **Abraham De Moivre** (1667-1754), pero su trabajo pasó inadvertido por muchos años. Después, fue desarrollada de forma independiente por Pierre de Laplace (1749-1827) y Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss encontró muchos usos para esta curva, que algunas veces se conoce como *curva de Gauss*.

Tabla 16 Distribución de probabilidad

x	$P(x)$
0	0.03125
1	0.15625
2	0.31250
3	0.31250
4	0.15625
5	0.03125
Suma:	1.00000

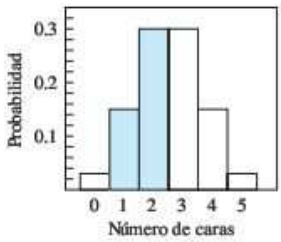


Figura 11

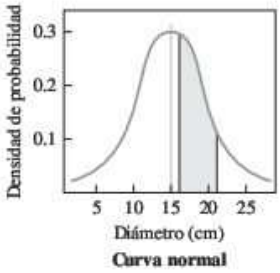


Figura 12

Como cada rectángulo de la **figura 11** tiene un ancho igual a la unidad, el *área* del rectángulo también es igual a la probabilidad del número de caras correspondiente. El área y, por lo tanto, la probabilidad del evento "1 o 2 caras" está sombreada en la figura. La gráfica consiste en 6 rectángulos distintos, puesto que el "número de caras" es una variable *discreta* con 6 valores posibles. La suma de las 6 áreas rectangulares es exactamente 1 unidad cuadrada.

En contraste con la distribución discreta del "número de caras" de la **tabla 16**, una distribución de probabilidad de los diámetros de la flor de camelia no se puede tabular o graficar exactamente del mismo modo, ya que esta variable es *continua*. La gráfica estaría corrida en una curva "continua" en forma de campana como se muestra en la **figura 12** (en lugar de tener la apariencia de un conjunto de rectángulos). La escala vertical sobre la gráfica muestra en este caso lo que llamamos "densidad de probabilidad", la probabilidad por unidad a lo largo del eje horizontal.

Definición y propiedades de una curva normal

La curva de la flor de camelia es más alta cuando el valor del diámetro es de 15 cm, su punto central, y cae rápida e igualmente hacia el nivel cero en ambas direcciones. Esta curva simétrica, en forma de campana, se conoce como **curva normal**. Se dice que cualquier variable aleatoria cuya gráfica posee esta forma característica tiene una **distribución normal**.

El área bajo la curva a lo largo de cierto intervalo es numéricamente igual a la probabilidad de que la variable aleatoria tenga un valor en el intervalo correspondiente. El área de la región sombreada en la **figura 12** es igual a la probabilidad de que una camelia elegida al azar tenga un diámetro en el intervalo del extremo izquierdo, digamos, 16.4, al extremo derecho, digamos, 21.2. Las curvas normales son muy importantes en el estudio de la estadística, porque ***un gran número de variables aleatorias continuas tienen distribuciones normales, y muchas variables discretas se distribuyen en forma aproximadamente normal.***

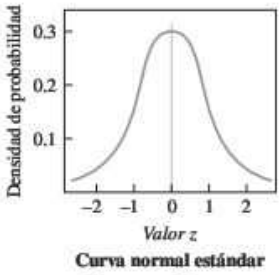
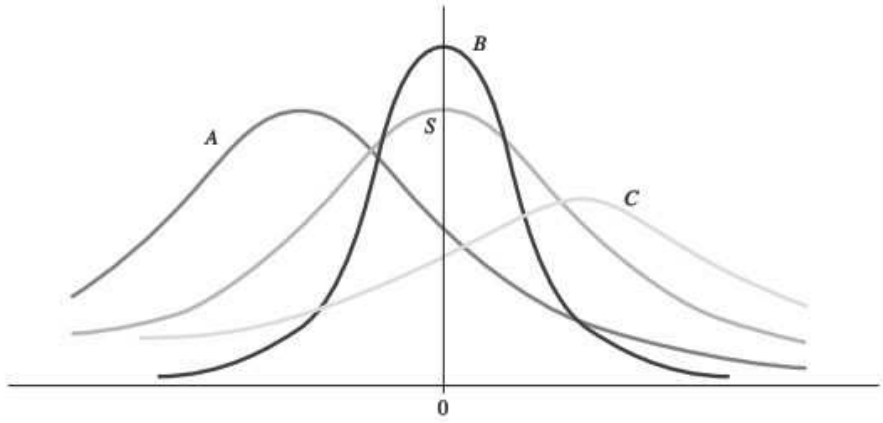


Figura 13

A cada punto sobre la escala horizontal de una curva normal corresponden varias desviaciones estándar respecto de la media (positivas a la derecha, negativas a la izquierda). Este número es el "valor estándar" de ese punto. Es lo mismo que el valor z definido en la **sección 10.4**. Redefiniendo el eje horizontal como en la **figura 13**, obtenemos la **curva normal estándar**, la cual se puede utilizar para analizar *cualquier* distribución normal (o aproximadamente normal). La variable aleatoria x se relaciona con el valor z mediante

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}.$$

La **figura 14** muestra algunas curvas del infinito número de curvas normales posibles. Cada una está identificada plenamente por su media y desviación estándar. Solo una de estas, la marcada con S, es la curva normal *estándar*. Esa tiene una media igual a 0 y una desviación estándar igual a 1.



La curva normal S es estándar, con media = 0 y desviación estándar = 1.
La curva normal A tiene media < 0 y desviación estándar = 1.
La curva normal B tiene media = 0 y desviación estándar < 1.
La curva normal C tiene media > 0 y desviación estándar > 1.

Figura 14

Cerca pero sin tocarse nunca Cuando una curva se aproxima más y más a una recta, sin tocarla realmente (como cuando una curva normal se aproxima al eje horizontal), la recta se conoce como **asíntota**, y la curva se aproxima a la recta **asintóticamente**.

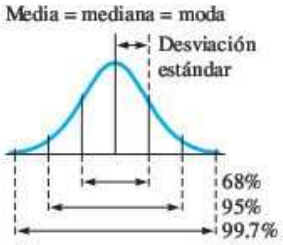


Figura 15

A continuación se resumen varias propiedades de las curvas normales y se ilustran en la **figura 15**.

Propiedades de las curvas normales

La gráfica de una curva normal tiene forma de campana y es simétrica respecto de una recta vertical que pasa por su centro.

La media, mediana y moda de una curva normal son todas iguales y se presentan en el centro de la distribución.

Regla empírica Aproximadamente el 68% de los valores de los datos de una curva normal se encuentran dentro de 1 desviación estándar de la media (en ambas direcciones), aproximadamente el 95% dentro de 2 desviaciones estándar, y aproximadamente el 99.7% dentro de 3 desviaciones estándar.

La regla empírica indica que un porcentaje muy pequeño de los datos en una distribución normal se ubican a más de 3 desviaciones estándar de la media (aproximadamente el 0.3%, dividido en partes iguales entre las colas superior e inferior de la distribución). Conforme nos alejamos del centro, la curva *nunca* toca realmente el eje horizontal. Sin importar qué tan lejos vayamos, siempre existe la posibilidad de encontrar un dato. Por lo tanto, teóricamente, el rango de las verdaderas distribuciones normales es infinito.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla empírica

Suponga que 300 estudiantes de química presentan un examen parcial y que la distribución de sus calificaciones se puede tratar como normal. Obtenga el número de calificaciones que se encuentran en cada uno de los siguientes intervalos.

a) Dentro de 1 desviación estándar de la media

b) Dentro de 2 desviaciones estándar de la media.

SOLUCIÓN

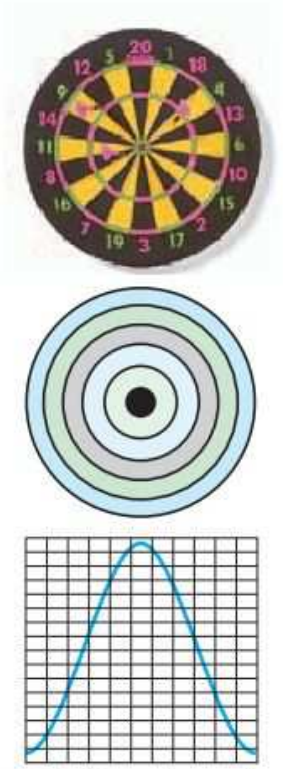
a) Por la regla empírica, el 68% de las calificaciones se encuentran dentro de 1 desviación estándar de la media. Como existen 300 calificaciones, el número de calificaciones dentro de 1 desviación estándar es el siguiente.

$$0.68(300) = 204 \qquad 68\% = 0.68$$

b) Un total del 95% de todas las calificaciones se encuentran dentro de 2 desviaciones estándar de la media.

$$0.95(300) = 285 \qquad 95\% = 0.95$$

▮▮▮



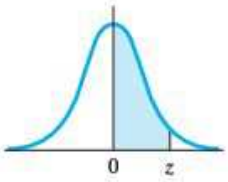
Una distribución normal se presenta en el juego de dardos si el jugador, siempre apuntando al ojo de buey, lanza los dardos un número bastante grande de veces, y el acierto en cada lanzamiento es afectado por errores aleatorios independientes.

Tabla de áreas de curvas normales estándar

La mayoría de las preguntas que necesitamos contestar acerca de las distribuciones normales implican a regiones diferentes de las que están dentro de 1, 2 o 3 desviaciones estándar de la media. Tal vez sea necesario el porcentaje de datos dentro de $1\frac{1}{2}$ o $2\frac{1}{5}$ desviaciones estándar de la media, o quizás el área bajo la curva de 0.8 a 1.3 desviaciones estándar por arriba de la media.

En estos casos, necesitamos algo más que la regla empírica. El enfoque tradicional consiste en consultar una tabla de valores del área, como la **tabla 17**, la cual se presenta en la **página 553**. Los paquetes de software de computadoras diseñados para usos estadísticos normalmente producen los valores requeridos con comandos, y algunas calculadoras avanzadas también tienen esta capacidad. Se recomiendan estas herramientas. Como un método opcional, a continuación se ilustra el uso de la **tabla 17**.

La columna *A* nos da la proporción del área bajo la curva entera que se encuentra entre $z = 0$ y un valor positivo de *z*.



Como la curva es simétrica en relación con el valor 0, el área entre $z = 0$ y un valor negativo de *z* se puede obtener usando el correspondiente valor positivo de *z*.

Tabla 17 Áreas bajo la curva normal estándar

z	*A*	*z*	*A*	*z*	*A*	*z*	*A*	*z*	*A*	*z*	*A*
.00	.000	.56	.212	1.12	.369	1.68	.454	2.24	.487	2.80	.497
.01	.004	.57	.216	1.13	.371	1.69	.454	2.25	.488	2.81	.498
.02	.008	.58	.219	1.14	.373	1.70	.455	2.26	.488	2.82	.498
.03	.012	.59	.222	1.15	.375	1.71	.456	2.27	.488	2.83	.498
.04	.016	.60	.226	1.16	.377	1.72	.457	2.28	.489	2.84	.498
.05	.020	.61	.229	1.17	.379	1.73	.458	2.29	.489	2.85	.498
.06	.024	.62	.232	1.18	.381	1.74	.459	2.30	.489	2.86	.498
.07	.028	.63	.236	1.19	.383	1.75	.460	2.31	.490	2.87	.498
.08	.032	.64	.239	1.20	.385	1.76	.461	2.32	.490	2.88	.498
.09	.036	.65	.242	1.21	.387	1.77	.462	2.33	.490	2.89	.498
.10	.040	.66	.245	1.22	.389	1.78	.462	2.34	.490	2.90	.498
.11	.044	.67	.249	1.23	.391	1.79	.463	2.35	.491	2.91	.498
.12	.048	.68	.252	1.24	.393	1.80	.464	2.36	.491	2.92	.498
.13	.052	.69	.255	1.25	.394	1.81	.465	2.37	.491	2.93	.498
.14	.056	.70	.258	1.26	.396	1.82	.466	2.38	.491	2.94	.498
.15	.060	.71	.261	1.27	.398	1.83	.466	2.39	.492	2.95	.498
.16	.064	.72	.264	1.28	.400	1.84	.467	2.40	.492	2.96	.498
.17	.067	.73	.267	1.29	.401	1.85	.468	2.41	.492	2.97	.499
.18	.071	.74	.270	1.30	.403	1.86	.469	2.42	.492	2.98	.499
.19	.075	.75	.273	1.31	.405	1.87	.469	2.43	.492	2.99	.499
.20	.079	.76	.276	1.32	.407	1.88	.470	2.44	.493	3.00	.499
.21	.083	.77	.279	1.33	.408	1.89	.471	2.45	.493	3.01	.499
.22	.087	.78	.282	1.34	.410	1.90	.471	2.46	.493	3.02	.499
.23	.091	.79	.285	1.35	.411	1.91	.472	2.47	.493	3.03	.499
.24	.095	.80	.288	1.36	.413	1.92	.473	2.48	.493	3.04	.499
.25	.099	.81	.291	1.37	.415	1.93	.473	2.49	.494	3.05	.499
.26	.103	.82	.294	1.38	.416	1.94	.474	2.50	.494	3.06	.499
.27	.106	.83	.297	1.39	.418	1.95	.474	2.51	.494	3.07	.499
.28	.110	.84	.300	1.40	.419	1.96	.475	2.52	.494	3.08	.499
.29	.114	.85	.302	1.41	.421	1.97	.476	2.53	.494	3.09	.499
.30	.118	.86	.305	1.42	.422	1.98	.476	2.54	.494	3.10	.499
.31	.122	.87	.308	1.43	.424	1.99	.477	2.55	.495	3.11	.499
.32	.126	.88	.311	1.44	.425	2.00	.477	2.56	.495	3.12	.499
.33	.129	.89	.313	1.45	.426	2.01	.478	2.57	.495	3.13	.499
.34	.133	.90	.316	1.46	.428	2.02	.478	2.58	.495	3.14	.499
.35	.137	.91	.319	1.47	.429	2.03	.479	2.59	.495	3.15	.499
.36	.141	.92	.321	1.48	.431	2.04	.479	2.60	.495	3.16	.499
.37	.144	.93	.324	1.49	.432	2.05	.480	2.61	.495	3.17	.499
.38	.148	.94	.326	1.50	.433	2.06	.480	2.62	.496	3.18	.499
.39	.152	.95	.329	1.51	.434	2.07	.481	2.63	.496	3.19	.499
.40	.155	.96	.331	1.52	.436	2.08	.481	2.64	.496	3.20	.499
.41	.159	.97	.334	1.53	.437	2.09	.482	2.65	.496	3.21	.499
.42	.163	.98	.336	1.54	.438	2.10	.482	2.66	.496	3.22	.499
.43	.166	.99	.339	1.55	.439	2.11	.483	2.67	.496	3.23	.499
.44	.170	1.00	.341	1.56	.441	2.12	.483	2.68	.496	3.24	.499
.45	.174	1.01	.344	1.57	.442	2.13	.483	2.69	.496	3.25	.499
.46	.177	1.02	.346	1.58	.443	2.14	.484	2.70	.497	3.26	.499
.47	.181	1.03	.348	1.59	.444	2.15	.484	2.71	.497	3.27	.499
.48	.184	1.04	.351	1.60	.445	2.16	.485	2.72	.497	3.28	.499
.49	.188	1.05	.353	1.61	.446	2.17	.485	2.73	.497	3.29	.499
.50	.191	1.06	.355	1.62	.447	2.18	.485	2.74	.497	3.30	.500
.51	.195	1.07	.358	1.63	.448	2.19	.486	2.75	.497	3.31	.500
.52	.198	1.08	.360	1.64	.449	2.20	.486	2.76	.497	3.32	.500
.53	.202	1.09	.362	1.65	.451	2.21	.486	2.77	.497	3.33	.500
.54	.205	1.10	.364	1.66	.452	2.22	.487	2.78	.497	3.34	.500
.55	.209	1.11	.367	1.67	.453	2.23	.487	2.79	.497	3.35	.500



Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue uno de los pensadores matemáticos más grandes de la historia. En su *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada en 1798, reunió el trabajo de sus predecesores y lo enriqueció con sus aportaciones hasta conformar un todo integral. El libro es considerado por muchos como el verdadero principio de la teoría de números (**capítulo 4**).

Entre muchas de sus contribuciones a la ciencia, el método estadístico de los mínimos cuadrados es el que más se utiliza actualmente en astronomía, biología, geodesia, física y las ciencias sociales. Gauss estaba especialmente orgulloso de sus contribuciones para desarrollar el método. A pesar de su aversión a ejercer la actividad docente, enseñó el método en un curso anual durante los últimos 20 años de su vida.

Se ha dicho que Gauss fue la última persona especialista en todas las áreas matemáticas conocidas de su tiempo.

La tabla indica la fracción de todos los valores de una distribución normal que se encuentran entre la media y las desviaciones estándar z de la media. ***Debido a la simetría de la curva normal, la tabla se puede usar para valores por arriba de la media o por debajo de esta.*** Todos los datos de la tabla se pueden visualizar como las áreas correspondientes bajo la curva. El área total se ha dispuesto para que sea 1.000 unidad cuadrada, con 0.500 unidades cuadradas a cada lado de la media. La tabla indica que en 3.30 desviaciones estándar de la media, se toma en cuenta prácticamente toda la amplitud del área. El residuo que queda es tan pequeño que no aparece en los primeros tres decimales.

EJEMPLO 2 Aplicación de la tabla de la curva normal

Use la **tabla 17** para obtener el porcentaje de todos los valores que se encuentran entre la media y los siguientes valores.

a) Una desviación estándar por arriba de la media.

b) 2.45 desviaciones estándar por debajo de la media.

SOLUCIÓN

a) En este caso, $z = 1.00$ (el número de desviaciones estándar, escrito como un decimal aproximado a la centésima más cercana). Remítase a la **tabla 17**. Localice el 1.00 en la columna z. La entrada de la tabla es 0.341, de modo que el 34.1% de todos los valores permanecen entre la media y una desviación estándar por arriba de la media.

Otra manera de enfocar esto es considerar que el área sombreada de la **figura 16** representa el 34.1% del área total debajo de la curva normal.

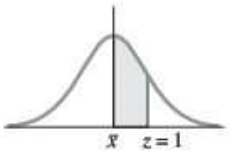


Figura 16

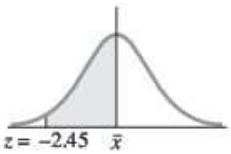


Figura 17

b) A pesar de que en este caso estamos *abajo de* la media (a la izquierda), la **tabla 17** aún funciona, puesto que la curva normal es simétrica en relación con su media. Localice 2.45 en la columna z. Un total de 0.493, o 49.3%, de todos los valores se encuentran entre la media y las 2.45 desviaciones estándar abajo de la media. Esta región está sombreada en la **figura 17**. ▮▮▮

EJEMPLO 3 Obtención de probabilidades de duraciones de llamadas telefónicas

La duración de llamadas telefónicas realizadas a través de cierta compañía están distribuidas normalmente con una media de 6 minutos y una desviación estándar igual a 2 minutos. Si se elige aleatoriamente 1 llamada de los registros de la compañía telefónica, ¿cuál es la probabilidad de que haya durado más de 10 minutos?

SOLUCIÓN

En este caso, 10 minutos corresponden a dos desviaciones estándar por arriba de la media. La probabilidad de una llamada así es igual al área de la región sombreada en la **figura 18**.

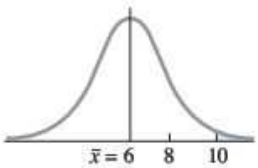


Figura 18

Partiendo de la **tabla 17**, el área entre la media y dos desviaciones estándar arriba es 0.477 ($z = 2.00$). El área total a la derecha de la media es 0.500. Calculamos el área a partir de $z = 2.00$ a la derecha, por sustracción.

$$0.500 - 0.477 = 0.023$$

La probabilidad de una llamada que exceda 10 minutos es 0.023, o 2.3%. ▮▮▮

EJEMPLO 4 Obtención de áreas bajo la curva normal

Calcule las áreas totales indicadas en las regiones sombreadas en cada una de las **figuras 19** y **20**.

SOLUCIÓN

En la **figura 19**, obtenga el área de 1.45 desviaciones estándar por debajo de la media a 2.71 desviaciones estándar por arriba de la media. En la **tabla 17**, $z = 1.45$ nos lleva a una área de 0.426, mientras que $z = 2.71$ da como resultado 0.497. El área total es la suma de estas, o $0.426 + 0.497 = 0.923$.

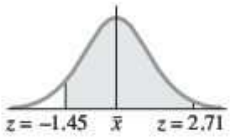


Figura 19

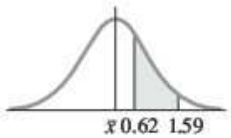


Figura 20

Para calcular el área indicada en la **figura 20** remítase nuevamente a la **tabla 17**. En la tabla, $z = 0.62$ nos lleva a una área de 0.232, mientras que $z = 1.59$ nos da 0.444. Para obtener el área entre estos dos valores de z, se restan las áreas.

$$0.444 - 0.232 = 0.212$$



Consumidor de productos básicos (papel higiénico) Todo comenzó cuando un reportero sobre artículos de consumo de una televisora del Medio Oeste de Estados Unidos recibió una queja sobre rollos de papel higiénico. Según el televidente, la marca X fabricada por la compañía Y no tenía el número de hojas anunciado en la envoltura. Se supone que la marca X tenía 375 hojas, pero los reporteros encontraron que tres de los rollos tenían 360, 361 y 363.

Los ejecutivos de la compañía Y dijeron horrorizados que las **probabilidades en contra** de que seis rollos tuvieran menos de 375 hojas cada uno eran de mil millones a 1. Contaron las hojas y encontraron que varios rollos de la marca X realmente tenían 380 hojas cada uno (las máquinas cuentan las hojas por decenas). Los reporteros de la televisión hicieron un conteo independiente, y sus resultados estuvieron de acuerdo con los de la compañía Y.

¿Qué sucedió la primera vez? Bueno, los reporteros no habían contado realmente las hojas, pero habían medido los rollos y dividido la longitud de un rollo entre la longitud de una hoja. Se pueden esperar pequeñas variaciones en la longitud, las cuales se suman a lo largo del rollo, lo que arroja resultados falsos.

Este hecho real señala quizá la diferencia en probabilidad y estadística entre **valores discretos** y **valores continuos**.

Interpretación de áreas de una curva normal

Los **ejemplos 2 a 4** ponen de relieve la *equivalencia* de tres cantidades, de la siguiente manera.

Significado de las áreas de una curva normal

En una curva normal estándar, las tres cantidades siguientes son equivalentes.

1. **Porcentaje** (de todos los datos que se encuentran en un intervalo)
2. **Probabilidad** (de un dato elegido aleatoriamente dentro de un intervalo)
3. **Área** (bajo la curva normal a lo largo de un intervalo)

La cantidad que usemos depende de cómo se formule una pregunta particular. Todas se evalúan usando los valores de A de la **tabla 17**.

En general, cuando se usa la **tabla 17**, z es el valor z de un dato particular x. Cuando se conoce uno de estos valores y el otro debe encontrarse, como en los **ejemplos 5 y 6**, se emplea la fórmula

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}.$$

EJEMPLO 5 Aplicación de la curva normal a distancias recorridas

En una área, la distribución de las millas recorridas mensualmente por los conductores tiene una media de 1200 millas y una desviación estándar igual a 150 millas. Suponga que el número de millas se aproxima de manera significativa a una curva normal, y calcule el porcentaje de todos los automovilistas que conducen las distancias indicadas.

a) Entre 1200 y 1600 millas al mes

b) Entre 1000 y 1500 millas al mes

SOLUCIÓN

a) Comenzamos determinando a cuántas desviaciones estándar por arriba de la media está la cantidad de 1600 millas. Usamos la fórmula de z.

$$z = \frac{1600 - 1200}{150} = \frac{400}{150} \approx 2.67$$

De acuerdo con la **tabla 17**, 0.496, o 49.6%, de todos los automovilistas conducen entre 1200 y 1600 millas mensuales.

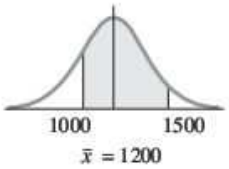


Figura 21

b) Como se observa en la **figura 21**, se deben obtener los valores de z tanto para 1000 como para 1500.

$$\text{Para 1000:}\quad z = \frac{1000 - 1200}{150} = \frac{-200}{150} \approx -1.33$$

$$\text{Para 1500:}\quad z = \frac{1500 - 1200}{150} = \frac{300}{150} = 2.00$$

De la **tabla 17**, $z = -1.33$ nos lleva a una área de 0.408, mientras que $z = 2.00$ da 0.477. Esto significa una media total de

$$0.408 + 0.477 = 0.885, \text{ u } 88.5\%,$$

de todos los automovilistas conducen entre 1000 y 1500 millas mensuales. ■■■

EJEMPLO 6 Identificación del valor de un dato dentro de una distribución normal

Una distribución normal determinada tiene una media $\bar{x} = 81.7$ y una desviación estándar $s = 5.21$. ¿Qué valor de la distribución correspondería a $z = -1.35$?

SOLUCIÓN

Se despeja x.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} \qquad \text{Fórmula del valor } z$$

$$-1.35 = \frac{x - 81.7}{5.21} \qquad \text{Se sustituyen los valores proporcionados de } z, \bar{x} \text{ y } s.$$

$$-1.35(5.21) = \frac{x - 81.7}{5.21}(5.21) \qquad \text{Se multiplica cada lado por 5.21 para eliminar la fracción.}$$

$$-7.0335 = x - 81.7 \qquad \text{Se simplifica.}$$

$$74.6665 = x \qquad \text{Se suma 81.7.}$$

Redondeando a la décima más próxima, el valor del dato requerido es igual a 74.7. ■■■

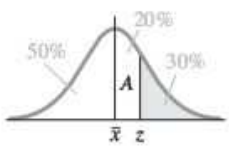


Figura 22

EJEMPLO 7 Obtención de valores z para áreas dadas bajo la curva normal

Suponiendo una distribución normal, obtenga el valor z que cumpla cada condición.

a) el 30% del área total está a la derecha de z.

b) el 80% del área total está a la izquierda de z.

SOLUCIÓN

a) Como el 50% del área se encuentra a la derecha de la media, debe haber 20% entre la media y z. (Véase la **figura 22**). En la **tabla 17**, $A = 0.200$ corresponde a $z = 0.52$ o 0.53, o podríamos promediar los dos: $z = 0.525$.

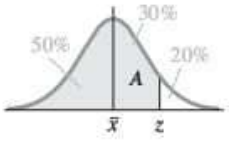


Figura 23

b) Esta situación se ilustra en la **figura 23**. El 50% a la izquierda de la media más el 30% adicional da un total de 80%. En la **tabla 17**, $A = 0.300$ implica que $z = 0.84$. ■■■

10.5 EJERCICIOS

Nota: En problemas que requieren el cálculo de valores z o valores A, las respuestas se basan en la* tabla 17. *Al usar una calculadora o un paquete de software, algunas veces se obtendrá una respuesta ligeramente más exacta.

Identifique cada variable como discreta *o* continua.

1. el número de caras en el lanzamiento al aire de 50 monedas

2. el número de bebés nacidos en un día en cierto hospital

3. el peso promedio de los bebés nacidos en una semana

4. las alturas de árboles de pinos de seis meses de edad

5. la hora mostrada por un reloj digital

6. la hora mostrada por un reloj con manecillas

Medición de la masa de muestras de mineral *Suponga que* 100 *estudiantes de geología miden la masa de una muestra de mineral. Debido al error humano y a limitaciones en la confiabilidad de la balanza, no todas las lecturas son iguales. Se encuentra que los resultados se aproximan significativamente a una curva normal, con media de* 86 g *y desviación estándar de* 1 g.

Use la simetría de la curva normal y la regla empírica para estimar el número de estudiantes que reportan lecturas en los siguientes rangos.

7. más de 86 g

8. más de 85 g

9. entre 85 y 87 g

10. Entre 84 y 87 g

Distribución de mediciones del CI *En pruebas normales del CI, la media es* 100, *con una desviación estándar de* 15. *Los resultados se ajustan mucho a una curva normal. Suponga que una prueba de CI se aplica a un grupo muy grande de personas. Obtenga el porcentaje de individuos cuyo CI se encuentre en cada una de las siguientes categorías.*

11. menos de 100

12. mayor que 115

13. entre 70 y 130

14. más de 145

Obtenga el porcentaje del área bajo una curva normal entre la media y el número que se indica de desviaciones estándar de la media. (Observe que positivo indica arriba de la media, mientras que negativo indica abajo de la media).

15. 1.50

16. 0.92

17. −1.08

18. −2.25

Obtenga el porcentaje del área total bajo una curva normal entre los valores indicados de z.

19. $z = 1.41$ y $z = 1.83$

20. $z = -1.74$ y $z = -1.14$

21. $z = -3.11$ y $z = 2.06$

22. $z = -1.98$ y $z = 1.02$

Obtenga un valor de z que cumpla con cada una de las siguientes condiciones.

23. El 10% del área total está a la derecha de z.

24. El 4% del área total está a la izquierda de z.

25. El 9% del área total está a la izquierda de z.

26. El 23% del área total está a la derecha de z.

Tiempo de vida de bombillas eléctricas *La bombilla de la marca Better tiene una vida promedio de* 600 *horas, con una desviación estándar de* 50 *horas. La duración de la vida de una bombilla se puede aproximar significativamente a una curva normal. El gerente de un almacén compra e instala* 10,000 *de estas bombillas. Obtenga el número total de bombillas que se puede esperar que duren cada cantidad de tiempo indicada.*

27. por lo menos 600 hr

28. entre 600 y 675 hr

29. entre 675 y 740 hr

30. entre 490 y 720 hr

31. menos de 740 hr

32. menos de 510 hr

Pesos de pollos *Los pollos de la granja Benny y Ann Rice tienen un peso medio de* 1850 g *con una desviación estándar de* 150 g. *Los pesos de los pollos se aproximan significativamente por una curva normal. Obtenga el porcentaje de todos los pollos que tienen cada uno de los pesos indicados.*



33. más de 1700 g

34. menos de 1800 g

35. entre 1750 y 1900 g

36. entre 1600 y 2000 g

Llenado de cajas de cereal *Cierto cereal deshidratado se empaca en cajas de* 24 *onzas. La máquina que llena las cajas lo hace de tal modo que, en promedio, una caja contiene* 24.5 *onzas. La máquina maneja pesos que se pueden aproximar por una curva normal. ¿Qué porcentaje de las cajas pesarán menos si la desviación estándar es la siguiente?*

37. 0.5 oz

38. 0.4 oz

39. 0.3 oz

40. 0.2 oz

41. ***Dosis diaria recomendada de vitaminas*** En nutrición, la dosis diaria recomendada de vitaminas es un conjunto de números determinado por el gobierno como guía para la ingesta diaria de un individuo. En realidad, la necesidad de vitaminas varía drásticamente de una persona a otra, pero las necesidades se aproximan de manera significativa por una curva normal. Para calcular la dosis diaria recomendada, el gobierno calcula primero la necesidad promedio de vitaminas entre personas de la población y la desviación estándar. Luego la **dosis diaria recomendada** se define como la media más 2.5 veces la desviación estándar. ¿Qué fracción de la población recibirá cantidades adecuadas de vitaminas con esta estrategia?

Dosis diaria recomendada de vitaminas *Obtenga la dosis diaria recomendada de cada vitamina si la media y la desviación estándar necesarias son las siguientes. (Véase el* ***ejercicio 41****).*

42. media necesaria = 1800 unidades;
desviación estándar = 140 unidades

43. media necesaria = 159 unidades;
desviación estándar = 12 unidades

Suponga que todas las distribuciones siguientes son normales, y use las áreas bajo la curva normal proporcionadas en la **tabla 17** *para obtener las áreas adecuadas.*

44. ***Llenado de cajas con leche*** Una máquina que llena cajas con un cuarto de galón de leche está programada para promediar 32.2 onzas por caja, con una desviación estándar de 1.2 onzas. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja contenga menos de 32 onzas de leche?



45. ***Determinación de tiempos de coagulación de la sangre*** La media del tiempo de coagulación de la sangre es de 7.47 segundos, con un desviación estándar de 3.6 segundos. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de coagulación de la sangre de un individuo sea menor que 7 o mayor que 8 segundos?

46. ***Tamaños de peces*** La longitud promedio de un pez atrapado en el lago Amotan es de 12.3 pulgadas, con una desviación estándar de 4.1 pulgadas. Calcule la probabilidad de que un pez atrapado allí mida más de 18 pulgadas.

47. ***Calificación del tamaño de un huevo*** Para ser calificado como extra grande, un huevo debe pesar al menos 2.2 onzas. Si el peso promedio de un huevo es de 1.5 onzas, con una desviación estándar de 0.4 onzas, ¿cuántos huevos elegidos al azar entre cinco docenas esperaría usted que sean extra grandes?



Distribución de calificaciones escolares *Peter Davies imparte un curso de marketing. Él usa el siguiente sistema para asignar calificaciones a sus alumnos.*

Calificación	Puntuación en clase
A	Mayor que $\bar{x} + 1.5s$
B	$\bar{x} + 0.5s$ a $\bar{x} + 1.5s$
C	$\bar{x} - 0.5s$ a $\bar{x} + 0.5s$
D	$\bar{x} - 1.5s$ a $\bar{x} - 0.5s$
F	Abajo de $\bar{x} - 1.5s$

A partir de la información de la tabla, ¿qué porcentaje de estudiantes reciben las siguientes calificaciones?

48. A **49.** B **50.** C

51. ¿Cree usted que este sistema puede ser justo en un grupo grande de psicología de primer año o en un seminario de graduados de cinco estudiantes? ¿Por qué?

Distribución normal de calificaciones de estudiantes *Un profesor aplica un examen a un grupo grande de estudiantes. Los resultados se aproximan significativamente por una curva normal. La media es de 75 con una desviación estándar de 5. El profesor desea asignar la calificación de "A" al 8% de los mejores estudiantes y la calificación de "F" al 8% más bajo. La calificación de "B" se asigna al siguiente 15%, y "D" se otorga de manera similar. El resto de estudiantes obtienen la calificación de "C". Determine el límite inferior (redondeado al número entero más próximo) de las siguientes calificaciones. (Sugerencia: Use la* **tabla 17** *para obtener los valores z a partir de los valores conocidos de A).*

52. A **53.** B **54.** C **55.** D

Una distribución normal tiene una media de 76.8 y una desviación estándar de 9.42. Siga el método del ***ejemplo 6*** *y obtenga los datos correspondientes a los siguientes valores de z. Redondee a la décima más próxima.*

56. $z = 0.72$ **57.** $z = 1.44$

58. $z = -2.39$ **59.** $z = -3.87$

60. ¿Qué porcentaje de los datos se encuentran dentro de 1.25 desviaciones estándar de la media
- ***a)*** en cualquier distribución (usando los resultados del teorema de Chebyshev)?
- ***b)*** en una distribución normal (usando la **tabla 17**)?

61. Explique la diferencia entre las respuesta de los incisos ***a)*** y ***b)*** en el **ejercicio 60**.

EXTENSIÓN Regresión y correlación

Regresión lineal • Correlación

Tabla 18 Edad frente a ingresos

Residente	Edad	Ingresos anuales
A	19	2150
B	23	2550
C	27	3250
D	31	3150
E	36	4250
F	40	4200
G	44	4350
H	49	5000
I	52	4950
J	54	5650

Regresión lineal

Una rama muy importante de la estadística inferencial, llamada **análisis de regresión**, se usa para comparar constantes o variables, para descubrir las relaciones que existen entre ellas y formular esas relaciones de maneras útiles.

Suponga que un sociólogo reúne datos sobre unos cuantos (digamos, 10) residentes de un pequeño pueblo en una región remota, para tener una idea de cómo se relaciona el ingreso anual (en dólares) con la edad. Los datos se presentan en la **tabla 18**.

El primer paso del análisis de estos datos consiste en graficar los resultados, como se muestra en el **diagrama de dispersión** de la **figura 24**. (Las calculadoras graficadoras dibujan diagramas de dispersión).

Una vez que se ha elaborado el diagrama de dispersión, podemos trazar la curva que mejor se ajuste al patrón presentado por la muestra de puntos. Esta curva puede tener cualquiera de muchas formas características, dependiendo de cómo estén relacionadas las cantidades implicadas. La curva que mejor se ajusta a los puntos de la muestra se conoce como **curva de regresión estimada**. Si, como en este análisis, los puntos del diagrama de dispersión parecen estar aproximadamente a lo largo de una recta, se supone que la relación es lineal, y la recta que se ajusta mejor a los puntos se conoce como **recta de regresión estimada**.

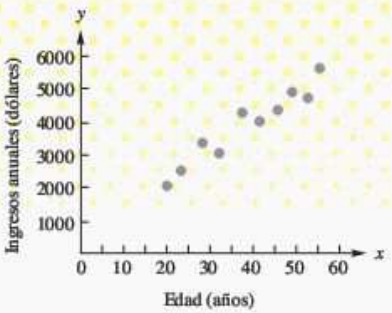
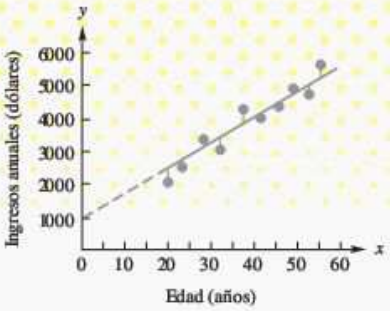


Diagrama de dispersión

Figura 24



Recta de regresión estimada tentativa

Figura 25

Si hacemos que x represente la edad, y y represente los ingresos en los datos de la **tabla 18**, y suponemos que la curva que mejor se ajusta es una recta, entonces la ecuación de esa recta es de la forma

$$y = ax + b,$$

donde a es la pendiente de la recta y b es la coordenada y de la intersección con y (esto es, el valor de y en el cual la recta, si se alargara, cortaría el eje y).

Para identificar completamente la recta de regresión estimada, se deben obtener los valores de los **coeficientes de regresión** a y b, lo cual requiere de algunos cálculos. En la **figura 25** se trazó una recta *tentativa* a través del diagrama de dispersión.

Para cada valor de x en el conjunto de datos, el valor correspondiente de y difiere normalmente del valor que tendría si los datos estuvieran exactamente en la recta. Estas diferencias se muestran en la figura con pequeñas rectas verticales. La elección de otra recta haría algunas de estas diferencias mayores y otras menores. El procedimiento más común es elegir la recta donde la suma de los cuadrados de todas estas diferencias se minimiza. Esto se conoce como el **método de mínimos cuadrados**, y la recta resultante se conoce como **recta de mínimos cuadrados**.

En la ecuación de la recta de mínimos cuadrados, se puede usar la variable y' para diferenciar los valores *pronosticados* (los cuales darán puntos sobre la recta de mínimos cuadrados) de los valores *observados* "y" (aquellos que se encuentran en el conjunto de datos).

El criterio de los mínimos cuadrados mencionado anteriormente nos lleva a valores específicos de a y b. No se darán más detalles, los cuales implican cálculo diferencial, pero los resultados se presentan aquí. (Σ, la letra griega *sigma*, representa la sumatoria, igual que en secciones anteriores).

Fórmulas de los coeficientes de regresión

La **recta de mínimos cuadrados** $y' = ax + b$ que ofrece el mejor ajuste a los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2),...,(x_n, y_n) tiene valores de coeficientes que se determinan como sigue.

$$a = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} \qquad b = \frac{\Sigma y - a(\Sigma x)}{n}$$

EJEMPLO 1 Cálculo y representación gráfica de una recta de mínimos cuadrados

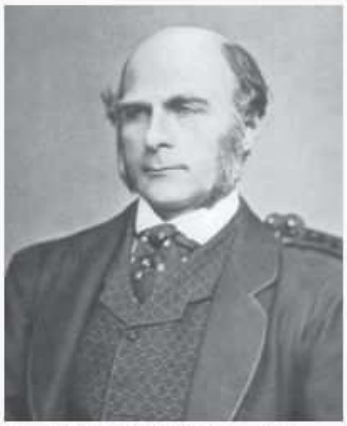
Obtenga la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para los datos de edad e ingresos incluidos en la **tabla 18**. Grafique la recta.

SOLUCIÓN

Se inicia con las dos columnas de la izquierda de la **tabla 19** (las cuales repiten exactamente los datos originales). Luego se obtienen los productos $x \cdot y$, y los cuadrados x^2.

Tabla 19 Cálculos de edad e ingresos

x	y	$x \cdot y$	x^2
19	2150	40,850	361
23	2550	58,650	529
27	3250	87,750	729
31	3150	97,650	961
36	4250	153,000	1296
40	4200	168,000	1600
44	4350	191,400	1936
49	5000	245,000	2401
52	4950	257,400	2704
54	5650	305,100	2916
Sumas: 375	39,500	1,604,800	15,433



Francis Galton (1822-1911) aprendió a leer a la edad de tres años. Estuvo interesado en las matemáticas y las máquinas, pero fue un estudiante indiferente de matemáticas en el Trinity College, de Cambridge. Se interesó en la investigación de los métodos de predicción del clima. Fue durante estas investigaciones que Galton desarrolló nociones intuitivas tempranas de **correlación** y **regresión**, y planteó el problema de regresión múltiple.

El trabajo estadístico clave de Galton es *Natural Inheritance*. En este, desarrolló sus ideas sobre regresión y correlación. Descubrió el coeficiente de correlación mientras ponderaba el esquema de Alphonse Bertillon para la clasificación de criminales por sus características físicas, lo cual representó una notable contribución al método estadístico.

A partir de la tabla, $\Sigma x = 375$, $\Sigma y = 39{,}500$, $\Sigma xy = 1{,}604{,}800$ y $\Sigma x^2 = 15{,}433$. Hay 10 pares de valores, de modo que $n = 10$. Ahora se obtiene a con la fórmula presentada antes.

$$a = \frac{10(1{,}604{,}800) - 375(39{,}500)}{10(15{,}433) - (375)^2} = \frac{1{,}235{,}500}{13{,}705} \approx 90.15$$

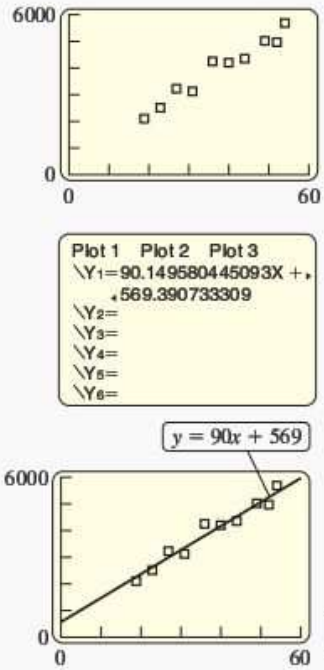
Por último, se usa este valor de a para calcular b.

$$b = \frac{39{,}500 - 90.15(375)}{10} \approx 569.4$$

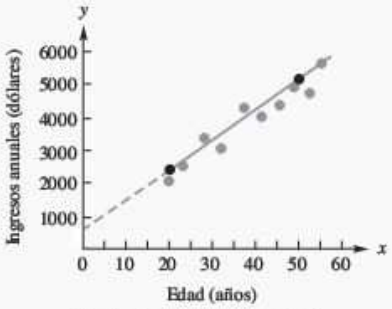
Ahora se puede escribir la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

$$y' = 90x + 569 \quad \text{Se redondean los coeficientes}$$

Haciendo $x = 20$, en esta ecuación se obtiene $y' = 2369$, y $x = 50$ implica que $y' = 5069$. Se usan los dos puntos (20, 2369) y (50, 5069) para graficar la recta de regresión en la **figura 26** de la página siguiente. Observe que la intersección de las coordenadas (0, 569) también se ajusta a la recta alargada.



La información de la **figura 26** y el análisis que la acompaña se apoya en estas pantallas.



Recta de mínimos cuadrados

Figura 26

Se recomienda una computadora o una calculadora científica, estadística o graficadora para obtener los coeficientes de regresión. (Véase las notas al margen y las opciones estadísticas de las **páginas 512 y 513**). Los cálculos tediosos, como los del **ejemplo 1**, se pueden eliminar para generar automáticamente la recta de regresión.

EJEMPLO 2 Pronóstico de una recta de mínimos cuadrados

Use el resultado del **ejemplo 1** para pronosticar los ingresos de un residente de la población que tiene 35 años de edad.

SOLUCIÓN

$$y' = 90x + 569 \qquad \text{Ecuación del ejemplo 1}$$
$$y' = 90(35) + 569 \qquad \text{Sea } x = 35.$$
$$y' = 3719$$

Con base en los datos proporcionados, una persona de 35 años de edad tendrá un ingreso aproximado de \$3719 al año. ■■■

Correlación Una vez que se ha obtenido la ecuación de la recta que mejor se ajusta (la recta de mínimos cuadrados), es razonable preguntar: "¿Exactamente qué tan buena es esta recta para efectuar pronósticos?". Si los puntos ya conocidos se ajustan a la recta de manera significativa, entonces cabe esperar que los pares de valores futuros también se ajusten. Si los puntos están muy dispersos incluso alrededor de la "mejor recta", los pronósticos quizá no sean muy exactos.

En general, cuanto más cerca se encuentren los datos de la *muestra* de la recta de mínimos cuadrados, mayor probabilidad existe de que la *población* completa de puntos (x, y) realmente forme una recta, es decir, que x y y realmente estén relacionadas linealmente. Además, cuanto mejor sea el ajuste, mayor seguridad tendremos de que nuestra recta de mínimos cuadrados (basada en la muestra) es una buena estimación de la recta de población verdadera.

Una medida común de la fortaleza de la relación lineal de la muestra se conoce como **coeficiente de correlación de la muestra**, y se denota con r. Se calcula a partir de los datos de la muestra de acuerdo con la siguiente fórmula.

Fórmula del coeficiente de correlación de una muestra

En una regresión lineal, la fortaleza de la relación lineal se mide por el coeficiente de correlación r, calculado como sigue.

$$r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$$

El valor de r siempre se encuentra entre −1 y 1, o quizá sea igual a −1 o 1. El grado de ajuste (de correlación) se puede describir en términos generales, de acuerdo con el valor de r, como sigue.

Grado de ajuste de una recta de regresión estimada para una muestra de puntos

- Ajuste perfecto: $r = 1$ o $r = -1$
- Ajuste fuerte: r cercano (pero no igual) a 1 o −1
- Ajuste moderado: r no cerca de 0, pero tampoco cerca de 1 o −1
- Ajuste débil: r igual o aproximadamente igual a 0

El signo (más o menos) de r determina el tipo de relación lineal, si existe, entre las variables x y y.

Relaciones lineales directas e inversas

- Si $r > 0$, la recta de regresión tiene pendiente positiva. La relación entre x y y es ***directa*** (conforme x se incrementa, y también se incrementa).
- Si $r < 0$, la recta de regresión tiene pendiente negativa. La relación entre x y y es ***inversa*** (conforme x se incrementa, y disminuye).
- Si $r = 0$, no existe relación lineal entre x y y.

EJEMPLO 3 Obtención del coeficiente de correlación

Obtenga r para los datos de edad e ingresos de la **tabla 19** de la **página 560**.

SOLUCIÓN

Casi todos los valores necesarios para obtener r se calcularon en el **ejemplo 1**.

$$n = 10 \quad \Sigma x = 375 \quad \Sigma y = 39{,}500 \quad \Sigma xy = 1{,}604{,}800 \quad \Sigma x^2 = 15{,}433$$

El único valor que falta es Σy^2. Al elevar al cuadrado los datos originales y al sumar los cuadrados obtenemos

$$\Sigma y^2 = 167{,}660{,}000$$

Ahora se usa la fórmula para obtener que $r = 0.98$ (con dos decimales). Este valor de r, muy cercano a 1, indica que la edad y los ingresos en esta población están altamente correlacionados. (El ajuste de la recta de regresión estimada es fuerte). El hecho de que r sea positivo indica que la relación lineal es directa; conforme la edad aumenta, el ingreso también se incrementa. ■■■

LinReg
y=ax+b
a=90.14958045
b=569.3907333
r²=.9572823948
r=.9784080922

La pendiente *a* y la intersección con *y* (esto es, *b*) de la ecuación de regresión, junto con r^2 y r, se indican en pantalla. Compare con los **ejemplos 1 y 3**.

EJEMPLO 4 Análisis de la tendencia de la edad en la población de Estados Unidos

The World Almanac and Book of Facts 2010 (página 622) reprodujo los siguientes datos de la Oficina del Censo de Estados Unidos, en relación con el envejecimiento de la población estadounidense durante el último siglo.

Año	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Porcentaje de 65 años en adelante	4.3	4.7	5.4	6.8	8.1	9.2	9.8	11.3	12.5	12.4	13.0

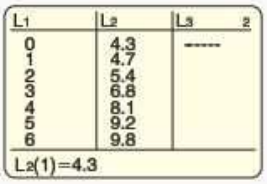
Considere que x representa el tiempo, en décadas, desde 1910, de modo que $x = 0$ en 1910, $x = 1$ en 1920, $x = 2$ en 1930, y así sucesivamente. Considere que y representa el porcentaje de 65 años en adelante de la población. Con base en la tabla de datos, obtenga lo siguiente.

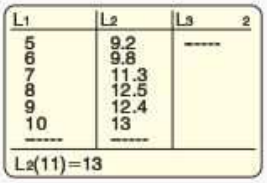
a) Grafique un diagrama de dispersión.

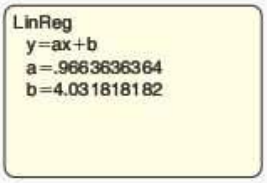
b) Calcule y grafique la recta de regresión de mínimos cuadrados.

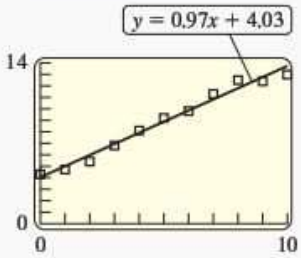
c) Calcule el coeficiente de correlación.

d) Use la recta de regresión para predecir el porcentaje de la población de 65 años en adelante que habrá en 2050, y analice la validez de la predicción.









Estas pantallas apoyan el **ejemplo 4 b)**.

SOLUCIÓN

a) Los puntos están graficados en la **figura 27**.

b) Se introducen en una calculadora los valores de x y y en las listas L1 y L2, respectivamente, para obtener la ecuación de la recta de regresión de los mínimos cuadrados.

$$y' = 0.97x + 4.03$$ Se redondean los coeficientes

Esta recta se muestra en la **figura 27** como una línea punteada.

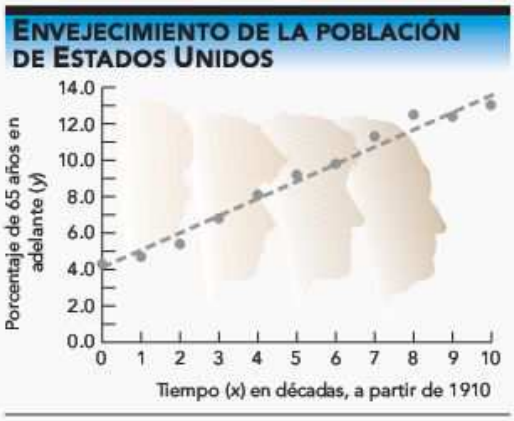




Figura 27

c) $\Sigma x = 55, \quad \Sigma x^2 = 385, \quad n = 11, \quad \Sigma y = 97.5,$
$\Sigma y^2 = 968.97, \quad \Sigma(xy) = 593.8$ Todos los valores se obtuvieron de una calculadora, usando dos variables estadísticas.

$$r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$$ Fórmula del coeficiente de correlación

$$= \frac{11 \cdot 593.8 - 55 \cdot 97.5}{\sqrt{11 \cdot 385 - 55^2} \cdot \sqrt{11 \cdot 968.97 - 97.5^2}}$$

$$= 0.990211\ldots$$

$$r \approx 0.99$$

d) $y' = 0.97x + 4.03$ Recta de regresión estimada

$= 0.97 \cdot 14 + 4.03$ El año 2050 corresponde a $x = 14$.

$y \approx 17.6$ En este caso se redondeó a 17.61.

Aun cuando la correlación era fuerte ($r \approx 0.99$) para los puntos que teníamos, es riesgoso extrapolar una recta de regresión demasiado hacia delante en el tiempo. Puede haber factores (como declinaciones de la tasa de natalidad en la población) que pueden disminuir el fenómeno del envejecimiento. (A propósito, la Oficina del Censo proyecta un 20.2% para 2050).

EJERCICIOS DE LA EXTENSIÓN

Correlación entre fertilizantes y tamaño de una mazorca de maíz *En un estudio para determinar la relación lineal entre la longitud (en decímetros) de una mazorca de maíz (y) y la cantidad (en toneladas por acre) del fertilizante usado (x), se determinaron los siguientes valores.*

$$n = 10 \qquad \Sigma xy = 75$$
$$\Sigma x = 30 \qquad \Sigma x^2 = 100$$
$$\Sigma y = 24 \qquad \Sigma y^2 = 80$$

1. Obtenga la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

2. Determine el coeficiente de correlación.

3. Si se usan 3 toneladas de fertilizante por acre, ¿qué longitud (en decímetros) pronosticaría la ecuación de regresión para una mazorca de maíz?

Correlación entre temperaturas Celsius y Fahrenheit *En un experimento para determinar la relación lineal entre temperaturas en la escala Celsius (y) y en la escala Fahrenheit (x), un estudiante obtuvo los siguientes resultados.*

$$n = 5 \qquad \Sigma xy = 28{,}050$$
$$\Sigma x = 376 \qquad \Sigma x^2 = 62{,}522$$
$$\Sigma y = 120 \qquad \Sigma y^2 = 13{,}450$$

4. Obtenga la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

5. Determine la lectura de la escala Celsius que corresponde a una lectura de 120° Fahrenheit, usando la ecuación del **ejercicio 4**.

6. Obtenga el coeficiente de correlación.

Correlación de estaturas y pesos de hombres adultos *Una muestra de 10 hombres adultos arrojó los siguientes datos acerca de sus estaturas y pesos.*

Estatura (pulgadas) (x)	62	62	63	65	66
Peso (libras) (y)	120	140	130	150	142

Estatura (pulgadas) (x)	67	68	68	70	72
Peso (libras) (y)	130	135	175	149	168

7. Obtenga la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

8. Usando los resultados del **ejercicio 7**, pronostique el peso de un hombre cuya estatura es de 60 pulgadas.

9. ¿Cuál sería el peso pronosticado de un hombre cuya estatura es de 70 pulgadas?

10. Calcule el coeficiente de correlación.

Correlación entre la habilidad de lectura y el CI *La siguiente tabla presenta las puntuaciones de habilidad de lectura y CI de un grupo de 10 individuos.*

Lectura (x)	83	76	75	85	74
CI (y)	120	104	98	115	87

Lectura (x)	90	75	78	95	80
CI (y)	127	90	110	134	119

11. Grafique un diagrama de dispersión con la habilidad de lectura representada en el eje horizontal.

12. Obtenga la ecuación de una recta de regresión.

13. Use la ecuación de la recta de regresión para estimar el CI de una persona con una puntuación de 65 en lectura.

Correlación de ventas anuales de una compañía *A continuación se registran las ventas anuales en miles de dólares de una compañía.*

Año (x)	0	1	2	3	4	5
Ventas (y)	48	59	66	75	80	90

14. Obtenga la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

15. Obtenga el coeficiente de correlación.

16. Si la tendencia lineal desplegada por estos datos continuara más allá de 5 años, ¿cuál sería la cantidad de ventas que usted pronosticaría para el año 7?

Comparación de las edades de perros y seres humanos *Se dice con frecuencia que la edad de un perro se debe multiplicar por 7 para obtener la edad equivalente de los humanos. Una correspondencia más exacta (a lo largo de los primeros 14 años) se muestra en la tabla de* The Old Farmer's Almanac, *edición 2000, página 180.*

Edad del perro (x)	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7
Edad equivalente de los humanos (y)	10	15	24	28	32	36	40	44

Edad del perro (x)	8	9	10	11	12	13	14
Edad equivalente de los humanos (y)	48	52	56	60	64	68	70.5

17. Grafique un diagrama de dispersión para los datos proporcionados.

18. Obtenga la ecuación de la recta de regresión, y grafique la recta en el diagrama de dispersión del **ejercicio 17**.

19. Describa dónde muestran los puntos la desviación más pronunciada respecto de la recta de regresión, y explique por qué esto es así.



20. Calcule el coeficiente de correlación.

Estadísticos sobre la migración de población hacia el oeste *Los datos que se presentan a continuación indican el incremento en el porcentaje de población en el oeste de Estados Unidos desde aproximadamente la época de la fiebre del oro en California.*

Año del censo	Tiempo, en décadas desde 1850 (x)	Porcentaje en el oeste (y)
1850	0	0.8%
1870	2	2.6
1890	4	5.0
1910	6	7.7
1930	8	10.0
1950	10	13.3
1970	12	17.1
1990	14	21.2

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2000.

21. Tomando x y y como se indica en la tabla, obtenga la ecuación de la recta de regresión.

22. Calcule el coeficiente de correlación.

23. Describa el grado de correlación (por ejemplo, como fuerte, moderado o débil).

24. ¿Esperaría usted que la tendencia lineal aparente de la tabla persista a mediados del siglo XXI? ¿Por qué?

Comparación de la población del estado frente a salarios de gobernadores *La tabla muestra los 10 estados más poblados (en 2008) y los salarios de sus gobernadores (en septiembre de 2009).*

Clasificación	Estado	Población, en millones (x)	Salario del gobernador, en miles de dólares (y)
1	California	37	174
2	Texas	24	150
3	Nueva York	19	179
4	Florida	18	130
5	Illinois	13	177
6	Pensilvania	12	175
7	Ohio	11	142
8	Michigan	10	177
9	Georgia	10	139
10	Carolina del Norte	9	140

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2010.

25. Obtenga la ecuación de la recta de regresión estimada.

26. Calcule el coeficiente de correlación.

27. Describa el grado de correlación (por ejemplo, como fuerte, moderado o débil).

28. ¿Qué salario de un gobernador pronosticaría este modelo lineal para un estado con una población de 15 millones de ciudadanos?

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

Combinación de conjuntos de datos

Dividan la clase en dos grupos separados, uno formado por mujeres y otro formado por hombres. Cada grupo va a elegir a una persona para escribir los resultados del grupo. Como grupo, realicen las siguientes tareas. (Tal vez deseen idear una manera que permita a los miembros de los grupos entregar datos personales de manera anónima).

1. Registren el número de miembros (n) de su grupo.

2. Recolecten los tamaños de los zapatos (x) y las estaturas en pulgadas (y) de todos los miembros del grupo.

3. Calculen la media, mediana y moda(s), si hay, de cada uno de los dos conjuntos de datos.

4. Calculen la desviación estándar de cada uno de los dos conjuntos de datos.

5. Construyan un diagrama de caja de cada uno de los dos conjuntos de datos.

6. Grafique un diagrama de dispersión de los datos x-y recolectados.

7. Obtengan la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados.

$$y' = ax + b$$

8. Evalúen el coeficiente de correlación (r).
9. Evalúen la fortaleza de la relación lineal entre el tamaño de los zapatos y la estatura de su grupo.

Ahora recombinen sus grupos en uno. Analicen y lleven a cabo las siguientes tareas.

1. Si es posible, calculen la media de las estaturas del grupo combinado, usando solo las medias individuales de los dos grupos y el número de miembros en cada uno de los grupos. Si esto no es posible, expliquen por qué y describan cómo *podrían* obtener la media combinada. Obtengan la media combinada.
2. Hagan lo mismo que en el punto 1 anterior para la mediana de las estaturas del grupo combinado.
3. Hagan lo mismo para la moda de las estaturas del grupo combinado.
4. Llenen la siguiente tabla, en relación con las estaturas, y comenten las relaciones aparentes entre los estadísticos calculados.

	Número de miembros	Media	Mediana	Moda
Mujeres				
Hombres				
Combinados				

EXAMEN DEL CAPÍTULO 10

Los tramposos nunca aprenden *La siguiente tabla muestra los resultados de un estudio de estudiantes universitarios de física, que compara calificaciones de exámenes con las tasas que indican el porcentaje de copiado de los estudiantes que copian a otros la tarea. Los números en la tabla aproximan las calificaciones expresadas con letras en una escala de 4 puntos (4.0 es una A, 3.0 es una B, etcétera). Conteste las preguntas de los ejercicios 1 a 4 en términos de tasas de alumnos que copian.*

Tasa de copiado de los alumnos	Examen de ingreso	Examen 1	Examen 2	Examen 3	Examen final
<10%	2.70	2.75	2.90	2.80	2.95
10% a 30%	2.50	2.45	2.35	2.40	2.30
30% a 50%	2.45	2.43	2.30	2.10	2.00
>50%	2.40	2.05	1.70	1.80	1.60

Fuente: Tabla creada usando los datos de la investigación reportados en Physics Review-Special Topics-Physics Education, *de David J. Palazzo, Young-Jin Lee, Rasil Warnakulasooriya y David E. Pritchard, de la Facultad de Física del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT).*

1. ¿Qué estudiantes mejoran generalmente su desempeño en los exámenes durante el transcurso de un semestre?
2. ¿Qué estudiantes tuvieron un mejor desempeño en el examen 3 en comparación con el examen 2?
3. ¿Qué estudiantes tuvieron calificaciones más bajas consistentemente de un examen al siguiente durante el semestre?
4. ¿Piensa usted que copiar la tarea es generalmente una *causa* de bajas calificaciones en los exámenes? Explique.
5. ***Producción de petróleo crudo*** La siguiente tabla registra las cifras de producción total de petróleo crudo en 2008 (en millones de barriles) para los cinco estados de EUA de mayor producción.

Estado	Total
Texas	398
Alaska	250
California	215
Luisiana	73
Oklahoma	64

Fuente: Energy Information Administration.

Use esta información para determinar lo siguiente.

a) la producción media por estado
b) el rango
c) la desviación estándar
d) el coeficiente de variación
e) Si 26 estados adicionales que producen menos crudo promediaron (media) 14 millones de barriles en 2008, ¿cuál fue la producción media de los 31 estados?

Árboles campeones *La tabla de la siguiente página menciona los nueve árboles nacionales de mayor altura, con base en la fórmula*

$$T = G + H + 0.25C,$$

donde T = *total de puntos*,
G = *circunferencia (circunferencia del tronco a 4.5 pies del suelo)*,
H = *altura*
y C = *anchura promedio de la copa.*

Tipo de árbol	G (pulgadas)	H (pies)	C (pies)	T	Ubicación
Secuoya gigante	1020	274	107	1321	Sequoia National Park, CA
Pino de la costa	950	321	75	1290	Jedediah Smith Redwoods State Park, CA
Pino de la costa	895	307	83	1223	Jedediah Smith Redwoods State Park, CA
Pino de la costa	867	311	101	1203	Prairie Creek Redwoods State Park, CA
Cedro rojo del Oeste	761	159	45	931	Olympic National Park, WA
Abeto de Sitka	668	191	96	883	Olympic National Park, WA
Abeto Douglas	512	301	65	829	Jedediah Smith Redwoods State Park, CA
Abeto Douglas	505	281	71	804	Olympia National Forest, WA
Cedro de Port-Orford	522	242	35	773	Siskiyou National Forest, OR

Fuente: The World Almanac and Book of Facts 2010.

Use esta información en los ejercicios 6 y 7.

6. Para los nueve árboles listados, obtenga lo siguiente.

a) la mediana de la altura

b) el primer cuartil de la circunferencia

c) el octavo decil en puntos totales



7. El décimo lugar de árboles en el país corresponde al ciprés común de los pantanos de Cat Island, LA, con $G = 647$ pulgadas, $H = 96$ pies y $C = 74$ pies. Para este árbol, conteste las siguientes preguntas.

a) Obtenga sus puntos totales.

b) ¿Qué lugar ocuparía con base solo en su circunferencia?

c) ¿Qué tan alto debería ser para desplazar al noveno árbol de la tabla?

d) Suponiendo una sección transversal circular a 4.5 pies arriba del suelo, aproxime el diámetro del tronco (al pie más cercano) en esa altura.

Proyecto de ley de estímulos *La tabla incluye siete categorías principales (en orden alfabético) del proyecto de la ley de estímulos de 2009 del Congreso de Estados Unidos (total de $787 mil millones).*

Clase de gasto	Cantidad presupuestada (miles de millones de $)
1. Educación y capacitación	128.2
2. Energía	70.3
3. Ambiente	15.6
4. Salud	152.0
5. Vivienda	20.5
6. Infraestructura	32.1
7. Transporte	48.2

Fuente: Oficina de Presupuesto del Congreso.

8. Construya una gráfica de barras con estos datos.

9. ¿Qué porcentaje se asignó a salud?

10. Si se asignaron $20 mil millones a tecnología de información relacionada con el cuidado de la salud, ¿qué porcentaje del paquete total corresponde a *otros* rubros de salud?

11. ¿Qué porcentaje se asignó a las tres categorías más grandes combinadas?

Contactos de clientes de un representante editorial *Tami Dreyfus, un representante editorial, registró los siguientes números de contactos con clientes en 22 días del mes de marzo. Use estos datos para resolver los ejercicios 12 a 14.*

12 8 15 11 20 18 14 22 13 26 17
19 16 25 19 10 7 18 24 15 30 24

12. Construya las distribuciones de frecuencias agrupadas y frecuencias relativas. Use cinco clases uniformes de amplitud 5 donde el límite inferior de la primera clase es igual a 6. (Redondee las frecuencias relativas a dos decimales).

13. Partiendo de la distribución de frecuencias del **ejercicio 12**, construya ***a)*** un histograma y ***b)*** un polígono de frecuencias. Use escalas y membretes adecuados.

14. Para los datos anteriores, ¿cuántas clases uniformes se requerirían si la primera clase tuviera límites 7-9?

En los ejercicios 15 a 18 obtenga las medidas indicadas para la siguiente distribución de frecuencias.

Valor	8	10	12	14	16	18
Frecuencia	3	8	10	8	5	1

15. la media

16. la mediana

17. la moda

18. el rango

19. ***Calificaciones de exámenes en una clase de física*** Los siguientes datos son las calificaciones de los exámenes que obtuvieron los estudiantes de una clase de física. Organice los datos en un diagrama de tallo y hoja con las hojas clasificadas.

79	43	65	84	77	70	52	61	80	66
68	48	55	78	71	38	45	64	67	73
77	50	67	91	84	33	49	61	79	72

Use el siguiente diagrama de tallo y hoja para resolver los ejercicios 20 a 25.

2	3	3	4					
2	6	7	8	9	9			
3	0	1	1	2	3	3	3	4
3	5	6	7	8	8	9		
4	1	2	2	4				
4	5	7	9					
5	2	4						
5	8							
6	0							

Calcule las medidas requeridas en los ejercicios 20 a 24.

20. la mediana

21. la(s) moda(s), si existe(n)

22. el rango

23. el tercer decil

24. el percentil 85

25. Construya un diagrama de caja para los datos proporcionados, mostrando los valores de las cinco cantidades más importantes en una escala numérica.

26. ***Calificaciones de exámenes en un instituto de capacitación*** Cierto instituto de capacitación aplica un examen estandarizado a grandes cantidades de candidatos a lo largo de la nación. Las calificaciones resultantes forman una distribución normal con una media de 80 y desviación estándar igual a 5. Calcule el porcentaje de todos los candidatos con las siguientes calificaciones. (Use la regla empírica).

a) entre 70 y 90

b) mayor que 95 o menor que 65

c) menor que 75

d) entre 85 y 90

Alturas de abetos *En un bosque, las alturas de los abetos están distribuidas normalmente con una media de 5.5 metros y una desviación estándar de 2.1 metros. Si se elige aleatoriamente un árbol, calcule la probabilidad (redondeando a la milésima más próxima) de que su altura se encuentre en cada uno de los siguientes intervalos.*

27. menor que 6.5 metros

28. entre 6.2 y 9.4 metros

Datos estadísticos de temporada en las Ligas Mayores de Béisbol *Las siguientes tablas muestran los estadísticos de 2009 de los juegos ganados en las tres divisiones de las Ligas Mayores de Béisbol. En cada caso.*

n = *número de equipos en la división,*

$\bar{x}$ = *promedio (media) de juegos ganados,*

y s = *desviación estándar del número de juegos ganados.*

Liga Americana

División Este	División Central	División Oeste
$n = 5$	$n = 5$	$n = 4$
$\bar{x} = 84.2$	$\bar{x} = 76.4$	$\bar{x} = 86.0$
$s = 15.5$	$s = 10.9$	$s = 9.0$

Liga Nacional

División Este	División Central	División Oeste
$n = 5$	$n = 6$	$n = 5$
$\bar{x} = 79.0$	$\bar{x} = 78.0$	$\bar{x} = 84.0$
$s = 14.1$	$s = 9.7$	$s = 10.9$

Remítase a las tablas anteriores para los ejercicios 29 a 31.

29. En general, ¿quién registró el mayor promedio de partidos ganados: los equipos del este, los equipos del centro o los equipos del oeste?

30. En general, ¿en qué división fueron menos "consistentes" los equipos en el número de juegos ganados: Este, Centro u Oeste?

31. Calcule (aproximando a la décima más cercana) el número promedio de juegos ganados para todos los equipos de la División Oeste.

32. Los Medias Rojas de Boston, en la División Este de la Liga Americana, y los Dodgers de Los Ángeles, en la División Oeste de la Liga Nacional, ganaron cada uno 95 juegos. Use valores z para determinar cuál de estos dos equipos tuvo relativamente un mejor desempeño dentro de su división de 5 equipos.



ADMINISTRACIÓN DE FINANZAS PERSONALES

11



En la segunda temporada de *El Show de Andy Griffith* se presentó un episodio que ilustraba extraordinariamente bien una aplicación de matemáticas financieras. En "Mayberry Goes Bankrupt", el alcalde Taylor fue forzado, a regañadientes, a desalojar amablemente de su casa a Frank Myers, un caballero de avanzada edad, por no haber pagado impuestos. Pero entonces Frank presentó un bono comprado en $100 en 1861 que pagaba el 8.5% de interés compuesto anualmente. Había estado guardado durante 100 años. Cuando el banquero del pueblo dijo al alcalde que no podía pagarle a Frank, Andy explicó por qué esto era así.

> *Bueno, alcalde... de acuerdo con el cálculo de las máquinas del banco... que son buenas máquinas... debemos a Frank Myers la cantidad de $349,119.27. (A lo cual Frank respondió: Me lo llevaré en efectivo).*

Aplicando la fórmula de interés compuesto de la **sección 11.1**, usted verá que la cifra mencionada es correcta hasta el último centavo.

11.1 Valor del dinero en el tiempo

11.2 Crédito al consumo

11.3 Transparencia en el crédito

11.4 Costos y ventajas de poseer una casa

11.5 Inversiones financieras

Extensión Esquemas de Ponzi y otros fraudes de inversión

Investigación colaborativa ¿Comprar o rentar?

Examen del capítulo 11

11.1 VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

Interés • Interés simple • Valor futuro y valor presente • Interés compuesto • Rendimiento anual efectivo • Inflación

Interés

Para determinar el valor del dinero, no solo se considera el monto (esto es, la cantidad de dólares), sino también el momento particular en que se determina el valor. Si hoy solicitamos en préstamo cierta cantidad de dinero, pagaremos una cantidad mayor posteriormente. Este incremento en el valor se conoce como **interés**. El dinero *incrementa su valor con el tiempo*.

El monto de un préstamo o un depósito se conoce como **principal**. El interés normalmente se calcula como un porcentaje del principal. Este porcentaje se conoce como **tasa de interés** (o simplemente **interés**). Siempre se supone que la tasa de interés es una tasa anual, a menos que se especifique otro periodo.

El interés calculado únicamente sobre el principal se conoce como **interés simple**. El interés calculado sobre el principal más cualquier interés ganado previamente se conoce como **interés compuesto**.

Interés simple

El interés simple se calcula de acuerdo con la siguiente fórmula.

Interés simple

Si P = principal, r = tasa de interés anual, y t = tiempo (en años), entonces el **interés simple** I se calcula como sigue.

$$I = Prt$$

EJEMPLO 1 Cálculo del interés simple

Calcule el interés simple a pagar por un préstamo de $5350 durante 5 meses al 6%.

SOLUCIÓN

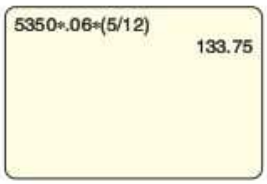
$$I = Prt \qquad \text{Fórmula de interés simple}$$

$$= \$5350(0.06)\left(\frac{5}{12}\right) \qquad \text{5 meses son } \tfrac{5}{12} \text{ de un año.}$$

$$P = \$5350,\ r = 6\% = 0.06$$

$$= \$133.75 \qquad \text{Se efectúa el cálculo.}$$

■■■



Este es el cálculo requerido para resolver el **ejemplo 1**.

Valor futuro y valor presente

En el **ejemplo 1**, al final de los 5 meses el prestatario tendría que pagar

Principal ↓ \$5350 + Interés ↓ \$133.75 = \$5483.75.

La cantidad total pagada se conoce algunas veces como **valor al vencimiento** (o simplemente el **valor**) del préstamo. Generalmente nos referiremos a ello como **valor futuro**, o **monto futuro**, ya que cuando se acuerda un préstamo, la devolución del dinero ocurre en el futuro. Usaremos A para representar el monto (o valor) futuro. El principal original, representado por P, también se puede considerar como el **valor presente**.

El valor futuro depende del principal (valor presente) y del interés, de la siguiente manera.

$$A = P + I = P + Prt = P(1 + rt)$$

Valor futuro cuando se genera interés simple

Si se solicita en préstamo un capital (o principal) P a interés simple durante t años a una tasa de interés anual r, entonces el **valor futuro** del préstamo, representado por A, se calcula mediante la fórmula:

$$A = P(1 + rt)$$

EJEMPLO 2 Cálculo del valor futuro cuando se genera interés simple

James Albertone solicitó un préstamo de $210, con interés simple, para comprar libros de texto y artículos escolares. Si la tasa de interés anual es del 6% y debe pagar el préstamo después de 8 meses, calcule el valor futuro (es decir, el valor al vencimiento) del préstamo.

SOLUCIÓN

$$A = P(1 + rt) \qquad \text{Fórmula del valor futuro}$$

$$= \$210\left[1 + 0.06\left(\frac{8}{12}\right)\right] \qquad P = \$210,\ r = 6\% = 0.06,\ t = \tfrac{8}{12}$$

$$= \$218.40 \qquad \text{Se realiza el cálculo.}$$

Al final de los 8 meses, James tendrá que pagar $218.40. ■■■

210(1+.06(8/12))
218.4

Este es el cálculo requerido para resolver el **ejemplo 2**.

Algunas veces se conoce el valor futuro y se necesita calcular el valor presente. En tal caso, se despeja P de la fórmula del valor futuro.

$$A = P(1 + rt) \qquad \text{Fórmula del valor futuro con interés simple}$$

$$\boldsymbol{P = \frac{A}{1 + rt}} \qquad \text{Se despeja } P \text{ de la fórmula.}$$

EJEMPLO 3 Cálculo del valor presente cuando se genera interés simple

Suponga que a James (**ejemplo 2**) se le permite pagar los $210 de forma *diferida* al cabo de 8 meses, en lugar de otorgarle un préstamo. Es decir, en vez de incurrir en interés durante 8 meses, él tendrá que pagar exactamente los $210 al final de ese periodo. Si tiene cierta cantidad de dinero que puede ahorrar ganando el 2% de interés simple, ¿qué suma total debe depositar ahora de modo que el valor de ese dinero sea de $210 al cabo de 8 meses?

SOLUCIÓN

$$P = \frac{A}{1 + rt} \qquad P \text{ despejada de la fórmula de valor futuro}$$

$$P = \frac{\$210}{1 + (0.02)\left(\frac{8}{12}\right)} = \$207.24 \qquad \text{Se sustituyen los valores conocidos y se simplifica.}$$

Un depósito de $207.24 ahora, ganando el 2% de interés simple, crecerá a $210 durante un periodo de 8 meses. ■■■

210/(1+.02(8/12))
207.24

Este es el cálculo requerido para resolver el **ejemplo 3**.

Interés compuesto

El interés pagado sobre un monto integrado por el principal más el interés que genera se conoce como *interés compuesto*. Después de cierto periodo, el interés ganado durante ese tiempo se *acredita* (es decir, se suma a la cuenta), y la suma (esto es, el principal más el interés) ganará interés durante el siguiente periodo (capitalización).



Tomemos prestado el título del clásico de Clint Eastwood *El bueno, el malo y el feo*, para calificar como **matemáticas feas** una escena de la película de 1994, *Cheque en blanco*. Preston Waters, de 12 años de edad recibió un cheque de $11.00 y usa su computadora para determinar cuánto tiempo pasará para que esta cantidad se convierta en $1,000,000 al 3.45% de interés anual.

Aun cuando no hay información sobre el número de periodos de interés compuesto, la respuesta proporcionada en la película es incorrecta para cualquier número. La computadora determina que eso tardaría 342,506 años. Incluso con el interés compuesto solo una vez al año, el tiempo "solamente" sería de 337 años.

EJEMPLO 4 Comparación de interés simple e interés compuesto

Compare el interés simple y el interés compuesto de un depósito de $1000 al 4% de interés durante 5 años.

SOLUCIÓN

$$A = P(1 + rt) \qquad \text{Fórmula del valor futuro}$$
$$= \$1000(1 + 0.04 \cdot 5) \qquad P = \$1000, r = 4\% = 0.04, t = 5$$
$$= \$1200 \qquad \text{Se efectúa el cálculo.}$$

Después de 5 años, $1000 crecen a $1200 aplicando el 4% de interés simple.

El resultado de la capitalización anual (es decir, la incorporación de los intereses anuales al capital original) durante 5 años se muestra en la **tabla 1**.

Tabla 1 Depósito de $1000 al 4% de interés compuesto anual

Año	Saldo inicial	Interés ganado $I = Prt$	Saldo final
1	$1000.00	$1000.00(0.04)(1) = $40.00	$1040.00
2	$1040.00	$1040.00(0.04)(1) = $41.60	$1081.60
3	$1081.60	$1081.60(0.04)(1) = $43.26	$1124.86
4	$1124.86	$1124.86(0.04)(1) = $44.99	$1169.85
5	$1169.85	$1169.85(0.04)(1) = $46.79	$1216.64

Con la capitalización anual durante 5 años, los $1000 crecen a $1216.64, es decir, se obtienen $16.64 más que con el interés simple. ■■■

Con base en el patrón de capitalización del **ejemplo 4**, desarrollaremos ahora una fórmula del valor futuro cuando se genera interés compuesto. En la práctica, el interés ganado se puede acreditar en una cuenta a intervalos de tiempo diferentes de 1 año (por lo general, con una frecuencia mayor). Por ejemplo, la capitalización puede ser semestral, trimestral, mensual o diaria. Este intervalo de tiempo se conoce como **periodo de capitalización** (o simplemente **periodo**). Iniciaremos con las siguientes definiciones:

P = capital o principal original depositado, r = tasa de interés anual,
m = número de periodos por año, n = número total de periodos.

Durante cada periodo individual de capitalización, el interés se calcula de acuerdo con la fórmula de interés simple; y conforme se suma el interés, el principal inicial se incrementa de un periodo a otro. Durante el primer periodo, el interés ganado se determina de la siguiente forma:

$$\text{Interés} = P(r)\left(\frac{1}{m}\right) \qquad \text{Interés} = (\text{Principal})(\text{tasa})(\text{tiempo}),\ \text{un periodo} = \tfrac{1}{m}\ \text{año}$$
$$= P\left(\frac{r}{m}\right). \qquad \text{Se reescribe } (r)\left(\tfrac{1}{m}\right) \text{ como } \left(\tfrac{r}{m}\right).$$

Al final del primer periodo, la cuenta tiene entonces

Monto inicial, Interés

$$\text{Monto final} = P + P\left(\frac{r}{m}\right)$$
$$= P\left(1 + \frac{r}{m}\right). \qquad \text{Se factoriza } P \text{ en ambos términos.}$$



El **rey Hammurabi** intentó mantener tasas de interés al 20% para la plata y el oro, pero los prestamistas de dinero ignoraban este decreto.

Ahora, durante el segundo periodo, el interés ganado se calcula de esta forma:

$$\text{Interés} = \left[P\left(1+\frac{r}{m}\right)\right](r)\left(\frac{1}{m}\right) \qquad \text{Interés} = [\text{Principal}]\,(\text{tasa})\,(\text{tiempo})$$
$$= P\left(1+\frac{r}{m}\right)\left(\frac{r}{m}\right),$$

De modo que la cuenta, al finalizar el segundo periodo, tendrá

$$\text{Monto final} = \underset{\text{Monto inicial}}{P\left(1+\frac{r}{m}\right)} + \underset{\text{Interés}}{P\left(1+\frac{r}{m}\right)\left(\frac{r}{m}\right)}$$
$$= P\left(1+\frac{r}{m}\right)\left[1+\frac{r}{m}\right] \qquad \text{Se factoriza } P\left(1+\tfrac{r}{m}\right) \text{ en ambos términos.}$$
$$= P\left(1+\frac{r}{m}\right)^2. \qquad a \cdot a = a^2$$

Considere un periodo adicional, es decir, el tercero. El interés ganado es

$$\text{Interés} = \left[P\left(1+\frac{r}{m}\right)^2\right](r)\left(\frac{1}{m}\right) \qquad \text{Interés} = [\text{Principal}](\text{tasa})\,(\text{tiempo})$$
$$= P\left(1+\frac{r}{m}\right)^2\left(\frac{r}{m}\right),$$

de modo que la cuenta termina el tercer periodo con el siguiente saldo:

$$\text{Monto final} = \underset{\text{Monto inicial}}{P\left(1+\frac{r}{m}\right)^2} + \underset{\text{Interés}}{P\left(1+\frac{r}{m}\right)^2\left(\frac{r}{m}\right)}$$
$$= P\left(1+\frac{r}{m}\right)^2\left[1+\frac{r}{m}\right] \qquad \text{Se factoriza } P\left(1+\tfrac{r}{m}\right)^2 \text{ en ambos términos.}$$
$$= P\left(1+\frac{r}{m}\right)^3. \qquad a^2 \cdot a = a^3$$

La **tabla 2** resume los resultados anteriores.

Tabla 2 Monto compuesto

Número de periodo	Monto inicial	Interés ganado durante el periodo	Monto final
1	P	$P\left(\frac{r}{m}\right)$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)$
2	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)\left(\frac{r}{m}\right)$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^2$
3	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^2$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^2\left(\frac{r}{m}\right)$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^3$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n-1}$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n-1}\left(\frac{r}{m}\right)$	$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^n$

El dato en la entrada inferior derecha de la **tabla 2** provee la siguiente fórmula.

La cantidad $\left(1+\frac{r}{m}\right)^a$ se puede evaluar usando una tecla como y^x en una calculadora científica o $\wedge$ en una graficadora.

Valor futuro cuando se genera interés compuesto

Si se depositan P dólares a una tasa de interés anual r, capitalizable m veces por año, y el dinero se reinvierte un total de n periodos, entonces el **valor futuro**, A (el monto final del depósito), se calcula mediante la fórmula:

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^n$$

EJEMPLO 5 Cálculo del valor futuro cuando se genera interés compuesto

Calcule el valor futuro (monto final del depósito) y el monto del interés ganado por los siguientes depósitos.

a) \$12,450 al 3% capitalizable en forma trimestral durante 5 años.

b) \$3419 al 4.1% capitalizable en forma mensual durante 30 meses.

SOLUCIÓN

a) En este caso, $P = 12{,}450$, $r = 3\% = 0.03$, y $m = 4$. Durante 5 años,

$$n = 5m = (5)(4) = 20.$$

Usamos la fórmula del valor futuro y una calculadora.

$$A = \$12{,}450\left(1+\frac{0.03}{4}\right)^{20} = \$14{,}456.74$$

Ahora se resta para conocer el interés ganado.

$$\text{Interés ganado} = \underset{\text{Valor futuro}}{\$14{,}456.74} - \underset{\text{Valor presente}}{\$12{,}450}$$
$$= \$2006.74$$

N=20
I%=3
PV=-12450
PMT=0
→ FV=14456.74257
P/Y=4
C/Y=4
PMT: END BEGIN

Las funciones financieras de la calculadora TI-83/84 Plus permiten al usuario determinar la cantidad desconocida relacionada con el valor del dinero en el tiempo. La flecha indica el renglón que calcula la respuesta del valor futuro en el **ejemplo 5*a***).

b) En este caso, $P = \$3419$, $r = 4.1\% = 0.041$, $m = 12$ y $n = 30$.

$$A = \$3419\left(1+\frac{0.041}{12}\right)^{30} = \$3787.38$$

$$\text{Interés ganado} = \underset{\text{Valor futuro}}{\$3787.38} - \underset{\text{Valor presente}}{\$3419}$$
$$= \$368.38$$

▮▮▮

Algunas veces los problemas de interés compuesto requieren que se despeje P de la fórmula para calcular el valor presente cuando se conoce el valor futuro.

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^n \quad \text{Valor futuro cuando se genera interés compuesto}$$

$$P = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n} \quad \text{Se despeja } P \text{ de la fórmula.}$$



La película *The Pajama Game* de 1957 se inspiró en el musical de Broadway del mismo nombre. Recientemente, se escenificó una vez más en Broadway y la estelarizó Harry Connick Jr. La protagonista de la película, "Babe" Williams, fue interpretada por Doris Day. Ella y sus compañeros de trabajo en la Sleeptite Pajama Factory intentaban conseguir un aumento de $7\frac{1}{2}$ centavos por hora.

El número musical **"Seven and a half cents"** describe tres cálculos, determinando cuánto representará este aumento, aparentemente insignificante, en tres periodos. Usando papel y lápiz para efectuar los cálculos, la letra de la canción afirma que en cinco años, el aumento sumará $852.74, en 10 años $1705.48, y en 20 años $3411.96. Suponiendo que la cifra para 5 años es correcta, ¿también la de 10 años es correcta? Ahora, ¿qué tal la cifra para 20 años? ¡Ay!

EJEMPLO 6 Cálculo del valor presente cuando se genera interés compuesto

Lisa Ashley necesitará $27,000 en 5 años como ayuda para pagar su educación universitaria. ¿Qué suma total, depositada ahora al 4% y capitalizable trimestralmente, producirá la cantidad que necesita?

SOLUCIÓN

Es necesario obtener el valor presente P con base en lo siguiente.

Valor futuro:	$A = \$27{,}000$
Tasa anual:	$r = 4\% = 0.04$
Periodos por año:	$m = 4$
Número total de periodos:	$n = (5)(4) = 20$

$$P = \frac{A}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n}$$ Se despeja P de la fórmula de valor futuro.

$$P = \frac{\$27{,}000}{\left(1 + \frac{0.04}{4}\right)^{20}}$$ Se sustituyen los valores conocidos.

$$P = \$22{,}127.70$$ Se realiza el cálculo.

Suponiendo que el interés del 4% capitalizable trimestralmente se mantiene vigente, se pueden obtener los $27,000 en 5 años depositando ahora $22,127.70. ■■■

El siguiente ejemplo usa logaritmos. Vea la presentación de logaritmos de la **sección 7.6** (o el manual de su calculadora).

EJEMPLO 7 Cálculo del tiempo requerido para duplicar el principal de un depósito

Considerando una cuenta de ahorros que paga el 3% de interés, capitalizable diariamente, ¿en qué tiempo se duplicará el capital original en la cuenta?

SOLUCIÓN

El valor futuro debe ser igual al doble del valor presente.

$$2P = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n$$ Se sustituye A por $2P$ en la fórmula de valor futuro.

$$2 = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^n$$ Se dividen ambos lados entre P.

$$2 = \left(1 + \frac{0.03}{365}\right)^n$$ Se sustituyen los valores de r y m.

$$\log 2 = \log\left(1 + \frac{0.03}{365}\right)^n$$ Se aplica el logaritmo de ambos lados.

$$\log 2 = n \log\left(1 + \frac{0.03}{365}\right)$$ Se usa la propiedad de potencia de logaritmos.

$$n = \frac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{0.03}{365}\right)}$$ Se despeja n.

$$n = 8434$$ Se redondea al entero más próximo.

Como n representa el número de periodos, el cual en este caso está dado en días, la cantidad de tiempo requerida es 8434 días, o 23 años, 39 días (ignorando los años bisiestos). ■■■



El poder del interés compuesto se puso de moda en el pueblo de Union City, Michigan. Eli Hooker, presidente del comité local del bicentenario de la Independencia en 1976, vio que no había suficiente dinero para hacer una celebración adecuada ese año. Entonces, para ayudar a su pueblo a prepararse para el tricentenario, en el año 2076, recolectó 25 dólares de cada uno de 42 patrióticos residentes y depositó el dinero en un banco local. Capitalizable al 7%, ese dinero crecería a un millón de dólares en 2076.

Por desgracia, el millón de dólares no sería tan valioso como podríamos pensar. Si la comunidad hubiera decidido contratar gente para desfilar con disfraces históricos, se habría tenido que pagar a cada uno $4 por hora en 1976. El salario actualizado para 2076, suponiendo una inflación anual del 7% en 100 años, estaría muy arriba de $3000 por hora.

El **ejemplo 8** ilustra la importancia de iniciar lo más pronto posible para maximizar la ventaja de una capitalización a largo plazo.

EJEMPLO 8 Comparación de planes de retiro

Compare los resultados de los siguientes dos planes de retiro a una edad de 65 años. Ambos planes ganan el 8% de interés anual durante el periodo de existencia de la cuenta.

Plan A: Gina Fox inicia ahorrando a la edad de 20 años, deposita $2000 cada cumpleaños de los 21 a los 30 años (10 depósitos, es decir, $20,000 en total), y a partir de entonces no hace más contribuciones.

Plan B: Peter Harris espera hasta la edad de 30 años para iniciar el ahorro, realiza depósitos de $2000 cada cumpleaños de los 31 a los 65 años (35 depósitos, es decir, $70,000 en total).

SOLUCIÓN

La **tabla 3** muestra cómo cambian ambas cuentas con los años. Los $20,000, depositados con anterioridad, producen $83,744 más que los $70,000, depositados posteriormente.

Tabla 3

Edad	Plan A	Plan B
20	0	0
25	11,733	0
30	28,973	0
35	42,571	11,733
40	62,551	28,973
45	91,908	54,304
50	135,042	91,524
55	198,422	146,212
60	291,547	226,566
65	428,378	344,634

En el **ejemplo 8**, los depósitos *anticipados* del plan A superaron el *mayor número* de los depósitos del plan B porque la tasa de interés en el plan A era lo suficientemente alta para generar un saldo a la edad de 30 años que el plan B nunca podría sobrepasar, ni siquiera con los depósitos adicionales realizados a partir de ese momento en el plan B. Si la tasa de interés hubiera sido del 6% en lugar del 8%, el plan B habría rebasado al plan A (a la edad de 57 años) y a la edad de 65 estaría adelante por $20,253 (redondeando al dólar más cercano).

Rendimiento anual efectivo

Los bancos, las uniones de crédito y otras organizaciones con frecuencia manejan dos tasas. La primera es la tasa de interés anualizada real o **tasa nominal** (la tasa "mencionada" o "pactada"). La segunda es la tasa equivalente que produciría el mismo monto final, o valor futuro, al final de un año, como si el interés pagado fuera simple en lugar de compuesto. Esta se conoce como la "tasa efectiva", o más comúnmente como el **rendimiento anual efectivo**. (En ocasiones se representa como **APY** por las siglas de ***anual percentage yield***). Como el interés suele capitalizarse varias veces por año, el rendimiento normalmente será un poco más alto que la tasa nominal.

EJEMPLO 9 Cálculo del rendimiento anual efectivo

¿Cuál es el rendimiento anual efectivo de una cuenta que paga una tasa nominal del 2.50% y se capitaliza en forma trimestral?

SOLUCIÓN

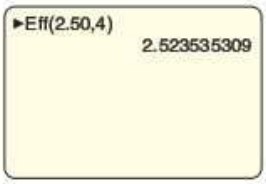
De acuerdo con los datos, $r = 0.025$ y $m = 4$. Suponga que depositamos $P = \$1$ y lo dejamos ahí por un año ($n = 4$). Entonces, la fórmula del interés compuesto nos da

$$A = 1 \cdot \left(1 + \frac{0.025}{4}\right)^4 \approx 1.0252.$$

El depósito inicial de \$1, después de 1 año, creció a \$1.0252.

$$\text{Interés ganado} = 1.0252 - 1 \qquad \text{Interés} = \text{Valor futuro} - \text{Valor presente}$$
$$= 0.0252, \quad \text{o} \quad 2.52\%$$

La tasa nominal de 2.50% anual da por resultado un rendimiento anual efectivo del 2.52%. ■■■



Las calculadoras financieras están programadas para calcular la tasa de interés efectiva. Compare con el resultado del **ejemplo 9**.

Generalizando el procedimiento del **ejemplo 9** se obtiene la siguiente fórmula.

Rendimiento anual efectivo

Una tasa de interés nominal r, capitalizable m veces por año, es equivalente al siguiente **rendimiento anual efectivo**.

$$Y = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

Cuando se evalúan oportunidades de crédito o ahorro, un prestatario debe buscar el rendimiento mínimo disponible, mientras que un depositante debe buscar el máximo rendimiento.

EJEMPLO 10 Comparación de tasas de ahorro

Christine Ellington desea depositar \$2800 en una cuenta de ahorros y ha reducido sus opciones a las tres instituciones que se describen a continuación. ¿Cuál es la mejor opción?

Instutución	Tasa sobre depósitos de \$1000 a \$5000
Friendly Credit Union	2.08% de tasa anual, capitalizable mensualmente
Premier Savings	2.09% de rendimiento anual
Neighborhood Bank	2.05% capitalizable diariamente

SOLUCIÓN

Compare los rendimientos anuales efectivos de las tres instituciones.

Friendly: $$Y = \left(1 + \frac{0.0208}{12}\right)^{12} - 1 = 0.0210 = 2.10\%$$

Premier: $$Y = 2.09\%$$

Neighborhood: $$Y = \left(1 + \frac{0.0205}{365}\right)^{365} - 1 = 0.0207 = 2.07\%$$

El mejor de los tres rendimientos, 2.10%, lo ofrece Friendly Credit Union. ■■■

Tabla 4 Índice de precios al consumidor (IPC-U)*

Año	Promedio IPC-U	Porcentaje de cambio en el IPC-U
1979	72.6	11.3
1980	82.4	13.5
1981	90.9	10.3
1982	96.5	6.2
1983	99.6	3.2
1984	103.9	4.3
1985	107.6	3.6
1986	109.6	1.9
1987	113.6	3.6
1988	118.3	4.1
1989	124.0	4.8
1990	130.7	5.4
1991	136.2	4.2
1992	140.3	3.0
1993	144.5	3.0
1994	148.2	2.6
1995	152.4	2.8
1996	156.9	3.0
1997	160.5	2.3
1998	163.0	1.6
1999	166.6	2.2
2000	172.2	3.4
2001	177.1	2.8
2002	179.9	1.6
2003	184.0	2.3
2004	188.9	2.7
2005	195.3	3.4
2006	201.6	3.2
2007	207.3	2.8
2008	215.3	3.8
2009	214.5	−0.4

Fuente: Bureau of Labor Statistics.
***El periodo de 1982 a 1984: 100**

Inflación

El interés refleja cómo el dinero *gana valor con el tiempo* cuando se solicita o se otorga en préstamo. Por otro lado, en términos del número equivalente de bienes o servicios que comprará una cantidad determinada de dinero, este último normalmente *pierde valor con el tiempo*. Tal fenómeno provoca un incremento periódico en el costo de la vida, lo cual se conoce como **inflación de precios**.

En Estados Unidos, la Oficina de Estadísticas del Trabajo (Bureau of Labor Statistics, BLS) publica cifras del **índice de precios al consumidor (IPC)**, las cuales reflejan los precios de ciertos artículos comprados por una gran mayoría de personas. Los artículos incluyen alimentos, vivienda, automóviles, gasolina y ropa. Artículos suntuosos como yates o joyería costosa no están incluidos.

Los datos actualizados se publican regularmente en www.bls.gov/cpi. La **tabla 4** incluye los valores del índice principal que representa a "todos los consumidores urbanos" (el IPC-U). El valor indicado para un año determinado es realmente el promedio (la media aritmética) de las 12 cifras mensuales de ese año. La tabla indica, por ejemplo, que el promedio del IPC-U para 2007 (207.3) fue un 2.8% mayor que el valor promedio de 2006 (201.6).

La **deflación** es una *disminución* en los niveles de precios de un año a otro. Un breve periodo de deflación moderada, junto con una desaceleración económica general, normalmente se conoce como **recesión**. (Por ejemplo, en la **tabla 4**, observe la tasa de 2009 de −0.4).

A diferencia de los valores de las cuentas con interés compuesto, las cuales registran "saltos" repentinos exactamente en ciertos momentos (de forma trimestral, mensual o diaria), los niveles de precios tienden a fluctuar de manera gradual con el tiempo. Por lo tanto, para estimaciones inflacionarias, es adecuado usar la fórmula de capitalización continua (presentada en la **sección 7.6**).

Valor futuro con capitalización continua

Si un depósito inicial de P dólares gana interés que se capitaliza de forma continua a una tasa anual r durante un periodo de t años, entonces el **valor futuro**, A, se calcula mediante la fórmula:

$$A = Pe^{rt}$$

EJEMPLO 11 Pronóstico de los niveles salariales con inflación

Suponga que usted gana un salario de $34,000 anuales. ¿Aproximadamente qué salario necesitaría en 20 años, a partir de ahora, para conservar su poder adquisitivo en caso de que la tasa de inflación se mantuviera en cada uno de los siguientes niveles?

a) 2% (aproximadamente el nivel de 1999).

b) 13% (aproximadamente el nivel de 1980).

SOLUCIÓN

a) En este caso podemos usar la fórmula del valor futuro con capitalización continua, con $P = \$34{,}000$, $r = 0.02$ y $t = 20$, y la tecla $\boxed{e^x}$ de una calculadora.

$$A = Pe^{rt} = (\$34{,}000)e^{(0.02)(20)} = \$50{,}722.04$$

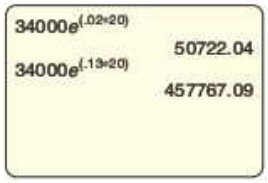
El salario requerido en 20 años a partir de ahora sería de $51,000 aproximadamente.

b) Para este nivel de inflación tendríamos lo siguiente.

$$A = Pe^{rt} = (\$34{,}000)e^{(0.13)(20)} = \$457{,}767.09$$

El salario requerido en 20 años a partir de ahora sería de $458,000 aproximadamente. ▮▮▮

Para comparar niveles equivalentes de precios generales en dos años cualesquiera, podemos usar la proporción de la parte superior de la siguiente página. (Una proporción es un enunciado que indica que dos razones son iguales. Véase la **sección 6.3**).



Estos son los cálculos requeridos para resolver los dos incisos del **ejemplo 11**.

Proporción de inflación

Para un producto de consumo o un servicio determinado sujeto a una inflación promedio, los precios de dos años diferentes se relacionan como sigue.

$$\frac{\textbf{Precio en el año A}}{\textbf{Precio en el año B}} = \frac{\textbf{IPC en el año A}}{\textbf{IPC en el año B}}$$

EJEMPLO 12 Comparación del incremento en la colegiatura con la inflación promedio

La colegiatura en la universidad de Michael Dew en 2009 fue de $9910. El tío de Michael asistió a la misma universidad en 1990 y pagaba $4990 por la colegiatura. Compare el incremento de la colegiatura universitaria con la inflación promedio durante el mismo periodo.

SOLUCIÓN

Considere que x representa lo que esperaríamos que costaría la colegiatura en 2009 si se hubiera incrementado a la tasa de inflación promedio desde 1990.

$$\frac{\text{Precio en 2009}}{\text{Precio en 1990}} = \frac{\text{IPC en 2009}}{\text{IPC en 1990}} \qquad \text{Proporción de la inflación}$$

$$\frac{x}{\$4990} = \frac{214.5}{130.7} \qquad \text{Se sustituyen valores. Los valores del IPC se tomaron de la Tabla 4.}$$

$$x = \frac{214.5}{130.7} \cdot \$4990 \qquad \text{Se despeja } x.$$

$$x \approx \$8189$$

Ahora compare la colegiatura real de 2009, $9910, con la cifra esperada, $8189.

$$\frac{\$9910}{\$8189} = 1.21 \qquad 1.21 = 100\% + 21\%$$

Durante el periodo de 1990 a 2009, la colegiatura en la universidad de Michael se incrementó aproximadamente un 21% más que la tasa promedio del IPC-U. ■■■

Cuando se trabaja con cantidades como la inflación, donde prevalecen fluctuaciones e inexactitudes continuas, con frecuencia se desarrollan "reglas prácticas" aproximadas para obtener estimaciones rápidas. Un ejemplo es la estimación de los **años de duplicación**, que es el número de años que deben transcurrir para que el nivel general de precios se duplique, considerando una tasa anual de inflación determinada. Se puede obtener una regla de estimación como sigue.

$$A = Pe^{rt} \qquad \text{Fórmula del valor futuro}$$

$$2P = Pe^{rt} \qquad \text{Se van a duplicar los precios.}$$

$$2 = e^{rt} \qquad \text{Se dividen ambos lados entre } P.$$

$$\ln 2 = rt \qquad \text{Se aplica el logaritmo natural en ambos lados.}$$

$$t = \frac{\ln 2}{r} \qquad \text{Se despeja } t.$$

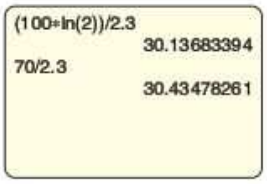
$$t = \frac{100 \ln 2}{100r} \qquad \text{Se multiplica el numerador y el denominador por 100.}$$

$$\textbf{años de duplicación} \approx \frac{\textbf{70}}{\textbf{tasa de inflación anual}} \qquad 100 \ln 2 \approx 70$$

(Como r es la tasa de inflación expresada en forma *decimal*, $100r$ es la tasa de inflación en forma de *porcentaje*).

El resultado anterior se conoce comúnmente como la **regla del 70**. El valor que se obtiene, si no es un número entero, se redondea *hacia arriba* al siguiente número entero de años.

La **inflación monetaria** devalúa una divisa exactamente como lo hace la **inflación de precios**, pero a través de un incremento directo en el suministro de dinero en la economía. Un ejemplo en Estados Unidos fue la emisión masiva en 2009 y 2010 de deuda gubernamental y el gasto masivo del gobierno en programas de "estímulo". Entre los economistas persistió el debate acerca de si las acciones del gobierno y el banco central lograrían sus metas. ¿Continuaría la recuperación económica o habría mayor deflación? La mayoría estuvo de acuerdo en que el resultado a largo plazo de la inflación monetaria sería más y más inflación de precios. Algunos niegan que exista alguna diferencia real, ya que, debido a la compleja interrelación de las fuerzas económicas, la inflación monetaria y la inflación de precios, en esencia, son lo mismo.



Como 100 ln 2 ≈ 70, los dos resultados mostrados aquí son aproximadamente iguales. Véase el **ejemplo 13** y el análisis anterior.

EJEMPLO 13 Estimación de los años de duplicación mediante la regla del 70

Estime los años de duplicación para una tasa de inflación anual del 2.3%.

SOLUCIÓN

$$\text{Años de duplicación} \approx \frac{70}{2.3} \approx 30.43 \quad \text{Regla del 70}$$

Con una tasa de inflación sostenida del 2.3%, los precios se duplicarían en aproximadamente 31 años. ■■■

11.1 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, siempre que sea adecuado, suponga que hay 12 meses en un año, 30 días en un mes, y 365 días en un año, a menos que se especifique de otro modo.

Calcule el interés simple que se adeuda por cada préstamo.

1. $800 al 6% en 1 año

2. $3000 al 5% en 1 año

3. $920 al 7% en 9 meses

4. $5400 al 7% en 4 meses

5. $2675 al 7.3% en $2\frac{1}{2}$ años

6. $2620 al 4.82% en 22 meses

Calcule el valor futuro de cada depósito si una cuenta paga ***a)*** *interés simple y* ***b)*** *interés compuesto anualmente.*

7. $700 al 3% en 6 años

8. $2000 al 4% en 5 años

9. $2500 al 2% en 3 años

10. $3000 al 5% en 4 años

Resuelva cada problema relacionado con el interés.

11. ***Interés simple sobre el impuesto atrasado de una propiedad*** Andrew Draa se atrasó en el pago del impuesto de su propiedad en el condado. Debía pagar $7500 y pagó con cuatro meses de atraso. El condado le impuso una sanción del 5% de interés simple. Calcule el monto de la sanción.

12. ***Interés simple sobre un préstamo para uniformes de trabajo*** Austin Caperton compró un nuevo suministro de uniformes de repartidor. Pagó $922 por los uniformes y estuvo de acuerdo en pagar por ellos en 5 meses con un 6% de interés simple. Calcule la cantidad de interés que pagará.

13. ***Interés simple sobre el préstamo a un pequeño negocio*** Kelly Kunert fundó una empresa de seguridad el 1 de marzo. Para pagar los muebles de la oficina y los perros guardianes, Kelly pidió prestados $12,800 al banco y acordó pagar el préstamo en 10 meses al 7% de interés simple. Obtenga la *cantidad total* requerida para pagar el préstamo.

14. ***Interés simple sobre una devolución de impuestos*** El sistema fiscal estadounidense (Internal Revenue Service, IRS) devolverá a Paul Lewis $530 por un sobrepago de impuestos el año pasado. El IRS devolverá la cantidad al 4% de interés simple. Calcule la *cantidad total* que Paul recibirá si se paga el interés de 8 meses.

Obtenga el monto final faltante (valor futuro) y/o el interés ganado.

	Principal	Tasa	Capitalización	Tiempo	Monto final	Interés compuesto
15.	$ 975	4%	trimestral	4 años	$1143.26	_____
16.	$1150	7%	semestral	6 años	$1737.73	_____
17.	$ 480	6%	semestral	9 años	_____	$337.17
18.	$2370	5%	trimestral	5 años	_____	_____
19.	$7500	$3\frac{1}{2}$%	anual	25 años	_____	_____
20.	$3450	2.4%	semestral	10 años	_____	_____

Para cada depósito, calcule el valor futuro (es decir, el monto final en depósito) cuando la capitalización ocurre de forma ***a)*** *anual,* ***b)*** *semestral y* ***c)*** *trimestral.*

	Principal	Tasa	Tiempo
21.	$2000	4%	3 años
22.	$5000	2%	7 años
23.	$18,000	1%	5 años
24.	$10,000	3%	9 años

Ocasionalmente, una cuenta de ahorros en realidad puede pagar interés con capitalización continua. Para cada depósito, calcule el interés ganado, si el interés se capitaliza de forma ***a)*** *semestral,* ***b)*** *trimestral,* ***c)*** *mensual,* ***d)*** *diaria y* ***e)*** *continua.*

	Principal	Tasa	Tiempo
25.	$850	1.6%	4 años
26.	$1550	2.8%	33 meses [Suponga 1003 días en los incisos ***d)*** y ***e)***].

27. Describa el efecto del interés que se capitaliza con más y más frecuencia. En particular, ¿qué tan buena es la capitalización continua?

Resuelva los siguientes problemas relacionados con el interés.

28. ***Cálculo de una cantidad prestada con interés simple*** Jay Jenkins solicita hoy un préstamo al 7% de interés simple que pagará en 15 meses a partir de ahora con un pago total de $815.63. ¿Qué cantidad solicitó en préstamo Jay?

29. ***Cálculo de una cantidad prestada con interés simple*** ¿Cuál es el monto máximo que Ginger Logan puede solicitar hoy en préstamo, si debe pagar en 4 meses con el 8% de interés simple, y sabe que no podrá pagar más de $1500?

30. En el desarrollo de la fórmula del valor futuro con interés compuesto en este libro, se emplearon al menos cuatro estrategias específicas para la solución de problemas. Identifique (nombre) tantas como pueda y describa su uso en este caso.

Obtenga el valor presente de cada cantidad futura.

31. $1000 (6% capitalizable anualmente durante 5 años)

32. $14,000 (4% capitalizable trimestralmente durante 3 años)

33. $9860 (8% capitalizable semestralmente durante 10 años)

34. $15,080 (5% capitalizable mensualmente durante 4 años)

Cálculo del valor presente de una cuenta para el retiro con interés compuesto *Robin Martin desea establecer una cuenta, que completará su ingreso para el retiro, durante 30 años a partir de ahora. Para cada tasa de interés, calcule la cantidad total que debe depositar ahora de modo que estén disponibles $500,000 en el momento del retiro.*

35. 5% capitalizable trimestralmente

36. 6% capitalizable trimestralmente

37. 5% capitalizable diariamente

38. 6% capitalizable diariamente

Cálculo del rendimiento anual efectivo de una cuenta de ahorros *Suponga que una cuenta de ahorros y préstamos paga una tasa nominal del 2% sobre depósitos. Determine el rendimiento anual efectivo si el interés se capitaliza como se indica en los ejercicios 39 a 45. (Dé las respuestas redondeando a la milésima del porcentaje más próxima).*

39. anualmente

40. semestralmente

41. trimestralmente

42. mensualmente

43. diariamente

44. 1000 veces por año

45. 10,000 veces por año

46. Considerando los **ejercicios 39 a 45**, ¿cuál supone usted que es el rendimiento anual efectivo si una tasa nominal del 2% se capitaliza de forma continua? Explique su razonamiento.

Comparación de tasas de ahorro y rendimientos *La tabla muestra las dos mejores tasas de ahorro disponibles en una lista de Internet del 25 de mayo de 2010. Use esta información en los ejercicios 47 y 48.*

	Tasa	Rendimiento
Sallie Mae	1.390%	1.400%
Capital One Direct Banking	1.340%	1.349%

47. Si usted deposita $30,000 con Sallie Mae, ¿cuánto tendría en un año?

48. ¿Con qué frecuencia ocurre la capitalización en la cuenta de Capital One: en forma diaria, mensual, trimestral o semestral?

Resuelva cada uno de los siguientes problemas.

49. ***Cálculo de los años de duplicación*** ¿Cuánto tiempo tardará su dinero en duplicarse si está depositado en una cuenta que paga el 4% capitalizable trimestralmente? (Dé su respuesta en años y días, ignorando los años bisiestos).

50. ***Comparación de los montos de interés y principal*** ¿Después de qué periodo de tiempo el interés ganado sería igual al principal original en una cuenta que paga el 2% capitalizable diariamente? (Dé su respuesta en años y días, ignorando los años bisiestos).

51. Despeje r de la fórmula de rendimiento anual efectivo para obtener una fórmula general de la tasa nominal en términos de rendimiento y el número de periodos de capitalización por año.

52. ***Cálculo de la tasa nominal de una cuenta de ahorros*** Ridgeway Savings capitaliza el interés mensualmente, y el rendimiento anual efectivo es del 1.95%. ¿Cuál es la tasa nominal?

53. ***Comparación de tasas de ahorro bancarias*** El banco A paga una tasa nominal sobre depósitos del 3.800% capitalizable diariamente. El banco B genera el mismo rendimiento anual que el primero, pero capitaliza el interés en forma trimestral y no paga intereses sobre los depósitos por menos de un trimestre completo.

a) ¿Qué tasa nominal paga el banco B (redondeando a la milésima más próxima del porcentaje)?

b) ¿Qué banco debe elegir Nancy Dennis si tiene $2000 para depositar durante 10 meses? ¿Cuánto más ganará de interés en comparación con el otro banco?

c) ¿Qué banco debe elegir Dara Lanier para un depósito de $6000 durante un año? ¿Cuánto ganará de interés?

Estimación de años de duplicación usando la regla del 70 *Use la regla del 70 para estimar los años de duplicación para cada tasa de inflación anual.*

54. 1% **55.** 2%

56. 8% **57.** 9%

Estimación de la tasa de inflación usando la regla del 70 *Use la regla del 70 para estimar la tasa de inflación anual (redondeando a la décima más próxima del porcentaje) que causaría que el nivel general de precios se duplicara en cada periodo de tiempo.*

58. 5 años **59.** 7 años

60. 16 años **61.** 22 años

62. Obtenga una regla para estimar los "años para triplicar", es decir, el número de años que tomaría para que el nivel general de precios se triplicara considerando una tasa de inflación anual determinada.

Estimación de los precios futuros con una inflación anual constante *A continuación se presentan los precios de varios artículos del año 2010. Calcule los precios futuros requeridos para llenar los espacios de la tabla. (Dé varias cifras significativas consistentes con los precios de 2010 proporcionados).*

	Artículo	Precio en 2010	Precio en 2015, 2% de inflación	Precio en 2025, 2% de inflación	Precio en 2015, 10% de inflación	Precio en 2025, 10% de inflación
63.	Comida rápida	$ 5.89	_____	_____	_____	_____
64.	Casa	$265,000	_____	_____	_____	_____
65.	Auto compacto	$ 18,500	_____	_____	_____	_____
66.	Galón de gasolina	$ 2.65	_____	_____	_____	_____

Estimación de precios futuros con inflación anual variable *Como se vio en la* **tabla 4**, *es común que las tasas de inflación no permanezcan constantes durante un periodo de años. Suponga que los precios de los siguientes artículos se incrementan a las tasas promedio anuales indicadas en la* **tabla 4**. *Use la proporción de la inflación para determinar los precios que faltan en la última columna de la tabla. Redondee al dólar más próximo.*

	Artículo	Precio	Año de compra	Precio en 2009
67.	Vestido de noche	$ 175	2000	_____
68.	Escritorio	$ 450	2002	_____
69.	Podadora de césped	$1099	1996	_____
70.	Cachorro producto de cruza	$ 250	1998	_____



Resuelva cada uno de los siguientes problemas relacionados con el interés.

71. ***Cálculo del valor presente de la compra futura de equipo*** La secuencia genética humana es un campo de investigación importante de la biotecnología. PE Biosystems rentó 300 de sus máquinas secuenciadoras a una compañía hermana, Celera. Si Celera fuera a ganar el 7% sobre el dinero invertido, capitalizable trimestralmente, ¿qué cantidad total necesitaría invertir para comprar esas máquinas 18 meses después a un precio de $300,000 cada una? (*Fuente: Forbes*, 21 de febrero de 2000, p. 102).

72. ***Cálculo del valor presente de la compra futura de un inmueble*** Una pareja de California está vendiendo su pequeña granja lechera a un desarrollador inmobiliario, pero desean diferir el recibo del dinero hasta 2 años a partir de ahora, cuando se encuentren en una categoría fiscal más baja. Calcule la suma total que el desarrollador debe depositar ahora, al 5% capitalizable trimestralmente, de modo que haya lo suficiente disponible para pagar a la pareja $1,450,000 en 2 años.

11.2 CRÉDITO AL CONSUMO

Tipos de créditos al consumo • Préstamos a plazos • Préstamos revolventes

Tipos de créditos al consumo

Los **créditos al consumo** se refieren al dinero que se solicita en préstamo para financiar la compra de automóviles, muebles, enseres domésticos, joyería, productos electrónicos y muchos otros bienes. Técnicamente, los **préstamos hipotecarios**, que son préstamos para financiar la compra de bienes inmuebles, también son créditos al consumo, pero normalmente implican cantidades mucho más grandes y periodos más largos para liquidar el crédito.

En esta sección analizaremos dos clases de créditos al consumo. El primer tipo, **préstamo a plazos** o crédito **al vencimiento**, implica solicitar en préstamo una cantidad acordada que se otorga por adelantado y se paga con una serie de pagos iguales hasta terminar de liquidar el crédito. Los muebles, electrodomésticos y automóviles comúnmente se financian a través de un crédito a plazos o al vencimiento.

En el segundo tipo de créditos de consumo, los **préstamos revolventes**, o crédito de **final abierto**, no existe un número fijo de pagos a plazos (el consumidor continúa pagando hasta que se liquida el saldo). En los créditos revolventes, con frecuencia se otorga crédito adicional antes de que se termine de pagar la cantidad inicial. Ejemplos de crédito revolvente incluyen las tarjetas de crédito de las tiendas departamentales y las tarjetas de crédito bancarias como las de MasterCard y VISA.



El **endeudamiento con tarjetas de crédito entre los estudiantes** ha elevado crecientemente la preocupación de los legisladores, los directivos de las universidades y los grupos de apoyo al consumidor. Como resultado, cientos de universidades han prohibido en sus planteles la promoción de las tarjetas de crédito. Por otro lado, nuevas leyes federales instauraron nuevas regulaciones que entraron en vigor en 2010.

Una investigación de 2010 realizada por Sally Mae (una compañía de financiamiento en universidades) determinó el adeudo promedio en tarjetas de crédito de un estudiante en $3,173. El Centro Nacional de Estadísticas de la Educación informó que el adeudo promedio total entre estudiantes avanzados (incluyendo tarjetas de crédito y préstamos privados y federales) era de $27,803. (*Fuente:* www.thelantern.com, periódico estudiantil de la Universidad Estatal de Ohio).

Préstamos a plazos

Los préstamos a plazos, establecidos como créditos al vencimiento, se negocian a menudo con **un interés adicional**. Esto significa que el interés se calcula mediante la fórmula de interés simple $I = Prt$, y simplemente "se agrega" esta cantidad de interés al principal solicitado en préstamo para obtener el adeudo total (o cantidad a pagar).

$$\begin{aligned}\text{Cantidad a pagar} &= \underset{\text{Cantidad solicitada en préstamo}}{P} + \underset{\text{Adeudo de interés}}{Prt} \\ &= P(1 + rt)\end{aligned}$$

Luego se divide el adeudo total entre el número de pagos (normalmente mensuales) que se realizarán durante t años.

EJEMPLO 1 Pago de un préstamo con interés adicional

Mary Kaye Leonard compró muebles y electrodomésticos por un valor de $5400 para su primer apartamento. Ella hizo un pago inicial de $1100 y estuvo de acuerdo en pagar el 7% adicional durante 2 años. Determine

a) la cantidad total a pagar,

b) el pago mensual, y

c) el costo total de las compras, incluyendo cargos financieros.

SOLUCIÓN

a) Monto financiado $= \underset{\text{Monto de la compra}}{\$5400} - \underset{\text{Pago inicial}}{\$1100}$

$= \$4300$

Monto a pagar $= P(1 + rt)$ Fórmula del valor futuro

$= \$4300(1 + 0.07 \cdot 2)$ Se sustituyen los valores conocidos.

$= \$4902$ Se efectúan los cálculos.

$$\textbf{b) Pago mensual} = \frac{\$4902}{24} \quad \begin{array}{l}\leftarrow \text{Cantidad a pagar} \\ \leftarrow \text{Número de pagos}\end{array}$$
$$= \$204.25$$

$$\textbf{c) Costo total de las compras} = \underset{\text{Pago inicial}}{\$1100} + \underset{\text{Pago por el préstamo}}{\$4902}$$
$$= \$6002$$

Mary Kaye terminará pagando $6002, lo cual es el 11.1% más que el valor total. ▮▮▮

Observe que el importe pagado en el **ejemplo 1**, $P(1+rt)$, es el mismo que el importe final A en una cuenta de ahorros que paga una tasa r de interés simple durante t años. (Véase la **sección 11.1**). Pero en el caso de ahorros, el banco retiene todo el dinero del cliente durante el periodo completo. En el **ejemplo 1**, Mary Kaye no mantuvo el monto del principal completo por el total del periodo. Ella lo pagó en 24 pagos mensuales. El 7% de interés adicional se convierte en una tasa mucho más alta "de interés anual real".

Préstamos revolventes

En una cuenta típica de una tienda departamental, o de una tarjeta bancaria, el límite del crédito se establece inicialmente, y el consumidor puede hacer muchas compras durante un mes (hasta el límite del crédito). El pago mensual requerido puede variar de un mínimo (el cual depende del saldo de la cuenta) hasta el saldo completo.

Para las compras realizadas en una tienda o con otro minorista, el cliente puede autorizar la suma del precio de la compra a su cuenta firmando un "voucher", o quizá con una firma electrónica sobre un dispositivo electrónico auxiliar personal. La autorización también se puede obtener por teléfono o por Internet para pedidos por correo y otros gastos.

Al final de cada periodo de corte (normalmente una vez al mes), los clientes reciben un **estado de cuenta detallado**, una lista de las compras y el efectivo utilizado, el saldo total que se adeuda, el pago mínimo requerido y quizás alguna otra información de la cuenta. Los cargos adicionales al efectivo utilizado y los precios de los artículos comprados se conocen como **cargos financieros**. Los cargos financieros pueden incluir el interés, una cuota anual, la cobertura de un seguro de crédito, el cargo de un pago extemporáneo o cargos de envío.

La mayoría de los planes de crédito revolvente calculan los cargos financieros con el **método del saldo promedio diario**. El saldo promedio diario es la *media ponderada* (véase la **sección 10.2**) de las diferentes cantidades de crédito utilizado en distintos momentos del periodo de facturación, considerando como factor de ponderación el número de días en que se aplicó cada disposición de crédito.

EJEMPLO 2 Uso del método del saldo promedio diario para cargos en tarjeta de crédito



El aprendizaje de la siguiente rima le puede ayudar en problemas como el del **ejemplo 2**.

Treinta días tiene septiembre, abril, junio y noviembre. El resto tiene 31, salvo febrero que tiene 28 días normalmente, y 29 en cada año bisiesto.

A continuación se muestra la actividad de la tarjeta de crédito Master Card de Jessica Lasda en un periodo de facturación. Si el saldo anterior (del 3 de marzo) fue de $209.46, y el banco cobra el 1.3% mensual sobre el saldo promedio diario, obtenga

a) el saldo promedio diario para la próxima facturación (3 de abril),

b) los cargos financieros que aparecerán en la facturación del 3 de abril, y

c) el saldo de la cuenta al 3 de abril.

3 de marzo	Fecha de facturación	
12 de marzo	Pago	$50.00
17 de marzo	Ropa	$28.46
20 de marzo	Pedido por correo	$31.22
1 de abril	Refacciones de automóvil	$59.10

SOLUCIÓN

a) Primero elabore una tabla que muestre la fecha inicial del periodo de facturación y las fechas de todas las transacciones en el periodo de facturación. Junto con cada una de estas, calcule el saldo a esa fecha.

Fecha	Saldo a la fecha
3 de marzo	\$209.46
12 de marzo	\$209.46 − \$50 = \$159.46
17 de marzo	\$159.46 + \$28.46 = \$187.92
20 de marzo	\$187.92 + \$31.22 = \$219.14
1 de abril	\$219.14 + \$59.10 = \$278.24

Luego, tabule las cifras de los diferentes saldos, junto con el número de días hasta que el saldo cambia. Multiplique cada monto del saldo por el número de días. La suma de estos productos nos da la "suma de los saldos diarios".

Fecha	Saldo a la fecha	Número de días hasta que cambia el saldo	(Saldo a la fecha) · (Número de días)
3 de marzo	\$209.46	9	\$1885.14
12 de marzo	\$159.46	5	\$ 797.30
17 de marzo	\$187.92	3	\$ 563.76
20 de marzo	\$219.14	12	\$2629.68
1 de abril	\$278.24	2	\$ 556.48
		Totales: 31	\$6432.36

$$\text{Saldo promedio diario} = \frac{\text{Suma de saldos diarios}}{\text{Días en el periodo de facturación}} = \frac{\$6432.36}{31} = \$207.50$$

Jessica pagará cargos financieros con base en el saldo promedio diario de \$207.50.

b) Los cargos financieros de la facturación al 3 de abril serán

$$1.3\% \text{ de } \$207.50 = 0.013 \cdot \$207.50 \qquad 1.3\% = 1.3 \times 0.01 = 0.013$$
$$= \$2.70.$$

c) El saldo de la cuenta en la facturación al 3 de abril será el último saldo de la tarjeta a la fecha de corte anterior más los cargos financieros.

$$\$278.24 + \$2.70 = \$280.94$$ ■■■



Otras características de los créditos revolventes pueden ser tan importantes como el interés. Por ejemplo:

1. ¿Existe un cargo anual? Si es así, ¿a cuánto asciende?
2. ¿Existe una tarifa por "apertura"? Si es así, ¿por cuánto tiempo estará vigente?
3. ¿Existen otros incentivos, como descuentos, créditos en ciertas compras, millas "gratis" en aerolíneas, o devolución de intereses por el uso a largo plazo?

Las tarjetas de crédito y otros préstamos revolventes son créditos relativamente costosos. La tasa mensual del 1.3% en el **ejemplo 2** es típica y es equivalente a una tasa anual del 15.6%. Una tarjeta individual (como VISA o MasterCard), sin embargo, puede tener grandes ventajas conforme más comercios la acepten, y se elimina la necesidad de llevar efectivo o de expedir cheques.

Una práctica prudente, si es posible, es *no* arrastrar un saldo de un mes a otro, sino pagar el nuevo saldo completo a la fecha de vencimiento de cada mes. Como las compras realizadas durante el mes no se facturan sino hasta la siguiente fecha de corte, y la fecha límite de pago se fija para 20 días o más después de la fecha de corte, los artículos se pueden cargar con frecuencia a la tarjeta sin que el usuario tenga que pagar por ellos por aproximadamente dos meses. Para obtener esta forma de "crédito libre", resista la tentación de comprar más de lo que puede pagar en la próxima fecha de corte.

11.2 EJERCICIOS

Redondee todas las respuestas monetarias al centavo más próximo, a menos que se indique otra disposición. Suponga que a menos que se especifique de otro modo, hay 12 meses en un año, 30 días en un mes, y 365 días en un año.

Financiamiento de la compra de electrodomésticos *Krishna Gil compró electrodomésticos que costaron $3450 en una tienda que cobra el 8% de interés adicional a la compra. Ella realizó un pago inicial de $500 y acordó pagos mensuales durante dos años.*

1. Obtenga el monto total financiado.
2. Obtenga el interés total que habrá que pagar.
3. Obtenga el monto total que se pagará.
4. Obtenga el pago mensual.
5. Obtenga el costo total de los electrodomésticos más el interés.

Financiamiento de la compra de un automóvil nuevo *Suponga que usted desea comprar un automóvil nuevo que cuesta $16,500. No tiene efectivo (solo su auto actual), el cual tiene un valor de $3000 para entregarlo como parte del pago.*

6. ¿Cuánto necesita de financiamiento para comprar el automóvil nuevo?
7. El concesionario dice que la tasa es del 9% de interés adicional a tres años. Obtenga el interés total.
8. Determine la cantidad total a pagar.
9. Calcule el pago mensual.
10. Determine el costo total del automóvil nuevo más el interés.

En los ejercicios 11 a 16, use el método del interés para obtener el interés total y el pago mensual.

	Monto del préstamo	Plazo del préstamo	Tasa de interés
11.	$4500	3 años	9%
12.	$2700	2 años	8%
13.	$ 750	18 meses	7.4%
14.	$2450	30 meses	9.2%
15.	$ 535	16 meses	11.1%
16.	$ 798	29 meses	10.3%

Resuelva los siguientes problemas.

17. ***Determinación del pago mensual de un préstamo para muebles con interés adicional*** Los Giordano compran muebles para su casa por un valor de $8500. Realizan un pago inicial de $3000. La tienda cobra el 10% de interés adicional. Los Giordano pagarán los muebles en 30 pagos mensuales ($2\frac{1}{2}$ años). Calcule el pago mensual.
18. ***Determinación del pago mensual de un préstamo para automóvil con interés adicional*** Obtenga el pago mensual requerido para pagar el préstamo por la compra de un automóvil de $9780 durante tres años si la tasa de interés adicional es del 9.3%.
19. ***Determinación del pago mensual de un préstamo para electrónicos con interés adicional*** El precio total de compra de un nuevo sistema de entretenimiento en casa es de $14,240. Si el pago inicial es de $2900, y el saldo es financiado durante 48 meses al 10% de interés adicional, ¿cuál es el pago mensual?
20. ***Determinación del pago mensual de un préstamo con interés adicional*** ¿Cuáles son los pagos mensuales que debe realizar Donna de Simone sobre un préstamo de $1680 para un periodo de 10 meses si se cobra el 9% de interés adicional?
21. ***Determinación del monto solicitado en préstamo para la compra de un automóvil con interés adicional*** Joshua Eurich extravió el contrato de venta de su automóvil y no puede recordar el monto financiado originalmente. Él sabe que la tasa de interés adicional es del 9.8%, y el préstamo requería un total de 48 pagos mensuales de $314.65 cada uno. ¿Cuánto solicitó en préstamo Joshua (redondeando al dólar más próximo)?
22. ***Determinación de una tasa de interés adicional*** Susan Dratch realiza pagos mensuales de $207.31 para liquidar un préstamo por $6400 en $3\frac{1}{2}$ años. ¿Cuál es su tasa de interés adicional (redondeando a la décima más próxima del porcentaje)?
23. ***Determinación del plazo de un préstamo con interés adicional*** ¿Cuánto tiempo (en años) tardará Michael Garbin en liquidar un préstamo de $8000 con pagos mensuales de $172.44 si la tasa de interés adicional es del 9.2%?
24. ***Determinación del número de pagos de un préstamo con interés adicional*** ¿Cuántos pagos mensuales debe hacer Jawann para liquidar un préstamo de $10,000 si paga $417.92 mensuales y la tasa del interés adicional es del 10.15%?

Cálculo de cargos financieros *Calcule los cargos financieros de cada tarjeta de crédito. Suponga que el interés se calcula sobre el saldo promedio diario de la tarjeta.*

	Saldo promedio diario	Tasa de interés mensual
25.	$ 249.94	1.4%
26.	$ 350.75	1.5%
27.	$ 419.95	1.38%
28.	$ 450.21	1.26%
29.	$1073.40	1.425%
30.	$1320.42	1.375%

Cálculo de cargos financieros y saldos de la cuenta usando el método del saldo promedio diario *Para cada tarjeta de crédito, suponga que hay un mes entre las fechas de facturación (con el número adecuado de días) y un interés del* 1.3% *mensual sobre el saldo promedio diario. Obtenga* **a)** *el saldo promedio diario,* **b)** *los cargos financieros mensuales, y* **c)** *el saldo de la tarjeta para la próxima facturación.*

31. Saldo anterior: $728.36

9 de mayo	Fecha de facturación	
17 de mayo	Pago	$200
30 de mayo	Comida	$ 46.11
3 de junio	Boletos del teatro	$ 64.50

32. Saldo anterior: $514.79

27 de enero	Fecha de facturación	
9 de febrero	Dulces	$11.08
13 de febrero	Devoluciones	$26.54
20 de febrero	Pago	$59
25 de febrero	Reparaciones	$71.19

33. Saldo anterior: $462.42

11 de junio	Fecha de facturación	
15 de junio	Devoluciones	$106.45
20 de junio	Joyería	$115.73
24 de junio	Renta de automóvil	$ 74.19
3 de julio	Pago	$115
6 de julio	Flores	$ 68.49

34. Saldo anterior: $983.25

17 de agosto	Fecha de facturación	
21 de agosto	Pedido por correo	$ 14.92
23 de agosto	Devoluciones	$ 25.41
27 de agosto	Bebidas	$ 31.82
31 de agosto	Pago	$108
9 de septiembre	Devoluciones	$ 71.14
11 de septiembre	Boletos de concierto	$110
14 de septiembre	Retiro en efectivo	$100

Cálculo de cargos financieros *Suponga que no se hacen compras o devoluciones en los ejercicios 35 y 36.*

35. Al principio de un periodo de facturación de 31 días, Sandra Lazzaro tiene un saldo sin pagar de $720 en su tarjeta de crédito. Tres días antes del final del periodo de facturación, paga $600. Obtenga los cargos financieros al 1.4% mensual usando el método del saldo promedio diario.

36. La factura de VISA de Anthony Marsella de fecha 14 de abril muestra un saldo sin pagar de $1070. Cinco días antes del 14 de mayo, el final del periodo de facturación, Anthony realiza un pago de $900. Calcule sus cargos financieros al 1.32% mensual usando el método del saldo promedio diario.

Análisis de una oferta de "90 días como efectivo" *Una versión de "90 días como efectivo" fue ofrecida por una "tarjeta de compras", la cual establecía un cargo del* 1.3167% *de interés mensual sobre el saldo de la tarjeta. Los intereses se suman al saldo cada mes, volviéndolos parte del saldo sobre el cual se calcula el interés el mes siguiente. Si usted liquida el pago de la compra original dentro de tres meses, se cancelan todos los cargos por interés. Si no, usted es responsable de todos los intereses. Suponga que usted compra alfombras por un valor de* $2900 *con este plan.*

37. Obtenga el interés adicional al saldo de la cuenta al final de

- ***a)*** el primer mes
- ***b)*** el segundo mes
- ***c)*** el tercer mes

38. Suponga que usted liquida la cuenta 1 día después (3 meses más un día). ¿Cuánto debe pagar de interés total? (No incluya el interés del día extra).

39. Considerando los tres meses como $\frac{1}{4}$ de año, determine la tasa de interés simple equivalente de esta compra (redondeando a la décima más próxima del porcentaje).

Diversos cargos de una tarjeta de crédito bancaria *El banco de la tarjeta de Beth Johnson cobra el* 1.1% *mensual sobre el saldo promedio diario, así como los siguientes cargos especiales:*

Comisión por disposición en efectivo:	2% (*no menos de* $2 *ni más de* $10)
Comisión por pago atrasado:	$15
Comisión por sobregiro:	$5

En el mes de junio, el saldo promedio diario de Beth era de $1846. *Estaba de vacaciones durante el mes y no realizó el pago de su tarjeta a tiempo, lo cual dio por resultado un pago extemporáneo y generó cargos acumulados que rebasaron su límite de crédito. También usó su tarjeta para hacer seis disposiciones en efectivo por* $100 *mientras estaba de vacaciones. Determine lo siguiente con base en las transacciones del mes de la tarjeta.*

40. cargos por interés a la cuenta

41. tarifas especiales cobradas a la cuenta

Escriba su respuesta para cada uno de los siguientes problemas.

42. ¿Es posible usar una tarjeta de crédito bancaria para sus compras sin pagar nada por el crédito? Si es así, explique cómo.

43. Obtenga solicitudes o folletos descriptivos de varios programas de diferentes tarjetas bancarias, compare sus características (incluyendo el texto escrito en letras pequeñitas), y explique cuál sería la mejor para usted y por qué.

44. Investigue y explique la diferencia, si existe, entre una tarjeta de "crédito" y una tarjeta de "débito".

45. Muchas tarjetas de crédito ofrecen la opción de comprar un seguro de cobertura del crédito, el cual haría sus pagos mensuales si usted sufre una discapacidad que le imposibilite trabajar, y/o liquidaría el saldo de la cuenta si usted muere. Investigue los detalles en al menos una de estas ofertas y comente por qué aceptaría o rechazaría la oferta.

46. Elabore una lista de "incentivos especiales" ofrecidos por tarjetas de crédito bancarias con las que esté familiarizado, y describa brevemente las ventajas y desventajas de cada una.

47. Un banco ofreció una tarjeta con una "tasa de introducción baja" del 5.9%, con vigencia hasta el final del año. Y además, podría recibir la devolución de un porcentaje (¡hasta el 100%!) de todos los intereses pagados, como se muestra en la tabla.

Usa su tarjeta por:	2 años	5 años	10 años	15 años	20 años
Devolución:	10%	25%	50%	75%	100%

(Tan pronto como usted recibe un reembolso, el tiempo comienza a correr nuevamente). Como usted puede reclamar todos los pagos de interés, ¿es esta tarjeta un buen trato? Explique.

48. Recuerde una experiencia de compra de un automóvil que haya tenido, o visite un concesionario y hable con un vendedor. Describa el procedimiento para comprar un automóvil a crédito.

Comparación de tarjetas de crédito bancarias *Dorothy Laymon está considerando dos opciones de tarjetas bancarias que son iguales en todos los aspectos, excepto por lo siguiente:*

El banco A no cobra comisión anual y cobra un interés mensual del 1.18% *sobre el saldo insoluto.*

El banco B cobra una comisión anual de $30 *e intereses mensuales del* 1.01% *sobre el saldo insoluto.*

A partir de sus registros, Dorothy se encontró con que su saldo insoluto de un mes a otro es bastante consistente y promedia $900.

49. Estime el costo total anual por el uso de la tarjeta si elige la tarjeta del

a) banco A.

b) banco B.

50. ¿Cuál tarjeta es su mejor opción?

11.3 TRANSPARENCIA EN EL CRÉDITO

Tasa de porcentaje anual (TPA) • Interés no devengado

En el sitio www.ftc.gov existe mucha **información para el consumidor** de la Federal Trade Commission. Por ejemplo, usted puede averiguar acerca de préstamos abusivos, crédito, robo de identidad, inversiones, privacidad y muchos otros temas de interés para el consumidor. Los consumidores pueden presentar quejas por fraudes en este sitio usando un formato en línea para tal efecto.

Tasa de porcentaje anual (TPA)

La Ley de Protección al Consumidor de Crédito (Consumer Credit Protection Act), que fue aprobada en 1968, se conoce comúnmente como **Ley de Veracidad en los Préstamos**. En esta sección analizaremos los asuntos principales cubiertos por dicha ley:

1. ¿Cómo podemos averiguar la tasa de interés anual real que cobra un prestamista?
2. ¿Qué monto de cargos financieros tenemos derecho a ahorrarnos si decidimos liquidar un préstamo anticipadamente?

La pregunta 1 surge porque los prestamistas calculaban y describían el interés que cobraban de varias maneras. Por ejemplo, ¿cómo se compara el 1.5% mensual de Sears con el 9% anual de interés adicional de una mueblería? La Ley de Veracidad en los Préstamos estandarizó la llamada tasa de interés anual real, o **tasa de porcentaje anual**, representada comúnmente como **TPA** (o en ocasiones como APR, por las siglas de *annual percentage rate*). Todos los vendedores (concesionarios de automóviles, tiendas, bancos, agencias de seguros, compañías de tarjetas de crédito y similares) deben revelar la TPA cuando se les solicita, y el contrato por escrito debe establecer la TPA en todos los casos. Esto facilita al prestatario comparar más fácilmente los costos verdaderos de los diferentes préstamos.

Teóricamente, un prestatario no necesita calcular la TPA, pero es posible verificar el valor establecido por el prestamista. Como las fórmulas para obtener la TPA son bastante complicadas, es mucho más fácil usar la tabla que elaboró el Banco de la Reserva Federal. En la **tabla 5** de la siguiente página se muestra una versión abreviada, la cual identifica los valores de la TPA aproximando al medio punto porcentual más cercano, del 8 al 14%, para préstamos que requieren pagos *mensuales*, y los plazos más comunes de préstamos de consumo de 6 a 60 meses.

La **tabla 5** relaciona las tres siguientes cantidades.

TPA = tasa de interés anual real (mostrada a lo largo de la parte superior)

n = número total de pagos mensuales programados (mostrados en la parte izquierda hacia abajo)

h = cargo financiero por cada $100 del monto financiado (mostrado en el cuerpo de la tabla).

Tabla 5 Tasa de porcentaje anual (TPA) para préstamos con pago mensual

Número de pagos mensuales (n)	Tasa de porcentaje anual (TPA)												
	8.0%	8.5%	9.0%	9.5%	10.0%	10.5%	11.0%	11.5%	12.0%	12.5%	13.0%	13.5%	14.0%
	(Cargo financiero por cada $100 del monto financiado) (h)												
6	$2.35	$2.49	$2.64	$2.79	$2.94	$3.08	$3.23	$3.38	$3.53	$3.68	$3.83	$3.97	$4.12
12	4.39	4.66	4.94	5.22	5.50	5.78	6.06	6.34	6.62	6.90	7.18	7.46	7.74
18	6.45	6.86	7.28	7.69	8.10	8.52	8.93	9.35	9.77	10.19	10.61	11.03	11.45
24	8.55	9.09	9.64	10.19	10.75	11.30	11.86	12.42	12.98	13.54	14.10	14.66	15.23
30	10.66	11.35	12.04	12.74	13.43	14.13	14.83	15.54	16.24	16.95	17.66	18.38	19.10
36	12.81	13.64	14.48	15.32	16.16	17.01	17.86	18.71	19.57	20.43	21.30	22.17	23.04
48	17.18	18.31	19.45	20.59	21.74	22.90	24.06	25.23	26.40	27.58	28.77	29.97	31.17
60	21.66	23.10	24.55	26.01	27.48	28.96	30.45	31.96	33.47	34.99	36.52	38.06	39.61

EJEMPLO 1 Cálculo de la TPA para un préstamo con intereses agregados al principal

Recuerde que Mary Kaye (en el **ejemplo 1** de la **sección 11.2**) realizó un pago inicial de $1100 por una compra de $5400 y estuvo de acuerdo en pagar el saldo al 7% adicional durante dos años. Obtenga la TPA del préstamo.

SOLUCIÓN

Como vimos antes, la cantidad total financiada fue de

$$\underset{\text{Precio de la compra}}{\$5400} - \underset{\text{Pago inicial}}{\$1100} = \$4300.$$

El cargo financiero (interés) fue de

$$I = Prt = \$4300 \cdot 0.07 \cdot 2 = \$602.$$

A continuación, se obtiene el cargo financiero por cada $100 del monto financiado. Para hacer esto, se divide el cargo financiero entre la cantidad financiada, y luego se multiplica por $100.

$$\left(\begin{array}{c}\text{Cargo financiero por}\\ \text{cada \$100 financiados}\end{array}\right) = \frac{\text{Cargo financiero}}{\text{Monto financiado}} \cdot \$100$$

$$= \frac{\$602}{\$4300} \cdot \$100, \quad \text{o} \quad \$14$$

Esta cantidad, $14, representa h, el cargo financiero por cada $100 del monto financiado. Como el préstamo se va a pagar a lo largo de 24 meses ($n = 24$), observe la fila de la **tabla 5** del "pago a 24 meses". Luego observe a lo largo de la tabla identificando el valor de h más cercano a $14, el cual es $14.10. Partiendo de ese punto, lea hacia arriba de la tabla para identificar la TPA, 13.0% (redondeando al medio punto porcentual más cercano). En este caso, el 7% de interés adicional es equivalente a una TPA del 13.0%. ■■■

```
5400-1100
                    4300
4300*.07*2
                     602
(602/4300)*100
                      14
```

Estos son los cálculos requeridos en la solución del **ejemplo 1**.

EJEMPLO 2 Cálculo de la TPA de un préstamo para la compra de un automóvil

Después de un pago inicial de su nuevo automóvil, Yvette Freeman todavía debe $7454. Ella estuvo de acuerdo en pagar el saldo en 48 pagos mensuales de $185 cada uno. ¿Cuál es la TPA de su préstamo?

SOLUCIÓN

Primero se calcula el cargo financiero.

$$\text{Cargo financiero} = \underset{\text{Total de pagos}}{48} \cdot \$185 - \underset{\text{Monto financiado}}{\$7454}$$
$$= \$1426$$

Primero se multiplica, luego se resta.

Ahora se obtiene el cargo financiero por cada $100 financiados como en el **ejemplo 1**.

$$\left(\begin{matrix}\text{Cargo financiero por} \\ \text{cada \$100 financiados}\end{matrix}\right) = \frac{\text{Cargo financiero}}{\text{Monto financiado}} \cdot \$100$$
$$= \frac{\$1426}{\$7454} \cdot \$100, \quad \text{o} \quad \$19.13$$

Identifique la fila de "48 pagos" en la **tabla 5**, lea a lo largo de la tabla para obtener el número más cercano a 19.13, el cual es 19.45. A partir de aquí lea hacia arriba para encontrar la TPA, que es 9.0%. ■■■

```
48*185-7454
                1426.00
(1426/7454)*100
                  19.13
```

Estos son los cálculos requeridos en la solución del **ejemplo 2**.

Interés no devengado

La pregunta 2 al principio de la sección surge cuando un prestatario decide liquidar un préstamo a plazos de manera anticipada al vencimiento. En este caso, resulta que el prestamista no presta el dinero al plazo acordado, de modo que no "gana" realmente el total del cargo financiero acordado originalmente.

Si un crédito se liquida anticipadamente, el monto por el cual se reduce el cargo financiero original se conoce como **interés no devengado**. Analizaremos dos métodos comunes para calcular el interés no devengado: el **método actuarial** y la **regla del 78**. La Ley de Veracidad en los Préstamos exige que el método de cálculo de este reembolso (o reducción) del cargo financiero se dé a conocer en el momento en que entra en vigor el crédito. Sin importar el método que se use, el prestatario no puede, de hecho, recuperar todo el interés no devengado, puesto que el prestamista está autorizado a imponer una **penalización por pago anticipado** para recuperar ciertos costos. La intención del prestamista de imponer esta penalización en el caso de un pago anticipado también debe revelarse al inicio del crédito.

Los derechos y las responsabilidades se aplican a todas las cuentas de crédito, y el consumidor debe leer todas las condiciones establecidas por el prestamista. La Ley de Facturación Imparcial de Crédito (*Fair Credit Billing Act*) y la Ley de Informes Imparciales de Crédito (*Fair Credit Reporting Act*) regulan, entre otros asuntos, los procedimientos de facturación y solución de controversias, y la divulgación y solución de controversias acerca de la información personal de los consumidores.

Cuando un individuo en Estados Unidos solicita una tarjeta de crédito, un préstamo personal, un seguro o un empleo, entonces la información acerca de dónde trabaja o vive, cómo paga sus cuentas, y si ha sido demandado, arrestado o se ha declarado en bancarrota, aparece en los archivos de las Agencias de Reportes del Consumidor (Consumer Reporting Agencies, CRA), las cuales venden esa información a empresas de crédito, empleadores, aseguradoras y otros negocios.

Para información más detallada sobre este y muchos otros temas relacionados con el consumidor, visite el sitio Web www.consumeraction.gov.

Interés no devengado: Método actuarial

En un préstamo a plazos que requiere pagos *mensuales*, el cual se paga con anticipación a la fecha establecida,

R = pago mensual normal,

k = número restante de pagos programados (*después* del pago actual), y

h = cargo financiero por cada $100, correspondiente a un préstamo con la misma TPA y k pagos mensuales.

Entonces, el **interés no devengado, u**, se calcula como sigue.

$$u = kR\left(\frac{h}{\$100 + h}\right)$$

Una vez que se calcula el interés no devengado u (por cualquier método), el monto requerido para pagar por anticipado el préstamo se calcula fácilmente. Se integra con el pago regular actual adeudado, más k pagos adicionales futuros, menos el interés no devengado.

Monto de la liquidación

Un préstamo a plazos, que requiere R pagos mensuales constantes se puede liquidar anticipadamente, junto con el pago actual. Si el préstamo original incluía k pagos adicionales programados (después del pago actual), y el interés no devengado es u, entonces, sin considerar cualquier posible penalización, el **monto a liquidar** se calcula como sigue.

$$\textbf{Monto a liquidar} = (k+1)R - u$$

EJEMPLO 3 Cálculo del monto de liquidación mediante el método actuarial

Yvette Freeman obtuvo un ingreso inesperado y decidió liquidar el préstamo de su automóvil del **ejemplo 2** al final de tres años, en lugar de pagar durante los cuatro años pactados originalmente.

a) Determine el interés no devengado (el monto que ahorrará por liquidar el préstamo en forma anticipada).

b) Determine la "cantidad a liquidar" (esto es, la cantidad requerida para saldar el préstamo al cabo de tres años).

SOLUCIÓN

a) Del **ejemplo 2**, recuerde que $R = \$185$ y la TPA $= 9.0\%$. El pago actual es el pago número 36, de modo que $k = 48 - 36 = 12$. Use la **tabla 5**, con 12 pagos y TPA $= 9.0\%$, para obtener $h = \$4.94$. Luego use la fórmula del método actuarial.

$$u = 12 \cdot \$185\left(\frac{\$4.94}{\$100 + \$4.94}\right) = \$104.51$$

Por este método, Yvette ahorrará \$104.51 de intereses por liquidar el crédito en forma anticipada.

```
12*185(4.94/(100+4.94))
                  104.51
(12+1)*185-104.51
                 2300.49
```

Estos son los cálculos requeridos en la solución del **ejemplo 3**.

b) El monto a liquidar se obtiene aplicando la fórmula adecuada.

$$\text{Monto a liquidar} = (12+1)\$185 - \$104.51 = \$2300.49$$

El monto a liquidar requerido al final de los tres años es \$2300.49. ■■■

Como el método actuarial se basa en el valor de la TPA, quizás es el mejor método. Sin embargo, algunos prestamistas todavía usan la **regla del 78**.

Interés no devengado: Regla del 78

Para un préstamo al vencimiento que requiere pagos *mensuales*, que se liquida con anticipación al vencimiento originalmente programado, consideremos que

F = cargo financiero original,

n = número de pagos originalmente programados, y

k = número remanente de pagos programados (*después* del pago actual).

Entonces, el **interés no devengado, u**, se calcula como sigue.

$$u = \frac{k(k+1)}{n(n+1)} \cdot F$$

EJEMPLO 4 Cálculo del monto a liquidar anticipadamente mediante la regla del 78

Suponga una vez más que el préstamo del **ejemplo 2** se liquida anticipadamente en el pago mensual número 36. Sin embargo, esta vez, en lugar del método actuarial, use la regla del 78 para calcular:

a) el interés no devengado, y ***b)*** el monto a liquidar.

SOLUCIÓN

a) Partiendo del **ejemplo 2**, el cargo financiero original es $F = \$1426$. Asimismo, $n = 48$ y $k = 12$.

$$u = \frac{12(12+1)}{48(48+1)} \cdot \$1426 = \$94.58 \quad \text{Regla del 78}$$

De acuerdo con la regla del 78, Yvette ahorrará \$94.58 de interés, lo cual es \$9.93 *menos* que lo ahorrado según el método actuarial.

```
(12*(12+1))/(48(48+1))*1426
                      94.58
(12+1)*185-94.58
                    2310.42
```

Estos son los cálculos requeridos en la solución del **ejemplo 4**.

b) Cantidad a liquidar $= (12+1)\$185 - \$94.58 = \$2310.42$

La cantidad a liquidar es \$2310.42, la cual es \$9.93 *más* que la cantidad a liquidar de acuerdo con el método actuarial del **ejemplo 3**. ■■■

Cuando se introdujo por primera vez la regla del 78 en la ley financiera (por la Legislatura de Indiana en 1935), los plazos de los préstamos eran de 1 año o menos, las tasas de interés eran relativamente bajas, y los montos de los préstamos eran menores de lo que tienden a ser en la actualidad. Por estas razones, la regla del 78 era razonablemente precisa. Sin embargo, actualmente, con tablas muy exactas, y/o calculadoras de fácil acceso, la regla del 78 se usa con mucho menor frecuencia que antes.

Suponga que deseamos calcular con exactitud un interés no devengado (de modo que no confiamos en la regla del 78), pero el valor de la TPA, o el número de pagos programados, o el número de pagos remanentes (o al menos uno de los tres) no está incluido en la **tabla 5**. ¿Entonces? En realidad, con el método actuarial, podemos evaluar h (el cargo financiero por cada \$100) usando la misma fórmula que se usó para generar la **tabla 5**.

Cargo financiero por cada $100 financiados

Si un préstamo a plazos requiere n pagos mensuales iguales y la TPA representa la tasa de interés anual real del préstamo (expresada en decimales), entonces h, el **cargo financiero por cada \$100 financiados**, se calcula como sigue.

$$h = \frac{n \cdot \frac{\text{TPA}}{12} \cdot \$100}{1 - \left(1 + \frac{\text{TPA}}{12}\right)^{-n}} - \$100$$

EJEMPLO 5 Cálculo del interés no devengado y el monto de liquidación anticipada

Mark Foss solicitó un préstamo de \$4000 para comprar el equipo musical de su banda. En el contrato de su préstamo estableció una TPA del 9.8% y 28 pagos mensuales de \$160.39 cada uno. Mark decide pagar el préstamo completo en el decimonoveno pago programado. Determine

a) el interés no devengado, y ***b)*** la cantidad a liquidar.

```
(9*(.098/12)*100)/(1-(1+
 .098/12)^9)-100
                    4.13
9*160.39*4.13/(100+4.13)
                   57.25
```

Estos son los cálculos requeridos en la solución del **ejemplo 5a)**.

SOLUCIÓN

a) Primero se calcula h a partir de la fórmula del cargo financiero.

Recuerde considerar el número de pagos restantes, 28 − 19 = 9, como el valor de n.

$$h = \frac{9\left(\frac{0.098}{12}\right)(\$100)}{1-\left(1+\frac{0.098}{12}\right)^{-9}} - \$100 = \$4.13$$

Luego se usa la fórmula actuarial del interés no devengado.

Pago mensual constante: $R = \$160.39$
Número restante de pagos: $k = 28 - 19 = 9$
Cargo financiero por cada \$100: $h = \$4.13$

$$u = 9 \cdot \$160.39 \cdot \frac{\$4.13}{\$100 + \$4.13} = \$57.25$$

Mark se ahorrará \$57.25 en intereses.

b) Monto a liquidar $= (9+1)(\$160.39) - \$57.25 = \$1546.65.$

Para liquidar el préstamo en el momento de su decimonoveno pago programado, Mark debe pagar \$1546.65. ■■■

11.3 EJERCICIOS

Redondee todas las respuestas monetarias al centavo más próximo, a menos que se dé otra indicación.

Cálculo de la tasa de interés anual real *Calcule la TPA (tasa de interés anual real), redondeando al medio punto porcentual más próximo, de cada uno de los siguientes préstamos.*

	Cantidad financiada	Cargo financiero	Número de pagos mensuales
1.	\$1000	\$75	12
2.	\$1700	\$202	24
3.	\$6600	\$750	30
4.	\$5900	\$1150	48

Determinación del pago mensual *Determine el pago mensual de cada uno de los siguientes préstamos.*

	Precio de compra	Pago inicial	Cargo financiero	Número de pagos mensuales
5.	\$3000	\$500	\$250	24
6.	\$4280	\$450	\$700	36
7.	\$3950	\$300	\$800	48
8.	\$8400	\$2500	\$1300	60

Cálculo de la tasa de interés anual real *Calcule la TPA (tasa de interés anual real), redondeando al medio punto porcentual más próximo, de cada uno de los siguientes préstamos.*

	Precio de compra	Pago inicial	Tasa de interés adicional	Número de pagos
9.	\$4190	\$390	6%	12
10.	\$3250	\$750	7%	36
11.	\$7480	\$2200	5%	18
12.	\$12,800	\$4500	6%	48

Interés no devengado: método actuarial *Cada uno de los siguientes préstamos se pagó antes de la fecha de su vencimiento.* ***a)*** *Obtenga el valor de h a partir de la* **tabla 5**. *Luego,* ***b)*** *use el método actuarial para obtener la cantidad de interés no devengado, y* ***c)*** *obtenga el monto a liquidar.*

	Pago mensual normal	TPA	Número restante de pagos programados después del pago
13.	\$346.70	11.0%	18
14.	\$783.50	8.5%	12
15.	\$595.80	9.5%	6
16.	\$314.50	10.0%	24

Cálculo de cargos financieros y de la tasa de interés anual real *Para cada uno de los siguientes préstamos, obtenga* **a)** *el cargo financiero, y* **b)** *la TPA.*

17. John Lanza obtuvo un financiamiento de $1990 para adquirir una computadora en 24 pagos mensuales de $91.50 cada uno.

18. Jessica Luther compró un remolque para caballos por $5090. Ella realizó un pago inicial de $1240 y pagó el resto con $152.70 mensuales durante $2\frac{1}{2}$ años.

19. Brandon Hight todavía debe $2000 de su nueva podadora después de realizar un pago inicial. Estuvo de acuerdo en efectuar pagos mensuales durante 18 meses al 6% de interés adicional.

20. Alfred Juárez liquidó un préstamo para la compra de un automóvil por $15,000 durante tres años con pagos mensuales de $487.54 cada uno.

Comparación del método actuarial y la regla del 78 para calcular el interés no devengado *Cada uno de los siguientes préstamos se liquidó de forma anticipada. Determine el interés no devengado mediante* **a)** *el método actuarial y* **b)** *la regla del 78.*

	Cantidad financiada	Pagos mensuales constantes	Número total de pagos programados	Número restante de pagos programados después del pago
21.	$3310	$201.85	18	6
22.	$10,230	$227.00	48	12
23.	$29,850	$641.58	60	12
24.	$16,730	$539.82	36	18

Cálculo del interés no devengado mediante el método actuarial *Cada uno de los siguientes préstamos se liquidó por completo antes de la fecha de vencimiento.* **a)** *Obtenga el valor de h a partir de la fórmula adecuada. Luego,* **b)** *use el método actuarial para calcular el monto del interés no devengado, y* **c)** *obtenga el monto a liquidar.*

	Pago mensual constante	TPA	Número restante de pagos programados después del pago
25.	$212	8.6%	4
26.	$575	9.33%	8

Comparación de opciones de préstamos *Laura Kennedy necesita un préstamo de $5000 para pagar los boletos de la temporada de la NBA para su familia. Ella puede solicitar el préstamo a una compañía financiera (al 6.5% de interés adicional durante 3 años) o a una unión de crédito (36 pagos mensuales de $164.50 cada uno). Use esta información en los ejercicios 27 a 30.*

27. Obtenga la TPA (redondeando al medio punto porcentual más próximo) para cada préstamo y determine cuál es la mejor opción para Laura.

28. Laura toma el préstamo de la unión de crédito. En el momento de su trigésimo pago lo liquida. Si la unión de crédito usa la regla del 78 para calcular el interés no devengado, ¿cuánto ahorrará por pagarlo completamente ahora?

29. ¿Cuánto ahorraría Laura de interés si paga completamente en el momento del trigésimo pago, y la unión de crédito usa el método actuarial para calcular el interés no devengado?

30. En las condiciones del **ejercicio 29**, ¿qué cantidad debe saldar Laura por la liquidación de su préstamo?

31. Describa por qué en el **ejemplo 1**, la TPA y la tasa de interés adicional difieren. ¿Cuál es más legítima? ¿Por qué?

Aproximación de la TPA de una tasa adicional *Para convertir una tasa de interés adicional a su TPA correspondiente, algunas personas recomiendan usar la fórmula*

$$TPA = \frac{2n}{n+1} \cdot r,$$

donde r es la tasa de interés adicional, y n es el número total de pagos.

32. Aplique la fórmula proporcionada para calcular la TPA (redondeando al medio punto porcentual más próximo) para el préstamo del **ejemplo 1** ($r = 0.07, n = 24$).

33. Compare el valor de la TPA del **ejercicio 32** con el valor del **ejemplo 1**. ¿A qué conclusión llega?

La regla del 78 con penalización por pago anticipado *Ciertos contratistas de crédito al menudeo eligen la regla del 78 para calcular el interés no devengado e imponer una "penalización por pago anticipado". En caso de cualquier liquidación anticipada a la fecha de vencimiento, cobran un 10% adicional del cargo financiero original. Obtenga el valor mínimo de k (pagos mensuales restantes después de la liquidación) que daría por resultado un ahorro neto en cada uno de los siguientes casos.*

34. 24 pagos programados originalmente.

35. 36 pagos programados originalmente.

36. 48 pagos programados originalmente.

El método actuarial para calcular el interés no devengado supone que, durante la vigencia del crédito, el prestatario está pagando el interés, a la tasa TPA, por el dinero que realmente utiliza. Cuando se contempla la liquidación total junto con el pago actual, considere k pagos futuros aplicados a un préstamo diferente con la misma TPA y un cargo financiero h por cada $100 de ese préstamo. Remítase a la siguiente fórmula.

$$u = kR\left(\frac{h}{\$100 + h}\right)$$

37. Describa con palabras la cantidad representada por

$$\frac{h}{\$100 + h}.$$

38. Describa con palabras la cantidad representada por kR.

39. Explique por qué el producto de las dos cantidades anteriores representa el interés no devengado.

Escriba la respuesta de cada uno de los siguientes ejercicios.

40. ¿Por qué se podría justificar a un prestamista en la imposición de una penalización por pago anticipado?

41. Comente las razones por las que un prestatario desearía liquidar anticipadamente un crédito.

42. Investigue qué agencia gubernamental en su país podría aclarar sus dudas acerca de los créditos contratados. (Cualquier banco o departamento de crédito de una institución debería estar en condiciones de ayudarle con esto; tal vez le convenga realizar una búsqueda en Internet).

43. Estudie la siguiente tabla, la cual corresponde a un préstamo de 12 meses. Las entradas de la columna tres están diseñadas de modo que tienen las mismas razones de las entradas de la columna 2, pero suman 1 porque sus denominadores son iguales a

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78.$$

(Este es el origen del término "regla del 78").

Mes	Fracción del principal del préstamo utilizada por el prestatario	Fracción del cargo financiero adeudado
1	12/12	12/78
2	11/12	11/78
3	10/12	10/78
4	9/12	9/78
5	8/12	8/78
6	7/12	7/78
7	6/12	6/78
8	5/12	5/78
9	4/12	4/78
10	3/12	3/78
11	2/12	2/78
12	1/12	1/78
		78/78 = 1

Suponga que el préstamo se liquida totalmente después de ocho meses. Use la tabla para determinar la fracción no devengada del cargo financiero total.

44. Obtenga la fracción de interés no devengado del **ejercicio 43** aplicando la fórmula de la regla del 78.

11.4 COSTOS Y VENTAJAS DE POSEER UNA CASA

Préstamos hipotecarios con tasa fija • Préstamos hipotecarios con tasa ajustable • Costos de cierre • Impuestos, seguro y mantenimiento



La **calefacción de una casa** es otro costo que puede relacionarlo con los bancos y las tasas de interés, después de que usted obtiene un techo bajo el cual vivir. El techo que ve en la figura hace algo más que proteger a sus habitantes de la lluvia. Sostiene paneles solares, como parte del sistema de calefacción de la casa.

Préstamos hipotecarios con tasa fija

Por muchas décadas, la posesión de una casa se ha considerado una parte central del "sueño americano". Para la mayoría de la gente, una casa representa la compra más onerosa de su vida, y sin duda merece una consideración cuidadosa por su valor.

Un préstamo por una cantidad sustancial, con un plazo largo de tiempo (normalmente hasta 30 años), para comprar una casa u otra propiedad inmobiliaria, y para el cual la propiedad se toma como garantía del préstamo, se conoce como **préstamo hipotecario, crédito hipotecario o hipoteca**. (En algunas áreas, también se conoce como **escritura de fideicomiso** o **escritura de seguridad**). El tiempo transcurrido hasta la liquidación final se conoce como **plazo** del crédito hipotecario. La parte del precio de la compra de la casa que el comprador paga inicialmente se conoce como **pago inicial del préstamo**. El **principal del préstamo** (la cantidad prestada o capital) se obtiene restando el pago inicial del precio de compra.

En un **préstamo hipotecario con tasa fija**, la tasa de interés permanece constante durante todo el plazo, y el saldo principal inicial, junto con el interés adeudado por el préstamo, se paga al prestamista a través de pagos periódicos constantes (que nosotros suponemos como mensuales). Esto se conoce como **amortización** del préstamo. El pago mensual constante necesario para amortizar depende del monto financiado, el plazo del préstamo y la tasa de interés, de acuerdo con la fórmula de la página siguiente.

Pago mensual constante

El **pago mensual constante** requerido para pagar un préstamo de P dólares, junto con el interés a una tasa anual r, durante un plazo de t años, se calcula como sigue.

$$R = \frac{P\left(\frac{r}{12}\right)}{1 - \left(\frac{12}{12 + r}\right)^{12t}}$$

N=180
I%=5.5
PV=75000
→ ▪PMT=-612.81
FV=0
P/Y=12
C/Y=12
PMT: END BEGIN

La flecha indica un pago de $612.81, que apoya el resultado del **ejemplo 1**.

EJEMPLO 1 Uso de la fórmula para calcular un pago mensual de una hipoteca

Calcule el pago mensual necesario para amortizar un préstamo hipotecario de $75,000 al 5.5% de interés anual durante 15 años.

SOLUCIÓN

$$R = \frac{\$75{,}000\left(\frac{0.055}{12}\right)}{1 - \left(\frac{12}{12 + 0.055}\right)^{(12)(15)}} = \$612.81$$ ▮▮▮

Con una calculadora programable o financiera, es posible almacenar la fórmula anterior y minimizar el trabajo. Otra opción es usar una herramienta como la **tabla 6**, la cual indica los valores de pago (por cada $1000 de principal) para rangos típicos de plazos de las hipotecas y tasas de interés. Los valores de la tabla incluyen cinco decimales, de modo que se puede obtener una precisión al centavo más próximo para la mayoría de los montos de una hipoteca normal.

Tabla 6 Pagos mensuales para pagar el principal e interés de una hipoteca de $1000

Tasa anual (r)	Plazo de la hipoteca (años) (t)					
	5	10	15	20	25	30
4.0%	$18.41652	$10.12451	$7.39688	$6.05980	$5.27837	$4.77415
4.5%	18.64302	10.36384	7.64993	6.32649	5.55832	5.06685
5.0%	18.87123	10.60655	7.90794	6.59956	5.84590	5.36822
5.5%	19.10116	10.85263	8.17083	6.87887	6.14087	5.67789
6.0%	19.33280	11.10205	8.43857	7.16431	6.44301	5.99551
6.5%	19.56615	11.35480	8.71107	7.45573	6.75207	6.32068
7.0%	19.80120	11.61085	8.98828	7.75299	7.06779	6.65302
7.5%	20.03795	11.87018	9.27012	8.05593	7.38991	6.99215
8.0%	20.27639	12.13276	9.55652	8.36440	7.71816	7.33765
8.5%	20.51653	12.39857	9.84740	8.67823	8.05227	7.68913
9.0%	20.75836	12.66758	10.14267	8.99726	8.39196	8.04623
9.5%	21.00186	12.93976	10.44225	9.32131	8.73697	8.40854
10.0%	21.24704	13.21507	10.74605	9.65022	9.08701	8.77572
10.5%	21.49390	13.49350	11.05399	9.98380	9.44182	9.14739
11.0%	21.74242	13.77500	11.36597	10.32188	9.80113	9.52323
11.5%	21.99261	14.05954	11.68190	10.66430	10.16469	9.90291
12.0%	22.24445	14.34709	12.00168	11.01086	10.53224	10.28613

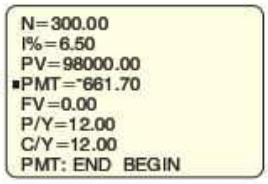
EJEMPLO 2 Uso de una tabla para calcular el pago mensual de una hipoteca

Calcule el pago mensual necesario para amortizar $98,000 al 6.5% durante 25 años.

SOLUCIÓN

En la **tabla 6**, busque hacia abajo la fila del 6.5% y a lo largo la columna de 25 años, para ubicar el valor de 6.75207. Como esta es la cantidad del pago mensual necesaria para amortizar un préstamo de $1000, y nuestro préstamo es de $98,000, nuestro pago mensual requerido es

$$98 \cdot \$6.75207 = \$661.70.$$



Con las condiciones del **ejemplo 2**, el pago mensual es de $661.70. Compare con el método de la tabla.

Para que el prestatario solo pague intereses sobre el dinero que realmente adeuda en un mes, el interés en los préstamos inmobiliarios se calcula sobre el saldo decreciente del préstamo. A cada pago mensual constante se le resta primero el interés del mes anterior. El residuo del pago se aplica entonces para reducir el monto del capital adeudado.

La mayor parte de los pagos en los primeros años de un préstamo inmobiliario corresponde a intereses (generalmente, el 80% o más); solo una pequeña cantidad se aplica a la reducción del capital. El monto del interés disminuye cada mes, de modo que cantidades cada vez más y más grandes del pago se aplican al capital. Durante los últimos años de la vigencia del préstamo, la mayoría de los pagos mensuales se aplican al capital. (Véase la **tabla 8** de la **página 598**).

Una vez que se ha determinado el pago mensual constante, como en los **ejemplos 1 y 2**, se puede generar una **tabla de amortización** (o **tabla de pagos**), la cual indicará las partes del pago destinadas a saldar interés y capital, así como el saldo capital, de uno o más meses durante la vigencia del préstamo. Existen tablas elaboradas por los prestamistas que muestran este desglose, o se pueden obtener en una hoja de cálculo de computadora. Los siguientes pasos muestran cómo se realizan los cálculos.

Paso 1 Interés del mes $= \begin{pmatrix}\text{Saldo anterior}\\ \text{del principal}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Tasa de}\\ \text{interés anual}\end{pmatrix}\left(\frac{1}{12}\text{años}\right)$

Paso 2 Pago al capital $= \begin{pmatrix}\text{Pago}\\ \text{mensual}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Interés}\\ \text{del mes}\end{pmatrix}$

Paso 3 Nuevo saldo $= \begin{pmatrix}\text{Saldo anterior}\\ \text{del capital}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Pago del}\\ \text{capital}\end{pmatrix}$

Esta secuencia de pasos se ejecuta al final de cada mes. El saldo nuevo obtenido en el paso 3 se convierte en el saldo anterior del paso 1 para el siguiente mes.

EJEMPLO 3 Elaboración de una tabla de amortización

Los Peterson tienen una hipoteca de $60,000 con un plazo de 30 años y una tasa de interés del 4.5%. Elabore una tabla de amortización para los primeros 2 meses de su hipoteca.

SOLUCIÓN

Primero se obtiene el pago mensual. Se usa la **tabla 6**. (También se podría usar la fórmula).

Monto de la hipoteca en miles de $ ↓ — Intersección de la fila del 4.5% con la columna de 30 años en la **tabla 6** ↓

$$R = 60 \cdot \$5.06685 = \$304.01$$

Ahora se aplican los pasos 1 a 3.

Paso 1 Interés del mes $= \$60{,}000(0.045)\left(\frac{1}{12}\right) = \$225$

Paso 2 Pago al capital $= \$304.01 - \$225 = \$79.01$

Paso 3 Nuevo saldo $= \$60{,}000 - \$79.01 = \$59{,}920.99$

El libro *You Can Do the Math*, de Ron Lipsman, de la Universidad de Maryland, es un libro práctico para la mayoría de los aspectos de **administración de finanzas personales**. El sitio Web asociado www.math.umd.edu/~rll/cgi-bin/finance.html, proporciona "calculadoras", en las que usted puede introducir fácilmente sus propios valores para obtener los resultados de muchos cálculos financieros.

Iniciando con el saldo anterior de $59,920.99, se repiten los pasos para el segundo mes.

Paso 1 Interés del mes $= \$59{,}920.99(0.045)\left(\frac{1}{12}\right) = \$224.70$

Paso 2 Pago del principal $= \$304.01 - \$224.70 = \$79.31$

Paso 3 Nuevo saldo $= \$59{,}920.99 - \$79.31 = \$59{,}841.68$

Estos cálculos se resumen en la **tabla 7**.

Tabla 7 Tabla de amortización

Número de pago	Pago de interés	Pago al capital	Saldo
			$60,000.00
1	$225.00	$79.01	$59,920.99
2	$224.70	$79.31	$59,841.68

Las tasas de interés corrientes han variado considerablemente con los años. La **tabla 8** muestra partes del programa de amortización del préstamo de los Peterson del **ejemplo 3** y muestra cuáles habrían sido los valores correspondientes con una tasa de interés del 14.5%. (Tasas así de altas no se habían visto en muchos años). Observe cuánto interés está implicado en esta hipoteca. A la tasa (baja) del 4.5%, se pagaron $49,444.03 de interés junto con los $60,000 del principal. A la tasa del 14.5%, tan solo el interés totalizaría la enorme suma de $204,504.88, la cual es aproximadamente 3.4 veces mayor que el principal de la hipoteca.

Tabla 8 Tablas de amortización de una hipoteca de $60,000 a 30 años

4.5% de interés Pago mensual: $304.01				14.5% de interés Pago mensual: $734.73			
Número de pago	Pago de interés	Pago al capital	Saldo	Número de pago	Pago de interés	Pago al capital	Saldo
Inicialmente →			60,000.00	Inicialmente →			60,000.00
1	225.00	79.01	59,920.99	1	725.00	9.73	59,990.27
2	224.70	79.31	59,841.68	2	724.88	9.85	59,980.42
3	224.41	79.60	59,762.08	3	724.76	9.97	59,970.45
12	221.68	82.33	59,032.06	12	723.63	11.11	59,875.11
60	205.47	98.54	54,694.75	60	714.96	19.77	59,149.53
175	152.47	151.54	40,506.65	175	656.05	78.69	54,214.82
176	151.90	152.11	40,354.54	176	655.10	79.64	54,135.18
236	113.60	190.41	30,102.65	236	571.02	163.72	47,092.76
237	112.88	191.13	29,911.52	237	569.04	165.70	46,927.07
240	110.73	193.28	29,333.83	240	562.96	171.78	46,417.87
303	59.33	244.68	15,575.66	303	368.65	366.09	30,142.47
304	58.41	245.60	15,330.05	304	364.22	370.51	29,771.96
359	2.27	301.74	302.88	359	17.44	717.29	725.96
360	1.14	302.88	0.00	360	8.77	725.96	0.00
Totales:	49,444.03	60,000.00		**Totales:**	204,504.88	60,000.00	

Préstamos hipotecarios con tasa ajustable

La industria de los préstamos utiliza muchas variaciones de la tasa fija básica de la hipoteca. Un **préstamo hipotecario con tasa ajustable** (**ARM**, por las siglas de *adjustable-rate mortgage*), también conocido como **hipoteca de tasa variable** (**VRM**, por las siglas de *variable-rate mortgage*), generalmente inicia con una tasa más baja que los préstamos similares de tasa fija, pero la tasa cambia periódicamente, reflejando cambios en las tasas corrientes.

Rubros que rigen los préstamos hipotecarios con tasa ajustable (ARM)

- **Periodo de ajuste**: Intervalo de tiempo entre ajustes de la tasa (normalmente 1, 3 o 5 años).
- **Índice**: Promedio de fluctuación estándar que es la base de la nueva tasa ajustada (normalmente la tasa de seguridad del Departamento del Tesoro de Estados Unidos para 1, 3 o 5 años, o un índice nacional o regional de costo del dinero).
- **Margen**: Monto adicional agregado al índice por el prestamista (normalmente unos cuantos puntos porcentuales).
- **Descuento**: Monto por el cual la tasa *inicial* puede ser menor que la suma del índice y el margen (normalmente pactada entre el vendedor y el prestamista).
- **Límite de la tasa de interés**: Límites sobre el incremento de la tasa (de interés).
- **Límite periódico**: Límite sobre el incremento de la tasa por periodo de ajuste (normalmente el 1% por 6 meses o 2% por un año).
- **Límite general**: Límite sobre el incremento de la tasa durante la vigencia del préstamo (normalmente alrededor del 5% del total del préstamo).
- **Límite de pago**: Límite sobre el monto que se puede incrementar el pago en cada ajuste.
- **Amortización negativa**: Un incremento del principal del préstamo (debido quizás al límite de pago en prevención de un pago para cubrir una tasa de interés mayor).
- **Convertibilidad**: Posibilidad contractual de convertir la hipoteca en una de tasa fija (por lo general, en ciertos momentos designados).
- **Penalización por pago anticipado**: Cargos impuestos por el prestamista si los pagos se realizan anticipadamente.

EJEMPLO 4 Comparación de los pagos de ARM antes y después de un ajuste de la tasa

Se realiza un pago inicial de $20,000 sobre un total de $180,000 de una casa y se aplica una ARM de un año para un plazo de 30 años. El prestamista usa durante un año el índice del Departamento del Tesoro (el 4%) y un 2% de margen financiero.

a) Calcule el pago mensual para el primer año.

b) Suponga que después de un año, el índice del Departamento del Tesoro para un año se incrementa al 5.1%. Calcule el pago mensual del segundo año.

SOLUCIÓN

a) Costo de la casa (↓) Pago inicial (↓)

$$\text{Monto de la hipoteca} = \$180{,}000 - \$20{,}000 = \$160{,}000$$

La tasa de interés del primer año será

$$\text{Tasa de interés ARM} = \text{Tasa del índice} + \text{Margen} = 4\% + 2\% = 6\%.$$

Ahora, partiendo de la **tabla 6** (usando 6% para 30 años) se obtiene 5.99551.

$$\text{Pago mensual durante el primer año} = 160 \cdot \$5.99551 = \$959.28$$

b) Durante el primer año, se pagó una pequeña cantidad del principal de la hipoteca, de modo que, en efecto, ahora tendremos un "monto nuevo" de la hipoteca. (El plazo también es ahora un año menos que el plazo original). La tabla de amortización para el primer año (que no se muestra aquí) presenta un saldo del préstamo, después de 12 pagos mensuales, de $158,035.19.

Para el segundo año:

$$\text{Tasa de interés ARM} = \text{Tasa del índice} + \text{Margen} = 5.1\% + 2\% = 7.1\%.$$

Como el 7.1% no está incluido en la **tabla 6**, se usa la fórmula del pago mensual constante con el nuevo saldo de la hipoteca y 29 años para el plazo restante.

$$\text{Pago mensual durante el segundo año} = \frac{P\left(\frac{r}{12}\right)}{1 - \left(\frac{12}{12 + r}\right)^{12t}} \qquad \text{Fórmula del pago constante}$$

$$= \frac{\$158{,}035.19\left(\frac{0.071}{12}\right)}{1 - \left(\frac{12}{12 + 0.071}\right)^{(12)(29)}} \qquad \text{Se sustituyen los valores conocidos.}$$

$$= \$1072.74$$

El primer ajuste de la tasa de interés ARM provoca que el pago mensual del segundo año se incremente a $1072.74, el cual representa un aumento de $113.46 sobre el pago mensual inicial. ▮▮▮

Una "oferta del vendedor" se presenta cuando el vendedor (el constructor de una casa nueva, por ejemplo) paga al prestamista una cantidad para descontarla del crédito del comprador. Esto reduce la tasa inicial y los pagos mensuales, pero se puede combinar con cargos iniciales más altos o incluso un incremento en el precio de la casa.

EJEMPLO 5 Descuento de una tasa de amortización

En el **ejemplo 4,** suponga que una oferta del vendedor descuenta la tasa inicial (primer año) en 1.5%. Calcule los pagos mensuales del primero y segundo años.

SOLUCIÓN

Se aplica un descuento a la tasa del índice del 4%, para dejarla en 2.5%. Sumando el margen del 2% produce una tasa neta para el primer año del 4.5% (en lugar del 6% del **ejemplo 4**), de modo que el valor en la **tabla 6** es 5.06685.

$$\text{Pago mensual durante el primer año} = 160(\$5.06685) = \$810.70$$

La tabla de amortización muestra un saldo al final del primer año de $157,418.79. Ahora el descuento expira, y el índice se ha incrementado a 5.1%, de modo que para el segundo año,

$$\text{Tasa de interés ARM} = \text{Tasa del índice} + \text{Margen} = 5.1\% + 2\% = 7.1\%.$$

(Esto es exactamente como en el **ejemplo 4**). Usando la fórmula del pago mensual, con $r = 7.1\%$ y $t = 29$,

$$\text{Pago mensual durante el segundo año} = \frac{\$157{,}418.79\left(\frac{0.071}{12}\right)}{1 - \left(\frac{12}{12 + 0.071}\right)^{(12)(29)}} \qquad \text{Se sustituyen los valores en la fórmula del pago mensual.}$$

$$= \$1068.55.$$

El pago mensual inicial de $810.70 es considerablemente mejor que el de $959.28 del **ejemplo 4**, pero al inicio del año 2, los pagos mensuales se incrementan en $257.85. ▮▮▮

Asegurarse de que una ARM tiene una tasa y límites de pago adecuados ayuda a eliminar "el impacto del pago". También es prudente tener convertibilidad sin que existan penalizaciones por pago anticipado.

El **refinanciamiento** significa iniciar una nueva hipoteca de la casa y pagar la antigua. En épocas de tasas relativamente bajas, los prestamistas animan con frecuencia a los propietarios de casas a refinanciar. Como el establecimiento de un préstamo nuevo implica costos, asegúrese de que usted tiene una buena razón para efectuar el refinanciamiento. Algunas posibles razones son:

1. El nuevo préstamo puede ser comparable al préstamo actual con una tasa lo suficientemente baja para recuperar los costos en unos cuantos años.
2. Usted tal vez desee liquidar su saldo más rápido cambiando a un préstamo con plazo más corto.
3. Quizá desee solicitar otro préstamo para cubrir otros gastos mayores, como la educación de sus hijos.
4. Su préstamo actual tiene un pago grande que necesita refinanciamiento.
5. Usted no está cómodo con su ARM variable (y, por consiguiente, incierto), y desea convertir el préstamo a uno con tasa fija.

Costos de cierre

Además de pagar el principal y el interés, comprar una casa implica realizar varios gastos por única vez, conocidos como **costos de cierre**, o **costos de liquidación**, los cuales son obligatorios cuando el crédito concluye. El comprador tiene derecho a un "buen estimado confiable" de estos costos por parte del prestamista y, si lo desea, puede elegir proveedores alternativos de servicios de liquidación. Los costos de un cierre típico se muestran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Cálculo de los costos totales de cierre

Para una hipoteca de $58,000, el prestatario pagó los siguientes costos de cierre.

Comisión por apertura de crédito (1% del monto de la hipoteca)	$____
Comisión del agente de préstamo	1455
Cargos administrativos (por documentación)	375
Cargos por impuestos y transferencias bancarias del prestamista	205
Cargo de la compañía de títulos de propiedad	200
Cargos por el seguro del título	302
Cargos por devolución del título	65
Cargo por registro de documentos	35

Calcule los costos totales de cierre de esta hipoteca.

SOLUCIÓN

A los "cargos por apertura de crédito" se les conoce normalmente como **puntos**. Cada punto asciende al 1% del monto de la hipoteca. Imponiendo puntos, el prestamista puede elevar efectivamente la tasa de interés sin incrementar los pagos mensuales (porque los puntos se pagan normalmente al cierre y no durante la vigencia del crédito). En este caso, "un punto" se traduce en $580. Sumando esta cifra a las otras cantidades listadas nos da un costo total de cierre de $3217. ■■■

Como existe un gran riesgo potencial de abuso en el área de costos de cierre, las regulaciones de veracidad y transparencia en el crédito exigen al prestamista brindar información clara, incluyendo la TPA del préstamo. La TPA, es decir, el costo del préstamo como tasa anual, probablemente será mayor que la tasa de interés pactada, puesto que debe reflejar todos los puntos y otros cargos pagados directamente por el crédito, así como el interés real.

Impuestos, seguro y mantenimiento

Las principales consideraciones financieras para la mayoría de los nuevos dueños de casas son las siguientes.

1. Acumulación del pago inicial
2. Tener efectivo e ingresos suficientes para ser elegible para el crédito
3. Realizar los pagos de la hipoteca

Existen tres gastos adicionales durante el ejercicio del crédito:

impuestos, seguro y mantenimiento,

los cuales se deben tomar en cuenta de manera realista, ya que tienen un peso significativo.

El condado u otra autoridad local cobra **impuestos sobre la propiedad**. Dependiendo de la ubicación y el valor de la casa, los impuestos pueden ascender a varios miles de dólares anuales. Una ventaja es que los impuestos sobre la propiedad y los intereses de la hipoteca son deducibles del impuesto sobre la renta. Por lo tanto, el dinero que se gasta en estos rubros disminuye los impuestos sobre la renta. De esta manera, el gobierno, a través del código fiscal, estimula a los dueños de casas.

EJEMPLO 7 Consideración del efecto de los impuestos al adquirir una casa

Darryl Graves se encuentra en el nivel fiscal del 30% combinando los impuestos estatales y federales sobre la renta. Él calcula que puede hacer frente a un gasto promedio mensual de $1400 para adquirir una casa. ¿Podrá obtener la casa de sus sueños, la cual requiere una hipoteca de $205,000 a 20 años, con una tasa fija del 6% más $1920 de impuestos anuales sobre la propiedad?

SOLUCIÓN

Vamos a hacer el cálculo matemático.

Monto de la hipoteca en miles; Valor de la **Tabla 6**

$$\text{Pago mensual regular de la hipoteca} = 205 \cdot \$7.16431 \approx \$1469$$

$$\text{Impuestos mensuales sobre la propiedad} = \frac{\$1920}{12} = \$160$$

(1920: ← Impuestos anuales; 12: ← Meses por año)

Pago de la hipoteca; Impuestos sobre la propiedad

$$\text{Gastos totales mensuales} = \$1469 + \$160 = \$1629$$

Como $1629 > $1400, parece que Darryl no puede comprar su casa. Pero espere, recuerde que el interés de la hipoteca y los impuestos sobre la propiedad son deducibles del impuesto sobre la renta. Hagamos más consideraciones.

$$\text{Interés mensual} = \$205{,}000\,(0.06)\left(\frac{1}{12}\right) = \$1025$$

Interés = *Prt*

De los $1469 del pago de la hipoteca, $1025 serían de interés (inicialmente).

Interés de la hipoteca; Impuesto sobre la propiedad

$$\text{Gastos deducibles mensuales} = \$1025 + \$160 = \$1185$$

Gastos deducibles; Nivel fiscal

$$\text{Ahorros mensuales en los impuestos sobre la renta} = \$1185 \cdot 30\% \approx \$356$$

Costo bruto; Ahorro de impuestos

$$\text{Costo mensual neto de la casa} = \$1629 - \$356 = \$1273$$

Considerando el efecto de los impuestos, vemos que el costo mensual neto de $1273 está dentro del alcance de los $1400 de Darryl. ▮▮▮

El **seguro del propietario de una casa** normalmente cubre pérdidas ocasionadas por el fuego, daños por tormentas y otros riesgos. Algunos tipos de cobertura, como los daños por terremotos y huracanes, pueden ser inexistentes o muy costosos, dependiendo de la ubicación. Asimismo, todas las casas requieren **mantenimiento**, pero estos costos pueden variar enormemente, dependiendo sobre todo del tamaño, el tipo de construcción, la antigüedad y la condición de la casa. Estos gastos son necesarios para proteger la inversión del inmueble. Generalmente no son deducibles de impuestos.

Respaldo gubernamental de hipotecas, los préstamos FHA (Federal Housing Administration) y VA (Veterans Administration) tienen garantía gubernamental para proteger al prestamista en caso de que el prestatario no pueda pagar el crédito. A quienes no son elegibles para estos préstamos, y obtienen en su lugar un préstamo convencional, normalmente se les pide que compren un seguro que ampare la hipoteca como parte del paquete de crédito.

Esta modalidad puede ser sorpresiva para los que compran una casa por primera vez. Se hizo para proteger a los prestamistas, pero indirectamente protege a los compradores, quienes pueden perder mucho dinero si alguna catástrofe les impide realizar los pagos.

En la segunda mitad del siglo xx, el número de seguros durante la vida del crédito (con la finalidad de cubrir el adeudo del consumidor) se incrementó más de 500 veces, mientras que el grupo de seguros de vida se incrementó solo 200 veces aproximadamente, los seguros de vida normales se incrementaron 60 veces, y los seguros de vida industriales en realidad disminuyeron. (*Fuente:* American Council of Life Insurance).

EJEMPLO 8 Inclusión del seguro y costos de mantenimiento de la casa

Continuando con el asunto de la compra de su casa, Darryl (**ejemplo 7**) estima que un seguro de vivienda costará $550 aproximadamente por año, y que el mantenimiento será de $650 anuales. ¿Significan estos gastos adicionales que no podrá comprar la casa?

SOLUCIÓN

Estos rubros no tienen estímulo fiscal (es decir, no son deducibles), de modo que el gasto mensual total es simplemente

$$\text{Gastos mensuales de seguro y mantenimiento} = \frac{\$550 + \$650}{12} = \$100.$$

Incluyendo el seguro y el mantenimiento, obtenemos

$$\text{Gasto mensual ajustado} = \$1273 + \$100 = \$1373,$$

lo cual todavía es menor que $1400. Darryl aún puede realizar la compra. ■■■

Los pagos de los impuestos sobre la propiedad y del seguro de vivienda proceden comúnmente de una **cuenta de reserva** (llamada también **cuenta de depósito** o **incautada**) que mantiene la sociedad hipotecaria. El prestatario debe pagar lo suficiente cada mes, junto con los costos de amortización, de manera que la cuenta de reserva sea suficiente para realizar los pagos cuando se venzan. (En algunos casos, el dueño de la casa paga impuestos directamente a la autoridad fiscal, y las primas de seguro directamente a una aseguradora, de manera totalmente independiente de los pagos de la hipoteca).

Los **ejemplos 7 y 8** generan algunas preguntas razonables.

1. ¿Es prudente adquirir una casa cerca del límite de gastos, a la luz de futuras incertidumbres?
2. ¿Qué hay acerca del hecho de que la parte de interés de los pagos de la hipoteca y, por lo tanto, los ahorros en impuestos disminuirán con el tiempo?
3. ¿Podrían los costos de impuestos, seguro y mantenimiento incrementarse con el tiempo, haciendo más difícil cumplir con los pagos?

A continuación se presentan algunas respuestas posibles.

1. Darryl se condujo con suficiente libertad cuando decidió sobre su capacidad mensual de pago de $1400.
2. ***a)*** Observe otra vez la **tabla 8** para ver la lentitud de la caída de la parte de interés.
   b) La mayoría de las personas calculan que su ingreso con el tiempo se incrementa más rápido que los gastos de una casa que tiene una hipoteca con tasa fija. (Un préstamo hipotecario con tasa variable es más riesgoso y debe tener bloqueada su tasa inicial el mayor tiempo posible).
   c) Las tasas de interés prevalecientes suben y bajan con el tiempo. Mientras que el incremento de las tasas no afecta un préstamo hipotecario con tasa fija, la caída de las tasas puede ofrecer una oportunidad de reducir gastos de la hipoteca a través de un refinanciamiento. (Véase la nota al margen sobre criterios de refinanciamiento).
3. Nuevamente en este caso, el aumento en el ingreso seguirá su ritmo. Mientras que la mayoría de las cosas, incluyendo el ingreso personal, tienden a seguir la inflación, la hipoteca de tasa fija garantiza que la amortización de la hipoteca, un rubro importante, permanecerá constante.

11.4 EJERCICIOS

Redondee todas las respuestas monetarias al centavo más próximo, a menos que se dé otra indicación.

Pago mensual de un préstamo hipotecario con tasa fija *Calcule el pago mensual necesario para amortizar el principal y el interés de cada hipoteca de tasa fija. Puede usar la fórmula del pago mensual constante o la* **tabla 6**, *según se requiera.*

	Monto del préstamo	Tasa de interés	Plazo
1.	$70,000	10.0%	20 años
2.	$50,000	11.0%	15 años
3.	$57,300	8.7%	25 años
4.	$85,000	7.9%	30 años

	Monto del préstamo	Tasa de interés	Plazo
5.	$227,750	12.5%	25 años
6.	$95,450	15.5%	5 años
7.	$132,500	7.6%	22 años
8.	$205,000	5.5%	10 años

Amortización de un préstamo hipotecario con tasa fija *Complete el primero o los dos primeros meses (como se solicite) de cada tabla de amortización para un préstamo hipotecario con tasa fija.*

9. Hipoteca: $58,500
Tasa de interés: 10.0%
Plazo del préstamo: 30 años

Tabla de amortización

Número de pago	Pago total	Pago de interés	Pago de principal	Saldo del principal
1	*a)* _____	*b)* _____	*c)* _____	*d)* _____

10. Hipoteca: $87,000
Tasa de interés: 8.5%
Plazo del préstamo: 20 años

Tabla de amortización

Número de pago	Pago total	Pago de interés	Pago de principal	Saldo del principal
1	*a)* _____	*b)* _____	*c)* _____	*d)* _____

11. Hipoteca: $143,200
Tasa de interés: 6.5%
Plazo del préstamo: 15 años

Tabla de amortización

Número de pago	Pago total	Pago de interés	Pago de principal	Saldo del principal
1	*a)* _____	*b)* _____	*c)* _____	*d)* _____
2	*e)* _____	*f)* _____	*g)* _____	*h)* _____

12. Hipoteca: $124,750
Tasa de interés: 9%
Plazo del préstamo: 25 años

Tabla de amortización

Número de pago	Pago total	Pago de interés	Pago de principal	Saldo del principal
1	*a)* _____	*b)* _____	*c)* _____	*d)* _____
2	*e)* _____	*f)* _____	*g)* _____	*h)* _____

13. Hipoteca: $113,650
Tasa de interés: 8.2%
Plazo del préstamo: 10 años

Tabla de amortización

Número de pago	Pago total	Pago de interés	Pago de principal	Saldo del principal
1	*a)* _____	*b)* _____	*c)* _____	*d)* _____
2	*e)* _____	*f)* _____	*g)* _____	*h)* _____

14. Hipoteca: $150,000
Tasa de interés: 6.25%
Plazo del préstamo: 16 años

Tabla de amortización

Número de pago	Pago total	Pago de interés	Pago de principal	Saldo del principal
1	*a)* _____	*b)* _____	*c)* _____	*d)* _____
2	*e)* _____	*f)* _____	*g)* _____	*h)* _____

Cálculo de los pagos mensuales de una hipoteca *Calcule el pago total mensual, incluyendo impuestos y seguro.*

	Hipoteca	Tasa de interés	Plazo del préstamo	Impuestos anuales	Seguro anual
15.	$ 62,300	7%	20 años	$610	$220
16.	$ 51,800	10%	25 años	$570	$145
17.	$ 89,560	6.5%	10 años	$915	$409
18.	$ 72,890	5.5%	15 años	$1850	$545
19.	$115,400	8.8%	20 años	$1295.16	$444.22
20.	$128,100	11.3%	30 años	$1476.53	$565.77

Comparación del principal e intereses totales de una hipoteca *Suponga que se adeudan* $140,000 *por una casa. El pago mensual del principal e interés al* 8.5% *durante* 30 *años es de* 140 · $7.68913 = $1076.48.

21. ¿Cuántos pagos mensuales se realizarán durante el periodo de 30 años?

22. ¿Cuál es el monto total que se pagará de intereses y principal?

23. El interés total cobrado es el monto total pagado menos la cantidad financiada. ¿Cuál es el interés total?

24. ¿Cuál es mayor: la cantidad financiada o el interés total pagado? ¿Cuál es la diferencia?

Efecto a largo plazo de las tasas de interés *Usted recordará haber visto cómo fluctuaron ampliamente las tasas de interés de las hipotecas en un periodo no muy prolongado de años. Los siguientes ejercicios muestran el efecto del cambio en las tasas. Remítase a la* **tabla 8**, *la cual compara la amortización de una hipoteca de* $60,000, *con tasas del* 4.5% *y del* 14.5% *durante 30 años. Dé los valores de cada uno de los siguientes conceptos para* ***a)*** *una tasa del* 4.5%, *y* ***b)*** *una tasa del* 14.5%.

25. pagos mensuales

26. porcentaje del primer pago mensual que corresponde al capital

27. saldo del capital después de un año

28. saldo del capital después de 20 años

29. el primer pago mensual que destina más dinero al capital que al interés

30. monto del interés incluido en el pago mensual final de la hipoteca

Efecto del plazo sobre la cantidad total pagada *Suponga que una hipoteca de* $60,000 *se va a amortizar al* 7.5% *de interés. Obtenga el monto total del interés que se pagaría en cada uno de los siguientes casos.*

31. 10 años **32.** 20 años **33.** 30 años **34.** 40 años

Efecto de tasas variables sobre el pago mensual *Para cada préstamo hipotecario con tasa variable, calcule* ***a)*** *el pago mensual inicial,* ***b)*** *el pago mensual del segundo periodo de ajuste, y* ***c)*** *el cambio en el pago mensual en el primer ajuste.*

	Saldo inicial	Plazo	Tasa inicial	Margen	Periodo de ajuste	Tasa ajustada	Saldo ajustado
35.	$75,000	20 años	6.5%	2.5%	1 año	8.0%	$73,595.52
36.	$44,500	30 años	7.2%	2.75%	3 años	6.6%	$43,669.14

(El "saldo ajustado" es el saldo del capital en el momento del primer ajuste de la tasa. Suponga que no se aplican límites).

Efecto de los límites en la tasa de préstamos hipotecarios con tasa variable *James Kinchen tiene una ARM anual para* $50,000 *durante un plazo de* 20 *años. El margen es del* 2% *y la tasa inicia en* 7.5% *y se incrementa al* 10.0% *en el primer ajuste. El saldo del capital al final del primer año es* $49,119.48. *La ARM incluye un límite periódico de la tasa del* 2% *por periodo de ajuste. (Use esta información en los ejercicios 37 a 40).*

37. Calcule ***a)*** el interés adeudado y ***b)*** el pago mensual para el primer mes del primer año.

38. Calcule ***a)*** el interés adeudado y ***b)*** el pago mensual para el primer mes del segundo año.

39. ¿Cuál es el pago mensual ajustado al final del primer año?

40. Si la tasa ha disminuido ligeramente al final del segundo año, ¿disminuirán necesariamente los pagos mensuales del tercer año? ¿Por qué?

Costos del cierre de una hipoteca *En los ejercicios 41 a 44, remítase a la siguiente lista de costos de cierre de la compra de una casa de* $175,000 *que requiere un pago inicial del* 20%, *y calcule cada monto requerido.*

Prima de seguro del inmueble	$240
Cargo por registro de documentos	30
Cargo por apertura del crédito (dos puntos)	___
Cargo por avalúo	225
Impuestos prorrateados de la propiedad	685
Prima prorrateada de seguro contra incendio	295

41. el monto de la hipoteca

42. comisión por apertura de crédito

43. los costos totales de cierre

44. el monto total de efectivo requerido por el comprador en el cierre (incluyendo el pago inicial)

Considere el escenario del ***ejemplo 7****. Recuerde que el interés de la hipoteca es deducible de los impuestos sobre la renta, y calcule (redondeando al dólar más próximo) los ahorros adicionales mensuales iniciales netos resultantes de cada estrategia. (En cada caso, solo el concepto designado cambia. Todos los demás se mantienen iguales).*

45. Cambio en el plazo de la hipoteca de 20 a 30 años.

46. Cambio de la hipoteca fija al 6% a una ARM con una tasa inicial del 5%.

En cada uno de los ejercicios 47 a 50, calcule todos los conceptos siguientes para una hipoteca de $200,000 a tasa fija. (Dé las respuestas redondeando al dólar más próximo).

a) *Pago mensual de la hipoteca (principal e interés)*

b) *Pago mensual de la casa (incluyendo impuestos sobre la propiedad y seguro)*

c) *Interés mensual inicial*

d) *Parte deducible de impuestos sobre la renta, del pago inicial de la casa*

e) *Costo mensual inicial neto de la casa (considerando ahorros de impuestos)*

	Plazo de la hipoteca	Tasa de interés	Impuesto anual de la propiedad	Seguro anual	Nivel fiscal de los ingresos del dueño
47.	15 años	5.5%	$960	$480	20%
48.	20 años	6.0%	$840	$420	25%
49.	10 años	6.5%	$1092	$540	30%
50.	30 años	7.5%	$1260	$600	40%

Con base en el material de esta sección, o en una investigación propia, escriba respuestas breves para cada problema.

51. Determine otras maneras en que Darryl (**ejemplos 7 y 8**) podría reducir los pagos mensuales netos iniciales de su casa.

52. Suponga que su ARM le permite la conversión a un préstamo con tasa fija en cada una de las primeras cinco fechas de ajuste. Describa las circunstancias en las cuales a usted le convendría la conversión.

53. Describa cada tipo de hipoteca.

Pago a plazos

Pago de contado

Solo interés

Opción ARM ("amortización negativa")

54. ¿Debe un prestatario pagar siempre el pago inicial más pequeño que se acepta? Explique su respuesta.

55. ¿Debe un prestatario elegir siempre el plazo más corto para minimizar el gasto de interés total? Explique su respuesta.

56. ¿En qué condiciones sería la ARM una mejor opción que préstamo hipotecario con tasa fija?

57. ¿Por qué los pagos mensuales del segundo año son (ligeramente) menores en el **ejemplo 5** que en el **ejemplo 4** aun cuando el plazo de 29 años, y la tasa de interés del 7.1%, son los mismos en ambos casos?

58. ¿Cree usted que el descuento en el **ejemplo 5** realmente hace menor el costo total de la hipoteca? Explique su respuesta.

59. Analice el término "impacto del pago" mencionado al final del **ejemplo 5**.

60. Investigue lo que quiere decir cada término y describa alguna de las características de cada uno.

FHA-hipoteca respaldada

VA-hipoteca respaldada

Hipoteca convencional

11.5 INVERSIONES FINANCIERAS

Acciones • Bonos • Fondos de inversión • Evaluación de los rendimientos de una inversión • Construcción de un fondo de reserva

Acciones

En general, una *inversión* es una manera de poner recursos a trabajar de modo que crezcan (tal como se espera). Aquí, el mayor énfasis se pondrá en los aspectos matemáticos básicos de una clase restringida de inversiones financieras, a saber, *acciones*, *bonos* y *sociedades de inversión*.

Cuando usted compra acciones de una corporación, se convierte en dueño de una parte de la corporación. Entonces usted participa de las utilidades que la compañía genera, y su participación se conoce como **dividendo**. Si la compañía prospera (o si se incrementa el número de inversionistas que creen que prosperará en el futuro), su acción se volverá atractiva para otros, de modo que usted puede, si así lo desea, vender sus acciones con una utilidad. La utilidad que usted obtiene al vender en un precio mayor al de compra se conoce como **ganancia de capital**. Se produce una ganancia negativa, o **pérdida de capital**, si usted vende a un precio menor del que compró. **Rendimiento de la inversión** es la diferencia neta entre lo que usted recibe (incluyendo el precio de venta y los dividendos) y lo que usted pagó (su precio de compra más cualquier otro gasto asociado con la compra y venta de las acciones).

EJEMPLO 1 Cálculo del rendimiento de las acciones de un propietario

Lauren Hileman compró 100 acciones de un portafolio de la Compañía A, el 15 de enero de 2010, pagando $30 por acción. El 15 de enero de 2011 recibió un dividendo de $0.50 por acción, y el precio de las acciones se elevó a $30.85 cada una. (Ignore otros costos diferentes del precio de compra). Calcule lo siguiente:

a) El costo total de las acciones de Lauren

b) El monto total de los dividendos

c) La ganancia de capital de Lauren si vendió las acciones el 15 de enero de 2011

d) El rendimiento total de Lauren por el año que mantuvo sus acciones

e) El porcentaje del rendimiento

SOLUCIÓN

a) Costo = ($30 por acción) · (100 acciones) = $3000

Ella pagó $3000 en total.

b) Dividendo = ($0.50 por acción) · (100 acciones) = $50

El monto de los dividendos es de $50.

c) Ganancia de capital = ($30.85 − $30.00) · 100 = $0.85 · 100 = $85

(Cambio en el precio por acción; Número de acciones)

La ganancia de capital fue de $85.

d) Rendimiento total = $50 + $85 = $135

(Dividendos; Ganancia de capital)

El rendimiento total de la inversión fue de $135.

e) $$\text{Porcentaje del rendimiento} = \frac{\text{Rendimiento total}}{\text{Costo total}} \cdot 100\% = \frac{\$135}{\$3000} \cdot 100\% = 4.5\%$$

El porcentaje del rendimiento de la inversión es del 4.5%.



La bolsa de valores **NASDAQ (National Association of Securities Dealers Advanced Quotations)**, a diferencia de la NYSE y otras bolsas que operan en ubicaciones específicas, es una red electrónica de agentes establecida en 1971 para facilitar la negociación de acciones de venta libre (no listadas). La mayoría de las acciones de compañías de alta tecnología, las cuales crecieron rápidamente como grupo en la década de 1980 y especialmente en la de 1990 (aunque muchas de ellas declinaron rápidamente entre 2000 y 2002) son (o fueron) listadas en el mercado NASDAQ.

El precio de una acción está determinado por la ley de la oferta y la demanda en instituciones conocidas como **bolsas de valores**. En Estados Unidos, la bolsa de valores más antigua y más grande es la Bolsa de Valores de Nueva York (NYSE, New York Stock Exchange), establecida en 1792 y ubicada en Wall Street en la ciudad de Nueva York. Las personas del público compran sus acciones a través de agentes o corredores bursátiles, es decir, gente que tiene acceso a la bolsa. Los agentes hacen negocios en oficinas a lo largo del país. Cobran una comisión por comprar y vender acciones.

Los precios del día y otra información relacionada con acciones específicas se publican diariamente en muchos periódicos y en varios sitios de Internet, donde la información se actualiza continuamente. La **tabla 9** muestra ejemplos de negociaciones en la NYSE, del 4 de junio de 2010. La bolsa inicia operaciones a las 9:30 A.M. y cierra a las 4:00 P.M., hora del Este.

Observe los encabezados de las columnas y los números de la primera compañía listada, Allstate, con el código de mercado ALL. Los primeros cuatro números indican que la primera venta de las acciones de Allstate después de las 9:30 A.M. fue de $29.62 por acción, la venta más alta durante el día fue de $29.77, la venta más baja fue de $28.86, y la última venta antes de las 4:00 P.M. fue de $28.94 por acción.

Al desplazarnos hacia la derecha, los siguientes dos números indican que el precio al cierre del día fue de $1.23 más bajo que el del día anterior, es decir, 4.08% más bajo. La cifra del volumen indica que se vendieron 5,383,700 acciones de Allstate en ese día (redondeando al ciento de acciones más próximo).

Los siguientes dos números indican que, durante el último año (52 semanas), los precios más alto y más bajo pagados para ALL fueron $35.51 y $22.82, respectivamente. Los siguientes dos números indican que el dividendo actual de Allstate es de 80 centavos por acción y que representa un rendimiento del 2.76% (del precio actual de la acción al cierre del día).

PE es la **razón precio-ganancia** (*price-to-earnings*), el precio actual por acción dividido entre las ganancias por acción durante los 12 meses anteriores. Para ALL esta razón fue de 12.58. Por último, el cambio del porcentaje de principio de año a la fecha (YTD, por las siglas de *year-to-date*) significa que el precio por acción de Allstate es ahora $3.66 menor de lo que era al inicio del año calendario.

Tabla 9 Cotización de acciones seleccionadas (4 de junio de 2010)

Compañía	Código	Apertura	+ alto del día	+ bajo del día	Cierre	Cambio neto	% de cambio	Volumen (100)	Precio más alto, 52 sem.	Precio más bajo, 52 sem.	Dividendo	Rendimiento	PE	% de cambio YTD
Allstate	ALL	29.62	29.77	28.86	28.94	−1.23	−4.08	53837	35.51	22.82	0.80	2.76	12.58	−3.66
Bank of America	BAC	15.50	15.73	15.25	15.35	−0.46	−2.91	1479077	19.86	11.20	0.04	0.26	...	1.93
CarMax	KMX	21.72	21.87	20.75	20.93	−1.46	−6.52	25150	26.50	21.10	...	...	16.74	−13.69
Caterpillar, Inc.	CAT	59.49	60.20	57.36	57.76	−3.35	−5.48	102585	72.83	30.01	1.68	2.91	29.62	1.35
Chevron	CVX	72.15	72.71	70.80	71.28	−2.63	−3.56	180765	83.41	60.88	2.88	4.04	10.82	−7.42
Deere	DE	58.37	59.33	56.50	56.88	−2.79	−4.68	51837	63.68	34.90	1.20	2.11	24.73	5.16
Duke Energy	DUK	15.87	15.88	15.58	15.61	−0.44	−2.74	99430	17.94	13.91	0.96	6.15	17.54	−9.30
FedEx	FDX	82.21	82.62	78.84	79.37	−4.61	−5.49	38621	97.75	49.76	0.44	0.55	...	−4.89
General Mills	GIS	74.28	74.28	73.04	73.30	−1.44	−1.93	33270	75.14	51.37	1.96	2.67	14.84	3.52
Harley-Davidson	HOG	28.33	28.35	27.16	27.35	−1.88	−6.43	58195	36.13	14.99	0.40	1.46	...	8.53
Kimberly-Clark	KMB	60.73	60.83	59.98	60.18	−1.10	−1.80	62518	67.03	50.42	2.64	4.39	13.52	−5.54
Pearson ADS	PSO	13.80	13.83	13.52	13.57	−0.52	−3.69	990	16.37	9.29	0.56	4.13	15.96	−5.50
Sara Lee	SLE	14.42	14.50	14.20	14.24	−0.38	−2.60	152351	15.06	8.72	0.44	3.09	20.06	16.91
Walt Disney	DIS	34.06	34.35	33.44	33.69	−1.02	−2.94	217056	37.98	22.05	0.35	1.04	17.64	4.47
Yum! Brands	YUM	41.36	41.60	40.70	40.86	−1.06	−2.53	47957	44.00	32.24	0.84	2.06	18.08	16.84

EJEMPLO 2 Lectura de la tabla de acciones

Use la tabla de acciones (**tabla 9**) para obtener los siguientes montos requeridos.

a) El precio más alto de las últimas 52 semanas de FedEx (FDX)

b) El dividendo de Kimberly-Clark (KMB)

SOLUCIÓN

a) Encuentre la línea correcta de la tabla para las acciones de FedEx.

El precio más alto de FedEx para las últimas 52 semanas fue de $97.75.

b) El valor de 2.64 del dividendo significa que KMB pagó un dividendo de $2.64 por acción. ■■■

EJEMPLO 3 Cálculo del costo de una compra de acciones

Calcule el costo de 100 acciones de Deere (DE), compradas al precio de cierre del día.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la **tabla 9**, el precio al cierre del día de las acciones de Deere (DE) fue de $56.88 por acción.

$$\text{Costo total} = \underset{\text{Precio por acción}}{\$56.88} \cdot \underset{\text{Número de acciones}}{100} = \$5688.00$$

Cien de estas acciones costarían $5688.00, más cualquier otro cargo del agente. ■■■

La mayoría de las compras y ventas de acciones se efectúan a través de un agente o corredor bursátil, quien tiene representantes en la bolsa para ejecutar una orden de compra o venta. El agente cobrará una **comisión** por ejecutar una orden. Antes de 1974, los porcentajes de comisión eran establecidos por las reglas de la bolsa de valores y eran homogéneos de un agente a otro. Sin embargo, desde entonces, las tasas son competitivas y varían considerablemente entre los corredores bursátiles.

Los **corredores de servicio completo**, que ofrecen investigar, dar opiniones profesionales sobre la compra y venta de acciones individuales y muchos otros servicios, tienden a cobrar las comisiones más altas sobre las transacciones que realizan. Por otro lado, muchos **corredores de descuento** solo compran y venden acciones para sus clientes, ofreciendo pocos servicios adicionales.

Durante la década de 1990, cuando a casi todos los inversionistas les parecía que valía la pena pagar por cualquier opción razonable de acciones, aparecieron varias compañías en línea, ofreciendo transacciones mucho más económicas que las de los agentes convencionales. Por consiguiente, la mayoría de las empresas convencionales de corretaje, así como las principales agencias de descuento, introdujeron sus propios servicios automatizados (en línea). Los inversionistas actuales deben comparar un gran número de opciones antes de decidir cuál agente podrá desempeñar mejor los servicios que necesitan para invertir en acciones.

Las comisiones normalmente constituyen un porcentaje del valor de la compra o venta (conocido como **principal**). Algunas empresas cobran cantidades adicionales en ciertos casos. Por ejemplo, las tasas pueden variar si la orden incluye un **lote completo** de acciones (un múltiplo de 100) o un **lote fraccionario** (porciones de una orden menor de 100 acciones). En un lote fraccionario, tal vez se cobre al cliente un **diferencial del lote** (digamos, 10 centavos por acción). También es posible colocar una **orden limitada**, por medio de la cual el agente recibe instrucciones para ejecutar una compra o venta cuando una acción alcance un precio predeterminado; entonces se puede agregar un cargo extra a la comisión sobre la orden limitada. Una agencia prominente de corretaje no cobra estas comisiones especiales, pero establece una estructura escalonada de comisiones dependiendo del monto del principal de la compra o venta, y distingue entre negociación **asistida por el corredor** y negociación **atizada**, como se muestra en la siguiente página.

Estructura típica de comisión con descuento

Transacción asistida por el corredor

Monto del principal	Comisión
Hasta $2499.99	$35 + 1.7% del principal
$2500.00–$6249.99	$65 + 0.66% del principal
$6250.00–$19,999.99	$76 + 0.34% del principal
$20,000.00–$49,999.99	$100 + 0.22% del principal
$50,000.00–$499,999.99	$155 + 0.11% del principal
$500,000.00 o más	$255 + 0.09% del principal

Transacción automatizada

Número de acciones	Comisión
Hasta 1000	$29.95
Más de 1000	$0.03 por acción

Asimismo, la Comisión de Bolsa y Valores (Securities and Exchange Commission, SEC), la agencia federal estadounidense que regula los mercados de acciones, apoya sus actividades haciendo un cargo a las transacciones, con base en el volumen de operaciones. Este cobro normalmente lo pagan los inversionistas a través de los corredores bursátiles, en forma de una **comisión SEC**, establecida solo con base en las ventas de acciones (sin considerar las compras). En junio de 2010, esta comisión era de 1.69 centavos por cada $1000 de principal (redondeado *hacia arriba* al centavo más próximo). Por ejemplo, para obtener la comisión de una venta de $1600, primero se divide $1600 entre $1000, y luego se multiplica por 1.69 centavos.

$$\text{Comisión SEC} = \frac{\$1600}{\$1000} \cdot \$0.0169 = \$0.02704, \quad \text{que se redondea a } \$0.03.$$

1.69¢ = $0.0169

EJEMPLO 4 Cálculo del costo total de una compra de acciones asistida por un agente

Calcule el costo total (incluyendo los gastos) para Merideth Kolaski, quien realiza una compra, asistida por un corredor, de 325 acciones de Duke Energy al precio promedio del 4 de junio de 2010. Use la estructura típica de comisión con descuento descrita anteriormente.

SOLUCIÓN

Más alto del día, Más bajo del día

$$\text{Precio promedio} = \frac{\$15.88 + \$15.58}{2} = \$15.73$$

media aritmética

Precio por acción, Número de acciones

$$\text{Costo básico} = \$15.73 \cdot 325 = \$5112.25$$

Como el monto del principal está en el segundo escalón de la estructura de la comisión, la comisión del agente es de $65 más el 0.66% de esta cantidad.

$$\text{Comisión del agente} = \$65 + 0.0066 \cdot \$5112.25 = \$65 + \$33.74 = \$98.74$$

Primero se multiplica, luego se suma.

Costo básico, Comisión

$$\text{Costo total} = \$5112.25 + 98.74 = \$5210.99$$

El costo total para Merideth por esta compra es de $5210.99. ▮▮▮

EJEMPLO 5 Cálculo de las ganancias de una venta de acciones automatizada

Calcule la cantidad recibida por David Hertzenberg, cuando realiza una venta de 500 acciones de General Mills al precio más alto del 4 de junio de 2010.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la **tabla 9**, el precio básico de la acción vendida es

$$(\$74.28 \text{ por acción}) \cdot (500 \text{ acciones}) = \$37{,}140.00.$$

Como se venden menos de 1000 acciones, la comisión es de $29.95. Se calcula la comisión de la SEC como se describió anteriormente en el **ejemplo 4**.

$$\frac{\$37{,}140.00}{\$1000} \cdot \$0.0169 = \$0.627666$$

Se redondea hacia arriba para obtener una comisión de la SEC de $0.63. Luego,

$$\begin{aligned} \text{Monto recibido} &= \underset{\text{Precio básico}}{\$37{,}140.00} - \underset{\text{Comisión}}{\$29.95} - \underset{\text{Comisión SEC}}{\$0.63} \\ &= \$37{,}109.42. \end{aligned}$$

David recibió $37,109.42. ■■■

Bonos

En lugar de contribuir con su capital (dinero) a una compañía, usted tal vez prefiera *prestar* dinero a esa compañía, recibiendo una tasa de interés acordada por el uso de su dinero. En este caso, usted compraría un bono de la compañía en lugar de comprar acciones. El bono (préstamo) es emitido a un plazo determinado (periodo de vigencia), después del cual, el bono "vence" y usted recupera el principal (o **valor nominal**). Durante la vigencia, la compañía le paga una tasa de interés fija, la cual depende de las tasas de interés que prevalecen en el momento de la emisión (y también, en cierto grado, de la calificación crediticia de la compañía), y no del valor subyacente de la compañía.

El poseedor de un bono no tiene participación en las utilidades de la compañía, pero tiene (bastante) certeza de recibir oportunamente los pagos de interés. Si una compañía no puede hacer frente al pago del interés del bono ni de los dividendos de las acciones, deberá pagar primero a los tenedores de bonos.

EJEMPLO 6 Cálculo del rendimiento de la inversión en un bono

Jerry Higgins invirtió $10,000 en un bono corporativo a 5 años con el 6% de interés anual, pagado semestralmente. Calcule el rendimiento total de su inversión, suponiendo que Jerry conserva el bono hasta su vencimiento (los 5 años completos). Ignore las comisiones de los agentes.

SOLUCIÓN

Aplicando la fórmula de interés simple (véase la **sección 11.1**).

$$I = Prt = \$10{,}000(0.06)(5) = \$3000.$$

Observe que esta cantidad, $3000, es el rendimiento *total* por el periodo de 5 años, no el rendimiento anual. Asimismo, el hecho de que el interés se pague dos veces por año (3% del valor nominal cada vez) no tiene importancia, puesto que no se trata de interés compuesto. ■■■

Históricamente, la tasa general de rendimiento de la mayoría de los periodos de tiempo ha sido mayor para las acciones que para los bonos. Este hecho (junto con el atractivo de propiedad) ha llevado a algunos inversionistas a evitar totalmente la compra de bonos. Por otro lado, existe menos incertidumbre con los bonos, y el capital de un inversionista poseedor de bonos está sujeto a menor riesgo. Estos hechos pueden hacer más atractivos a los bonos que las acciones, especialmente para los inversionistas retirados que dependen de un ingreso fijo de sus inversiones. Sin embargo, muchos inversionistas buscan conformar un portafolio equilibrado que incluya tanto acciones como bonos.

Fondos de inversión

Un **fondo de inversión** es una cantidad de dinero recolectada por una empresa inversionista entre muchos individuos y/o instituciones, que luego se invierte en muchas acciones, bonos o en instrumentos del mercado de dinero. A finales de la década de 1990 se invirtieron aproximadamente $5 billones en más de 7000 fondos de inversión (también llamados sociedades de inversión). En la primera década de este siglo, aproximadamente 50 millones de dueños de casas en Estados Unidos participaban en fondos de inversión, y la gran mayoría de estas participaciones fueron dentro de cuentas de retiro.



El **proyecto de ley de reformas a Wall Street de 2010** propuso "el conjunto de cambios más radical al sistema de regulación financiera desde la década de 1930". Como respuesta ante la quiebra de un gran número de compañías financieras y de otro tipo, y en medio de una profunda recesión internacional iniciada en 2007, el nuevo proyecto de ley creó una nueva Oficina de Protección al Consumidor Financiero dentro de la Reserva Federal, encabezada por un regulador "independiente" nombrado directamente por el presidente, y con autoridad para definir nuevas reglas que protejan (teóricamente) de prácticas abusivas o fraudes a los consumidores de préstamos hipotecarios y tarjetas de crédito. De hecho, el proyecto de ley creó un gran aparato burocrático de control sobre prácticamente todas las áreas financieras analizadas en este capítulo.

En la década anterior, en 1999, el Congreso estadounidense revocó muchas barreras legales y regulatorias que habían permitido a los grandes conglomerados financieros ofrecer servicios integrados en las áreas de seguros, banca e inversiones.

El Congreso, dominado por los demócratas, tardó un año en someter a votación el proyecto de ley de 2010. De acuerdo con el organismo de control ciudadano Public Citizen, durante ese periodo la industria financiera gastó aproximadamente $600 millones para contratar a unos 1,000 cabilderos que se encargaran de promover sus intereses en el Congreso.

En muchas ocasiones se ha debatido si el proyecto de ley tenía por objetivo ayudar realmente a los consumidores, o bien, pretendía controlar el negocio (o si perseguía ambos objetivos). Se pronosticó que tomaría aproximadamente un año para que las reglas estuvieran consolidadas y se sintiera su impacto.

(Fuente: www.CNNMoney.com)

Comparación de los fondos de inversión frente a bonos y acciones individuales

Ventajas de los fondos de inversión

1. *Sencillez*
   Dejamos que alguien más realice el trabajo.
2. *Diversificación*
   Al ser parte de un gran conglomerado, es más fácil tener intereses en muchos tipos de acciones, lo cual disminuye el riesgo de grandes pérdidas en una acción particular o en un sector particular de la economía.
3. *Acceso a nuevas emisiones*
   Algunas veces las ofertas públicas iniciales (OPI) pueden ser muy redituables. Mientras que los inversionistas individuales encuentran difícil tener acceso a ellas, los grandes activos de un fondo de inversión permiten a los administradores mucho más acceso.
4. *Economías de escala*
   Las grandes compras de acciones normalmente incurren en menores gastos por dólar invertido.
5. *Administración profesional*
   Los administradores profesionales tienen la experiencia para seleccionar las acciones y los momentos adecuados de las compras, lo que favorece los objetivos establecidos del fondo.
6. *Indexación*
   Con administración mínima, un fondo indexado puede mantener un portafolios que imite a un índice común (tal como el S&P 500). Esto permite que los inversionistas individuales de la sociedad de inversión logren rendimientos muy cercanos a los de ese índice.

Desventajas de los fondos de inversión

1. *Impacto de cargos de una sola vez y comisiones recurrentes*
   Los cargos por ventas, las comisiones de administración, las tarifas "12b-1" (usadas para pagar a los representantes de ventas) y los gastos del fondo pueden traslaparse y ser difíciles de identificar. Además, pagar comisiones de administración no garantiza una administración de *calidad*.
2. *Costos ocultos del corredor*
   Las comisiones recurrentes y los gastos se suman para obtener la *razón de gastos* de un fondo de inversión. Pero las comisiones pagadas por la sociedad de inversión por la compra y venta de acciones son adicionales a la razón de gastos. (Desde 1995, se exige a los fondos de inversión transparentar sus costos de comisiones promedio en sus informes anuales).
3. *Algunos riesgos ocultos de pertenecer a un fondo de inversión*
   a) En caso de que un mercado quiebre, salir del fondo de inversión puede significar aceptar valores en lugar de efectivo, y estos tal vez sean difíciles de vender a un buen precio.
   b) Los administradores podrían alejarse de las estrategias establecidas por el fondo.
   c) Como la responsabilidad fiscal se transmite a los inversionistas del fondo de inversión y depende de las compras y ventas realizadas por los administradores de dicho fondo, los inversionistas no pueden evitar condiciones fiscales indeseables.

Fuente: Forbes Guide to the Markets, John Wiley & Sons, Inc.

Existe información abundante en Internet acerca de los **fondos de inversión**. Por ejemplo, el Investment Company Institute (ICI), la asociación nacional estadounidense de la industria de compañías inversionistas, incluye vasto material en el sitio www.ici.org/

Como una sociedad de inversión posee muchas acciones diferentes, cada acción del fondo tiene una fracción de interés en cada una de esas compañías. En un fondo abierto (por mucho, el tipo más común), las nuevas acciones se crean y se emiten a los compradores mientras la compañía del fondo absorbe las acciones de los vendedores. Cada día, el valor de una acción en el fondo (conocido como ***valor neto de activos*** o ***VNA***) se determina como sigue.

Valor neto de activos de un fondo de inversión

Si A = Activos totales del fondo de inversión, L = Pasivos totales del fondo de inversión, y N = Número de acciones en circulación, entonces el **valor neto de activos** se calcula mediante la fórmula:

$$VNA = \frac{A - L}{N}$$

EJEMPLO 7 Determinación del número de acciones de un inversionista en un fondo de inversión

Suponga que en un día determinado un fondo de inversión posee \$500 millones de patrimonio en acciones, \$500,000 en efectivo (no invertido), y \$300,000 en otros activos. El monto total de pasivos es de \$4 millones, y existen 25 millones de acciones en circulación. Si Elaine Jefferson invierte \$50,000 en este fondo, ¿cuántas acciones obtendrá?

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} A &= \$500{,}000{,}000 + \$500{,}000 + \$300{,}000 \\ &= \$500{,}800{,}000 \\ L &= \$4{,}000{,}000 \\ N &= 25{,}000{,}000 \\ VNA &= \frac{A - L}{N} && \text{Fórmula} \\ &= \frac{\$500{,}800{,}000 - \$4{,}000{,}000}{25{,}000{,}000} && \text{Se sustituyen los valores de } A, L \text{ y } N. \\ &= \$19.872 && \text{Se realiza el cálculo.} \end{aligned}$$

Como $\frac{\$50{,}000}{\$19.872} \approx 2516$, los \$50,000 de la inversión de Elaine comprarán (redondeando al número entero más cercano) 2516 acciones. ■■■

Evaluación de los rendimientos de una inversión

Independientemente del tipo de inversión que usted tenga o esté considerando (acciones, bonos, fondos de inversión u otros) es importante poder evaluar con precisión y comparar los rendimientos (pérdidas o ganancias). Aun cuando el desempeño del pasado nunca es garantía de rendimientos futuros, se trata de información crucial. Circula vasta información sobre los mercados de acciones y de bonos en muchas publicaciones (por ejemplo, en el *Wall Street Journal, Investor's Business Daily* y *Barron's Weekly*), así como en numerosos sitios de Internet (por ejemplo, www.nasdaq.com).

La medida más importante del desempeño de una inversión es la **tasa de rendimiento anual**. Esta no *necesariamente* es la misma que el porcentaje de rendimiento, como el calculado en el **ejemplo 1**, porque la tasa de rendimiento anual depende del periodo implicado. Algunos periodos que se reportan comúnmente son el diario, semanal, mensual, de principio de mes a la fecha, trimestral, de principio del trimestre a la fecha, anual, de principio de año a la fecha, 2 años, 3 años, 5 años, 10 años, 20 años y "desde el principio" (es decir, desde que el fondo u otro instrumento de inversión inició).

Los **ejemplos 8 y 9** ilustran algunas de las numerosas complicaciones que surgen cuando uno intenta evaluar y comparar diferentes inversiones.

EJEMPLO 8 Análisis de la tasa de rendimiento anual de una acción

Theo Lieber posee 50 acciones. Su agencia de corretaje (o *broker*) le aseguró que para el final de agosto las acciones cerraron ese mes al precio de $40 (por acción) y el anuncio para el final de septiembre informaba un precio de cierre de $40.12. Para efectos de ilustración, no se consideran posibles dividendos, y se supone que el dinero ganado en un mes determinado no tiene oportunidad de ganar rendimientos adicionales. (Esas ganancias no se pueden "reinvertir"). Calcule lo siguiente.

a) El valor de estas acciones al final de agosto

b) El rendimiento mensual de Theo sobre sus acciones

c) El porcentaje de rendimiento mensual

d) La tasa de rendimiento anual

SOLUCIÓN

a)
$$\text{Valor} = \underset{\text{Precio por acción}}{\$40} \cdot \underset{\text{Número de acciones}}{50} = \$2000$$

b)
$$\text{Rendimiento} = \underset{\text{Cambio en el precio por acción}}{(\$40.12 - \$40)} \cdot \underset{\text{Número de acciones}}{50}$$
$$= \$6$$

c)
$$\text{Porcentaje de rendimiento} = \frac{\text{Rendimiento total}}{\text{Valor total}} \cdot 100\%$$
$$= \frac{\$6}{\$2000} \cdot 100\%$$
$$= 0.3\%$$

d) Como los rendimientos mensuales no ganan más rendimientos, en este caso se usa un rendimiento "aritmético". Simplemente se suma 0.3% doce veces (o se multiplica 0.3% por 12), para obtener 3.6%. La tasa de rendimiento anual es del 3.6%. ▮▮▮

EJEMPLO 9 Análisis de la tasa de rendimiento anual de un fondo de inversión

Kathryn Lutterschmidt posee 80 acciones en un fondo de inversión con un valor neto de activos de $10 al 1 de octubre. Suponga que el único rendimiento que gana el fondo son dividendos del 0.4% mensuales, los cuales se reinvierten automáticamente. Calcule lo siguiente.

a) El valor de las acciones de Kathryn en este fondo al 1 de octubre

b) El rendimiento mensual ***c)*** La tasa de rendimiento anual

SOLUCIÓN

a) Valor = VNA · número de acciones = $10 · 80 = $800

b) Rendimiento mensual = 0.4% de $800 = $3.20

c) En este caso, los rendimientos mensuales se reinvierten. Ocurre una capitalización. Por lo tanto, se usa un rendimiento "geométrico" en lugar del aritmético. Para hacer este cálculo, primero se obtiene el "rendimiento relativo", el cual es 1 más la tasa mensual de rendimiento:

$$1 + 0.4\% = 1 + 0.004 = 1.004.$$

Luego se multiplica este rendimiento relativo 12 veces (elevándolo a la potencia 12) para obtener un rendimiento anual relativo: $1.004^{12} \approx 1.049$. Finalmente, se resta 1 y se multiplica por 100 para convertirlo de nuevo a una tasa porcentual. La tasa de rendimiento anual es del 4.9%. ▮▮▮

Un rendimiento geométrico como el que acabamos de obtener en el **ejemplo 9** se conoce con frecuencia como el "rendimiento anual efectivo". [Observe que el cálculo de un rendimiento aritmético habría ignorado la reinversión compuesta y habría subestimado la tasa anual efectiva por 0.1%, porque $12(0.4\%) = 4.8\%$].

Construcción de un fondo de reserva

La función de inversión más importante, para la mayoría de las personas, es abrir una cuenta para uso futuro, probablemente para cuando llegue el retiro. En el **ejemplo 8** de la **sección 11.1**, comparamos dos programas de retiro, el plan A y el plan B, para enfatizar la importancia de iniciar un programa de inversión para el retiro lo más pronto posible. El rendimiento de las inversiones a través del tiempo está sujeto normalmente a fórmulas basadas en las sumatorias de secuencias geométricas, las cuales se presentarán en la **Extensión** de este capítulo, sobre fraudes de inversión. Las fórmulas incluidas aquí se usarán sin mostrar de dónde provienen.

Existen dos obstáculos principales para construir un fondo de reserva (o fondo de estudios, o una herencia o un fondo caritativo, o para cualquier acción donde la meta sea acumular riqueza). Estos obstáculos son la *inflación* y los *impuestos* (*sobre la renta*).

La **tabla 4 (página 578)** muestra las tasas reales de inflación histórica durante 30 años (de 1979 a 2009). Esto refleja un promedio de aproximadamente 4.0% anual. Si hubiéramos invertido para el retiro durante ese periodo, la proporción de inflación (véase la **página 579**) indica que habríamos terminado pagando en 2009 aproximadamente $\frac{214.5}{72.6} = 3.0$ veces más por bienes y servicios que cuando iniciamos en 1979.

Este efecto inflacionario, si no se toma en cuenta, puede afectar considerablemente la vida en el retiro; sin embargo, existe un modo bastante práctico de prevenirlo. Recuerde que el índice de precios al consumidor refleja la tendencia (por lo general) ascendente de los precios, y que los sueldos y salarios la siguen de cerca. Periódicamente (quizás una vez al año), podemos incrementar simplemente las contribuciones lo suficiente para mantener a raya la inflación.

La siguiente fórmula nos permite calcular los valores futuros de una cuenta donde los depósitos constantes se ajustan sistemáticamente por la inflación. Si la tasa de la inflación es i, entonces la cantidad R se deposita al final del año 1, la cantidad $R(1+i)$ se deposita al final del año 2, y así sucesivamente, con el depósito al final del año n, en general, igual a $R(1+i)^{n-1}$.

Valor futuro de una cuenta de retiro ajustada a la inflación

Suponga depósitos anuales en una cuenta de retiro, ajustada por la inflación. Si

i = tasa anual de inflación,

R = depósito inicial (al final del año 1),

r = tasa de rendimiento anual sobre el dinero de la cuenta,

y n = número de años que se realizan depósitos,

entonces, el valor V de la cuenta al final de n años se calcula como sigue.

$$V = R\left[\frac{(1+r)^n - (1+i)^n}{r-i}\right]$$

EJEMPLO 10 Ajuste de una cuenta de retiro considerando la inflación

En el **ejemplo 8** de la **sección 11.1**, Gina optó por el plan A, depositando \$2000 en cada cumpleaños de los 21 a los 30 años de edad, luego dejó de depositar; y a la edad de 65 años tenía \$428,378. Peter, con el plan B, esperó hasta los 31 años para realizar el primer depósito de \$2000, luego depositó \$2000 cada año hasta los 65 de edad y terminó solo con \$344,634.

Calcule el valor final de la cuenta, a la edad de 65, para el plan B de Peter, suponiendo que los 35 depósitos anuales se habían ajustado para un 4% de inflación anual.

Postergar el pago de impuestos tanto como sea posible, aun cuando lo sugieran los asesores financieros, no siempre es el mejor plan. El Plan de Retiro Individual **Roth IRA,** disponible en Estados Unidos desde 1988, está financiado con dólares gravados, pero todos los fondos, tanto el principal como las ganancias, son libres de impuestos. Para una persona joven, con muchos años para hacer "crecer" la inversión, la tentación de eliminar los impuestos durante ese crecimiento es atractiva, especialmente si el retiro de fondos se va a realizar cuando el cuentahabiente se encuentre en un nivel más alto de impuestos que cuando se hicieron los depósitos. Las ventajas también incluyen menos restricciones sobre quién es elegible, retiros no forzados, e inexistencia de restricciones sobre cuándo se pueden realizar los retiros.

SOLUCIÓN

Use la fórmula de "ajuste a la inflación" presentada en el recuadro, con $R = \$2000$, $r = 0.08$, $i = 0.04$, y $n = 35$. El valor final de la cuenta es

$$V = \$2000\left[\frac{(1 + 0.08)^{35} - (1 + 0.04)^{35}}{0.08 - 0.04}\right] \approx \$541{,}963.$$

Con el ajuste a la inflación, el plan B, a la edad de 65 años, acumula la cantidad de $541,963. ■■■

La segunda barrera para generar riqueza, los impuestos, no es tan fácil de manejar. Usted encontrará que cuanto más invierta y más ganancias genere, mayor será el porcentaje que nuestro sistema progresivo de impuestos reclamará de sus ganancias. Probablemente la herramienta más flexible para atenuar (no superar) este efecto es aprovechar al máximo las cuentas con impuestos diferidos, como una TSA (Tax-Sheltered Annuity o plan 403*b*); una IRA (Individual Retirement Account o plan 401*k*), especialmente si el empleador contribuye con fondos; o, si la persona está autoempleada, una SEP (Simplified Employee Pension) o un plan Keogh.

En la mayoría de las cuentas de retiro con impuestos diferidos, todo el dinero acumulado se grava cuando se retira (presumiblemente en los años de retiro). Por lo tanto, pareciera que diferir los impuestos no es una ventaja, sino que simplemente pospone la fecha en que se paga el impuesto, suponiendo que la tasa impositiva permanece sin cambio. Para mostrar la inobjetable ventaja de diferir impuestos, compararemos las dos situaciones usando las siguientes fórmulas. Para una comparación imparcial, consideraremos los valores de ambas cuentas *después de que se han pagado todos los impuestos*.

Cuentas de retiro con impuestos diferidos frente a cuentas gravadas

En ambos casos,

R = cantidad depositada anualmente del salario actual para conformar la cuenta de retiro,
n = número de años durante los que se hacen las contribuciones,
r = tasa de rendimiento anual sobre el dinero de la cuenta,
t = tasa impositiva marginal del cuentahabiente,
V = valor final de la cuenta, **considerando todas las acumulaciones y pago de todos los impuestos.**

Cuenta de impuestos diferidos

La cantidad total R se deposita cada año, todas las contribuciones, más las ganancias, obtienen un rendimiento durante n años, tiempo en el cual se pagan impuestos sobre todo el dinero de la cuenta. El valor final de la cuenta se calcula como sigue.

$$V = \frac{(1 - t)R[(1 + r)^n - 1]}{r}$$

Cuenta gravable

Cada cantidad R retenida del salario se grava inmediatamente, disminuyendo la cantidad del depósito anual a $(1 - t)R$. Además, las ganancias anuales también se gravan al final de cada año. Pero al final del periodo de acumulación, no habrá ningún adeudo fiscal. El valor de la cuenta final se calcula como sigue.

$$V = \frac{R[(1 + r(1 - t))^n - 1]}{r}$$

EJEMPLO 11 Comparación de cuentas de retiro con impuesto diferido y gravables

Tara Culliney y Steve Day, ambos en el nivel fiscal marginal del 20%, contribuirán con $2000 anuales durante 20 años a sus cuentas de retiro con un rendimiento anual del 5%. Tara elige una cuenta con impuestos diferidos, mientras que Steve elige una cuenta gravable. Compare los valores de las cuentas al final del periodo de acumulación, después de pagar todos los impuestos.

SOLUCIÓN

Tenemos que $R = \$2000$, $n = 20$, $r = 0.05$ y $t = 0.20 = 0.2$.

Tara: $$V = \frac{(1 - 0.2)\$2000[(1 + 0.05)^{20} - 1]}{0.05}$$ Se sustituyen valores en la fórmula de "impuestos diferidos".

$$\approx \$52{,}906.$$

Steve: $$V = \frac{\$2000[(1 + 0.05(1 - 0.2))^{20} - 1]}{0.05}$$ Se sustituyen valores en la fórmula de cuenta "gravable".

$$\approx \$47{,}645.$$

Difiriendo impuestos, Tara termina con $5261 más, es decir, aproximadamente 11%. ■■■

Con grandes aportaciones, un periodo largo de acumulación, tasas más altas de rendimiento y un nivel fiscal más alto, se acentúa el efecto positivo de diferir impuestos.

EJEMPLO 12 Comparación de cuentas de retiro con impuesto diferido y gravables

Repita el **ejemplo 11**, pero esta vez considere que $R = \$5000$, $n = 40$, $r = 0.10$, y $t = 0.40 = 0.4$.

SOLUCIÓN

Tara: $$V = \frac{(1 - 0.4)\,\$5000\,[(1 + 0.10)^{40} - 1]}{0.10}$$ Se sustituyen valores en la fórmula de "Impuestos diferidos".

$$\approx \$1{,}327{,}778.$$

Steve: $$V = \frac{\$5000[(1 + 0.10\,(1 - 0.4))^{40} - 1]}{0.10}$$ Se sustituyen valores en la fórmula de cuenta "gravable".

$$\approx \$464{,}286.$$

Con estos parámetros más altos, la ventaja de Tara es muy notable: $863,492, o aproximadamente 186% más. ■■■

Diferir impuestos no es lo mismo que "libre de impuestos", lo que hace el resultado del **ejemplo 12** menos impresionante de lo que parece. Este tipo de ingresos para la jubilación se grava en el momento de retirar el dinero. Los agentes que venden planes con impuestos diferidos hacen hincapié en que usted probablemente estará en un nivel tributario más bajo después del retiro, debido al ingreso reducido. Pero muchos encuentran que esto no es así, en especial cuando se hace una comparación con los ingresos profesionales iniciales, y particularmente si las inversiones en su cuenta de retiro están muy bien pensadas, lo cual puede hacer sus retiros de dinero requeridos bastante grandes. Además, ¿quién puede decir cuáles serán las tasas de retiro dentro de 30 años?

Para reflexionar

Resumen de inversiones

El resumen de varios tipos de inversiones de la **tabla 10,** de la siguiente página, se basa en casos promedio y solo tiene la finalidad de comparar en general las oportunidades de inversión. Existen muchas excepciones a las características descritas. Por ejemplo, aunque la tabla no muestra comisiones de venta en los fondos de inversión, esto solo es verdad para los llamados fondos sin comisión de entrada. Los fondos "con comisión de entrada" cobran "tarifas de redención anticipada" u otra clase de cargos por ventas. Esto no quiere decir que un fondo sin comisión es necesariamente mejor. Por ejemplo, la ausencia de comisiones por ventas puede estar compensada por "comisiones por administración" más altas.

Los diferentes costos, así como otros factores importantes, están claramente identificados en un fondo considerado y se deben estudiar con sumo cuidado antes de tomar una decisión de compra. No está de más cierto

(continúa)

Para reflexionar (*continuación*)

conocimiento especializado para invertir en un fondo de inversión, al igual que sucede con otras opciones, como la compra directa de acciones, terrenos sin urbanizar u objetos de colección.

Para usar la tabla, lea a lo largo de las columnas para identificar las características generales de la inversión. La "liquidez" se refiere a la capacidad para obtener efectivo rápidamente de una inversión.

Para investigación individual o en grupo

Elabore una lista ***a)*** de algunos tipos de inversión que usted recomiende y ***b)*** aquello que recomendaría eliminar a algún amigo cuyo objetivo principal de inversión es el siguiente.

1. Evitar perder dinero.
2. Evitar la pérdida del poder adquisitivo.
3. Evitar tener que aprender acerca de inversiones.
4. Evitar tener que trabajar en las inversiones.
5. Garantizar la obtención de una ganancia.
6. Disponer de "efectivo" en cualquier momento.
7. Obtener un rendimiento tan alto como sea posible.
8. Disponer de "efectivo" sin pagar comisiones.
9. Obtener utilidades rápidamente.
10. Tener crecimiento a largo plazo.

Tabla 10 Resumen de inversiones

Inversión	Protección del principal	Protección contra la inflación	Tasa de rendimiento (%)	Certeza del rendimiento	Comisión por venta	Liquidez	Crecimiento a largo plazo	Se requiere trabajo del inversionista	Se requiere conocimiento especializado
Efectivo	excelente	ninguna	0			excelente	no	no	no
Seguro de vida ordinario	buena	deficiente	2-4	excelente	alta	excelente	no	no	no
Bonos de ahorro	excelente	deficiente	3-5	excelente	ninguna	excelente	no	no	no
Ahorros bancarios	excelente	deficiente	2-4	excelente	ninguna	excelente	no	no	no
Unión de crédito	excelente	deficiente	3-4	excelente	ninguna	excelente	no	no	no
Bonos corporativos	buena	deficiente	5-7	excelente	baja	buena	no	algo	algo
Bonos municipales libres de impuesto	excelente	deficiente	2-5	excelente	mediana	buena	no	no	algo
Acciones corporativas	buena	buena	3-12	buena	mediana	buena	sí	algo	algo
Acciones preferentes	buena	deficiente	4-8	excelente	mediana	buena	no	algo	algo
Fondos de inversión	buena	buena	3-12	buena	ninguna	buena	sí	no	no
Compra de casa	buena	buena	4-10	buena	mediana	deficiente	sí	sí	no
Hipotecas sobre casas de otros	razonable	deficiente	5-8	razonable	alta	deficiente	no	sí	algo
Terrenos sin urbanizar	razonable	buena	?	razonable	mediana	deficiente	sí	no	sí
Renta de propiedades	buena	buena	4-8	razonable	mediana	deficiente	sí	sí	algo
Estampillas, monedas, antigüedades	razonable	buena	0-10	razonable	alta	deficiente	sí	sí	sí
Negocio propio	razonable	buena	0-20	deficiente	alta	deficiente	sí	sí	sí

11.5 EJERCICIOS

*Remítase a la tabla de acciones (***tabla 9** *de la* ***página 608****) en los ejercicios 1 a 36.*

Lectura de informes sobre acciones *Obtenga cada uno de los siguientes conceptos.*

1. precio de cierre de CarMax (KMX)
2. ventas del día de FedEx (FDX)
3. cambio en relación con el día anterior de Harley-Davidson (HOG)
4. precio de cierre de Sara Lee (SLE)
5. venta más alta en 52 semanas de Pearson ADS (PSO)
6. venta más baja en 52 semanas de Walt Disney (DIS)
7. dividendo de Allstate (ALL)
8. precio de apertura de Bank of America (BAC)
9. ventas del día de General Mills (GIS)
10. porcentaje de cambio respecto del día anterior para Caterpillar Inc. (CAT)
11. porcentaje de cambio del principio de año a la fecha de CarMax (KMX)
12. porcentaje de cambio del principio de año a la fecha de Yum!Brands (YUM)
13. razón entre precio y ganancias para Caterpillar Inc. (CAT)
14. porcentaje de rendimiento de Chevron (CVX)

Cálculo de costos de acciones *Calcule el costo básico (ignorando cualquier comisión del corredor bursátil) de cada compra de acciones, al precio de cierre del día.*

15. 600 acciones de Chevron (CVX)
16. 100 acciones de Sara Lee (SLE)
17. 500 acciones de FedEx (FDX)
18. 800 acciones de Allstate (ALL)

Cálculo de costos de acciones *Calcule el costo, al precio de cierre del día, para cada una de las compras de acciones indicadas. Incluya las comisiones típicas del corredor de descuento como se describió en el texto.*

	Código de la acción	Número de acciones	Tipo de transacción
19.	PSO	60	asistida por el corredor
20.	GIS	70	asistida por el corredor
21.	BAC	355	automatizada
22.	CAT	585	automatizada
23.	HOG	2500	asistida por el corredor
24.	DUK	1500	automatizada
25.	YUM	2400	automatizada
26.	DIS	20,000	asistida por el corredor

Cálculo de ingresos por venta de acciones *Calcule la cantidad recibida por los vendedores de cada grupo de acciones (a precios de cierre del día). Deduzca los gastos de venta como se describió en el texto.*

	Código de la acción	Número de acciones	Tipo de transacción
27.	ALL	400	asistida por el corredor
28.	KMX	600	asistida por el corredor
29.	CVX	500	automatizada
30.	DE	700	automatizada
31.	FDX	1350	automatizada
32.	KMB	2740	automatizada
33.	SLE	1480	asistida por el corredor
34.	PSO	1270	asistida por el corredor

Determinación de resultados netos de transacciones combinadas *Para cada transacción combinada (realizada al precio de cierre del día), determine el monto neto pagado o cobrado. Suponga gastos típicos como los descritos en el texto.*

35. Paul Burke compró 100 acciones de Walt Disney y vendió 20 acciones de General Mills, ambas transacciones asistidas por el corredor.
36. Rebecca Leidy compró 800 acciones de Bank of America y vendió 300 acciones de Chevron, ambas transacciones asistidas por el corredor.

Costos y rendimientos de inversiones bursátiles *Para cada una de las siguientes inversiones en acciones, calcule* ***a)*** *el precio de la compra total,* ***b)*** *el monto total del dividendo,* ***c)*** *el capital ganado o perdido,* ***d)*** *el rendimiento total y* ***e)*** *el porcentaje de rendimiento.*

	Número de acciones	Precio de compra por acción	Dividendo por acción	Precio de venta por acción
37.	40	$20.00	$2.00	$44.00
38.	20	$25.00	$1.00	$22.00
39.	100	$12.50	$1.08	$10.15
40.	200	$ 8.80	$1.12	$11.30

Rendimiento total sobre inversiones en bonos *Calcule el rendimiento total ganado por cada bono de los ejercicios 41 a 44.*

	Valor nominal	Tasa de interés anual	Plazo al vencimiento
41.	$ 1000	5.5%	5 años
42.	$ 5000	6.4%	10 años
43.	$10,000	7.11%	3 meses
44.	$50,000	4.88%	6 meses

Valor neto de activos de un fondo de inversión *Para cada inversión, determine* ***a)*** *el valor neto de los activos y* ***b)*** *el número de acciones compradas.*

	Monto invertido	Total de activos del fondo	Total de pasivos del fondo	Total de acciones en circulación
45.	$ 3500	$875 millones	$ 36 millones	80 millones
46.	$ 1800	$643 millones	$102 millones	50 millones
47.	$25,470	$2.31 miles de millones	$135 millones	263 millones
48.	$83,250	$1.48 miles de millones	$ 84 millones	112 millones

Cálculo de los rendimientos mensuales y anuales de la inversión *En cada inversión, suponga que no hay oportunidad de reinversión de los rendimientos. En cada caso, calcule* ***a)*** *el rendimiento mensual,* ***b)*** *el rendimiento anual y* ***c)*** *el porcentaje de rendimiento anual.*

	Cantidad invertida	Porcentaje de rendimiento mensual
49.	$ 645	1.3%
50.	$ 895	0.9%
51.	$2498	2.3%
52.	$4983	1.8%

Tasa de rendimiento anual efectiva de fondos de inversión *Suponga que cada fondo de inversión gana rendimientos mensuales que se reinvierten y, por consiguiente, ganan la misma tasa. En cada caso, determine* ***a)*** *el valor inicial de la inversión,* ***b)*** *el primer rendimiento mensual y* ***c)*** *el rendimiento anual efectivo.*

	VNA inicial	Número de acciones compradas	Porcentaje de rendimiento mensual
53.	$ 9.63	125	1.5%
54.	$12.40	185	2.3%
55.	$11.94	350	1.83%
56.	$18.54	548	2.22%

Cálculo de comisiones *En cada una de las siguientes transacciones, determine las cantidades faltantes en las columnas* ***a)***, ***b)*** y ***c)***.

	Número de acciones	Precio por acción	*a)* Monto del principal	*b)* Comisión por asistencia de corredor	*c)* Comisión por transacción automatizada
57.	10	$1.00	_____	_____	_____
58.	10	$100.00	_____	_____	_____
59.	400	$1.00	_____	_____	_____
60.	400	$100.00	_____	_____	_____
61.	4000	$1.00	_____	_____	_____
62.	4000	$100.00	_____	_____	_____

63. Remítase a los **ejercicios 57 a 62**, y llene los espacios en el enunciado siguiente.

Una compra asistida por el corredor cuesta menos que un compra automatizada solo cuando un número relativamente _____ (grande/pequeño) de acciones se compran en un precio relativamente _____ (alto/bajo) por acción.

Cuentas de retiro ajustadas a la inflación *Calcule el valor futuro (redondeando al dólar más próximo) de cada cuenta de retiro ajustada a la inflación. Los depósitos se realizan al final de cada año.*

	Tasa de inflación anual	Depósito inicial	Tasa de rendimiento anual	Número de años
64.	2%	$1000	6%	20
65.	3%	$2000	5%	25
66.	4%	$2500	7%	30
67.	1%	$5000	6.5%	40

Efecto de diferir impuestos en las cuentas de retiro *Calcule el valor final después de pagar impuestos, para cada cuenta, si* ***a)*** *se difieren los impuestos y* ***b)*** *no se difieren los impuestos. En ambos casos, los depósitos se realizan al final de cada año.*

	Tasa impositiva marginal	Contribución regular diferida	Tasa de rendimiento anual	Número de años
68.	10%	$500	7%	15
69.	15%	$1000	5%	30
70.	28%	$3000	10%	25
71.	35%	$1500	6%	10

72. ***Depósitos mensuales ajustados considerando la inflación*** En una cuenta de retiro ajustada a la inflación, sea i la inflación anual, r el rendimiento anual, y n el número de años, como en el texto, pero suponga que los depósitos se realizan en forma mensual, y no anual, con un depósito inicial R.

a) ¿Qué expresión representa la cantidad que se depositaría al final del segundo mes?

b) Modifique la fórmula de valor futuro de una cuenta ajustada a la inflación para manejar los depósitos más frecuentes.

c) Calcule (redondeando al dólar más cercano) el valor futuro de los depósitos mensuales de $100 (inicialmente) durante 20 años, si $i = 0.03$ y $r = 0.06$.

73. ***Cálculo de una tasa desconocida*** A partir de la fórmula de interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n,$$

realice lo siguiente.

a) Despeje r en la fórmula.

b) Determine la tasa anual r si $50 aumentan a $85.49 en 10 años con interés capitalizable trimestralmente. Redondee r a la décima más próxima del porcentaje.

74. ***Comparación de capitalización continua y anual*** En el texto se sugirió que la inflación se refleja con más exactitud mediante la fórmula de capitalización continua que con la de capitalización periódica. Calcule la razón

$$\frac{Pe^{rt}}{P(1 + r)^n} = \frac{e^{rt}}{(1 + r)^n}$$

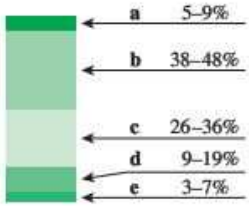
para obtener qué tanto (redondeando a la décima más próxima del porcentaje) excede la capitalización continua a la capitalización anual. Use una tasa del 3% para un periodo de 30 años.

Diversificación de fondos de inversión entre clases de activos *Los fondos de inversión (así como otras clases de inversiones) se clasifican normalmente en una de varias "clases de activos", de acuerdo con las clases de acciones u otros valores que los integran. Los fondos con capitalización pequeña son más arriesgados, mientras que el efectivo es más conservador. Muchos inversionistas, frecuentemente con la ayuda de un asesor, intentan conformar su portafolio de acuerdo con las etapas de su vida. Básicamente, la idea es que una persona más joven suele ser más arriesgada (y asumir más riesgo). Los diagramas de inversión en este caso muestran rangos típicos de porcentaje que podría recomendar un asesor de inversiones.*

Clases de activos
a. Crecimiento con riesgo (capitalización pequeña)
b. Crecimiento
c. Crecimiento e ingreso
d. Ingreso
e. Efectivo

En los ejercicios 75 a 78, divida el dinero del inversionista en cinco categorías, de modo que se posicionen justo a la mitad de los rangos recomendados.

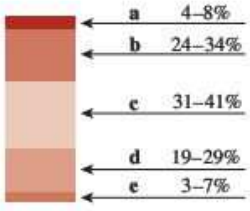
75. Candace Cooney, en sus primeros años de inversión, con $20,000 para invertir



Primeros años de inversión
Relativamente pocas acciones

Perspectiva de inversión a largo plazo

76. Stephen Jennings, en sus años de buenas ganancias, con $250,000 para invertir

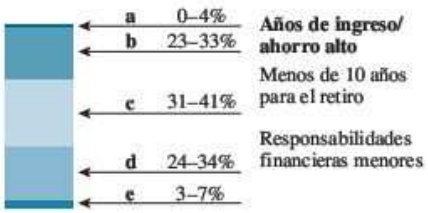


Años de buenas ganancias
Diez o más años para el retiro

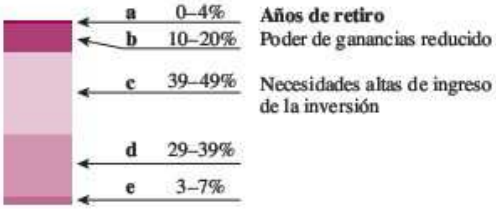
Perspectiva de inversión a largo plazo

Necesidades bajas de ingreso de la inversión

77. Kevin Clarke, en sus años de ingreso/ahorro alto, con $400,000 para invertir



78. Lauren Ellis, retirada, con $845,000 para invertir



Efecto de los impuestos sobre el rendimiento de la inversión *El ingreso de bonos municipales generalmente está exento de impuestos federales, y algunas veces de impuestos estatales sobre la renta. Para un inversionista con una tasa marginal combinada de impuesto federal y estatal del 35%, un rendimiento gravable del 6% produciría solo 3.9% (el 65% del 6%). De modo que para esa tasa impositiva, un rendimiento del 3.9% exento de impuesto es equivalente a un rendimiento gravable del 6%. Calcule la tasa de rendimiento exenta de impuesto que es equivalente a la tasa de rendimiento gravable para cada inversionista.*

	Inversionista	Tasa impositiva combinada marginal	Tasa de rendimiento gravable
79.	Patrick Campbell	25%	5%
80.	Jaclyn Autrey	30%	7%
81.	Brandi Bankston	35%	8%
82.	Chris Barker	40%	10%

Escriba las respuestas de los ejercicios 83 a 90. Se requiere algo de investigación.

83. Describa el concepto "costo promedio en dólares", y relaciónelo con la ventaja número 1 de los fondos de inversión listadas en el texto.

84. Consulte la **tabla 9** del texto, y diga si el 4 de junio de 2010 fue un "buen día" o un "mal día" en Wall Street.

85. Regístrese en www.napfa.org para investigar acerca de planificadores financieros. Luego informe lo que usted buscaría en un planificador.

86. Se ha hecho un gran esfuerzo de investigación para intentar entender y pronosticar las tendencias del mercado accionario. Analice el término *ingeniería financiera*. En esta área de estudio, ¿qué es un *analista cuantitativo* (o *quant*)?

87. En lo que se refiere a fondos de inversión, analice las diferencias entre un *fondo que cobra comisión de entrada* y un *cargo por ventas contingente y diferido*.

88. ¿Qué se entiende por *crecimiento de las acciones* e *ingreso de las acciones*?

89. En relación con la investigación corporativa en Estados Unidos, describa la diferencia entre un propietario y un prestamista.

90. Comente la gráfica que se muestra a continuación.



EXTENSIÓN Esquemas de Ponzi y otros fraudes de inversión*

Secuencias geométricas • Esquemas piramidales • Esquemas de Ponzi

Secuencias geométricas En una **secuencia geométrica** (presentada por primera vez en el **capítulo 1**), cada término después del primero se genera multiplicando el término anterior por la **razón común**, un número que permanece constante a través de la secuencia. Por ejemplo, una secuencia geométrica con el primer término igual a 3 y razón común 2 inicia como sigue:

3, 6, 12, 24, 48, 96,...

**Fuentes:* www.usatoday.com, www.moneymorning.com, www.nytimes.com, www.wikipedia.org

En general, si el primer término se denota con a, la razón común se denota con r, y si existen n términos, entonces, la secuencia completa es

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}.$$

(Verifique por razonamiento inductivo que el n-ésimo término sea realmente ar^{n-1}).

La suma de los n términos de la secuencia geométrica de arriba se escribe como

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por r:

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Ahora, colocamos estas dos ecuaciones una debajo de la otra, y restamos como sigue.

$$\begin{array}{rlllll} S = a & + ar & + ar^2 & + \cdots + ar^{n-2} & + ar^{n-1} \\ Sr = ar & + ar^2 & + ar^3 & + \cdots + ar^{n-1} & + ar^n \\ \hline S - Sr = (a - ar) & + (ar - ar^2) & + (ar^2 - ar^3) & + \cdots + (ar^{n-2} - ar^{n-1}) & + (ar^{n-1} - ar^n) \end{array}$$

Ahora podemos reacomodar y reagrupar los términos de la derecha para obtener lo siguiente.

$$\begin{aligned} S - Sr &= a + (ar - ar) + (ar^2 - ar^2) + \cdots + (ar^{n-1} - ar^{n-1}) - ar^n \\ &= a + 0 + 0 + \cdots + 0 - ar^n \end{aligned}$$

Observe que todos los términos de la derecha, con excepción de a y $-ar^n$, se reacomodaron en pares para eliminarlos. De esta forma, se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} S - Sr &= a - ar^n \\ S(1 - r) &= a(1 - r^n) && \text{Se factorizan ambos lados.} \\ S &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} && \text{Se despeja } S. \end{aligned}$$

La suma de una secuencia geométrica

Si una secuencia geométrica tiene como primer término a y r como razón común, y tiene n términos en total, entonces la suma de los n términos se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}}$$

La habilidad para reconocer una secuencia geométrica y sumar sus términos es muy útil en muchas aplicaciones, incluyendo la detección de fraudes de inversión.

Esquemas piramidales A casi todos nos han invitado alguna vez, ya sea por correo electrónico u otro medio, a enviar un mensaje a dos (o más) personas. Algunas veces se trata de una "cadena". Pero si implica el envío de dinero a alguien, probablemente se trata de un **esquema piramidal**.

EJEMPLO 1 Análisis de pagos en un esquema piramidal

Usted recibe una carta con una lista de tres nombres, junto con las siguientes instrucciones.

1. Enviar $1 al nombre que aparece al inicio de la lista.
2. Eliminar ese nombre y mover los otros dos nombres hacia arriba de la lista.
3. Agregar su propio nombre al final de la lista.
4. Enviar la misma carta, con la nueva lista, a otras dos personas.

Suponga que usted decide participar (se convierte en miembro), que sus dos candidatos también participan, que los cuatro candidatos de sus candidatos también participan, y que los otros ocho candidatos también participan. Esto se conoce como el modelo de "cada uno recluta a dos" (o modelo de 8 bolas). La **figura 1** lo muestra a usted junto con los siguientes tres niveles de participación.

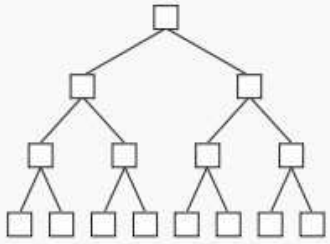
Nivel	Diagrama de participación	Número de miembros
1		1
2		2
3		4
4		8

Diagrama de participación en un esquema piramidal de 8 bolas

Figura 1

a) ¿Cuántos miembros hay contándolo a usted y considerando a todos los demás implicados?

b) ¿Cuánto dinero recibirá usted?

c) ¿Cuál es su ganancia?

SOLUCIÓN

a) $1+2+4+8=15$

b) Usted recibe \$1 de cada nivel de 4 miembros, para un total de \$8.

c) Ganancia = \$8 (Ingreso) − \$1 (Costo) = \$7 (menos dos sobres y dos estampillas postales) ▮▮▮

En la **figura 1** del **ejemplo 1** observe que, iniciando con un miembro en el nivel 1, el número de miembros en un nivel determinado es el doble del número de miembros del nivel anterior.

EJEMPLO 2 Determinación del número de miembros en un esquema piramidal

Para cada uno de los siguientes niveles, obtenga el número total de miembros, partiendo del nivel 1 hasta el nivel indicado. Use razonamiento inductivo en el inciso ***c)***.

a) 4 ***b)*** 7 ***c)*** N

SOLUCIÓN

a) $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ (o, $2^4 - 1$)

b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$ (o, $2^7 - 1$)

c) Suponiendo que el patrón observado en los incisos ***a)*** y ***b)*** se mantiene, el número total de miembros del nivel 1 al nivel N, incluyendo este último, sería

$$2^N - 1.$$

▮▮▮

La expresión $2^N - 1$, del **ejemplo 2*c)***, se obtuvo por inducción, pero también se puede deducir usando la fórmula de la suma de una secuencia geométrica presentada anteriormente.

EJEMPLO 3 Deducción del número de miembros en un esquema piramidal

Use razonamiento deductivo para *probar* que $2^N - 1$ es el número total de miembros en una pirámide del tipo "cada uno recluta dos" con N niveles.

SOLUCIÓN

El número de miembros en los N niveles es $1, 2, 4, 8, \ldots,$ y 2^{N-1}. Su suma es la suma de una secuencia geométrica con

$$\text{primer término } a = 1, \text{ razón común } r = 2, \text{ número de términos } n = N.$$

Entonces la suma se obtiene como sigue.

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad \text{Fórmula de la suma}$$

$$= \frac{1(1 - 2^N)}{1 - 2} \qquad \text{Se sustituye } a = 1, r = 2, n = N.$$

$$= \frac{2^N - 1}{2 - 1} \qquad \text{Se multiplican el numerador y el denominador por } -1.$$

$$= 2^N - 1 \qquad \text{Se simplifica.}$$

La **tabla 11** resume los diferentes valores implicados conforme se construye la pirámide hacia abajo.

Tabla 11 Los números de un esquema piramidal donde "cada uno recluta dos"

Número de nivel n	Número de miembros en el nivel n	Número total de miembros en todos los niveles hasta el nivel n inclusive
1	$1 = 2^{1-1}$	$1 = 2^1 - 1$
2	$2 = 2^{2-1}$	$1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$
3	$4 = 2^{3-1}$	$1 + 2 + 4 = 7 = 2^3 - 1$
4	$8 = 2^{4-1}$	$1 + 2 + 4 + 8 = 15 = 2^4 - 1$
5	$16 = 2^{5-1}$	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 = 2^5 - 1$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
N	2^{N-1}	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{N-1} = 2^N - 1$

La pirámide debe construirse hacia abajo indefinidamente si todos los miembros van a recibir su ganancia. Pero una pirámide con, digamos, 20 niveles requiere

$$2^{20} - 1 = 1{,}048{,}575 \text{ miembros.}$$

Y exactamente 33 niveles implicarían a

$$2^{33} - 1 = 8{,}589{,}934{,}591 \text{ miembros,}$$

lo cual excede la población mundial. Por lo tanto, cada esquema piramidal falla tarde o temprano, y con toda probabilidad sería antes de alcanzar 33 niveles. Cuando falla, los miembros de los tres últimos niveles no reciben su pago. Esto significa que si la falla ocurre después de N niveles, entonces el número de miembros que pierden su dinero es

$$2^{N-1} + 2^{N-2} + 2^{N-3}.$$

El hecho de que un **esquema piramidal** brinde ganancias a relativamente pocos a expensas de muchos, la mayoría de los cuales no entienden cómo funciona, es la razón por la que estos esquemas son ilegales en Estados Unidos (y en muchos otros países). Si los participantes reciben bienes o servicios comparables en valor a su "comisión de entrada", entonces la combinación de promoción (reclutamiento) y venta (bienes o servicios) se puede convertir (técnicamente) en un plan de marketing multinivel legal. Pero existe una línea muy fina entre los negocios legítimos y el fraude. La distinción legal reside en si el reclutamiento existe para promover el producto, o el producto existe para promover el reclutamiento.

Ahora podemos expresar la fracción de todos los participantes que perderán dinero, como sigue.

$$\text{Fracción de quienes pierden} = \frac{2^{N-1} + 2^{N-2} + 2^{N-3}}{2^N - 1} \quad \begin{array}{l}\longleftarrow \text{Número de los que pierden}\\ \longleftarrow \text{Número de participantes}\end{array}$$

$$= \frac{2^{N-3}(2^2 + 2 + 1)}{2^N - 1} \quad \text{Se factoriza } 2^{N-3} \text{ en el numerador.}$$

$$= \frac{2^{N-3}(7)}{2^N - 1} \quad \text{Se suma.}$$

Eliminar el -1 del denominador hace al denominador (ligeramente) mayor, de ahí la fracción total menor. Entonces podemos establecer lo siguiente.

$$\text{Fracción de quienes pierden} > \frac{2^{N-3}(7)}{2^N}$$

$$= \frac{7}{2^{N-(N-3)}} \quad \text{Se aplica la regla de los exponentes.}$$

$$= \frac{7}{2^3} \quad \text{Se simplifica el exponente.}$$

$$= \frac{7}{8} \quad \text{Se simplifica.}$$

Sin importar cuántos niveles ganen, todos los que se encuentran en los últimos tres niveles pierden, y estos son más de $\frac{7}{8}$ de todos los participantes.

Esquemas de Ponzi Los esquemas piramidales son relativamente sencillos, aunque los promotores tienden a eliminar el uso de términos como "pirámide" y "esquema". Los **esquemas de Ponzi**, por otro lado, tienen varias modalidades y, por lo general, implican instrumentos financieros (como "derivados") y términos (como "activos alternativos") que pueden confundir incluso a inversionistas experimentados. Estas estafas siempre pretenden ofrecer rendimientos de una inversión real de una clase u otra, pero, de hecho, el "rendimiento" de un inversionista proviene de su propio dinero o de los depósitos de los inversionistas posteriores.

El nombre proviene de los años siguientes a la Primera Guerra Mundial, cuando un inmigrante italiano, Charles Ponzi, se dio cuenta de que las tasas de cambio de divisas internacionales no uniformes y otros factores hacían posible, teóricamente, obtener ganancias comprando cupones postales en Italia y cambiándolos por estampillas en Estados Unidos. Había un potencial para hacer dinero con esto; pero con el tiempo, Ponzi solicitó y recibió muchos más depósitos ("inversiones") de los que podía colocar en el mercado. Esta operación, que se desarrolló sobre todo en el área de Nueva Inglaterra, atrajo a más y más participantes conforme entregaba ganancias a los primeros inversionistas utilizando los depósitos de los últimos inversionistas.



Charles Ponzi, como la mayoría de otros operadores del esquema que le siguieron, poseía atributos personales, incluyendo carisma y habilidad para vender, los cuales le permitieron acumular mucho más de lo que se necesitaba para pagar las utilidades requeridas. Como parecía que estaba cumpliendo sus promesas, la mayoría de los inversionistas dejaron que crecieran en el plan tanto el principal como las ganancias. En unos cuantos días, tenía a miles de entusiastas inversionistas formados para darle su dinero.

Para el éxito de un esquema de Ponzi, es importante que se mantenga la ilusión de altos rendimientos de la inversión, tratando de desarrollar confianza para atraer a un número siempre creciente de inversionistas. También ayuda el hecho de que los detalles verdaderos de la operación no sean claros, y difíciles o imposibles de verificar.

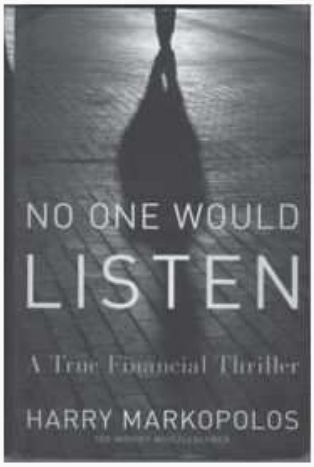
EJEMPLO 4 Determinación del número mínimo de inversionistas necesario para sustentar un esquema de Ponzi

Ponzi ofrecía a los inversionistas un 50% de ganancias en 45 días o un 100% de ganancias en 90 días. Suponiendo que Ponzi inició el año con un inversionista, quien invirtió $1000, y que todos los inversionistas siempre retiraron sus ganancias a los 90 días y dejaron el principal con Ponzi, ¿cuántos inversionistas necesitaría en un año?

SOLUCIÓN

Considere el número mínimo de inversionistas requerido al final de cada trimestre (aun cuando, desde luego, este no era el objetivo de Ponzi).

- Después de un trimestre (90 días), al inversionista único de $1000 se le devolvería esta cantidad como sus ganancias trimestrales. De modo que en ese punto no son necesarios nuevos inversionistas.



El libro ***No One Would Listen*** de 2010, de Harry Markopolos, describe el esquema de Ponzi más grande jamás visto que duró más tiempo funcionando, así como los esfuerzos inútiles realizados por Markopolos, durante una década, para convencer a los reguladores gubernamentales de que tomaran acciones en contra de su operador, Bernard Madoff. (Véase los **ejercicios 23 a 25**). Muchos recursos, para el lector y para el uso en salón de clases, están disponibles en www.noonewouldlisten.com.

- Al final del segundo trimestre, el inversionista desea otros $1000 de ganancias, y no hay dinero disponible sin un inversionista adicional. De modo que se debe sumar otro inversionista, y su depósito se puede usar para pagar al inversionista original.
- Al final del tercer trimestre, hay dos inversionistas, y no hay dinero. Se debe reclutar a dos inversionistas adicionales para pagar las ganancias de los dos inversionistas anteriores.
- Al final del cuarto trimestre (un año), cuatro inversionistas esperan su ganancia trimestral, de manera que hay que reclutar a otros cuatro inversionistas.

Tan solo para pagar utilidades, Ponzi necesitaría duplicar el número de inversionistas al final de cada trimestre iniciando con el segundo. Al final del año, 1 se duplica a 2, 2 a 4, y 4 a 8. Debe finalizar el año con 8 inversionistas. No hay otra salida para Ponzi. Y si alguien solicitara su capital de regreso, él tendría problemas. ■■■

EJEMPLO 5 Análisis del flujo de efectivo en un esquema de Ponzi

Suponga que se promete a los inversionistas el 100% de utilidades por trimestre. Al principio de cada trimestre (90 días), 1000 inversionistas contribuyen con $1000 cada uno, y todo el dinero se conserva hasta el final del año. Entonces existen cuatro clases de inversionistas.

1. aquellos que han permanecido por cuatro trimestres
2. aquellos que han permanecido por tres trimestres
3. aquellos que han permanecido por dos trimestres
4. aquellos que han permanecido por un trimestre

Al final del año, el 10% de los inversionistas de cada categoría toma sus utilidades, pero deja el principal. ¿Qué cantidad queda en manos del operador?

SOLUCIÓN

La cantidad tomada durante el año es de $4000 · $1000 = $4,000,000. Al final del año, las utilidades supuestas serían de $4000 para cada inversionista de la categoría 1, $3000 para cada inversionista de la categoría 2, $2000 para cada inversionista de la categoría 3, y $1000 para cada inversionista de la categoría 4. El 10% de cada categoría toma sus utilidades, y el 10% de 1000 es 100, de modo que el pago sería entonces

$$\underset{\text{Categoría 1}}{100 \cdot \$4000} + \underset{\text{Categoría 2}}{100 \cdot \$3000} + \underset{\text{Categoría 3}}{100 \cdot \$2000} + \underset{\text{Categoría 4}}{100 \cdot \$1000} = \$1{,}000{,}000.$$

La cantidad que retiene el operador es de

$$\$4{,}000{,}000 - \$1{,}000{,}000 = \$3{,}000{,}000.$$ ■■■

EJERCICIOS DE LA EXTENSIÓN

Análisis de un esquema piramidal donde "cada uno recluta a tres" *En los ejercicios 1 a 11, considere un esquema piramidal exactamente como el del* ***ejemplo 1****, excepto que "cada uno recluta a tres", y no a dos. (Trabaje todo esto, en orden).*

1. Trace un diagrama como el del **ejemplo 1** que muestre los primeros cuatro niveles.
2. ¿Cuántos miembros hay en cada uno de los siguientes niveles?
   a) 1 ***b)*** 2 ***c)*** 3 ***d)*** 4
3. Si el diagrama se amplía, en general, ¿cuántos miembros hay en el nivel N?
4. Si usted se encuentra en la parte superior del diagrama, y la contribución de cada persona es de $1, ¿cuánto dinero recibirá usted?
5. ¿Qué ganancias obtendrá?
6. ¿Cuál es el número total de miembros desde el nivel 1 hasta el nivel indicado a continuación, incluyendo este último?
   a) 1 ***b)*** 2
   c) 3 ***d)*** 4
   e) 5 ***f)*** 6

7. Llene los espacios de los siguientes enunciados. El número total de miembros en los niveles 1 a N, incluyendo a este, es $1+3+9+\ldots+$ ____. Esta es la suma de una secuencia _____ con $a =$ ____, $r =$ ____, y $n =$ ____. De modo que el número total de miembros es _____.

8. Si la pirámide falla después del nivel N, ¿cuántos miembros del esquema perderán?

9. Suponga que el esquema opera hasta el nivel 6 y luego falla. ¿Cuántos miembros perderán?

10. En las condiciones del **ejercicio 9**, ¿qué fracción de miembros perderá?

11. En un esquema piramidal donde "cada uno recluta a dos" se demostró que $\frac{7}{8}$ de los miembros perderán. Use un análisis similar para determinar la fracción que perderá en un esquema donde "cada uno recluta a tres".

12. Suponga que usted entra a un esquema piramidal donde "cada uno recluta a dos" (en el nivel 1), pagando \$1 de comisión de entrada. Si x denota el número de reclutamientos del nivel 4 que, con el tiempo, enviarán a usted \$1, entonces x es una variable aleatoria que puede tomar cualquiera de los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8. Si la probabilidad de que cualquier persona invitada para unirse es de $\frac{1}{2}$, entonces, el uso de probabilidades binomiales arroja la siguiente distribución de probabilidad para x.

x	$P(x)$
0	0.34361
1	0.39270
2	0.19635
3	0.05610
4	0.01002
5	0.00114
6	0.00008
7	0.00000
8	0.00000

Determine lo siguiente:

a) la suma de estos valores de probabilidad

b) su ingreso esperado.

13. En el **ejercicio 12**, ¿cuál es su utilidad esperada?

14. Si usted estuviera iniciando un esquema piramidal, ¿cuáles serían las ventajas y desventajas del sistema "cada uno recluta a tres", y no a dos?

15. En un esquema piramidal, incluso si usted y sus tres niveles de miembros reclutados están integrados en un diagrama mucho más grande, con muchos niveles por arriba y muchos más por debajo de usted, solo sus cuatro niveles afectan sus costos y sus ingresos. Explique por qué esto es así.

16. En un esquema piramidal donde "cada uno recluta a dos", más de $\frac{7}{8}$ de todos los miembros perderán. ¿Cuál es la fracción *más grande* que puede perder y cómo sucedería esto?

17. Comente los lugares donde ha encontrado "cartas cadena" o esquemas piramidales con promesas de premios en efectivo para entrar.

18. Diversos tipos de fraude se han presentado a lo largo de los años. (Algunos presentan siempre un ángulo nuevo). Investigue y elabore un informe sobre "esquemas matriciales".

Cálculo del número de inversionistas requeridos en un esquema de Ponzi *Remítase al* ***ejemplo 4*** *en los ejercicios 19 y 20.*

19. ¿Cuántos inversionistas se requerirían al final de dos años con el mismo rendimiento prometido del 100% por 90 días?

20. Si el año inició con 100 inversionistas, ¿cuántos se requerirían al final de cada periodo?

a) un año ***b)*** dos años ***c)*** tres años

Exploración del flujo de efectivo en un esquema de Ponzi *Remítase al* ***ejemplo 5*** *en los ejercicios 21 y 22.*

21. Suponga que al final del año, el 10% de los inversionistas invierten realmente otros \$1000 en lugar de tomar sus utilidades. Ahora, ¿qué cantidad permanece con el operador para iniciar el segundo año?

22. Explique qué factores pudieron haber convencido a los inversionistas de colocar más dinero y no tomar utilidades.

Bernie ganó miles de millones. *A mediados del 2010, el esquema de Ponzi más grande de la historia fue operado por Bernard Madoff, un financiero de Nueva York y ex presidente de la bolsa de valores NASDAQ. Cuando fue arrestado en diciembre de 2008, Madoff había estafado a los inversionistas, incluyendo instituciones de caridad, fundaciones, fondos de cobertura y fondos de fondos, así como a individuos, más de \$21 mil millones. Él dijo estar negociando opciones del índice de Standard & Poor's 500, pero nadie podía decir cuánto tenía realmente en su fondo porque vendía cada opción antes de que el informe se volviera obligatorio.*

23. Suponga que Charles Ponzi defraudó a sus inversionistas más de \$4 millones en 1920. Si la inflación promedió el 3% de 1920 a 2008, compare las magnitudes de las estafas de Ponzi y Madoff comparadas en dólares.

24. Especule acerca de si Bernard Madoff estafó a sus inversionistas desde el principio.

25. Considerando la seria recesión de 2008, ¿por qué cree que el esquema de Madoff y muchos otros fueron descubiertos más o menos al mismo tiempo?

26. Investigue en Internet o en otras fuentes acerca de otros esquemas de Ponzi notables a lo largo de los años. ¿Puede identificar alguna operación similar entre los operadores?

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

¿Comprar o rentar?

Dividan la clase en grupos de por lo menos cuatro estudiantes. Cada grupo debe leer primero lo siguiente.

Ian y Tami, una pareja joven con un hijo, viven en un apartamento rentado. Después de pagar impuestos, Ian gana $38,180 al año y Tami, en un trabajo de tiempo parcial, gana $7000 al año. En el futuro cercano, sus ganancias probablemente seguirán el ritmo de la inflación. Ellos operan actualmente con el siguiente presupuesto mensual.

Renta	$1050
Alimentos	600
Guardería	525
Ropa	420
Servicios	120
Diversión	300
Ahorros	450
Otros	300

Ellos tienen $36,000 de ahorros.

Encontraron una casa que les gustaría comprar, la cual tiene un precio de $162,500. Consultaron a varios prestamistas y descubrieron que, en el mejor de los casos, la compra de la casa implicaría los siguientes gastos.

Pago inicial requerido (20%)	____
Costos de cierre (requeridos al cierre del crédito):	
Comisión del préstamo (1 punto)	____
Comisión por avalúo	300
Prima de seguro de la propiedad	375
Cargo por documentación y registros	70
Impuestos prorrateados de la propiedad	650
Prima de seguro contra incendio prorrateada	270
Otros	230
Total de costos inmediatos:	____

Los costos mensuales durante el transcurso del crédito serían los siguientes.

Hipoteca con tasa fija del 7.5% a 30 años	____
Impuestos ($1350 anualmente)	____
Seguro contra incendio ($450 anualmente)	____

Para poder tener su propia casa, Ian y Tami están dispuestos a reducir sus gastos de ropa y diversión en un 30% cada uno y disminuir su asignación de ahorro en un 20%. (Serán necesarios algunos ahorros para comprar muebles adicionales que necesitan y para gastos de una familia más grande en el futuro). También calculan que la nueva casa y el patio requerirán $130 mensuales de mantenimiento y que los servicios se duplicarán en relación con los que tienen en el apartamento. Por otro lado, las asignaciones de su presupuesto actual serán las mismas.

Ahora dividan su grupo en dos "subgrupos". El primer subgrupo debe contestar las siguientes preguntas.

1. ¿A qué cantidad ascendería la compra de la casa de Ian y Tami en gastos inmediatos?
2. ¿Tienen suficiente efectivo a la mano?

El segundo subgrupo debe contestar las siguientes preguntas.

3. ¿A qué cantidad mensual ascendería regularmente la compra de la casa de Ian y Tami?
4. ¿Qué monto de los costos podrán afrontar con su presupuesto mensual?
5. ¿Podrán cumplir con los gastos mensuales de la casa?

Dentro de su grupo, determinen si Ian y Tami podrán cumplir con la compra de la casa. Elijan a un representante para informar sus resultados a la clase.

Comparen las evaluaciones de varios grupos, e intenten resolver cualquier discrepancia.



EXAMEN DEL CAPÍTULO 11

Dé todas las respuestas monetarias redondeando al centavo más cercano. Use las tablas y fórmulas del capítulo cuando sea necesario.

Cálculo del valor futuro de un depósito *Calcule el valor futuro de cada depósito.*

1. $100 durante 5 años al 6% de interés simple

2. $50 durante 2 años al 8% de interés compuesto trimestralmente

Resuelva cada uno de los siguientes problemas.

3. ***Rendimiento anual efectivo de una cuenta*** Calcule el rendimiento anual efectivo, redondeando a la centésima más cercana del porcentaje, para una cuenta que paga el 3% de interés compuesto mensualmente.

4. ***Años de duplicación por la regla del 70*** Use la regla del 70 para estimar los años de duplicación con una tasa de inflación del 5%.

5. ***Cálculo del valor presente de un depósito*** ¿Qué cantidad depositada actualmente en una cuenta que paga el 4% de interés compuesto semestralmente crecería a $100,000 en 10 años?

6. ***Cálculo del interés de una tarjeta bancaria por el método de saldo promedio diario*** El estado de cuenta de la Master Card de Caroline DiJullio muestra un saldo promedio diario de $680. Calcule el interés adeudado si la tasa es del 1.6% mensual.

Análisis de un préstamo de consumo *Jason Hoffa compra un collar de turquesas para su esposa por su aniversario. El collar cuesta* $4000 *y Jason realiza un pago inicial de* $1000. *El vendedor agrega al capital el interés del* 7.5% *anual. Jason está de acuerdo en realizar pagos durante* 24 *meses. Use esta información en los ejercicios 7 a 10.*

7. Calcule la cantidad total de intereses que pagará.

8. Calcule el pago mensual.

9. Calcule el valor de la TPA (redondeando al medio punto porcentual más próximo).

10. Calcule el interés no devengado si salda el préstamo por completo cuando faltan seis pagos. Use el método más preciso disponible.

11. ***Tasa de interés anual real en financiamiento al consumidor*** Newark Hardware desea incluir términos de financiamiento en su publicidad. Si el precio de una cera para pisos es de $150 y el cargo financiero sin anticipo es de $5 durante un periodo de 6 meses (seis pagos mensuales iguales), calcule la tasa de interés anual real (TPA).

12. Explique qué es un fondo de inversión y analice varias de sus ventajas y desventajas.

Cálculo del pago mensual de la hipoteca de una casa *Calcule el pago mensual requerido para cada préstamo hipotecario.*

13. La hipoteca es de $150,000 a una tasa fija del 7% durante 20 años. Solo amortice el capital y el interés, ignorando impuestos, seguros y otros costos.

14. El precio de compra de una casa es de $218,000. El pago inicial es del 20%. El interés es del 8.5% fijo durante un plazo de 30 años. Los impuestos anuales son de $1500, y el seguro anual es de $750.

Resuelva cada problema.

15. ***Costo de puntos en un préstamo hipotecario*** Si el prestamista del **ejercicio 14** cobra dos *puntos*, ¿cuánto agrega eso al costo del préstamo?

16. Explique de manera general qué son los *costos de cierre*. ¿Son diferentes de los *cargos de liquidación*?

17. ***Ajuste de la tasa en una hipoteca con tasa variable*** Para comprar su casa, usted obtiene una hipoteca ARM anual con 2.25% de margen y 2% de variación en la tasa. El índice inicia en 7.85%, pero se incrementa al 10.05% en la primera fecha de ajuste. ¿Qué tasa de interés pagará durante el segundo año?

18. ***Lectura de tablas de acciones*** De acuerdo con la tabla de acciones (**tabla 9** de la **página 608**), ¿cuántas acciones de Sara Lee se negociaron el 4 de junio de 2010?

Cálculo del rendimiento de una inversión en acciones *Laurie Campbell compró* 1000 *acciones a* $12.75 *cada una. Recibió un dividendo de* $1.38 *por acción poco después de la compra y otro dividendo de* $1.02 *por acción un año después. Dieciocho meses después de la compra, vendió las* 1000 *acciones en* $10.36 *cada una.*

19. Calcule el rendimiento total de Laurie sobre estas acciones.

20. Calcule el porcentaje de rendimiento. ¿Es este la *tasa de rendimiento anual* de la transacción de estas acciones? ¿Por qué?

21. ***Valor final de una cuenta de retiro*** Se depositan $1800 al final de cada año en una cuenta de retiro con impuestos diferidos. La cuenta gana el 6% anual de rendimiento, la tasa impositiva marginal del cuentahabiente es del 25%, y los impuestos se pagan al final de 30 años. Calcule el valor final de la cuenta.

22. ¿Qué significa decir que una cuenta de retiro está "ajustada a la inflación"?

APÉNDICE: EL SISTEMA MÉTRICO



Joseph Louis Lagrange (1736-1813) nació en Turín, Italia, y se convirtió en profesor a la edad de 19 años. En 1776 fue a Berlín a petición de Federico el Grande para tomar posesión de la vacante que dejó Euler. Una década después, Lagrange se estableció definitivamente en París. Napoleón estuvo entre los numerosos personajes que lo admiraban y le rendían honores.

La aportación más grande de Lagrange se dio en la teoría y aplicación del **cálculo**. Sacó adelante el trabajo de Euler al poner al cálculo sobre el suelo firme del álgebra en su teoría de funciones. Su *Mecánica analítica* (1788) aplicaba el cálculo al movimiento de objetos.

Las contribuciones de Lagrange al álgebra tuvieron gran influencia sobre Galois y, por lo tanto, en la teoría de grupos. También escribió sobre teoría de números, probando que cualquier número entero es la suma de, cuando mucho, cuatro cuadrados.

El sistema métrico fue desarrollado por un comité de la Academia Francesa, exactamente después de la Revolución de 1789. El presidente del comité fue el matemático Joseph Louis Lagrange. Las ventajas del sistema métrico son evidentes cuando se compara con el sistema inglés. En este último, una pulgada es un doceavo de un pie, mientras que un pie es un tercio de una yarda. Una milla es equivalente a 5280 pies, o 1760 yardas. Como es evidente, no hay consistencia en las subdivisiones.

En el sistema métrico se usan prefijos para indicar multiplicaciones o divisiones de potencias de 10. Por ejemplo, la unidad básica de longitud en el sistema métrico es el *metro* (el cual es un poco más largo que una yarda). Para indicar mil metros, se agrega el prefijo **"kilo-"** para obtener **kilo**metro. Para indicar una centésima de un metro, se usa el prefijo **"centi-"** para obtener **centi**metro. En la **tabla 1** se muestra una lista completa de los prefijos del sistema métrico; los prefijos más utilizados se destacan en negritas.

Tabla 1 **Prefijos métricos**

Prefijo	Múltiplo	Prefijo	Múltiplo
hexa	1,000,000,000,000,000,000	deci	0.1
penta	1,000,000,000,000,000	**centi**	0.01
tera	1,000,000,000,000	**mili**	0.001
giga	1,000,000,000	micro	0.000001
mega	1,000,000	nano	0.000000001
kilo	1000	pico	0.000000000001
hecto	100	femto	0.000000000000001
deca	10	atto	0.000000000000000001

Longitud y área

Lagrange instó al comité a concebir el sistema métrico para obtener alguna medida natural de longitud a partir de la cual las medidas de peso y volumen se pudieran deducir. Se decidió que un **metro (m)** sería la unidad básica de longitud, y un metro se definió como la diezmillonésima parte de la distancia del ecuador al Polo Norte.

Para obtener medidas más grandes que un metro, se agregaron prefijos griegos. Para medidas menores que el metro, se usaron prefijos latinos. Un metro es un poco más largo que una yarda (aproximadamente 39.37 pulgadas). Un **centímetro (cm)** es la centésima parte de un metro y es aproximadamente $\frac{2}{5}$ de una pulgada. Véase la **figura 1**.



Figura 1

Comparación de distancias

Longitud en metros	Distancias relacionadas aproximadas
10^{19}	Distancia a la Estrella del Norte
10^{12}	Distancia de Saturno al Sol
10^{11}	Distancia de Venus al Sol
10^{9}	Diámetro del Sol
10^{8}	Diámetro de Júpiter
10^{7}	Diámetro de la Tierra; distancia de Washington, D.C. a Tokio
10^{6}	Distancia de Chicago a Wichita, Kansas
10^{5}	Distancia promedio a través del lago Michigan
10^{4}	Anchura promedio del Gran Cañón
10^{3}	Longitud del puente Golden Gate
10^{2}	Longitud de una cancha de futbol
10^{1}	Altura promedio de una casa de dos pisos
10^{0}	Ancho de una puerta
10^{-1}	Ancho de su mano
10^{-2}	Diámetro de un trozo de gis
10^{-3}	Grosor de una moneda de 10 centavos
10^{-4}	Grosor de una hoja de papel
10^{-5}	Diámetro de un glóbulo rojo
10^{-7}	Grosor de una burbuja de jabón
10^{-8}	Distancia promedio entre moléculas del aire en una habitación
10^{-9}	Diámetro de una molécula de aceite
10^{-14}	Diámetro de un núcleo atómico
10^{-15}	Diámetro de un protón

Debido a que el sistema métrico se basa en decimales y potencias de 10, las conversiones dentro del sistema implican la multiplicación y división entre potencias de 10. Por ejemplo, para convertir 2.5 m a centímetros, se multiplica 2.5 por 100 (puesto que 100 cm = 1 m) para obtener 250 cm. Por otro lado, para convertir 18.6 cm a metros, se divide entre 100 para obtener 0.186 m. Otras conversiones se hacen de la misma manera, usando los significados de los prefijos. ¿Por qué 42 m equivalen a 42,000 milímetros (mm)?

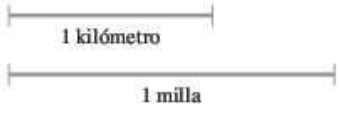
Las distancias grandes normalmente se miden en kilómetros. Un **kilómetro (km)** es igual a 1000 metros. Un kilómetro es igual a 0.6 millas aproximadamente. La **figura 2** muestra la razón de 1 kilómetro a 1 milla.

La conversión de metros a kilómetros, y viceversa, se hace multiplicando o dividiendo entre 1000, según se requiera. Por ejemplo, 37 kilómetros equivalen a 37,000 metros, mientras que 583 metros equivalen a 0.583 kilómetros.

El área de una figura se puede medir en unidades métricas cuadradas. La **figura 3** muestra un cuadrado que mide 1 cm por lado. Por lo tanto, es un **centímetro cuadrado (cm^2)**. Un metro cuadrado (m^2) es el área de un cuadrado cuyos lados miden un metro de largo. ¿Cuántos cm^2 hay en un m^2?

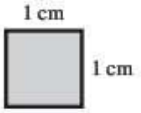
De acuerdo con Paul G. Hewitt, en *Conceptual Physics*, 7a. ed. (Harper Collins):

> En aquel entonces se pensaba que la distancia del ecuador al Polo Norte era de 10,000 kilómetros. Una diezmillonésima de esta cantidad, el metro, se determinó cuidadosamente y se grabó por medio de marcas en una barra de una aleación de platino-iridio. Esta barra se encuentra en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Francia. El metro estándar en Francia se calibró en términos de la longitud de onda de la luz, la cual es igual a 1,650,763.73 veces la longitud de la luz naranja emitida por los átomos del gas criptón 86. El metro se define ahora como la longitud de la trayectoria que recorre la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299,792,458 de un segundo.



Observe la razón.

Figura 2



El área es 1 cm^2.

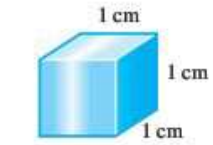
Figura 3



En septiembre de 1999, el **Mars *Climate Orbiter*** se perdió debido a "una falla en el uso de las unidades métricas en el código de un archivo de software del terreno". De acuerdo con Edward Weiler, gerente asociado de la Oficina de la Ciencia del Espacio de la NASA, el error de la conversión métrica que dio como resultado la pérdida "podía haberse detectado fácilmente", pero no fue así. (*Fuente:* "NASA's Mars Losses Spark Anger and Opportunity" de Leonard David, Washington Contributing Editor para www.space.com).

Volumen, masa y peso

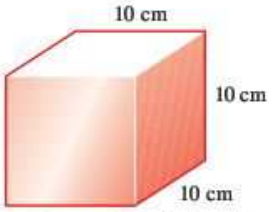
El volumen de una figura tridimensional se mide en unidades cúbicas. Si, por ejemplo, las dimensiones están dadas en centímetros, el volumen se determina mediante la fórmula adecuada de geometría, y estará en **centímetros cúbicos (cm³)**. Véase el dibujo de una caja en la **figura 4** cuyo volumen es un cm^3.



El volumen es 1 cm^3.

Figura 4

En el sistema métrico, un **litro (L)** es la cantidad asignada al volumen de una caja que mide 10 cm de lado. (Véase la **figura 5**). Un litro es un poco más que un cuarto de galón, como se observa en la **figura 6**. Observe la ventaja de esta definición sobre la equivalente en el sistema inglés: usando una regla con escala en centímetros, se puede obtener un volumen de 1 litro (simbolizado por 1 L). Por otro lado, si se utiliza una regla con escala en pulgadas, sería difícil obtener un volumen de 1 cuarto.



El volumen de esta caja es igual a 1 litro.

Figura 5



1 litro 1 cuarto

Figura 6

En el sistema métrico se usan los prefijos mencionados anteriormente, de modo que un **mililitro (ml)** es la milésima parte de un litro, un **centilitro (cl)** es la centésima parte de un litro, un **kilolitro (kl)** equivale a 1000 litros, y así sucesivamente. Los mililitros se usan profusamente en ciencias y en medicina. Ahora se venden muchas bebidas en mililitros y en litros. Por ejemplo, 750 ml es una medida común para las botellas de vino, y muchas bebidas suaves ahora se venden en botellas de 1 y 2 litros.

Debido a la definición de un litro como el volumen de una caja que mide 10 cm por lado,

$$1\text{ L} = 10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm} = 1000\text{ cm}^3 \quad \text{o} \quad \frac{1}{1000}\text{ L} = 1\text{ cm}^3.$$

Como $\frac{1}{1000}$ L = 1 ml, tenemos la siguiente relación.

$$\mathbf{1\text{ ml} = 1\text{ cm}^3}$$

Por ejemplo, el volumen de una caja que mide 8 cm por 6 cm por 5 cm se puede expresar como 240 cm^3 o como 240 ml.

La caja de la **figura 4** mide 1 cm por 1 cm por 1 cm. El volumen de esta caja es

$$1\text{ cm}^3, \quad \text{o} \quad 1\text{ ml}.$$

Por definición, la masa de agua con la que se llena esta caja es igual a **1 gramo (g)**. Una moneda de cinco centavos tiene una masa cercana a los 5 gramos, o 5 g. El volumen de agua usado para definir un gramo es muy pequeño, de modo que un gramo es una masa diminuta. En la vida diaria, es más práctico referirse a un **kilogramo (kg)** o mil gramos. Un kilogramo pesa aproximadamente 2.2 libras. La abreviatura común de un kilogramo es la palabra **kilo**.



La escala de **Anders Celsius** fijó originalmente el punto de congelación del agua en 100° y el punto de ebullición en 0°, pero el biólogo Carl von Linne invirtió la escala; de esta forma, se concibió la escala Celsius que se utiliza en la actualidad.



Esta foto indica que 13 pies y 6 pulgadas son iguales a 4.1 metros. Use esta información y una proporción para demostrar que una yarda es igual a 0.91 metros.

Las masas extremadamente pequeñas se pueden medir con **miligramos (mg)** y **centigramos (cg)**. Estas masas también son tan pequeñas que, al igual que los centilitros y mililitros, se usan principalmente en las ciencias y en el campo médico.

Temperatura

En el sistema métrico la temperatura se mide en **grados Celsius**. En la escala de temperatura Celsius, el agua se congela a 0° y hierve a 100°. Estos dos números son más fáciles de recordar que los números correspondientes en la escala Fahrenheit, 32° y 212°. El termómetro de la **figura 7** muestra algunas temperaturas típicas tanto en la escala Fahrenheit como en la escala Celsius.



Figura 7

Las siguientes fórmulas se usan para convertir temperaturas entre las escalas Celsius y Fahrenheit.

Fórmulas de conversión de temperaturas entre las escalas Celsius a Fahrenheit

Para convertir una lectura de Fahrenheit a Celsius, se usa $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

Para convertir de Celsius a Fahrenheit, se usa $F = \frac{9}{5}C + 32$.

Conversiones métricas

Debido a la legislación aprobada por el Congreso, en Estados Unidos se usa el sistema métrico, y la meta final es usar los dos sistemas, con la aceptación pública de ambos. Las industrias que exportan una gran cantidad de bienes usan el sistema métrico, ya que es compatible con la mayoría de países con los que comercian.

Algunas calculadoras científicas están programadas para efectuar conversiones entre los sistemas inglés y métrico. La aproximación de conversiones se puede hacer con la ayuda de las **tablas 2 y 3** de la página siguiente.

Tabla 2 Sistema métrico a sistema inglés

Para convertir de	A	Se multiplica por
metros	yardas	1.0936
metros	pies	3.2808
metros	pulgadas	39.37
kilómetros	millas	0.6214
gramos	libras	0.0022
kilogramos	libras	2.20
litros	cuartos	1.0567
litros	galones	0.2642

Tabla 3 Sistema inglés a sistema métrico

Para convertir de	A	Se multiplica por
metros	metros	0.9144
pies	metros	0.3048
pulgadas	metros	0.0254
millas	kilómetros	1.609
libras	gramos	454
libras	kilogramos	0.454
cuartos	litros	0.9464
galones	litros	3.785

EJERCICIOS DEL APÉNDICE

Realice cada conversión multiplicando por o dividiendo entre la potencia adecuada de 10.

1. 8 m a milímetros

2. 14.76 m a centímetros

3. 8500 cm a metros

4. 250 mm a metros

5. 68.9 cm a milímetros

6. 3.25 cm a milímetros

7. 59.8 mm a centímetros

8. 3.542 mm a centímetros

9. 5.3 km a metros

10. 9.24 km a metros

11. 27,500 m a kilómetros

12. 14,592 m a kilómetros

Use una regla métrica para obtener cada medición, primero en centímetros, luego en milímetros.

13.

14.

15.

16. Con base en sus mediciones de las rectas del **ejercicio 13**, ¿a cuántos centímetros equivale aproximadamente una pulgada? ¿a cuántos milímetros?

Realice cada conversión multiplicando por o dividiendo entre la potencia adecuada de 10.

17. 6 L a centilitros

18. 4.1 L a mililitros

19. 8.7 L a mililitros

20. 12.5 L a centilitros

21. 925 cl a litros

22. 412 ml a litros

23. 8974 ml a litros

24. 5639 cl a litros

25. 8000 g a kilogramos

26. 25,000 g a kilogramos

27. 5.2 kg a gramos

28. 12.42 kg a gramos

29. 4.2 g a miligramos

30. 3.89 g a centigramos

31. 598 mg a gramos

32. 7634 cg a gramos

Use las fórmulas presentadas en el texto para realizar cada conversión. Redondee al grado más próximo.

33. 86° F a Celsius

34. 536° F a Celsius

35. −114° F a Celsius

36. −40° F a Celsius

37. 10° C a Fahrenheit

38. 25° C a Fahrenheit

39. −40° C a Fahrenheit

40. −15° C a Fahrenheit

Resuelva cada problema. Remítase a las fórmulas geométricas cuando sea necesario.

41. ***Peso de monedas de cinco centavos*** El peso de una moneda de cinco centavos es de 5 g. ¿Cuántas monedas de cinco centavos hay en 1 kg de monedas de dicha denominación?

42. ***Sal en el agua de mar*** El agua de mar contiene aproximadamente 3.5 g de sal por cada 1000 ml de agua. ¿Cuántos gramos de sal hay en un litro de agua de mar?

43. ***Peso del helio*** El helio pesa aproximadamente 0.0002 g por mililitro. ¿Cuánto pesa un litro de helio?

44. ***Solución de azúcar*** Aproximadamente 1500 g de azúcar se pueden disolver en un litro de agua tibia. ¿Qué cantidad de azúcar se puede disolver en un mililitro de agua tibia?

45. ***Costo del metal*** Northside Foundry necesita 7 tiras de metal, de 67 cm de largo cada una. Calcule el costo total de las tiras si se venden a $8.74 por metro.

46. ***Costo del encaje*** Uptown Dressmakers compró 15 piezas de encaje, cada una de 384 mm de largo. El encaje se vende en $54.20 por metro. Calcule el costo de las 15 piezas.

47. ***Costo del mármol*** El mármol importado para cubiertas de escritorio cuesta $174.20 por metro cuadrado. Obtenga el costo de una pieza de mármol de 128 por 174 cm.

48. ***Costo del papel*** Un papel especial para fotografía se vende en $63.79 el metro cuadrado. Obtenga el costo de la compra de 80 piezas de papel, cada una de las cuales mide 9 por 14 cm.

49. ***Volumen de una caja*** Un importador recibió granos de café especiales en una caja que mide 82 cm por 1.1 m por 1.2 m. Determine el volumen de la caja, tanto en centímetros cúbicos como en metros cúbicos.

50. ***Volumen de un cajón*** Un centro textil recibe piezas de tela de lana en cajones que miden 1.5 m por 74 cm por 97 cm. Calcule el volumen de un cajón, tanto en centímetros cúbicos como en metros cúbicos.

51. ***Botellas de medicamento*** Un medicamento se vende en botellas pequeñas de 800 ml cada una. ¿Cuántas de estas botellas se pueden llenar a partir de un tanque que contiene 160 L de medicamento?

52. ***Botellas de gaseosas*** ¿Cuántas botellas de 2 litros de gaseosa serían necesarias para la recepción de una boda si se espera que haya 180 asistentes, y cada uno bebe 400 ml de gaseosa?

Realice cada conversión. Use una calculadora y/o la tabla del texto cuando sea necesario.

53. 982 yd a metros

54. 12.2 km a millas

55. 125 mi a kilómetros

56. 1000 mi a kilómetros

57. 1816 g a libras

58. 1.42 lb a gramos

59. 47.2 lb a gramos

60. 7.68 kg a libras

61. 28.6 L a cuartos de galón

62. 59.4 L a cuartos de galón

63. 28.2 gal a litros de galón

64. 16 qt a litros

Las medidas métricas son muy comunes en medicina. Como las conversiones entre medidas métricas se hacen moviendo el punto decimal, no son raros los errores en dosis médicas al ubicar el punto decimal. Identifique si cada una de las siguientes dosis de medicina parece razonable o no.

65. Tomar 2 kg de aspirina tres veces al día.

66. Tomar 4 L de Milanta líquido en las noches, antes de dormir.

67. Tomar 25 ml de jarabe para la tos diariamente.

68. Remojar sus pies en 6 L de agua caliente.

69. Inyectarse $\frac{1}{2}$ L de insulina cada mañana.

70. Aplicarse 40 g de ungüento en la cortada de un dedo.

Seleccione la opción más razonable de las siguientes propuestas.

71. longitud de una vaca adulta

A. 1 m **B.** 3 m **C.** 5 m

72. longitud de un Lexus

A. 1 m **B.** 3 m **C.** 5 m

73. distancia de Seattle a Miami

A. 500 km **B.** 5000 km **C.** 50,000 km

74. longitud promedio de una nariz
A. 3 cm **B.** 30 cm **C.** 300 cm

75. distancia a través de la página de un libro
A. 1.93 mm **B.** 19.3 mm **C.** 193 mm

76. peso de un libro
A. 1 kg **B.** 10 kg **C.** 1000 kg

77. peso de un automóvil grande
A. 1300 kg **B.** 130 kg **C.** 13 kg

78. volumen de una botella de 12 onzas de bebida
A. 35 ml **B.** 355 ml **C.** 3550 ml

79. altura de una persona
A. 180 cm **B.** 1800 cm **C.** 18 cm

80. diámetro de la Tierra
A. 130 km **B.** 1300 km **C.** 13,000 km

81. longitud de un tren grande de carga
A. 8 m **B.** 80 m **C.** 800 m

82. volumen de una toronja
A. 1 L **B.** 4 L **C.** 8 L

83. el largo de unos jeans
A. 70 cm **B.** 700 cm **C.** 7 cm

84. el peso de una persona
A. 700 kg **B.** 7 kg **C.** 70 kg

85. medida de la diagonal de un monitor pequeño de televisión
A. 5 cm **B.** 50 cm **C.** 500 cm

86. ancho de la puerta normal de una recámara
A. 1 m **B.** 3 m **C.** 5 m

87. grosor de un marcador de tinta
A. 0.9 mm **B.** 9 mm **C.** 90 mm

88. distancia alrededor del borde de un tarro de café
A. 300 mm **B.** 30 mm **C.** 3000 mm

89. la temperatura en la superficie de un lago congelado
A. 0°C **B.** 10°C **C.** 32°C

90. la temperatura en medio del Valle de la Muerte en una tarde de julio
A. 25°C **B.** 40°C **C.** 65°C

91. temperatura superficial en la arena del desierto en un día caluroso de verano
A. 30°C **B.** 60°C **C.** 90°C

92. temperatura del agua hirviendo
A. 100°C **B.** 120°C **C.** 150°C

93. temperatura del aire en un día en que se necesita usar un suéter
A. 30°C **B.** 20°C **C.** 10°C

94. temperatura del aire en un día en que usted está nadando
A. 30°C **B.** 15°C **C.** 10°C

95. temperatura cuando hornea un pastel
A. 120°C **B.** 170°C **C.** 300°C

96. temperatura del agua de la ducha
A. 35°C **B.** 50°C **C.** 65°C

RESPUESTAS A EJERCICIOS SELECCIONADOS

CAPÍTULO 1 EL ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS

1.1 Ejercicios *(páginas 6 a 8)*

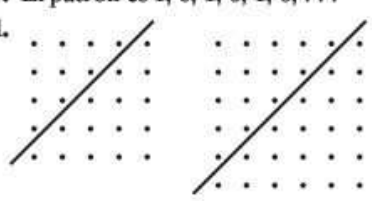
1. deductivo **3.** inductivo **5.** deductivo **7.** deductivo
9. inductivo **11.** inductivo **13.** Las respuestas variarán.

15. 21 **17.** 3072 **19.** 63 **21.** $\frac{11}{12}$ **23.** 216 **25.** 52
27. 5 **29.** Una lista como esta es 10, 20, 30, 40, 50,. . .
31. $(98{,}765 \times 9) + 3 = 888{,}888$
33. $3367 \times 15 = 50{,}505$
35. $33{,}334 \times 33{,}334 = 1{,}111{,}155{,}556$
37. $3 + 6 + 9 + 12 + 15 = \frac{15(6)}{2}$
39. $5(6) + 5(36) + 5(216) + 5(1296) + 5(7776) = 6(7776 - 1)$
41. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 1 - \frac{1}{32}$
43. 20,100 **45.** 320,400 **47.** 15,400 **49.** 2550

51. 1 (Estos son el número de repiques de un reloj, iniciando a las 12 en punto, si el reloj indica el número de horas cada hora, y da 1 repique cada media hora).
53. ***a)*** El dígito de en medio siempre es 9, y la suma del primer y tercer dígitos siempre es 9 (considerando 0 como el primer dígito si la diferencia tiene solo dos dígitos). ***b)*** Las respuestas variarán. **55.** 142,857; 285,714; 428,571; 571,428; 714,285; 857,142. Cada resultado está formado por los mismos seis dígitos, pero en orden diferente. $142{,}857 \times 7 = 999{,}999$.

1.2 Ejercicios *(páginas 15 a 18)*

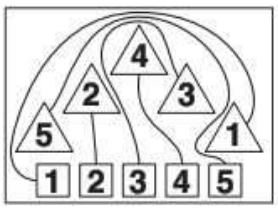
1. aritmética; 56 **3.** geométrica; 1215 **5.** ninguna
7. geométrica; 8 **9.** ninguna **11.** aritmética; 22
13. 79 **15.** 450 **17.** 4032 **19.** 32,758 **21.** 57; 99
23. $(4321 \times 9) - 1 = 38{,}888$
25. $999{,}999 \times 4 = 3{,}999{,}996$
27. $21^2 - 15^2 = 6^3$ **29.** $5^2 - 4^2 = 5 + 4$
31. $1 + 5 + 9 + 13 = 4 \times 7$ **33.** 45,150 **35.** 228,150
37. 2601 **39.** 250,000 **41.** $S = n(n + 1)$
43. Las respuestas variarán.
45. *fila 1*: 28, 36; *fila 2*: 36, 49, 64; *fila 3*: 35, 51, 70, 92; *fila 4*: 28, 45, 66, 91, 120; *fila 5*: 18, 34, 55, 81, 112, 148; *fila 6*: 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176
47. $8(1) + 1 = 9 = 3^2$; $8(3) + 1 = 25 = 5^2$; $8(6) + 1 = 49 = 7^2$; $8(10) + 1 = 81 = 9^2$
49. El patrón es 1, 0, 1, 0, 1, 0, . . .
51.



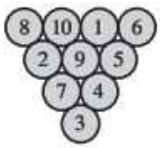
53. 256 **55.** 117 **57.** 235 **59.** $N_n = \frac{n(7n - 5)}{2}$
61. un número cuadrado **63.** un cubo perfecto **65.** 42
67. 419 **69.** $\frac{101}{2}$ **71.** 2048 **73.** $\frac{1}{2048}$ **75.** $\frac{5}{2048}$

1.3 Ejercicios *(páginas 24 a 29)*

1. 32 **3.** 0 (El producto de los dígitos primero y último es el número de dos dígitos entre ellos). **5.** 11
7. infinitamente muchas (cualquier recta que pase por el centro del cuadrado hará esto). **9.** 48.5 pulgadas **11.** 42
13. 6 **15.** Si usted multiplica los dos dígitos de los números de la primera fila, obtendrá la segunda fila de números. La segunda fila de números es un patrón de dos números (8 y 24) que se repiten. **17.** Coloco el anillo en la caja y pongo candado a la caja. Le envío la caja. Usted le pone su candado también, y me la envía de regreso. Entonces quito mi candado con mi llave y le envío la caja de regreso (aun con su candado puesto); entonces usted podrá quitar su candado con su llave y recuperar el anillo. **19.** 59 **21.** Usted debe elegir un calcetín de la caja etiquetada como *calcetines rojos y verdes*. Como está mal etiquetada, contiene solo calcetines rojos o solo calcetines verdes, identificándolos por el calcetín que sacó. Si el calcetín es verde, se vuelve a etiquetar esta caja como *calcetines verdes*. Como las otras dos cajas están mal etiquetadas, asigne la etiqueta de *rojos* a la otra caja y coloque la etiqueta que dice *calcetines rojos y verdes* a la última caja restante. Ninguna otra elección garantiza un etiquetamiento correcto porque usted solo puede sacar un calcetín.
23. D **25.** A
27. A continuación se presenta el ejemplo de una solución.



29. | 9 | 7 | 2 | 14 | 11 | 5 | 4 | 12 | 13 | 3 | 6 | 10 | 15 | 1 | 8 |
(o el mismo arreglo leyendo de derecha a izquierda)
31. Esta es una solución. **33.** D **35.** $\frac{1}{3}$



37. Aquí se muestra una secuencia posible. Los números representan el número de galones en cada balde en cada paso sucesivo.

Grande	7	4	4	1	1	0	7	5	5
Pequeño	0	3	0	3	0	1	1	3	0

39. 90 **41.** 55 mph **43.** 07 **45.** 437 **47.** 3

49. 21 estampillas (5 estampillas de 5 centavos y 16 estampillas de 8 centavos). **51.** 3 calcetines **53.** 35 **55.** 6

57. el decimonoveno día **59.** 1967

61. Eve tiene \$5 y Adam tiene \$7.

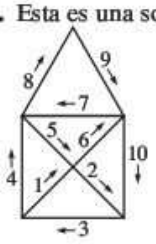
63.
$$\begin{array}{r} 4\ 0\ 2 \\ \times\quad 3\ 9 \\ \hline 1\ 5,\ 6\ 7\ 8 \end{array}$$

65.

6	**12**	**7**	9
1	15	**4**	14
11	**5**	10	**8**
16	**2**	13	**3**

67. 25 lanzamientos (El lanzador del equipo visitante retira a 24 bateadores consecutivos durante las primeras 8 entradas, usando solo un lanzamiento por bateador. Su equipo tampoco anota. Estando 0-0 en la parte baja de la novena entrada, el primer bateador del equipo local conecta su primer lanzamiento para un jonrón. El lanzador realizó 25 lanzamientos y perdió el juego por un marcador de 1-0). **69.** Q

71. Esta es una solución



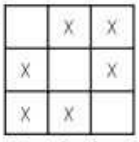
73. 6 maneras **75.** 86 cm

77. Dan (36) está casado con Jessica (29); James (30) está casado con Cathy (31).

79. 12; todos los meses tienen 28 días.

81. 3

83. 6



Una de dos posibilidades

85. Los productos siempre difieren por 1.

1.4 Ejercicios *(páginas 33 a 36)*

1. 43.8 **3.** 2.3589 **5.** 7.48 **7.** 7.1289 **9.** 6340.338097

11. 1 **13.** 1.061858759 **15.** 2.221441469

17. 3.141592653 **19.** 0.7782717162 **21.** sí

23. positivo **25.** 1 **27.** igual que **29.** 0

31. negativo **33.** Las respuestas variarán.

35. Las respuestas variarán. **37.** 63 **39.** 14 **41.** B **43.** A

45. D **47.** 5% **49.** 260,000 **51.** 2005, 2006, 2007

53. 2001: aproximadamente 165 mil millones de lb; 2007: aproximadamente 185 mil millones de lb

55. de 2000 a 2005; aproximadamente \$0.85

57. El precio de un galón de gasolina iba en descenso.

Examen del capítulo 1 *(páginas 41 a 42)*

1. inductivo **2.** deductivo

3. La suma mágica es 38



4. 65,359,477,124,183 × 68 = 4,444,444,444,444,444

5. 351 **6.** 31,375 **7.** 65; 65 = 1 + 7 + 13 + 19 + 25

8. 1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176; el patrón es 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, . . .

9. Los primeros dos términos son iguales a 1. Cada término después del segundo se obtiene sumando los dos términos anteriores.

10. $\frac{1}{4}$ **11.** 9 **12.** 35

13. Las respuestas variarán. Una solución posible es $1+2+3-4+5+6+78+9+0=100$.

14. 108 pulgadas o 9 pies **15.** 3

16. La suma de los dígitos siempre es 9.

17. 9.907572861 (Las respuestas pueden variar por el modelo de calculadora utilizado). **18.** 34.328125 **19.** B

20. ***a)*** entre 1998 y 1999, 1999 y 2000, y 2003 y 2004 ***b)*** La tasa de desempleo se incrementó. ***c)*** 2003: 6.0%; 2004: 5.5%; disminuyó 0.5%

CAPÍTULO 2 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

2.1 Ejercicios *(páginas 47 a 49)*

1. F **3.** E **5.** B **7.** H **9.** {1, 2, 3, 4, 5, 6}

11. {0, 1, 2, 3, 4} **13.** {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14}

15. {−15, −13, −11, −9, −7, −5, −3, −1}

17. {2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256} **19.** {0, 2, 4, 6, 8, 10}

21. {21, 22, 23, . . . } **23.** {Lago Erie, Lago Hurón, Lago Michigan, Lago Ontario, Lago Superior}

25. {5, 10, 15, 20, 25, . . . } **27.** $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

En los ejercicios 29 y 31, existen otras maneras de describir los conjuntos. **29.** $\{x \mid x$ es un número racional$\}$ **31.** $\{x \mid x$ es un número natural impar menor que 76$\}$ **33.** el conjunto de enteros de un solo dígito **35.** el conjunto de estados de EUA

37. finito **39.** infinito **41.** infinito **43.** infinito

45. 8 **47.** 500 **49.** 26 **51.** 39 **53.** 28

55. Las respuestas variarán. **57.** bien definido

59. no está bien definido **61.** $\in$ **63.** $\notin$ **65.** $\notin$ **67.** $\in$

69. falso **71.** verdadero **73.** verdadero **75.** verdadero

77. falso **79.** verdadero **81.** verdadero **83.** verdadero

85. falso **87.** verdadero **89.** Las respuestas variarán.

91. {2} y {3, 4} (Son posibles otros ejemplos).
93. {a, b} y {a, c} (Son posibles otros ejemplos).
95. ***a)*** {Drew Barrymore, Leonardo DiCaprio, Samuel L. Jackson, Jim Carrey} ***b)*** {Will Ferrel, Ewan McGregor}

2.2 Ejercicios *(páginas 54 a 55)*

1. D **3.** B **5.** $\not\subset$ **7.** $\subseteq$ **9.** $\subseteq$ **11.** $\not\subset$ **13.** ambos
15. $\subset$ **17.** ambos **19.** ninguno **21.** verdadero
23. falso **25.** verdadero **27.** falso **29.** verdadero
31. verdadero **33.** falso **35.** verdadero
37. verdadero **39.** falso **41.** ***a)*** 64 ***b)*** 63
43. ***a)*** 32 ***b)*** 31 **45.** {5, 7, 9, 10} **47.** {2} **49.** $\emptyset$
51. {Costo más alto, Costo más bajo, Didáctico, Más tiempo para ver el panorama de California, Menos tiempo para ver el panorama en California, No se puede visitar a familiares a lo largo del camino, Se puede visitar a familiares a lo largo del camino} **53.** {Costo más alto, Más tiempo para ver el panorama de California, No se puede visitar a familiares a lo largo del camino} **55.** $\emptyset$ **57.** {A, B, C, D, E} (Todos están presentes).
59. {A, B, C}, {A, B, D}, {A, B, E}, {A, C, D}, {A, C, E}, {A, D, E}, {B, C, D}, {B, C, E}, {B, D, E}, {C, D, E}
61. {A}, {B}, {C}, {D}, {E} **63.** 32
65. $2^{25} - 1 = 33{,}554{,}431$ **67.** ***a)*** 15 ***b)*** 16; ahora es posible *no* seleccionar billetes. **69.** ***a)*** s ***b)*** s ***c)*** $2s$ ***d)*** Sumando un elemento más siempre se duplicará el número de subconjuntos, de modo que la expresión 2^n es verdadera en general.

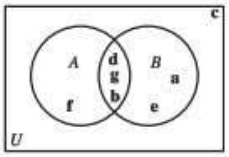
2.3 Ejercicios *(páginas 65 a 68)*

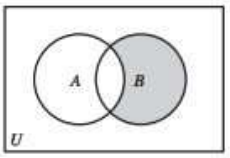
1. B **3.** A **5.** E **7.** {a, c} **9.** {a, b, c, d, e, f}
11. {a, b, c, d, e, f, g} **13.** {b, d, f} **15.** {d, f}
17. {a, b, c, e, g} **19.** {a, c, e, g} **21.** {a} **23.** {e, g}
25. {e, g} **27.** {d, f} **29.** {e, b, g}

En los ejercicios 31 a 35, puede haber otras descripciones aceptables.

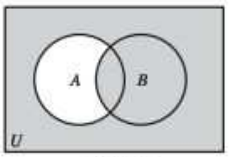
31. el conjunto de todos los elementos que están en A, o no están en B y no están en C **33.** el conjunto de todos los elementos que están en C pero no en B, o están en A **35.** el conjunto de todos los elementos que están en A pero no en C, o en B pero no en C
37. {*e, h, c, l, b*} **39.** {*l, b*} **41.** {*e, h, c, l, b*} **43.** el conjunto de todas las devoluciones de impuestos que muestren el ingreso del negocio o presentadas en 2009
45. el conjunto de todas las devoluciones de impuestos presentadas en 2009 sin deducciones desglosadas **47.** el conjunto de todas las devoluciones de impuestos con deducciones desglosadas o mostrando los ingresos del negocio, pero no elegidas para auditoría **49.** siempre verdadero
51. siempre verdadero **53.** no siempre verdadero
55. ***a)*** {1, 3, 5, 2} ***b)*** {1, 2, 3, 5} ***c)*** Para cualquier conjunto X y Y, $X \cup Y = Y \cup X$. **57.** ***a)*** {1, 3, 5, 2, 4} ***b)*** {1, 3, 5, 2, 4} ***c)*** Para cualquier conjunto X, Y y Z, $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$. **59.** ***a)*** {4} ***b)*** {4} ***c)*** Para cualquier conjunto X y Y, $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$.
61. $X \cup \emptyset = X$; para cualquier conjunto X, $X \cup \emptyset = X$.
63. verdadero **65.** falso **67.** verdadero **69.** verdadero

71. $A \times B = \{(2, 4), (2, 9), (8, 4), (8, 9), (12, 4), (12, 9)\}$; $B \times A = \{(4, 2), (4, 8), (4, 12), (9, 2), (9, 8), (9, 12)\}$
73. $A \times B = \{(d, p), (d, i), (d, g), (o, p), (o, i), (o, g), (g, p), (g, i), (g, g)\}$; $B \times A = \{(p, d), (p, o), (p, g), (i, d), (i, o), (i, g), (g, d), (g, o), (g, g)\}$
75. $n(A \times B) = 6; n(B \times A) = 6$
77. $n(A \times B) = 210; n(B \times A) = 210$ **79.** 6

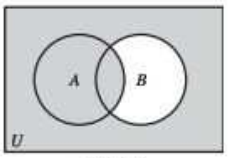
81.


83.


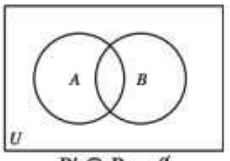
$B \cap A'$

85.


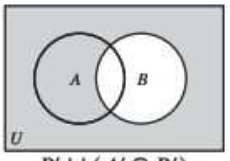
$A' \cup B$

87.


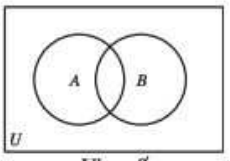
$B' \cup A$

89.


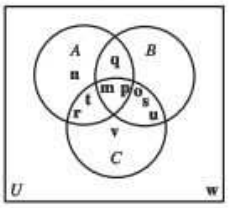
$B' \cap B = \emptyset$

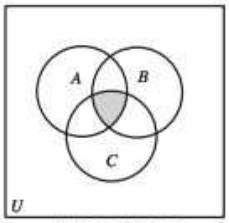
91.


$B' \cup (A' \cap B')$

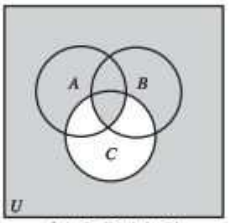
93.


$U' = \emptyset$

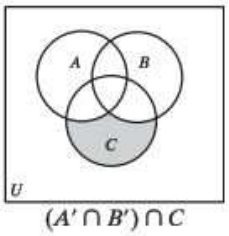
95.


97.


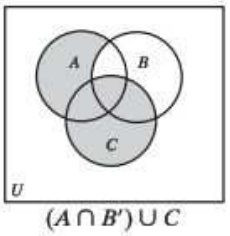
$(A \cap B) \cap C$

99.


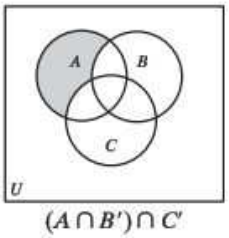
$(A \cap B) \cup C'$

101.


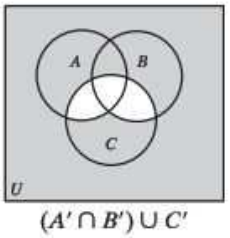
$(A' \cap B') \cap C$

103.


$(A \cap B') \cup C$

105.


$(A \cap B') \cap C'$

107.


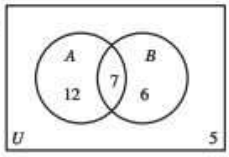
$(A' \cap B') \cup C'$

109. $A' \cap B'$, o $(A \cup B)'$
111. $(A \cup B) \cap (A \cap B)'$, o $(A \cup B) - (A \cap B)$, o $(A - B) \cup (B - A)$
113. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, o $A \cap (B \cup C)$
115. $(A \cap B) \cap C'$, o $(A \cap B) - C$
117. $A \cap B = \emptyset$ **119.** Este enunciado es verdadero para cualquier conjunto A. **121.** $A = \emptyset$
123. $A = \emptyset$ **125.** $A = \emptyset$ **127.** $B \subseteq A$
129. siempre verdadero **131.** siempre verdadero
133. no siempre verdadero **135.** siempre verdadero
137. ***a)*** $\{x | x$ es un número real$\}$ ***b)*** $\emptyset$

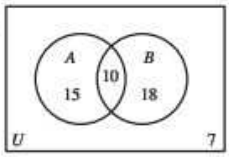
2.4 Ejercicios *(páginas 71 a 74)*

1. ***a)*** 5 ***b)*** 7 ***c)*** 0 ***d)*** 2 ***e)*** 8 **3.** ***a)*** 1 ***b)*** 3 ***c)*** 4 ***d)*** 0 ***e)*** 2 ***f)*** 8 ***g)*** 2 ***h)*** 6 **5.** 21
7. 7 **9.** 35

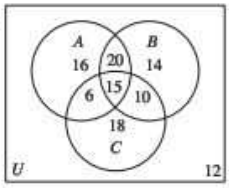
11.



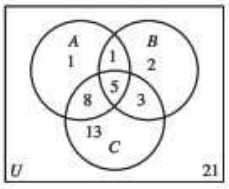
13.



15.



17.



19. ***a)*** 2 ***b)*** 4 **21.** ***a)*** 25 ***b)*** 20 ***c)*** 12 ***d)*** 10 ***e)*** 19 **23.** ***a)*** 37 ***b)*** 38 **25.** ***a)*** 500 ***b)*** 91
27. ***a)*** 31 ***b)*** 24 ***c)*** 11 ***d)*** 45 **29.** ***a)*** 1
b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
c) 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11 ***d)*** 5, 8, 13 **31.** ***a)*** 9 ***b)*** 9 ***c)*** 20 ***d)*** 20 ***e)*** 27 ***f)*** 15 **33.** Las respuestas variarán.

Ejercicios de la Extensión *(páginas 79 a 80)*

1. B; 1 **3.** A; $\aleph_0$ **5.** F; 0

7. (Son posibles otras correspondencias).

$$\begin{array}{cccc} \{\text{I}, & \text{II}, & \text{III}\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{\text{x}, & \text{y}, & \text{z}\} \end{array}$$

9. (Son posibles otras correspondencias).

$$\begin{array}{cccccc} \{\text{a}, & \text{d}, & \text{i}, & \text{t}, & \text{o}, & \text{n}\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{\text{a}, & \text{n}, & \text{s}, & \text{w}, & \text{e}, & \text{r}\} \end{array}$$

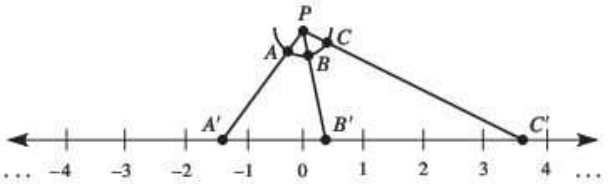
11. 11 **13.** 0 **15.** $\aleph_0$ **17.** $\aleph_0$ **19.** $\aleph_0$ **21.** 12
23. $\aleph_0$ **25.** ambas **27.** equivalente **29.** equivalente

31.
$$\begin{array}{cccccc} \{2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2n, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots\} \end{array}$$

33.
$$\begin{array}{ccccccc} \{1{,}000{,}000, & 2{,}000{,}000, & 3{,}000{,}000, & \ldots, & 1{,}000{,}000n, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{1, & 2, & 3, & \ldots, & n, & \ldots\} \end{array}$$

35.
$$\begin{array}{cccccccc} \{2, & 4, & 8, & 16, & 32, & \ldots, & 2^n, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, & \ldots\} \end{array}$$

37. Este enunciado no siempre es verdadero. Por ejemplo, si sea A = el conjunto de números naturales, B = al conjunto de números reales.
39. Este enunciado no siempre es verdadero. Por ejemplo, A puede ser el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los reales. Entonces $n(A)$ sería un número infinito *más grande* que c.
41. ***a)*** Los rayos que emanan del punto P establecerán un aparejamiento geométrico de los puntos sobre el semicírculo con los puntos sobre la línea.



b) El conjunto de los números reales es infinito, habiéndose colocado en correspondencia uno a uno con un subconjunto adecuado de sí mismo.

43.
$$\begin{array}{ccccccc} \{3, & 6, & 9, & 12, & \ldots, & 3n, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{6, & 9, & 12, & 15, & \ldots, & 3n+3, & \ldots\} \end{array}$$

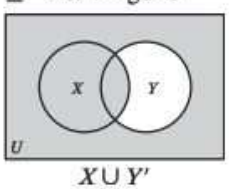
45.
$$\begin{array}{ccccccc} \{\frac{3}{4}, & \frac{3}{8}, & \frac{3}{12}, & \frac{3}{16}, & \ldots, & \frac{3}{4n}, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{\frac{3}{8}, & \frac{3}{12}, & \frac{3}{16}, & \frac{3}{20}, & \ldots, & \frac{3}{4n+4}, & \ldots\} \end{array}$$

47.
$$\begin{array}{ccccccc} \{\frac{1}{9}, & \frac{1}{18}, & \frac{1}{27}, & \ldots, & \frac{1}{9n}, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \{\frac{1}{18}, & \frac{1}{27}, & \frac{1}{36}, & \ldots, & \frac{1}{9n+9}, & \ldots\} \end{array}$$

49. Las respuestas variarán. **51.** Las respuestas variarán.

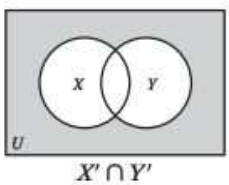
Examen del capítulo 2 *(páginas 81 a 82)*

1. $\{a, b, c, d, e\}$ **2.** $\{a, b, d\}$ **3.** $\{c, f, g, h\}$ **4.** $\{a, c\}$
5. verdadero **6.** falso **7.** verdadero **8.** verdadero
9. falso **10.** verdadero **11.** verdadero **12.** verdadero
13. 8 **14.** 15
Las respuestas pueden variar en los ejercicios 15 a 18.
15. el conjunto de enteros impares entre −4 y 10 **16.** el conjunto de meses del año **17.** $\{x | x$ es un número entero negativo$\}$ **18.** $\{x | x$ es un múltiplo de 8 entre 20 y 90$\}$
19. $\subseteq$ **20.** ninguno
21.



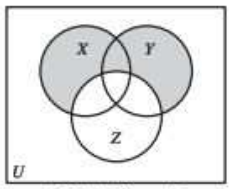
$X \cup Y'$

22.



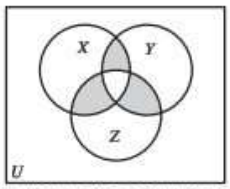
$X' \cap Y'$

23.



$(X \cup Y) - Z$

24.



$[(X \cap Y) \cup (Y \cap Z) \cup (X \cap Z)] - (X \cap Y \cap Z)$

25. {Rasuradora eléctrica} **26.** {Sumadora, Barómetro, Reloj de péndulo, Termómetro} **27.** {Rasuradora eléctrica} **28.** Las respuestas pueden variar. **29.** ***a)*** 22 ***b)*** 12 ***c)*** 28 **30.** ***a)*** 16 ***b)*** 32 ***c)*** 33 ***d)*** 45 ***e)*** 14 ***f)*** 26

CAPÍTULO 3 INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

3.1 Ejercicios *(páginas 88 a 90)*

1. enunciado **3.** no es un enunciado **5.** enunciado **7.** enunciado **9.** enunciado **11.** no es un enunciado **13.** enunciado **15.** compuesto **17.** no es compuesto **19.** no es compuesto **21.** compuesto **23.** El nombre de su tía no es Hermione. **25.** Al menos un perro no tiene su día. **27.** Ningún libro es más grande que este. **29.** Al menos un técnico de computadoras puede jugar blackjack. **31.** Alguien no ama a alguien en algún momento. **33.** $x \leq 12$ **35.** $x < 5$ **37.** Las respuestas variarán. **39.** Ella no tiene ojos verdes. **41.** Ella tiene ojos verdes y él tiene 60 años de edad. **43.** Ella no tiene ojos verdes o él tiene 60 años de edad. **45.** Ella no tiene ojos verdes o él no tiene 60 años de edad. **47.** No es el caso que ella no tenga ojos verdes y él tenga 60 años de edad. **49.** $p \wedge \sim q$ **51.** $\sim p \vee q$ **53.** $\sim(p \wedge q)$ o, de manera equivalente, $\sim p \wedge \sim q$ **55.** Las respuestas variarán. **57.** C **59.** A, B **61.** A, C **63.** B **65.** verdadero **67.** verdadero **69.** verdadero **71.** verdadero **73.** falso **75.** Las respuestas variarán. **77.** Todas las personas han hecho eso alguna vez.

3.2 Ejercicios *(páginas 99 a 100)*

1. falso **3.** verdadero **5.** Ambos deben ser falsos. **7.** V **9.** V **11.** F **13.** V **15.** V **17.** V **19.** Es una disyunción, porque significa "$6 > 2$ o $6 = 2$". **21.** V **23.** F **25.** V **27.** V **29.** F **31.** F **33.** V **35.** V **37.** V **39.** 4 **41.** 16 **43.** 128 **45.** siete **47.** FFVF **49.** FVVV **51.** VVVV **53.** FFFV **55.** VFFF **57.** FFFFVFFF **59.** FVFVVVVV **61.** VVVVVVVVVVVVFVVV **63.** Usted no puede pagarme ahora y usted no puede pagarme posteriormente. **65.** No es verano o hay nieve. **67.** No dije sí o ella no dijo no. **69.** $6 - 1 \neq 5$ o $9 + 13 = 7$ **71.** Ni Prancer ni Vixen traerán el trineo de Santa la próxima Navidad.

73. V **75.** F **77.**

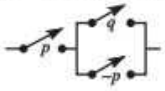
p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

79. F **81.** V **83.** La dama está detrás de la puerta 2. *Razonamiento*: Suponga que el letrero de la puerta 1 es verdadero. Entonces el letrero de la puerta 2 también sería verdadero, pero esto es imposible. De modo que el letrero de la puerta 2 debe ser verdadero, y el letrero de la puerta 1 debe ser falso. Como el letrero de la puerta 1 dice que la dama está en el cuarto 1, y esto es falso, la dama debe estar detrás de la puerta 2.

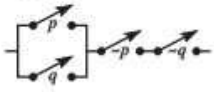
3.3 Ejercicios *(páginas 107 a 109)*

1. Si usted lo ve en Internet, entonces usted puede creerlo. **3.** Si un número entero es divisible entre 10, entonces es divisible entre 5. **5.** Si el soldado es un marino, entonces el soldado ama el campo de entrenamiento. **7.** Si es un panda, entonces no vive en Idaho. **9.** Si es un consumidor de opio, entonces no tiene autocontrol. **11.** verdadero **13.** verdadero **15.** falso **17.** verdadero **19.** Las respuestas variarán. **21.** F **23.** V **25.** V **27.** Si ellos no crían alpacas, entonces él entrena perros. **29.** Si ella tiene un pájaro como mascota, entonces ellos crían alpacas y él entrena perros. **31.** Si él no entrena perros, entonces ellos no crían alpacas o ella tiene un pájaro como mascota. **33.** $b \rightarrow p$ **35.** $p \rightarrow \sim s$ **37.** $p \wedge (s \rightarrow \sim s)$ **39.** $p \rightarrow s$ **41.** V **43.** F **45.** V **47.** F **49.** V **51.** V **53.** Las respuestas variarán. **55.** VVVF **57.** VVFV **59.** VVVV; tautología **61.** VFVF **63.** VVVVVVFV **65.** VVVFVVVVVVVVVVVV **67.** uno **69.** Ese es un reloj Rolex auténtico y no estoy sorprendido. **71.** Las medidas inglesas no están convertidas a medidas métricas y la nave espacial no se impactó sobre la superficie de Saturno. **73.** Usted quiere ser feliz por el resto de su vida y usted tiene por esposa una mujer bonita. **75.** Usted no da a sus plantas ternura y amor o ellas florecerán. **77.** Ella lo hace o él lo hará. **79.** La persona no es un residente de Pensacola o es un residente de Florida. **81.** equivalentes **83.** equivalentes **85.** no son equivalentes **87.** equivalentes **89.** equivalentes **91.** $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$; el enunciado se simplifica a p. **93.** $p \vee (\sim q \wedge r)$ **95.** $\sim p \vee (p \vee q)$; el enunciado se simplifica a V.

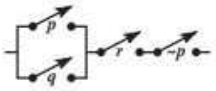
97. El enunciado se simplifica a $p \wedge q$.



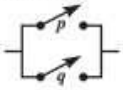
99. El enunciado se simplifica a F.



101. El enunciado se simplifica a $(r \wedge \sim p) \wedge q$.



103. El enunciado se simplifica a $p \vee q$.



105. $525.60

3.4 Ejercicios *(páginas 114–115)*

1. ***a)*** Si tú fueras una hora, entonces un minuto sería hermoso. ***b)*** Si un minuto no fuera hermoso, entonces tú no serías una hora. ***c)*** Si tú no fueras una hora, entonces un minuto no sería hermoso. **3.** ***a)*** Si no lo reparas, entonces no está descompuesto. ***b)*** Si está descompuesto, entonces repáralo. ***c)*** Si lo reparas, entonces está descompuesto. **5.** ***a)*** Si es peligroso para tu salud, entonces camina delante de un automóvil en movimiento. ***b)*** Si no caminas delante de un automóvil en movimiento, entonces no es peligroso para tu salud. ***c)*** Si no es peligroso para tu salud, entonces no caminas delante de un automóvil en movimiento.
7. ***a)*** Si vuelan juntos, entonces son pájaros de la misma parvada. ***b)*** Si no son pájaros de la misma parvada, entonces no vuelan juntos. ***c)*** Si no vuelan juntos, entonces no son pájaros de la misma parvada.
9. ***a)*** Si él viene, entonces lo construiste. ***b)*** Si no lo construyes, entonces él no vendrá. ***c)*** Si él no viene, entonces no lo construiste. **11.** ***a)*** $\sim q \rightarrow p$ ***b)*** $\sim p \rightarrow q$ ***c)*** $q \rightarrow \sim p$ **13.** ***a)*** $\sim q \rightarrow \sim p$ ***b)*** $p \rightarrow q$ ***c)*** $q \rightarrow p$
15. ***a)*** $(q \vee r) \rightarrow p$ ***b)*** $\sim p \rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$ ***c)*** $(\sim q \wedge \sim r) \rightarrow \sim p$
17. Las respuestas variarán.
19. Si está lodoso, entonces usaré mis botas de hule. **21.** Si el número 19 es positivo, entonces 19 +1 es positivo. **23.** Si un número es un entero, entonces es un número racional.
25. Si resuelvo acertijos lógicos, entonces me vuelvo loco.
27. Si Jeff Marsalis se rasura, entonces debe tener la barba de un día. **29.** Si voy de Boardwalk a la avenida Baltic, entonces paso por la SALIDA. **31.** Si un número es un entero no negativo entonces es un entero. **33.** Si su técnica de lanzamiento mejora, entonces los Nacionales ganarán el trofeo. **35.** Si la figura es un rectángulo, entonces es un paralelogramo con un ángulo recto. **37.** Si un triángulo tiene dos lados perpendiculares, entonces es un triángulo rectángulo. **39.** Si se eleva al cuadrado un número de dos dígitos, cuyo dígito de las unidades es 5, entonces el cuadrado terminará en 25. **41.** D. **43.** Las respuestas variarán.
45. verdadero **47.** falso **49.** falso **51.** contrario
53. consistente **55.** contrario **57.** consistente **59.** Las respuestas variarán. Un ejemplo es: Ese hombre es Otis Taylor. Ese hombre vende libros.

3.5 Ejercicios *(páginas 119 a 120)*

1. válido **3.** inválido **5.** válido **7.** inválido **9.** inválido
11. inválido **13.** sí
15. Toda la gente con ojos azules tiene el cabello rubio.
Natalie Graham no tiene el cabello rubio.
Natalie Graham no tiene ojos azules.
17. inválido **19.** válido **21.** inválido **23.** válido
25. inválido **27.** inválido **29.** válido

Ejercicios de la Extensión *(páginas 122 a 124)*

1. Drew, tarta de espinacas, Fresh Air, menta verde; Ilse, emparedado de pollo, Deltoids, con sabor a canela; Nash, sopa de cebolla, Liplickers, con sabor a vainilla; Uma, emparedado de atún, TKO, invierno verde; Xerxes, camarones al mojo de ajo, Inti, con sabor a naranja. **3.** Primero, Earl, Buey, fuego; segundo, Philip, Gallo, metal; tercero, Toni, Cabra, agua; cuarto, Lucy, Dragón, tierra; quinto, Ivana, Caballo, madera.

5.

7	4	2	1	6	8	9	3	5
3	1	9	4	5	7	6	2	8
8	6	5	9	3	2	7	1	4
6	2	4	7	8	9	1	5	3
1	3	8	5	4	6	2	9	7
5	9	7	2	1	3	8	4	6
2	5	3	8	7	1	4	6	9
9	7	6	3	2	4	5	8	1
4	8	1	6	9	5	3	7	2

7.

8	3	9	6	5	7	2	4	1
7	1	2	9	4	3	8	5	6
4	5	6	2	1	8	3	7	9
2	6	7	1	9	4	5	3	8
3	9	1	8	2	5	4	6	7
5	4	8	7	3	6	1	9	2
1	2	3	5	6	9	7	8	4
9	8	4	3	7	2	6	1	5
6	7	5	4	8	1	9	2	3

9.

6	1	7	9	2	3	5	8	4
4	5	9	8	6	1	2	7	3
3	2	8	4	5	7	9	6	1
8	3	5	6	4	9	1	2	7
7	6	1	5	3	2	8	4	9
2	9	4	7	1	8	3	5	6
5	7	2	3	9	6	4	1	8
1	8	3	2	7	4	6	9	5
9	4	6	1	8	5	7	3	2

3.6 Ejercicios *(páginas 130 a 133)*

1. válido por razonamiento de transitividad **3.** válido por modus ponens **5.** falacia por falacia del converso
7. válido por modus tollens **9.** falacia por falacia del inverso **11.** válido por silogismo disyuntivo **13.** inválido
15. válido **17.** inválido **19.** válido **21.** inválido
23. inválido **25.** inválido
27. Cada vez que algo rechina, uso WD-40.
Cada vez que uso WD-40, voy a la ferretería.
Cada vez que algo rechina, voy a la ferretería.



29. válido **31.** inválido **33.** inválido **35.** válido
37. válido **39.** Si le informo la hora, entonces mi vida será miserable. **41.** Si es mi ave, entonces es un pato.

43. Si es un conejillo de indias, entonces es completamente ignorante de la música. **45.** Si es un gato que aprende, entonces no tiene ojos verdes. **47.** Si puedo leerlo, entonces no lo tengo guardado. **49.** ***a)*** $p \to \sim s$ ***b)*** $r \to s$ ***c)*** $q \to p$ ***d)*** Ninguna de mis aves es oficial. **51.** ***a)*** $r \to \sim s$ ***b)*** $u \to t$ ***c)*** $\sim r \to p$ ***d)*** $\sim u \to \sim q$ ***e)*** $t \to s$ ***f)*** Todos los prestamistas son honestos. **53.** ***a)*** $r \to w$ ***b)*** $\sim u \to \sim t$ ***c)*** $v \to \sim s$ ***d)*** $x \to r$ ***e)*** $\sim q \to t$ ***f)*** $y \to p$ ***g)*** $w \to s$ ***h)*** $\sim x \to \sim q$ ***i)*** $p \to \sim u$ ***j)*** No puedo leer ninguna carta de Brown.

Investigación colaborativa *(páginas 134 a 135)*

1. 1 de enero, Vandyke, *Penchant*, reparación de satélite; 5 de febrero, San Simeon Launch Center, *Falconer*, investigar radiación; 3 de marzo, Cape Carnival, *Liberty*, alunizaje; 4 de abril, Willard Island, *Twilight*, prueba de propulsión; 2 de mayo, Eddings Air Force Base, *Bravura*, medición de campos magnéticos.

2.

5	10	11	4	1	6	14	2	16	7	12	8	15	9	13	3
12	15	7	3	8	4	9	13	2	11	5	1	16	10	14	6
13	8	6	14	11	16	10	7	9	15	3	4	5	1	12	2
9	1	2	16	5	3	12	15	6	14	10	13	11	4	7	8
11	13	9	10	2	14	16	3	1	12	8	6	7	15	4	5
7	6	16	2	12	10	15	4	13	5	9	11	1	3	8	14
1	4	15	12	6	8	11	5	3	16	7	14	9	2	10	13
3	14	8	5	13	9	7	1	4	2	15	10	12	6	16	11
4	7	5	11	14	12	3	10	8	6	2	15	13	16	1	9
15	16	1	9	7	5	2	11	10	3	13	12	14	8	6	4
2	12	10	6	9	13	4	8	11	1	14	16	3	5	15	7
14	3	13	8	15	1	6	16	5	9	4	7	2	12	11	10
10	9	14	7	16	2	8	12	15	13	6	3	4	11	5	1
6	2	12	15	4	11	5	14	7	8	1	9	10	13	3	16
16	5	4	13	3	7	1	6	12	10	11	2	8	14	9	15
8	11	3	1	10	15	13	9	14	4	16	5	6	7	2	12

Examen del capítulo 3 *(páginas 135 a 136)*

1. $6 - 3 \neq 3$ **2.** Algunos hombres no son creados iguales. **3.** Ningún miembro de la clase fue a la práctica de campo. **4.** Eso es lo que sientes y yo no lo acepto. **5.** Ella no solicitó un crédito o no obtuvo un préstamo estudiantil. **6.** $\sim p \to q$ **7.** $p \to q$ **8.** $\sim q \leftrightarrow \sim q$ **9.** Tú no me amarás y yo te amaré **10.** No es el caso que tú me amarás o yo no te amaré (De forma equivalente: Tú no me amarás y yo te amaré). **11.** V **12.** V **13.** V **14.** F **15.** Las respuestas variarán. **16.** ***a)*** El antecedente debe ser verdadero y el consecuente debe ser falso. ***b)*** Ambos enunciados componentes deben ser verdaderos. ***c)*** Ambos enunciados componentes deben ser falsos. **17.** VFFF **18.** VVVV (tautología) **19.** falso **20.** verdadero

La formulación puede variar en las respuestas de los ejercicios 21 a 25.

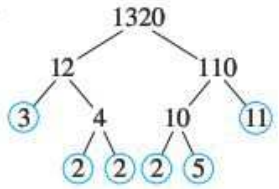
21. Si el número es un entero, entonces es un número racional. **22.** Si el polígono es un rombo, entonces es un cuadrilátero. **23.** Si un número es divisible entre 4, entonces es divisible entre 2. **24.** Si ella busca huesos de dinosaurio, entonces es paleontóloga. **25.** ***a)*** Si una gráfica me ayuda a entenderlo, entonces un dibujo dice más que mil palabras ***b)*** Si un dibujo no dice más que mil palabras, entonces la gráfica no me ayuda a entenderlo. ***c)*** Si la gráfica no me ayuda a entenderlo, entonces un dibujo no dice más que mil palabras. **26.** ***a)*** $(q \wedge r) \to \sim p$ ***b)*** $p \to (\sim q \vee \sim r)$ ***c)*** $(\sim q \vee \sim r) \to p$ **27.** válido **28.** ***a)*** A ***b)*** F ***c)*** C ***d)*** D **29.** válido **30.** inválido

CAPÍTULO 4 TEORÍA DE NÚMEROS

4.1 Ejercicios *(páginas 142 a 143)*

1. verdadero **3.** verdadero **5.** falso **7.** verdadero **9.** 1, 2, 3, 4, 6, 12 **11.** 1, 2, 4, 7, 14, 28 **13.** ***a)*** no ***b)*** sí ***c)*** no ***d)*** no ***e)*** no ***f)*** no ***g)*** no ***h)*** no ***i)*** no **15.** ***a)*** sí ***b)*** sí ***c)*** sí ***d)*** sí ***e)*** sí ***f)*** sí ***g)*** sí ***h)*** sí ***i)*** sí **17.** ***a)*** Las respuestas variarán. ***b)*** 13 ***c)*** raíz cuadrada; raíz cuadrada; raíz cuadrada ***d)*** primo **19.** 2, 3; no **21.** Debe ser cero.

23.



$1320 = 3 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 11$
$= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

25. $2^3 \cdot 3 \cdot 7$ **27.** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$ **29.** sí **31.** no **33.** no **35.** sí **37.** El número debe ser divisible tanto entre 3 como entre 5. Es decir, la suma de los dígitos debe ser divisible entre 3, y el último dígito debe ser 5 o 0. **39.** 0, 2, 4, 6, 8 **41.** 0, 4, 8 **43.** 0, 6 **45.** 8 **47.** 27 **49.** año bisiesto **51.** no es un año bisiesto **53.** Las respuestas variarán. **55.** Las respuestas variarán.

4.2 Ejercicios *(páginas 147 a 148)*

1. verdadero **3.** falso **5.** falso **7.** $37 = 1^2 + 6^2$; $41 = 4^2 + 5^2$ **9.** Las respuestas variarán. **11.** $41^2 - 41 + 41 = 41^2$, y 41^2 no es primo. **13.** B **15.** ***a)*** 65,537 ***b)*** 251 **17.** Las respuestas variarán. **19.** Las respuestas variarán. **21.** compuesto; $30{,}031 = 59 \cdot 509$ **23.** 63 **25.** $2^p - 1$ **27.** 3 y 31

4.3 Ejercicios *(páginas 153 a 155)*

1. verdadero **3.** verdadero **5.** verdadero **7.** falso **9.** verdadero **11.** La suma de los divisores adecuados es 496: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$. **13.** 8191 es primo; 33,550,336 **15.** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$ **17.** deficiente **19.** abundante **21.** 12, 18, 20, 24 **23.** $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 15 + 21 + 27 + 35 + 45 + 63 + 105 + 135 + 189 + 315 = 975$, y $975 > 945$, entonces 945 es abundante.

25. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210$ y $1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1184$ **27.** $5 + 11$ **29.** $7 + 23$ **31.** ***a)*** Sean $a = 5$ y $b = 3$; $11 = 5 + 2 \cdot 3$ ***b)*** $17 = 3 + 2 \cdot 7 = 7 + 2 \cdot 5 = 11 + 2 \cdot 3 = 13 + 2 \cdot 2$ **33.** 41 y 43 **35.** ***a)*** $3^4 - 1 = 80$ es divisible entre 5. ***b)*** $2^6 - 1 = 63$ es divisible entre 7. **37.** $5^2 + 2 = 27 = 3^3$ **39.** Las respuestas variarán. **41.** Falso; para los primeros seis, la secuencia es 6, 8, 6, 8, 6, 6 **43.** uno; no es feliz

45. ambos; feliz **47.** Las respuestas variarán. **49.** B **51.** 7; sí **53.** 15; no **55.** 27; no **57.** 24; 23; 25; sí; no **59.** Las respuestas variarán. **61.** B

4.4 Ejercicios *(páginas 161 a 163)*

1. verdadero **3.** verdadero **5.** falso **7.** verdadero **9.** verdadero **11.** 20 **13.** 60 **15.** 13 **17.** 18 **19.** 10 **21.** 6 **23.** 8 **25.** 12 **27.** 80 **29.** Las respuestas variarán. **31.** 270 **33.** 450 **35.** 840 **37.** 96 **39.** 225 **41.** 2160 **43.** 224 **45.** 216 **47.** 2400 **49.** ***a)*** $p^b q^c r^c$ ***b)*** $p^a q^a r^b$ **51.** 30 **53.** 15 **55.** 12 **57.** ***a)*** 6 ***b)*** 36 **59.** ***a)*** 18 ***b)*** 216 **61.** p y q son primos relativos. **63.** Las respuestas variarán. **65.** La 144 **67.** 48 **69.** \$600; 25 libros

Ejercicios de la Extensión *(página 169)*

1. 3 **3.** 4 **5.** 5 **7.** 2 **9.** 2 **11.** 13 **13.** 12 **15.** 3 **17.** 55; 40 **19.** 65; 48 **21.** 5 **23.** 61 **25.** ***a)*** 27 ***b)*** 35 **27.** ***a)*** 11 ***b)*** 23 **29.** Las respuestas variarán.

4.5 Ejercicios *(páginas 174 a 176)*

1. 2584 **3.** 28,657 **5.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

7. $1+1+2+3+5+8=21-1$; cada expresión es igual a 20. **9.** $1+2+5+13+34+89=144$; cada expresión es igual a 144. **11.** $13^2-5^2=144$; cada expresión es igual a 144. **13.** $1-2+5-13+34-89=-8^2$; cada expresión es igual a −64. **15.** (Hay otras formas de hacer esto). ***a)*** $37=34+3$ ***b)*** $40=34+5+1$ ***c)*** $52=34+13+5$ **17.** ***a)*** El máximo común divisor de 10 y 4 es 2, y el máximo común divisor de $F_{10}=55$ y $F_4=3$ es $F_2=1$. ***b)*** El máximo común divisor de 12 y 6 es 6, y el máximo común divisor de $F_{12}=144$ y $F_6=8$ es $F_6=8$. ***c)*** El máximo común divisor de 14 y 6 es 2, y el máximo común divisor de $F_{14}=377$ y $F_6=8$ es $F_2=1$. **19.** ***a)*** $5\cdot 34-13^2=1$ ***b)*** $13^2-3\cdot 55=4$ ***c)*** $2\cdot 89-13^2=9$ ***d)*** La diferencia es 25 porque estamos obteniendo los cuadrados de los términos de la secuencia de Fibonacci. $13^2-1\cdot 144=25=5^2$. **21.** 199 **23.** Cada suma es dos unidades menor que el número de Lucas. **25.** ***a)*** $8\cdot 18=144$; cada expresión es igual a 144. ***b)*** $8+21=29$; cada expresión es igual a 29 ***c)*** $8+18=2\cdot 13$; cada expresión es igual a 26. ***d)*** $18+47=5\cdot 13$; Cada expresión es igual a 65. **27.** 3, 4, 5 **29.** 16, 30, 34 **31.** Las sumas son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13. Son términos de la secuencia de Fibonacci.

33. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618033989$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx -0.618033989$. Después del punto decimal, los dígitos son los mismos. **35.** 377 **37.** 17,711

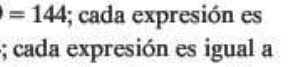
Examen del capítulo 4 *(páginas 177 a 178)*

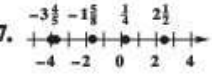
1. falso **2.** verdadero **3.** verdadero **4.** verdadero **5.** verdadero **6.** falso **7.** ***a)*** sí ***b)*** no ***c)*** sí ***d)*** sí ***e)*** no ***f)*** sí ***g)*** no ***h)*** sí ***i)*** no **8.** ***a)*** compuesto ***b)*** primo ***c)*** ninguno **9.** $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ **10.** Las respuestas variarán. **11.** ***a)*** abundante ***b)*** deficiente ***c)*** perfecto **12.** C **13.** 59 y 61 **14.** 27 **15.** 450 **16.** Lunes **17.** 75,025 **18.** $89-(8+13+21+34)=13$; cada expresión es igual a 13. **19.** B **20.** 1, 5, 6, 11, 17, 28, 45, 73 **21.** El resultado del proceso será 19 para cualquier término seleccionado. **22.** A **23.** Las respuestas variarán. **24.** Las respuestas variarán.

CAPÍTULO 5 LOS NÚMEROS REALES Y SUS REPRESENTACIONES

5.1 Ejercicios *(páginas 186 a 188)*

1. 5 **3.** 0 **5.** $\sqrt{14}$ (Existen otros.) **7.** verdadero **9.** verdadero **11.** ***a)*** 3, 7 ***b)*** 0, 3, 7 ***c)*** −9, 0, 3, 7 ***d)*** $-9, -1\frac{1}{4}, -\frac{3}{5}, 0, 3, 5.9, 7$ ***e)*** $-\sqrt{7}, \sqrt{5}$ ***f)*** Todos son números reales. **13.** Las respuestas variarán. **15.** 1046 **17.** 5436 **19.** −220° **21.** 30; 15°; −5° **23.** ***a)*** Océano Pacífico, Océano Índico, Mar Caribe, Mar del Sur de China, Golfo de California ***b)*** Point Success, Ranier, Matlalcueyetl, Steele, McKinley ***c)*** verdadero ***d)*** falso

25. 

27. 

29. ***a)*** A ***b)*** A ***c)*** B ***d)*** B **31.** ***a)*** 2 ***b)*** 2 **33.** ***a)*** −6 ***b)*** 6 **35.** ***a)*** −3 ***b)*** 3 **37.** ***a)*** 0 ***b)*** 0 **39.** $a-b$ **41.** −12 **43.** −8 **45.** 3 **47.** $|-3|$ o 3 **49.** $-|-6|$ o −6 **51.** $|5-3|$ o 2 **53.** verdadero **55.** verdadero **57.** verdadero **59.** falso **61.** verdadero **63.** falso **65.** ***a)*** Luisiana; disminuyó 4.1%. ***b)*** Virginia Occidental; aumentó 0.6%. **67.** fabricación de telas

Las respuestas variarán en los ejercicios 69 a 73.

69. $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, 1\frac{3}{4}$ **71.** $-3\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{7}$ **73.** $\sqrt{5}, \pi, -\sqrt{3}$

5.2 Ejercicios *(páginas 196 a 200)*

1. negativo **3.** −3; 5 **5.** Las respuestas variarán. **7.** −20 **9.** −4 **11.** −11 **13.** 9 **15.** 20 **17.** 4 **19.** 24 **21.** −1296 **23.** 6 **25.** −6 **27.** 0 **29.** −6 **31.** 27 **33.** 39 **35.** −4 **37.** −2 **39.** no es un número real **41.** 13 **43.** A, B, C **45.** propiedad conmutativa de la suma **47.** propiedad inversa de la suma **49.** propiedad de identidad de la multiplicación **51.** propiedad asociativa de la suma **53.** propiedad de identidad de la suma **55.** propiedad distributiva **57.** propiedad inversa de la suma **59.** propiedad de cierre de la multiplicación **61.** ***a)*** −2; 2 ***b)*** conmutativa ***c)*** Sí; se elige $a=b$. Por ejemplo, sea $a=b=2$. Entonces, $2-2=2-2$. **63.** ***a)*** desordenar su cuarto ***b)*** gastar dinero ***c)*** bajar el volumen de su reproductor MP3 **65.** identidad **67.** No, no se mantiene como verdadera. **69.** −81 **71.** 81 **73.** −81 **75.** −81

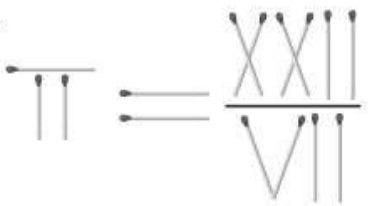
77. *a)* 25.9 (miles de millones de dólares) *b)* 58.2 (miles de millones de dólares) *c)* 153.0 (miles de millones de dólares) *d)* 237.1 (miles de millones de dólares) **79.** *a)* 2000: \$129 mil millones; 2010: \$206 mil millones; 2020: \$74 mil millones; 2030: −\$501 mil millones *b)* El costo de seguridad social excederá los ingresos en 2030 por \$501 mil millones. **81.** 16 **83.** \$1045.55 **85.** 14,776 pies **87.** 45°F **89.** 112°F **91.** −60°F **93.** 27 pies **95.** 469 a. C. **97.** \$15,000 **99.** \$2900

5.3 Ejercicios *(páginas 209 a 212)*

1. A, C, D **3.** C **5.** $\frac{1}{3}$ **7.** $-\frac{3}{7}$ **Las respuestas variarán en los ejercicios 9 y 11.** **9.** $\frac{6}{16}, \frac{9}{24}, \frac{12}{32}$ **11.** $-\frac{10}{14}, -\frac{15}{21}, -\frac{20}{28}$ **13.** *a)* $\frac{1}{3}$ *b)* $\frac{1}{4}$ *c)* $\frac{2}{5}$ *d)* $\frac{1}{3}$ **15.** Los puntos en la intersección del triángulo y el rectángulo como una parte de los puntos de la figura completa. **17.** *a)* O'Brien *b)* Goldberg *c)* Goldberg *d)* Kelly *e)* Taylor y Britz; $\frac{1}{2}$ **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** $\frac{43}{48}$ **23.** $-\frac{5}{24}$ **25.** $\frac{23}{56}$ **27.** $\frac{27}{20}$ **29.** $\frac{5}{12}$ **31.** $\frac{1}{9}$ **33.** $\frac{3}{2}$ **35.** $\frac{3}{2}$ **37.** *a)* $4\frac{1}{2}$ copas *b)* $\frac{7}{8}$ copa **39.** $\frac{13}{3}$ **41.** $\frac{29}{10}$ **43.** $6\frac{3}{4}$ **45.** $6\frac{1}{8}$ **47.** $-17\frac{7}{8}$ **49.** $\frac{9}{16}$ de pulgada **51.** 3 **53.** $\frac{3}{7}$ **55.** $-\frac{103}{89}$ **57.** $\frac{25}{9}$ **59.** $\frac{5}{8}$ **61.** $\frac{19}{30}$ **63.** $-\frac{3}{4}$ **65.** \$53,221 **67.** $\frac{14}{19}$ **69.** $\frac{13}{29}$ **71.** $\frac{16}{14}$, u $\frac{8}{7}$ **73.** $\frac{5}{2}$ **75.** Nos da el número racional en el punto medio entre dos enteros (su promedio). **77.** 0.75 **79.** 0.1875 **81.** $0.\overline{27}$ **83.** $0.\overline{285714}$ **85.** $\frac{2}{5}$ **87.** $\frac{17}{20}$ **89.** $\frac{467}{500}$ **91.** periódico **93.** exacto **95.** exacto **97.** *a)* $0.\overline{3}$, o 0.333... *b)* $0.\overline{6}$, o 0.666... *c)* $0.\overline{9}$, o 0.999... *d)* $1 = 0.\overline{9}$ **99.** *a)* $\frac{4}{5}$ *b)* $\frac{4}{5}$ **101.** *a)* $\frac{33}{50}$ *b)* $\frac{33}{50}$

5.4 Ejercicios *(páginas 219 a 222)*

1. racional **3.** irracional **5.** racional **7.** racional **9.** irracional **11.** racional **13.** irracional **15.** *a)* $0.\overline{8}$ *b)* irracional; racional **17.** 6.244997998 **19.** 3.885871846 **21.** 29.73213749 **23.** 1.060660172 **25.** $5\sqrt{2}$; 7.071067812 **27.** $5\sqrt{3}$; 8.660254038 **29.** $12\sqrt{2}$; 16.97056275 **31.** $\frac{5\sqrt{6}}{6}$; 2.041241452 **33.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$; 1.322875656 **35.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$; 1.527525232 **37.** $3\sqrt{17}$ **39.** $4\sqrt{7}$ **41.** $10\sqrt{2}$ **43.** $3\sqrt{3}$ **45.**



47. El resultado es 3.1415929, lo cual concuerda con los primeros siete dígitos de los decimales de π. **49.** 3 **51.** 4 **53.** 3.3 **55.** ϕ es positivo, mientras que su conjugado es negativo. El dígito de las unidades de ϕ es 1, y el dígito de las unidades de su conjugado es 0. Los dígitos de los decimales coinciden. **57.** Es solo una coincidencia que 1828 aparezca consecutivamente en la primera parte del decimal. No hay una repetición indefinida, lo que sería indicativo de un número racional. **59.** 2.5 segundos **61.** 15.3 millas **63.** 392,000 millas cuadradas **65.** El área y el perímetro son numéricamente iguales a 36. **67.** 5.4 pies **69.** *a)* 70.5 mph *b)* 59.8 mph *c)* 53.9 mph **71.** 4 **73.** 7 **75.** 6 **77.** 1 **79.** 4 **81.** 8

El número de decimales desplegados variará entre diferentes modelos de calculadoras en los ejercicios 83 a 89.

83. 3.50339806 **85.** 5.828476683 **87.** 10.06565066 **89.** 5.578019845

5.5 Ejercicios *(páginas 230 a 234)*

1. verdadero **3.** falso **5.** verdadero **7.** verdadero **9.** falso **11.** 11.315 **13.** −4.215 **15.** 0.8224 **17.** 47.5 **19.** 31.6 **21.** \$525 mil millones **23.** Tres (y usted tendría 0.01 centavos sobrantes) **25.** \$0.06, o 6 centavos **27.** 1000 **29.** *a)* 0.031 *b)* 0.035 **31.** 297 **33.** *a)* 78.4 *b)* 78.41 **35.** *a)* 0.1 *b)* 0.08 **37.** *a)* 12.7 *b)* 12.69 **39.** 42% **41.** 36.5% **43.** 0.8% **45.** 210% **47.** 20% **49.** 1% **51.** $37\frac{1}{2}$% **53.** 150% **55.** Las respuestas variarán. **57.** *a)* 5 *b)* 24 *c)* 8 *d)* 0.5 o $\frac{1}{2}$ *e)* 600 **59.** No, el precio es \$57.60. **61.** *a)* .586 *b)* .519 *c)* .463 *d)* .395 **63.** 124.8 **65.** 2.94 **67.** 150% **69.** 600 **71.** 1.4% **73.** 8% **75.** 3.8% **77.** 47.5% **79.** A **81.** C **83.** aproximadamente 139% **85.** *a)* $14.7 - 40 \cdot 0.13$ *b)* 9.5 *c)* 8.075; caminando (5 mph) **87.** 892% **89.** \$4.50 **91.** \$0.75 **93.** \$12.00 **95.** \$36.00 **97.** Las respuestas variarán.

Ejercicios de la Extensión *(página 237)*

1. $12i$ **3.** $-15i$ **5.** $i\sqrt{3}$ **7.** $5i\sqrt{3}$ **9.** -5 **11.** -18 **13.** -40 **15.** $\sqrt{2}$ **17.** $3i$ **19.** 6 **21.** 1 **23.** -1 **25.** $-i$ **27.** i

Examen del capítulo 5 *(páginas 238 a 240)*

1. *a)* 12 *b)* 0, 12 *c)* −4, 0, 12 *d)* $-4, -\frac{3}{2}, -0.5, 0, 4.1, 12$ *e)* $-\sqrt{5}, \sqrt{3}$ *f)* $-4, -\sqrt{5}, -\frac{3}{2}, -0.5, 0, \sqrt{3}, 4.1, 12$ **2.** *a)* C *b)* B *c)* D *d)* A **3.** *a)* falso *b)* verdadero *c)* verdadero *d)* falso **4.** 4 **5.** 10 **6.** 3 **7.** *a)* Minnesota; 52.74% *b)* Maine; 10.63% *c)* falso *d)* verdadero **8.** 5296 pies **9.** *a)* \$2900 *b)* −\$4000 *c)* −\$21,300 *d)* −\$19,100 **10.** *a)* E *b)* A *c)* B *d)* D *e)* F *f)* C **11.** *a)* Whitney y McElwain *b)* Moura y Dawkins *c)* Whitney *d)* Pritchard y Miller; $\frac{2}{5}$ *e)* McElwain ("J-Mac") **12.** $\frac{11}{16}$ **13.** $\frac{57}{160}$ **14.** $-\frac{2}{5}$ **15.** $\frac{3}{2}$ **16.** *a)* 0.45 *b)* $0.41\overline{6}$ **17.** *a)* $\frac{18}{25}$ *b)* $\frac{58}{99}$ **18.** *a)* irracional *b)* racional *c)* racional *d)* racional *e)* irracional *f)* irracional

19. *a)* 12.247448714 *b)* $5\sqrt{6}$ **20.** *a)* 4.913538149 *b)* $\frac{13\sqrt{7}}{7}$ **21.** *a)* −45.254834 *b)* $-32\sqrt{2}$ **22.** Las respuestas variarán. **23.** *a)* 13.81 *b)* −0.315 *c)* 38.7 *d)* −24.3 **24.** *a)* 9.04 *b)* 9.045 **25.** *a)* 16.65 *b)* 101.5 **26.** *a)* $26\frac{2}{3}\%$ *b)* $66\frac{2}{3}\%$ **27.** D **28.** 1656; 1008; 16%; 6% **29.** 17,415,000 **30.** −13.8 (miles de millones de dólares)

CAPÍTULO 6 CONCEPTOS BÁSICOS DE ÁLGEBRA

6.1 Ejercicios *(páginas 248 a 251)*

1. A y C **3.** Ambos lados son iguales a 48, entonces 12 es la solución **5.** conjunto solución **7.** B **9.** $\{-1\}$ **11.** $\{3\}$ **13.** $\{-7\}$ **15.** $\{0\}$ **17.** $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$ **19.** $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **21.** $\{2\}$ **23.** $\{-2\}$ **25.** $\{7\}$ **27.** $\{2\}$ **29.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **31.** $\{-5\}$ **33.** $\{3\}$ **35.** 2 (es decir, 10^2, o 100) **37.** $\{4\}$ **39.** $\{0\}$ **41.** $\{0\}$ **43.** $\{2000\}$ **45.** $\{25\}$ **47.** $\{40\}$

49. identidad, contradicción **51.** contradicción; $\emptyset$ **53.** condicional; $\{-8\}$ **55.** condicional; $\{0\}$ **57.** identidad; {todos los números reales} **59.** D **61.** $t = \frac{d}{v}$ **63.** $b = \frac{2A}{h}$ **65.** $a = P - b - c$ **67.** $b = \frac{2A}{h}$ **69.** $h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$, o $h = \frac{S}{2\pi r} - r$ **71.** $F = \frac{9}{5}C + 32$ **73.** $h = \frac{3V}{\pi r^2}$ **75.** *a)* $5460 *b)* 2013

77. *a)* 0.0352 *b)* aproximadamente 0.015, o 1.5% *c)* aproximadamente 1 caso

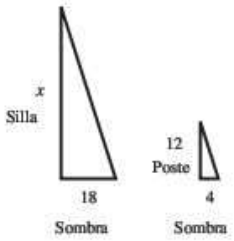
6.2 Ejercicios *(páginas 259 a 263)*

1. expresión **3.** ecuación **5.** expresión **7.** sí **9.** $x - 12$ **11.** $(x - 6)(x + 4)$ **13.** $\frac{25}{x}$ $(x \neq 0)$ **15.** Las respuestas variarán. **17.** 3 **19.** 6 **21.** −3 **23.** Bon Jovi: $210.7 millones; Bruce Springsteen: $204.6 millones **25.** gana: 62; pierde: 20 **27.** Demócratas: 58; Republicanos: 40 **29.** parte más corta: 15 pulgadas; parte mediana: 20 pulgadas; parte más larga: 24 pulgadas **31.** Oro: 51; plata: 21; bronce: 28 **33.** 70 mililitros **35.** $250 **37.** $24.85 **39.** 4 litros **41.** 5 litros **43.** 1 galón **45.** $4000 al 3%; $8000 al 4% **47.** $10,000 al 4.5%; $19,000 al 3% **49.** $58,000 **51.** 17 centavos, 17 monedas de 10 centavos, 10 monedas de 25 centavos **53.** 305 estudiantes, 105 que no eran estudiantes **55.** 54 asientos en la fila 1; 51 asientos en la fila 2 **57.** estampillas de 44 centavos: 30; estampillas de 17 centavos: 25 **59.** 328 millas **61.** No, no es correcto. La distancia es $55\left(\frac{1}{2}\right) = 27.5$ millas. **63.** 1 hora y $\frac{3}{4}$ **65.** 11:00 A.M. **67.** 8 horas **69.** 18 millas **71.** 3.326 horas **73.** 1.715 horas **75.** 7.97 metros por segundo **77.** 8.47 metros por segundo

6.3 Ejercicios *(páginas 271 a 276)*

1. $\frac{5}{8}$ **3.** $\frac{1}{4}$ **5.** $\frac{2}{1}$ **7.** $\frac{3}{1}$ **9.** D **11.** Las respuestas variarán. **13.** verdadero **15.** falso **17.** verdadero **19.** $\{35\}$ **21.** $\{-1\}$ **23.** $\left\{-\frac{27}{4}\right\}$ **25.** $30.00 **27.** $8.75 **29.** $67.50 **31.** $44.55 **33.** 4 pies **35.** 2.7 pulgadas **37.** 2.0 pulgadas **39.** $2\frac{5}{8}$ tazas **41.** $428.82 **43.** 12,500 peces **45.** tamaño de 10 libras; $0.429 **47.** tamaño de 32 onzas; $0.093 **49.** tamaño de 128 onzas; $0.051 **51.** tamaño de 36 onzas; $0.049 **53.** $x = 4$ **55.** $x = 1; y = 4$

57. *a)*



b) 54 pies

59. $237 **61.** $272 **63.** 9 **65.** 125 **67.** $\frac{4}{9}$ **69.** $40.32

71. 20 millas por hora **73.** aproximadamente 302 libras **75.** 100 libras por pulgada cuadrada **77.** 20 libras por pie cuadrado **79.** 144 pies **81.** 1.105 litros **83.** $\frac{8}{9}$ de tonelada métrica **85.** 6.2 libras

6.4 Ejercicios *(páginas 283 a 285)*

1. D **3.** B **5.** F **7.** Use paréntesis cuando el símbolo sea $<$ o $>$. Use corchetes cuando el símbolo sea $\leq$ o $\geq$.

9. $[5, \infty)$ **11.** $(7, \infty)$

13. $(-4, \infty)$ **15.** $(-\infty, -40]$

17. $(-\infty, 4]$ **19.** $\left(-\infty, -\frac{15}{2}\right)$

21. $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ **23.** $(3, \infty)$

25. $(-\infty, 4)$ **27.** $\left(-\infty, \frac{23}{6}\right]$

29. $\left(-\infty, \frac{76}{11}\right)$ **31.** $(-\infty, \infty)$

33. $\emptyset$ **35.** Las respuestas variarán.

37. $(1, 11)$ **39.** $[-14, 10]$

41. $[-5, 6]$ **43.** $\left[-\frac{14}{3}, 2\right]$

45. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{35}{2}\right]$ **47.** $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right]$

49. abril, mayo, junio, julio **51.** enero, febrero, marzo, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre **53.** PA en 2006, OH en 2005 y 2006, IA en 2005 y 2006 **55.** $x > y$ **57.** 2 millas **59.** al menos 80 **61.** 167 millas **63.** *a)* 140 a 184 libras *b)* Las respuestas variarán **65.** 26 DVD

6.5 Ejercicios *(páginas 295 a 297)*

1. A **3.** A **5.** D **7.** 625 **9.** -32 **11.** -8 **13.** -81 **15.** $\frac{1}{49}$ **17.** $-\frac{1}{49}$ **19.** -128 **21.** $\frac{16}{5}$ **23.** 125 **25.** $\frac{25}{16}$ **27.** $\frac{9}{20}$ **29.** 1 **31.** 1 **33.** 0 **35.** recíproco; inverso aditivo **37.** D **39.** x^{16} **41.** 5 **43.** $\frac{1}{27}$ **45.** $\frac{1}{81}$ **47.** $\frac{1}{t^7}$ **49.** $9x^2$ **51.** $\frac{1}{a^5}$ **53.** x^{11} **55.** r^6 **57.** $-\frac{56}{k^2}$ **59.** $\frac{1}{z^4}$ **61.** $-\frac{3}{r^7}$ **63.** $\frac{27}{a^{18}}$ **65.** $\frac{x^5}{y^2}$ **67.** D **69.** 2.3×10^2 **71.** 2×10^{-2} **73.** 6500 **75.** 0.0152 **77.** 6×10^5 **79.** 2×10^5 **81.** 2×10^5 **83.** $\$1 \times 10^9$; $\$1 \times 10^{12}$; $\$3.1 \times 10^{12}$; 2.10385×10^5 **85.** $\$1.869 \times 10^{10}$ **87.** 1×10^{10} **89.** 2,000,000,000 **91.** ***a)*** 3.041×10^8 ***b)*** $\$1 \times 10^{12}$ ***c)*** \$3288 **93.** aproximadamente 9.474×10^{-7} pársec **95.** 300 segundos **97.** aproximadamente 5.87×10^{12} millas **99.** 20,000 horas

6.6 Ejercicios *(páginas 305 a 306)*

1. $x^2 - x + 3$ **3.** $9y^2 - 4y + 4$ **5.** $6m^4 - 2m^3 - 7m^2 - 4m$ **7.** $-2x^2 - 13x + 11$ **9.** $x^2 - 5x - 24$ **11.** $28r^2 + r - 2$ **13.** $12x^5 + 8x^4 - 20x^3 + 4x^2$ **15.** $4m^2 - 9$ **17.** $16m^2 + 16mn + 4n^2$ **19.** $25r^2 + 30rt^2 + 9t^4$ **21.** $-2z^3 + 7z^2 - 11z + 4$ **23.** $m^2 + mn - 2n^2 - 2km + 5kn - 3k^2$ **25.** $a^2 - 2ab + b^2 + 4ac - 4bc + 4c^2$ **27.** A **29.** Las respuestas variarán. **31.** $2m^2(4m^2 + 3m - 6)$ **33.** $4k^2m^3(1 + 2k^2 - 3m)$ **35.** $2(a + b)(1 + 2m)$ **37.** $(m - 1)(2m^2 - 7m + 7)$ **39.** $(2s + 3)(3t - 5)$ **41.** $(t^3 + s^2)(r - p)$ **43.** $(8a + 5b)(2a - 3b)$ **45.** $(5z - 2x)(4z - 9x)$ **47.** $(1 - a)(1 - b)$ **49.** $(x - 5)(x + 3)$ **51.** $(y + 7)(y - 5)$ **53.** $6(a - 10)(a + 2)$ **55.** $3m(m + 1)(m + 3)$ **57.** $(3k - 2p)(2k + 3p)$ **59.** $(5a + 3b)(a - 2b)$ **61.** $(7x + 2y)(3x - y)$ **63.** $2a^2(4a - b)(3a + 2b)$ **65.** $5xy^2(3xy^3 - 4x^2y + 3)$ **67.** $(3m - 2)^2$ **69.** $2(4a - 3b)^2$ **71.** $(2xy + 7)^2$ **73.** $(x + 6)(x - 6)$ **75.** $(y + w)(y - w)$ **77.** $(3a + 4)(3a - 4)$ **79.** $(5s^2 + 3t)(5s^2 - 3t)$ **81.** $(p^2 + 25)(p + 5)(p - 5)$ **83.** $(2 - a)(4 + 2a + a^2)$ **85.** $(5x - 3)(25x^2 + 15x + 9)$ **87.** $(3y^3 + 5z^2)(9y^6 - 15y^3z^2 + 25z^4)$ **89.** $(x + y)(x - 5)$ **91.** $(6m - 7n)(2m + 5n)$ **93.** $(2z + 7)^2$ **95.** $(10x + 7y)(100x^2 - 70xy + 49y^2)$ **97.** $(5m^2 - 6)(25m^4 + 30m^2 + 36)$ **99.** $(m - 2n)(p^4 + q)$

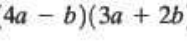
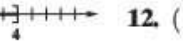
6.7 Ejercicios *(páginas 310 a 314)*

1. 5; 4; -8 **3.** Las respuestas variarán. $\left\{\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$ **5.** $\{-3, 9\}$ **7.** $\left\{\frac{7}{2}, -\frac{1}{5}\right\}$ **9.** $\{-3, 4\}$ **11.** $\{-7, -2\}$ **13.** $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right\}$ **15.** $\{-2, 4\}$ **17.** $\{\pm 8\}$ **19.** $\left\{\pm 2\sqrt{6}\right\}$ **21.** $\emptyset$ **23.** $\{1, 7\}$ **25.** $\left\{4 \pm \sqrt{3}\right\}$ **27.** $\left\{\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$ **29.** $\left\{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}\right\}$ **31.** $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\right\}$ **33.** $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$ **35.** $\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}\right\}$ **37.** $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}\right\}$ **39.** $\emptyset$ **41.** La presencia de $2x^3$ hace a la ecuación *cúbica* (de tercer grado). **43.** 0; ***c)*** **45.** 121; ***a)*** **47.** 360; ***b)*** **49.** dos **51.** 5.2 segundos **53.** Se obtiene s cuando $t = 0$. **55.** ***a)*** 1 segundo y 8 segundos ***b)*** 9 segundos después de que es proyectado **57.** 8, 15, 17 **59.** 412.3 pies **61.** barco en dirección este: 80 millas; barco en dirección sur: 150 millas **63.** 5 centímetros, 12 centímetros, 13 centímetros **65.** longitud: 2 centímetros; ancho: 1.5 centímetros **67.** 1 pie **69.** longitud: 26 metros; ancho: 16 metros **71.** longitud: 20 pulgadas; ancho: 12 pulgadas **73.** 5 o 14 **75.** $\{2\}$

Ejercicios de la Extensión *(página 315)*

1. $\left\{-2i\sqrt{3}, 2i\sqrt{3}\right\}$ **3.** $\left\{1 + \frac{2}{3}i, 1 - \frac{2}{3}i\right\}$ **5.** $\left\{3 + i\sqrt{5}, 3 - i\sqrt{5}\right\}$ **7.** $\left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right\}$ **9.** $\left\{-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i, -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i\right\}$

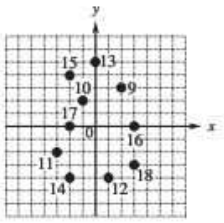
Examen del capítulo 6 *(páginas 317 a 318)*

1. $\{2\}$ **2.** $\{4\}$ **3.** identidad; {todos los números reales} **4.** $v = \frac{S + 16t^2}{t}$, o $v = \frac{S}{t} + 16t$ **5.** Hawai: 4021 millas cuadradas; Maui: 728 millas cuadradas; Kauai: 551 millas cuadradas **6.** 5 litros **7.** 2.2 horas **8.** 16 rebanadas por \$4.38 **9.** 2300 millas **10.** 200 amps **11.** $(-\infty, 4]$  **12.** $(-2, 6]$  **13.** C **14.** al menos 82 **15.** $\frac{16}{9}$ **16.** -64 **17.** $\frac{64}{27}$ **18.** 0 **19.** $\frac{216}{p^4}$ **20.** $\frac{1}{m^{14}}$ **21.** ***a)*** 693,000,000 ***b)*** 0.000000125 **22.** 3×10^{-4} **23.** aproximadamente 15,300 segundos **24.** $4k^2 + 6k + 10$ **25.** $15x^2 - 14x - 8$ **26.** $16x^4 - 9$ **27.** $3x^3 + 20x^2 + 23x - 36$ **28.** Un ejemplo es $t^5 + 2t^4 + 3t^3 - 4t^2 + 5t + 6$. **29.** $(2p - 3q)(p - q)$ **30.** $(10x + 7y)(10x - 7y)$ **31.** $(3y - 5x)(9y^2 + 15yx + 25x^2)$ **32.** $(4 - m)(x + y)$ **33.** $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ **34.** $\left\{\pm\sqrt{13}\right\}$ **35.** $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}\right\}$ **36.** 0.87 segundos

CAPÍTULO 7 GRÁFICAS, FUNCIONES, SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

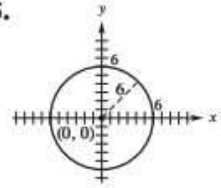
7.1 Ejercicios *(páginas 325 a 328)*

1. x **3.** $(0, 0)$ **5.** ***a)*** I ***b)*** III ***c)*** II ***d)*** IV ***e)*** ninguno
7. ***a)*** I o III ***b)*** II o IV ***c)*** II o IV ***d)*** I o III
9 a 18.



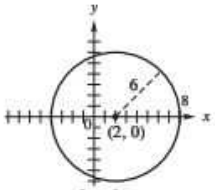
19. ***a)*** x representa el año; y representa el ingreso en miles de millones de dólares ***b)*** aproximadamente $2400 miles de millones ***c)*** (2006, 2400)

21. ***a)*** $\sqrt{34}$ ***b)*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ **23.** ***a)*** $\sqrt{61}$ ***b)*** $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
25. ***a)*** $\sqrt{146}$ ***b)*** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **27.** B **29.** D
31. $x^2 + y^2 = 36$ **33.** $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$
35. $x^2 + (y - 4)^2 = 3$ **37.** centro: (0, 0); radio: r
39. $(-2, -3)$; 2 **41.** $(-5, 7)$; 9 **43.** (2, 4); 4
45.



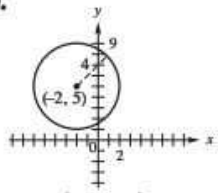
$x^2 + y^2 = 36$

47.



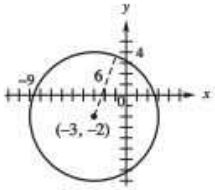
$(x - 2)^2 + y^2 = 36$

49.



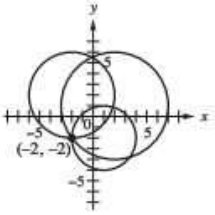
$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$

51.



$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 36$

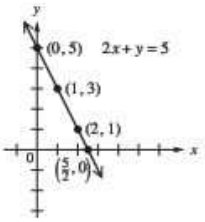
53. ***a)*** $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ ***b)*** $(-1, 4)$ **55.** 24.15%; esto es muy cercano a la figura real. **57.** $15,481 **59.** Las respuestas variarán. **61.** Las respuestas variarán. **63.** El epicentro es $(-2, -2)$.

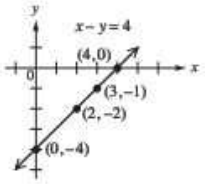


65. Las respuestas variarán.
67. (9, 18) **69.** B

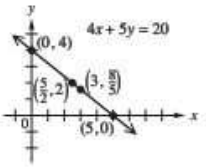
7.2 Ejercicios *(páginas 334 a 337)*

1. $(0, 5), \left(\frac{5}{2}, 0\right), (1, 3), (2, 1)$ **3.** $(0, -4), (4, 0), (2, -2), (3, -1)$

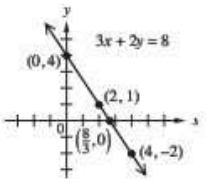




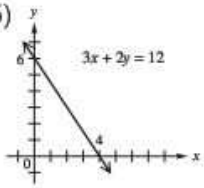
5. $(0, 4), (5, 0), \left(3, \frac{8}{5}\right), \left(\frac{5}{2}, 2\right)$



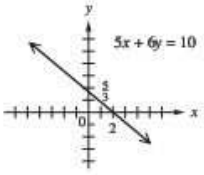
7. $(0, 4), \left(\frac{8}{3}, 0\right), (2, 1), (4, -2)$

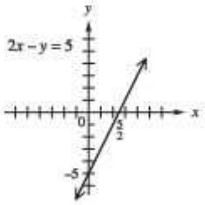


9. Las respuestas variarán. **11.** A
13. (4, 0); (0, 6)

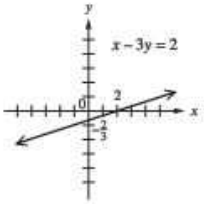


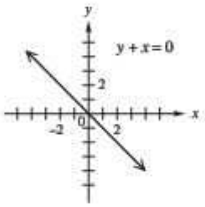
15. (2, 0); $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ **17.** $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$; (0, −5)



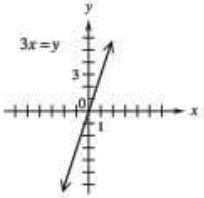


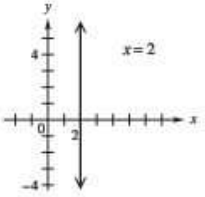
19. (2, 0) $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ **21.** (0, 0); (0, 0)



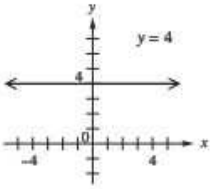


23. (0, 0); (0, 0) **25.** (2, 0); ninguno

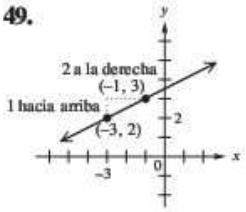




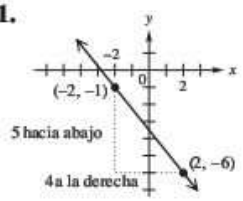
27. ninguna; (0, 4) **29.** C **31.** A **33.** D **35.** B **37.** $\frac{3}{10}$ **39.** *a)* $\frac{3}{2}$ *b)* $-\frac{7}{4}$ **41.** 8 **43.** $-\frac{5}{6}$ **45.** 0 **47.** *a)* 232 *b)* positiva; aumentaron *c)* 232,000 estudiantes por año *d)* −0.95 *e)* negativa; disminuyó *f)* 0.95 estudiantes por computadora por año



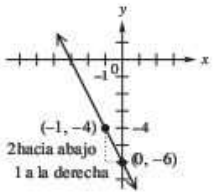
49.



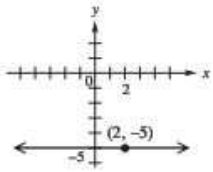
51.



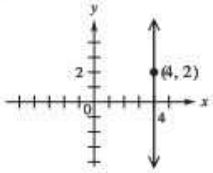
53.



55.



57.



59. paralelas **61.** perpendiculares **63.** ni paralelas ni perpendiculares **65.** $\frac{7}{10}$ **67.** −$4000 por año; el valor de la máquina disminuye un promedio de $4000 anuales durante esos años.

69. *a)* −28.27 mil casas móviles por año *b)* La pendiente negativa significa que el número de casas móviles *disminuyó* un promedio de 28.27 mil anuales de 2000 a 2006.

71. $1371.67 millones anuales; la venta de televisores de plasma se *incrementó* un promedio de $1371.67 millones anuales de 2003 a 2006.

7.3 Ejercicios *(páginas 343 a 346)*

1. D **3.** B **5.** A **7.** C **9.** H **11.** B

13. $y = 3x - 3$ **15.** $y = -x + 3$ **17.** $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$

19. $y = -2x + 18$ **21.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$ **23.** $y = 4x - 12$

25. $y = 5$ **27.** $x = 9$ **29.** $x = 0.5$ **31.** $y = 8$

33. $y = 2x - 2$ **35.** $y = -\frac{1}{2}x + 4$ **37.** $y = \frac{2}{13}x + \frac{6}{13}$

39. $y = 5$ **41.** $x = 7$ **43.** $y = -3$ **45.** $y = 5x + 15$

47. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$ **49.** $y = \frac{2}{5}x + 5$ **51.** Las respuestas variarán. **53.** *a)* $y = -x + 12$ *b)* -1 *c)* (0, 12)

55. *a)* $y = -\frac{5}{2}x + 10$ *b)* $-\frac{5}{2}$ *c)* (0, 10)

57. *a)* $y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$ *b)* $\frac{2}{3}$ *c)* $\left(0, -\frac{10}{3}\right)$

59. $y = 3x - 19$ **61.** $y = \frac{1}{2}x - 1$ **63.** $y = -\frac{1}{2}x + 9$

65. $y = 7$ **67.** *a)* $y = 1294.7x + 3921$; las ventas en Estados Unidos de las cámaras digitales se *incrementaron* en $1294.7 millones anuales de 2003 a 2006. *b)* $9099.8 millones

69. *a)* $y = 0.996x + 34.3$ *b)* 79.1%

71. *a)* $y = -790.25x + 101{,}430$ *b)* 97,479 millones; el resultado usando el modelo es un poco bajo.

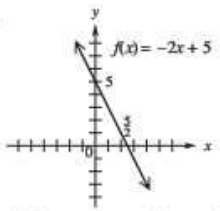
73. *a)* $y = 14.55x + 262.42$ *b)* 2525 años luz

75. *a)* 32°; 212° *b)* (0, 32); (100, 212) *c)* $\frac{9}{5}$ *d)* $F = \frac{9}{5}C + 32$ *e)* $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ *f)* Cuando la temperatura Celsius es de 50°, la temperatura Fahrenheit es de 122°.

7.4 Ejercicios *(páginas 355 a 357)*

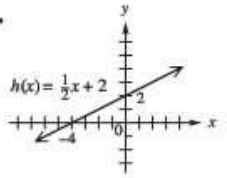
1. Las respuestas variarán. **3.** función; dominio: {0, 1, 2, 4}; rango: {0, 1, 4, 16} **5.** no es una función; dominio: {1, 2, 3}; rango: {−9, −4, −1, 1, 4, 9} **7.** no es una función: dominio: (0, ∞); rango: (−∞, 0) ∪ (0, ∞) **9.** función; dominio: {hispanos, nativos estadounidenses, asiático-estadounidenses, afroestadounidenses, caucásicos}; rango en millones: {21.3, 1.6, 8.2, 24.6, 152.0} **11.** función; dominio: (−∞, ∞); rango: (−∞, 4] **13.** no es una función; dominio: [−4, 4]; rango: [−3, 3] **15.** función; dominio: (−∞, ∞); **17.** no es una función; dominio: [0, ∞) **19.** no es una función; dominio: (−∞, ∞) **21.** función; dominio: [0, ∞) **23.** función; dominio: (−∞, 0) ∪ (0, ∞) **25.** función; dominio: $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ **27.** función; dominio: (−∞, 2) ∪ (2, ∞) **29.** *a)* [0, 3000] *b)* 25 horas; 25 horas *c)* 2000 galones *d)* $g(0) = 0$; la alberca está vacía en el tiempo cero. **31.** Este es un ejemplo: el costo de la gasolina; número de galones comprados; costo; número de galones **33.** 5 **35.** 2 **37.** −1 **39.** −13 **41.** 3 **43.** 0

45.



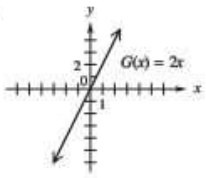
dominio y rango: (−∞, ∞)

47.



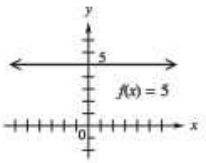
dominio y rango: (−∞, ∞)

49.



dominio y rango: (−∞, ∞)

51.

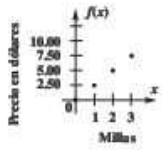


dominio: (−∞, ∞); rango: {5}

53. *a)* $f(x) = 3 - 2x^2$ *b)* −15

55. *a)* $f(x) = \frac{8 - 4x}{-3}$ *b)* $\frac{4}{3}$ **57.** línea; −2; $-2x + 4$; −2; 3; −2 **59.** *a)* $0; $2.50; $5.00; $7.50 *b)* $2.50x$

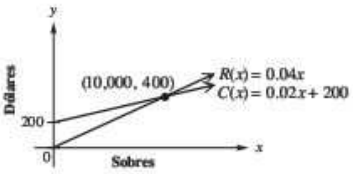
c)



61. *a)* 194.53 centímetros *b)* 177.29 centímetros *c)* 177.41 centímetros *d)* 163.65 centímetros

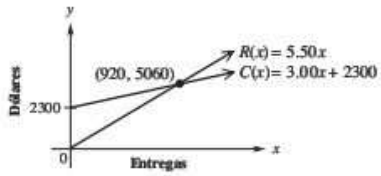
63. *a)* \$160 *b)* 70 mph *c)* 66 mph *d)* para velocidades mayores de 80 mph

65. *a)* $C(x) = 0.02x + 200$ *b)* $R(x) = 0.04x$ *c)* 10,000 *d)*



Para $x < 10{,}000$, una pérdida
Para $x > 10{,}000$, una utilidad

67. *a)* $C(x) = 3.00x + 2300$ *b)* $R(x) = 5.50x$ *c)* 920 *d)*

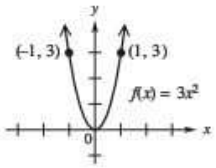


Para $x < 920$, una pérdida
Para $x > 920$, una utilidad

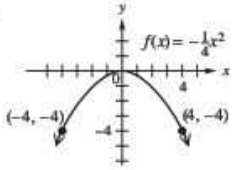
7.5 Ejercicios *(páginas 365 a 366)*

1. F **3.** C **5.** E **7.** Las respuestas variarán. **9.** (0, 0) **11.** (0, 4) **13.** (1, 0) **15.** (−3, −4) **17.** Las respuestas variarán. **19.** hacia abajo; más angosta **21.** hacia arriba; más ancha **23.** *a)* I *b)* IV *c)* II *d)* III

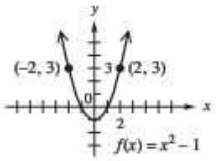
25.



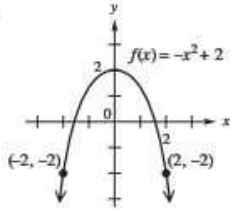
27.



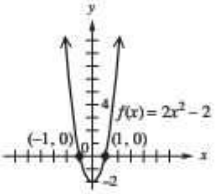
29.



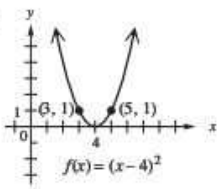
31.



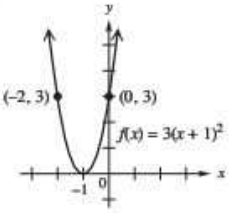
33.



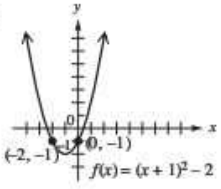
35.



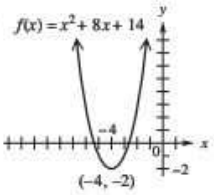
37.



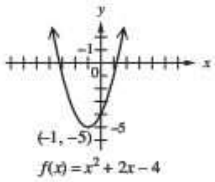
39.



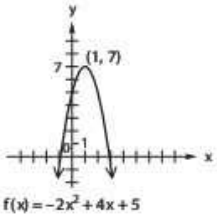
41.



43.



45.



47. 25 metros

49. 16 pies; 2 segundos

51. 4.1 segundos; 81.6 metros

53. *a)* 19.2 horas; *b)* 84.3 ppm

55. $f(45) = 161.5$; esto significa que cuando la velocidad es de 45 mph, la distancia para detenerse es de 161.5 pies.

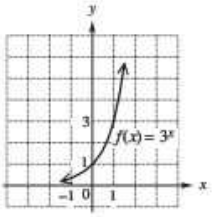
7.6 Ejercicios *(páginas 374 a 376)*

1. crece; decrece **3.** no **5.** crece; decrece **7.** no

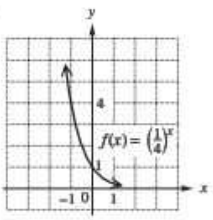
9. 2.56425419972 **11.** 1.25056505582

13. 7.41309466897 **15.** 0.0000210965628481

17.



19.



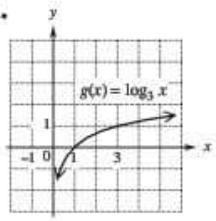
21. 20.0855369232 **23.** 0.018315638889

25. $2 = \log_4 16$ **27.** $-3 = \log_{2/3}\left(\frac{27}{8}\right)$ **29.** $2^5 = 32$

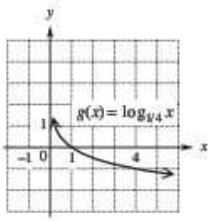
31. $3^1 = 3$ **33.** 1.38629436112 **35.** −1.0498221245

37. *a)* 0.5°C *b)* 0.35°C **39.** *a)* 1.6°C *b)* 0.5°C

41.



43.



45. *a)* \$22,510.18 *b)* \$22,529.85 **47.** *a)* \$31,870.48 *b)* \$31,870.67 **49.** El plan A es mejor por \$121.81.

51. *a)* 7% compuesto trimestralmente *b)* \$800.32

53. 27.73 años **55.** 21.97 años **57.** *a)* 828 milibares *b)* 232 milibares **59.** *a)* 146,250 miles *b)* 198,403 miles *c)* Se habrá incrementado por casi 36%. **61.** *a)* 440 gramos *b)* 387 gramos *c)* 264 gramos *d)* 21.66 años

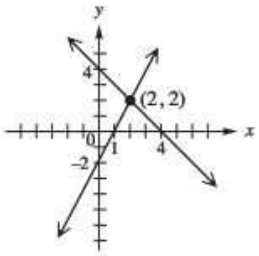
63. 1611.97 años **65.** aproximadamente 9000 años

67. aproximadamente 13,000 años

7.7 Ejercicios *(páginas 383 a 384)*

1. 3; −6 **3.** D; el par ordenado de la solución debe estar en el cuadrante IV. **5.** sí **7.** no **9.** B **11.** A

13. $\{(2, 2)\}$



15. $\{(3, -1)\}$ **17.** $\{(2, -3)\}$
19. $\left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right\}$ **21.** $\left\{\left(\frac{6-2y}{7}, y\right)\right\}$
23. $\{(2, -4)\}$ **25.** $\emptyset$

27. $\{(1, 2)\}$ **29.** $\left\{\left(\frac{22}{9}, \frac{22}{3}\right)\right\}$ **31.** $\{(2, 3)\}$ **33.** $\{(5, 4)\}$

35. $\left\{\left(-5, -\frac{10}{3}\right)\right\}$ **37.** $\{(2, 6)\}$ **39.** Las respuestas variarán.

41. $\{(1, 4, -3)\}$ **43.** $\{(0, 2, -5)\}$ **45.** $\left\{\left(-\frac{7}{3}, \frac{22}{3}, 7\right)\right\}$

47. $\{(4, 5, 3)\}$ **49.** $\{(2, 2, 2)\}$ **51.** $\left\{\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 3\right)\right\}$

53. 2000, 2001, 2002, primera parte de 2003

55. aproximadamente (3.6, 10.5) (Los valores pueden variar ligeramente en función del método de solución utilizado).

7.8 Ejercicios *(páginas 390 a 394)*

1. gana: 95; pierde: 67 **3.** largo: 94 pies; ancho: 50 pies

5. días del fin de semana: 3; de lunes a viernes: 3

7. cuadrado: 12 cm; triángulo: 8 cm **9.** capuchino: \$1.95; café con leche: \$2.35 **11.** Nueva York: \$615; Washington: \$514

13. Yanquis de Nueva York: \$72.97; Medias Rojas de Boston: \$50.24 **15.** NHL: \$288.23; NBA: \$291.93 **17.** ***a)*** 12 onzas ***b)*** 30 onzas ***c)*** 48 onzas ***d)*** 60 onzas **19.** $\$2.29x$

21. solución al 15%: $26\frac{2}{3}$ litros; solución al 33%: $13\frac{1}{3}$ litros

23. 3 litros **25.** jugo al 50%: 150 litros; jugo al 30%: 50 litros

27. dulces de \$1.20: 100 libras; dulces de \$2.40: 60 libras

29. 4%: \$10,000; 3%: \$5000 **31.** ***a)*** $(10 - x)$ mph ***b)*** $(10 + x)$ mph **33.** tren: 60 mph; avión: 160 mph

35. bote: 21 mph; corriente: 3 mph **37.** oro: 23; plata: 21; bronce: 28 **39.** 10 pulgadas, 20 pulgadas, 26 pulgadas

41. tipo A: 80; tipo B: 160; tipo C: 250 **43.** boletos de \$16: 1170; boletos de \$23: 985; boletos de \$40: 130

45. gana: 53; pierde: 19; pérdidas en tiempo de compensación: 10

Ejercicios de la Extensión *(página 398)*

1. $\{(2, 3)\}$ **3.** $\{(-3, 0)\}$ **5.** $\left\{\left(\frac{7}{2}, -1\right)\right\}$ **7.** $\{(1, -4)\}$

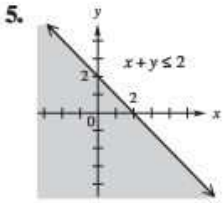
9. $\{(-1, 23, 16)\}$ **11.** $\{(2, 1, -1)\}$ **13.** $\{(3, 2, -4)\}$

15. $\{(0, 1, 0)\}$ **17.** $\{(-1, 2, 0)\}$ **19.** AT&T: \$124 miles de millones; Verizon: \$97.4 miles de millones

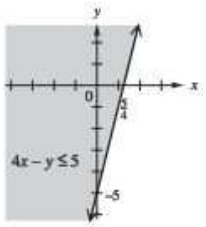
7.9 Ejercicios *(páginas 402 a 404)*

1. C **3.** B

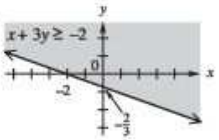
5.



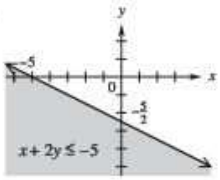
7.



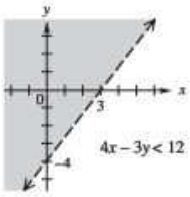
9.



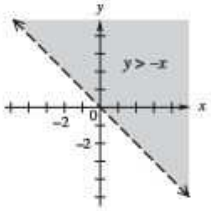
11.



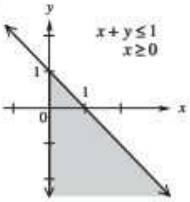
13.



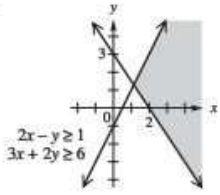
15.



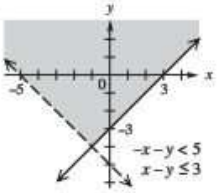
17.



19.



21.



23. máximo de 65 en (5, 10); mínimo de 8 en (1, 1) **25.** $\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$; $\frac{42}{5}$

27. $\left(\frac{17}{3}, 5\right)$; $\frac{49}{3}$

29. Enviar 20 a A y 80 a B, para un costo mínimo de \$1040.

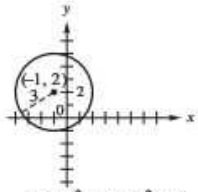
31. Tomar tres píldoras rojas y 2 azules, para un costo mínimo de \$0.70 por día.

33. Producir 6.4 millones de galones de gasolina y 3.2 millones de galones de aceite combustible, para una ganancia máxima de \$29.76 millones.

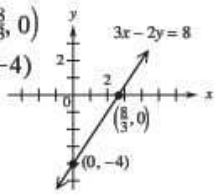
35. Enviar 4000 paquetes de medicamentos y 2000 contenedores de agua.

Examen del capítulo 7 *(páginas 405 a 406)*

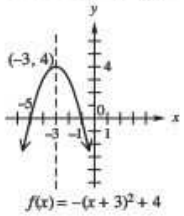
1. $\sqrt{41}$ **2.** $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$



3. intersección con x: $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$
intersección con y: $(0, -4)$



4. $\frac{2}{7}$ **5.** ***a)*** $y = -\frac{2}{5}x + \frac{13}{5}$ ***b)*** $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
c) $y = -\frac{1}{2}x + 2$ **6.** B **7.** ***a)*** $y = 0.238x + 63.3$ ***b)*** 80.0
c) 73 (en 1978) **8.** −54.6 millones de CD al año
9. $y = 0.05x + 0.50$; (1, 0.55), (5, 0.75), (10, 1.00)
10. $y = \frac{2}{3}x + 1$ **11.** ***a)*** $(-\infty, \infty)$ ***b)*** 22
12. ***a)*** $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ ***b)*** $f(3)$ no está definida.
13. 500 unidades; \$30,000 **14.** eje: $x = -3$; vértice: (−3, 4); dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(-\infty, 4]$

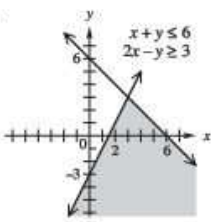


15. 80 pies por 160 pies
16. ***a)*** 2116.31264888
b) 0.157237166314
c) 3.15955035878 **17.** ***a)*** \$12,740.13
b) \$12,742.04 **18.** ***a)*** 1.62 gramos
b) 1.18 gramos ***c)*** 0.69 gramo
d) 2.00 gramos

19. $\{(4, -2)\}$ **20.** $\{(2, 0, -1)\}$ **21.** $\{(1, 2z + 3, z)\}$

22. *La guerra de las galaxias, Episodio IV: Una nueva esperanza:* \$461 millones; *Indiana Jones y el reino de la calavera de cristal:* \$317 millones **23.** \$40,000 al 10%; \$100,000 al 6%; \$140,000 al 5%

24.



25. utilidad máxima: \$1120; cerdos: 4; gansos: 12

CAPÍTULO 8 MÉTODOS DE CONTEO

8.1 Ejercicios *(páginas 413 a 415)*

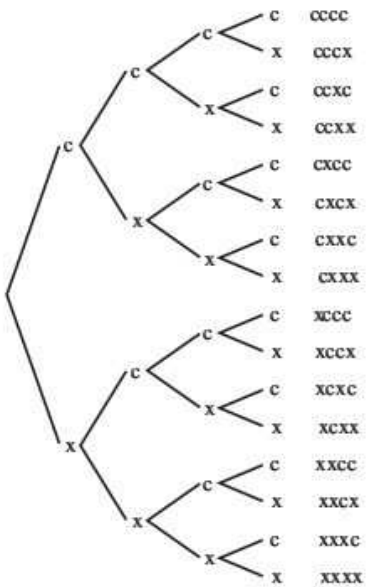
1. *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, *BA*, *BC*, *BD*, *BE*, *CA*, *CB*, *CD*, *CE*, *DA*, *DB*, *DC*, *DE*, *EA*, *EB*, *EC*, *ED*; 20 maneras
3. *AB*, *AD*, *BA*, *BD*, *CE*, *DA*, *DB*, *EC*; 8 maneras
5. *ACE*, *AEC*, *BCE*, *BEC*, *DCE*, *DEC*; 6 maneras
7. *ABC*, *ABD*, *ABE*, *ACD*, *ACE*, *ADE*, *BCD*, *BCE*, *BDE*, *CDE*; 10 maneras **9.** 1 **11.** 3 **13.** 5 **15.** 5
17. 3 **19.** 1 **21.** 18 **23.** 15

25.

	2	**3**	**5**	**7**
2	22	23	25	27
3	32	33	35	37
5	52	53	55	57
7	72	73	75	77

27. 22, 33, 55, 77 **29.** 23, 37, 53, 73 **31.** ***a)*** xxxx
b) cccc, cccx, ccxc, ccxx, cxcc, cxcx, cxxc, xccc, xccx, xcxc, xxcc ***c)*** cxxx, xcxx, xxcx, xxxc, xxxx
d) cccc, cccx, ccxc, ccxx, cxcc, cxcx, cxxc, cxxx, xccc, xccx, xcxc, xcxx, xxcc, xxcx, xxxc

Primera moneda | Segunda moneda | Tercera moneda | Cuarta moneda | Resultado



33. 16 **35.** 36 **37.** 17 **39.** 72 **41.** 12 **43.** 10
45. 6 **47.** 3 **49.** 9 **51.** 49 **53.** 21 **55.** 15
57. 16 **59.** 13 **61.** 4 **63.** 637 **65.** 3
67. ***a)*** Obtenga el número de maneras de seleccionar un par ordenado de letras a partir de las letras *A*, *B*, *C*, *D* y *E* si no se permite la repetición de letras. ***b)*** Obtenga el número de maneras de seleccionar un par ordenado de letras a partir de las letras *A*, *B*, *C*, *D* y *E* si la selección se hace sin reemplazo.

8.2 Ejercicios *(páginas 423 a 425)*

1. Las respuestas variarán. **3.** ***a)*** no ***b)*** Las respuestas variarán. **5.** ***a)*** no ***b)*** Las respuestas variarán. **7.** 24
9. 72 **11.** 20 **13.** 28 **15.** 840 **17.** 3,628,800
19. 3,991,680 **21.** 184,756 **23.** 980,179,200 **25.** 60
27. $2^3 = 8$ **29.** Las respuestas variarán. **31.** $6^3 = 216$
33. $2^{10} = 1024$ **35.** $5! = 120$ **37.** $3 \cdot 2 = 6$
39. $3 \cdot 3 = 9$ **41.** $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ **43.** $5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$
45. $2^6 = 64$ **47.** $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
49. $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ **51.** $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 18$
53. $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ **55.** $5! = 120$ **57.** 800 **59.** ***a)*** 5
b) 2 ***c)*** 4 ***d)*** 3 ***e)*** 2 ***f)*** 1; 240 **61.** ***a)*** 6
b) 3 ***c)*** 2 ***d)*** 2 ***e)*** 1 ***f)*** 1; 72 **63.** Las respuestas variarán **65.** 516,243 **67.** 6

8.3 Ejercicios *(páginas 435 a 438)*

1. 504 **3.** 330 **5.** 116,280 **7.** 126 **9.** $1.805037696 \times 10^{11}$
11. Las respuestas variarán. **13.** Las respuestas variarán.
15. ***a)*** permutación ***b)*** permutación ***c)*** combinación
d) combinación ***e)*** permutación ***f)*** combinación
g) permutación ***h)*** permutación

17. ${}_8P_5 = 6720$ **19.** ${}_{12}P_2 = 132$
21. ${}_{25}P_5 = 6{,}375{,}600$ **23.** ***a)*** ${}_4P_4 = 24$
b) ${}_4P_4 = 24$ **25.** ${}_{18}C_5 = 8568$
27. ***a)*** ${}_{13}C_5 = 1287$ ***b)*** ${}_{26}C_5 = 65{,}780$
c) 0 (imposible) **29.** ***a)*** ${}_6C_3 = 20$
b) ${}_6C_2 = 15$ **31.** ${}_9C_3 = 84$ **33.** ***a)*** 5 ***b)*** 9
35. ${}_{26}P_3 \cdot {}_{10}P_3 \cdot {}_{26}P_3 = 175{,}219{,}200{,}000$
37. $2 \cdot {}_{25}P_3 = 27{,}600$ **39.** $7 \cdot {}_{12}P_8 = 139{,}708{,}800$
41. ***a)*** $7^7 = 823{,}543$ ***b)*** $7! = 5040$
43. ${}_{15}C_1 \cdot {}_{14}C_2 \cdot {}_{12}C_3 \cdot {}_9C_4 \cdot {}_5C_5 = 37{,}837{,}800$
45. $\frac{{}_8C_3 \cdot {}_5C_3 \cdot {}_2C_2}{2!} = 280$ **47.** ${}_{20}C_3 = 1140$
49. ***a)*** ${}_7P_2 = 42$ ***b)*** $3 \cdot 6 = 18$ ***c)*** ${}_7P_2 \cdot 5 = 210$
51. ${}_8P_3 = 336$ **53.** ${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot 3^3 = 7560$
55. ***a)*** $6! = 720$ ***b)*** 745,896
57. ***a)*** $6! = 720$ ***b)*** $2 \cdot 4! = 48$ ***c)*** $4! = 24$
59. ***a)*** $2 \cdot 4! = 48$ ***b)*** $3 \cdot 4! = 72$
61. Cada uno es igual a 220.

8.4 Ejercicios *(páginas 442 a 444)*

1. 6 **3.** 20 **5.** 56 **7.** 36 **9.** ${}_7C_1 \cdot {}_3C_3 = 7$
11. ${}_7C_3 \cdot {}_3C_1 = 105$ **13.** ${}_8C_3 = 56$ **15.** ${}_8C_5 = 56$
17. ${}_9C_4 = 126$ **19.** $1 \cdot {}_8C_3 = 56$ **21.** 1 **23.** 10
25. 5 **27.** 32 **29.** Las filas con número par
31. ***a)*** Todos son múltiplos del número de fila.
b) Se mantiene el mismo patrón. ***c)*** Se mantiene el mismo patrón. **33.** ...8, 13, 21, 34,...; un número en esta secuencia es igual a la suma de los dos términos anteriores. Esta es la secuencia de Fibonacci. **35.** fila 8 **37.** La suma de los cuadrados de las entradas a lo largo de la fila superior es igual a la entrada en el vértice de la parte inferior.
39. Las respuestas variarán.
La redacción puede variar en los ejercicios 41 y 43.
41. suma = N; cualquier entrada en el arreglo es igual a la suma de las dos entradas inmediatamente arriba de ella e inmediatamente a su izquierda. **43.** suma = N; cualquier entrada en el arreglo es igual a la suma de la fila de entradas a partir de la celda inmediatamente arriba de ella hasta el límite de la izquierda del arreglo.

Ejercicios de la Extensión *(páginas 446 a 449)*

1.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

3.

11	10	4	23	17
18	12	6	5	24
25	19	13	7	1
2	21	20	14	8
9	3	22	16	15

5.

15	16	22	3	9
8	14	20	21	2
1	7	13	19	25
24	5	6	12	18
17	23	4	10	11

7.

24	9	12
3	15	27
18	21	6

La suma mágica es 45.

9.

$\frac{17}{2}$	12	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{15}{2}$
$\frac{23}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	7	8
2	3	$\frac{13}{2}$	10	11
5	6	$\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{11}{2}$	9	$\frac{25}{2}$	1	$\frac{9}{2}$

La suma mágica es $32\frac{1}{2}$

11. 479 **13.** 467 **15.** 269
17. ***a)*** 73 ***b)*** 70 ***c)*** 74
d) 69 **19.** ***a)*** 7 ***b)*** 22
c) 5 ***d)*** 4 ***e)*** 15
f) 19 ***g)*** 6 ***h)*** 23

21.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

23. Cada suma es igual a 34.
25. Cada suma es igual a 68.
27. Cada suma es igual a 9248.
29. Cada suma es igual a 748.

31.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Se intercambian la segunda fila y la tercera.

33.

18	20	10
8	16	24
22	12	14

35.

39	48	57	10	19	28	37
47	56	16	18	27	36	38
55	15	17	26	35	44	46
14	23	25	34	43	45	54
22	24	33	42	51	53	13
30	32	41	50	52	12	21
31	40	49	58	11	20	29

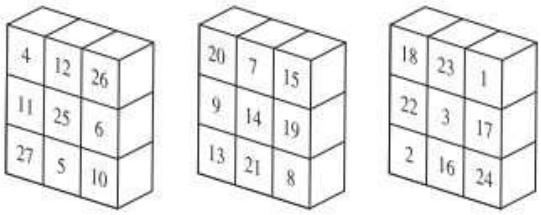
La suma mágica es 238.

37. 260
39. $52 + 45 + 16 + 17 + 54 + 43 + 10 + 23 = 260$

41.

5	13	21	9	17
6	19	2	15	23
12	25	8	16	4
18	1	14	22	10
24	7	20	3	11

43.

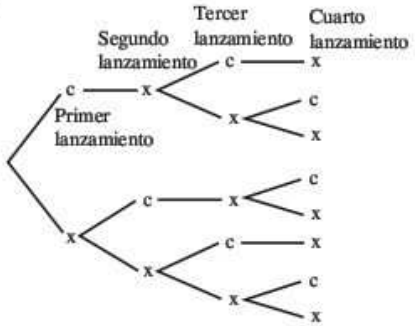


8.5 Ejercicios *(páginas 454 a 456)*

1. $2^4 - 1 = 15$ **3.** $2^7 - 1 = 127$ **5.** 120
7. $36 - 6 = 30$ **9.** $6 + 6 - 1 = 11$ **11.** 51
13. $90 - 9 = 81$ **15.** ***a)*** ${}_{10}C_3 = 120$ ***b)*** ${}_9C_3 = 84$
c) $120 - 84 = 36$ **17.** ${}_7C_3 - {}_5C_3 = 25$
19. ${}_8P_4 - {}_5P_4 = 1560$ **21.** ${}_{10}P_3 - {}_7P_3 = 510$
23. $2 \cdot 26^2 + 2 \cdot 26^3 = 36{,}504$ **25.** ${}_{12}C_4 - {}_8C_4 = 425$
27. $13 + 4 - 1 = 16$ **29.** $25 + 22 - 18 = 29$
31. $2{,}598{,}960 - {}_{13}C_5 = 2{,}597{,}673$
33. $2{,}598{,}960 - {}_{40}C_5 = 1{,}940{,}952$
35. 56 **37.** ${}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 = 56$
39. $2^{10} - 56 = 968$
41. $26^2 \cdot 10^3 - {}_{26}P_2 \cdot {}_{10}P_3 = 208{,}000$
43. Las respuestas variarán. **45.** ${}_4C_3 + {}_3C_3 + {}_5C_3 = 15$
47. ${}_{12}C_3 - {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_5C_1 = 160$
49. Las respuestas variarán. **51.** Las respuestas variarán.
53. Las respuestas variarán.

Examen del capítulo 8 *(páginas 457 a 458)*

1. $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$ **2.** $6 \cdot 7 \cdot 3 = 126$
3. $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ **4.** $6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$ termina en 0; $5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$ termina en 5; $30 + 25 = 55$ **5.** 13
6.



7. $4! = 24$ **8.** $3 \cdot 4! = 72$ **9.** 720
10. 56 **11.** 1320 **12.** 56 **13.** ${}_{26}P_5 = 7{,}893{,}600$
14. $32^5 = 33{,}554{,}432$ **15.** ${}_7P_2 = 42$ **16.** $5! = 120$
17. $\frac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$ **18.** ${}_{10}C_4 = 210$ **19.** $\frac{{}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2}{2!} = 630$
20. $\frac{{}_{10}C_5 \cdot {}_5C_5}{2!} = 126$ **21.** $\frac{{}_{10}C_4 \cdot {}_6C_4}{2!} = 1575$
22. $2^{10} - ({}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2) = 968$ **23.** $2^5 = 32$
24. $2^3 = 8$ **25.** $2 \cdot 2^3 = 16$ **26.** 13 **27.** 2
28. $32 - (1 + 5) = 26$ **29.** ${}_6C_2 = 15$ **30.** ${}_5C_1 = 5$
31. $2 \cdot {}_5C_2 = 20$ **32.** ${}_5C_1 = 5$
33. ${}_5C_3 + {}_5C_2 \cdot {}_2C_1 = 30$ **34.** ${}_9C_4 = 126$
35. Las respuestas variarán. **36.** $495 + 220 = 715$
37. los números naturales **38.** Las respuestas variarán.

CAPÍTULO 9 PROBABILIDAD

9.1 Ejercicios *(páginas 467 a 470)*

1. ***a)*** $\frac{1}{3}$ ***b)*** $\frac{1}{3}$ ***c)*** $\frac{1}{3}$ **3.** ***a)*** $\frac{1}{2}$ ***b)*** $\frac{1}{3}$ ***c)*** $\frac{1}{6}$
5. ***a)*** $\{1, 2, 3\}$ ***b)*** 2 ***c)*** 1 ***d)*** 3 ***e)*** $\frac{2}{3}$ ***f)*** 2 a 1
7. ***a)*** $\{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$ ***b)*** $\frac{2}{3}$ ***c)*** $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{3}$ ***e)*** $\frac{4}{9}$ **9.** ***a)*** 7 a 4 ***b)*** 6 a 5 ***c)*** 9 a 2
11. ***a)*** $\frac{1}{50}$ ***b)*** $\frac{2}{50} = \frac{1}{25}$ ***c)*** $\frac{3}{50}$ ***d)*** $\frac{4}{50} = \frac{2}{25}$
e) $\frac{5}{50} = \frac{1}{10}$ **13.** ***a)*** $\frac{1}{36}$ ***b)*** $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ ***c)*** $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
d) $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ ***e)*** $\frac{5}{36}$ ***f)*** $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ***g)*** $\frac{5}{36}$ ***h)*** $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
i) $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ ***j)*** $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ ***k)*** $\frac{1}{36}$ **15.** 0.329 **17.** $\frac{1}{9}$
19. $\frac{1}{4}$ **21.** $\frac{1}{4}$ **23.** ***a)*** $\frac{3}{4}$ ***b)*** $\frac{1}{4}$ **25.** $\frac{1}{250{,}000} = 0.000004$
27. $\frac{1}{4}$ **29.** $\frac{1}{4}$ **31.** $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ **33.** $\frac{1}{500} = 0.002$
35. aproximadamente 160 **37.** $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ **39.** ***a)*** 0
b) no ***c)*** sí **41.** Las respuestas variarán. **43.** $\frac{12}{31}$
45. $\frac{36}{2{,}598{,}960} \approx 0.00001385$ **47.** $\frac{624}{2{,}598{,}960} \approx 0.00024010$
49. $\frac{1}{4} \cdot \frac{5108}{2{,}598{,}960} \approx 0.00049135$ **51.** ***a)*** $\frac{5}{9}$ ***b)*** $\frac{49}{144}$
c) $\frac{5}{48}$ **53.** $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6$; $\frac{6}{720} = \frac{1}{120} \approx 0.0083$
55. $4 \cdot 3! \cdot 3! = 144$; $\frac{144}{720} = \frac{1}{5} = 0.2$
57. $\frac{2}{{}_7C_2} = \frac{2}{21} \approx 0.095$ **59.** $\frac{5C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{1}{22} \approx 0.045$
61. $\frac{1}{{}_{26}P_3} \approx 0.000064$ **63.** $\frac{3}{28} \approx 0.107$
65. ***a)*** $\frac{8}{9^2} = \frac{8}{81} \approx 0.099$ ***b)*** $\frac{4}{{}_9C_2} = \frac{1}{9} \approx 0.111$ **67.** 1
69. $\frac{9}{9 \cdot 10} = \frac{1}{10}$ **71.** $\frac{1}{15}$

9.2 Ejercicios *(páginas 476 a 478)*

1. sí **3.** Las respuestas variarán. **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** $\frac{5}{6}$ **9.** $\frac{2}{3}$
11. ***a)*** $\frac{2}{13}$ ***b)*** 2 a 11 **13.** ***a)*** $\frac{11}{26}$ ***b)*** 11 a 15
15. ***a)*** $\frac{9}{13}$ ***b)*** 9 a 4 **17.** $\frac{2}{3}$ **19.** $\frac{7}{36}$
21. $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$ **23.** 0.005365
25. 0.971285 **27.** 0.76 **29.** 0.92 **31.** 6 a 19

33.

x	$P(x)$
3	0.1
4	0.1
5	0.2
6	0.2
7	0.2
8	0.1
9	0.1

35. $n(A') = s - a$ **37.** $P(A) + P(A') = 1$ **39.** 180 **41.** $\frac{2}{3}$ **43.** 1

9.3 Ejercicios *(páginas 485 a 488)*

1. independientes **3.** no son independientes **5.** independientes **7.** $\frac{52}{100} = \frac{13}{25}$ **9.** $\frac{69}{100}$ **11.** $\frac{14}{31}$ **13.** $\frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$ **15.** $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{49}$ **17.** $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$ **19.** $\frac{1}{6}$ **21.** 0 **23.** $\frac{12}{51} = \frac{4}{17}$ **25.** $\frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} = \frac{11}{221}$ **27.** $\frac{4}{52} \cdot \frac{11}{51} = \frac{11}{663}$ **29.** $\frac{1}{3}$ **31.** 1 **33.** $\frac{3}{10}$ (igual) **35.** $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$ **37.** 0.490 **39.** 0.027 **41.** 0.95 **43.** 0.23 **45.** $\frac{1}{20}$ **47.** $\frac{1}{5}$ **49.** $\frac{1}{5}$ **51.** *a)* $\frac{3}{4}$ *b)* $\frac{1}{2}$ *c)* $\frac{5}{16}$ **53.** 0.2704 **55.** 0.2496 **57.** Las respuestas variarán. **59.** $\frac{1}{64} \approx 0.0156$ **61.** 10 **63.** 0.400 **65.** 0.080 **67.** $(0.90)^4 = 0.6561$ **69.** ${}_4C_2 \cdot (0.10) \cdot (0.20) \cdot (0.70)^2 = 0.0588$ **71.** 0.30 **73.** 0.49 **75.** Las respuestas variarán.

9.4 Ejercicios *(páginas 492 a 494)*

1. $\frac{1}{8}$ **3.** $\frac{3}{8}$ **5.** $\frac{3}{4}$ **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $\frac{3}{8}$ **11.** $x; n; n$ **13.** $\frac{7}{128}$ **15.** $\frac{35}{128}$ **17.** $\frac{21}{128}$ **19.** $\frac{1}{128}$ **21.** $\frac{25}{72}$ **23.** $\frac{1}{216}$ **25.** 0.041 **27.** 0.268 **29.** Las respuestas variarán. **31.** Las respuestas variarán. **33.** 0.016 **35.** 0.020 **37.** 0.137 **39.** 0.572 **41.** 0.669 **43.** 0.975 **45.** 0.883 **47.** $6p^2(1 - p)^2$ **49.** $\frac{1}{1024} \approx 0.001$ **51.** $\frac{45}{1024} \approx 0.044$ **53.** $\frac{210}{1024} = \frac{105}{512} \approx 0.205$ **55.** $\frac{772}{1024} \approx 0.754$

9.5 Ejercicios *(páginas 501 a 504)*

1. Las respuestas variarán. **3.** $\frac{5}{2}$ **5.** \$1 **7.** \$0.50 **9.** No (ganancias netas esperadas: $-\frac{3}{4}$ centavos) **11.** 1.69 **13.** *a)* −\$60 *b)* \$36,000 *c)* \$72,000 **15.** \$0.46 **17.** \$2700 **19.** 2.7 **21.** Una disminución de 50 **23.** Las respuestas variarán. **25.** Proyecto C **27.** \$2200 **29.** \$81,000 **31.** No comprar el seguro (porque \$86,000 > \$81,000). **33.** \$1500; \$3000; \$17,500; \$27,000 **35** \$56,000; **37.** 48.7%

Ejercicios de la Extensión *(página 507)*

1. Las respuestas variarán. **3.** No **5.** $\frac{18}{50} = 0.36$ (Esto está bastante cerca de 0.375, el valor teórico). **7.** $\frac{6}{50} = 0.12$ **9.** Las respuestas variarán. **11.** Las respuestas variarán.

Examen del capítulo 9 *(páginas 509)*

1. Las respuestas variarán. **2.** Las respuestas variarán. **3.** 3 a 1 **4.** 25 a 1 **5.** 11 a 2 **6.** fila 1: CC; fila 2: cC, cc **7.** $\frac{1}{2}$ **8.** 1 a 3 **9.** $\frac{7}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{49}$ **10.** $\frac{7}{19}$ **11.** $1 - \left(\frac{30}{49} + \frac{1}{49}\right) = \frac{18}{49}$ **12.** $\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$ **13.** $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$ **14.** $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ **15.** $\frac{3}{10}$ **16.** $\frac{3}{10}, \frac{6}{10}, \frac{1}{10}$ **17.** $\frac{9}{10}$ **18.** $\frac{18}{10} = \frac{9}{5}$ **19.** $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **20.** 35 a 1 **21.** 7 a 2 **22.** $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ **23.** $(0.78)^3 \approx 0.475$ **24.** ${}_3C_2 \cdot (0.78)^2 \cdot (0.22) \approx 0.402$ **25.** $1 - (0.22)^3 \approx 0.989$ **26.** $(0.78) \cdot (0.22) \cdot (0.78) \approx 0.134$ **27.** $\frac{25}{102}$ **28.** $\frac{25}{51}$ **29.** $\frac{4}{51}$ **30.** $\frac{3}{26}$

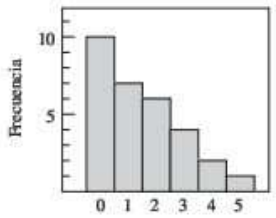
CAPÍTULO 10 ESTADÍSTICA

10.1 Ejercicios *(páginas 518 a 522)*

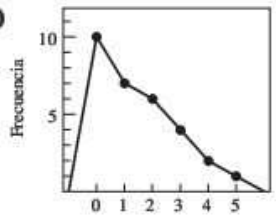
1. *a)*

x	f	$\frac{f}{n}$
0	10	$\frac{10}{30} \approx 33\%$
1	7	$\frac{7}{30} \approx 23\%$
2	6	$\frac{6}{30} = 20\%$
3	4	$\frac{4}{30} \approx 13\%$
4	2	$\frac{2}{30} \approx 7\%$
5	1	$\frac{1}{30} \approx 3\%$

b)



c)

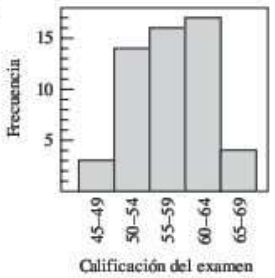


3. *a)*

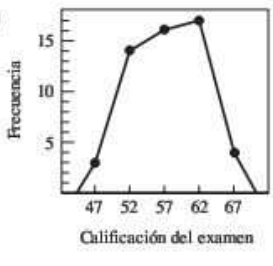
Límites de clase	Registro	Frecuencia f	Frecuencia relativa $\frac{f}{n}$
45 – 49	|||	3	$\frac{3}{54} \approx 5.6\%$
50 – 54	𝍸 𝍸 ||||	14	$\frac{14}{54} \approx 25.9\%$
55 – 59	𝍸 𝍸 𝍸 |	16	$\frac{16}{54} \approx 29.6\%$
60 – 64	𝍸 𝍸 𝍸 ||	17	$\frac{17}{54} \approx 31.5\%$
65 – 69	||||	4	$\frac{4}{54} \approx 7.4\%$

Total: $n = 54$

b)



c)

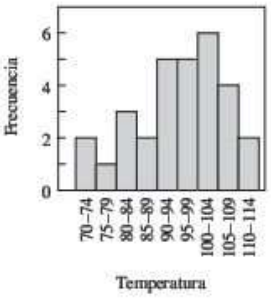


5. ***a)***

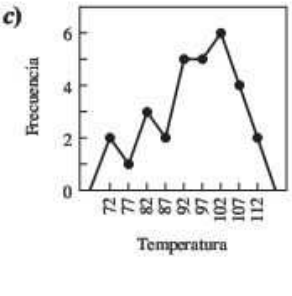
Límites de clase	Registro	Frecuencia f	Frecuencia relativa $\frac{f}{n}$
70–74	II	2	$\frac{2}{30} \approx 6.7\%$
75–79	I	1	$\frac{1}{30} \approx 3.3\%$
80–84	III	3	$\frac{3}{30} = 10.0\%$
85–89	II	2	$\frac{2}{30} \approx 6.7\%$
90–94	𝍸	5	$\frac{5}{30} \approx 16.7\%$
95–99	𝍸	5	$\frac{5}{30} \approx 16.7\%$
100–104	𝍸 I	6	$\frac{6}{30} = 20.0\%$
105–109	IIII	4	$\frac{4}{30} \approx 13.3\%$
110–114	II	2	$\frac{2}{30} \approx 6.7\%$

Total: $n = 30$

b)



c)



7.

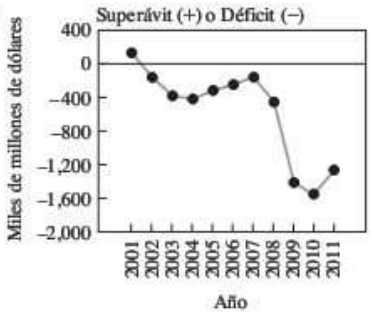
0	7	9	8											
1	1	1	2	8	9	4	3	1	0	5	0	5	5	
2	7	0	9	6	6	2	2	5	2	3	4	4		
3	8	1												

9.

0	8	5	4	9	6	9	4	8				
1	6	0	1	8	8	2	4	0	2	8	6	3
2	6	1	2	5	1	3						
3	0	4	6									
4	4											

11. 2001 **13.** 2005, 2006, 2007 y 2011

15.



17. 3.8% en 2008 **19.** Las respuestas variarán.

21. Medicare y Medicaid; 83°

23.



25. aproximadamente 79 años

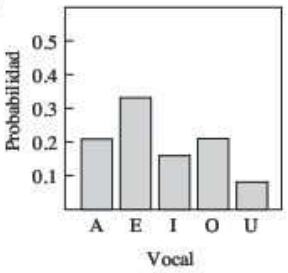
27. ***a)*** aproximadamente 6 años ***b)*** Las respuestas variarán. **29.** Las respuestas variarán.

31. Las respuestas variarán. **33.** Las respuestas variarán.

35. ***a)***

Letra	Probabilidad
A	0.208
E	0.338
I	0.169
O	0.208
U	0.078

b)



37. Las respuestas variarán. **39.** ***a)*** 0.225 ***b)*** 0.275 ***c)*** 0.425 ***d)*** 0.175

41. ***a)***

Deporte	Probabilidad
Regatas	0.225
Parapente	0.125
Deslizamiento en la nieve	0.175
Ciclismo	0.075
Canotaje	0.300
Descenso de rápidos	0.100

b) empírica ***c)*** Las respuestas variarán.

10.2 Ejercicios *(páginas 532 a 535)*

1. ***a)*** 15.2 ***b)*** 12 ***c)*** ninguna **3.** ***a)*** 216.2 ***b)*** 221 ***c)*** 196 **5.** ***a)*** 5.2 ***b)*** 5.35 ***c)*** 4.5 y 6.2 **7.** ***a)*** 0.8 ***b)*** 0.795 ***c)*** ninguna **9.** ***a)*** 129 ***b)*** 128 ***c)*** 125 y 128 **11.** ***a)*** 10.7 millones ***b)*** 10.65 millones ***c)*** 10.6 millones **13.** ***a)*** 73.9 ***b)*** 17.5 ***c)*** 0 **15.** Media = 47.4; mediana y moda permanecen iguales **17.** $59.7 miles de millones **19.** 5.27 segundos **21.** 2.42 segundos **23.** la media **25.** media = 77; mediana = 80; moda = 79 **27.** 92 **29.** ***a)*** 597.4 ***b)*** 600 ***c)*** 615 **31.** 2.41 **33.** 648 millones **35.** China: 372; India: 1008; Estados Unidos: 87; Indonesia: 324; Brasil: 61 **37.** 328.2 millones **39.** ***a)*** 8.25 ***b)*** 8 **41.** ***a)*** 66.25 ***b)*** 64.5 **43.** 6 **45.** ***a)*** 19.4 ***b)*** 15.5 ***c)*** 11 **47.** ***a)*** 74.8 ***b)*** 77.5 ***c)*** 78 **49.** Las respuestas variarán.

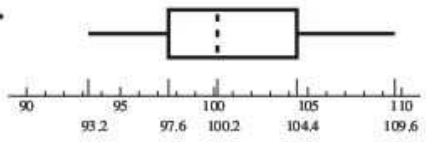
51. *a)* media = 13.7; mediana = 16; moda = 18
b) mediana **53.** *a)* 4 *b)* 4.25 **55.** *a)* 6 *b)* 9.33
57. 80 **59.** no **61.** Las respuestas variarán.

10.3 Ejercicios *(páginas 541 a 543)*

1. la desviación estándar de la muestra **3.** *a)* 13 *b)* 4.24
5. *a)* 19 *b)* 6.27 **7.** *a)* 40 *b)* 11.51 **9.** *a)* 1.14 *b)* 0.37
11. *a)* 12 *b)* 3.61 **13.** $\frac{3}{4}$ **15.** $\frac{21}{25}$ **17.** 88.9% **19.** 64.0%
21. $\frac{3}{4}$ **23.** $\frac{15}{16}$ **25.** $\frac{1}{4}$ **27.** $\frac{4}{49}$ **29.** $202.50 **31.** seis
33. Hay al menos nueve. **35.** *a)* $s_A = 2.35$; $s_B = 2.58$
b) $V_A = 46.9$; $V_B = 36.9$ *c)* muestra B *d)* muestra A
37. *a)* $\bar{x}_A = 68.8$; $\bar{x}_B = 66.6$ *b)* $s_A = 4.21$; $s_B = 5.27$
c) la marca A, puesto que $\bar{x}_A > \bar{x}_B$ *d)* la marca A, puesto que $s_A < s_B$ **39.** La marca A ($s_B = 3539 > 2116$)
41. 18.71;4.35 **43.** 8.71;4.35 **45.** 56.14;13.04
47. Las respuestas variarán. **49.** −3.0 **51.** 4.2
53. 7.55 y 23.45 **55.** No **57.** Las respuestas variarán.

10.4 Ejercicios *(páginas 547 a 550)*

1. 58 **3.** 62 **5.** Janet (puesto que $z = 0.48 > 0.19$)
7. Yvette (puesto que $z = -1.44 > -1.78$) **9.** −0.2
11. 1.0 **13.** Arabia Saudita **15.** Reino Unido
17. Canadá en exportaciones (el valor z de las exportaciones de Canadá fue de 2.4, el valor z de las importaciones de China fue de 1.7, y $2.4 > 1.7$). **19.** *a)* La mediana es igual a $54.5 miles de millones. *b)* El rango es $261 - 12 = 249$. *c)* Los datos centrales van de $29 mil millones a $70 mil millones. **21.** Las respuestas variarán. **23.** Las respuestas variarán. **25.** Las respuestas variarán. **27.** La distribución completa **29.** Ambas están sesgadas hacia la derecha, las importaciones son aproximadamente el doble de las exportaciones. **31.** *a)* no *b)* Las respuestas variarán.
33. Las respuestas variarán. **35.** Las respuestas variarán.
37. $Q_1 = 97.6$, $Q_2 = 100.2$, $Q_3 = 104.4$
39. $P_{65} = 103.2$ **41.** 101.0
43.



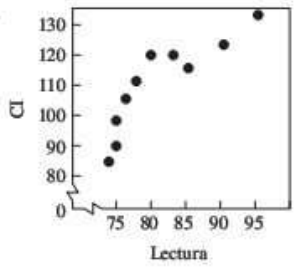
45. 93.3 **47.** 10

10.5 Ejercicios *(páginas 557 a 558)*

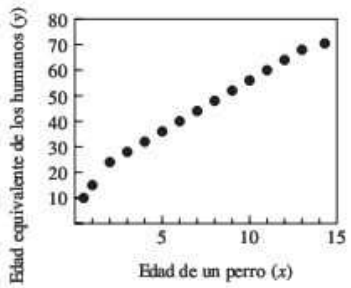
1. discreta **3.** continua **5.** discreta **7.** 50 **9.** 68
11. 50% **13.** 95% **15.** 43.3% **17.** 36.0% **19.** 4.5%
21. 97.9% **23.** 1.28 **25.** −1.34 **27.** 5000 **29.** 640
31. 9970 **33.** 84.1% **35.** 37.8% **37.** 15.9% **39.** 4.7%
41. 0.994 o 99.4% **43.** 189 unidades **45.** 0.888
47. aproximadamente 2 huevos **49.** 24.2%
51. Las respuestas variarán. **53.** 79 **55.** 68 **57.** 90.4
59. 40.3 **61.** Las respuestas variarán.

Ejercicios de la Extensión *(páginas 564 a 565)*

1. $y' = 0.3x + 1.5$ **3.** 2.4 decímetros **5.** 48.9°
7. $y' = 3.35x - 78.4$ **9.** 156 lb
11.



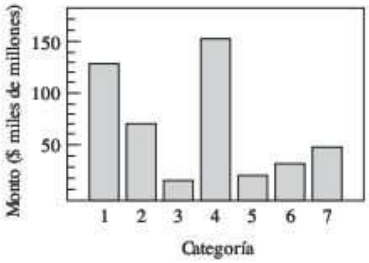
13. 79 **15.** $r = 0.996$
17.



19. Las respuestas variarán. **21.** $y' = 1.44x - 0.39$
23. La correlación lineal es fuerte. **25.** $y' = 0.5219x + 149.8$
27. La correlación lineal va de débil a moderada.

Examen del capítulo 10 *(páginas 566 a 568)*

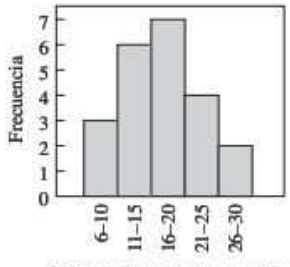
1. Aquellos que copiaron menos del 10%
2. Aquellos cuya tasa de copiado fue del 10 al 30% o mayor del 50% **3.** Aquellos cuya tasa de copiado fue del 30 al 50%
4. Las respuestas variarán. **5.** *a)* 200 millones de barriles
b) 334 millones de barriles *c)* 138 millones de barriles
d) 69 *e)* 44 millones de barriles **6.** *a)* 281 pies
b) 517 pulgadas *c)* 1290 **7.** *a)* 762 *b)* séptimo
c) 12 pies *d)* 17 pies
8.



9. 19.3% **10.** 16.8% **11.** 44.5%
12.

Límites de clase	Frecuencia f	Frecuencia relativa $\frac{f}{n}$
6–10	3	$\frac{3}{22} \approx 0.14$
11–15	6	$\frac{6}{22} \approx 0.27$
16–20	7	$\frac{7}{22} \approx 0.32$
21–25	4	$\frac{4}{22} \approx 0.18$
26–30	2	$\frac{2}{22} \approx 0.09$

13. *a)*



b)



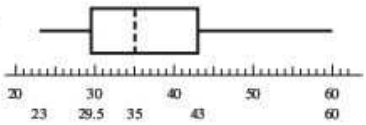
14. 8 **15.** 12.4 **16.** 12 **17.** 12 **18.** 10

19.

3	3 8
4	3 5 8 9
5	0 2 5
6	1 1 4 5 6 7 7 8
7	0 1 2 3 7 7 8 9 9
8	0 4 4
9	1

20. 35 **21.** 33 **22.** 37 **23.** 31 **24.** 49

25.



26. *a)* aproximadamente 95% *b)* aproximadamente 0.3% *c)* aproximadamente 16% *d)* aproximadamente 13.5%
27. 0.684 **28.** 0.340 **29.** Oeste **30.** Este **31.** 84.9
32. Los Dodgers (puesto que $z = 1.01 > 0.70$)

CAPÍTULO 11 ADMINISTRACIÓN DE FINANZAS PERSONALES

11.1 Ejercicios *(páginas 580 a 583)*

1. \$48 **3.** \$48.30 **5.** \$488.19 **7.** *a)* \$826 *b)* \$835.84
9. *a)* \$2650 *b)* \$2653.02 **11.** \$125 **13.** \$13,546.67
15. \$168.26 **17.** \$817.17 **19.** \$17,724.34; \$10,224.34
21. *a)* \$2249.73 *b)* \$2252.32 *c)* \$2253.65
23. *a)* \$18,918.18 *b)* \$18,920.52 *c)* \$18,921.70
25. *a)* \$55.95 *b)* \$56.06 *c)* \$56.14 *d)* \$56.18
e) \$56.18 **27.** Las respuestas variarán. **29.** \$1461.04
31. \$747.26 **33.** \$4499.98 **35.** \$112,607.20
37. \$111.576.54 **39.** \$2.000% **41.** 2.015% **43.** 2.020%
45. 2.020% **47.** \$30,420 **49.** 17 años, 152 días
51. $r = m[(Y + 1)^{1/m} - 1]$ **53.** *a)* 3.818%
b) Banco A; \$5.63 *c)* No hay diferencia; \$232.38
55. 35 años **57.** 8 años **59.** 10.0% **61.** 3.2%
63. \$6.51; \$7.95; \$9.71; \$26.40
65. \$20,400; \$25,000; \$30,500; \$82.900
67. \$218 **69.** \$1502 **71.** \$81,102,828.75

11.2 Ejercicios *(páginas 586 a 588)*

1. \$2950 **3.** \$3422 **5.** \$3922 **7.** \$3645 **9.** \$476.25
11. \$1215; \$158.75 **13.** \$83.25; \$46.29 **15.** \$79.18; \$38.39
17. \$229.17 **19.** \$330.75 **21.** \$10,850 **23.** 6 años
25. \$3.50 **27.** \$5.80 **29.** \$15.30 **31.** *a)* \$607.33 *b)* \$7.90
c) \$646.87 **33.** *a)* \$473.96 *b)* \$6.16 *c)* \$505.54
35. \$9.27 **37.** *a)* \$38.18 *b)* \$38.69 *c)* \$39.20
39. \$16.0% **41.** \$32.00 **43 a 47.** Las respuestas variarán.
49. *a)* \$127.44 *b)* \$139.08

11.3 Ejercicios *(páginas 593 a 595)*

1. \$13.5% **3.** 8.5% **5.** \$114.58 **7.** \$92.71 **9.** 11.0%
11. 9.5% **13.** *a)* 8.93 *b)* \$511.60 *c)* \$6075.70
15. *a)* \$2.79 *b)* \$97.03 *c)* \$4073.57
17. *a)* \$206 *b)* 9.5% **19.** *a)* \$180 *b)* 11.0%
21. *a)* \$41.29 *b)* \$39.70 **23.** *a)* \$420.68 *b)* \$368.47
25. *a)* \$1.80 *b)* \$14.99 *c)* \$1045.01
27. TPA de la compañía financiera: 12.0%; TPA de la unión de crédito: 11.5%; conviene elegir la unión de crédito
29. \$32.27 **31.** Las respuestas variarán.
33. Las respuestas variarán. **35.** 12
37 a 41. Las respuestas variarán. **43.** $\frac{5}{39}$

11.4 Ejercicios *(páginas 604 a 606)*

1. \$675.52 **3.** \$469.14 **5.** \$2483.28 **7.** \$1034.56
9. *a)* \$513.38 *b)* \$487.50 *c)* \$25.88 *d)* \$58,474.12
11. *a)* \$1247.43 *b)* \$775.67 *c)* \$471.76
d) \$142,728.24 *e)* \$1247.43 *f)* \$773.11 *g)* \$474.32
h) \$142,253.92 **13.** *a)* \$1390.93 *b)* \$776.61
c) \$614.32 *d)* \$113,035.68 *e)* \$1390.93 *f)* \$772.41
g) \$618.52 *h)* \$112,417.16 **15.** \$552.18 **17.** \$1127.27
19. \$1168.44 **21.** 360 **23.** \$247,532.80 **25.** *a)* \$304.01
b) \$734.73 **27.** *a)* \$59,032.06 *b)* \$59,875.11
29. *a)* pago 176 *b)* pago 304 **31.** \$25,465.20
33. \$91,030.80 **35.** *a)* \$674.79 *b)* \$746.36
c) un incremento de \$71.57 **37.** *a)* \$395.83 *b)* \$466.07
39. \$65.02 **41.** \$140,000 **43.** \$4275 **45.** \$240
47. *a)* \$1634 *b)* \$1754 *c)* \$917 *d)* \$997
e) \$1555 **49.** *a)* \$2271 *b)* \$2407 *c)* \$1083
d) \$1174 *e)* \$2055 **51 a 59.** Las respuestas variarán.

11.5 Ejercicios *(páginas 619 a 622)*

1. \$20.93 **3.** \$1.88 menos por acción **5.** \$16.37
7. \$0.80 por acción **9.** 3,327,000 acciones
11. 13.69% más bajo **13.** 29.62 **15.** \$42,768.00
17. \$39,685.00 **19.** \$863.04 **21.** \$5479.20 **23.** \$68,605.21
25. \$98,136.00 **27.** \$11,460.44 **29.** \$35,609.44

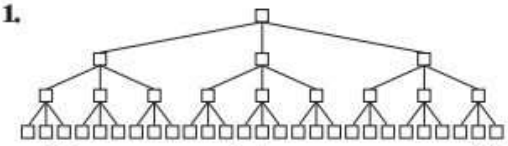
31. $107,107.18 **33.** $20,928.47 **35.** $2050.19 neto pagado
37. *a)* $800 *b)* $80 *c)* $960 *d)* $1040 *e)* 130%
39. *a)* $1250 *b)* $108 *c)* −$235 *d)* −$127
e) −10.16% **41.** $275.00 **43.** $177.75
45. *a)* $10.49 *b)* 334 **47.** *a)* $8.27 *b)* 3080
49. *a)* $8.39 *b)* $100.68 *c)* 15.6%
51. *a)* $57.45 *b)* $689.40 *c)* 27.6%
53. *a)* $1203.75 *b)* $18.06 *c)* 19.56%
55. *a)* $4179 *b)* $76.48 *c)* 24.31%
57. $10.00, $35.17, $29.95 **59.** $400.00, $41.80, $29.95
61. $4000.00, $91.40, $120.00 **63.** grande; bajo
65. $129,258 **67.** $993,383 **69.** *a)* $56,473.02
b) $49,712.70 **71.** *a)* $12,851.28 *b)* $11,651.81
73. *a)* $r = m\left[\left(\frac{A}{P}\right)^{1/n} - 1\right]$ *b)* 5.4%

	Crecimiento agresivo	Crecimiento	Crecimiento e ingreso	Ingreso	Efectivo
75.	$1400	$ 8600	$ 6200	$ 2800	$ 1000
77.	$8000	$112,000	$144,000	$116,000	$20,000

79. 3.75% **81.** 5.2% **83 a 89.** Las respuestas variarán.

Ejercicios de la Extensión *(páginas 627 a 628)*

1.



3. 3^{N-1} **5.** $26 **7.** 3^{N-1}; geométrica; 1; 3; N; $\frac{3^N - 1}{2}$
9. 351 **11.** Más de $\frac{26}{27}$ **13.** $0.00
15. Usted entra en el diagrama solo cuando paga su entrada y solo hasta que usted se mueve hacia arriba tres niveles recibe su pago.
17. Las respuestas variarán. **19.** 128 **21.** $4,400,000
23. $4 millones de Ponzi serían equivalentes a unos $54 millones de dólares actuales. Los $21 mil millones de Madoff son aproximadamente 400 veces más que eso.
25. Las respuestas variarán.

Examen del capítulo 11 *(página 630)*

1. $130 **2.** $58.58 **3.** 3.04% **4.** 14 años **5.** $67,297.13
6. $10.88 **7.** $450 **8.** $143.75 **9.** 14.0% **10.** $34.13
11. 11.5% **12.** Las respuestas variarán. **13.** $1162.95
14. $1528.48 **15.** $3488 **16.** Las respuestas variarán.
17. 12.1% **18.** 15,235,100 acciones **19.** $10.00
20. 0.078%; no; el rendimiento proporcionado no era para un periodo de 1 año. **21.** $106,728.55
22. Las respuestas variarán.

APÉNDICE EL SISTEMA MÉTRICO

Ejercicios del apéndice *(páginas A-5 a A-7)*

1. 8000 mm **3.** 85 m **5.** 689 mm **7.** 5.98 cm
9. 5300 m **11.** 27.5 km **13.** 2.54 cm; 25.4 mm
15. 5 cm; 50 mm **17.** 600 cl **19.** 8700 ml **21.** 9.25 L
23. 8.974 L **25.** 8 kg **27.** 5200 g **29.** 4200 mg
31. 0.598 g **33.** 30°C **35.** −81°C **37.** 50°F
39. −40°F **41.** 200 monedas de cinco centavos **43.** 0.2 g
45. $40.99 **47.** $387.98 **49.** 1,082,400 cm^3; 1.0824 m^3
51. 200 botellas **53.** 897.9 m **55.** 201.1 km
57. 3.995 lb **59.** 21,428.8 g **61.** 30.22 qt **63.** 106.7 L
65. no es razonable **67.** razonable **69.** no es razonable
71. B **73.** B **75.** C **77.** A **79.** A **81.** C
83. A **85.** B **87.** B **89.** A **91.** B **93.** C **95.** B

CRÉDITOS

Créditos de textos

Los ejercicios de *Mathematics Teacher Monthly Calendar* aparecen en las siguientes páginas del libro. Se reimprimieron con permiso de *Mathematics Teacher*, copyright © 1980-2010 por el National Council of Teachers of Mathematics. Todos los derechos reservados: **24-29, 41, 414, 423, 425, 436, 438, 449, 454-455, 457-458, 468, 470, 478, 486-487, 494**.

6 Para reflexionar. Extraído de Eves, Howard, en *Mathematical Circles*. Reimpreso con el permiso de Mathematical Association of America. **33** "Fondos Medicare" fotografía. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Introductory Algebra*, 9a. ed., p. 221. Copyright © 2010 Pearson Education. Todos los derechos reservados. **35-36** "Producción de leche en Estados Unidos" y "Precios promedio de gasolina" gráficas. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Introductory Algebra*, 9a. ed., p. 229. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **42** "Tasa de desempleo" gráfica. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Introductory Algebra*, 9a. ed., p. 295. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos resevados. **100** Ejercicios problema 83. De Smullyan, Raymond, *The Lady or the Tiger and Other Logic Puzzles*. Copyright ©2009 Dover Publications. Reimpreso con permiso. **100** Ejercicios problema 84. Reimpreso con permiso de Simon & Schuster, Inc., de *What Is the Name of This Book?* de Raymond Smullyan. Copyright © 1978, 1986 por Raymond Smullyan. Todos los derechos reservados. **120-124, 134** Rompecabezas de *Original Logic Problems*. Penny Press, febrero de 2010. Copyright © 2010 Penny Publications, LLC. Reimpreso con permiso. **121-122, 124, 135** Rompecabezas de *Original* Sudoku. Penny Press, marzo de 2010. Copyright © 2010 Penny Publications, LLC. Reimpreso con permiso. **130** Problema en el margen. Reimpreso con permiso de Simon & Schuster, Inc., de *What Is the Name of This Book?* por Raymond Smullyan. Copyright © 1978, 1986 por Raymond Smullyan. Todos los derechos reservados. **185** Ejemplo 4. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed. (documento de trabajo), p. 10. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **187** Ejercicio 24. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed. (documento de trabajo), p. 51. Copyright © 2010 Pearson Education. Todos los derechos reservados. **187** Ejercicio 65. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed. (documento de trabajo), p. 15. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **220** Ejercicio 45. Cortesía de joyofpi.com. Reimpreso con permiso de David Blatner. **227** "Gastos en gatos y perros" gráfica. Adaptada por Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **230** "Gasto del gobierno de Estados Unidos en 2005" gráfica. Adaptada por Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed., p. 117. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **232** Ejercicios 73-78. Adaptado por Lial/Hornsby/McGinnis, *Introductory Algebra*, 9a. ed., p. 221. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **240** "Composición de la fuerza laboral de Estados Unidos en 2006" y "Fondos de Medicare" gráficas. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 10a. ed. Copyright © 2008 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **250-251** Ejercicios 77-78. De Lial/Hornsby/Schneider, *Beginning Algebra*, 9a. ed. Copyright © 2004 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **254** Ejemplo 4. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Study Skills Workbook for Intermediate Algebra*. Copyright © 2006 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **277** Tabla 4. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Study Skills Workbook for Intermediate Algebra*. Copyright © 2006 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **278** Ejemplo 2. De Lial/Hornsby/Schneider, *Beginning Algebra*, 9a. ed. Copyright © 2004 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **280** Ejemplo 3. De Lial/Hornsby/Schneider, *Beginning Algebra*, 9a. ed., p. 161. Copyright © 2004 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **285** "Producción de huevo en Estados Unidos" gráfica y problemas. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Introductory Algebra*, 9a. ed. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **322** Ejemplo 3. De Lial/Hornsby/Schneider, *College Algebra*, 10a. ed., pp. 186-187. Copyright © 2009 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **325** Para reflexionar. DeLial/Hornsby/Schneider, *College Algebra*, 10a. ed., p. 198. Copyright © 2009 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **326** Ejercicios 19-20. Adaptado por Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed. (documento de trabajo), p. 195. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **327** Ejercicios 55-58. De Lial/Hornsby/Schneider, *College Algebra*, 10a. ed., p. 192. Copyright © 2009 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **333-334** Ejemplos 7-9 de Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed. (documento de trabajo), pp. 205-206. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **336** Ejercicio 47 problema y gráficas. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Introductory Algebra*, 9a. ed., pp. 2, 260. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **337** Ejercicios 67-69 problemas y gráficas. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed. (documento de trabajo), pp. 211-212. Copyright © 2010 Pearson Education. Todos los derechos reservados. **341** Ejemplo 7. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed. (documento de trabajo), p. 220. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **345** Ejercicios 71-72 problemas y gráficas. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed. (documento de trabajo), pp. 225-226. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **346** Ejercicio 74. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra Worktext*, 7a. ed., p. 201. Copyright © 2002 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **366** Ejercicio 56. De Hornsby/Lial/Rockswold,

A Graphical Approach to College Algebra, 5a. ed., p. 404. Copyright © 2011 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **372** Ejemplo 4. De Lial/Hornsby/Schneider, *College Algebra*, 9a. ed., p. 430. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **375** Ejercicio 58. De Lial/Hornsby/Schneider, *College Algebra*, 10a. ed., p. 430. Copyright © 2009 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **376** "Sonríe!" gráfica. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed., p. 268. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **381** Figura 50 (a-g). De Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed. (documento de trabajo), p. 283. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **383** Ejercicios 1-4, 9-12. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed. (documento de trabajo), p. 277. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **389** Ejemplo 5. De Lial/Hornsby/McGinnis, *Intermediate Algebra*, 9a. ed. (documento de trabajo), p. 299. Copyright © 2010 Pearson Educación. Todos los derechos reservados. **521** "Valor neto de ahorros para el retiro" gráfica. De *TSA Guide to Retirement Planning for California Educators*.

Créditos de fotos

1-2 20th Century Fox Film Corp./Everett Collection **4** ABC/Everett Collection **6** Beth Anderson/Pearson **7** David Livingston/Getty Images **13** Disney Enterprises, Inc. **18** AP Images **19** Granger Collection **20** Texas Instruments imágenes usadas con permiso /CBS/Paramount/National Council of Teachers of Mathematics **21** Cortesía de London Mathematical Society **21** Arteki/Shutterstock **22** GlowImages **24** GlowImages **24** GlowImages **27** Photos.com/Thinkstock **27** GlowImages **29** Karl Pawlewicz/Sharp Electronics **30** Jon Le-bon/Shutterstock **30** Beth Anderson/Pearson **32** Johner Images/Getty Images **33** GlowImages **34** GlowImages **35** Photos.com/Thinkstock **36** Kobal Collection **38** Disney Enterprises, Inc. **43** Picture Desk/Kobal Collection **44** Bettmann/Corbis **46** Beth Anderson/Pearson **55** Beth Anderson/Pearson **61** Michael Kempf/Shutterstock **65** Internal Revenue Service **68** Walt Disney Co./Everett Collection **71** Everett Collection **73** Everett Collection **74** Brand X Pictures/Thinkstock **75** Biblioteca del Congreso División de Impresos y fotografías (LC-USZ62-7923) **77** GlowImages **78** GlowImages **79** Joy Brown/Shutterstock **83** Dreamworks SKG/Everett Collection **84** Bilwissedition Ltd. & Co. KG/Alamy **86** Erich Lessing/Art Resource, New York **89** Warner Bros./Everett Collection **93** Biblioteca del Congreso División de Impresos y fotografías (LC-USZ62-61664) **94** Reimpreso con permiso de Simon & Schuster, Inc. **95** Mary Evans Picture Library/Alamy **100** GlowImages **101** Cortesía de John Hornsby **104** Disney Enterprises, Inc. **107** GlowImages **107** GlowImages **108** Strelnikova Tetiana/Shutterstock **109** Michael Ochs Archives/Getty Images **110** Interfoto/Alamy **111** Pictorial Press Ltd./Alamy **113** Biblioteca del Congreso División de Impresos y fotografías (LC-USZ62-10191) **115** Biblioteca del Congreso División de Impresos y fotografías (LC-USZ62-48329) **118** Steve Liss/Time & Life Images/Getty Images **120-121** Dell Magazines/Penny Publications **125** Notro Films/Bocaboca Producciones/The Kobal Collection **128** Mary Evans/Python Pictures/Ronald Grant/Everett Collection **130** Wonderstock/Alamy **131** Shutterstock **132** Shutterstock **137** Warner Bros./Southside Amusement Co./The Kobal Collection **140** Hugh C. Williams, Universidad de Manitoba **145** Urbana IL USPS **145** Photo Researchers **151** Prentice Hall College Library **151** TriStar Pictures/cortesía de Everett Collection **152** The Art Gallery Collection/Alamy **152** 20th Century Fox Film Corp./Everett Collection **158** Photos/Thinkstock **161** Cortesía de John Hornsby **163** Dreamworks/Universal/Eli Reed/The Kobal Collection **172** Photodisc/Getty Images **172** GlowImages **173** Baloncici/Shutterstock **173** Scala/Art Resource, Nueva York **173** GlowImages **173** Disney Enterprises, Inc. **179** 20th Century Fox Film Corp./Everett Collection **180** Penguin Putnam, Inc. **190** Imagebroker/Alamy **195** Comstock/Thinkstock **200** Pearson Education Management Group EMG Network **200** Robophobic/Shutterstock **203** US Mint **206** Pat Behnke/Alamy **208** Jubal Harshaw/Shutterstock **209** US Mint **210** Edgaras Kurauskas/Shutterstock **211** Valentyn Volkov/Shutterstock **213** Cortesía de los autores **214** Universal TV/Everett Collection **215** New Line Cinema/Kobal Collection **216** Paramount/Everett Collection **217** Reimpreso con permiso de St. Martin's Press **218** Jacket portada de *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*, por Mario Livio. Usado con permiso de Broadway Books, división de Random House, Inc. **219** Reproducido con permiso de Princeton University Press **221** Chad Palmer/Shutterstock **225** Wolper/Warner Bros./The Kobal Collection **227** Cortesía de Terry McGinnis **229** Cortesía de John Hornsby **230** Cortesía de John Hornsby **230** Fruit Berries, Raspberries Stamp © 1999 USPS. Todos los derechos reservados. **233** Cortesía de John Hornsby **233** GlowImages **233** US Mint **234** Interfoto/Alamy **234** Reproducido con permiso de Princeton University Press **241** Paramount/Kobal Collection **242** Cortesía de John Hornsby **243** Darryl Brooks/Shutterstock **245** Photo Researchers, Inc. **246** Alamy Images **247** Elena Elisseeva/Shutterstock **250** Andresr/Shutterstock **252** Kathy Willens/AP Photo 296 The Everett Collection **255** 20th Century Fox Film Corp./Everett Collection **257** Daiju Kitamura/Aflo Foto Agency/Alamy **260** Lopatinsky Vladislav/Shutterstock **260** Matt Dunham/AP Images **260** Albert Ferreira/Reuters/Corbis **264** CBS-TV/Kobal Collection **265** GlowImages **266** Columbia Pictures/Everett Collection **267** Louisiana Departmento de Vida Silvestre y Pesca **269** Vasily Smirnov/Shutterstock **271** Cortesía de John Hornsby **272** GlowImages **273** Cortesía de John Hornsby **275** Andriano/Shutterstock **275** Photodisc **276** Dorling Kindersley **276** Bettmann/Corbis **278** Interfoto/Alamy **282** GlowImages **282** Gala Kan/Shutterstock **285** Nic Neish/Shutterstock **243** Photofest **295** GlowImages **296** Brand X Pictures/Jupiter Images **297** Bogac Erguvenc/Shutterstock **308** Photofest **310** Bettmann/Corbis **310** Interfoto/Alamy Images **319** Everett Collection **320-321** Cortesía de los autores **322** Beth Anderson/Pearson **325** National Oceanic and Atmospheric Administration/National Geophysical Data Center **325** Cortesía de John Hornsby **332** Cortesía de John Hornsby **337** Andre Jenny/Alamy **338** Interfoto/Alamy Images **342** Lev Olkha/Shutterstock **346** Cortesía de John Hornsby **348** Xiao Yong/Imaginechina/AP Images

358 Cbpix/Shutterstock **361** NASA **362** PPL/Shutterstock **364** Pearson Learning Photo Studio **366** Shutterstock **369** Everett Collection **372** Nikhil Gangavane/Dreamstime **373** EdeWolf /iStockphoto **375** NgFotografia/Shutterstock **378** The Trustees of The British Museum/Art Resource, Nueva York **385** Ollirg/Shutterstock **386** Michael Chamberlin/Shutterstock **386** Larry MacDougal/TCPI/The Canadian Press/AP Images **387** Everett Collection **389** GlowImages **393** Stuart Ramson/PictureGroup/AP Images **393** Matt Trommer/Shutterstock **406** Lucasfilm/Paramount Pictures/Kobal Collection **407** Julie Jacobson/AP Images **408** Simon James/Alamy **410** Trustees of The British Museum/Art Resource, Nueva York **417** Interfoto/Alamy **418** Preamble (1987), Mike Wilkins. Pintura en metal en vinilo y madera. 96 ×96 pulgadas. Smithsonian American Art Museum, Washington, DC/Art Resource, Nueva York **419** Julie Jacobson/AP Images **419** Ocean/Corbis **423** StillFX/Shutterstock **425** GlowImages **428** Tim Gartside/Alamy **431** Beth Anderson/Pearson **432** Igor Stepovik/Shutterstock **435** Racheal Grazias/Shutterstock **436** U.S. Senate **436** RJ Lerich/Shutterstock **437** GlowImages **438** Photos.com/Thinkstock **438** GlowImages **439** Fourteenth-century Chinese; cortesía del autor **440** Eighteenth-century Japanese; cortesía del autor **446** Hulton Archive/Getty Images **446** De Agostini/SuperStock **446** Biblioteca del Congreso División de Impresos y fotografías (LC-USZ62-25564) **447** Biblioteca del Congreso División de Impresos y fotografías [LC-USZ62-32058] **455** Caitlin Mirra/Shutterstock **457** Robert Bosch **459** Everett Collection **460** Copyright © 2010 por Keith Devlin. Reimpreso con permiso de Basic Books, miembro de Perseus Books Group **461** Mary Evans Picture Library/Alamy Images **462** Biblioteca del Congreso División de Impresos y fotografías [LC-USZ62-75479] **465** Educational Management Group **470** AbleStock/Thinkstock **471** Newscom **473** Photos/Thinkstock **478** Beth Anderson **479** Walter G. Arce/Shutterstock **483** Giovanni Benintende/Shutterstock **484** Cortesía del National Astronomy and Ionosphere Center-Arecibo Observatory, instalación del NSF **487** GlowImages **487** NASA **488** P. J. Cross/Shutterstock **490** Interfoto/Alamy Images **493** StillFX/Shutterstock **495** Everett Collection **497** GlowImages **498** Matthew Heinrichs/Alamy **500** Cortesía de John Hornsby **502** GlowImages **505** David Loh/Reuters/Corbis **511** Mark Lennihan/AP Photo **512** Cortesía de Vern Heeren **517** Francesco Ridolfi/Shutterstock GlowImages **531** GlowImages **540** RIA Novosti/Alamy **548** Digital Vision/Thinkstock **550** Cortesía de John Hornsby **550** North Wind Picture Archive **554** Interfoto/Alamy **555** Greer & Associates, Inc./Purestock/SuperStock **557** GlowImages **558** David R. Frazier Photolibrary, Inc./Alamy **558** GlowImages **560** Mary Evans Picture Library/Alamy **563** GlowImages **565** GlowImages **567** USGS National Wetlands Research Center **568** GlowImages **569** CBS-TV/Kobal Collection **572** Walt Disney/Kobal Collection **573** World History Archive/Alamy **575** Warner Bros/Kobal Collection **576** Parksphotography/Dreamstime **582** Isselee/Dreamstime **583** Diego Cervo/Shutterstock **595** Rob Byron/Shutterstock **608** Jean Miele/Corbis **612** GlowImages **626** Bettmann/Corbis **627** Portada de *No One Would Listen: A True Financial Thriller* de Harry Markopolos reproducida con permiso de John Wiley & Sons, Inc. **629** Radius Images/Alamy **A-1** Georgios Kollidas/Alamy Images **A-3** And Inc./Shutterstock **A-3** Dorling Kindersley **A-4** David Hughes/Shutterstock

ÍNDICE ANALÍTICO

A

Adición y sustracción, 298
Alfabeto hebreo, 76
Amplitud de clase, 514
Análisis
  de datos de un informe, 70
  del punto de equilibrio, 353-354
Animación matemática, 173
Años de duplicación, 579-581
Aplicación(es)
  con tres variables, 389
  de sistemas, 385
Apuestas y juegos, 495
Argumento(s)
  de Lewis Carroll, 129
  inválido, 115, 128
  lógico(s), 3, 115
  válido, 115
Aritmética, teorema fundamental de la, 141
Arreglos de objetos, 421-422
Arte de resolver problemas, 1
Asimetría en una distribución, 541
Asíntota
  horizontal, 367
  vertical, 371
Axiomas de la igualdad, 248

B

Base, 3
Bicondicionales, 113

C

Calculadoras
  científicas, 29
  de cuatro funciones, 29
  graficadoras, 29
Cálculo, 29
  de cantidades desconocidas, 252-253
  de la fecha de nacimiento de Augustus De Morgan, 21
Capitalización continua, 578
Cardinalidad, 46
Cargos financieros, 584
Cero
  división entre, 192
  propiedad de factor, 306-307
Circuitos, 106
Círculo(s), 232
  ecuación de un, 323-324
Clave, 163-164
Cociente(s), 235
  regla del 289-290
Codificación, 163
Coeficiente(s)
  binomiales, 441
  de correlación de la muestra, 561-562
  de regresión, 559-560
  de variación, 540
Columna, 394
Combinaciones, 428-430
Comparación
  de planes de retiro, 576
  de poblaciones con base en muestras, 538
  de tarjetas de crédito bancarias, 588
Complemento, 472-473
  de un conjunto, 50
Componentes, 320
Conclusión, 3, 4
Condicionales, 101
Conectores, 84
  lógicos, 84
Conjetura, 2
  de Goldbach, 151
Conjunción(es), 90
Conjunto(s), 44
  de datos, 513-514, 530-540, 544, 565
  de números, 45
    reales, 180
  definición de, 44
  diferencia de, 59
  elementos de, 44
  finitos, 46
  infinitos, 46, 76
    y cardinalidad, 74
  intersección de, 56
  leyes de De Morgan para, 64
  nulo, 44
  producto cartesiano de, 60
  que no son numerables, 77
  solución, 242
  teoría de, 44
  unión de, 57
  universal, 50
  vacío, 44
Constantes de Kaprekar, 15
Conteo, 408-458
  de subconjuntos, 52
Contraejemplo, 2
Contrapositivo, 110
Conversión(es)
  comunes, 112
  entre decimales y porcentajes, 225
Converso, 110
Coordenadas, 320
  rectangulares, 320
Correlación, 559, 561-562
Correspondencia biunívoca, 75
Costos de cierre, 601
Créditos al consumo, 583-586
Criba de Eratóstenes, 139
Criptografía, 163
  con clave pública, 166
Criterio(s)
  de uniformidad, 416
  para elaborar gráficas, 362-363
  sobre el método, 429
Cuadrados de binomios, 301
Cuadrante, 320
Cuantificadores, 86
  universales, 86
  y conjuntos de números, 88
Cuartiles, 545-546
Cubo(s), suma y diferencia de, 304
Curva(s)
  de regresión estimada, 559
  normal, 551-556

D

Datos
  cualitativos, 512
  cuantitativos, 512
  en bruto, 512
Deciles, 545-546
Decimal(es)
  periódico, 206-207
  y porcentajes, conversión entre, 225
Decodificación, 163
Definición
  de cero factorial, 421
  de la división, 203
  de sustracción, 189
Deflación, 578
Demostración por contradicción, 143
Denominación monetaria, 256
Densidad, 204
Derechos, 590
Descuento de una tasa de amortización, 600
Desigualdad(es)
  lineal(es)
    de una variable, 278
    con dos variables, 398
    solución de, 280-282
  propiedad
    aditiva de la, 278
    multiplicativa de la, 279-280
  sistemas de, 400

Desviación estándar, 536-537
de la muestra, 537-538
Diagrama(s)
de caja, 546-547
y bigotes, 546-547
de dispersión, 559
de Euler, 115
de tallo y hoja, 515-516, 529
de Venn, 50, 62
conjunto en un, 63
Diferencia
común, 9
sucesiva, 10
Dígito de las unidades, 22
Distancia, fórmula de la, 320
Distribución(es)
asimétrica, 530
bimodal, 528
de frecuencias, 513
agrupadas, 514-515
de probabilidad, 475-476
binomial, 489
normal, 551-556
simétrica, 530
Disyunción(es), 91
inclusiva, 91
Divisibilidad, 138
prueba de, 140-141
verificación de la, 138
División, 203
de decimales, 223
de números
racionales, 204
reales, 190
entre cero, 192
Divisor, 138
Doble negativo, regla del, 184
Dominio y rango, 349-350
Dos variables, ecuaciones lineales con, 328-329
Duplicación, años de, 579-581

E

Ecuación(es), 242
con literales y fórmulas, 246-247
cuadráticas, 306
de primer grado, 242
de un círculo, 323-324
lineal(es)
con una variable, 243
con dos variables, 328-329
formas de la, 341
solución de, 242
tipos de, 246
Elaboración de una tabla de amortización, 597
Elemento(s), 44, 394
de identidad, 194
Eliminación, método de, 377-378, 382
Encuesta(s), 68
análisis de una, 69
y números cardinales, 68
Ensayo, 37
y error, 21
Entrada, 394
Enunciado(s), 84
componentes, 84
compuesto, 84
equivalentes y leyes de De Morgan, 98
matemáticos, 93
Escritura
de fideicomiso, 595
de razones, 264
de seguridad, 595
Espacio muestral, 460
Esquema de cambio de clave, 164
Estadística
descriptiva, 512
inferencial, 512
Estado de cuenta detallado, 584
Estimación, 30
de probabilidades por simulación, 504
Evento(s), 460
independientes, 480
mutuamente excluyentes, 474
que implican "no", 470
que implican "o", 473-476
que implican "y", 480
Experimento, 460
Explicación, 121
Exponente(s), 3, 286
cero, 288-289
negativos, 288-289
reglas de los, 292
Expresión(es)
algebraica, 242
exponenciales, 286-287

F

Factor(es), 138, 190, 301-304
cero, propiedad de, 306-307
Factorial, 30
Factorización, 301-304
de binomios notables, 304
Falacia, 115
Fenómeno
aleatorio, 460
determinístico, 460
Fermat, último teorema de, 152
Fibonacci, secuencia de, 218
Forma(s)
de la ecuación lineal, 341
pendiente-intersección, 339
punto-pendiente, 338
Fórmula(s)
cuadrática, 308-310, 314
de la distancia, 321
de la probabilidad binomial, 489
de la suma mágica, 446
de probabilidad
condicional, 479
empírica, 462
teórica, 461
de recursión, 170
de Stirling, 422
del punto medio, 321-322
del vértice, 361
ecuaciones con literales, 246-247
factorial, 420
de combinaciones, 429
de permutaciones, 427
para el cálculo del interés compuesto, 368-369
Frecuencia(s)
acumuladas, 527
esperadas, 517-518
observadas, 517-518
relativa, 513
Función(es), 347, 351
cuadráticas
gráficas de, 360
y parábolas, 357-358
definición de, 351
exponenciales, 367
lineal, 353
logarítmicas, 370-371
objetivo, 402
y relaciones, 346

G

Grado de un polinomio, 298
Gráfica(s)
circular, 31, 516
criterios para elaborar, 362-363
de barras, 32, 516
de funciones, 350
cuadráticas, 358-359, 360
de pastel, 31
de una desigualdad lineal, 399
interpretación de, 31
lineal, 32, 33, 516-517

H

Heptagonal, 17
Hexagonal, 17
Histograma, 513-514

I

Igualdad
de conjuntos, 46
propiedad aditiva de la, 242
propiedad multiplicativa de la, 243

Impuestos, 601
al adquirir una casa, 602
sobre la propiedad, 601
Independencia de eventos, 481
Índice de precios al consumidor (IPC), 579
Inducción matemática, 11
Infinito, símbolo, 276
Infinitud de los números primos, 143-144
Inflación, 578
de precios, 578-579
monetaria, 579
promedio, 579
Información sobre artículos, 37
Interés, 570
adicional, 583, 586
compuesto, 368-369, 570-572, 574-575, 580
no devengado, 590-594
simple, 570-572, 580-581
y mezcla, 254-255
Interpretación de las medidas de dispersión, 538
Intersección
de conjuntos, 56
con los ejes, 329
Intervalo, 276
Inválido, 115
Inversiones, 497-498
Inverso(s), 110
aditivo(s), 183-194
multiplicativo, 194

J
Juego(s)
justo, 496
y apuestas, 495, 500

L
Ley(es)
de De Morgan, 64, 98
para conjuntos, 64
de los grandes números, 463-464
de Veracidad en los Préstamos, 588
Límites
inferiores de clase, 514
superiores de clase, 514
Listas sistemáticas, métodos de, 412
Lógica, 83
simbólica, 84

M
Mantenimiento, 601-602
Marca de clase, 514
Matemáticas financieras, 569
Matriz(ces)
aumentada, 394
operaciones de renglón con, 394-395
terminología de, 394
Máximo común divisor, 155-157
Media, 523-525, 541
aritmética, 204-205
ponderada, 524-525
Mediana, 526-527
Medida
de la asimetría, 541
de la dispersión, 535-538
de tendencia central, 523-531
de posición, 544
Método(s)
actuarial, 590-591, 593
de cuatro pasos de Polya para la solución de problemas, 18
de diferencias sucesivas, 10
de eliminación, 377-378
de Gauss-Jordan, 395-397
de listas sistemáticas, 412
de mínimos cuadrados, 559
de sustitución, 379-380
del saldo promedio diario, 584-587
general para la solución de problemas, 18
Mezcla e interés, 254-255
Miembros, 44
Mínimo común múltiplo, 158-161
Moda, 528
Modelo(s), 247
de optimización, 363-364
exponenciales, 372
lineales, 341-342
matemático, 247
Modus
ponens, 126
tollens, 127
Momios, 465-466
Monomio, 298
Monto(s)
compuesto, 573
de la liquidación, 591
anticipada, 592
Movimiento, problemas de, 257-258
Muestra, 512, 539
Multiplicación, 299-300
de decimales, 223
de números
racionales, 203
reales, 190, 194
de probabilidades, 480
Múltiplo, 138

N
Negación(es), 85, 92
de desigualdades, 85
de un condicional, 104
Negociaciones
de enunciados con cuantificadores, 87
formación de, 85
Negocios y seguros, 498-499
Notación
científica, 30, 293-295
de funciones, 352
de intervalos, 276
estándar, 294
Número(s)
abundantes, 150
amigables, 150
cardinal(es), 2, 46, 61, 75, 88
de conjuntos, 78
fórmula para obtener, 69
complejos, 234-236
compuestos, 138-141
con signo, 180
cuadrados, 13
de subconjunto, 53
deficientes, 150
enteros, 181
no negativos, 88, 180
figurados, 13
heptagonales, 17
hexagonales, 17
irracionales, 45, 88, 181, 212-217
naturales, 2, 180
o cardinales, 45
negativos, 180
octagonales, 17
pentagonal(es), 13
predicción del valor de un, 15
perfectos, 149
positivos, 180
primos, 138-141, 143-147
grandes, 143-147
infinitud de los, 143-144
racionales, 88, 181, 200-207, 212
reales, 45, 88, 180-183, 195
división de, 190
multiplicación de, 190
triangulares, 13

O
Octagonal, 17
Operación(es), 61, 188
con decimales, 222
con raíces cuadradas, 214
de renglón con matrices, 394-395
orden (prioridad) de las, 192-193
Optimización, modelo de, 363-364
Origen, 320

P
Pago mensual
constante, 596
de una hipoteca, 596-597

Palabras a símbolos, traducción de, 251-252
Par ordenado, 320
Parábola(s)
  vértice de una, 360-361
  y funciones cuadráticas, 357-358
Paradoja, 75
  de Galileo, 75
  de Simpson, 531
  de Zenón, 78
Pares ordenados, 59
Parte
  imaginaria, 236
  real, 236
Patrones numéricos y fórmulas de sumas, 11
Penalización por pago anticipado, 590
Pendiente, 331-332
Percentil, 545
Periodo, 572
  de capitalización, 572
Permutaciones, 426-427, 430
Población, 512, 539, 562
  proporción para pronosticar una, 267
Polígono de frecuencias, 513-514
Polinomio, 298
  primo, 301
Porcentaje(s), 225-229
  y decimales, conversión entre, 225
Potencias, 236
  grandes, simplificación de, 236
  reglas de, 290-291
Precio unitario, 264-265
Predicción, 4, 5
  de la ecuación, 12
  del valor de un número pentagonal, 15
Premisa(s), 3
  conclusiones, 3
Préstamo(s)
  a plazos, 583
  con pago mensual, 589
  hipotecarios, 583, 599
    con tasa ajustable, 599
    con tasa fija, 595
  revolventes, 583-584
Primer componente, 60
Primos gemelos, 151
Principal de un depósito, 575, 581, 595
Principio
  aditivo de conteo, 451
  del conteo de complementos, 449
  fundamental de conteo, 415-416
Prioridad de las operaciones, 192-193
Probabilidad(es), 460-508
  binomial, 489
  condicional, 478-479
  empírica, 462, 464
  en genética, 465
  por simulación, 504
  teórica, 461, 464
Problema(s)
  de movimiento, 257-258
  del viajero, 456
  lógicos y sudokus, 120
  por razonamiento inductivo, 2
  que implican "no", 449-450
  que implican "o", 451
Producto(s), 190, 235
  cartesiano de conjuntos, 60
  cruzados, 266
  notables, 300-301
Programación lineal, 401
Promedio de calificación, 524
Propiedad(es)
  aditiva
    de la desigualdad, 278
    de la igualdad, 242
  conmutativa de la suma, 58
  de factor cero, 306-307
  de la multiplicación de números reales, 194
  de la probabilidad, 470
  de la suma de números reales, 194
  de raíz cuadrada, 307-308
  multiplicativa
    de la desigualdad, 279-280
    de la igualdad, 243
Proporción, 265
  de inflación, 579
  para pronosticar una población, 267
Prueba
  de divisibilidad, 140
  de la recta vertical para una función, 350
Punto
  de equilibrio, análisis del, 353-354
  decimal, uso incorrecto del, 229
  esquina, 402
  medio, 321-322

R

Radio, 232
Raíz cuadrada, 21
  operaciones con, 214-217
  propiedad de, 307-308
Rango, 535-536
  y dominio, 349-350
Razón(es), 264
  áurea, 172
  escritura de, 264
Razonamiento
  deductivo, 2, 96
  inductivo, 2, 3, 6
    riesgos del, 5
Recesión, 578
Recíproco, 194
Recta(s)
  de mínimos cuadrados, 559-561
  de regresión estimada, 559
  horizontales, 332
  numérica, 180, 276
  paralelas, 332-333
  perpendiculares, 332-333
  verticales, 332
Rectángulo áureo, 218
Redondeo de decimales, 223
Reducción al absurdo, 143
Refinanciamiento, 601
Región de soluciones factibles, 402
Regla(s)
  de la multiplicación de probabilidades, 480
  de los exponentes, 292
  de potencias, 290-291
  del 70, 579-580, 582
  del 78, 590-592, 594
  del cociente, 289-290
  del doble negativo, 184
  del producto, 287
    para exponentes, 287
  empírica, 552
Regresión lineal, 559
Relación(es), 347
  y funciones, 346
Rendimiento
  anual efectivo, 576-577
Residuo, 165
Respaldo gubernamental de hipotecas, 602
Responsabilidades, 590
Resta de decimales, 222
Resultados, 460-461

S

Saldo promedio diario, 584-587
Secciones cónicas, 364
Secuencia(s)
  aritmética, 6
    y geométricas, 9
  de Fibonacci, 4, 170-172, 218
  de proporciones, 464
  geométrica, 4
Segundo componente, 59
Seguro, 601
  del propietario de una casa, 602
Serie infinita, 219

Signos
diferentes, 188, 191
iguales, 188, 191
Silogismo disyuntivo, 128
Símbolo(s), 85
conversión de, a palabras, 86
de infinito, 276
de radical, 21
$\in$, uso de, 45
Simetría en conjuntos de datos, 530
Simplificación de potencias grandes, 236
Simulación, estimación de probabilidades por, 504-506
Sistema(s)
aplicaciones de, 385
de desigualdades, 400
de ecuaciones, 376-377
lineal(es)
con dos variables, 376
con tres variables, 380
Solución
de desigualdades lineales, 280-282
de ecuaciones lineales, 242
de proporciones, 265
de una ecuación, 242
equivalentes, 242
para una variable específica, 247
Subconjunto(s)
de un conjunto, 51
propios de un conjunto, 51
Subíndice, 14
Suma
de decimales, 222
de números reales, propiedades de la, 194
fórmulas especiales de, 13
mágica, fórmula de la, 446
y diferencia de cubos, 304
y resta de números racionales, 202
Suposición y verificación, 21
Sustitución, método de, 379-380
Sustracción, 189-190
y adición, 298

T
Tabla(s)
de amortización, 597-598, 600
de pagos, 597-598
de verdad, 94, 97, 113, 125
y enunciados equivalentes, 90
o diagrama, 19
Tareas de una etapa, 408
Tarjetas de crédito, 584-585, 588
Tasa
ajustable, 599
de cambio promedio, 333
de porcentaje anual, 588-590
nominal, 576
Tautología, 104
Tendencia central, 529
Teorema
de Chebyshev, 540
de Fermat, último, 152
de Pitágoras, 3
fundamental de la aritmética, 141
Teoría de conjuntos, 43
Término(s), 298
semejantes, 298
Terminología de matrices, 394
Terna ordenada, 380
Tipos
de créditos al consumo, 583
de ecuaciones, 246
Traducción de palabras a símbolos, 251-252
Transparencia en el crédito, 588
Triángulo de Pascal, 439-441, 445
Trinomio, 298

U
Último teorema de Fermat, 152
Uniformidad
criterio de, 416
en el conteo, 415-416
y el principio fundamental de conteo, 415-416
Unión de conjuntos, 57
Universo de discurso, 50
Uso incorrecto del punto decimal, 229

V
Válido, argumento, 115
Valor(es)
absoluto, 183-185
de verdad, 84
empíricos, 508
esperado, 494
futuro, 570-571, 574
con capitalización continua, 578
presente, 570-571, 575, 581-582
z, 544
Variable(s)
aleatoria(s), 475
continuas, 550-551
discretas, 550-551
dependiente, 347
específica, solución para una, 247
independiente, 347
Variación
combinada, 270-271
conjunta, 270-271
directa, 267-268
inversa, 269-270
Varianza, 537
Verificación
de la divisibilidad, 138
suposición y, 21
Vértice, 402
de una parábola, 360-361
fórmula del, 361



Después de once ediciones y más de cuatro décadas, *Matemática: razonamiento y aplicaciones* es uno de los libros de texto más utilizados para enseñar matemáticas, pues ofrece a los estudiantes una cobertura práctica que vincula esta ciencia con el entorno.

Esta edición conserva un tema que se introdujo en la edición anterior: el cine y la televisión.

Nuestra obra se escribió tomando en cuenta diferentes tipos de estudiantes y se adapta a una amplia diversidad de cursos, ya sea en niveles medio o superior. La flexibilidad en la secuencia temática hace que el texto sea adaptable para cursos breves o cursos más largos.

ALGUNAS NOVEDADES DE ESTA EDICIÓN

- Referencias actualizadas de películas y programas de televisión.
- Mejor conjunto de ejercicios, bien planeados y con numerosas aplicaciones.
- Organización que permite el fácil reconocimiento del contenido esencial.

Consulte el sitio Web donde encontrará material adicional:
www.pearsonenespañol.com/miller



ISBN 978-607-32-1632-6
90000
9 786073 216326

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com