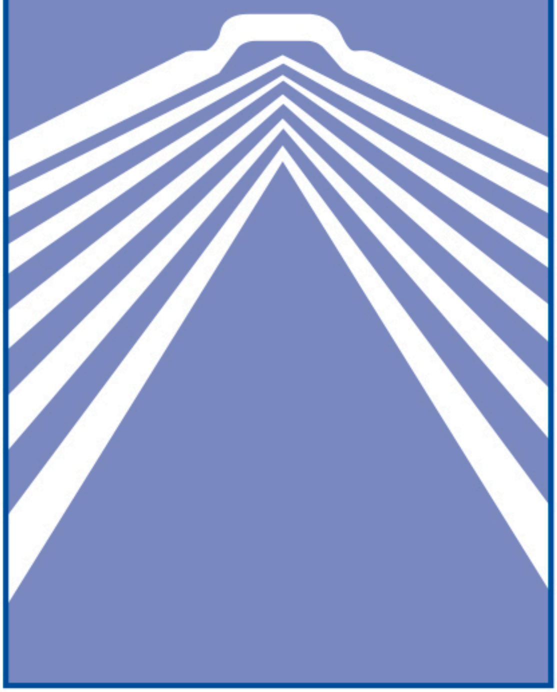
MATEMÁTICAS BÁSICAS
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD



Ángel Manuel Ramos del Olmo
José María Rey Cabezas

PIRÁMIDE

MATEMÁTICAS BÁSICAS
PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

ÁNGEL MANUEL RAMOS DEL OLMO
JOSÉ MARÍA REY CABEZAS
PROFESORES TITULARES DE UNIVERSIDAD EN EL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

MATEMÁTICAS BÁSICAS
PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD

EDICIONES PIRÁMIDE

COLECCIÓN «CIENCIA Y TÉCNICA»

Edición en versión digital

Para cualquier información pueden dirigirse a piramide_legal@anaya.es
Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid
Teléfono: 91 393 89 89
www.edicionespiramide.es
ISBN digital: 978-84-368-3430-7

A mis padres,
Alejandra del Olmo y Claudio Ramos.
In memoriam.

A mi hermana,
Mari Gracia.

Índice

Prefacio

Al entrar a la universidad los alumnos a menudo se encuentran con material que los profesores suponen que ya han estudiado y con la típica frase "esto ya lo habéis dado, ¿verdad?", con el correspondiente estrés que esto puede generar. Visto desde el otro lado, el profesor suele oír quejas de algunos estudiantes que afirman que no han recibido clases sobre este material en la enseñanza secundaria y/o en Bachillerato. Además, si se le ocurre formular la pregunta antes citada, en muchas ocasiones verá a los estudiantes removiéndose en sus asientos, miradas perdidas, un murmullo general ... y algunas tímidas respuestas.

En este volumen estudiantes y profesores encontrarán una recopilación de material matemático de un nivel previo a la universidad que les puede servir para preparar pruebas de acceso a la universidad, como texto de base para (al menos) el primer año de carrera y como texto al que recurrir, a modo enciclopédico, cuando lo precisen, sin necesidad de buscar en una colección de libros y apuntes de cursos anteriores.

El origen de esta obra es un curso de preparación para pruebas de acceso a la universidad que los autores estuvieron impartiendo durante varios años en la Universidad Complutense de Madrid. Es en ese curso y en la interacción con sus estudiantes, cuando surge la idea inicial de su redacción. Además, la experiencia de los autores como profesores en clases de Matemáticas en los primeros años de universidad y como correctores en las actuales pruebas de acceso les ha permitido observar las carencias y necesidades a nivel matemático de muchos estudiantes, lo cual ha terminado de perfilar y completar la mencionada idea inicial. En este sentido este libro puede ser de especial ayuda como texto básico de referencia en los cursos introductorios de Matemáticas Básicas que, cada vez más, se imparten en los grados de Ciencias, Tecnología e Ingeniería.

El texto está dividido en tres partes en las que se clasifican los contenidos que se abordan: I) Álgebra y Geometría, II) Análisis, III) Estadística y Probabilidad. Cada parte está dividida en varios capítulos en los que se desgranan los principales resultados y la mayoría de sus demostraciones, junto con numerosas gráficas y ejemplos ilustrativos. Se ha considerado conveniente incluir, para los lectores interesados, demostraciones de la mayoría de los resultados presentados, a pesar de que muchas de ellas no suelen aparecer en los libros de enseñanza secundaria y de Bachillerato. Cada capítulo termina con una sección de problemas y otra sección con las correspondientes soluciones, lo que permitirá al lector comprobar el grado de conocimiento que ha adquirido sobre los contenidos de cada capítulo.

La parte de Álgebra y Geometría se inicia con la introducción a los números reales y se termina con el estudio del espacio euclídeo y de las cónicas, pasando previamente por capítulos sobre sistemas de ecuaciones lineales, trigonometría ...

La parte de Análisis se inicia con el estudio de las sucesiones y su convergencia y de las funciones reales de variable real. Se continúa con un capítulo sobre números complejos (que muchos estudiantes de universidad afirman desconocer, a pesar de su enorme utilidad e importancia ... y de ser, supuestamente, parte de los contenido de Bachillerato). Se termina con la parte dedicada al Cálculo (derivadas e integrales) y sus aplicaciones.

Por último, la parte de Estadística y Probabilidad está dividida en tres capítulos. En el primero se estudia el Análisis Combinatorio, y muestra técnicas para facilitar el recuento de casos o cosas, necesario en muchas situaciones científicas y cotidianas. El segundo capítulo está dedicado a la Estadística Descriptiva (sólo en el caso unidimensional) y presenta herramientas que permitan asimilar de una forma razonable grandes cantidades de información. En el tercer y último capítulo se presentan las nociones básicas de la teoría de la Probabilidad, con el objetivo de disponer de herramientas básicas que sirvan a la hora de intentar sacar conclusiones sobre lo que puede ocurrir en fenómenos o experimentos aleatorios.

Notación general

Recopilamos, a continuación, una serie de notaciones matemáticas que se emplean a lo largo de todo el texto:

- La expresión "$a \in X$" denota que a *es un elemento del conjunto* X o, dicho de otra forma, que a *pertenece al conjunto* X. La expresión "$a \notin X$" denota que a *no es un elemento del conjunto* X o, dicho de otro modo, que a *no pertenece al conjunto* X.
- El símbolo "$\Rightarrow$" es una forma abreviada de escribir *implica* (o *es una condición suficiente para*). Es decir, si se verifica la afirmación (proposición) que se escribe a su izquierda, entonces se verifica la afirmación (proposición) que se escribe a su derecha. El símbolo "$\not\Rightarrow$" es una forma abreviada de escribir *no implica*.
- El símbolo "$\Leftarrow$" es una forma abreviada de escribir *es implicado por* (o *es una condición necesaria para*). Es decir, si se verifica la afirmación (proposición) que se escribe a su derecha, entonces se verifica la afirmación (proposición) que se escribe a su izquierda. El símbolo "$\not\Leftarrow$" es una forma abreviada de escribir *no es implicado por*.
- El símbolo "$\Leftrightarrow$" es una forma abreviada de escribir *si, y sólo si*. Es decir, la afirmación (proposición) que se escribe a su izquierda es cierta si, y sólo si, es cierta la afirmación (proposición) que se escribe a su derecha. En otras palabras, ambas proposiciones son equivalentes.
- El símbolo "$\cup$" denota *unión de conjuntos*, de forma que la expresión "$a \in A \cup B$" significa que "$a \in A$ o $a \in B$". La expresión $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es una forma abreviada de expresar la unión $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.
- El símbolo "$\cap$" denota *intersección de conjuntos*, de modo que "$a \in A \cap B$" es una expresión que significa que "$a \in A$ y $a \in B$". La expresión $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es una forma abreviada de expresar la intersección $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

- El símbolo "$\emptyset$" denota el *conjunto vacío*, es decir, el conjunto que no contiene elementos.
- El símbolo (cuantificador) "$\forall$" es una forma abreviada de escribir *para todo* o *para cualesquiera* de los elementos que vienen a continuación.
- El símbolo (cuantificador) "$\exists$" es una forma abreviada de escribir *existe*.
- La expresión "$A \subset B$" denota que el conjunto A *está contenido* en el conjunto B. La expresión "$A \not\subset B$" denota que el conjunto A *no está contenido* en el conjunto B.
- La expresión "$A \supset B$" denota que el conjunto A *contiene* al conjunto B. La expresión "$A \not\supset B$" denota que el conjunto A *no contiene* al conjunto B.
- El símbolo "$\sum$" denota *sumatorio* y se utiliza para expresar, de forma abreviada, sumas. Así, por ejemplo, la expresión $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} a_i$ es una manera abreviada de expresar $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ y, en general, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ es una forma abreviada de expresar la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $a_i \in \mathbb{R}$.
- Los símbolos $<$, $>$, $=$, $\leq$ y $\geq$ denotan, respectivamente, *menor que, mayor que, igual a, menor o igual que* y *mayor o igual que* cuando se comparan números reales. Por ejemplo, $x \leq 7$ denota que el número real x es *menor o igual que* 7.
- Los símbolos "$\simeq$" o "$\approx$" denotan *aproximadamente igual*.
- La expresión $0 < a \ll 1$ significa que a es un número positivo que es "muy pequeño" frente a 1.
- La expresión "∂P" denota el *grado* del polinomio $P(x)$.
- La expresión "$\dot{n}$" denota el conjunto formado por los múltiplos del número natural n.
- El símbolo $\square$ indica el final de una demostración o el final del enunciado de una definición, teorema, observación, ejemplo ...

Parte I

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

1 Introducción al número real

1.1. Introducción

En este capítulo se presentan los *números reales* como una generalización, sin entrar en detalles rigurosos, de los *números naturales*, *enteros*, *racionales* e *irracionales*. Se introducirá el concepto de *divisibilidad* de números naturales, su *factorización en números primos* y las nociones de *máximo común divisor* y *mínimo común múltiplo*. Esto servirá para calcular la *forma irreducible* de un número racional.

Se mostrarán también algunas de las propiedades de los tipos de números estudiados y las operaciones que se pueden hacer entre ellos. En particular, las *raíces* y las *potencias*. Además se introducirán los conjuntos de números que definen los *intervalos abiertos* y *cerrados*.

Éste es, sin duda, un capítulo que proporciona herramientas matemáticas básicas, como son los números y las operaciones que se pueden hacer con ellos, y es fundamental para el desarrollo de los siguientes capítulos.

1.2. Números naturales, enteros, racionales y primos

Definición 1.1 El conjunto de los *números naturales* es el formado por los "números de contar" y se representa

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}. \quad \square$$

Observación 1.1 Al sumar o multiplicar dos números naturales siempre se obtiene otro número natural. Esto no siempre ocurre al restarlos o dividirlos. Ejemplo:

$$5 + 7 = 12 \in \mathbb{N},\ 5 \times 7 = 35 \in \mathbb{N},\ 5 - 7 = -2 \notin \mathbb{N},\ \frac{5}{7} \notin \mathbb{N}. \quad \square$$

Ejemplo 1.1 Los números naturales sirven para "contar". Por ejemplo uno puede contar cuántas manzanas tiene (por ejemplo, 6) y restar las que se haya comido pasados unos días (por ejemplo, 4). Como siempre se va a comer menos manzanas de las que tenía, la resta efectuada $(6-4)$ siempre volverá a dar un número natural (2), que es el número de manzanas que nos quedan. □

Definición 1.2 Un número a elevado a la potencia $n \in \mathbb{N}$ es

$$a^n = a \times \overset{n)}{\cdots} \times a.$$

En esta definición a puede ser un número natural (es decir $a \in \mathbb{N}$) o de cualquier otro tipo de números de los que vamos a definir más adelante. □

Ejemplo 1.2 $5^2 = 5 \times 5 = 25$, $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. □

La división entre números naturales no siempre da como resultado un número natural, por lo que se define de una forma especial los casos en los que sí ocurre:

Definición 1.3 Un número natural $n \in \mathbb{N}$ es *divisible* por otro número natural $m \in \mathbb{N}$, y se denota $m|n$, cuando el cociente entre n y m (que expresamos como $\frac{n}{m}$) es un número natural. Es decir, cuando $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. En esta situación también se dice que m *divide a* n, m *es un divisor de* n o n *es un múltiplo de* m. □

Ejemplo 1.3 6 es divisible por 3, por lo que $3|6$. □

Ahora bien, ¿qué obtenemos cuando restamos dos números naturales?

Definición 1.4 El conjunto de los *números enteros* es el formado por los números naturales, sus opuestos (con el signo menos "$-$") y el cero, y se representa

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\}. \quad \square$$

A la vista del Ejemplo 1.1, parece que los números enteros son sólo un invento de los matemáticos que no tiene aplicación en la vida real. El siguiente ejemplo pone de manifiesto que esto no es cierto en absoluto.

Ejemplo 1.4 Los llamados "números rojos" de una cuenta bancaria indican que no sólo no tenemos dinero en esa cuenta, sino que debemos dinero al banco. Dicho de otra forma: tenemos un saldo negativo en nuestra cuenta. □

Observación 1.2 Al sumar, restar o multiplicar dos números enteros, siempre se obtiene otro número entero. Esto no siempre ocurre al dividirlos. Ejemplo:

$$3+4=7 \in \mathbb{Z},\ 3-4=-1 \in \mathbb{Z},\ \frac{6}{-3} = -2 \in \mathbb{Z},\ \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}. \quad \square$$

La pregunta que nos formulamos a continuación es: ¿qué obtenemos cuando dividimos dos números enteros?

Definición 1.5 El conjunto de los *números racionales* es el formado por los cocientes entre dos enteros que se denominan *numerador* (el de arriba) y *denominador* (el de abajo), siempre que el denominador sea no nulo. Se representa

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : \; m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

También suele emplearse la notación m/n para denotar al número racional $\frac{m}{n}$. □

Claramente, los números racionales contienen a los enteros (pues todo número entero $m \in \mathbb{Z}$ puede escribirse como $m = \frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$), pero ¿qué representan estos números racionales cuando el resultado no es un número entero?

Si dividimos una tarta en 3 partes iguales, cada parte es un tercio de la tarta. Utilizando los números racionales se dice: $\frac{1}{3}$ de tarta. Dos trozos de la tarta equivalen a dos tercios de tarta. Utilizando los números racionales se dice: $\frac{2}{3}$ de tarta. La tarta completa son tres tercios de tarta (o $\frac{3}{3}$ de tarta). Cuatro tercios de tarta ($\frac{4}{3}$) equivalen a una tarta entera más un tercio de otra, y así sucesivamente. Esto se puede generalizar a cualquier otro número racional. Por ejemplo, el número $\frac{m}{n}$ equivale, en este contexto de tartas, a dividir una tarta en n trozos iguales y coger m trozos de ellos (nótese que si $m > n$, se necesita más de una tarta).

El razonamiento que hemos hecho en términos de una tarta se puede hacer de la misma forma con cualquier otro objeto que sea susceptible de división, por ejemplo una regla de medir. Si un metro lo dividimos en 5 partes iguales, tenemos un quinto de un metro, o $\frac{1}{5}$ de metro. Puesto que 1 metro son 10 dm (decímetros) o 100 cm (centímetros), es fácil observar que $\frac{1}{5}$ de un metro es lo mismo que un $\frac{1}{5}$ de 10 dm o $\frac{1}{5}$ de 100 cm, que es también igual a $\frac{10}{5} = 2$ dm o $\frac{100}{5} = 20$ cm.

Observación 1.3 Es fácil observar que $\frac{1}{3}$ de tarta equivale a $\frac{2}{6}$ de tarta. Basta pensar en una tarta dividida en 6 partes y que al juntar los 6 trozos obtenidos de dos en dos se obtiene una división de la tarta en 3 trozos iguales. Lo que ocurre es que

$$\frac{2}{6} = \frac{2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{\cancel{2} \times 1}{\cancel{2} \times 3} = \frac{1}{3}. \quad \square$$

Hemos obtenido, por tanto, una forma sencilla de "simplificar" un número racional: si el numerador y denominador del número racional son divisibles por un número común, se pueden dividir ambos por ese número y se obtiene un número racional equivalente.

Ejemplo 1.5 $\dfrac{8}{4} = \dfrac{4}{2}, \dfrac{63}{36} = \dfrac{21}{12}.$ □

Con objeto de obtener el número racional equivalente con numerador y denominador más pequeños (*fracción irreducible*), se tienen que dividir el numerador y el denominador por el mayor de los números por el que ambos se puedan dividir (es decir, el mayor de sus divisores comunes, que se conoce como *máximo común divisor* de ambos números).

Ejemplo 1.6 La forma irreducible de los números racionales del Ejemplo 1.5 es

$$\frac{8}{4} = \frac{4 \times 2}{4 \times 1} = \frac{2}{1} = 2, \; \frac{63}{36} = \frac{9 \times 7}{9 \times 4} = \frac{7}{4}. \quad \square$$

Llegados a este punto, cabe preguntarse cómo se calcula el máximo común divisor de dos números enteros a y b cualesquiera $(\mathrm{mcd}(a, b))$.

Proposición 1.1 *Sean $a, b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ con $a > b$. Si hacemos la división entera de a entre b y escribimos*

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & c \end{array}$$

o, de forma equivalente,

$$a = cb + r,$$

donde $c \in \mathbb{N}$ es el cociente y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $r < b$, es el resto de la división, entonces se verifica que, si $r \neq 0$, el conjunto de divisores de a y b coincide con el conjunto de divisores de b y r y, por tanto,

$$\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(b, r).$$

Además, si $r = 0$ entonces $\mathrm{mcd}(a, b) = b$.

DEMOSTRACIÓN. Si A es el conjunto de divisores de a y b y B es el conjunto de divisores de b y r veamos que $A = B$ demostrando, en primer lugar, que $A \subset B$ y, en segundo lugar, que $B \subset A$:

1) Si $m \in A$ y, por tanto, m es un divisor de a y de b, existen $p \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} a = mp \\ b = mq \end{array} \right. \Rightarrow \; r = a - cb = m(p - cq) \; \Rightarrow \; m|r \; \Rightarrow \; m \in B.$$

2) Si $n \in B$ y, por tanto, n es un divisor de b y de r, existen $p \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} b = np \\ r = nq \end{array} \right. \Rightarrow \; a = cb + r = n(cp + q) \; \Rightarrow \; n|a \; \Rightarrow \; n \in A.$$

Consecuentemente, el máximo de los números del conjunto A, que es el $\mathrm{mcd}(a,b)$, coincide (por tratarse del mismo conjunto) con el máximo de los números del conjunto B, que es el $\mathrm{mcd}(b,r)$.

Por último, como cualquier divisor de a y b es menor o igual que b, se tiene que el $\mathrm{mcd}(a,b) \leq b$. Además, en el caso de que $r = 0$ se verifica que b es un divisor de a (y, obviamente, también de b) por lo que $b \leq \mathrm{mcd}(a,b)$; ambas desigualdades concluyen que, en este caso, $b = \mathrm{mcd}(a,b)$. $\square$

Ejemplo 1.7

a) Puesto que

$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

se verifica que $\mathrm{mcd}(8,4) = 4$.

b) Teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{r|l} 3468 & 468 \\ \cline{2-2} 192 & 7 \end{array}$$

se tiene que

$$\mathrm{mcd}(3468,468) = \mathrm{mcd}(468,192)$$

(véanse los Ejemplos 1.9 y 1.12). $\square$

Algoritmo de Euclides: Sean $a, b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ con $a > b$. Para calcular el $\mathrm{mcd}(a,b)$ en primer lugar, siguiendo el proceso visto en la Proposición 1.1, hacemos la división entera de a entre b y escribimos

$$a = c_0 b + r_1,$$

donde $c_0 \in \mathbb{N}$ y $r_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $r_1 < b$. En este punto, como se ha visto en la Proposición 1.1, hay dos posibilidades:

1) Si $r_1 = 0$, entonces $\mathrm{mcd}(a,b) = b$ y se ha terminado el cálculo.

2) En caso contrario, se verifica que $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(b,r_1)$ y repetimos el proceso anterior: hacemos la división entera de b entre r_1 y escribimos

$$b = c_1 r_1 + r_2,$$

donde $c_1 \in \mathbb{N}$ y $r_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $r_2 < r_1$. De nuevo, pueden presentarse dos casos:

a) Si $r_2 = 0$, entonces $\mathrm{mcd}(a,b) = r_1$, con lo que se termina el proceso.

b) En caso contrario, se tiene que $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(r_1,r_2)$ y volvemos a repetir el proceso anterior, y así sucesivamente.

Nótese que el proceso anterior acaba en un número finito de iteraciones, pues los restos que se van obteniendo están ordenados de forma que

$$r_1 > r_2 > \cdots \geq 0,$$

con lo que en alguna iteración $k \in \mathbb{N}$, con $k \leq b$, el resto será $r_k = 0$ y, por tanto, el máximo común divisor buscado será el último resto no nulo, es decir,

$$\mathrm{mcd}(a, b) = r_{k-1}.$$

Ejemplo 1.8 En el Ejemplo 1.7 se había mostrado que

$$\mathrm{mcd}(3468, 468) = \mathrm{mcd}(468, 192). \tag{1.1}$$

Continuando con el algoritmo de Euclides, como

$$\begin{array}{r|l} 468 & 192 \\ \cline{2-2} 84 & 2 \end{array} \Rightarrow \mathrm{mcd}(468, 192) = \mathrm{mcd}(192, 84). \tag{1.2}$$

Como

$$\begin{array}{r|l} 192 & 84 \\ \cline{2-2} 24 & 2 \end{array} \Rightarrow \mathrm{mcd}(192, 84) = \mathrm{mcd}(84, 24). \tag{1.3}$$

Puesto que

$$\begin{array}{r|l} 84 & 24 \\ \cline{2-2} 12 & 3 \end{array} \Rightarrow \mathrm{mcd}(84, 24) = \mathrm{mcd}(24, 12). \tag{1.4}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{r|l} 24 & 12 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \Rightarrow \mathrm{mcd}(84, 24) = \mathrm{mcd}(24, 12) = 12. \tag{1.5}$$

Consecuentemente, las relaciones (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) y (1.5) determinan que

$$\mathrm{mcd}(3468, 468) = 12.$$

Una vez visto en detalle el proceso, una forma más rápida de presentarlo y visualizarlo es la siguiente:

$$\begin{array}{rcl} 3468 & = & 7 \times 468 + 192 \\ 468 & = & 2 \times 192 + 84 \\ 192 & = & 2 \times 84 + 24 \\ 84 & = & 3 \times 24 + \boxed{12} \\ 24 & = & 2 \times 12 + 0. \end{array}$$

El máximo común divisor buscado es el último resto no nulo de la tabla anterior, es decir,

$$\mathrm{mcd}(3468, 468) = 12. \quad \square$$

Ejemplo 1.9 Veamos cómo calcular la forma irreducible de $\frac{3468}{468}$. Como se ha visto en el Ejemplo 1.8, se verifica que

$$\operatorname{mcd}(3468, 468) = 12,$$

de donde se obtiene que

$$\frac{3468}{468} = \frac{\frac{3468}{12}}{\frac{468}{12}} = \frac{289}{39}. \quad \square$$

Definición 1.6 Un número natural $n \in \mathbb{N}$ es *primo* cuando sólo es divisible por n y por la unidad. Los números naturales mayores que 1 que no son primos se denominan *compuestos*. $\square$

Observación 1.4 Como, por convenio, el número 1 no se considera primo, los primeros números primos son $2, 3, 5, 7, 11, 13\ldots$ $\square$

Una forma alternativa de obtener el máximo común divisor de dos números naturales (que, en ciertas ocasiones, puede ser más rápida) es utilizar la descomposición de los números como producto de factores primos basada en el *teorema Fundamental de la Aritmética* (véase el Teorema 1.2). Para poder demostrar dicho teorema necesitamos unos resultados previos que vemos a continuación.

Proposición 1.2 (Identidad de Bézout) *Para todo $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$ se verifica que existen $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}$ tales que*

$$\operatorname{mcd}(a, b) = pa + qb.$$

DEMOSTRACIÓN. Con la notación utilizada en el *algoritmo de Euclides* visto anteriormente, se tiene que

$$\begin{cases}
a = bc_0 + r_1 & \Rightarrow \quad r_1 = a - bc_0 = \alpha_1 a + \beta_1 b \ \text{ con } \ \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Z} \\[1em]
b = r_1 c_1 + r_2 & \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_2 &= b - r_1 c_1 = b - (\alpha_1 a + \beta_1 b) c_1 \\ &= \alpha_2 a + \beta_2 b \ \text{ con } \ \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned} \\[1em]
r_1 = r_2 c_2 + r_3 & \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_3 &= r_1 - r_2 c_2 = (\alpha_1 a + \beta_1 b) - \big(\alpha_2 a + \beta_2 b\big) c_2 \\ &= \alpha_3 a + \beta_3 b \ \text{ con } \ \alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{Z} \end{aligned} \\
\ldots & \\
r_{k-3} = r_{k-2} c_{k-2} + r_{k-1} & \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_{k-1} &= r_{k-3} - r_{k-2} c_{k-2} \\ &= \alpha_{k-1} a + \beta_{k-1} b \ \text{ con } \ \alpha_{k-1}, \beta_{k-1} \in \mathbb{Z} \end{aligned} \\[1em]
r_{k-2} = r_{k-1} c_{k-1} &
\end{cases}$$

y, por tanto,

$$\operatorname{mcd}(a, b) = r_{k-1} = pa + qb \ \text{ con } \ p = \alpha_{k-1} \ \text{ y } \ q = \beta_{k-1} \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Observación 1.5 Dados $a, b \in \mathbb{N}$ hemos probado la existencia de dos números $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $\operatorname{mcd}(a, b) = pa + qb$, pero estos números no son únicos. Por ejemplo,

$$1 = \operatorname{mcd}(2, 3) = -2 + 3 = 2 \times 2 - 3.$$

En particular, todas las parejas de la forma

$$(r, s) = (p + \alpha b, q - \alpha a) \;\text{ con }\; \alpha \in \mathbb{Z}$$

verifican que

$$\operatorname{mcd}(a, b) = ra + sb. \tag{1.6}$$

Puede demostrarse que el conjunto de todas las parejas $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen la propiedad (1.6) es

$$\left\{ \left(p + k\,\frac{b}{\operatorname{mcd}(a, b)}, q - k\,\frac{a}{\operatorname{mcd}(a, b)} \right) :\; k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad \square$$

Definición 1.7 Dos números $p, q \in \mathbb{Z}$ son *primos entre sí* (también se les llama *coprimos* o *relativamente primos*) si $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$. $\square$

Teorema 1.1 (Bézout) *Para todo $a, b \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$a \text{ y } b \text{ son primos entre sí } \;\Leftrightarrow\; \exists\, p, q \in \mathbb{Z} \;\text{ tales que }\; 1 = pa + qb.$$

DEMOSTRACIÓN.

$\boxed{\Rightarrow}$ Es consecuencia inmediata de la Proposición 1.2.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = pa + qb$ y que a y b no son primos entre sí. Veamos que se llega a una contradicción. En efecto, como $\operatorname{mcd}(p, q) \neq 1$, se verifica que existe $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ tal que

$$n|a \;\text{ y }\; n|b.$$

Esta propiedad, junto con la hipótesis de que $1 = pa + qb$, determinan que

$$\frac{1}{n} = p\,\frac{a}{n} + q\,\frac{b}{n} \in \mathbb{Z},$$

lo cual no es posible, pues $\frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$. $\square$

Lema 1.1 (Lema de Euclides) *Sean $a, b, p, q \in \mathbb{N}$.*

a) Si $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$ *y* $q|pa \;\Rightarrow\; q|a$.

b) Si p es un número primo y $p|ab \;\Rightarrow\; p|a$ o $p|b$.

DEMOSTRACIÓN.

a) Por la *identidad de Bézout* se verifica que existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que

$$1 = np + mq \;\Rightarrow\; a = npa + mqa.$$

Consecuentemente, como $q|pa$, se verifica que

$$\frac{a}{q} = n\,\frac{pa}{q} + ma \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; q|a.$$

b) Como p es primo se tiene que el $\operatorname{mcd}(p,a)$ sólo puede ser 1 o p:

i) Si $\operatorname{mcd}(p,a) = p \;\Rightarrow\; p|a$.

ii) Si $\operatorname{mcd}(p,a) = 1$ entonces, como $p|ab$, por el apartado a) se verifica que $p|b$. □

Basándose en el *lema de Euclides* puede demostrarse (no lo hacemos aquí por simplicidad de la exposición, pero se puede probar de forma sencilla por inducción) la siguiente versión generalizada del lema anterior:

Lema 1.2 (Lema de Euclides generalizado) *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ y p un número primo. Si p es divisor del producto $a_1 a_2 \cdots a_n$ se verifica que existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $p|a_j$.* □

Corolario 1.1 *Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y $q_1, q_2, \ldots, q_m$ son números primos tales que*

$$p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m,$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se verifica que existe $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $p_i = q_j$ y, por tanto, $m = n$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por el *lema de Euclides generalizado*, como $p_i | q_1 q_2 \cdots q_m$, se verifica que existe $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $p_i | q_j$. Ahora bien, como q_j es primo, sólo es divisible por 1 y por él mismo, por lo que, al ser $p_i \neq 1$, se concluye que $p_i = q_j$. A partir de este hecho se deduce, de forma evidente, que m y n son iguales. □

Definición 1.8 La *factorización en números primos* de un número natural consiste en expresar éste como producto de potencias de números primos. □

Ejemplo 1.10 $75 = 3 \times 25 = 3 \times 5^2$, $300 = 3 \times 100 = 3 \times 4 \times 25 = 3 \times 2^2 \times 5^2$, $5544 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11$, $2057 = 11^2 \times 17$. □

Observación 1.6 Una manera sencilla de hallar la factorización en números primos de un numero natural consiste en ir dividiendo por el número primo más pequeño que se pueda, de forma sucesiva, hasta que se obtenga el número 1. Por ejemplo, para el número 924, mostramos a continuación, de manera esquemática, cómo se llevaría a cabo este proceso:

$$\begin{array}{r|r} 924 & 2 \\ 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

lo que nos permite escribir que $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$. □

Teorema 1.2 (Teorema Fundamental de la Aritmética) *Cualquier número natural mayor que* 1 *puede descomponerse como producto de factores primos de forma única, salvo el orden de dichos factores.*

DEMOSTRACIÓN.

1) Cualquier número natural puede descomponerse como producto de factores primos. En efecto, si esto no fuera cierto, existiría un mínimo número natural $m > 1$ que no puede descomponerse como producto de números primos; este número m no puede ser un primo, porque todo primo se puede descomponer de forma obvia como el producto de un único número primo: él mismo. Así pues, $m = ab$, donde a y b son números naturales mayores que 1 y menores que m. Como m es el mínimo número natural para el que falla el teorema, tanto a como b pueden escribirse como producto de primos. Pero entonces el número $m = ab$ también puede escribirse como producto de primos, lo que es una contradicción.

2) La descomposición como producto de factores primos es única, salvo el orden de dichos factores. En efecto, supongamos que tenemos dos factorizaciones de un número natural $a > 1$

$$p_1 p_2 \cdots p_n = a = q_1 q_2 \cdots q_m,$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y $q_1, q_2, \ldots, q_m$ son números primos. Entonces, por el Corolario 1.1, se tiene que $m = n$ y que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $p_i = q_j$, lo que concluye la demostración. □

Observación 1.7 El *teorema Fundamental de la Aritmética* pone de manifiesto la importancia que tienen los números primos, en el sentido de que los demás números naturales se pueden escribir como producto de números primos de forma única, salvo el orden de éstos. Resulta, así, de gran ayuda a la hora de calcular los divisores de un número natural (véase el Problema 1.6). □

Teorema 1.3 (Euclides) *Hay infinitos números primos.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que si $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ es un conjunto finito de números primos entonces existe otro número primo que no está en dicho conjunto. Sea P el producto de todos los números primos del conjunto anterior, es decir, $P = p_1 p_2 \cdots p_n$, y sea $q = P + 1$. Pueden presentarse dos casos:

1) Si q es primo, entonces q es un primo tal que $q \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

2) Si q no es primo, entonces, por el *teorema Fundamental de la Aritmética*, existe algún primo p que divide a q. En el caso de que p fuera uno de los primos del conjunto $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, se tendría que p dividiría (obviamente) a P a $q = P + 1$ y, por tanto, también a su diferencia $(P + 1) - P = 1$; puesto que ningún primo divide a 1, se concluye que p es un primo tal que $p \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. $\square$

Proposición 1.3 *Dados $a, b, d \in \mathbb{N}$ se verifica que $d = \operatorname{mcd}(a, b)$ si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

1) d es divisor de a y de b.

2) Si $n \in \mathbb{N}$ es divisor de a y de b entonces n es divisor de d.

DEMOSTRACIÓN.

$\boxed{\Leftarrow}$ Las dos condiciones anteriores implican que d es el mayor de todos los divisores de a y b y, por tanto, $d = \operatorname{mcd}(a, b)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $d = \operatorname{mcd}(a, b)$ entonces d es, obviamente, un divisor de a y de b. Por tanto, por la Proposición 1.2, se verifica que existen $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}$ tales que $d = pa + qb$. De esta forma, si $n \in \mathbb{N}$ es divisor de a y de b, se verifica que

$$\frac{d}{n} = p\,\frac{a}{n} + q\,\frac{b}{n} \in \mathbb{Z},$$

de donde se concluye que n es divisor de d. $\square$

Observación 1.8 De acuerdo con la Proposición 1.3, una forma alternativa al algoritmo de Euclides para calcular el $\operatorname{mcd}(a, b)$ es la siguiente: en primer lugar se hace la factorización de a y b en números primos:

$$a = 2^{i_2} \times 3^{i_3} \times 5^{i_5} \times 7^{i_7} \times \cdots \;\text{ y }\; b = 2^{j_2} \times 3^{j_3} \times 5^{j_5} \times 7^{j_7} \times \cdots$$

El $\operatorname{mcd}(a, b)$ se obtiene como el producto de los factores comunes elevados al menor exponente. Es decir,

$$\operatorname{mcd}(a, b) = 2^{\text{mín}\{i_2, j_2\}} \times 3^{\text{mín}\{i_3, j_3\}} \times 5^{\text{mín}\{i_5, j_5\}} \times 7^{\text{mín}\{i_7, j_7\}} \times \cdots$$

De manera análoga se puede calcular el máximo común divisor de varios números (simplemente habrá que hacer el mínimo de tantos exponentes como números tengamos). $\square$

Ejemplo 1.11 Para hallar el $\operatorname{mcd}(56, 196, 70)$ hacemos la factorización de 56, 196 y 70 en números primos:

$$56 = 2^3 \times 7,\; 196 = 2^2 \times 7^2 \;\text{ y }\; 70 = 2 \times 5 \times 7.$$

Entonces (nótese que $n = n^1$ y que, tal y como veremos en la Definición 1.19 y en la Observación 1.34, $n^0 = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$):

$$\mathrm{mcd}(56, 196, 70) = 2^{\mathrm{mín}\{3,2,1\}} \times 5^{\mathrm{mín}\{0,0,1\}} \times 7^{\mathrm{mín}\{1,2,1\}} = 2^1 \times 5^0 \times 7^1 = 14.$$

Por tanto, 14 es el mayor entero por el que se puede dividir 56, 196 y 70. □

Ejemplo 1.12 Una forma de calcular el $\mathrm{mcd}(3468, 468)$, alterrnativa a la utilizada en el Ejemplo 1.8, es la siguiente: a partir de las tablas

$$\begin{array}{r|r} 3468 & 2 \\ 1734 & 2 \\ 867 & 3 \\ 289 & 17 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{r|r} 468 & 2 \\ 234 & 2 \\ 117 & 3 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

se obtiene que

$$3468 = 2^2 \times 3 \times 17^2 \ \text{ y } \ 468 = 2^2 \times 3^2 \times 13,$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \mathrm{mcd}(3468, 468) &= 2^{\mathrm{mín}\{2,2\}} \times 3^{\mathrm{mín}\{1,2\}} \times 13^{\mathrm{mín}\{0,1\}} \times 17^{\mathrm{mín}\{2,0\}} \\ &= 2^2 \times 3^1 \times 13^0 \times 17^0 = 12. \quad \square \end{aligned}$$

La descomposición en factores primos de un número con un factor primo muy grande puede ser muy engorrosa y lenta (se puede intentar, a modo de ejemplo, calcular la factorización en números primos del número 54991, que utilizaremos en el Problema 1.3). Esta dificultad es utilizada en la actualidad en métodos de encriptación, en particular para los pagos electrónicos seguros.

Es por eso por lo que, cuando uno de los números $m, n \in \mathbb{Z}$ tiene como factor un número primo grande, el método mostrado anteriormente para calcular el $\mathrm{mcd}(m, n)$ mediante la factorización en números primos no es viable, por lo que se suele recurrir a alternativas mucho más rápidas y de fácil implementación, como el *algoritmo de Euclides*.

Observación 1.9 Dos *números racionales* son *iguales* si su forma irreducible coincide. □

Ejemplo 1.13 Los números racionales $\frac{765}{228}$ y $\frac{1275}{380}$ son iguales, pues tienen la misma forma irreducible $\frac{255}{76}$. En efecto, basta observar que

$$\frac{765}{228} = \frac{3^2 \times 5 \times 17}{2^2 \times 3 \times 19} = \frac{3 \times 5 \times 17}{2^2 \times 3 \times 19} = \frac{255}{76}$$

y

$$\frac{1275}{380} = \frac{3 \times 5^2 \times 17}{2^2 \times 19} = \frac{3 \times 5 \times 17}{2^2 \times 3 \times 19} = \frac{255}{76}. \quad \square$$

Ahora bien, ¿cómo se suman o restan los números racionales? Pensemos de nuevo en la tarta. Supongamos que tenemos que sumar $\frac{1}{3}$ de la tarta con $\frac{2}{5}$ de la tarta. Lo más sencillo es dividir la tarta en un número de porciones que sea múltiplo de ambos denominadores. Por ejemplo dividir la tarta en $3 \times 5 = 15$ porciones. De esta forma,

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5 \times 1}{5 \times 3} + \frac{3 \times 2}{3 \times 5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}.$$

Observación 1.10 Según lo anterior, una manera simple de sumar o restar números racionales es la siguiente:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{q \times m}{q \times n} + \frac{n \times p}{n \times q} = \frac{q \times m + n \times p}{n \times q}$$

y

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{q \times m}{q \times n} - \frac{n \times p}{n \times q} = \frac{q \times m - n \times p}{n \times q}.$$

Esto último nos indica que dos *números racionales* $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ son *iguales* si

$$m \times q = n \times p$$

(compárese esto con lo dicho en la Observación 1.9). $\square$

Ejemplo 1.14 Los números racionales $\frac{765}{228}$ y $\frac{1275}{380}$ considerados en el Ejemplo 1.13 son iguales, dado que se verifica que

$$765 \times 380 = 290700 = 228 \times 1275. \quad \square$$

Una forma alternativa de sumar y restar números racionales $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ a la contemplada en la Observación 1.10 consiste en utilizar en el denominador el múltiplo común a los denominadores n y q que sea más pequeño, también conocido como *mínimo común múltiplo* de n y q, que se suele denotar como $\operatorname{mcm}(n, q)$.

Ejemplo 1.15 Para calcular la diferencia

$$\frac{5}{4} - \frac{3}{2},$$

dado que es evidente que $\operatorname{mcm}(4, 2) = 4$, se escribe cada número de la resta como un número con denominador igual a 4, de la siguiente forma:

$$\frac{5}{4} - \frac{3}{2} = \frac{5}{4} - \frac{2 \times 3}{2 \times 2} = -\frac{1}{4}$$

(nótese la diferencia de este método con el de la Observación 1.10). $\square$

¿Cómo se calcula, en general, el mínimo común múltiplo de dos números enteros a y b cualesquiera ($\mathrm{mcm}(a,b)$)?

Proposición 1.4 *Dados $a, b, m \in \mathbb{N}$ se verifica que $m = \mathrm{mcm}(a,b)$ si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

1) m es múltiplo de a y de b.

2) Si $n \in \mathbb{N}$ es múltiplo de a y de b entonces n es múltiplo de m.

DEMOSTRACIÓN.

$\boxed{\Leftarrow}$ Las dos condiciones anteriores implican que m es el más pequeño de todos los múltiplos de a y b y, por tanto, $m = \mathrm{mcm}(a,b)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $m = \mathrm{mcm}(a,b)$ entonces m es, obviamente, un múltiplo de a y de b. Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ es múltiplo de a y de b veamos que $m|n$. En efecto, por hipótesis, existen $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{cases} m = a\alpha,\ m = b\beta \text{ y } \mathrm{mcd}(\alpha,\beta) = 1 \\ n = a\alpha',\ n = b\beta', \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a\alpha}{b\beta} = \dfrac{a\alpha'}{b\beta'} \\ \mathrm{mcd}(\alpha,\beta) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta' = \alpha'\beta \\ \mathrm{mcd}(\alpha,\beta) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta'}{\beta} = \alpha' \in \mathbb{N} \\ \mathrm{mcd}(\alpha,\beta) = 1. \end{cases}$$

De esta forma, por el *lema de Euclides*, se tiene que $\beta|\beta'$ y, por tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\beta' = k\beta$. Consecuentemente

$$n = \beta' b = k\beta b = km,$$

de donde se concluye que $m|n$. $\square$

Observación 1.11 De acuerdo con la Proposición 1.4, una forma de calcular el $\mathrm{mcm}(a,b)$ es la siguiente: en primer lugar se hace la descomposición de a y b en producto de potencias de números primos

$$a = 2^{i_2} \times 3^{i_3} \times 5^{i_5} \times 7^{i_7} \times \cdots \text{ y } b = 2^{j_2} \times 3^{j_3} \times 5^{j_5} \times 7^{j_7} \times \cdots$$

El $\mathrm{mcm}(a,b)$ se obtiene como el producto de todos los factores (comunes y no comunes) elevados a su mayor exponente. Es decir,

$$\mathrm{mcm}(a,b) = 2^{\text{máx}\{i_2,j_2\}} \times 3^{\text{máx}\{i_3,j_3\}} \times 5^{\text{máx}\{i_5,j_5\}} \times 7^{\text{máx}\{i_7,j_7\}} \times \cdots$$

De manera análoga se puede calcular el mínimo común múltiplo de varios números (simplemente habrá que hacer el máximo de tantos exponentes como números tengamos). $\square$

Ejemplo 1.16 Para hallar el $\mathrm{mcm}(56, 196, 70)$ hacemos la factorización de 56, 196 y 70 en números primos:

$$56 = 2^3 \times 7,\ 196 = 2^2 \times 7^2 \ \text{ y } \ 70 = 2 \times 5 \times 7.$$

Entonces (nótese que $n = n^1$ y que, tal y como veremos en la Definición 1.19 y en la Observación 1.34, $n^0 = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$):

$$\mathrm{mcm}(56, 196, 70) = 2^{\text{máx}\{3,2,1\}} \times 5^{\text{máx}\{0,0,1\}} \times 7^{\text{máx}\{1,2,1\}} = 2^3 \times 5^1 \times 7^2 = 1960.$$

Por tanto, 1960 es el menor número natural que es múltiplo de 56, 196 y 70. $\square$

Al igual que sucedía con el máximo común divisor, la aplicación de este método de cálculo no siempre es conveniente, pues necesita realizar la descomposición en números primos, que, a veces, puede ser lenta y engorrosa. Para obtener un método de cálculo alternativo usaremos el siguiente resultado:

Proposición 1.5 *Dados dos números naturales a y b, se verifica que*

$$ab = \mathrm{mcd}(a, b)\,\mathrm{mcm}(a, b). \tag{1.7}$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con lo visto en las Observaciones 1.8 y 1.11, si

$$a = 2^{i_2} \times 3^{i_3} \times 5^{i_5} \times 7^{i_7} \times \cdots \ \text{ y } \ b = 2^{j_2} \times 3^{j_3} \times 5^{j_5} \times 7^{j_7} \times \cdots$$

son, respectivamente, las factorizaciones de a y b en números primos, se verifica que

$$\begin{aligned}
ab &= 2^{\text{mín}\{i_2,j_2\}+\text{máx}\{i_2,j_2\}} \times 3^{\text{mín}\{i_3,j_3\}+\text{máx}\{i_3,j_3\}} \times 5^{\text{mín}\{i_5,j_5\}+\text{máx}\{i_5,j_5\}} \times \cdots \\
&= 2^{\text{mín}\{i_2,j_2\}} 2^{\text{máx}\{i_2,j_2\}} \times 3^{\text{mín}\{i_3,j_3\}} 3^{\text{máx}\{i_3,j_3\}} \times 5^{\text{mín}\{i_5,j_5\}} 5^{\text{máx}\{i_5,j_5\}} \times \cdots \\
&= \left(2^{\text{mín}\{i_2,j_2\}} \times 3^{\text{mín}\{i_3,j_3\}} \times 5^{\text{mín}\{i_5,j_5\}} \times 7^{\text{mín}\{i_7,j_7\}} \times \cdots\right) \\
&\quad \times \left(2^{\text{máx}\{i_2,j_2\}} \times 3^{\text{máx}\{i_3,j_3\}} \times 5^{\text{máx}\{i_5,j_5\}} \times 7^{\text{máx}\{i_7,j_7\}} \times \cdots\right) \\
&= \mathrm{mcd}(a, b)\,\mathrm{mcm}(a, b). \quad \square
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la Proposición 1.5, una forma alternativa de calcular el mínimo común múltiplo de dos números consiste en hallar su máximo común divisor usando el *algoritmo de Euclides* y en utilizar la fórmula (1.7).

Ejemplo 1.17 A partir del Ejemplo 1.8 se deduce que

$$\mathrm{mcm}(3468, 468) = \frac{3468 \times 468}{\mathrm{mcd}(3468, 468)} = \frac{3468 \times 468}{12} = 289 \times 468 = 135252.$$

De esta forma, podemos sumar fracciones con estos denominadores. Así, por ejemplo, teniendo en cuenta que

$$135252 = 3468 \times 39 \ \text{ y } \ 135252 = 468 \times 289,$$

se verifica que

$$\frac{34}{3468} + \frac{21}{468} = \frac{34 \times 39}{3468 \times 39} + \frac{21 \times 289}{468 \times 289} = \frac{1326}{135252} + \frac{6069}{135252} = \frac{7395}{135252} = \frac{145}{2652}. \quad \square$$

La multiplicación y división de números racionales siguen reglas de muy sencilla aplicación:

$$\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{m \times p}{n \times q}$$

y

$$\frac{m}{n} \div \frac{p}{q} = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}} = \frac{m}{n} \times \frac{q}{p} = \frac{m \times q}{n \times p}.$$

Observación 1.12 La suma, resta, multiplicación y división de números racionales (excepto la división por cero) son un número racional. Ejemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{5} = \frac{3 \times 5 + 4 \times 7}{4 \times 5} = \frac{43}{20}, \ \frac{3}{4} - \frac{7}{5} = \frac{3 \times 5 - 4 \times 7}{4 \times 5} = -\frac{13}{20},$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{21}{20}, \ \frac{3}{4} \div \frac{7}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}. \quad \square$$

Observación 1.13 Un número racional siempre puede expresarse, al hacer la división, mediante un número decimal con un número finito o infinito de cifras. En el último caso, las cifras decimales son periódicas. Así, por ejemplo

$$\frac{1}{8} = 0'125, \ \frac{1}{3} = 0'333333\ldots = 0'\overset{\frown}{3}.$$

Recíprocamente, todo número decimal con una cantidad finita o infinita periódica de cifras decimales puede expresarse como un número racional. Así, por ejemplo:

a) $x = 15'75$ (número *decimal no periódico*). Claramente,

$$x = \frac{1575}{100} = \frac{63}{4}.$$

b) $x = 3'\overset{\frown}{48}$ (número *decimal periódico puro*). Si multiplicamos x por 100 y restamos x, obtenemos

$$99x = 100x - x = 348'\overset{\frown}{48} - 3'\overset{\frown}{48} = 345 \Rightarrow x = \frac{345}{99} = \frac{115}{33}.$$

c) $x = 2'7\widehat{82}$ (número *decimal periódico mixto*). Argumentando como en b), se tiene

$$2'7\widehat{82} = \frac{27'\widehat{82}}{10} = \frac{\frac{2755}{99}}{10} = \frac{2755}{990} = \frac{551}{198}. \quad \square$$

Observación 1.14 En general debe prescindirse de los números racionales que tienen a 9 como periodo, puesto que éstos admiten otra representación decimal equivalente. Así, por ejemplo, $0'\widehat{9} = 1$. $\square$

Observación 1.15 El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales:

a) Está *totalmente ordenado* respecto de la operación $\leq$, es decir, dados dos números racionales arbitrarios $a, b \in \mathbb{Q}$, se verifica que

$$a \leq b \text{ o } b \leq a.$$

Si hacemos una representación gráfica, $a \leq b$ significa que a es más pequeño que b (y se representa a a la izquierda de b) o coincide con b (en cuyo caso a y b se representan en la misma posición). Además, la relación de orden $\leq$ es compatible con las operaciones de suma y producto de números racionales, es decir, para cada terna de números racionales $a, b, c \in \mathbb{Q}$ se verifica:

i) $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$.

ii) $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$, supuesto $c > 0$.

b) Verifica la *propiedad arquimediana*: si $a, b \in \mathbb{Q}$ con $0 < a < b$ se verifica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$. Ejemplo: si $a = \frac{1}{10}$ y $b = 1000000$, basta tomar $n > 10000000$.

c) Es un conjunto *denso*, es decir, entre dos números racionales existe siempre un número racional. En efecto, si $a, b \in \mathbb{Q}$ y $a < b$, siempre se verifica que

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

donde la *media aritmética* de los números racionales a y b verifica que $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$. $\square$

1.3. Números irracionales. Números reales

Con el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales aparentemente nos podríamos dar ya por satisfechos. No obstante, si imaginamos todos los números racionales representados sobre la recta numérica, encontramos "huecos", es decir, existen números (como $\sqrt{2}$) que no corresponden con ningún número racional.

Proposición 1.6 $\sqrt{2}$ *no es un número racional.*

La afirmación que aparece en la Proposición 1.6 podría ser falsa. Es necesario, por tanto, demostrar su veracidad. Hay muchas técnicas para probar distintas afirmaciones o resultados matemáticos. Nosotros utilizaremos, en este caso, la técnica que se conoce como *reducción al absurdo*, que consiste en probar que si no se cumple el resultado que se quiere probar, entonces se llega a un resultado falso (o absurdo), por lo que se concluye que la afirmación o resultado que se quería demostrar es cierto.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 1.6. Argumentamos por reducción al absurdo. Si $\sqrt{2}$ fuera un número racional, podríamos expresarlo como

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \text{ (fracción irreducible).} \tag{1.8}$$

Nuestro objetivo es deducir, a partir de la igualdad (1.8), algo que sea falso. Ahora bien, a partir de (1.8), puesto que los números que aparecen en cada lado de la igualdad son iguales, seguirán siendo iguales si los elevamos al cuadrado, de donde se deduce que

$$m^2 = 2n^2. \tag{1.9}$$

Como, por hipótesis, $\frac{m}{n}$ es una fracción irreducible, al menos uno de ellos es impar, pues en otro caso los dos se podrían dividir por 2 y entonces la fracción no sería irreducible. Pueden presentarse, por tanto, dos casos:

a) Si m es impar, entonces m^2 es también impar, lo que contradice (1.9).

b) Si m es par, entonces n es impar. Luego $m = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y, por tanto, de la relación (1.9) se deduce que

$$2n^2 = m^2 = 4k^2 \;\Rightarrow\; n^2 = 2k^2,$$

lo que implica que n tiene que ser par, obteniéndose así una contradicción. $\square$

Esta nueva clase de números, como $\sqrt{2}$, son los *números irracionales*.

Definición 1.9 El conjunto de los *números irracionales* es el formado por los números con infinitas cifras decimales no periódicas, y se representa por $\mathbb{I}$. $\square$

Ejemplo 1.18 $\sqrt{2} = 1'414213562373095\ldots \in \mathbb{I}$, $\pi = 3'141592653589793\ldots \in \mathbb{I}$, $e = 2'718281828459046\ldots \in \mathbb{I}$. $\square$

Ejemplo 1.19 Como extensión de la Proposición 1.6, en general, para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\sqrt{n}$ es entero o irracional. Así, por ejemplo,

$$\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Z} \text{ pero } \sqrt{7} = 2'645751311064591\ldots \in \mathbb{I}. \quad \square$$

Definición 1.10 El conjunto de los *números reales* es el formado por los números racionales e irracionales y se representa por $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. $\square$

Observación 1.16 El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es, por tanto, el formado por todos los números decimales: los decimales finitos o periódicos se corresponden con los números racionales, y los decimales infinitos no periódicos, con los números irracionales. $\square$

Observación 1.17 El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales cumple las siguientes propiedades: para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se verifica:

a) Axiomas de la suma:

  1) Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$.
  2) Propiedad asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
  3) Existencia de elemento neutro, 0, tal que $a + 0 = 0 + a = a$.
  4) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ existe su elemento opuesto, $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

b) Axiomas de la multiplicación:

  1) Propiedad conmutativa: $a \times b = b \times a$.
  2) Propiedad asociativa: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
  3) Existencia de elemento neutro, 1, tal que $a \times 1 = 1 \times a = a$.
  4) $\forall\, a \neq 0$ existe su elemento inverso, $\frac{1}{a}$, tal que $a \times \frac{1}{a} = 1$.
  5) Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma: $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

c) Axiomas de orden:

  1) Propiedad reflexiva: $a \leq a$.
  2) Propiedad simétrica: $a \leq b$ y $b \leq a \;\Rightarrow\; a = b$.
  3) Propiedad transitiva: $a \leq b$ y $b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c$.
  4) Orden total: $a, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; a \leq b$ o $b \leq a$.
  5) Compatibilidad del orden con la suma: $a \leq b \;\Leftrightarrow\; a + c \leq b + c$.
  6) Compatibilidad del orden con el producto: $a \leq b \;\Leftrightarrow\; a \times c \leq b \times c,\ \forall\, c > 0$.
  7) Propiedad arquimediana: si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $0 < a < b \;\Rightarrow\; \exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

d) Axioma de completitud (o axioma del supremo): todo conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente tiene *supremo* (es decir, el supremo, que es la mínima cota superior, pertenece al conjunto). $\square$

Observación 1.18 El conjunto $\mathbb{R}$ se diferencia del conjunto $\mathbb{Q}$ por la *completitud*: la recta real es "completa" mientras que la recta racional no lo es (es decir, los números reales "llenan" la recta real o, dicho de otra forma, en la recta real "no hay huecos"). Para ver que el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales no cumple el axioma de completitud basta considerar el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q} :\ x^2 < 2\},$$

que es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ no vacío (por ejemplo, $1 \in A$), está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$ (por ejemplo, $3 \in \mathbb{Q}$ es una cota superior de A, pues se verifica que $x \leq 3$ para todo $x \in A$) pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$ (pues el supremo de A es $\sqrt{2}$ y, como se ha visto en la Proposición 1.6, se verifica que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). $\square$

Definición 1.11 Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

a) *Restar* al número a el número b consiste en sumar a a el opuesto de b, es decir,

$$a - b = a + (-b).$$

b) *Dividir* el número a entre el número $b \neq 0$ consiste en multiplicar a por el inverso de b, es decir,

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}. \quad \square$$

Observación 1.19 Algunas consecuencias de los axiomas de la Observación 1.17:

a) Los elementos que intervienen en una suma o en un producto pueden agruparse en cualquier orden. Ejemplo: para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\begin{aligned} [(a+b)+c]+d &= a+[(b+c)+d] = (a+b)+(c+d) \\ &= a+(b+c)+d = a+b+c+d \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [(a \times b) \times c] \times d &= a \times [(b \times c) \times d] = (a \times b) \times (c \times d) \\ &= a \times (b \times c) \times d = a \times b \times c \times d. \end{aligned}$$

b) $a = b \ \Leftrightarrow \ a + c = b + c,\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

c) $a = b \ \Leftrightarrow \ a \times c = b \times c,\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R},\ \forall\, c \neq 0$.

d) El elemento neutro de la suma y del producto es único.

e) Los elementos opuesto e inverso son únicos.

f) $a \times 0 = 0,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$.

g) $a \times (-b) = -(a \times b)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

Definición 1.12 Sea $x \in \mathbb{R}$.

a) x es *positivo* si $x > 0$. El conjunto de números reales positivos se representa por

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}.$$

b) x es *negativo* si $x < 0$. El conjunto de números reales negativos se representa por

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : \ x < 0\}. \quad \square$$

Observación 1.20

a) El opuesto de un número positivo es negativo y el opuesto de un número negativo es positivo.

b) 0 no es un número positivo ni negativo.

c) $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

d) Si $a, b \in \mathbb{R}$ tienen el mismo signo (ya sea positivo o negativo), entonces $a \times b$ es positivo.

e) Si $a, b \in \mathbb{R}$ tienen signos opuestos, entonces $a \times b$ es negativo.

f) Si $a, b \in \mathbb{R}$, se verifica que: $a \times b \neq 0 \ \Leftrightarrow \ a \neq 0$ y $b \neq 0$.

g) $-(a + b) = -a - b$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

h) $-(a - b) = b - a$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

Observación 1.21 Cuando aparecen sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias, hay que tener en cuenta la siguiente regla de prioridad en el orden de las operaciones:

1) potencias,

2) multiplicaciones/divisiones y

3) sumas/restas. $\square$

Ejemplo 1.20 $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{32} = \dfrac{13}{32}$. $\square$

Definición 1.13 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$. Los conjuntos

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$$

se denominan *intervalos* de extremos a y b. Más concretamente, $[a, b]$ es un *intervalo cerrado* (se incluyen los extremos), (a, b) es un *intervalo abierto* (no se incluyen los extremos) y $[a, b)$, $(a, b]$ son *intervalos semiabiertos* (o *semicerrados*) (no se incluye uno de los extremos). $\square$

Observación 1.22 En la ordenación total de los números reales no hay un primer elemento ni un último. Por ello, vamos a completar el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con dos nuevos símbolos $+\infty$ y $-\infty$ que designaremos, respectivamente, *más infinito* y *menos infinito* y que tienen las siguientes propiedades:

a) $-\infty < x < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Estas desigualdades introducen un *orden total* en la *recta real ampliada*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \tag{1.10}$$

que completa el de $\mathbb{R}$. De esta forma, $-\infty$ y $+\infty$ son, respectivamente, el *extremo inferior* y el *extremo superior* del conjunto totalmente ordenado de los números reales.

b) $x + (+\infty) = +\infty$ y $x + (-\infty) = -\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} x(+\infty) = +\infty, \ x(-\infty) = -\infty & \text{si} \quad x > 0 \\ x(+\infty) = -\infty, \ x(-\infty) = +\infty & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$

d) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ y $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

e) $(+\infty)(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)(-\infty) = +\infty$ y $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$.

Con estos nuevos símbolos podemos ampliar las definiciones anteriores de intervalo. Así,

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}.$$

Nótese que $+\infty$ y $-\infty$ no son números reales, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ y $[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$. $\square$

Observación 1.23 Obsérvese que en la *recta real ampliada* $\overline{\mathbb{R}}$ definida en (1.10) ya no son operaciones ni la suma (no está definido $(+\infty) + (-\infty)$) ni la multiplicación (no está definido $0 \cdot \infty$ ni $\frac{\infty}{\infty}$). $\square$

Definición 1.14 El *valor absoluto* de un número real $x \in \mathbb{R}$ es el mayor de los números x y $-x$ y se representa por $|x|$, es decir,

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases} \quad \square$$

Ejemplo 1.21 $|5| = 5$ y $|-3| = -(-3) = 3$. $\square$

Observación 1.24 Nótese que el valor absoluto de un número real es siempre un número mayor o igual que cero. $\square$

Observación 1.25 (Propiedades del valor absoluto) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $r \in (0, +\infty)$ se verifican las siguientes propiedades:

a) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

b) $|a \times b| = |a| \times |b|$.

c) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (*Desigualdad triangular*).

d) $-|a| \leq a \leq |a|$.

e) $|a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$. $\square$

1.4. Radicales y potencias. Operaciones

Tal y como se ha visto en la Definición 1.2, recordamos que a elevado a la potencia n es

$$a^n = a \times \overset{n)}{\cdots} \times a, \; \forall\, a \in \mathbb{R}, \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Esta operación está claro cómo hacerla cuando a es un número racional, pero ¿cómo se hace cuando a es irraccional? Éstos son detalles sutiles que se escapan al carácter básico de este libro pero que conviene tener presentes (véase la Observación 1.38 para saber más sobre este asunto).

Proposición 1.7 $a^n \times a^m = a^{n+m}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que

$$a^n \times a^m = \left(a \times \overset{n)}{\cdots} \times a\right)\left(a \times \overset{m)}{\cdots} \times a\right) = a \times \overset{n+m)}{\cdots} \times a = a^{n+m}. \quad \square$$

Ejemplo 1.22 $2^3 \times 2^2 = 2^5 = 32$, $(-3)^4 \times (-3)^5 = (-3)^9 = -19683$. $\square$

Observación 1.26 Argumentando como en la demostración de la Proposición 1.7, fácilmente se comprueba que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$ se verifica que:

a) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

b) $(a^n)^m = a^{nm}$.

c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$. □

Ejemplo 1.23 $\dfrac{3^4}{3^3} = 3,\ (4^2)^5 = 4^{10} = 1048576,\ \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{5^2}{2^2} = \dfrac{25}{4}$. □

Dado $a > 0$, pensemos en el siguiente problema: encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^2 = a. \tag{1.11}$$

Nótese que si $\alpha^2 = a$, entonces también se cumple que $(-\alpha)^2 = a$. Por tanto, dado $a > 0$, existen dos números reales x solución de la ecuación (1.11). Estos números son, por tanto, $x = \pm\alpha$.

Definición 1.15 La *raíz cuadrada* de un número real no negativo $a \geq 0$ es un número real $\alpha > 0$ que verifica

$$\alpha^2 = a.$$

Se denota $\alpha = \sqrt{a}$. □

Por tanto, las dos soluciones de (1.11) vienen dadas por $x = \pm\sqrt{a}$. Ejemplo:

$$x^2 = 49 \ \Leftrightarrow \ x = \pm\sqrt{49} = \pm 7. \quad \square$$

Observación 1.27 Otra forma de denotar la raíz cuadrada de un número a es como su potencia $\frac{1}{2}$. Es decir,

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}. \quad \square$$

Observación 1.28 (Propiedades de la raíz cuadrada)

a) No están definidas (como números reales) las raíces cuadradas de números negativos.

b) $(\sqrt{a})^2 = a,\ \forall\, a \geq 0$.

c) $\sqrt{0} = 0$.

d) Para todo $a, b \in \mathbb{R}:\ a^2 = b^2 \ \Leftrightarrow \ |a| = |b|$.

e) Si $0 < a < b \ \Rightarrow \ \sqrt{a} < \sqrt{b}$. □

Proposición 1.8 *La raíz cuadrada de un producto es igual al producto de las raíces cuadradas de los factores, es decir, si $a, b \geq 0$, se tiene que*

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Cuando $a, b \in \mathbb{R}_-$, se verifica que

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{|a|} \times \sqrt{|b|}.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que para $a, b \geq 0$ se cumple

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) = (\sqrt{a} \times \sqrt{a}) \times (\sqrt{b} \times \sqrt{b}) = a \times b.$$

Para el caso en que $a < 0$ y $b < 0$, basta aplicar el caso anterior, pues

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{|a \times b|} = \sqrt{|a| \times |b|} = \sqrt{|a|} \times \sqrt{|b|}. \quad \square$$

Ejemplo 1.24 $\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{4} \times \sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$, $\sqrt{(-9) \times (-4)} = \sqrt{9} \times \sqrt{4}$ $= 3 \times 2 = 6$. $\square$

Proposición 1.9 *La raíz cuadrada de un cociente es igual al cociente de las raíces cuadradas del numerador y del denominador, es decir, si $a \geq 0$ y $b > 0$, se tiene que*

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta tener en cuenta que

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a \times a}}{\sqrt{b \times b}} = \frac{a}{b}. \quad \square$$

Ejemplo 1.25 $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$. $\square$

Proposición 1.10 *La raíz cuadrada de una potencia de exponente par es igual a otra potencia de la misma base y de exponente la mitad del exponente original, es decir, si $a \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que

$$(a^n)^2 = a^n \times a^n = a^{n+n} = a^{2n}. \quad \square$$

Ejemplo 1.26

$$\begin{cases} \sqrt{2^4 \times 3^8 \times 4^2} \overset{(1)}{=} \sqrt{2^4} \times \sqrt{3^8} \times \sqrt{4^2} \overset{(2)}{=} 2^2 \times 3^4 \times 4 = 1296 \\ (\sqrt{7})^4 = \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} \overset{(1)}{=} \sqrt{7^4} \overset{(2)}{=} 7^2 = 49, \end{cases}$$

donde en (1) se ha aplicado la Proposición 1.8 y en (2) la Proposición 1.10. $\square$

Hasta ahora nos hemos limitado al caso de raíces cuadradas. Hagamos una extensión a raíces generales. Pensemos para ello en el siguiente problema: encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^n = a. \tag{1.12}$$

Nótese que si n es par y $\alpha^n = a$ con $a > 0$, entonces también se cumple que $(-\alpha)^n = a$. Por tanto, dado $a > 0$, existen dos números reales x solución de la ecuación (1.12). Estos números vienen dados por $x = \pm\alpha$.

Definición 1.16 Si $n \in \mathbb{N}$ es un número par, la *raíz n–ésima* de un número real no negativo a es otro número real $\alpha > 0$ que verifica

$$\alpha^n = a.$$

Se denota $\alpha = \sqrt[n]{a}\ (> 0)$ y se dice que n es el *índice* o *grado* de la raíz. Cuando $n = 2$, se puede omitir el índice. $\square$

Por tanto, las dos soluciones de (1.12) con $a > 0$ vienen dadas por $x = \pm\sqrt[n]{a}$.

Observación 1.29 Otra forma de denotar la raíz n–ésima de un número a es como su potencia $\frac{1}{n}$. Es decir,

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}. \quad \square$$

Ejemplo 1.27 $\sqrt[4]{54} = 3$ y las soluciones de $x^4 = 54$ son $x = \pm\sqrt[4]{54} = \pm 3$. $\square$

Por otro lado, si n es impar y $a \in \mathbb{R}$ arbitrario (no se necesita ningún signo predeterminado), entonces existe un único $x \in \mathbb{R}$ solución de la ecuación (1.12).

Definición 1.17 Si $n \in \mathbb{N}$ es un número impar, la *raíz n–ésima* de un número real a es el único número real α que verifica

$$\alpha^n = a.$$

Se denota $\alpha = \sqrt[n]{a}$ (> 0 si $a > 0$ y < 0 si $a < 0$) y se dice que n es el *índice* o *grado* de la raíz. $\square$

Ejemplo 1.28

a) $\sqrt[3]{27} = 3$ y la solución de $x^3 = 27$ es $x = \sqrt[3]{27} = 3$.

b) $\sqrt[3]{-27} = -3$ y la solución de $x^3 = -27$ es $x = \sqrt[3]{-27} = -3$. $\square$

Observación 1.30 Cuando $n = 2$, la raíz se denomina *cuadrada*, para $n = 3$ se denomina *cúbica* ... $\square$

Observación 1.31 (Propiedades de la raíz n–ésima) (Compárense con las propiedades de la raíz cuadrada de la Observación 1.28):

a) Si n es par, no están definidas (como números reales) las raíces n–ésimas de números reales negativos.

b) Si n es impar, están definidas (como números reales) las raíces n–ésimas de todos los números reales.

c) Si n es par, $(\pm \sqrt[n]{a})^n = a, \ \forall\, a \geq 0$.

d) Si n es impar, $(\sqrt[n]{a})^n = a, \ \forall\, a \in \mathbb{R}$.

e) $\sqrt[n]{0} = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

f) Si n es par: $a^n = b^n \ \Leftrightarrow \ |a| = |b|, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

g) Si n es impar: $a^n = b^n \ \Leftrightarrow \ a = b, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

h) Si n es par y $0 < a < b \ \Rightarrow \ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

i) Si n es impar y $a < b \ \Rightarrow \ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. $\square$

Observación 1.32 Todas las propiedades estudiadas anteriormente para raíces cuadradas son extensibles, con las convenientes modificaciones, a raíces n–ésimas generales. Así, por ejemplo, si $a, b, c > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sqrt[n]{a \times b \times c} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}. \quad \square$$

Definición 1.18 Una *potencia de exponente negativo* es igual a una fracción que tiene por numerador la unidad y por denominador la base de la potencia elevada a exponente positivo. Es decir, si $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \quad \square$$

Ejemplo 1.29 $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0'01, \ (-5)^{-2} = \dfrac{1}{(-5)^2} = \dfrac{1}{25} = 0'04.$ $\square$

Observación 1.33 Las reglas de cálculo para potencias de exponente positivo son válidas para potencias de exponente entero negativo. En efecto, si $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $n, m \in \mathbb{N}$, se verifica que:

a) $a^n \times a^{-m} = a^n \times \dfrac{1}{a^m} = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{n+(-m)}$.

b) $\dfrac{a^{-n}}{a^{-m}} = \dfrac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^m}} = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{(-n)-(-m)}$.

c) $(a^n)^{-m} = \dfrac{1}{(a^n)^m} = \dfrac{1}{a^{nm}} = a^{-nm} = a^{n(-m)}$.

d) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \dfrac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \dfrac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^n}} = \dfrac{a^{-n}}{b^{-n}}$. □

Ejemplo 1.30 Para todo $x \neq 0$ se tiene que:

$$(x^{-1}+1)(x^{-1}-1) = x^{-2}-1 = \frac{1}{x^2}-1 = \frac{1-x^2}{x^2} \text{ y } \frac{x^{2n-1}}{x^{-1}} = x^{2n-1-(-1)} = x^{2n}. \quad \square$$

Definición 1.19 Toda *potencia de exponente cero* de un número real $a \neq 0$ es la unidad, es decir,

$$a^0 = 1. \quad \square$$

Observación 1.34 Es claro que no pueden considerarse productos formados por cero factores. No obstante, la justificación de la definición anterior es la siguiente: para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0.$$

Cuando $a = 0$, es claro que $0^n = 0$ pero 0^0 es un caso de *indeterminación*. □

Definición 1.20 Si $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, la *potencia de exponente racional* $a^{\frac{m}{n}}$ es la raíz n–ésima del número a^m, es decir,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Si n es impar, se puede tomar $a \neq 0$. □

Ejemplo 1.31 $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = 8,\ 8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^{-1}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$. □

Observación 1.35 Las reglas de cálculo para potencias de exponente entero son válidas para potencias de exponente fraccionario. En efecto, para todo $a, b > 0$, $m, p \in \mathbb{Z}$ y $n, q \in \mathbb{N}$, se verifica que:

a) $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} \times (a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{mq})^{\frac{1}{nq}} \times (a^{np})^{\frac{1}{nq}} = (a^{mq+np})^{\frac{1}{nq}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$
$= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

b) $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \dfrac{(a^m)^{\frac{1}{n}}}{(a^p)^{\frac{1}{q}}} = \dfrac{(a^{mq})^{\frac{1}{nq}}}{(a^{np})^{\frac{1}{nq}}} = (a^{mq-np})^{\frac{1}{nq}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

c) $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = \left((a^{\frac{m}{n}})^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(a^{\frac{mp}{n}}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}}$.

d) $(a \times b)^{\frac{m}{n}} = (a^m \times b^m)^{\frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} \times (b^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \times b^{\frac{m}{n}}$.

e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{a^m}{b^m}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

Al igual que se vio en la Definición 1.20, si el denominador de una potencia fraccionaria es impar, entonces la base de esa potencia se puede tomar en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (no sólo en $(0, +\infty)$). □

Ejemplo 1.32 $\dfrac{9^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{3}}} = 9^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 9^{\frac{1}{6}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} \simeq 1'4422.$ □

Observación 1.36 Como el *sistema decimal* se basa en que cada diez unidades de un orden constituyen otra unidad de orden superior, es posible representar los diversos órdenes mediante potencias de diez (ya sea con exponente positivo, cero o negativo). Ejemplo:

Decena	10^1
Centena	10^2
Millar	10^3
Millón	10^6
Billón	10^{12}
Trillón	10^{18}

Décima	10^{-1}
Centésima	10^{-2}
Milésima	10^{-3}
Millonésima	10^{-6}
Billonésima	10^{-12}
Trillonésima	10^{-18}

Con mucha frecuencia, en trabajos científicos, se trabaja con números muy grandes o muy pequeños. Estos números expresados en la forma ordinaria pueden ser complicados y confusos; no obstante, se logra una mayor sencillez y claridad expresados mediante potencias de 10. Así, por ejemplo,

- El radio de un electrón es $\approx 2'8179 \times 10^{-15}$ metros.
- La distancia de la Tierra al Sol es $\approx 1'496 \times 10^8$ kilómetros. □

Observación 1.37 Dados $a > 0$ y $r \in \mathbb{R}$, también se puede considerar la potencia a^r. Sin entrar en detalles rigurosos sobre esto, esta potencia se puede definir como un *límite* de potencias con expontente racional de la siguiente forma:

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n},$$

siendo $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una *sucesión* de números racionales que tiene límite r. Nótese que aquí se han utilizado dos conceptos matemáticos nuevos, que serán estudiados más adelante en el Capítulo 10: el primero de ellos es el de sucesión de números, y el segundo, el de límite de una sucesión. $\square$

Observación 1.38 Nótese que cuando la base es un número irracional, no es evidente cómo se definen sus potencias. Aunque este asunto sobrepasa el carácter básico de este libro, resulta conveniente resaltarlo. En particular, ¿cómo calcular números como π^2? (es decir, ¿cómo multiplicar π por π, si π tiene infinitas cifras decimales no periódicas?) o ¿cómo hallar $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$? Cuando $a>0$ y $x\in\mathbb{R}$, a partir de las funciones *exponencial* e^x y *logaritmo neperiano* $\ln(x)$ que se estudiarán en el Capítulo 11, se puede escribir que

$$a^x = e^{x\ln(a)},$$

con las potencias del número e definidas, de forma alternativa a la dada en la Observación 1.37, en la Observación 10.11. Esto permite aproximar, por ejemplo, los siguientes números

$$\pi^2 = e^{2\ln(\pi)} \simeq 9'8696,\ (\sqrt{2})^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln(\sqrt{2})} \simeq 1'8226 \text{ y } \pi^\pi = e^{\pi\ln(\pi)} \simeq 36'4622.$$

Llegados a este punto, ¿cómo calcular $(\pi^\pi)^\pi$? Por la misma regla,

$$(\pi^\pi)^\pi = e^{\pi\ln(\pi^\pi)} = e^{\pi^2\ln(\pi)} \simeq 8'0663\times 10^4,$$

donde se han utilizado propiedades de los logaritmos neperianos que, como se ha dicho, se estudiarán en el Capítulo 11. $\square$

1.5. Problemas

1.1. Hallar la factorización en números primos de los siguientes números racionales:

a) 36 b) 735 c) 3185 d) 374.

1.2. Calcular, utilizando el Algoritmo de Euclides, el $\text{mcd}(831,366)$.

1.3. Hallar el $\text{mcd}(381,54991)$ (nótese que el cálculo mediante el método de factorización en números primos es muy engorroso en este caso).

1.4. Representar mediante fracciones irreducibles los siguientes números racionales:

a) $\dfrac{60}{56}$ b) $\dfrac{840}{2464}$ c) $\dfrac{3150}{2625}$ d) $\dfrac{360}{504}$.

1.5. Determinar el conjunto de soluciones $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ de la ecuación

$$4p+7q=1.$$

1.6. Si $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y p, q son números primos, hallar cuántos divisores tiene $p^n q^m$.

1.7. Representar mediante fracciones irreducibles las siguientes operaciones entre números racionales:

$$\text{a) } \frac{60}{56} + \frac{840}{2464} \qquad \text{b) } \frac{840}{2464} - \frac{3150}{2625} \qquad \text{c) } \frac{3150}{2625} \div \frac{360}{504} \qquad \text{d) } \frac{360}{504} - \frac{3150}{2625}.$$

1.8. Hallar la expresión decimal de los siguientes números racionales:

$$\text{a) } \frac{9}{5} \qquad \text{b) } \frac{4248}{22} \qquad \text{c) } \frac{752}{6} \qquad \text{d) } \frac{45}{7}.$$

1.9. Representar mediante fracciones irreducibles los siguientes números decimales:

$$\text{a) } 123'456 \qquad \text{b) } 0'\widehat{8} \qquad \text{c) } 0'\widehat{23} \qquad \text{d) } 0'2\widehat{4}.$$

1.10. Efectuar las siguientes operaciones:

$$\text{a) } -(1-(2-(-3))) + ((1-2)+1) \qquad \text{b) } \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{12}{3}\right)$$

$$\text{c) } \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{11}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{3}{7}} \qquad \text{d) } \frac{6}{4 + \frac{5}{2+\frac{1}{3}}}.$$

1.11. Demostrar que la suma de un número racional con otro irracional es irracional. ¿Qué puede decirse acerca de la suma de dos números irracionales? ¿Y del producto de un número racional por otro irracional? ¿Y del producto de dos números irracionales?

1.12. Decir cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales:

$$\text{a) } \sqrt{3} \qquad \text{b) } \sqrt{0'04} \qquad \text{c) } \sqrt{0'4}.$$

1.13. Si se triplica cada uno de los n factores de un producto, ¿qué alteración experimenta el producto?

1.14. Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ que verifican $a^2 - 49 = 0$.

1.15. Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ que verifican $a^2 + b^2 = 0$.

1.16. Encontrar los valores reales de x que verifican

$$\left|x - \frac{3}{4}\right| = x - \frac{3}{4}.$$

Representar dichos valores sobre la recta real en forma de intervalo.

1.17. Determinar los valores reales de x que verifican

a) $|x-4| \leq 1$ b) $|x+2| > 3$.

1.18. ¿Son equivalentes las expresiones $\left(\sqrt{-2}\right)^2$ y $\sqrt{(-2)^2}$?

1.19. Hallar la raíz cúbica de los siguientes números utilizando la descomposición en factores primos de los mismos:

a) 216 b) 1000 c) 9261.

1.20. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{-4^3}}{\sqrt[3]{27}}$ b) $\sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{10}$ c) $\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{9}{3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{\frac{6}{8}}}$.

1.21. Una piscina rectangular mide 9 metros de largo por 4 metros de ancho. Si queremos construir una piscina cuadrada de la misma área, ¿cuál debe ser la longitud de su lado?

1.22. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{a^{-4}}{\frac{1}{a^3}}$ b) $\dfrac{a^3}{a^{-5}}$ c) $\sqrt{\dfrac{a^2}{a^4}}$.

1.23. Demostrar que $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

1.24. *Racionalizar los denominadores* de las siguientes fracciones (es decir, transformar las fracciones en otras equivalentes que no contengan ningún radical en el denominador) (**Indicación**: si $a, b > 0$, se verifica que $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$):

a) $\dfrac{3}{2\sqrt{12}}$ b) $\sqrt{\dfrac{7}{5}}$ c) $\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{28}{1+\sqrt{5}}$.

1.25. Un *año luz* es la distancia recorrida por la luz en un año. Sabiendo que la velocidad de la luz es 300000 km/s, se pide:

a) Determinar cuántos kilómetros es un año luz.

b) Calcular cuántos años luz es 1 metro.

1.6. Soluciones

1.1. a) $2^2 \times 3^2$ b) $3 \times 5 \times 7^2$ c) $5 \times 7^2 \times 13$ d) $2 \times 11 \times 17$.

1.2. 3.

1.3. 127.

1.4. a) $\dfrac{15}{14}$ b) $\dfrac{15}{44}$ c) $\dfrac{6}{5}$ d) $\dfrac{5}{7}$.

1.5. $\{(2+7k, -1-4k) : k \in \mathbb{Z}\}$.

1.6. $(n+1)(m+1)$.

1.7. a) $\dfrac{435}{308}$ b) $-\dfrac{189}{220}$ c) $\dfrac{42}{25}$ d) $-\dfrac{17}{35}$.

1.8. a) $1'8$ b) $193'\,\overset{\frown}{09}$ c) $125'\,\overset{\frown}{3}$ d) $6'\,\overset{\frown}{428571}$.

1.9. a) $\dfrac{15432}{125}$ b) $\dfrac{8}{9}$ c) $\dfrac{23}{99}$ d) $\dfrac{11}{45}$.

1.10. a) 4 b) $-\dfrac{23}{5}$ c) $\dfrac{371}{99}$ d) $\dfrac{42}{43}$.

1.11. Argumentar por reducción al absurdo.

1.12. a) Irracional b) Racional c) Irracional.

1.13. Queda multiplicado por 3^n.

1.14. ± 7.

1.15. $a = b = 0$.

1.16. Intervalo $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

1.17. a) Intervalo $[3, 5]$ b) Unión de intervalos $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

1.18. No.

1.19. a) 6 b) 10 c) 21.

1.20. a) $-\dfrac{4}{3}$ b) $5\sqrt{30}$ c) $\sqrt{6}$ d) $4\sqrt{3}$.

1.21. 6 metros.

1.22. a) a^{-1} b) a^8 c) $|a|^{-1}$.

1.23. Basta elevar a la potencia sexta.

1.24. a) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{35}}{5}$ c) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ d) $7\sqrt{5}-7$.

1.25. a) 1 año luz $\approx 9'4608 \times 10^{12}$ km b) 1 m $\approx 1'0570 \times 10^{-16}$ años luz.

2 Ecuaciones algebraicas

2.1. Introducción

Se comienza el capítulo introduciendo el concepto de *función* entre dos conjuntos y la definición de casos particulares de funciones *inyectivas*, *sobreyectivas* y *biyectivas*. El resto del capítulo se dedica a funciones reales de variable real (es decir, funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) y su representación gráfica en el plano $\mathbb{R}^2$, restringiéndose rápidamente al caso de funciones polinómicas. El estudio general de funciones reales de variable real se llevará a cabo en el Capítulo 11.

Una vez presentados los polinomios de variable real, se muestran sus principales operaciones (suma, producto, cociente) y la *regla de Ruffini* como herramienta práctica para su factorización.

La parte final se centra en los *polinomios de primer* y *segundo grado* y sus principales propiedades y características, incluyendo su representación gráfica.

2.2. Polinomios de una variable real. Álgebra de polinomios. Binomio de Newton

Definición 2.1 Una *función* (o *aplicación*) de un conjunto $\mathcal{X}$ en un conjunto $\mathcal{Y}$ es una relación f que asocia a cada elemento $x \in \mathcal{X}$ un único elemento $y \in \mathcal{Y}$. Se representa

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{X} & \to & \mathcal{Y} \\ & x & \mapsto & y \end{array}$$

o $y = f(x)$. Se dice que x es la *variable independiente* e $y = f(x)$, que es la *imagen* por la función f del elemento x, es la *variable dependiente*. El conjunto $\mathcal{X}$ es el *dominio* de definición de la función f e $\mathcal{Y}$ es un conjunto que contiene los *valores* de la función. Es decir,

$$\{f(x) :\ x \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{Y}.$$

Cuando $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son subconjuntos de $\mathbb{R}$, se dice que f es una *función real de variable real*. □

Ejemplo 2.1 Supongamos que $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}$. Entonces las siguientes expresiones definen funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2, \; f(x) = 2x, \; f(x) = 3x^2 + 2x + 1 \; \text{ y } \; f(x) = \cos(x),$$

donde cos denota la función *coseno* que veremos en el Capítulo 7. □

Definición 2.2 Una *función* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es:

a) *Inyectiva* si $f(x_1) \neq f(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ tal que $x_1 \neq x_2$ (o, equivalentemente, $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$). Es decir, elementos distintos tienen imágenes por f distintas (no puede haber dos elementos distintos con la misma imagen).

b) *Sobreyectiva* (o *suprayectiva*) si $\forall\, y \in \mathcal{Y}\ \exists\, x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) = y$. Es decir, todo elemento y del conjunto de llegada $\mathcal{Y}$ es la imagen por f de, al menos, un elemento x del conjunto de salida $\mathcal{X}$.

c) *Biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva. Es decir, todo elemento y del conjunto de llegada $\mathcal{Y}$ es la imagen por f de un único elemento x del conjunto de salida $\mathcal{X}$. □

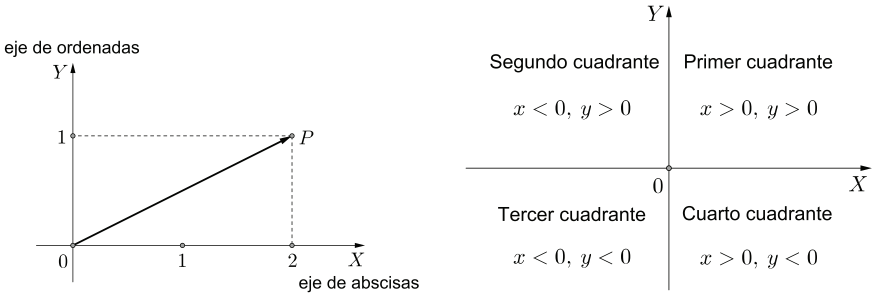
Ejemplo 2.2 La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2$ no es inyectiva ni sobreyectiva. Sin embargo, la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x$ es biyectiva. □

Definición 2.3 El *producto cartesiano* de $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales. Se representa

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : \; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}\,.$$

En todo par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, x se denomina *abscisa* e y *ordenada*. A su vez, x e y se denominan, indistintamente, *componentes* o *coordenadas*. □

Observación 2.1 La representación gráfica de $\mathbb{R}^2$ consiste en tomar dos rectas perpendiculares $0X$ y $0Y$ denominadas, respectivamente, *eje de abscisas* y *eje de ordenadas* y que se cortan en el punto 0, que es el *origen de coordenadas*. Nótese que a cada par de puntos ordenados (x, y) le corresponde un punto del plano y, recíprocamente, a cada punto del plano le corresponde un par de números reales ordenados, que son sus coordenadas. Así pues se establece una aplicación biyectiva entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales. En la Figura 2.1(a) viene representado el punto P que tiene por abscisa $x = 2$ y por ordenada $y = 1$, es decir, el punto $(2, 1)$. Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro *cuadrantes*: primer cuadrante ($x > 0,\ y > 0$), segundo cuadrante ($x < 0$, $y > 0$), tercer cuadrante ($x < 0$, $y < 0$) y cuarto cuadrante ($x > 0$, $y < 0$) (véase la Figura 2.1(b)). □



(a) Ejes de coordenadas.

(b) Cuadrantes.

Figura 2.1: Representación gráfica en $\mathbb{R}^2$.

Observación 2.2 La representación gráfica de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ consiste en representar, de acuerdo con la Observación 2.1, el conjunto de puntos

$$\{(x, f(x)) : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Por ello, muchas veces se utiliza la notación $y(x)$ (o simplemente la letra y) en lugar de $f(x)$, con lo que la curva se representa dibujando el conjunto de puntos

$$\{(x, y(x)) : \ x \in \mathbb{R}\}. \quad \square$$

Ejemplo 2.3 La Figura 2.2 muestra la representación gráfica de la función $y = 2x$. $\square$

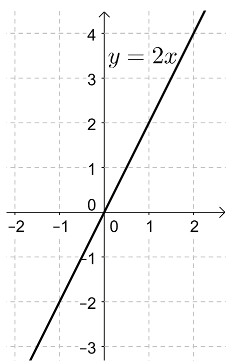


Figura 2.2: Gráfica de la función $y = 2x$.

Definición 2.4 Un *monomio* es un tipo particular de función cuya expresión general es

$$f(x) = ax^n,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se dice que a es el *coeficiente*, x^n la *parte literal* y n su *grado*. $\square$

Observación 2.3 Los monomios de grado 0 son $ax^0 = a \in \mathbb{R}$, es decir, las constantes reales. $\square$

Ejemplo 2.4 $2x^3$ es un monomio de tercer grado cuyo coeficiente es 2 y cuya parte literal es x^3. $\square$

Definición 2.5 Se llama *polinomio* a una suma de monomios. En el caso de que conste de dos monomios, se llama *binomio*, y, en el caso de que conste de tres monomios, *trinomio*. Se llama *grado* de un polinomio al mayor de los grados de los monomios que lo componen. $\square$

Observación 2.4 Un *polinomio de una variable real* es un tipo particular de función cuya expresión general es

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde los coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Nótese que, si $a_n \neq 0$, el grado del polinomio $P(x)$ es n. Denotamos por ∂P al *grado* del polinomio $P(x)$. $\square$

Ejemplo 2.5 Como $P(x) = x^2 - 3x$ es un polinomio que tiene grado 2 y el polinomio $Q(x) = 7x^8 + 4x^5 - x^2 + 45$ tiene grado 8, escribimos que $\partial P = 2$ y $\partial Q = 8$. $\square$

Definición 2.6 (Suma de polinomios) La *suma de los polinomios*

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

con $n \geq m,\ a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$, es un polinomio de la forma

$$P(x) + Q(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde

$$c_k = \begin{cases} a_k + b_k, & k = 0, 1, \ldots, m \\ a_k, & k = m+1, m+2, \ldots, n. \end{cases}$$

Es decir, se suma término a término cada uno de los monomios que componen cada polinomio. $\square$

Ejemplo 2.6 Si $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$ y $Q(x) = x^2 + 3x + 7$, entonces

$$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2. \quad \square$$

Observación 2.5

a) Nótese que el grado del polinomio suma es menor o igual que el mayor de los grados de los polinomios que componen la suma. De hecho, será menor cuando $n = m$ y $a_n = -b_m$. Ejemplo: si $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$ y $Q(x) = -2x^3 + 3x + 7$, entonces

$$P(x) + Q(x) = 3x^2 + 3x + 2.$$

b) Es sencillo comprobar que la suma de polinomios definida anteriormente verifica las propiedades conmutativa, asociativa, existencia de elemento neutro (el polinomio 0) y existencia de elemento opuesto (el opuesto de $P(x)$ es el polinomio $Q(x) = -P(x)$). Por cumplir las propiedades anteriores, el conjunto de polinomios en la variable x, con respecto a la suma, tiene estructura de *grupo conmutativo* (o *abeliano*). □

Definición 2.7 (Producto de monomios) El *producto de los monomios*

$$P(x) = a_n x^n \text{ y } Q(x) = b_m x^m$$

es el monomio

$$P(x)Q(x) = a_n b_m x^{n+m}.$$

Es decir, el producto de dos monomios es un monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las partes literales. □

Ejemplo 2.7 $(7x^3)(-5x^6) = -35x^9$. □

Definición 2.8 (Producto de un polinomio por un número real) El *producto del escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por el polinomio*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

es el polinomio

$$\lambda P(x) = (\lambda a_n)x^n + (\lambda a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\lambda a_1)x + \lambda a_0. \quad \square$$

Ejemplo 2.8 $-2(3x^3 - x^2 - 3x + 1) = -6x^3 + 2x^2 + 6x - 2$. □

Definición 2.9 (Producto de polinomios) El *producto de dos polinomios* es un polinomio que se obtiene multiplicando entre sí cada uno de los monomios que los componen y luego sumándolos. □

Ejemplo 2.9 Al multiplicar los polinomios $P(x) = 2x^2 + 3x + 1$ y $Q(x) = x^3 - x + 2$ se obtiene:

$$\begin{aligned}(2x^2 + 3x + 1)(x^3 - x + 2) &= 2x^5 - 2x^3 + 4x^2 + 3x^4 - 3x^2 + 6x + x^3 - x + 2 \\ &= 2x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 5x + 2.\end{aligned}$$

Una disposición más adecuada para la multiplicación de polinomios es la que se muestra a continuación:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 3x^3 & -2x^2 & +7x & -1 \\
 & & & & -2x^2 & +x \\
\hline
 & 3x^4 & -2x^3 & +7x^2 & -x & \\
-6x^5 & +4x^4 & -14x^3 & +2x^2 & & \\
\hline
-6x^5 & +7x^4 & -16x^3 & +9x^2 & -x &
\end{array}$$

Observación 2.6

a) Nótese que si $P(x)$ es un polinomio de grado n y $Q(x)$ es un polinomio de grado m, entonces el polinomio producto $P(x)Q(x)$ es un polinomio de grado $n+m$. Es decir, el grado del polinomio producto es la suma de los grados de cada polinomio que interviene en el producto.

b) Es sencillo comprobar que el producto de polinomios definido anteriormente verifica las propiedades conmutativa, asociativa, existencia de elemento neutro (el polinomio 1) y la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. Por cumplir las propiedades anteriores, el conjunto de polinomios en la variable x, con respecto a las operaciones internas de suma y producto de polinomios, tiene estructura de *anillo conmutativo* con *elemento unidad*. $\square$

Definición 2.10 (Potencia de un polinomio) La *potencia* n *de un polinomio* es otro polinomio que se obtiene multiplicando el polinomio por sí mismo n veces. A la potencia 2 de un polinomio se le llama *cuadrado del polinomio*, y a la potencia 3 de un polinomio se le llama *cubo del polinomio*. $\square$

Ejemplo 2.10 El cubo (o potencia 3) del polinomio $P(x) = 5x^2 + x + 1$ es:

$$\begin{aligned}(5x^2+x+1)^3 &= (5x^2+x+1)^2(5x^2+x+1)\\ &= (25x^4+10x^3+11x^2+2x+1)(5x^2+x+1)\\ &= 125x^6+75x^5+90x^4+31x^3+18x^2+3x+1. \quad \square\end{aligned}$$

Ejemplo 2.11 Algunas identidades entre números reales que aparecen con bastante frecuencia son:

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

d) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

e) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

f) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

a partir de las cuales se obtienen, por ejemplo:

$$(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2(2x) + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

y

$$(2x+3)(2x-3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9. \quad \square$$

Ya hemos visto cómo se pueden calcular cantidades como $(a \pm b)^2$ y $(a \pm b)^3$, pero ¿cómo calcular $(a \pm b)^n$ con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario? Una forma de obtener estas potencias es a través del denominado *binomio de Newton*, que requiere, previamente, el concepto de *número combinatorio*, y éste, a su vez, el concepto de *factorial* de un número natural.

Definición 2.11 El *factorial* de un número $n \in \mathbb{N}$ es el producto de todos los números naturales que hay de 1 a n. Se denota

$$n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1.$$

Por convenio, también se define $0! = 1$. $\square$

Ejemplo 2.12 El factorial de los primeros números naturales es:

$$1! = 1 \times 1 = 1,\ 2! = 2 \times 1 = 2,\ 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6,\ 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \ldots \quad \square$$

Observación 2.7 Puesto que $n(n-1)! = n!$, se tiene que

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}. \tag{2.1}$$

En particular, al hacer $n = 1$ en la expresión (2.1) se deduce que $\boxed{0! = 1.}$

Definición 2.12 Sean $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$. Se define el *número combinatorio*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k = 0, 1, \ldots, n$$

donde el *factorial* de un número natural $m \in \mathbb{N}$ es $m! = m(m-1)(m-2)\ldots 2.1$. $\square$

Ejemplo 2.13 $\displaystyle\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3.2.1}{(2.1)(2.1)} = \frac{12}{2} = 6.$ $\square$

Observación 2.8 Dado que $0! = 1$, para todo $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ se verifica que

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1,\ \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1,\ \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

y

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\cancel{(n-k)!}} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.\end{aligned}$$

Además,

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}. \tag{2.2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}&=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\\ &=\frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!}+\frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}\\ &=\frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}. \quad \square\end{aligned}$$

Definición 2.13 Sean $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$. Se llama *triángulo de Tartaglia* (o de *Pascal*) a la tabla

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
 & \binom{n-1}{0} & & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{k-1} & & \binom{n-1}{k} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{k-1} & & \binom{n}{k} & & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Observación 2.9 La tabla anterior tiene forma triangular, los términos de los lados extremos valen 1 y cada término restante es la suma de los dos que tiene encima (véase (2.2)). Por tanto, la tabla anterior puede escribirse como

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & &
\end{array}$$

Teorema 2.1 (Binomio de Newton) *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\begin{aligned}(a+b)^n&=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots\\ &\quad+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k. \quad \square\end{aligned}$$

Observación 2.10 Claramente, si reemplazamos b por $-b$ en la expresión anterior, se obtiene que

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad \square$$

Ejemplo 2.14 La potencia cuarta de $a-b$ se obtiene como:

$$\begin{aligned}(a-b)^4 &= \binom{4}{0} a^4 b^0 - \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 - \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4 \\ &= a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

Nótese que los coeficientes coinciden con los de la fila quinta de la tabla de la Observación 2.9. $\square$

Definición 2.14 (Cociente de polinomios) Como la división es la operación inversa de la multiplicación, el hecho de *dividir* un polinomio (*dividendo*) entre otro polinomio (*divisor*) consiste en encontrar otro polinomio (*cociente*) que multiplicado por el divisor dé el dividendo. $\square$

Observación 2.11 Obviamente, no en todos los casos será posible encontrar el cociente anterior. No obstante, si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ y $Q(x)$ es un polinomio de grado $m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$, siempre existen polinomios $C(x)$ y $R(x)$ verificando

$$P(x) = Q(x)C(x) + R(x).$$

El polinomio $P(x)$ es el *dividendo*, $Q(x)$ es el *divisor*, $C(x)$ es el *cociente* y $R(x)$ es el *resto* de la división y su grado es estrictamente menor que m. Cuando el resto de la división es cero, se dice que la división es *exacta* y que $P(x)$ es *divisible* por $Q(x)$. $\square$

Ejemplo 2.15 La disposición que se emplea para dividir polinomios es

$$\begin{array}{rrrrr|l}
16x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +2x & -15 & 2x^2+x-1 \\ \cline{6-6}
-16x^4 & -8x^3 & +8x^2 & & & 8x^2-6x+3 \\ \cline{1-3}
 & -12x^3 & & +2x & & \\
 & 12x^3 & +6x^2 & -6x & & \\ \cline{2-4}
 & & 6x^2 & -4x & -15 & \\
 & & -6x^2 & -3x & +\ 3 & \\ \cline{3-5}
 & & & -7x & -12 &
\end{array}$$

Así pues, la división del polinomio $P(x) = 16x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 2x - 15$ entre el polinomio $Q(x) = 2x^2 + x - 1$ determina un cociente $C(x) = 8x^2 - 6x + 3$ y un resto $R(x) = -7x - 12$. $\square$

Observación 2.12 Como caso particular, cuando dividimos un polinomio $P(x)$ de grado $n \in \mathbb{N}$ entre el polinomio $Q(x) = x - a$ donde $a \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$P(x) = C(x)(x - a) + R(x). \tag{2.3}$$

Como el grado del polinomio $R(x)$ tiene que ser < 1, necesariamente debe ser una constante (polinomio de grado cero), es decir, $R(x) \equiv R \in \mathbb{R}$. Para determinar el valor de esta constante, particularizamos (2.3) en $x = a$, obteniendo $R = P(a)$. De esta forma, podemos expresar 2.3 como

$$P(x) = C(x)(x - a) + P(a). \quad \square$$

Por tanto, acabamos de demostrar el siguiente resultado:

Proposición 2.1 *Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$.*

a) El resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$ es el valor del polinomio $P(x)$ en $x = a$.

b) $P(x)$ es divisible por $x - a \Leftrightarrow a$ es una raíz del polinomio $P(x)$ (i.e., $P(a) = 0$). $\square$

Consideremos la división del polinomio $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde $a_i \in \mathbb{R}$, por el polinomio $x - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
a_3x^3 & +a_2x^2 & +a_1x & +a_0 & x-\alpha \\ \cline{5-5}
-b_2x^3 & +b_2\alpha x^2 & & & b_2x^2+b_1x+b_0 \\ \cline{1-2}
 & b_1x^2 & +a_1x & & \\
 & -b_1x^2 & +b_1\alpha x & & \\ \cline{2-3}
 & & b_0x & +a_0 & \\
 & & -b_0x & +b_0\alpha & \\ \cline{3-4}
 & & & b_{-1} &
\end{array}$$

donde

$$\begin{cases} b_2 = a_3 \\ b_1 = b_2\alpha + a_2 \\ b_0 = b_1\alpha + a_1 \\ b_{-1} = b_0\alpha + a_0. \end{cases}$$

Estas consideraciones son válidas al dividir un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ arbitrario entre $x - \alpha$ y dan lugar al siguiente resultado:

Teorema 2.2 (Regla de Ruffini) *El cociente de dividir un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$*

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

entre el binomio $x - \alpha$ es un polinomio de grado $n - 1$

$$C(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

cuyos coeficientes se obtienen a partir de la siguiente ley de recurrencia

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_k = b_{k+1}\alpha + a_{k+1}, \ k = n-2, n-1, \ldots, 1, 0, -1. \end{cases}$$

El resto de la división anterior coincide con el valor que toma el polinomio $P(x)$ en el punto $x = \alpha$, es decir, $b_{-1} = P(\alpha)$. Para la aplicación técnica, se emplea la siguiente disposición

$$\begin{array}{c|ccccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \alpha & & \alpha b_{n-1} & \alpha b_{n-2} & \cdots & \alpha b_2 & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & b_{-1} \end{array}$$

Observación 2.13 La implementación de la regla de Ruffini utilizada en el Teorema 2.2 se conoce como *algoritmo de Horner*, *multiplicación anidada* o *división sintética*. □

Ejemplo 2.16 Como acabamos de comentar, la regla de Ruffini se utiliza cuando el polinomio divisor es del tipo $x - a$. Utiliza los coeficientes del dividendo y el valor de a, obteniéndose los coeficientes del polinomio cociente y el valor del resto (ya hemos dicho que el resto siempre será un número) y disponiéndose en la forma que se muestra en la escena siguiente que presenta la división del polinomio

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 \text{ entre } x - 2.$$

El proceso que se sigue, aplicado en el caso anterior (en el que $a = 2$), es el siguiente:

1) Se colocan todos los coeficientes del dividendo ordenados de mayor a menor grado y si falta el de algún grado intermedio se coloca un 0. Una línea más abajo y a la izquierda se coloca el valor de a siguiendo el esquema mostrado a continuación para el caso concreto que nos ocupa:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -8 & 19 & -12 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

2) Se "baja" el primer coeficiente del dividendo:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -8 & 19 & -12 \\ 2 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

3) Se multiplica a por el coeficiente bajado y se coloca el resultado debajo del segundo coeficiente:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -8 & 19 & -12 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

4) Se suma el segundo coeficiente con el resultado anterior:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -8 & 19 & -12 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & -6 & & \end{array}$$

5) Se continúa el proceso hasta terminar con los restantes coeficientes:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -8 & 19 & -12 \\ 2 & & 2 & -12 & 14 \\ \hline & 1 & -6 & 7 & 2 \end{array}$$

6) Los números de la fila inferior obtenida son los coeficientes del cociente (de un grado menor al dividendo) excepto el último número, que es el valor del resto. Así en el caso concreto que estamos utilizando a modo de ejemplo, el cociente es $x^2 - 6x + 7$ y el resto es 2.

7) En caso de duda, se puede verificar el resultado obtenido, comprobando que la siguiente igualdad es cierta:

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = (x - 2)(x^2 - 6x + 7) + 2. \quad \square$$

Definición 2.15 Un polinomio es *primo* (o *irreducible*) cuando sólo admite divisores constantes. $\square$

Ejemplo 2.17 Cualquier polinomio de primer grado es primo. $\square$

Teorema 2.3 (Descomposición factorial de un polinomio) *Todo polinomio*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

con $n \in \mathbb{N}$ *y* $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *admite una única descomposición en factores irreducibles de la forma* $x - \alpha$ *y* $x^2 + \beta x + \gamma$. $\square$

Observación 2.14 El Teorema 2.3 muestra que todo polinomio puede factorizarse en producto de factores lineales $x - \alpha$ (de grado 1) y cuadráticos $x^2 + \beta x + \gamma$ (de grado 2). Conviene recordar que las raíces enteras de un polinomio con coeficientes reales, si existen, se encuentran entre los divisores del término independiente del polinomio. $\square$

Ejemplo 2.18

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3)$.

b) $3x^5 - 24x^3 + 9x^2 + 12x + 36 = 3(x+3)(x-2)^2(x^2+x+1)$.

c) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$. □

2.3. Ecuaciones algebraicas de primer y segundo orden

Definición 2.16 Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *función lineal* si es de la forma

$$f(x) = mx$$

donde $m \in \mathbb{R}$. Con la notación de pares ordenados (x, y), la función es la componente "y" del par ordenado (es decir, la ordenada) y se escribe como $y = mx$. □

Observación 2.15 Una función lineal es un caso particular de polinomio de grado 1. □

Observación 2.16 La gráfica de una función lineal es una recta que pasa por el origen de coordenadas (véase la Figura 2.3). El número m, que representa el valor constante $\frac{y}{x}$, se denomina *pendiente* de la recta y mide su grado de inclinación. Dos casos particulares importantes son $y = x$, que corresponde con la *bisectriz de los cuadrantes primero y tercero* (es decir, la recta que divide a dichos cuadrantes por la mitad), e $y = -x$, que corresponde con la *bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto*. □

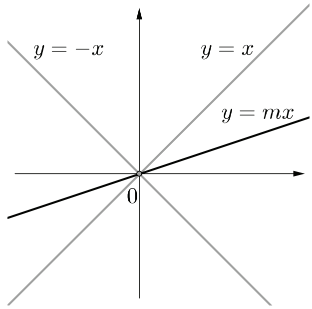


Figura 2.3: Gráfica de la función $y = mx$ (con $m > 0$) y de las bisectrices.

Observación 2.17 (Propiedades de las funciones lineales)

a) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

b) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Si $m > 0$, la función es *estrictamente creciente*, es decir,

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2).$$

d) Si $m < 0$, la función es *estrictamente decreciente*, es decir,

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2).$$

e) Si $m = 0$, la función es nula, es decir, $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

f) Si $m \neq 0$, la función es biyectiva.

g) El único punto de corte de la gráfica de la función $y = mx$ con el eje de abscisas es $x = 0$ (nótese que los puntos (x, y) de corte con el eje de abscisas son aquellos tales que $y = 0$). $\square$

Definición 2.17 Se llama *función afín* a toda aplicación de la forma $y = mx + n$ donde $m, n \in \mathbb{R}$. $\square$

Observación 2.18 Las *funciones afines* son los polinomios de una variable de primer grado y m es, al igual que en el caso lineal, la pendiente de la recta y mide su grado de inclinación. $\square$

Observación 2.19 (Propiedades de las funciones afines)

a) Si $m > 0$, la función es *estrictamente creciente*; si $m < 0$, la función es *estrictamente decreciente*, y si $m = 0$, la función es constante ($f(x) = n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$).

b) Si $m \neq 0$, la función es biyectiva.

c) El punto de corte de la recta $y = mx + n$ con el eje de abscisas es $\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$ (supuesto $m \neq 0$) y con el eje de ordenadas es $(0, n)$. Para probarlo basta observar que

$$mx + n = 0 \;\Leftrightarrow\; mx = -n.$$

Además, como $m \neq 0$, se tiene que

$$mx = -n \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{n}{m}.$$

d) La gráfica de una aplicación afín $y = mx + n$ es la paralela a la gráfica de la aplicación lineal $y = mx$ trasladada n unidades a lo largo del eje de ordenadas. $\square$

Ejemplo 2.19 Si en un bidón que pesa vacío 2 kg se vierte agua (que pesa 1 kg por litro), ¿cómo expresar el peso total del bidón (en kg) en función de los litros de agua? Al peso de agua, que viene dado por la recta $y = x$ (en esta expresión x representa los litros de agua e y es su peso correspondiente), debemos sumar los 2 kg del envase, de modo que el peso total se obtiene mediante la relación $y = 2 + x$ (en esta expresión x representa los litros de agua e y es el peso correspondiente del agua más el bidón). La representación de esta recta se encuentra en la Figura 2.4. □

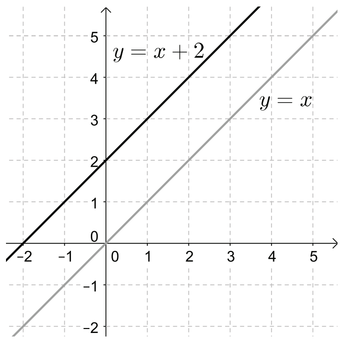


Figura 2.4: Gráfica de la función $y = x + 2$.

Observación 2.20 En el Ejemplo 2.19 también se puede resolver el problema inverso, es decir, ¿cuántos litros de agua hacen falta para que el bidón pese un total de y kg? La respuesta es, obviamente, $x = y - 2$ litros. Por ejemplo, ¿cuántos litros de agua hacen falta para que el bidón pese un total de 7 kg? La respuesta es $x = 7 - 2 = 5$ litros. □

Observación 2.21 Como una recta queda determinada por dos puntos, para hacer la gráfica de una función lineal o afín basta dibujar las coordenadas de dos puntos distintos y unirlos mediante la única recta que pasa por ambos. □

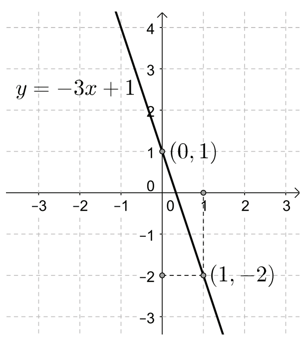


Figura 2.5: Gráfica de la función $y = -3x + 1$.

Ejemplo 2.20 Para dibujar la gráfica de la recta $y = -3x + 1$ basta observar que la imagen de $x = 0$ es $y = 1$ (es decir, la recta pasa por el punto $(0, 1)$) y la imagen de $x = 1$ es $y = -2$ (es decir, la recta pasa por el punto $(1, -2)$). La recta buscada es, por tanto, la que pasa por estos dos puntos (véase la Figura 2.5). $\square$

Definición 2.18 Se llama *función cuadrática* a toda aplicación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. $\square$

Observación 2.22 Las funciones cuadráticas son los polinomios en una variable que tienen grado 2. $\square$

Observación 2.23 Consideremos la función cuadrática $y = x^2$. El *dominio* de la función anterior es todo $\mathbb{R}$ (pues todo número real elevado al cuadrado es un número real) y su *imagen* es $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (pues el cuadrado de un número real es siempre no negativo). Además, la aplicación anterior es *suprayectiva* pero no *inyectiva*, pues $(-x)^2 = x^2$. La representación gráfica de la función $y = x^2$ es una *parábola* que es *simétrica* respecto al eje de ordenadas, que se denomina *eje de la parábola*. El origen de coordenadas se denomina *vértice* de la parábola.

La función $y = ax^2$ con $a \neq 0$ da lugar a otros tipos de parábolas:

a) Si $a > 1$, la parábola es más "cerrada".

b) Si $0 < a < 1$, la parábola es más "abierta".

c) Si $a < 0$, la parábola tiene las ramas hacia abajo.

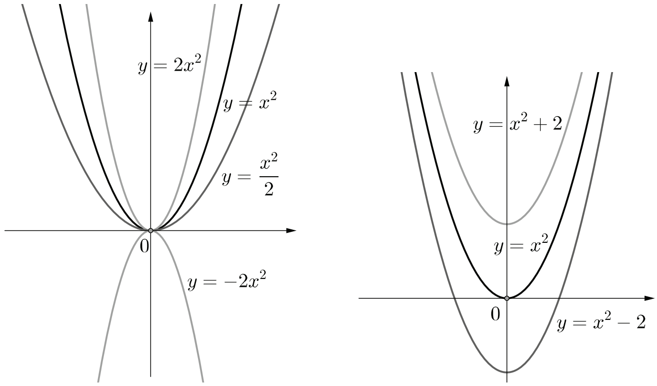
En todos los casos anteriores, el vértice es el punto $(0, 0)$. En la Figura 2.6(a) se encuentran representadas las parábolas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e $y = -2x^2$. $\square$

Observación 2.24 La gráfica de la parábola $y = x^2 + c$ se obtiene trasladando c unidades a lo largo del eje de ordenadas la gráfica de $y = x^2$. El vértice de esta parábola es el punto $(0, c)$. En la Figura 2.6(b) se encuentran representadas las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 2$. $\square$

Observación 2.25 Con la parábola $y = (x - b)^2$ trasladamos b unidades a lo largo del eje de abscisas la gráfica de la función $y = x^2$. El vértice de esta parábola es el punto $(b, 0)$. En la Figura 2.7 vienen representadas las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = (x + 2)^2$ e $y = (x - 2)^2$. $\square$

Proposición 2.2 *La función cuadrática general $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ es una parábola de eje paralelo al eje de ordenadas y con vértice en el punto*

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$



(a) $y = ax^2$. (b) $y = x^2 + c$.

Figura 2.6: Gráficas de parábolas $y = ax^2$ con $a \in \{1, 2, \frac{1}{2}, -2\}$ e $y = x^2 + c$ con $c \in \{0, 2, -2\}$.

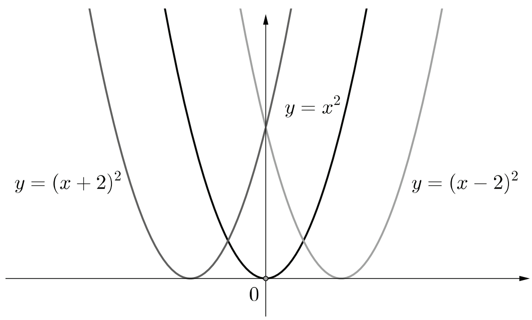


Figura 2.7: Gráficas de las parábolas $y = (x-b)^2$ con $b \in \{0, 2, -2\}$.

DEMOSTRACIÓN. La idea consiste en completar un cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a} - c\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \quad \square \end{aligned}$$

Observación 2.26 A partir de la Proposición 2.2 se tiene que las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ son (si existen)

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.4}$$

De esta forma podemos determinar los puntos de corte de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ con el eje de abscisas en función del signo del *discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac$:

a) Si $\Delta > 0 \Rightarrow \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ son los dos puntos de corte.

b) Si $\Delta = 0 \Rightarrow -\dfrac{b}{2a}$ es el único punto de corte.

c) Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ no hay puntos de corte.

En la Figura 2.8 se encuentran representadas las gráficas de las parábolas

$y = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, $y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ e $y = x^2 + x + 1$. □

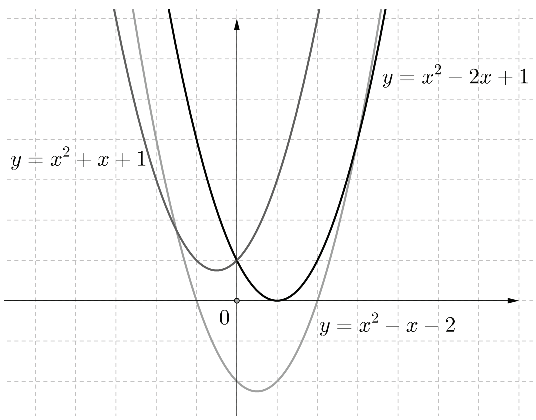


Figura 2.8: Gráficas de las parábolas $y = x^2 - x - 2$, $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = x^2 + x + 1$.

A continuación vamos a ver un resultado que relaciona la suma y el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado con los coeficientes de la misma:

Proposición 2.3 *Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, se verifica que*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ y } x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \tag{2.5}$$

DEMOSTRACIÓN. A la vista de (2.4), basta observar que

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

y

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\ &= \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \quad \square \end{aligned}$$

Ejemplo 2.21 Las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$ son $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$. Como se observa, $x_1 + x_2 = 6$ y $x_1 x_2 = 8$. Además, teniendo en cuenta la Observación 2.12, se tiene que el polinomio $x^2 - 6x + 8 = 0$ es divisible por $x - 4$ y por $x - 2$, de donde es fácil deducir que

$$x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2). \quad \square$$

Observación 2.27 Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$. Dividiendo la ecuación por a se obtiene

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Gracias a (2.5) podemos escribir la igualdad anterior en la forma

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0,$$

expresión que nos permite formar la ecuación de segundo grado a partir de sus raíces. Ejemplo: una ecuación de segundo grado que tenga por raíces $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$ es

$$x^2 + x - 2 = 0. \quad \square$$

Observación 2.28 La *función bicuadrada*

$$y = ax^4 + bx^2 + c \tag{2.6}$$

con $a \neq 0$ puede reducirse a una función cuadrática con el cambio de variable $z = x^2$, obteniendo

$$y = az^2 + bz + c. \tag{2.7}$$

Como las raíces de la función (2.7) vienen dadas (si existen) por

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

las cuatro raíces de la función (2.6) son (cuando existan)

$$z = \pm\sqrt{x} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \quad \square$$

Ejemplo 2.22 Para hallar las raíces de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ calculamos

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

de donde se obtiene los valores

$$\pm\sqrt{\frac{5+3}{2}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \ \text{ y } \ \pm\sqrt{\frac{5-3}{2}} = \pm\sqrt{1} = \pm 1. \qquad \square$$

2.4. Problemas

2.1. Se considera un polinomio de grado 2, otro de grado 3 y otro de grado 5. ¿Cuál es el grado de la suma de los tres polinomios anteriores? ¿Y el grado del producto?

2.2. Efectuar las siguientes operaciones:

a) $\big(x^2 - 5x + 1\big) + \big(2x^3 - 2x + 2\big) - \big(2x^2 - 3\big) - \big(x^2 + 5x - 4\big)$.

b) $(2x^3 + 15x + 3)(2x^2 - 3x + 10)$.

2.3. Si elevamos un polinomio de segundo grado a la potencia 3, ¿cuál es el grado del polinomio resultante?

2.4. Calcular $(1+\sqrt{x})^2 + (1-\sqrt{x})^2$, donde $x > 0$.

2.5. Aplicar el *binomio de Newton* para demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica:

a) $\displaystyle\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$.

b) $\displaystyle\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.

2.6. Hallar $(1+\sqrt{x})^5 + (1-\sqrt{x})^5$ para $x > 0$.

2.7. Efectuar las siguientes divisiones entre los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ que se dan a continuación:

a) $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 1$ y $Q(x) = x + 3$.

b) $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 5$ y $Q(x) = x - 1$.

c) $P(x) = 2x^3 - 4x + 6$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

d) $P(x) = x^4 + x + 8$ y $Q(x) = x^2 - 5$.

2.8. Evaluar el polinomio $P(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 5$ en el punto $x = \frac{3}{2}$.

2.9. Hallar la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 3x - 10$ b) $x^3 - x^2 - 12x + 32$ c) $x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 + 8x - 2$.

2.10. Hacer una representación gráfica de las funciones

$$y = \frac{3}{7}\,x + \frac{1}{3},\ y = \frac{3}{7}\,x - \frac{1}{4},\ y = \frac{3}{7}\,x - 1 \ \text{ e } \ y = \frac{3}{7}\,x.$$

¿Qué particularidad tienen las gráficas anteriores?

2.11. Esbozar la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = 4x - 3$ b) $y = (x + 1)^2$ c) $y = 3x^2 + 1$.

2.12. Un coche circula a 120 km/h.

a) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido transcurrida 1 hora?

b) ¿Y transcurrida media hora?

c) ¿Y transcurridas 3 horas?

d) ¿Y transcurridas $2'3$ horas?

e) Dibujar una gráfica que represente los kilómetros recorridos en función de las horas transcurridas.

f) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido transcurrido 1 minuto?

g) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido transcurridos 23 minutos?

h) Dibujar una gráfica que represente los kilómetros recorridos en función de los minutos transcurridos.

i) ¿Cuántos minutos necesita para recorrer 35 km?

2.13. Hallar las raíces reales de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 9 = 0$ b) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ c) $x^2 - 3x + 2 = 0$ d) $x^2 + x + 1 = 0$.

2.14. ¿Pueden ser $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ las raíces de una ecuación de segundo grado del tipo $ax^2 + bx = 0$?

2.15. Determinar si la ecuación

$$\left(2+x-x^2\right)^2=16$$

tiene raíces reales y, en caso afirmativo, calcularlas.

2.16. Se dispara verticalmente hacia arriba un proyectil de forma que la ecuación del movimiento es

$$x(t)=-\frac{1}{2}\,gt^2+500t,\ t\geq 0,$$

donde x representa el espacio en metros, t el tiempo en segundos y $g=9'8$ m/s^2. Determinar el punto más alto que alcanzará el proyectil, así como el tiempo que tardará en conseguirlo.

2.17. Hallar las raíces reales de las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4-2x^2+1=0$ b) $x^4-2x^2-4=0$

c) $x^4-25x^2+144=0$ d) $x^4+x^2+1=0.$

2.5. Soluciones

2.1. El grado de la suma es 5 y el grado del producto 10.

2.2. a) $2x^3-2x^2-12x+10$ b) $4x^5-6x^4+50x^3-39x^2+141x+30$.

2.3. 6.

2.4. $2x+2$.

2.5. Considerar $(1+1)^n$ y $(1-1)^n$.

2.6. $10x^2+20x+2$.

2.7. a) $P(x)=Q(x)2x^2-1$ b) $P(x)=Q(x)\left(x^3+3x^2+2x+5\right)$
c) $P(x)=Q(x)(2x+4)+2x+2$ d) $P(x)=Q(x)(x^2+5)+x+33$.

2.8. $\dfrac{225}{32}$.

2.9. a) $(x-5)(x+2)$ b) $(x+4)(x^2-5x+8)$ c) $(x-1)^4(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

2.10. Las rectas son paralelas.

2.12. a) 120 km b) 60 km c) 360 km d) 276 km f) 2 km g) 46 km i) 17 minutos y medio.

2.13. a) $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$ b) $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = -3$ c) $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ d) No tiene raíces reales.

2.14. No.

2.15. Hay dos soluciones: $x = -2$ y $x = 3$.

2.16. La altura máxima es $12755'1020$ m y tarda $51'0204$ s en alcanzarla.

2.17. a) $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ (ambas dobles) b) $x_1 = \sqrt{1+\sqrt{5}}$ y $x_2 = -\sqrt{1+\sqrt{5}}$ c) $x_1 = 4,\ x_2 = -4,\ x_3 = 3$ y $x_4 = -3$ d) No tiene raíces reales.

3 Matrices y determinantes

3.1. Introducción

En este capítulo se introduce el concepto de *matriz*. Se trata de una de las herramientas más importantes de las Matemáticas, usadas en infinidad de contextos científicos y tecnológicos (a modo de ejemplo, y sin entrar en detalles, la ordenación de páginas web que hacen buscadores como *Google* está basada en matrices). Será además una herramienta esencial en el Capítulo 4.

Tras presentar las matrices y su notación, se muestran diversos tipos de matrices, cómo operar con ellas (sumas, productos) y los conceptos de *matriz inversible* y de *rango de una matriz* (que serán de gran utilidad en el Capítulo 4). Se verá cómo el producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa.

Se introduce también el concepto de *determinante* de una matriz cuadrada, se muestran sus principales propiedades y algunas formas de calcularlo. Se verá que la existencia de matriz inversa para una matriz cuadrada es equivalente a que su determinante sea distinto de cero, y, en ese caso, mostraremos una fórmula que permite calcular la inversa de una matriz utilizando su determinante. Para terminar, como método alternativo para el cálculo de la inversa de una matriz, se presentará el *método de Gauss–Jordan*.

3.2. Matrices. Álgebra de matrices

En el Capítulo 1 se vio que en el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), enteros ($\mathbb{Z}$), racionales ($\mathbb{Q}$) y reales ($\mathbb{R}$) hay definidas operaciones como la suma, el producto, la división, etc. En la Definición 2.3 se consideró $\mathbb{R}^2$, que es un conjunto más amplio que los anteriores y que está formado por todos los pares ordenados de números reales:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} . \tag{3.1}$$

Sobre este tipo de conjuntos no tenemos definida ninguna de las operaciones anteriores. Vamos, por tanto, a tratar de generalizar estas operaciones a conjuntos más amplios, como $\mathbb{R}^2$ u otros similares.

Definición 3.1 Una *matriz* A es una colección de elementos $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dispuestos en la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La matriz anterior tiene m filas y n columnas y se denomina de *tipo* (m, n). En particular:

a) Una *matriz columna* de m elementos es una matriz de tipo $(m, 1)$.

b) Una *matriz fila* de n elementos es una matriz de tipo $(1, n)$. $\square$

Observación 3.1 Las definiciones de estas estructuras no son un mero capricho matemático, sino que resultan de una enorme utilidad en múltiples aplicaciones, algunas de las cuales las veremos en capítulos posteriores. $\square$

Ejemplo 3.1 Si consideramos

$$r = 5,\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}\ \text{ y }\ v = (10, 2, -4, 3),$$

se tiene que r es una matriz de tipo $(1, 1)$ (los números reales son un caso particular de matrices), A es una matriz de tipo $(2, 3)$, u es una matriz columna de dos elementos y v es una matriz fila de cuatro elementos. $\square$

Ejemplo 3.2 El conjunto $\mathbb{R}^2$ definido en (3.1) es el conjunto de todas las matrices fila (se puede también considerar $\mathbb{R}^2$ en formato de columna) de dos elementos. $\square$

Notación 3.1

a) Una matriz A de tipo (m, n) con elementos $a_{ij} \in \mathbb{R}$ se suele denotar en la forma $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ (i fila, j columna), lo que indica que a_{ij} es el elemento de A que ocupa la fila i y la columna j.

b) También se puede escribir la matriz A de tipo (m, n) como

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

donde $a_i \in \mathbb{R}^m$ representa la columna i–ésima de A para $i = 1, 2, \ldots, n$.

c) Denotamos por $\mathcal{M}_{m\times n}$ el conjunto formado por todas las matrices del tipo (m, n). $\square$

Definición 3.2 Dos *matrices* son *iguales* si son del mismo tipo y tienen los mismos elementos en las mismas posiciones. Es decir, dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{p,q} \in \mathcal{M}_{p\times q}$, se verifica:

$$A = B \ \Leftrightarrow\ m = p,\ n = q\ \text{ y }\ a_{ij} = b_{ij}\ \text{ para }\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n. \quad \square$$

Ejemplo 3.3 Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & x \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 4 \\ y & -3 & z \end{pmatrix}$$

son iguales si, y sólo si, $x = 4,\ y = 1$ y $z = 7$. □

Definición 3.3 (Suma de matrices y producto por escalares) A partir de dos matrices del mismo tipo, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se define la *suma* de A y B como la matriz $A + B = (c_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ con

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

y el *producto* de A por un *escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ como la matriz $\lambda A = (d_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ con

$$d_{ij} = \lambda a_{ij}. \quad \square$$

Ejemplo 3.4 La suma de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 1 \\ -7 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

viene dada por

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+14 & 12-2 & 4+1 \\ 1-7 & -3+11 & 7+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 5 \\ -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

y el producto de la matriz A por el número $\lambda = -2$ es

$$-2A = \begin{pmatrix} -2\times 2 & -2\times 12 & -2\times 4 \\ -2\times 1 & -2\times(-3) & -2\times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -24 & -8 \\ -2 & 6 & -14 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Observación 3.2 Si A, B, C son matrices del tipo (m, n) y λ, μ son escalares, se verifican las siguientes propiedades:

a) $A + B = B + A$.

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

c) $A + O = O + A = A$, donde $O = (0)_{i,j=1}^{m,n}$ es la *matriz nula*.

d) $A + (-A) = (-A) + A = O$.

e) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

f) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

g) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

h) $1A = A$. $\square$

Definición 3.4 Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$. La matriz que se obtiene a partir de A cambiando las filas por las columnas se denomina *matriz traspuesta* de A y se denota $A^{\mathrm{T}} = (a_{ji})_{j,i=1}^{n,m} \in \mathcal{M}_{n\times m}$. $\square$

Ejemplo 3.5 La traspuesta de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \text{ es } A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Observación 3.3 Claramente, $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$. $\square$

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, hemos visto como sobre el conjunto de matrices $\mathcal{M}_{m\times n}$ se tiene definida la suma y el producto por escalares. Además, el resultado de esas operaciones sigue siendo una matriz del mismo conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$, y las propiedades son similares a las que teníamos con los números reales. La pregunta que surge a continuación es: ¿es posible multiplicar matrices?

Definición 3.5 (Producto de filas por columnas) El producto de un vector fila del tipo $(1, n)$ por un vector columna del tipo $(n, 1)$ es una matriz del tipo $(1, 1)$ (es decir, un escalar), que viene dado por

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k. \quad \square$$

Observación 3.4 Para poder multiplicar una fila por una columna, ambas tienen que tener el mismo número de elementos. $\square$

Definición 3.6 (Producto de matrices) A partir de una matriz A de tipo (m, l) y de una matriz B de tipo (l, n), $A = (a_{ik})_{i,k=1}^{m,l} \in \mathcal{M}_{m\times l}$ y $B = (b_{kj})_{k,j=1}^{l,n} \in \mathcal{M}_{l\times n}$, se define la *matriz producto* de A y B como $AB = (c_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, siendo

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (\text{fila } i) \times (\text{columna } j) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{il}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdots \\ b_{lj} \end{pmatrix} \\ &= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{il} b_{lj} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}. \quad \square \end{aligned}$$

Observación 3.5

a) Nótese que para poder multiplicar la matriz A por la matriz B es necesario que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B.

b) Si A es una matriz de tipo (m, l) y B es una matriz de tipo (l, n), entonces la matriz producto AB es de tipo (m, n).

c) El producto de filas por columnas es un caso particular de producto de matrices.

d) El producto de una columna de n elementos (matriz $(n, 1)$) por una fila de n elementos (matriz $(1, n)$) es una matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}$.

e) Nótese que, a partir de c), el elemento de AB que ocupa la fila i y la columna j se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B. $\square$

Ejemplo 3.6 El producto de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

viene dado por

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot(-1) - 3\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 - 3\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 2 - 3\cdot(-3) \\ 4\cdot 4 + (-5)\cdot(-1) + 6\cdot 2 & 4\cdot 1 - 5\cdot 0 + 6\cdot 1 & 4\cdot 2 - 5\cdot 2 + 6\cdot(-3) \\ 1\cdot 4 + 0\cdot(-1) - 1\cdot 2 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 - 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 0\cdot 2 - 1\cdot(-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 15 \\ 33 & 10 & -20 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Observación 3.6 Propiedades del producto de matrices:

a) $A(BC) = (AB)C$ para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times l}, B \in \mathcal{M}_{l\times n}$ y $C \in \mathcal{M}_{n\times p}$.

b) En general, $AB \neq BA$.

c) $A(B + C) = AB + AC$ para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times l}$ y $B, C \in \mathcal{M}_{l\times n}$.

d) $(A + B)C = AC + BC$ para toda $A, B \in \mathcal{M}_{m\times l}$ y $C \in \mathcal{M}_{l\times n}$.

e) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda)B$ para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times l}, B \in \mathcal{M}_{l\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

f) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times l}$ y $B \in \mathcal{M}_{l\times n}$. $\square$

Ejemplo 3.7 Cabe resaltar que, tal y como se indica en la propiedad b) de la Observación 3.6, el producto de matrices no es, en general, conmutativo. Así, para las matrices A y B del Ejemplo 3.6 se tiene que

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 15 \\ 33 & 10 & -20 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ mientras que } BA = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad \square$$

En general, al multiplicar matrices de distinto tipo (m, l) y (l, n) se obtiene una matriz de otro tipo distinto (m, n). Hay un caso especial que pasamos a ver a continuación.

Definición 3.7 Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ se denomina *matriz cuadrada* (o *matriz de orden* n). $\square$

Notación 3.2 Denotaremos $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n\times n}$ al conjunto de matrices cuadradas de orden n. $\square$

Observación 3.7 Dos matrices cualesquiera de $\mathcal{M}_n$ pueden multiplicarse y el resultado sigue siendo una matriz de $\mathcal{M}_n$. $\square$

La pregunta que surge a continuación es: ¿podemos dividir una matriz de $\mathcal{M}_n$ por otra matriz de $\mathcal{M}_n$? En los números reales la división era igual a multiplicar por el inverso del denominador, es decir, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, se tiene que

$$\frac{b}{a} = ba^{-1}.$$

Además, el inverso a^{-1} de un número $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ se caracteriza por la propiedad

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

siendo 1 el elemento neutro del producto en los números reales. Imitando esta característica de los números reales, vamos a tratar de hallar la matriz inversa de una matriz de $\mathcal{M}_n$. Para ello necesitamos unas nociones previas:

Definición 3.8 Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n$. Los elementos a_{ii} se denominan *elementos diagonales*. $\square$

Ejemplo 3.8 Los elementos diagonales de las matrices A y B del Ejemplo 3.6 son, respectivamente, $\{1, -5, -1\}$ y $\{4, 0, -3\}$. $\square$

Definición 3.9 Se denomina *matriz identidad* a una matriz cuyos elementos diagonales valen 1 y el resto son nulos. Se denota por

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Observación 3.8 De la misma manera que el número 1 es el elemento neutro para la multiplicación de números (ya sean naturales, enteros, racionales o reales), pues

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \; \forall\, a \in \mathbb{R},$$

la matriz identidad I es el *elemento neutro* para la multiplicación de matrices de $\mathcal{M}_n$, pues

$$I \cdot A = A \cdot I = A, \; \forall\, A \in \mathcal{M}_n. \quad \square$$

Ahora, utilizando la matriz identidad, ya se puede introducir el concepto de inversa de una matriz $\mathcal{M}_n$.

Definición 3.10 Una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ es *inversible* (o *regular* o *no singular*) si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n$ de forma que

$$AB = BA = I.$$

En tal caso, la matriz B se denota A^{-1} y se le denomina *matriz inversa* de A. En el caso de que A no tenga la propiedad anterior, se dice que A es una matriz *no inversible* (o *singular o no regular*). $\square$

Ejemplo 3.9 Como puede comprobarse (multiplicando A por A^{-1} y viendo que el resultado es la matriz identidad), la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, mientras que la matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa. En la Sección 3.4. se estudiarán métodos para el cálculo de la inversa de una matriz. $\square$

Observación 3.9 Si $A, B \in \mathcal{M}_n$ son dos matrices inversibles, se verifica:

a) A^{-1} es única.

b) A^{-1} es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

d) $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$. $\square$

Veamos seguidamente algunos tipos destacados de matrices.

Definición 3.11 Una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ es:

a) *Simétrica* si $A = A^{\mathrm{T}}$, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$ para $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

b) *Ortogonal* si $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$, es decir, $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = I$.

c) *Triangular superior* (resp. *inferior*) si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ (resp. $i < j$).

d) *Diagonal* si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. Se denota

$$A = \operatorname{diag}(a_{ii}) = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}). \quad \square$$

Observación 3.10 Consideremos las siguientes matrices cuadradas de orden 3:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} \\ 2 & 4 & -1 \\ \sqrt{3} & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} & 1 & -\dfrac{2}{5} \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz A_1 es simétrica, A_2 es ortogonal, A_3 es triangular superior y A_4 es diagonal. $\square$

3.3. Determinantes. Propiedades

En los números reales se vio que se podían dividir por cualquier número salvo por el cero. Es decir, cualquier número $a \in \mathbb{R}$ tiene inverso a^{-1} salvo el caso $a = 0$. La pregunta que surge a continuación es: ¿cómo determinar, de una manera sencilla, las matrices que no tienen inversa? Es claro que la matriz 0 no tiene inversa, pero ¿y el resto? Vamos a introducir a continuación el concepto de determinante de una matriz que nos va a permitir responder, de una forma sencilla, a las preguntas anteriores.

Definición 3.12 Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$. Se llama *determinante* de la matriz A, y se denota $\det(A)$ o $|A|$, al número:

a) $\underline{n = 1}$: $\det(A) = \det(a_{11}) = a_{11}$.

b) $\underline{n = 2}$: $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

c) $\underline{n=3}$: La expresión del determinante para una matriz de orden tres es:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

d) $\underline{n \geq 4}$: A través de la Definición 3.14 que se introducirá más adelante, se va a ver una manera de obtener estos determinantes. □

Observación 3.11 (Regla de Sarrus) El determinante de una matriz de orden 3 se obtiene sumando las multiplicaciones de los elementos $\clubsuit$, $\diamondsuit$ y $\spadesuit$ en A_+ y restando, a continuación, las multiplicaciones de los elementos $\clubsuit$, $\diamondsuit$ y $\spadesuit$ en A_-, donde

$$A_+ = \begin{pmatrix} \clubsuit & \diamondsuit & \spadesuit \\ \spadesuit & \clubsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \spadesuit & \clubsuit \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_- = \begin{pmatrix} \spadesuit & \diamondsuit & \clubsuit \\ \diamondsuit & \clubsuit & \spadesuit \\ \clubsuit & \spadesuit & \diamondsuit \end{pmatrix}. \quad \square$$

Ejemplo 3.10 $\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = 5\times 7 - 2\times 1 = 33$, $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2\times 2 - 4\times 1 = 0$ y

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 1\times 3\times 4 + 2\times 2\times 3 + 0\times 4\times 1$$
$$- 0\times 3\times 3 - 2\times 4\times 4 - 1\times 2\times 1$$
$$= 12 + 12 + 0 - 0 - 32 - 2 = -10. \quad \square$$

Veamos cómo se puede extender la noción de determinante a matrices cuadradas de orden superior al tercero. Para ello introducimos la siguiente definición:

Definición 3.13 Consideremos una matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n.$$

a) Se llama *menor complementario* del elemento a_{ij}, y lo denotamos M_{ij}, al determinante que resulta al suprimir en A la fila i y la columna j.

b) Se llama *adjunto* (o *cofactor*) del elemento a_{ij} al número

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad \square$$

Ejemplo 3.11 Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. El menor complementario del elemento $a_{21} = -3$ de A es $M_{21} = \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = -7 + 10 = 3$, y su adjunto, el elemento $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -3$. $\square$

Definición 3.14 Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n$. Se llama *determinante* de la matriz A, y se denota $\det(A)$, al número

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

(si desarrollamos por la fila i–ésima) o

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

(si desarrollamos por la columna j–ésima). $\square$

Observación 3.12 La definición anterior es independiente de la fila o columna elegidas. $\square$

Ejemplo 3.12 Calculemos el determinante de la matriz A del Ejemplo 3.10 desarrollando por los elementos de la última columna:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0 \times \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 4 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= -2(1-6) + 4(3-8) = 10 - 20 = -10. \quad \square$$

Observación 3.13 Nótese que, con la definición anterior, podemos calcular determinantes de orden superior a tres. Así, desarrollando el determinante por los elementos de la primera fila, se tiene que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \times \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 0 \times \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$+ (-1) \times \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 0 \times \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= -46 - 0 - (-42) - 0 = -4. \quad \square$$

Definición 3.15 Una *combinación lineal de filas* (o *de columnas*) de una matriz es otra fila (o columna) que se obtiene multiplicando varias filas (o columnas) por diferentes constantes y sumándolas. $\square$

Observación 3.14 (Propiedades de los determinantes)

a) El determinante de una matriz triangular (ya sea superior o inferior) es el producto de sus elementos diagonales. En particular,

$$\det(I) = 1.$$

b) $\det(a_1, \dots, a_i + \tilde{a}_i, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, \tilde{a}_i, \dots, a_n)$.

c) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y λa_i es la columna a_i de una matriz multiplicada por λ, entonces

$$\det(a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n) = \lambda \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n).$$

Consecuentemente, el determinante de una matriz A mulplicada por un escalar λ es igual a $\lambda \times \overset{n)}{\cdots} \times \lambda = \lambda^n$ veces el determinante de A, es decir,

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A), \ \forall\, A \in \mathcal{M}_n.$$

d) El determinante de una matriz que tenga una columna de ceros vale 0.

e) El determinante de una matriz con dos columnas iguales es cero, es decir,

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0.$$

f) Si se intercambian dos columnas, el determinante cambia de signo, es decir,

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n).$$

g) El determinante no varía si a una columna se le suma una combinación lineal de las columnas restantes, es decir,

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j, \dots, a_n).$$

h) Si una columna es combinación lineal de otras, el determinante vale 0. Es decir, si

$$a_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j \ \Rightarrow \ \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0.$$

i) $\det(A) = \det(A^{\mathrm{T}}), \ \forall\, A \in \mathcal{M}_n$.

j) $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B), \ \forall A, \ B \in \mathcal{M}_n$. $\square$

Observación 3.15 Las propiedades anteriores de los determinantes que están referidas a columnas siguen siendo válidas, en virtud de i), cuando se aplica a las filas de una matriz lo dicho sobre sus columnas. □

Proposición 3.1 *Una matriz* $A \in \mathcal{M}_n$ *es inversible* (*es decir, existe* A^{-1}) *si, y sólo si,* $\det(A) \neq 0$. *En tal caso, en virtud de la propiedad j) anterior,*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}. \quad \square$$

Definición 3.16 Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

a) Se llama *submatriz* de A a cualquier matriz que se obtenga a partir de A suprimiendo filas y columnas.

b) Si una submatriz de A es cuadrada de orden k, a su determinante se le denomina *menor* de orden k de la matriz A.

c) Al menor formado por las k primeras filas y las k primeras columnas de A se le llama *menor principal* de orden k y lo denotaremos δ_k. Nótese que si $m = n$, entonces $\delta_n = \det(A)$. □

Ejemplo 3.13 Si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

el menor de orden dos formado por las dos primeras filas y las columnas segunda y tercera es $\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y el menor principal de orden 3 es

$$\delta_3 = \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Definición 3.17 Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. El *rango* de la matriz A es el mayor orden de los menores no nulos de A. Denotaremos por $\mathrm{rg}(A)$ al rango de la matriz A. □

Ejemplo 3.14 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puede comprobarse que todos los menores de orden tres

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \det\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 0 & -4\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 3 & 1 & -4\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\ \text{ y }\ \det\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -4\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

son nulos. Como $\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix} = -6 \neq 0$, se tiene que $\mathrm{rg}(A) = 2$. □

Observación 3.16 (Propiedades del rango de una matriz)

a) El rango de una matriz no varía si se intercambian entre sí dos filas o dos columnas.

b) Si una matriz A tiene una fila o columna de ceros, el rango de A coincide con el rango de la matriz que se obtiene al suprimir esa fila o columna.

c) El rango de una matriz no cambia si se suprime una fila o columna que sea combinación lineal de las restantes. □

3.4. Cálculo de la inversa de una matriz

Proposición 3.2 *Si $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n$ es inversible, entonces su matriz inversa viene dada por*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$$

donde A_{ij} es el adjunto del elemento a_{ij}.

DEMOSTRACIÓN. La prueba reposa en la propiedad

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases}\det(A), & k = i\\ 0, & k \neq i\end{cases}$$

(véase el Problema 3.6). Veamos que $AA^{-1} = I$. En efecto,

$$AA^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{nj} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{nj} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A) & & & \\ & \det(A) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \det(A) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \det(A) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = I. \qquad \square$$

Ejemplo 3.15 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = 2$ (compruébese), la matriz A es inversible. Para poder aplicar la fórmula anterior calculamos todos los adjuntos

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = 14, \qquad A_{12} = -\det \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} = -22,$$

$$A_{13} = \det \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = 2, \qquad A_{21} = -\det \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = -22,$$

$$A_{22} = \det \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} = 36, \qquad A_{23} = -\det \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = \det \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 2, \qquad A_{32} = -\det \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = -4,$$

$$A_{33} = \det \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = 1.$$

Nótese que, debido a la simetría de la matriz A, se verifica que $A_{12} = A_{21}$, $A_{13} = A_{31}$ y $A_{23} = A_{32}$. Esto supone que, en realidad, cuando la matriz es simétrica, no hace falta calcular todos los adjuntos, pues algunos de ellos están repetidos. Por tanto, la matriz inversa de A viene dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 14 & -22 & 2 \\ -22 & 36 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & -11 & 1 \\ -11 & 18 & -2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Compruébese que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. $\square$

Para matrices de orden $n \in \mathbb{N}$ grande no resulta muy práctico el método anterior para calcular la inversa de una matriz (pues deben calcularse un determinante de orden n y n^2 determinantes de orden $n-1$). En estos casos es más práctico el siguiente método:

Teorema 3.1 (Método de Gauss–Jordan) *Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible. Para calcular la inversa de A ampliamos ésta con la matriz identidad de orden n :*

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n\times 2n}$$

y, sin cambiar nunca el orden de las columnas, se hacen transformaciones elementales sobre las filas de la matriz $(A|I)$ hasta que ésta quede en la forma

$$(I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{array}\right).$$

Se verifica que la inversa de A es la matriz dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Observación 3.17 Las *transformaciones elementales* a las que se refiere el Teorema 3.1 consisten en:

a) Multiplicar una fila por un elemento no nulo.

b) Sumar a una fila otra multiplicada por un número.

c) Intercambiar el orden de las filas. □

Ejemplo 3.16 Apliquemos este método al cálculo de inversa de la matriz A del Ejemplo 3.15.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 7 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{7}{10} & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(2)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{7}{10} & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{7}{10} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{18}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(3)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{7}{10} & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 18 & -4 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\overset{(4)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & -20 & 5 \end{array}\right) \overset{(5)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\overset{(6)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 18 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Luego la matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 1 \\ -11 & 18 & -2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Las transformaciones elementales que se han efectuado son las siguientes:

$$\begin{array}{ll} (1)\ \frac{1}{10} \times \mathrm{F1} & (2)\ \mathrm{F2} - 7 \times \mathrm{F1},\ \mathrm{F3} - 8 \times \mathrm{F1} \\ (3)\ 10 \times \mathrm{F2},\ 5 \times \mathrm{F3} & (4)\ \mathrm{F1} - \frac{7}{10} \times \mathrm{F2},\ \mathrm{F3} - 2 \times \mathrm{F2} \\ (5)\ \frac{1}{10} \times \mathrm{F3} & (6)\ \mathrm{F1} + 2 \times \mathrm{F3},\ \mathrm{F2} - 4 \times \mathrm{F3}, \end{array}$$

donde $\mathrm{F}i$ denota la fila i–ésima de la matriz. □

3.5. Problemas

3.1. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar, cuando sea posible (en caso contrario indicarlo):

$$\frac{A}{3},\ A+B,\ B+C,\ A^2,\ B^2,\ AB,\ BA,\ BC,\ CB \text{ y } CA.$$

b) Comprobar si las siguientes afirmaciones son correctas:

$$(B+C)A = BA + CA \text{ y } A(B+C) = AB + AC.$$

c) Comprobar también que $(BA)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$.

3.2. Determinar dos matrices cuadradas de orden dos, no nulas, cuyo producto sea la matriz nula.

3.3. Se consideran la matriz fila $u = (1, 3, 2)$ y la matriz columna $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcular los productos uv y vu.

3.4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcular las sucesivas potencias A^n para $n \in \mathbb{N}$.

3.5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = -2$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3.6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, demostrar que para todo $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = \begin{cases} \det(A), & k = i \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

3.7. Se considera la función $P(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix}$. Encontrar las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

3.8. [Determinante de Vandermonde] Hallar el determinante de la *matriz de Vandermonde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{pmatrix},$$

donde $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}$. ¿Cuándo la matriz A es inversible?

3.9. Demostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\det \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda+3).$$

3.10. Hallar el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

3.11. Una matriz tiene 2 filas y 4 columnas.

a) ¿Puede ser 4 su rango?

b) ¿Y 3?

c) ¿Puede variar el rango si se suprime una columna?

3.12. Resolver la ecuación matricial $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y X es una matriz cuadrada de orden 2 (**Indicación**: multiplicar por A^{-1} en ambos lados de la igualdad; ¡atención!, la multiplicación se puede hacer por la izquierda o por la derecha; escoger el lado adecuado).

3.13. Resolver la ecuación matricial $XA = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y X una matriz cuadrada de orden 2.

3.14. Calcular las inversas de las siguientes matrices:

a) $A = -3$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comprobar que, en todos los casos, se verifica que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

3.6. Soluciones

3.1. a) $\dfrac{A}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $B + C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 11 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$ y $CA = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ (las matrices A y B no se pueden sumar y tampoco existen B^2, AB, BC ni CB). b) La primera afirmación es cierta y la segunda, como se ha visto en a), carece de sentido. c) Inmediato.

3.2. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ para todo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

3.3. $uv = 8$ y $vu = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

3.4. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $n \geq 3$.

3.5. a) -2 b) $-1 - 2x$ c) -9 d) 36.

3.6. Demostrarlo primero para el caso $i = k = 1$ (los restantes casos se demuestran de forma análoga).

3.7. $P(1) = 0$ y $P(2) = 0$.

3.8. $\det(A) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)$. A es inversible $\Leftrightarrow$ $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$.

3.9. Basta desarrollar el determinante.

3.10. a) 1 b) 2 c) 3 d) 2.

3.11. a) No b) No c) Sí.

3.12. $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

3.13. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

3.14. a) $A^{-1} = -\dfrac{1}{3}$ b) $A^{-1} = -\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$

4 Sistemas de ecuaciones lineales

4.1. Introducción

Este capítulo se inicia con el planteamiento de dos problemas en términos de sistemas de ecuaciones lineales, pasando a continuación a describir de forma abstracta el concepto de *sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas* y su caracterización como *sistemas compatibles determinados*, *sistemas compatibles indeterminados* o *sistemas incompatibles*, dependiendo de si tiene una, infinitas o ninguna solución, respectivamente.

Tras mostrar varias propiedades de estos sistemas, se presentan tres métodos básicos de resolución de casos simples: *sustitución*, *igualación* y *reducción*. Son métodos fáciles de aplicar en sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Sin embargo, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mayores necesita técnicas numéricas más sofisticadas para generar algoritmos que, aunque pueden requerir un elevado número de operaciones para sistemas muy grandes, permiten (con la ayuda de un ordenador) encontrar la solución buscada de una forma rápida. Para acercarnos hacia esas técnicas, utilizaremos las matrices (que, como ya se dijo en el Capítulo 3, constituyen una herramienta matemática de gran importancia) y reescribiremos un sistema lineal arbitrario en *forma matricial*, utilizando la *matriz de coeficientes* y su *matriz ampliada*.

Nos centraremos a continuación en sistemas lineales de n ecuaciones y n incógnitas, cuya matriz de coeficientes es cuadrada (n filas y n columnas), y mostraremos la *regla de Cramer* para resolver dichos sistemas (cuando tengan solución única).

Para casos generales de sistemas lineales de m ecuaciones y n incógnitas presentaremos un resultado muy completo, conocido como el *teorema de Rouché–Fröbenius*, que caracteriza, en términos de los rangos de la matriz de un sistema lineal y de su matriz ampliada, si el sistema es incompatible o compatible y, en este último caso, si es determinado o indeterminado.

Por último, y como primer método de tipo algorítmico para resolver sistemas lineales de gran tamaño, presentaremos el *método de Gauss*, que veremos también que es de rápida y fácil aplicación en casos de sistemas con pocas ecuaciones.

4.2. Motivación

Vamos a introducir los sistemas de ecuaciones lineales a través de dos ejemplos prácticos muy sencillos.

Ejemplo 4.1 En una frutería se han comprado 1400 gramos de manzanas, 1250 gramos de plátanos y 4400 gramos de sandía, por un importe total de 10€. Sabiendo que el kilo de plátanos cuesta el doble que el de manzanas y que el kilo de sandía cuesta la cuarta parte que el kilo de manzanas, ¿cuánto vale el kilo de manzanas?

Para resolver este problema hacemos lo siguiente:

1) Denotamos x a nuestra incógina. Es decir, $x =$ valor del kilo de manzanas.

2) El valor del kilo de plátanos será $2x$ (el doble que el kilo de manzanas).

3) El valor del kilo de sandía será $\frac{x}{4}$ (la cuarta parte que el kilo de manzanas).

4) Teniendo en cuenta que

$$\begin{cases} 1'4\,x = \text{valor de lo gastado en manzanas,} \\ (1'25)\,2x = 2'5\,x = \text{valor de lo gastado en plátanos,} \\ 4'4\,\dfrac{x}{4} = 1'1\,x = \text{valor de lo gastado en sandía,} \end{cases}$$

se tiene que

$$1'4\,x + 2'5\,x + 1'1\,x = 10.$$

Por tanto, tenemos que resolver

$$5x = 10,$$

que es una ecuación lineal con una incógnita, cuya solución es $x = 2$. Luego el kilo de manzanas cuesta 2€ y, por tanto, el kilo de plátanos cuesta 4€ y el de sandía $0'5$€. □

Ejemplo 4.2 Determinar las edades de un padre y de su hijo, sabiendo que actualmente la edad del padre es seis veces la del hijo y que, dentro de 20 años, será el doble.

Para resolver este problema hacemos lo siguiente:

1) En este caso tenemos dos incógnitas: la edad del padre, que denotamos x, y la edad del hijo, que denotamos y.

2) Puesto que la edad del padre es seis veces la del hijo, se debe cumplir que

$$x = 6y, \tag{4.1}$$

que es una ecuación lineal con dos incógnitas (x e y). Es claro que esta ecuación no nos determina unívocamente ambas edades, pues hay infinidad de soluciones de dicha ecuación (por ejemplo, $x = 6$ e $y = 1$ o $x = 60$ e $y = 10 \ldots$).

3) Puesto que dentro de 20 años la edad del padre será el doble que la del hijo, se debe cumplir que

$$x + 20 = 2(y + 20)$$

(nótese que incrementamos 20 años tanto en la edad del padre como en la del hijo), o, dicho de otro modo,

$$x - 2y = 20. \tag{4.2}$$

De nuevo hemos obtenido una ecuación lineal con dos incógnitas que tiene infinidad de soluciones.

Puesto que x e y debe ser solución al mismo tiempo de (4.1) y (4.2), tenemos que resolver

$$\begin{cases} x - 6y = 0 \\ x - 2y = 20, \end{cases}$$

que es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógintas (véase el Problema 4.1). □

4.3. Expresión matricial de los sistemas de ecuaciones lineales

Definición 4.1 Un *sistema lineal de ecuaciones* de m ecuaciones y n incógnitas es una expresión de la forma

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \right. \tag{4.3}$$

donde los elementos a_{ij} son los *coeficientes* del sistema (datos conocidos), x_i son las *incógnitas* (valores que se quieren conocer) y b_j los *términos independientes* del sistema (datos conocidos).

a) Una *solución* de (4.3) es un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ para el que cumplen las m ecuaciones de las que consta el sistema (4.3).

b) El conjunto de todas las soluciones de (4.3) se denomina *solución general* del sistema (4.3).

c) Clasificación de los sistemas lineales de ecuaciones: dependiendo de si tienen solución o no y, en caso afirmativo, de cuántas soluciones tienen, se distinguen tres tipos de sistemas lineales:

   i) *Compatibles*, cuando tienen solución. A su vez, pueden ser:

1) *Determinados*, si tienen una única solución. Los denotaremos por (SCD).
2) *Indeterminados*, si tienen infinitas soluciones. Los denotaremos por (SCI).

ii) *Incompatibles*, cuando no tienen solución. Los denotaremos por (SI). □

Ejemplo 4.3 Consideremos los sistemas lineales

$$(\mathcal{S}_1)\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=2 \\ x_1-x_2=0 \end{array}\right., \ (\mathcal{S}_2)\left\{\begin{array}{r} x_1+x_2=2 \\ 2x_1+2x_2=4 \end{array}\right. \ \text{y} \ (\mathcal{S}_3)\left\{\begin{array}{r} x_1+x_2=2 \\ 2x_1+2x_2=3. \end{array}\right.$$

El sistema $(\mathcal{S}_1)$ es compatible y determinado (la única solución es $x_1 = x_2 = 1$), el sistema $(\mathcal{S}_2)$ es compatible e indeterminado (pues tiene infinitas soluciones de la forma $x_1 = \lambda$, $x_2 = 2 - \lambda$ para cualquier valor $\lambda \in \mathbb{R}$) y el sistema $(\mathcal{S}_3)$ es incompatible (pues no tiene solución). □

Observación 4.1 La *discusión de un sistema lineal de ecuaciones* consiste en determinar si el sistema es compatible o incompatible y, en caso de ser compatible (ya sea determinado o indeterminado), hallar su solución general. □

Definición 4.2 Dos sistemas lineales de ecuaciones son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones. □

Definición 4.3 Una *combinación lineal de ecuaciones* es otra ecuación que se obtiene multiplicando varias ecuaciones por diferentes constantes y sumándolas. □

Ejemplo 4.4 La ecuación

$$10x_1 + 3x_2 = 5$$

es combinación lineal de las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 = 3, \end{array}\right.$$

pues se verifica que

$$2\Big(3x_1 - 2x_2 = 1\Big) + \Big(4x_1 + 7x_2 = 3\Big) = \Big(10x_1 + 3x_2 = 5\Big). \quad \square$$

Observación 4.2

a) Si en un sistema lineal de ecuaciones se suprime una ecuación que sea combinación lineal de las restantes, se obtiene un sistema lineal equivalente al primero.

b) Para resolver un sistema lineal de ecuaciones, basta resolver un sistema lineal equivalente en el que ninguna ecuación sea combinación lineal de las demás. □

Ejemplo 4.5 Los sistemas de ecuaciones

$$(\mathcal{S}_1)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 = 3 \\ 7x_1 + 5x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad (\mathcal{S}_2)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 = 3 \end{cases}$$

son equivalentes, pues la última ecuación de $(\mathcal{S}_1)$ se obtiene como suma de las dos anteriores. Por tanto, para hallar la solución de $(\mathcal{S}_1)$ basta resolver $(\mathcal{S}_2)$. Para ello podemos utilizar, por ejemplo, las siguientes técnicas clásicas:

a) *Sustitución*: se despeja una de las variables en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra. Por ejemplo, si despejamos x_1 en la primera ecuación, obtenemos

$$x_1 = \frac{1 + 2x_2}{3}. \tag{4.4}$$

Al sustituir el valor (4.4) en la segunda ecuación obtenemos

$$3 = 4x_1 + 7x_2 = 4\frac{1 + 2x_2}{3} + 7x_2 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3}x_2 + 7x_2 = \frac{4}{3} + \frac{29}{3}x_2,$$

de donde

$$\frac{29}{3}x_2 = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{5}{29}.}$$

Utilizando la relación (4.4) obtenemos

$$x_1 = \frac{1 + 2x_2}{3} = \frac{1 + 2\frac{5}{29}}{3} = \frac{1 + \frac{10}{29}}{3} = \frac{39}{87} = \frac{13}{29} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{13}{29}.} \tag{4.5}$$

b) *Igualación*: se despeja una de las variables en cada una de las ecuaciones y luego se igualan los resultados obtenidos. Así, al despejar la variable x_1 en la primera ecuación, se obtiene (4.4), y al despejar x_1 en la segunda ecuación, se obtiene

$$x_1 = \frac{3 - 7x_2}{4}. \tag{4.6}$$

Al igualar las expresiones (4.4) y (4.6) se tiene que

$$\frac{1 + 2x_2}{3} = \frac{3 - 7x_2}{4} \Rightarrow 4 + 8x_2 = 9 - 21x_2 \Rightarrow 29x_2 = 5 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{5}{29}.}$$

A partir de x_2, el valor de x_1 se obtiene como en (4.5).

c) *Reducción*: se multiplican las dos ecuaciones por números adecuados para que al hacer la diferencia entre las dos ecuaciones resultantes una de las incógnitas no aparezca. Por ejemplo, si multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3, obtenemos el sistema equivalente

$$(\mathcal{S}_3)\left\{\begin{aligned} 12x_1 - 8x_2 &= 4 \\ 12x_1 + 21x_2 &= 9. \end{aligned}\right.$$

Si a la segunda ecuación de $(\mathcal{S}_3)$ le restamos la primera, obtenemos

$$29x_2 = 5 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{5}{29}.}$$

A partir de x_2, el valor de x_1 se obtiene como en (4.5).

Finalmente, para asegurarnos de que la solución encontrada es correcta, basta comprobar que se cumplen las ecuaciones del sistema. En efecto,

$$\left\{\begin{array}{l} 3\,\frac{13}{29} - 2\,\frac{5}{29} = \frac{39}{29} - \frac{10}{29} = \frac{29}{29} = 1, \\ 4\,\frac{13}{29} + 7\,\frac{5}{29} = \frac{52}{29} + \frac{35}{29} = \frac{87}{29} = 3. \end{array}\right. \quad \square$$

Definición 4.4 El sistema lineal (4.3) puede expresarse en forma matricial como $Ax = b$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ \text{ y } \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

A es la *matriz de coeficientes* del sistema, b el vector *término independiente* y x el vector *incógnita*. La matriz que se obtiene yuxtaponiendo a A el vector b, y que denotaremos

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

se denomina *matriz ampliada* del sistema. $\square$

Ejemplo 4.6 El sistema lineal de ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}\right.$$

puede escribirse matricialmente en la forma $Ax = b$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\text{ y }\; b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para resolver el sistema $Ax = b$, si A es una matriz inversible (que según vimos en la Proposición 3.1 es equivalente a que $\det(A) \neq 0$), podemos multiplicar (matricialmente) a la izquierda por la matriz A^{-1} y obtener

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; A^{-1}Ax = A^{-1}b \;\Leftrightarrow\; Ix = A^{-1}b \;\Leftrightarrow\; x = A^{-1}b.$$

Por tanto, si A es inversible, entonces existe una única solución del sistema anterior que viene dada por $x = A^{-1}b$ (véase el Problema 4.4). □

Teorema 4.1 *Si A es una matriz cuadrada e inversible, todo sistema $Ax = b$ (sea quien sea el vector b) es compatible y determinado (es decir, tiene una única solución). Además, la (única) solución del sistema $Ax = b$ con $A \in \mathcal{M}_n$ inversible y $b \in \mathbb{R}^n$ viene dada por*

$$x = A^{-1}b. \quad \square$$

Observación 4.3 La técnica de resolución de sistemas de ecuaciones con matriz asociada cuadrada mostrada en el Ejemplo 4.6 no es la única. Pueden aplicarse también las técnicas de sustitución, igualación o reducción presentadas en el Ejemplo 4.5 (véase el Problema 4.5), en las que no es necesario el cálculo de la matriz inversa A^{-1}. □

Veamos, a continuación, otra forma de resolver sistemas de ecuaciones lineales con matriz asociada cuadrada e inversible.

Teorema 4.2 (Regla de Cramer) *La (única) solución del sistema lineal $Ax = b$ con $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ inversible y $b = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ viene dada por*

$$x_j = \frac{\det(\Lambda_j)}{\det(A)},$$

donde para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, la matriz Λ_j está definida como

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como la matriz A es inversible, por el Teorema 4.1 sabemos que la única solución del sistema $Ax = b$ es

$$x = A^{-1}b.$$

Por otra parte, por la Proposición 3.2 también sabemos que la inversa de A viene dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

donde A_{ij} es el adjunto del elemento a_{ij}. Por tanto,

$$x = A^{-1}b \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Así pues, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, se tiene que

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}) = \frac{\det(\Lambda_j)}{\det(A)},$$

pues basta desarrollar el determinante de Λ_j por la columna j–ésima, considerando la Definición 3.14. □

Observación 4.4 A la vista del Teorema 4.2, para obtener la componente j–ésima de la solución del sistema $Ax = b$ con A inversible, lo que se hace es considerar la matriz Λ_j que se obtiene de A cambiando la columna j–ésima por el vector b. El determinante de esta matriz Λ_j dividido por el determinante de la matriz A proporciona la componente x_j del vector solución x. □

Ejemplo 4.7 Consideremos el sistema lineal $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 12 \\ 3 & 4 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\text{ y }\; b = \begin{pmatrix} 32 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar, como A es una matriz cuadrada de orden 3 y

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 12 \\ 3 & 4 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} = -264$$

(compruébese), se tiene que $Ax = b$ es un sistema compatible y determinado (es decir, con una única solución). A continuación consideramos los determinantes

$$\det(\Lambda_1) = \det \begin{pmatrix} 32 & -3 & 12 \\ 2 & 4 & -3 \\ 12 & -5 & 6 \end{pmatrix} = -264, \; \det(\Lambda_2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 32 & 12 \\ 3 & 2 & -3 \\ 4 & 12 & 6 \end{pmatrix} = -528$$

y

$$\det(\Lambda_3) = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 32 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 12 \end{pmatrix} = -792.$$

De esta forma, la solución del sistema $Ax = b$ viene dada por

$$x_1 = \frac{-264}{-264} = 1, \; x_2 = \frac{-528}{-264} = 2 \; \text{ y } \; x_3 = \frac{-792}{-264} = 3. \qquad \square$$

La respuesta a las cuestiones planteadas en la Observación 4.1 se obtiene a partir del siguiente resultado:

Teorema 4.3 (Rouché–Fröbenius) *Consideremos el sistema lineal $Ax = b$, donde*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\; y \;\; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

a) *El sistema $Ax = b$ es compatible* $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$.

Es decir, la condición necesaria y suficiente para que el sistema $Ax = b$ tenga solución es que la matriz del sistema y la matriz ampliada tengan el mismo rango.

b) *En el caso de que el sistema $Ax = b$ sea compatible, pueden presentarse dos casos (nótese que siempre se verifica que* $\operatorname{rg}(A) \leq \text{mín}\{m, n\} \leq n$):

i) *Si* $\operatorname{rg}(A) = n \;\Rightarrow\;$ *el sistema es determinado.*

ii) *Si* $\operatorname{rg}(A) < n \;\Rightarrow\;$ *el sistema es indeterminado. En este caso, si denotamos por* $r = \operatorname{rg}(A)$*, la solución puede hallarse despejando r incógnitas en función de las $n - r$ restantes. Es decir, para cada valor de estas $n - r$ incógintas existe una única solución de las otras r. Además, basta resolver el sistema que resulta de eliminar todas las ecuaciones que no intervienen en la submatriz con la que se ha obtenido el rango.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la matriz A y su matriz ampliada

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

y denotemos por $r = \operatorname{rg}(A)$.

a) $\boxed{\Rightarrow}$ Si el sistema $Ax = b$ tiene solución, existe un vector $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ verificando

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}s_1 & + & a_{12}s_2 & + & \cdots & + & a_{1n}s_n & = & b_1 \\ a_{21}s_1 & + & a_{22}s_2 & + & \cdots & + & a_{2n}s_n & = & b_2 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{m1}s_1 & + & a_{m2}s_2 & + & \cdots & + & a_{mn}s_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

Luego la última columna de la matriz ampliada $(A|b)$ es combinación lineal de las n primeras y, al suprimir esta columna, se obtiene la matriz A. Por tanto, se verifica que $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A) = r$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Veamos que si $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A) = r$, entonces el sistema $Ax = b$ tiene solución. En efecto, sea M un menor de orden r no nulo. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que M es el menor principal de orden r de A, es decir, el formado por las r primeras filas y las r primeras columnas de la matriz A (puesto que se puede cambiar adecuadamente el orden de las ecuaciones y el orden de las incógnitas). Es decir,

$$M = \delta_r = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0$$

(nótese que M es también el menor principal de orden r de la matriz ampliada $(A|b)$). Puesto que las $m-r$ filas restantes de A son combinaciones lineales de las r primeras, la ecuación correspondiente a cada una de estas filas es combinación lineal de las r primeras ecuaciones. Se obtiene así que el sistema lineal $Ax = b$ es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & + & \cdots & + & a_{rn}x_n & = & b_r \end{array}\right.$$

o, equivalentemente, a

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1r}x_r & = & b_1 & - & a_{1,r+1}x_{r+1} & - & \cdots & - & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2r}x_r & = & b_2 & - & a_{2,r+1}x_{r+1} & - & \cdots & - & a_{2n}x_n \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ a_{r1}x_1 & + & \cdots & + & a_{rr}x_r & = & b_r & - & a_{r,r+1}x_{r+1} & - & \cdots & - & a_{rn}x_n. \end{array}\right. \tag{4.7}$$

Como el determinante de la matriz del sistema (4.7) es $M = \delta_r \neq 0$, se tiene que (4.7) es un sistema compatible y determinado en las *incógnitas principales* $x_1, x_2, \dots, x_r$. Dando valores arbitrarios a las $n-r$ incógnitas $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ que figuran a la derecha del signo igual en (4.7), obtenemos las soluciones de dicho sistema y, por tanto, las soluciones del sistema $Ax = b$.

b) Es consecuencia de la demostración del apartado a). $\square$

Ejemplo 4.8 Consideremos los siguientes sistemas lineales:

a) $\boxed{\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}}$ La matriz del sistema y la matriz ampliada del mismo son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Como $\det(A) = -2 \neq 0$, se tiene que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 2 =$ número de incógnitas. Luego se trata de un sistema compatible y determinado cuya única solución podemos obtenerla, por ejemplo, mediante la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \\[2ex] y = \dfrac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = y = 1.}$$

b) $\boxed{\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}}$ Ahora la matriz del sistema y la matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Como

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \text{ y } \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

y el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$, se tiene que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 1 < 2 =$ número de incógnitas. Luego se trata de un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones de la forma

$$\boxed{x = 2 - \alpha,\ y = \alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

c) $\boxed{\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=3 \end{cases}}$ La matriz del sistema y la matriz ampliada son ahora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Como
$$\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix} = 0 \text{ y } \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} = -1 \neq 0$$
y el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$, se tiene que $\operatorname{rg}(A) = 1 < 2 = \operatorname{rg}(A|b)$. Por tanto, se trata de un sistema incompatible que no tiene solución. □

Definición 4.5 Se llama *sistema lineal homogéneo* a todo sistema de la forma $Ax = \vec{0}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ y } \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m. \quad \square$$

Observación 4.5 (Propiedades de los sistemas lineales homogéneos) Consideremos el sistema lineal homogéneo $Ax = 0$, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$:

a) Si $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda y = (\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n) \in \mathbb{R}^n$ es también solución de $Ax = \vec{0}$.

b) Si $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ son soluciones del sistema $Ax = \vec{0}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda y + \mu z = (\lambda y_1 + \mu z_1, \lambda y_2 + \mu z_2, \ldots, \lambda y_n + \mu z_n) \in \mathbb{R}^n$ es también solución del sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$.

c) Del Teorema 4.3 se deduce que todo sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ es compatible, puesto que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|\vec{0})$. Nótese que el vector $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ siempre es una solución de $Ax = \vec{0}$ (denominada *solución trivial*).

   Denotando por $r = \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|\vec{0})$, se verifica que:

   i) Si $r = n \Rightarrow$ el sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ tiene una única solución (la solución trivial $x = \vec{0}$).

   ii) Si $r < n \Rightarrow$ el sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones. □

Ejemplo 4.9 Consideremos los siguientes sistemas lineales homogéneos:

a) $\boxed{\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}}$ Como $\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = 2 \neq 0$, se verifica que el rango de A coincide con el número de incógnitas, ya que $\operatorname{rg}(A) = 2 =$ número de incógnitas. Luego el sistema tiene como única solución la trivial.

b) $\boxed{\left\{\begin{array}{r} x - 3y = 0 \\ -2x + 6y = 0 \end{array}\right.}$ Como $\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 0$ y el elemento $a_{11} = 1 \neq 0$, se tiene que $\mathrm{rg}(A) = 1 < 2 =$ número de incógnitas. Por tanto, existen infinitas soluciones de la forma

$$\boxed{x = 3\alpha,\ y = \alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \quad \square$$

Ejemplo 4.10 En algunas ocasiones, entre los coeficientes de un sistema lineal aparecen *parámetros* que no tienen un valor predeterminado y se pide discutir el sistema en función de los posibles valores de estos parámetros. Así, por ejemplo, consideremos el sistema lineal $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y $\lambda \in \mathbb{R}$. Para cada valor concreto de λ se obtiene un sistema que tendrá o no solución. Se trata pues de determinar aquellos valores de λ para los cuales el sistema tiene una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución. Formamos la matriz asociada

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1+\lambda & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda & 4 \\ 1 & \lambda & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Aplicando el Teorema 4.3, el sistema $Ax = b$ tendrá una única solución si, y sólo si,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 3.$$

El determinante de la matriz del sistema es

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 6) = -\lambda(\lambda+3)(\lambda-2)$$

(compruébese), por lo que distinguimos los siguientes casos:

a) $\boxed{\lambda \notin \{0, -3, 2\}} \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible y determinado. La única solución la obtenemos, por ejemplo, a partir de la regla de Cramer: como

$$\det(\Lambda_1) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda & 2 \end{pmatrix} = 6\lambda - 3\lambda^2 = 3\lambda(2 - \lambda), \tag{4.8}$$

$$\det(\Lambda_2) = \det \begin{pmatrix} 1+\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 4 & \lambda \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 9\lambda - 2\lambda^2 = \lambda(9 - 2\lambda) \tag{4.9}$$

y

$$\det(\Lambda_3) = \det \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix} = 3\lambda - 4\lambda^2 = \lambda(3 - 4\lambda), \tag{4.10}$$

la solución del sistema $Ax = b$ viene dada por

$$x_1 = \frac{\det(\Lambda_1)}{\det(A)} = \frac{3\lambda(2-\lambda)}{-\lambda(\lambda+3)(\lambda-2)} = \boxed{\frac{3}{\lambda+3}}$$

$$x_2 = \frac{\det(\Lambda_2)}{\det(A)} = \frac{\lambda(9-2\lambda)}{-\lambda(\lambda+3)(\lambda-2)} = \boxed{\frac{2\lambda-9}{(\lambda+3)(\lambda-2)}}$$

y

$$x_3 = \frac{\det(\Lambda_3)}{\det(A)} = \frac{\lambda(3-4\lambda)}{-\lambda(\lambda+3)(\lambda-2)} = \boxed{\frac{4\lambda-3}{(\lambda+3)(\lambda-2)}.}$$

Para cada valor de $\lambda \notin \{0, -3, 2\}$ hemos encontrado su correspondiente solución. Así, por ejemplo, para $\lambda = 4$ la solución es

$$x_1 = \frac{3}{4+3} = \frac{3}{7},\ x_2 = \frac{2 \cdot 4 - 9}{(4+3)(4-2)} = -\frac{1}{14}$$

y

$$x_3 = \frac{4 \cdot 4 - 3}{(4+3)(4-2)} = \frac{13}{14}.$$

b) $\boxed{\lambda = 0}$ Para este valor se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ \text{y} \ (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

En este caso, puesto que $\det(A) = 0$, todos los menores de orden 3 de $(A|b)$ son nulos (basta particularizar $\lambda = 0$ en (4.8), (4.9) y (4.10)) y

$$\delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por tanto, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 2 < 3$, por lo que el sistema es compatible e indeterminado. Puesto que el rango se ha obtenido con una submatriz en la que intervienen las dos primeras ecuaciones, podemos pues considerar únicamente las dos primeras ecuaciones (de hecho, la tercera depende linealmente de ellas, puesto que es el doble de la primera menos la segunda) y resolver en las incógnitas que han intervenido en dicha submatriz: x_1 y x_2. Es decir, consideramos x_3 una constante (no incógnita) y resolvemos el sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas (x_1 y x_2), dado por

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior mediante, por ejemplo, la regla de Cramer, se obtiene:

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 - x_3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}{\delta_2} = 2(1 - x_3) \text{ y } x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 - x_3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}{\delta_2} = 1 + x_3.$$

Por tanto, las infinitas soluciones del sistema $Ax = b$ vienen dadas por

$$\boxed{x_1 = 2(1 - \alpha),\ x_2 = 1 + \alpha,\ x_3 = \alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

c) $\boxed{\lambda = -3}$ En este caso se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } (A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Como $\det(A) = 0$,

$$\delta_2 = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -5 \neq 0 \text{ y } \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 45$$

(basta particularizar $\lambda = -3$ en (4.9) teniendo en cuenta el cambio de columnas), se tiene que $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$, por lo que el sistema $Ax = b$ es incompatible.

d) $\boxed{\lambda = 2}$ Para este valor

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } (A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Como $\det(A) = 0$,

$$\delta_2 = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0 \text{ y } \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -10$$

(basta particularizar $\lambda = 2$ en (4.10)), se tiene que $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$, por lo que el sistema lineal $Ax = b$ es incompatible. □

4.4. Método de Gauss

Observación 4.6 Si a la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales se le hace cualquiera de las transformaciones elementales descritas en la Observación 3.17, se obtiene otro sistema equivalente y, por tanto, con las mismas soluciones. □

Definición 4.6 (Método de Gauss) Consiste en, a partir de un sistema lineal $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ y } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

obtener otro sistema equivalente al anterior $Cx = d$ de forma que la matriz C sea escalonada y se obtenga a partir de la matriz A mediante transformaciones elementales de filas (véase la Observación 4.6). Así, la matriz C y el vector d del sistema $Cx = d$ son de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & c_{mr} & \cdots & c_{mn} \\ & & & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n} \text{ y } d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

La solución del sistema lineal $Cx = d$ (que coincide con la del sistema $Ax = b$) se obtiene mediante el *método de remonte*:

1) En la última ecuación se despeja la incógnita x_r (en función de $x_{r+1}, \cdots, x_n$ si $r < n$) y se sustituye este valor en las ecuaciones anteriores.

2) Después, en la penúltima ecuación, se despeja la incógnita x_{r-1} y se sustituye este valor en las ecuaciones anteriores.

3) Así, sucesivamente, se van despejando las incógnitas de abajo arriba, hasta llegar a despejar la incógnita x_1 en la primera ecuación, hecho lo cual se habrán obtenido las incógnitas principales $x_1, x_2, \ldots, x_r$, expresadas en función de las demás. □

Ejemplo 4.11 Apliquemos el método de Gauss para resolver el sistema lineal $Ax = b$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ y } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right) \stackrel{(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \stackrel{(2)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -12 \end{array}\right)$$

donde las transformaciones elementales que se han efectuado son:

$$(1)\ \mathrm{F2} - 2 \times \mathrm{F1},\ \ \mathrm{F3} + \mathrm{F1} \quad \text{y} \quad (2)\ \mathrm{F3} - 3 \times \mathrm{F2},$$

siendo Fi la fila i–ésima de la matriz. Por tanto, el sistema lineal $Ax = b$ es equivalente al sistema escalonado

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & -1 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & & & & & 5x_4 & = & 12 \end{array} \right.$$

cuya solución obtenemos mediante el método de remonte:

$$x_4 = \frac{12}{5},\ x_3 = 3 - 2x_4 = 3 - \frac{24}{5} = -\frac{9}{5},\ x_1 + 2x_2 = -1 + x_3 = -1 - \frac{9}{5} = -\frac{14}{5}.$$

Por tanto, el sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones de la forma

$$\boxed{x_1 = -\frac{14}{5} - 2\alpha,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = -\frac{9}{5},\ x_4 = \frac{12}{5}} \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \quad \square$$

Observación 4.7 Nótese que, si al hacer las transformaciones elementales en la matriz ampliada $(A|b)$ aparece una fila con todos los elementos nulos salvo el último, el sistema $Ax = b$ es incompatible. Así ocurre, por ejemplo, si consideramos el sistema lineal $Ax = b$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Si a la segunda fila le sumamos el triple de la primera, obtenemos

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 13 \end{array}\right).$$

Por tanto, el sistema $Ax = b$ no tiene solución. $\square$

Observación 4.8 Si $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz cuadrada, al aplicar el *método de Gauss* obtenemos una matriz $C \in \mathcal{M}_n$ triangular superior de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & c_{nn} \end{pmatrix},$$

lo que nos permite calcular el rango y el determinante de la matriz A a partir del rango y el determinante de C siempre que no se hayan cambiado las filas por filas proporcionales y no se hayan hecho intercambios de filas. Para ello se utiliza que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C) \ \text{ y } \ \det(A) = \det(C).$$

Además, como la matriz C es triangular superior, aplicando lo visto en la Observación 3.14 se tiene que su determinante es el producto de sus elementos diagonales. Por tanto,

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C)} \quad \text{y} \quad \boxed{\det(A) = c_{11}c_{22}\cdots c_{nn}.}$$

Si al aplicar el método de Gauss se han hecho cambios de filas por filas proporcionales o se han intercambiado filas, a la hora de obtener el determinante de la matriz A a partir del determinante de C hay que tener en cuenta las propiedades vistas en la Observación 3.14. □

Ejemplo 4.12 Consideremos la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -11 & 7 \\ 0 & -17 & 8 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & -\dfrac{31}{11} \end{pmatrix}.$$

Las transformaciones elementales que se han efectuado son:

$$(1)\ \mathrm{F2} - 2 \times \mathrm{F1},\ \ \mathrm{F3} - 4 \times \mathrm{F1} \quad \text{y} \quad (2)\ \mathrm{F3} - \frac{17}{11} \times \mathrm{F2},$$

siendo $\mathrm{F}i$ la fila i–ésima de la matriz. Por tanto, $\mathrm{rg}(A) = 3$ y el determinante de A es

$$\det(A) = 1 \times (-11) \times \left(-\frac{31}{11}\right) = 31. \quad \square$$

4.5. Problemas

4.1. Encontrar la edad del padre y del hijo que resuelve el problema planteado en el Ejemplo 4.2.

4.2. Sabiendo que tres números naturales consecutivos suman 42, calcular los tres números.

4.3. Si la suma de un número natural y el doble del siguiente es 113, encontrar dicho número.

4.4. Hallar la solución del sistema lineal de ecuaciones planteado en el Ejemplo 4.6, calculando previamente la matriz A^{-1}. Una vez encontrada la solución, verificar que es correcta, comprobando que se cumplen las ecuaciones del sistema.

4.5. Encontrar la solución del sistema lineal de ecuaciones planteado en el Ejemplo 4.6 mediante las técnicas de sustitución, igualación o reducción mostradas en el Ejemplo 4.5.

4.6. Hallar la solución del sistema lineal de ecuaciones planteado en el Ejemplo 4.6 mediante la regla de Cramer mostrada en el Teorema 4.2.

4.7. Verificar que la solución encontrada en el Ejemplo 4.7 es correcta, comprobando que se cumplen las ecuaciones del sistema.

4.8. Tenemos dos tiques de compra. En uno de ellos se puede ver que el precio de tres pantalones y dos camisas es de 145€ y, en el otro, que el precio de dos pantalones y cinco camisas es de 170€. Hallar el precio de cada pantalón y de cada camisa, suponiendo que todas las camisas tienen el mismo precio y lo mismo sucede con los pantalones.

4.9. Con dos camiones cisterna cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3000 y 4000 litros, se hicieron un total de 35 viajes para transportar 120000 litros de agua. Suponiendo que en cada viaje los camiones transportaban la máxima carga de agua que les permitía su capacidad, determinar cuántos viajes realizó cada camión.

4.10. Justificar si los siguientes sistemas lineales son equivalentes:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ -4x & + & 2y & = & -2 \end{array}\right.$ y $2x - y - 1 = 0$.

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 3 \\ 7x & - & 9y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$ y $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 3. \end{array}\right.$

4.11. Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & 3 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & -2 \\ 4x & - & 3y & - & z & = & 0. \end{array}\right.$$

4.12. Resolver, por el método de Gauss, el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & -4 \\ -x & + & y & - & z & = & -1. \end{array}\right.$$

4.13. Encontrar la solución del siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & -1 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -8. \end{array}\right.$$

4.14. Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -5. \end{array}\right.$$

4.15. Resolver el sistema matricial $\left\{\begin{array}{l} 2X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{array}\right.$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.16. Hallar la solución de los siguientes sistemas homogéneos:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 0. \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -6x_1 & - & 9x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & & & = & 0. \end{array}\right.$

4.17. Determinar para qué valores de $\nu \in \mathbb{R}$ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 3y & = & 1 \\ \nu x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

tiene:

a) Una única solución (y determinarla). b) Ninguna solución.

4.18. Discutir las posibles soluciones del siguiente sistema lineal en función de los diversos valores de la constante k :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} kx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & k \\ x & + & y & + & kz & = & k^2. \end{array}\right.$$

4.19. Aplicar el método de Gauss para calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 & -8 \\ 5 & 6 & 6 & -6 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4.20. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) Decir cuándo la matriz A es inversible. Calcular la inversa para $a = 1$.

4.21. Discutir el carácter del siguiente sistema lineal, dependiendo del valor de los parámetros a y b, sin encontrar sus posibles soluciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & b^2 \\ x & + & y & + & az & = & b \\ x & + & y & + & 2az & = & 2. \end{array} \right.$$

4.22. Hallar los valores del parámetro a para que el siguiente sistema sea compatible y calcular las soluciones del sistema en dichos casos:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & az & = & 4 \\ x & & & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 2. \end{array} \right.$$

4.23. Resolver, mediante el método de Gauss, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & 2z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1. \end{array} \right. \quad \text{b)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 5y & + & z & = & -4 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 9 \\ 4x & - & 7y & + & z & = & 5. \end{array} \right.$$

Hallar también los determinantes de las matrices de los sistemas anteriores.

4.24. Aplicar el método de Gauss para resolver el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & + & z & = & \lambda \\ x & + & \lambda y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & \mu z & = & 2 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \end{array} \right.$$

en función de los parámetros λ y μ.

4.6. Soluciones

4.1. El padre tiene 30 años y el hijo tiene 5 años.

4.2. 13, 14 y 15.

4.3. 37.

4.4. $x = \dfrac{6}{11}$, $y = \dfrac{13}{11}$.

4.5. $x = \dfrac{6}{11}$, $y = \dfrac{13}{11}$.

4.6. $x = \dfrac{6}{11}$, $y = \dfrac{13}{11}$.

4.7. Basta hacer la comprobación oportuna.

4.8. Cada pantalón cuesta 35 euros, y cada camisa, 20 euros.

4.9. El camión con 3000 litros de capacidad hizo 20 viajes y el otro hizo 15 viajes.

4.10. a) Sí. b) Sí.

4.11. $x = y = z = 1$.

4.12. $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

4.13. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

4.14. $x_1 = -3 - \dfrac{5\alpha}{3}$, $x_2 = 2 + \dfrac{\alpha}{3}$, $x_3 = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.15. $X = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} \\ 2 & 1 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -1 & 1 \\ -\frac{11}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

4.16. a) Solución trivial: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. b) $x_1 = -\alpha$, $x_2 = 4\alpha$, $x_3 = 5\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.17. a) $\nu \neq -1$. Solución: $x = \dfrac{-1-6}{-3-3\nu}$, $y = \dfrac{6-\nu}{-3-3\nu}$ b) $\nu = -1$. Sistema incompatible.

4.18. $\begin{cases} k=-2 \;\Rightarrow\; \text{el sistema es incompatible} \\ k=1 \;\Rightarrow\; x=1-\alpha-\beta,\; y=\alpha,\; z=\beta \;\text{ con } \alpha,\beta\in\mathbb{R} \text{ arbitrarios.} \\ k\notin\{-2,1\} \;\Rightarrow\; x=-\dfrac{k+1}{k+2},\; y=\dfrac{1}{k+2},\; z=\dfrac{(k+1)^2}{k+2}. \end{cases}$

4.19. $\mathrm{rg}(A)=3$.

4.20. Sea $K=\left\{-1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$. a) $\mathrm{rg}(A)=\begin{cases} 3 \text{ si } a\notin K \\ 2 \text{ si } a\in K. \end{cases}$ b) A es inversible cuando $a\notin K$. Para $a=1$ la matriz A es inversible y

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.21. $\begin{cases} a\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\} \text{ y } b \text{ arbitrario} \;\Rightarrow\; \text{sistema compatible determinado.} \\ a=0 \text{ y } b\neq 2 \;\Rightarrow\; \text{sistema incompatible.} \\ a=0 \text{ y } b=2 \;\Rightarrow\; \text{sistema compatible indeterminado.} \\ a=1 \text{ y } b\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\} \;\Rightarrow\; \text{sistema incompatible.} \\ a=1 \text{ y } b\in\{0,1\} \;\Rightarrow\; \text{sistema compatible indeterminado.} \end{cases}$

4.22. El sistema es compatible para todo $a\in\mathbb{R}$. Si $a\neq 2$, el sistema es compatible determinado y la solución es $(x,y,z)=(2,0,0)$. Si $a=2$, el sistema es compatible indeterminado y las infinitas soluciones son $(x,y,z)=(2-t,0,t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

4.23. a) $x=0, y=-\dfrac{1}{6}, z=\dfrac{5}{6}$. b) Sistema incompatible.

4.24. El valor de $\mu\in\mathbb{R}$ es arbitrario y si:

$$\begin{cases} \lambda\neq -1 \;\Rightarrow\; \text{Sistema incompatible.} \\ \lambda=-1 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{3+(1-\mu)\alpha}{4}, y=-\dfrac{1+(\mu+3)\alpha}{4}, z=\alpha \;\text{ con }\; \alpha\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

5 El espacio vectorial

5.1. Introducción

Introducimos aquí el concepto de *espacio vectorial*, cuya noción es importante entender bien, de forma previa a presentar los *espacios afines* en el Capítulo 6.

Se mostrarán las propiedades que debe cumplir un espacio vectorial con respecto a sus operaciones de suma y producto por escalares, y se ilustrarán con algunos ejemplos típicos de estos espacios. A continuación se presentarán los importantes conceptos de *dependencia* e *independencia lineal*, que permitirán introducir la noción de *base* de un espacio vectorial. El uso de sistemas lineales y matrices, estudiados en los Capítulos 3 y 4, será aquí de gran ayuda.

5.2. El espacio vectorial. Subespacios vectoriales

Definición 5.1 Un *espacio vectorial* $\mathbf{V}$ sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto de elementos sobre el que está definida una operación de suma y otra de multiplicación por escalares (en este caso los escalares son los números reales), conservando una serie de propiedades típicas de estas operaciones. En concreto, la operación *suma* asocia a cada par de elementos $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbf{V}$ un elemento $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbf{V}$

$$\begin{array}{cccc} + : & \mathbf{V} \times \mathbf{V} & \to & \mathbf{V} \\ & (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

y la operación de *producto por escalares* asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y a cada elemento $\vec{u} \in \mathbf{V}$ un elemento de $\lambda\vec{u} \in \mathbf{V}$

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbf{V} & \to & \mathbf{V} \\ & (\lambda, \vec{v}) & \mapsto & \lambda\vec{u} \end{array}$$

verifican las siguientes propiedades:

a) Axiomas de la suma:

1) Propiedad conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u},\ \forall\,\vec{u},\vec{v}\in\mathbf{V}$.
2) Propiedad asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}),\ \forall\,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbf{V}$.
3) Existe un elemento neutro, denotado por $\vec{0}$, tal que $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u},\ \forall\,\vec{u}\in\mathbf{V}$.
4) Para todo $\vec{u}\in\mathbf{V}$ existe su elemento opuesto, denotado por $-\vec{u}$, verificando que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

b) Axiomas de la multiplicación por escalares:

1) Propiedad distributiva (suma en $\mathbf{V}$): $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v},\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R},\ \forall\,\vec{u},\vec{v}\in\mathbf{V}$.
2) Propiedad distributiva (suma en $\mathbb{R}$): $(\lambda+\mu)\vec{u}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u},\ \forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall\,\vec{u}\in\mathbf{V}$.
3) Propiedad asociativa: $\lambda(\mu\vec{u})=(\lambda\mu)\vec{u},\ \forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall\,\vec{u}\in\mathbf{V}$.
4) Existe un elemento neutro: el número $1\in\mathbb{R}$. Es decir, $1\vec{u}=\vec{u}1=\vec{u},\ \forall\,\vec{u}\in\mathbf{V}$.

Los elementos del espacio vectorial $\mathbf{V}$ se denominan *vectores*. $\square$

Ejemplo 5.1 Algunos ejemplos de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ son:

a) El conjunto de números reales, $\mathbf{V}=\mathbb{R}$, con la suma $x+y$ y multiplicación λx ordinarias.

b) El conjunto de polinomios con la suma y multiplicación por escalares dadas en las Definiciones 2.6 y 2.8, respectivamente.

c) El conjunto de matrices del tipo (m,n), $\mathbf{V}=\mathcal{M}_{m\times n}$, con la suma y multiplicación por escalares dadas en la Definición 3.3.

d) En la Definición 2.3 se introdujo el conjunto de puntos del plano

$$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y):\ x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}\,.$$

El conjunto $\mathbb{R}^2$ respecto a las operaciones suma

$$\begin{array}{cccc} +: & \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) & \mapsto & (x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2) \end{array}$$

y producto por escalares

$$\begin{array}{cccc} \cdot: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (\lambda,(x,y)) & \mapsto & \lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y) \end{array}$$

tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

e) Asimismo, podemos considerar los puntos del espacio

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

y, más en general, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ el espacio n–dimensional

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \overset{n)}{\cdots} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ tiene, respecto a las operaciones suma

$$\begin{array}{cccc} + : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \end{array}$$

y producto por escalares

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n), \end{array}$$

donde $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. $\square$

Definición 5.2 Si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$, puede ocurrir que $\mathbf{W}$ sea otro espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se dice, en tal caso, que $\mathbf{W}$ es un *subespacio vectorial* de $\mathbf{V}$. $\square$

Observación 5.1 Para probar que $\mathbf{W}$ es subespacio vectorial de $\mathbf{V}$ no es necesario verificar todas las hipótesis de la definición de espacio vectorial. Basta comprobar si se da la implicación siguiente:

$$\text{si } \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbf{W} \ \text{ y } \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 \in \mathbf{W}.$$

Ejemplo 5.2 El conjunto $\mathcal{P}_n$ de polinomios reales en la variable x de grado menor o igual que $n \in \mathbb{N}$ constituye un subespacio vectorial del conjunto de polinomios reales en la variable x. Para probarlo, sean P y Q dos polinomios arbitrarios de $\mathcal{P}_n$, por lo que se pueden escribir en la forma

$$\begin{cases} P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \end{cases}$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i = 0, 1, \ldots, n$ (pudiendo ser $= 0$). De este modo, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (arbitrarios), tal y como se vio en la Definición 2.8, se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_1 P(x) + \lambda_2 Q(x) = {} & (\lambda_1 a_n) x^n + (\lambda_1 a_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (\lambda_1 a_1) x + (\lambda_1 a_0) \\ & + (\lambda_2 b_n) x^n + (\lambda_2 b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (\lambda_2 b_1) x + (\lambda_2 b_0). \end{aligned}$$

De aquí, de acuerdo con la Definición 2.6, se tiene que

$$\lambda_1 P(x) + \lambda_2 Q(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

siendo

$$c_k = \lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k,\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Por tanto, $\lambda_1 P + \lambda_2 Q \in \mathcal{P}_n$, lo que prueba que $\mathcal{P}_n$ es un subespacio vectorial del conjunto de polinomios reales en la variable x. $\square$

5.3. Dependencia e independencia lineal. Bases

Definición 5.3 Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ sobre $\mathbb{R}$ son *linealmente independientes* (o forman un *sistema libre*) si los únicos escalares $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \tag{5.1}$$

son $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Cuando existen números reales $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}$, no todos nulos, para los cuales se verifica (5.1), se dice que los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son *linealmente dependientes* (o forman un *sistema ligado*). $\square$

Ejemplo 5.3 Consideremos el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$.

a) Consideremos los vectores $\vec{v}_1 = (2, -1)$ y $\vec{v}_2 = (3, -2)$. La pregunta que vamos a intentar responder es: ¿son $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ vectores linealmente independientes? De acuerdo con la Definición 5.3, supongamos que existen dos números $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ que verifican

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0} &\Rightarrow \lambda_1(2, -1) + \lambda_2(3, -2) = (0, 0) \\ &\Rightarrow (2\lambda_1, -\lambda_1) + (3\lambda_2, -2\lambda_2) = (0, 0) \\ &\Rightarrow (2\lambda_1 + 3\lambda_2, -\lambda_1 - 2\lambda_2) = (0, 0), \end{aligned}$$

de donde se obtiene el sistema de ecuaciones lineal y homogéneo

$$\left\{ \begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0. \end{aligned} \right. \tag{5.2}$$

Responder la pregunta que nos hemos hecho anteriormente equivale a responder a la pregunta: ¿es cierto que necesariamente se cumple que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$?

Resolvamos el sistema de ecuaciones (5.2). Para ello, despejando λ_1 de la segunda ecuación se obtiene que

$$\lambda_1 = -2\lambda_2 \tag{5.3}$$

y, sustituyendo este valor de λ_1 en la primera ecuación del sistema, se llega a que

$$2(-2\lambda_2) + 3\lambda_2 = 0,$$

de donde se deduce que

$$-4\lambda_2 + 3\lambda_2 = 0 \;\Rightarrow\; -\lambda_2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_2 = 0.$$

Por último, sustituyendo el valor $\lambda_2 = 0$ en (5.3), se obtiene que

$$\lambda_1 = -2 \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, hemos probado que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, por lo que los vectores $\vec{v}_1 = (2, -1)$ y $\vec{v}_2 = (3, -2)$ son linealmente independientes.

Otra forma de probarlo es mostrar que, aplicando el teorema de Rouché–Fröbenius (véanse el Teorema 4.3 y la Observación 4.5), el sistema de ecuaciones lineal homogéneo (5.2) es compatible y determinado. En ese caso, se tiene que dicho sistema tiene como una única solución la solución trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Para ello basta ver que el determinante de su matriz de coeficientes es distinto de 0. En efecto,

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -4 + 3 = 1 \neq 0.$$

b) Consideremos ahora los vectores $\vec{u}_1 = (2, -3)$ y $\vec{u}_2 = (6, -9)$. Nos preguntamos de nuevo: ¿son linealmente independientes? Supongamos que existen dos números $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ que verifican

$$\begin{aligned} \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 = \vec{0} &\Rightarrow \lambda_1(2, -3) + \lambda_2(6, -9) = (0, 0) \\ &\Rightarrow (2\lambda_1, -3\lambda_1) + (6\lambda_2, -9\lambda_2) = (0, 0) \\ &\Rightarrow (2\lambda_1 + 6\lambda_2, -3\lambda_1 - 9\lambda_2) = (0, 0), \end{aligned}$$

de donde se obtiene el sistema de ecuaciones lineal y homogéneo

$$\left\{ \begin{aligned} 2\lambda_1 + 6\lambda_2 &= 0 \\ -3\lambda_1 - 9\lambda_2 &= 0. \end{aligned} \right. \tag{5.4}$$

Responder la pregunta que nos hemos hecho anteriormente equivale, de nuevo, a responder a la pregunta: ¿es cierto que necesariamente se cumple que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$?

Resolvamos el sistema de ecuaciones (5.4). Para ello, despejando λ_1 de la primera ecuación, se obtiene

$$2\lambda_1 = -6\lambda_2 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -\frac{6}{2}\,\lambda_2,$$

de donde se deduce que

$$\lambda_1 = -3\lambda_2 \tag{5.5}$$

y, sustituyendo este valor de λ_1 en la segunda ecuación del sistema, se obtiene que

$$-3(-3\lambda_2) - 9\lambda_2 = 0,$$

de donde se deduce que

$$9\lambda_2 - 9\lambda_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Puesto que esta condición se cumple para cualquier valor de λ_2, no obtenemos ninguna condición que nos determine unívocamente su valor ni, por tanto, tampoco de λ_1.

De este modo, la única restricción que hemos obtenido sobre los valores λ_1 y λ_2 es la relación (5.5). Por tanto, cualquier par de valores λ_1 y λ_2 verificando dicha relación es solución del sistema anterior. Dicho de otro modo, cualquier par de valores λ_1 y λ_2 verificando

$$\lambda_1 = -3\alpha,\ \lambda_2 = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

es solución del sistema anterior. Así, por ejemplo, para $\alpha = 1$ se tiene que

$$-3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{0},$$

lo que prueba que λ_1 y λ_2 no tienen que ser necesariamente nulos y, por tanto, los vectores $\vec{v}_1 = (2, -1)$ y $\vec{v}_2 = (3, -2)$ son linealmente dependientes.

Otra manera de probarlo consiste en mostrar, a partir del teorema de Rouché–Fröbenius (véanse el Teorema 4.3 y la Obserbación 4.5), que el sistema de ecuaciones lineal homogéneo (5.4) es compatible e indeterminado. En ese caso, se tiene que dicho sistema tiene como solución la solución trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ y, además, tiene otras soluciones (de hecho, infinitas soluciones). Para ello basta comprobar que el determinante de su matriz de coeficientes es igual a 0. En efecto,

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} = -18 + 18 = 0. \quad \square$$

Definición 5.4 Se dice que un vector $\vec{v}$ de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ sobre $\mathbb{R}$ es *combinación lineal* de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \in \mathbf{V}$ si existen escalares $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n. \quad \square$$

Observación 5.2 Si un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \in \mathbf{V}$, entonces el conjunto de vectores $\{\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es linealmente dependiente. En efecto, como

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n \Rightarrow -\vec{v} + \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}.$$

Hemos obtenido así una combinación lineal de los vectores $\{\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ igualada al vector $\vec{0}$ y, al menos, el primer coeficiente -1 es no nulo. $\square$

Observación 5.3 Cualquier conjunto de vectores que contenga al vector $\vec{0}$ es linealmente dependiente. En efecto, si $\mathcal{S} = \{\vec{0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \in \mathbf{V}$, hay un vector que es combinación lineal de los demás, pues

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_n. \quad \square$$

Definición 5.5 El conjunto formado por las combinaciones lineales de un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ sobre $\mathbb{R}$ se denomina *subespacio generado* por los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ y se denota $\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$, es decir,

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) = \{\vec{v} \in \mathbf{V} : \ \vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n \ \text{ para } \ \{\lambda_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}\}. \quad \square$$

Ejemplo 5.4 Hallemos el subespacio generado por los vectores $\vec{v}_1 = (1,1)$ y $\vec{v}_2 = (2,2)$ en $\mathbb{R}^2$. Si $\vec{v} = (x,y) \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, entonces

$$\begin{aligned}
\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 \Rightarrow (x,y) &= \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,2) = (\lambda_1, \lambda_1) + (2\lambda_2, 2\lambda_2) \\
&= (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y \end{array} \right. \Rightarrow x = y.
\end{aligned}$$

Es decir, cualquier vector $\vec{v} = (x,y) \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ debe cumplir que $x = y$. Por tanto, el subespacio generado por los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son los vectores de la forma $\vec{v} = (x,x)$, o, en forma equivalente, los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ generan la recta $y = x$. $\square$

Definición 5.6 Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ sobre $\mathbb{R}$ forman un *sistema de generadores* del espacio $\mathbf{V}$ si cualquier vector $\vec{v} \in \mathbf{V}$ es combinación lineal de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, es decir, cuando se verifica que

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n) = \mathbf{V}. \quad \square$$

Ejemplo 5.5 Consideremos el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$.

a) ¿Forman los vectores $\vec{v}_1 = (2,1)$ y $\vec{v}_2 = (-3,2)$ un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$? Dicho de otra manera, para un vector arbitrario $\vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, nos preguntamos lo siguiente: ¿existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$? Veamos si esto siempre es cierto. Como queremos que

$$\begin{aligned}
\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 \Rightarrow (x,y) &= \lambda_1(2,1) + \lambda_2(-3,2) = (2\lambda_1, \lambda_1) + (-3\lambda_2, 2\lambda_2) \\
&= (2\lambda_1 - 3\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2),
\end{aligned}$$

λ_1 y λ_2 deben ser soluciones del sistema de ecuaciones lineal no homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{r} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y. \end{array} \right. \tag{5.6}$$

Aplicando el teorema de Rouché–Fröbenius (véase el Teorema 4.3), se tiene que el sistema de ecuaciones (5.6) es compatible si el rango de la matriz de coeficientes del sistema coincide con el de la matriz ampliada. En este caso la matriz de coeficientes y la matriz ampliada son (recuérdese que las incógnitas son λ_1 y λ_2), respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 & -3 & x \\ 1 & 2 & y \end{pmatrix}.$$

Puesto que

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0,$$

se verifica que el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada es igual a 2, que también coincide con el número de incógnitas, por lo que el sistema (5.6) es compatible y determinado. Es decir, para cada $x, y \in \mathbb{R}$ existen unos únicos valores λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ que resuelven el sistema (5.6).

Para resolver el sistema de ecuaciones (5.6) hacemos lo siguiente:

$$\text{(primera ecuación)} - 2 \times \text{(segunda ecuación)},$$

de donde se obtiene que

$$(2\lambda_1 - 3\lambda_2) - 2(\lambda_1 + 2\lambda_2) = x - 2y \;\Rightarrow\; -7\lambda_2 = x - 2y \;\Rightarrow\; \lambda_2 = \frac{2y - x}{7}.$$

Ahora, utilizando este valor de λ_2 en, por ejemplo, la segunda ecuación del sistema, se obtiene que

$$\lambda_1 + 2\left(\frac{2y - x}{7}\right) = y \;\Rightarrow\; \lambda_1 = y - \frac{4y - 2x}{7} = \frac{7y - (4y - 2x)}{7} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \frac{2x + 3y}{7}.$$

Por tanto, cualquier vector $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$; concretamente,

$$\vec{v} = \frac{2x + 3y}{7}\,\vec{v}_1 + \frac{2y - x}{7}\,\vec{v}_2. \tag{5.7}$$

Esto implica que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ constituyen un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$.

Así, por ejemplo, el vector $\vec{v} = (1, 1)$ puede escribirse como

$$\vec{v} = \frac{2 + 3}{7}\,\vec{v}_1 + \frac{2 - 1}{7}\,\vec{v}_2 = \frac{5}{7}\,\vec{v}_1 + \frac{1}{7}\,\vec{v}_2$$

o, dicho de otro modo,

$$(1, 1) = \frac{5}{7}\,(2, 1) + \frac{1}{7}\,(-3, 2)$$

(compruébese).

b) Los vectores $\vec{u}_1 = (2,1)$ y $\vec{u}_2 = (4,2)$ no constituyen un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$. En efecto, para un vector arbitrario $\vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 \Rightarrow (x,y) &= \lambda_1(2,1) + \lambda_2(4,2) = (2\lambda_1, \lambda_1) + (4\lambda_2, 2\lambda_2)\\ &= (2\lambda_1 + 4\lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2)\\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y \end{array}\right. \Rightarrow x = 2y.\end{aligned}$$

Es decir, el subespacio generado por los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ es la recta $y = \frac{x}{2}$ y no todo el conjunto $\mathbb{R}^2$. Así, por ejemplo, el vector $\vec{w} = (1,1)$ no puede expresarse como combinación lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$.

Si intentamos aplicar el teorema de Rouché–Fröbenius (véase el Teorema 4.3), se tiene que el sistema de ecuaciones anterior es compatible si el rango de la matriz de coeficientes del sistema coincide con el de la matriz ampliada. En este caso la matriz de coeficientes y la matriz ampliada son (recuérdese, nuevamente, que las incógnitas son λ_1 y λ_2), respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 & 4 & x \\ 1 & 2 & y \end{pmatrix}.$$

Puesto que

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

se tiene que el rango de la matriz de coeficientes es uno y sólo coincide con el de la matriz ampliada para casos especiales de valores de x e y (precisamente para aquellos en los que $x = 2y$). Por tanto, en general para valores $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios no existen coeficientes λ_1, λ_2 que cumplan los requisitos, por lo que se deduce que los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ no constituyen un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$. $\square$

Definición 5.7 Un conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ sobre $\mathbb{R}$ forman una *base* del espacio $\mathbf{V}$ si:

1) Son linealmente independientes.

2) Constituyen un sistema de generadores del espacio $\mathbf{V}$. $\square$

Ejemplo 5.6 Los vectores $\vec{v}_1 = (2,1)$ y $\vec{v}_2 = (-3,2)$ constituyen una base de $\mathbb{R}^2$ pues:

1) Son linealmente independientes. En efecto, si

$$\begin{aligned}\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2=\vec{0} &\Rightarrow \lambda_1(2,1)+\lambda_2(-3,2)=(0,0)\\ &\Rightarrow (2\lambda_1,\lambda_1)+(-3\lambda_2,2\lambda_2)=(0,0)\\ &\Rightarrow (2\lambda_1-3\lambda_2,\lambda_1+2\lambda_2)=(0,0)\\ &\Rightarrow \left\{\begin{aligned} 2\lambda_1-3\lambda_2&=0\\ \lambda_1+2\lambda_2&=0\end{aligned}\right.\\ &\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0\end{aligned}$$

(véase el Problema 5.1).

2) Son un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$ (véase el Ejemplo 5.5). □

Definición 5.8 La *dimensión* de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ sobre $\mathbb{R}$ es el número de elementos de cualquier base de $\mathbf{V}$. □

Ejemplo 5.7 A la vista del Ejemplo 5.6 se tiene que la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es 2. Más en general, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es n. □

Teorema 5.1 (Base) *En un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *de dimensión finita todas las bases tienen el mismo número de elementos.* □

Observación 5.4 No todos los espacios vectoriales tienen dimensión finita. Por ejemplo, una base del conjunto de polinomios reales en la variable x es $\mathcal{B}=\{1,x,x^2,\ldots,x^n\ldots\}$, que consta, obviamente, de infinitos elementos. □

Observación 5.5 Como consecuencias del Teorema 5.1, si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión $n \in \mathbb{N}$ se verifican las siguientes propiedades:

a) Cualquier conjunto con más de n vectores de $\mathbf{V}$ es linealmente dependiente.

b) No existen sistemas de generadores de $\mathbf{V}$ formados por menos de n vectores de $\mathbf{V}$.

c) Cualquier conjunto de n vectores de $\mathbf{V}$ linealmente independientes constituyen una base de $\mathbf{V}$.

d) Todo sistema generador formado por n vectores de $\mathbf{V}$ constituye una base de $\mathbf{V}$. □

Observación 5.6 A partir de la Observación 5.5, cualquier base de $\mathbb{R}^n$ estará formada por n vectores linealmente independientes. Por tanto, como los vectores $\vec{e}_1=(1,0)$ y $\vec{e}_2=(0,1)$ son linealmente independientes (véase el Problema 5.2), constituyen una base de $\mathbb{R}^2$. En general, para todo $n \in \mathbb{N}$, si consideramos el vector $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$ que tiene todas sus componentes nulas salvo la i–ésima que vale 1, es decir,

$$\vec{e}_i = (0, \ldots, 0 \overset{i)}{1}, 0, \ldots, 0),$$

se verifica que $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ que se denomina *base canónica* de $\mathbb{R}^n$. □

Observación 5.7 Todo espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ puede ser considerado una "copia" de $\mathbb{R}^n$. De ahí la importancia de estos espacios. □

Definición 5.9 Se definen las *coordenadas* de un vector $\vec{v} \in \mathbf{V}$ con respecto a una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de $\mathbf{V}$ como los únicos números reales $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}$ para los cuales se verifica que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n. \quad \square$$

Ejemplo 5.8 Como se ha visto en el Ejemplo 5.6, los vectores $\vec{v}_1 = (2, 1)$ y $\vec{v}_2 = (-3, 2)$ constituyen una base de $\mathbb{R}^2$. Así, a la vista de (5.7), las coordenadas del vector $\vec{v} = (1, 1)$ respecto a la base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ son $\left\{\frac{5}{7}, \frac{1}{7}\right\}$, puesto que

$$\vec{v} = \frac{5}{7}\,\vec{v}_1 + \frac{1}{7}\,\vec{v}_2,$$

y las coordenadas de este vector $\vec{v} = (1, 1)$ respecto a la base canónica $\mathcal{B}_2 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ son $\{1, 1\}$, ya que

$$\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2. \quad \square$$

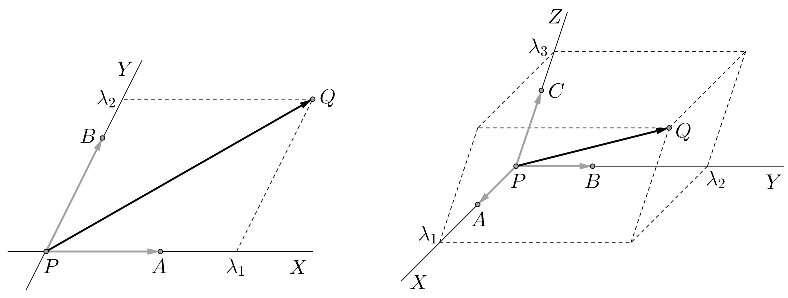
Observación 5.8 Si consideramos en un plano un punto P y dos rectas distintas PX y PY que se cortan en P, y consideramos sobre ellas dos vectores $\vec{v}_1 = \overrightarrow{PA}$ y $\vec{v}_2 = \overrightarrow{PB}$ como se indica en la Figura 5.1(a), cualquier otro vector del plano $\overrightarrow{PQ}$ se expresa (tal y como veremos en el Capítulo 6) de manera única en la forma

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda_1 \overrightarrow{PA} + \lambda_2 \overrightarrow{PB},$$

lo cual nos permite identificar el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el par ordenado $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. De esta forma, el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ queda identificado con el conjunto de vectores del plano con origen en P.

De forma análoga, si fijamos en el espacio tridimensional un punto P y tres rectas PX, PY y PZ concurrentes en P y no coplanarias, si se consideran sobre ellas los vectores $\vec{v}_1 = \overrightarrow{PA}$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{PB}$ y $\vec{v}_3 = \overrightarrow{PC}$, como se indica en la Figura 5.1(b), cualquier otro vector del espacio $\overrightarrow{PQ}$ se expresa de forma única en la forma

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda_1 \overrightarrow{PA} + \lambda_2 \overrightarrow{PB} + \lambda_3 \overrightarrow{PC},$$



(a) Representación en $\mathbb{R}^2$. (b) Representación en $\mathbb{R}^3$.

Figura 5.1: Representaciones de vectores en el plano y en el espacio.

lo cual nos permite identificar el vector $\overrightarrow{PQ}$ con la terna ordenada $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. De esta manera podemos identificar el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el conjunto de vectores del espacio que tienen su origen en el punto P. $\square$

5.4. Problemas

5.1. Encontrar la solución o soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

5.2. Probar que los vectores $\vec{e}_1 = (1, 0)$ y $\vec{e}_2 = (0, 1)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

5.3. Determinar el valor de $\mu \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{v}_1 = (\mu, 1)$ y $\vec{v}_2 = (6, 3)$ sean linealmente dependientes.

5.4. ¿Puede haber en $\mathbb{R}^4$ un sistema de generadores formado por tres vectores?

5.5. ¿Son linealmente independientes las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}?$$

5.6. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\vec{v}_1 = (1, 2)$, $\vec{v}_2 = (-1, 0)$ y $\vec{v}_3 = (0, 1)$. ¿Es $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^2$? (no se necesita hacer ningún cálculo para dar la respuesta).

5.7. Se consideran en $\mathbb{R}^3$ los vectores

$$\vec{v}_1 = (2, 1, 0),\ \vec{v}_2 = (0, 2, 1),\ \vec{v}_3 = (2, -1, -1) \text{ y } \vec{v}_4 = (4, 0, -1).$$

a) ¿Son $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ linealmente independientes? (no se necesita hacer ningún cálculo para dar la respuesta).

b) ¿Son $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ linealmente independientes?

5.8. En el Ejemplo 5.2 se probó que para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\mathcal{P}_n$ de polinomios reales en la variable x de grado menor o igual que n constituye un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Determinar una base de este subespacio vectorial, así como su dimensión.

5.9. Demostrar que las matrices cuadradas de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ constituyen un subespacio vectorial de las matrices $\mathcal{M}_2$ y hallar una base del mismo.

5.10. Demostrar que las matrices cuadradas de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ constituyen un subespacio vectorial de las matrices $\mathcal{M}_2$ y hallar una base del mismo.

5.11. Demostrar que las matrices cuadradas simétricas de orden 2 constituyen un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y hallar una base del mismo.

5.12. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

a) Demostrar que los conjuntos

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1 = (-1,1), \vec{u}_2 = (-1,0)\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1 = (-2,-1), \vec{v}_2 = (1,2)\}$$

son bases de $\mathbb{R}^2$.

b) Hallar las coordenadas del vector $\vec{w} = (1,3)$ respecto de las bases anteriores.

5.13. Demostrar que los vectores $\vec{v}_1 = (1,-1,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$ y $\vec{v}_3 = (1,0,1)$ constituyen una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar las coordenadas, respecto a esta base, de un vector arbitrario $\vec{v} = (x,y,z)$.

5.5. Soluciones

5.1. La única solución es $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

5.2. Por el Teorema 5.1, basta probar que ambos vectores son linealmente independientes. Esto equivale a probar que la única solución de

$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0)$$

es $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, lo cual es evidente.

5.3. $\mu = 2$.

5.4. No.

5.5. No, pues $3A - B = 0$.

5.6. No.

5.7. a) No. b) Sí.

5.8. $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$ es una base de $\mathcal{P}_n \Rightarrow \dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

5.9. Para mostrar que es un subespacio vectorial utilizar la Observación 5.1. Una posible base es

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.10. Para mostrar que es un subespacio vectorial utilizar la Observación 5.1. Una posible base es

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.11. Para mostrar que es un subespacio vectorial utilizar la Observación 5.1. Una posible base es

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.12. a) Inmediato. b) $\vec{w} = 3\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2$ y $\vec{w} = \dfrac{1}{3}\,\vec{v}_1 + \dfrac{5}{3}\,\vec{v}_2$.

5.13. $\vec{v} = \dfrac{x - y - z}{2}\,\vec{v}_1 + \dfrac{x + y - z}{2}\,\vec{v}_2 + \dfrac{x + y + z}{2}\,\vec{v}_3$.

6 Espacios afines en el plano $(\mathbb{R}^2)$ y en el espacio $(\mathbb{R}^3)$

6.1. Introducción

Una vez estudiada la teoría de espacios vectoriales en el Capítulo 5, desarrollaremos aquí los conceptos básicos correspondientes a los *espacios afines* en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, que son las herramientas abstractas matemáticas que formalizan el concepto cotidiano de espacio bidimensional y tridimensional.

Es en este capítulo donde se desarrollan las ecuaciones de las principales entidades de estos espacios: las *rectas* y los *planos*. Las técnicas matemáticas consideradas en los capítulos previos (como el rango de una matriz o el determinante de una matriz cuadrada) nos permitirán hablar ya del concepto de *paralelismo* y ver la *posición relativa* de puntos, rectas y planos entre sí. Así, por ejemplo, podremos determinar cuándo dos rectas en el espacio se cortan, se cruzan (sin tocarse) o cuándo son paralelas.

6.2. Vectores. Espacio afín. Sistemas de referencia

En este capítulo vamos a estudiar los espacios afines de $\mathbb{R}^2$ (es decir, del plano) y de $\mathbb{R}^3$ (es decir, del espacio):

a) Los espacios afines de $\mathbb{R}^2$ son las rectas del plano.

b) Los espacios afines de $\mathbb{R}^3$ son las rectas y los planos del espacio.

Las rectas son espacios afines de dimensión 1 y los planos son espacios afines de dimensión 2. El objetivo de este capítulo es describir matemáticamente estos espacios y sus propiedades.

Definición 6.1 Un *vector fijo* de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es un segmento orientado. Queda determinado por su *origen* A y su *extremo* B y se denota $\overrightarrow{AB}$. El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene:

1) *Módulo*: la distancia entre A y B.

2) *Dirección*: la de la recta que pasa por los puntos A y B.

3) *Sentido*: de A hacia B.

El vector $\overrightarrow{BA}$ es el *opuesto* de $\overrightarrow{AB}$ y recíprocamente. $\square$

Observación 6.1 Nótese que existen infinitos vectores con iguales módulo, dirección y sentido que el vector $\overrightarrow{AB}$ (véase la Figura 6.1). Todos estos vectores se denominan *equipolentes*. $\square$

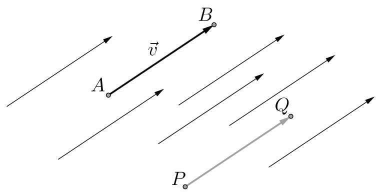


Figura 6.1: Vectores equipolentes.

Definición 6.2 Se llama *vector libre* el conjunto formado por un vector y todos los equipolentes a él. $\square$

Observación 6.2 Nótese que los distintos vectores fijos son las diversas posiciones que puede ocupar el mismo vector libre. En todo lo que sigue, a los vectores libres los denominaremos únicamente *vectores* y los vectores fijos se considerarán representantes suyos. Es decir, el vector $\overrightarrow{AB}$ denota, indistintamente, al propio vector fijo que va de A hasta B y cualquiera de los equipolentes a él. Cuando B coincide con A, se dice que el vector $\overrightarrow{AA}$ define el vector libre $\vec{0}$. $\square$

Observación 6.3 Dado un vector $\vec{v}$ y un punto P, existe un único representante del vector $\vec{v}$ con origen en P, el vector $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ (véase la Figura 6.1). De este modo, es claro que todo vector libre tiene un único representante con su origen en el origen de $\mathbb{R}^n$, es decir, un representante del tipo $\overrightarrow{OA}$, siendo O el origen de $\mathbb{R}^n$. En el Capítulo 5 (véase la Observación 5.8) se había mostrado que el conjunto de estos vectores fijos (del tipo $\overrightarrow{OA}$) formaban un espacio vectorial (es por ello por lo que a sus elementos se les llama *vectores*). De esta forma, identificaremos cualquier vector $\vec{v}$ con las coordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ del único punto $A \in \mathbb{R}^n$ de forma que el vector $\overrightarrow{OA}$ sea un representante de $\vec{v}$. $\square$

Observación 6.4 Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, entonces, en el caso de que los cuatro puntos A, B, C, D no estén alineados, estos cuatro puntos forman un paralelogramo (véase la Figura 6.2). $\square$

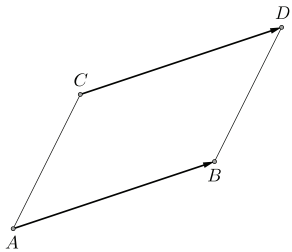
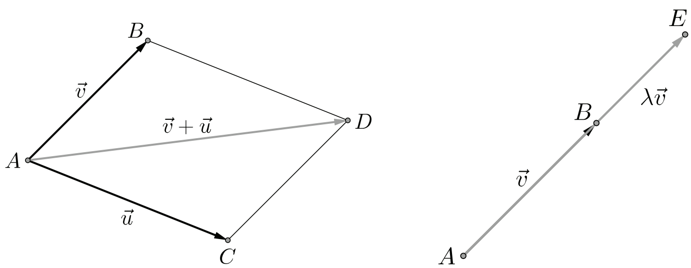


Figura 6.2: Paralelogramo formado por dos vectores equipolentes.

Observación 6.5 Para sumar dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ se toman dos representantes suyos con un origen común: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, como se muestra en la Figura 6.3(a). El resultado de la suma es el vector $\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD}$, que coincide con la diagonal del paralelogramo formado por los puntos A, B, C y D en el caso de que éstos no estén alineados. Otra forma de interpretar la suma de vectores es la siguiente: si el vector $\vec{v}$ lleva el punto A al punto B y el vector $\vec{u}$ lleva el punto B al punto D, entonces el vector $\vec{v} + \vec{u}$ lleva el punto A al punto D, es decir,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$



(a) $\vec{v} + \vec{u}$. (b) $\lambda\vec{v}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Figura 6.3: Suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar.

Análogamente, la multiplicación del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es el vector $\lambda\vec{v} = \overrightarrow{AE}$ (véase la Figura 6.3(b)). $\square$

A continuación damos una definición abstracta de un espacio afín general:

Definición 6.3 Un *espacio afín* consta de un conjunto de *puntos* $\mathcal{A}$, un espacio vectorial $\mathbf{V}$ y una aplicación φ que a cada punto del espacio y a cada vector le asocia un punto del espacio

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{A} \times \mathbf{V} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ & (A, \vec{v}) & \mapsto & B \end{array}$$

verificando las siguientes propiedades:

1) Dados dos puntos $A, B \in \mathcal{A}$, existe un único vector $\vec{v} \in \mathbf{V}$ tal que $\varphi(A, \vec{v}) = B$. Este vector $\vec{v}$ se denota $\overrightarrow{AB}$ y se llama *vector posición* de B con respecto de A.

2) Dados tres puntos cualesquiera $A, B, C \in \mathcal{A}$, se verifica la *relación de Chasles*:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Se define la *dimensión* de un espacio afín como la dimensión de su espacio vectorial asociado. $\square$

Observación 6.6 Cuando se sobrentiende cuáles son el espacio vectorial y la aplicación asociados a un espacio afín, basta denotar éste por el nombre $\mathcal{A}$ de su conjunto de puntos. $\square$

Ejemplo 6.1 El *espacio afín estándar n–dimensional* se obtiene al considerar $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$ y la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (A, \vec{v}) & \mapsto & (a_1 + v_1, a_2 + v_2, \ldots, a_n + v_n), \end{array}$$

supuesto que $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. En las aplicaciones únicamente consideraremos los casos en los que $n \in \{1, 2, 3\}$. $\square$

Definición 6.4 Un *sistema de referencia* en un espacio afín de dimensión $n \in \mathbb{N}$ consta de un punto O (denominado *origen*) y una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ de su espacio vectorial. Se denota $\mathcal{R} = \{O; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$. $\square$

Observación 6.7 Sea $\mathcal{R} = \{O; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ un sistema de referencia en un espacio afín $\mathcal{A}$ de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Para cada punto $X \in \mathcal{A}$ el vector $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ se llama *vector de posición* de X. Este vector $\vec{x}$ puede expresarse como combinación lineal de los elementos de la base de $\mathcal{R}$, es decir,

$$\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n.$$

Los números $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las *coordenadas* del punto X con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}$. Si identificamos cada punto X del espacio $\mathcal{A}$ con sus coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se obtiene una aplicación biyectiva entre el espacio afín $\mathcal{A}$ y $\mathbb{R}^n$. De ahí la importancia del espacio considerado en el Ejemplo 6.1.

Además, si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ son las coordenadas de un punto $A \in \mathcal{A}$ y $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ son las componentes del vector $\vec{v} \in \mathbf{V}$, ambas referidas al sistema $\mathcal{R}$, si tomamos un representante del vector $\vec{v}$ con origen en el punto A, entonces su extremo será el punto B que tiene por coordenadas $(a_1+v_1, a_2+v_2, \ldots, a_n+v_n)$ respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}$. Es decir, se verifica que

$$\boxed{\text{Coordenadas de } B \ = \ \text{Coordenadas de } A + \ \text{Componentes de } \overrightarrow{AB}.}$$

Ejemplo 6.2 Sea $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ un sistema de referencia en el espacio afín tridimensional donde A, B y C son puntos no alineados (véase la Figura 6.4).

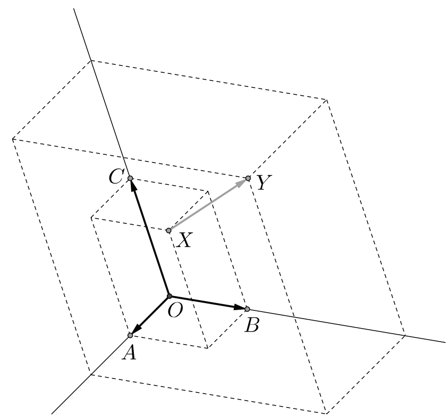


Figura 6.4: Sistema de referencia $\mathcal{R}$.

Si, respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}$ se verifica que un punto X tiene por coordenadas $(1, 2, 3)$ y un punto Y tiene por coordenadas (λ, μ, ν), con $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, entonces las componentes del vector $\overrightarrow{XY}$ son $(\lambda - 1, \mu - 2, \nu - 3)$, es decir,

$$\overrightarrow{XY} = (\lambda - 1)\overrightarrow{OA} + (\mu - 2)\overrightarrow{OB} + (\nu - 3)\overrightarrow{OC}.$$

Así, por ejemplo, si

$$\begin{cases} (\lambda, \mu, \nu) = (2, 3, 4) & \Rightarrow \quad \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ (\lambda, \mu, \nu) = (4, 5, 6) & \Rightarrow \quad \overrightarrow{XY} = 3\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} \\ (\lambda, \mu, \nu) = (-3, 4, -5) & \Rightarrow \quad \overrightarrow{XY} = -4\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 8\overrightarrow{OC}. \end{cases} \quad \square$$

Observación 6.8 En todo lo que sigue, y salvo que se mencione explícitamente lo contrario, consideramos en el espacio afín n–dimensional el *sistema de referencia canónico*

$$\mathcal{R}_n = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\},$$

donde O es el origen de $\mathbb{R}^n$ y el vector $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$ tiene todas sus componentes nulas salvo la i–ésima, que vale 1, es decir,

$$\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, \overset{i)}{1}, 0, \ldots, 0).$$

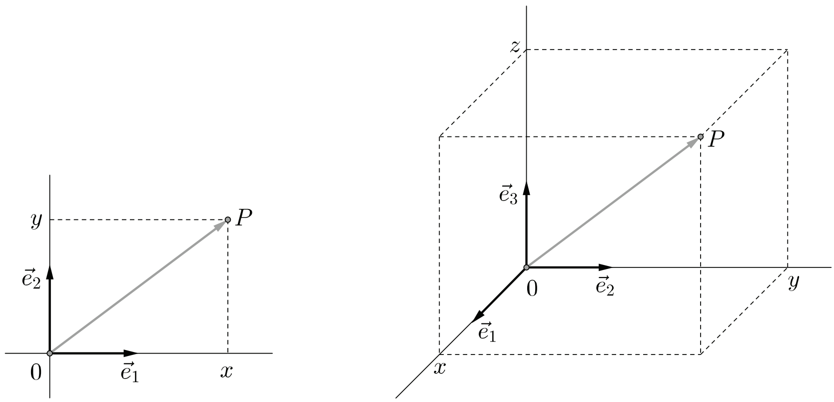
En las Figuras 6.5(a) y 6.5(b) se muestran las referencias canónicas

$$\mathcal{R}_2 = \{O = (0,0); \vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$$

y

$$\mathcal{R}_3 = \{O = (0,0,0); \vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$$

en los espacios afines $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. $\square$



(a) Referencia canónica en $\mathbb{R}^2$. (b) Referencia canónica en $\mathbb{R}^3$.

Figura 6.5: Referencias canónicas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 6.3 Si $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ y $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$, se verifica que los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{OP}$ vienen dados por

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) \\ \overrightarrow{OP} = (p_1 - 0, p_2 - 0, p_3 - 0) = (p_1, p_2, p_3). \quad \square \end{cases}$$

Definición 6.5 Sen P y Q dos puntos de un espacio afín $\mathcal{A}$. El *segmento* de extremos P y Q, al que denotamos $\overline{PQ}$, es el conjunto de todos los puntos X tales que

$$\overrightarrow{PX} = \lambda \overrightarrow{PQ}$$

para algún número real λ verificando $0 \leq \lambda \leq 1$. $\square$

Observación 6.9 Nótese que para $\lambda = 0$ se tiene que $X = P$, para $\lambda = 1$ se tiene que $X = Q$ y para valores $0 < \lambda < 1$ el punto X va recorriendo todos los posibles puntos comprendidos entre P y Q. $\square$

Observación 6.10 Consideremos en $\mathbb{R}^3$ (el resultado en el espacio $\mathbb{R}^2$ es análogo) dos puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ como en la Figura 6.6.

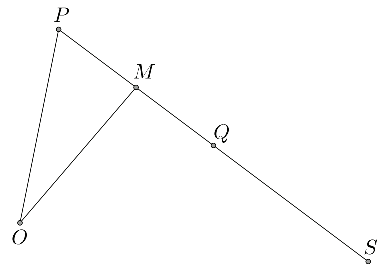


Figura 6.6: Punto medio M de $\overline{PQ}$ y punto simétrico S de P respecto de Q.

a) El *punto medio* del segmento $\overline{PQ}$ es el único punto M que verifica

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{PQ},$$

es decir,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{PQ}.$$

Por tanto, el punto medio M viene dado, en función de los puntos P y Q, por

$$M = (p_1, p_2, p_3) + \frac{1}{2}(q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3),$$

es decir,

$$\boxed{M = \left(\frac{p_1 + q_1}{2}, \frac{p_2 + q_2}{2}, \frac{p_3 + q_3}{2}\right).}$$

b) El *punto simétrico* del punto P respecto de Q es el único punto S que verifica que Q es el punto medio del segmento $\overline{PS}$. Por tanto, debe cumplirse

$$(q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{p_1 + s_1}{2}, \frac{p_2 + s_2}{2}, \frac{p_3 + s_3}{2}\right),$$

de donde se obtiene que el punto simétrico S es

$$\boxed{S = (2q_1 - p_1, 2q_2 - p_2, 2q_3 - p_3)\,.} \quad \square$$

Ejemplo 6.4 Si $P = (2, 0, -4)$ y $Q = (-2, 4, 2)$, el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ es $M = (0, 2, -1)$ y el punto simétrico de P respecto de Q es $S = (-6, 8, 8)$. $\square$

6.3. Ecuaciones de las rectas en el plano y de las rectas y los planos en el espacio

6.3.1. Rectas en el plano

Definición 6.6 Sea A un punto de $\mathbb{R}^2$, $\vec{v}$ un vector libre de $\mathbb{R}^2$ y $\overrightarrow{AB}$ el (único) representante de $\vec{v}$ con origen en el punto A. Se denomina *recta* definida por el punto A y el vector $\vec{v}$ al conjunto r de puntos $P \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{6.1}$$

(véase la Figura 6.7). Se dice que $\vec{v}$ es un *vector director* de la recta r y que (6.1) es una *ecuación vectorial* de la recta r. $\square$

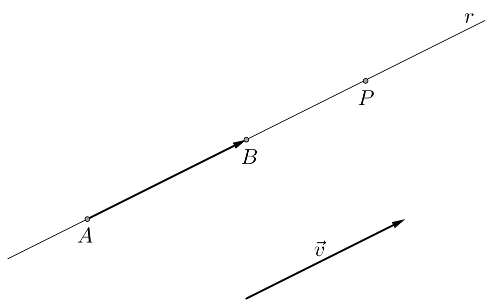


Figura 6.7: Recta r que pasa por el punto A con vector director $\vec{v}$.

Observación 6.11 Nótese que cada recta del plano es un espacio afín de dimensión 1. En efecto, en la Definición 6.3 basta considerar $\mathcal{A}$ el conjunto de puntos de la recta, $\mathbf{V} = \{\lambda\vec{v} : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ (es fácil mostrar que $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial de dimensión 1), y la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathbf{V} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ (A, \vec{u}) & \mapsto & P = A + \vec{u} \end{array}$$

(véase la Figura 6.7). $\square$

Definición 6.7 Supongamos que, en $\mathbb{R}^2$, el punto A y el vector $\vec{v}$ que definen la recta r tienen coordenadas $A = (a_1, a_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y que un punto arbitrario P de la recta r tiene coordenadas $P = (x, y)$. Dado que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP},$$

utilizando (6.1) se verifica que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v}$$

o, en términos de coordenadas

$$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \end{cases}} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \tag{6.2}$$

que se denominan *ecuaciones paramétricas* de la recta r. $\square$

Definición 6.8 Si despejamos λ en cada una de las ecuaciones de (6.2) e igualamos las expresiones obtenidas, se tiene que

$$\boxed{\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2},} \tag{6.3}$$

que se denominan *ecuaciones en forma continua* de la recta r. $\square$

Observación 6.12 Al expresar una recta en forma continua, debe tenerse en cuenta que si alguno de los denominadores que aparecen en la expresión (6.3) es cero, entonces también es cero, el numerador correspondiente (véase (6.2)). Por ejemplo, si $v_1 = 0$, entonces $x = a_1$ es la ecuación de la recta. $\square$

Definición 6.9 De las ecuaciones 6.3 se deduce que

$$\boxed{y = a_2 + \frac{v_2}{v_1}(x - a_1),} \tag{6.4}$$

que se denomina *ecuación punto–pendiente* de la recta r (véanse las Observaciones 2.16 y 2.19), por tratarse de la ecuación que pasa por el punto (a_1, a_2) con pendiente $\frac{v_2}{v_1}$ (tal y como se vio en la Observación 2.18). $\square$

Observación 6.13 Nótese que si m es la pendiente de una recta, entonces $\vec{v} = (1, m)$ es un vector director de ésta. $\square$

Observación 6.14 Al expresar una recta en forma de punto–pendiente, debe tenerse en cuenta que si el denominador v_1 que aparece en la expresión (6.4) es cero, entonces, como ya se vio en la Observación 6.12, la ecuación de la recta r es $x = a_1$ (siendo el valor de y arbitrario), es decir, se trata de una recta vertical que pasa por el punto $(a_1, 0)$ (véase 6.2). $\square$

Definición 6.10 La relación (6.4) nos permite escribir

$$\boxed{ax + by + c = 0,}$$

que se denomina *ecuación general* de la recta r. $\square$

Ejemplo 6.5 Expresemos la recta r que pasa por los puntos $A = (3, -1)$ y $B = (1, 2)$ en las diversas formas. Para ello buscamos las condiciones que tiene que cumplir un punto $P = (x, y)$ para pertenecer a dicha recta. Como

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 3) \text{ y } \overrightarrow{AP} = P - A = (x - 3, y + 1),$$

una ecuación vectorial de r es

$$(x - 3, y + 1) = \lambda(-2, 3) \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

unas ecuaciones paramétricas de r son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{array} \right. \qquad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

una ecuación continua es

$$\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 1}{3},$$

unas ecuaciones de r en forma punto–pendiente vienen dadas por

$$y = -1 - \frac{3}{2}(x - 3)$$

y una ecuación general de r es

$$\frac{3}{2}x + y - \frac{7}{2} = 0. \quad \square$$

6.3.2. Rectas en el espacio

Definición 6.11 Sea A un punto de $\mathbb{R}^3$, $\vec{v}$ un vector libre de $\mathbb{R}^3$ y $\overrightarrow{AB}$ el (único) representante de $\vec{v}$ con origen en A. Se denomina *recta* definida por el punto A y el vector $\vec{v}$ al conjunto r de puntos $P \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{6.5}$$

(véase la Figura 6.7). Se dice que $\vec{v}$ es un *vector director* de la recta r y que (6.5) es una *ecuación vectorial* de la recta r. $\square$

Observación 6.15 Nótese que, al igual que sucedía con las rectas del plano, cada recta del espacio es un espacio afín de dimensión 1. $\square$

Definición 6.12 Supongamos que, en $\mathbb{R}^3$, el punto A y el vector $\vec{v}$ que definen la recta r tienen coordenadas $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y que un punto arbitrario P de r tiene coordenadas $P = (x, y, z)$. Puesto que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP},$$

a partir de (6.5) se deduce que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v}$$

o, en términos de coordenadas

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} x &= a_1 + \lambda v_1 \\ y &= a_2 + \lambda v_2 \\ z &= a_3 + \lambda v_3 \end{aligned}\right.} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \tag{6.6}$$

que se denominan *ecuaciones paramétricas* de la recta r. $\square$

Definición 6.13 Si despejamos λ en cada una de las ecuaciones de (6.6) e igualamos las expresiones obtenidas, se verifica que

$$\boxed{\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3},} \tag{6.7}$$

que se denominan *ecuaciones en forma continua* de la recta r. $\square$

Observación 6.16 Al expresar una recta en forma continua, debe tenerse en cuenta que si alguno de los denominadores que aparecen en la expresión (6.7) es cero, entonces también es cero el numerador correspondiente (véase (6.6)). $\square$

Definición 6.14 La relación (6.6) permite escribir:

a) Si $v_3 \neq 0$

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} x &= mz + n \\ y &= pz + q. \end{aligned}\right.} \tag{6.8}$$

b) Si $v_2 \neq 0$

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} x &= my + n \\ z &= py + q. \end{aligned}\right.}$$

c) Si $v_1 \neq 0$

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} y &= mx + n \\ z &= px + q, \end{aligned}\right.}$$

para adecuados valores $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ (que pueden ser distintos en cada caso). Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones reducidas* de la recta r. $\square$

Definición 6.15 Es claro que las ecuaciones reducidas de la recta r también se pueden expresar en la forma

$$\boxed{\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ex + fy + gz + h = 0, \end{cases}} \tag{6.9}$$

que se denominan *ecuaciones implícitas* de la recta r. En la Sección 6.4.6. veremos que cualquier sistema de ecuaciones de la forma (6.9) define una recta en el espacio (dado por la intersección de dos planos) si, y sólo si,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix} = 2. \quad \square$$

Ejemplo 6.6 Determinemos las ecuaciones de la recta r que pasa por $A = (3, -1, 2)$ y $B = (1, 2, 4)$ en las diversas formas. Como

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 3, 2) \text{ y } \overrightarrow{AP} = P - A = (x - 3, y + 1, z - 2),$$

una ecuación vectorial de r es

$$(x - 3, y + 1, z - 2) = \lambda(-2, 3, 2) \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

unas ecuaciones paramétricas de r son

$$\begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

unas ecuaciones de r en forma continua vienen dadas por

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2},$$

de donde se obtiene que

$$\begin{cases} x = 3 - 2\lambda = 3 - 2\,\dfrac{z-2}{2} \\ y = -1 + 3\lambda = -1 + 3\,\dfrac{z-2}{2}. \end{cases}$$

Por tanto, unas ecuaciones de r en forma reducida son

$$\begin{cases} x = -z + 5 \\ y = \dfrac{3}{2}\,z - 4 \end{cases}$$

y las ecuaciones de r en forma implícita son

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z - 5 = 0 \\ 2y - 3z + 8 = 0. \quad \square \end{array} \right. \tag{6.10}$$

Observación 6.17 Las ecuaciones de una recta no son únicas. Por ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 2z + 3 = 0 \\ 2y - 3z + 8 = 0 \quad \square \end{array} \right.$$

son otras ecuaciones implícitas de la recta del Ejemplo 6.6 (basta sustituir la primera ecuación de (6.10) por la suma de la primera y la segunda ecuaciones). $\square$

6.3.3. Planos en el espacio

Definición 6.16 Sea A un punto de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores libres de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes. Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ representantes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, respectivamente. Se denomina *plano* definido por el punto A y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (o por los puntos A, B, C) al conjunto π de puntos $P \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \tag{6.11}$$

(véase la Figura 6.8). Se dice que (6.11) es una *ecuación vectorial* del plano π. $\square$

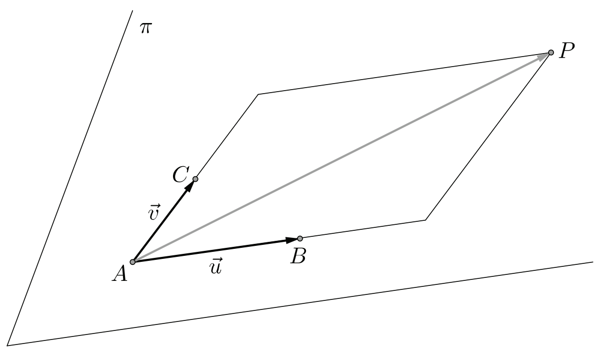


Figura 6.8: Plano π definido por el punto A y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (o por los puntos A, B y C).

Observación 6.18 Cada plano del espacio es un espacio afín de dimensión 2. $\square$

Definición 6.17 Supongamos que, en $\mathbb{R}^3$, el punto A y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que definen el plano π tienen coordenadas $A = (a_1, a_2, a_3), \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y que un punto arbitrario P del plano π tiene por coordenadas $P = (x, y, z)$. Puesto que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP},$$

utilizando (6.11) se tiene que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

o, en términos de coordenadas

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right.} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

que se denominan *ecuaciones paramétricas* del plano π. $\square$

Definición 6.18 La relación (6.11) expresa que los vectores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente dependientes, lo que nos permite expresar que

$$\det \begin{pmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{6.12}$$

Desarrollando el determinante anterior se obtiene una ecuación del tipo

$$\boxed{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,} \tag{6.13}$$

que se denomina *ecuación general* del plano π. $\square$

Observación 6.19 Recíprocamente, el conjunto de puntos $P \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen una ecuación del tipo (6.13) es un plano. En efecto, si $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ son tres soluciones de la ecuación (6.13) y los puntos A, B y C no están alineados, se verifica que

$$\left\{\begin{array}{r} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 + \delta = 0 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 + \delta = 0 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 + \delta = 0. \end{array}\right.$$

Las ecuaciones anteriores, junto con (6.13), permiten escribir el sistema lineal homogéneo

$$\left\{\begin{array}{r} \alpha(x - a_1) + \beta(y - a_2) + \gamma(z - a_3) = 0 \\ \alpha(b_1 - a_1) + \beta(b_2 - a_2) + \gamma(b_3 - a_3) = 0 \\ \alpha(c_1 - a_1) + \beta(c_2 - a_2) + \gamma(c_3 - a_3) = 0 \end{array}\right.$$

en las incógnitas α, β y γ, cuya condición de compatibilidad es

$$\det\begin{pmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{pmatrix} = 0,$$

que es la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C (véase (6.12)). □

Observación 6.20 Las ecuaciones implícitas de una recta que aparecen en la Definición 6.15 se pueden interpretar como la intersección de dos planos. Es decir, la recta viene definida por los puntos que pertenecen al plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

y al plano

$$ex + fy + gz + h = 0$$

al mismo tiempo. □

Ejemplo 6.7 Expresemos, en las distintas formas, las ecuaciones del plano π que pasa por los puntos $A = (3, -1, 2)$, $B = (1, 2, 4)$ y $C = (-1, 0, 3)$. Como

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 3, 2) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (-4, 1, 1) \\ \overrightarrow{AP} = P - A = (x-3, y+1, z-2), \end{cases}$$

una ecuación vectorial de π es

$$(x-3, y+1, z-2) = \lambda(-2, 3, 2) + \mu(-4, 1, 1) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

unas ecuaciones paramétricas de π son

$$\begin{cases} x = 3 - 2\lambda - 4\mu \\ y = -1 + 3\lambda + \mu \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

y una ecuación general de π viene dada por

$$\det\begin{pmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

es decir,

$$x - 6y + 10z = 29. \quad □$$

6.4. Problemas de incidencia y paralelismo

6.4.1. Posiciones relativas de dos rectas en el plano

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ las rectas siguientes:

a) r definida por el punto $A = (a_1, a_2)$ y el vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

b) s definida por el punto $B = (b_1, b_2)$ y el vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Pueden presentarse dos casos:

1) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, es decir, existe un escalar $\lambda \neq 0$ de forma que

$$\boxed{\vec{u} = \lambda \vec{v}.} \tag{6.14}$$

En tal caso se dice que las rectas son *paralelas*. La condición de paralelismo (6.14) puede expresarse de la siguiente forma:

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} \;\Leftrightarrow\; (u_1, u_2) = \lambda (v_1, v_2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} u_1 = \lambda v_1 \\ u_2 = \lambda v_2. \end{cases}$$

Por tanto, despejando λ en cada coordenada, se tiene que cumplir que

$$\boxed{\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2},} \tag{6.15}$$

donde debe tenerse en cuenta que si alguno de los denominadores que aparecen en la expresión (6.15) es cero, entonces también es cero el numerador correspondiente (véase (6.14)). Si las rectas r y s son paralelas, entonces o no tienen ningún punto en común o los tienen todos (coinciden) (véase la Figura 6.9).

2) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes. En este caso, existen dos escalares ζ y η, no nulos simultáneamente, tales que

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \zeta \vec{u} + \eta \vec{v}.} \tag{6.16}$$

Como una ecuación vectorial de la recta s puede ser escrita en la forma

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \lambda \vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

sustituyendo el valor de la expresión (6.16) se obtiene

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \lambda \vec{v} = \zeta \vec{u} + \eta \vec{v} + \lambda \vec{v} = \zeta \vec{u} + (\eta + \lambda) \vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

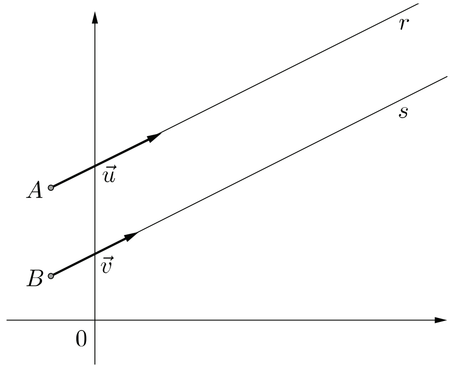


Figura 6.9: Rectas r y s paralelas.

En particular, para $\lambda = -\eta$ obtenemos el punto Q de la recta s que verifica

$$\overrightarrow{AQ} = \zeta \vec{u},$$

lo cual indica que el punto Q también pertenece a la recta r. En este caso las rectas r y s tienen un único punto en común Q y se dice que las rectas r y s se *cortan* (véase la Figura 6.10).

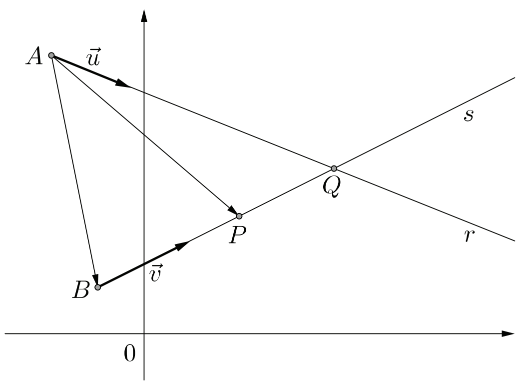


Figura 6.10: Rectas r y s que se cortan en el punto Q.

6.4.2. Condición para que tres puntos de $\mathbb{R}^2$ estén alineados

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ tres puntos A, B y C, con coordenadas $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$. La condición necesaria y suficiente para que los puntos A, B y C estén alineados (es decir, estén sobre una misma recta) es que exista un escalar $\lambda \neq 0$ tal que

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB},}$$

es decir,

$$\boxed{(c_1 - a_1, c_2 - a_2) = \lambda\,(b_1 - a_1, b_2 - a_2)} \tag{6.17}$$

o, en forma equivalente,

$$\boxed{\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{c_2 - a_2}{b_2 - a_2},} \tag{6.18}$$

donde debe tenerse en cuenta que si alguno de los denominadores que aparecen en la expresión (6.18) es cero, entonces los tres puntos están alineados si también es cero el numerador correspondiente (véase (6.17)).

Ejemplo 6.8 Determinar los valores de x para que los puntos $A = (3, -1)$, $B = (1, 2)$ y $C = (x, 2)$ estén alineados. Como

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (x - 3, 3) \text{ y } \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 3),$$

la condición para que los puntos A, B y C estén alineados es que se cumpla

$$\frac{x - 3}{-2} = \frac{3}{3},$$

de donde se obtiene el valor $x = 1$. $\square$

6.4.3. Condición para que tres puntos de $\mathbb{R}^3$ estén alineados

Consideremos en el espacio $\mathbb{R}^3$ tres puntos A, B y C, con coordenadas $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$. La condición necesaria y suficiente para que los puntos A, B y C estén alineados (es decir, pertenezcan a una misma recta) es que exista un escalar $\lambda \neq 0$ verificando

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB},}$$

es decir,

$$\boxed{(c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3) = \lambda\,(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)} \tag{6.19}$$

o, en forma equivalente,

$$\boxed{\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{c_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{c_3 - a_3}{b_3 - a_3},} \tag{6.20}$$

donde una vez más debe tenerse en cuenta que si alguno de los denominadores que aparecen en la expresión (6.20) es cero, entonces los tres puntos están alineados si también es cero el numerador correspondiente (véase (6.19)).

Ejemplo 6.9 Hallar los valores que deben tomar x e y para que los puntos $A = (3, -1, 2)$, $B = (1, 2, 4)$ y $C = (x, y, 6)$ estén alineados. Como

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (x - 3, y + 1, 4) \text{ y } \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 3, 2),$$

la condición para que los puntos A, B y C estén alineados es que se cumpla

$$\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 1}{3} = \frac{4}{2} = 2,$$

de donde se obtienen los valores $x = -1$ e $y = 5$. □

6.4.4. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ las rectas siguientes:

a) r definida por el punto $A = (a_1, a_2, a_3)$ y el vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

b) s definida por el punto $B = (b_1, b_2, b_3)$ y el vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Pueden presentarse tres casos:

1) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, es decir, existe un escalar $\lambda \neq 0$ de forma que

$$\boxed{\vec{u} = \lambda \vec{v}.} \tag{6.21}$$

En tal caso se dice que las rectas son *paralelas*. La condición de paralelismo (6.21) puede expresarse de la siguiente forma:

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = \lambda(v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \lambda v_1 \\ u_2 = \lambda v_2 \\ u_3 = \lambda v_3. \end{array} \right.$$

Así, la condición de paralelismo (6.21) puede expresarse, despejando λ, como

$$\boxed{\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3},} \tag{6.22}$$

donde debe tenerse en cuenta que si alguno de los denominadores que aparecen en la expresión (6.22) es cero, entonces también es cero el numerador correspondiente (véase (6.21)). Si las rectas r y s son paralelas, entonces o no tienen ningún punto en común o los tienen todos (coinciden) (véase la Figura 6.11).

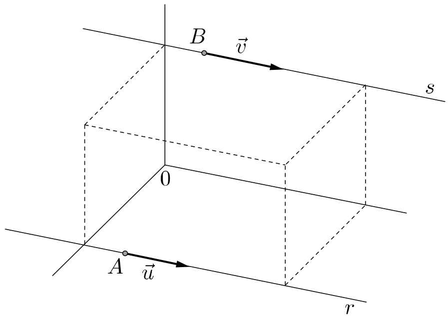


Figura 6.11: Rectas r y s paralelas.

2) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes pero los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, es decir, existen dos escalares ζ y η, no nulos simultáneamente, tales que

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \zeta\vec{u} + \eta\vec{v}} \tag{6.23}$$

o, en términos de coordenadas, se verifica que

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 0.}$$

Como la ecuación vectorial de la recta s puede ser escrita en la forma

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \lambda\vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

sustituyendo el valor de la expresión (6.23) se obtiene

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \lambda\vec{v} = \zeta\vec{u} + \eta\vec{v} + \lambda\vec{v} = \zeta\vec{u} + (\eta + \lambda)\vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

En particular, para $\lambda = -\eta$ obtenemos el punto Q de la recta s que verifica

$$\overrightarrow{AQ} = \zeta\vec{u},$$

lo que indica que el punto Q también pertenece a la recta r. Por tanto, en este caso, las rectas r y s tienen un único punto en común Q y se dice que las rectas r y s se *cortan* (véase la Figura 6.12).

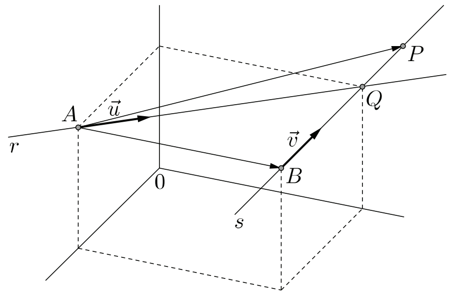


Figura 6.12: Rectas r y s que se cortan en el punto Q.

3) Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, es decir,

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \neq 0.}$$

En este caso las rectas r y s se *cruzan* (no son paralelas, ni se cortan) (véase la Figura 6.13). $\square$

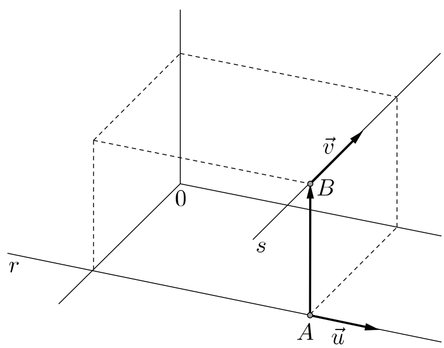


Figura 6.13: Rectas r y s que se cruzan.

Ejemplo 6.10 Determinemos la posición relativa de las rectas que se dan a continuación:

a) $r_1 : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-5}{1}$ y $s_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z-6}{-2}$.

Como los vectores directores de las rectas r_1 y s_1 verifican

$$\frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2},$$

se tiene que las rectas son paralelas. Como, además, el punto $P = (2, 3, 5)$ pertenece a las dos rectas, se tiene que las rectas r_1 y s_1 coinciden.

b) $r_2 : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-4}{1}$ y $s_2 : \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z-2}{2}$.

Como los vectores directores de las rectas r_2 y s_2 verifican

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

se tiene que las rectas son paralelas y no coinciden, puesto que el punto $P = (-1, 2, 4)$ pertenece a r_2 pero no a s_2.

c) $r_3 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ y $s_3 : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+4}{5}$.

Puesto que los vectores directores de las rectas r_3 y s_3 no son proporcionales, las rectas no son paralelas. Para determinar si estas rectas se cortan o se cruzan, a partir de los puntos $A = (3, 3, -1) \in r_3$ y $B = (1, -1, -4) \in s_3$ y de los vectores de dirección $\vec{u} = (2, -1, 2)$ de r_3 y $\vec{v} = (4, 3, 5)$ de s_3, hallamos el valor del determinante

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como la tercera fila es la segunda fila menos la primera, se tiene que $\Delta = 0$, por lo que las rectas r_3 y s_3 se cortan en un punto.

d) $r_4 : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-4}{-2}$ y $s_4 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-4}$.

Dado que los vectores directores de las rectas r_4 y s_4 no son proporcionales, las rectas no son paralelas. Para determinar si estas rectas se cortan o se cruzan, a partir de los puntos $A = (1, 2, 4) \in r_4$ y $B = (-2, 1, -1) \in s_4$ y de los vectores de dirección $\vec{u} = (-1, 3, -2)$ de r_4 y $\vec{v} = (3, -2, -4)$ de s_4, hallamos el valor del determinante

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Como $\Delta = 93 \neq 0$, las rectas r_4 y s_4 se cruzan. $\square$

6.4.5. Condición para que cuatro puntos espaciales sean coplanarios

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ cuatro puntos A, B, C y D, cuyas coordenadas son $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ y $D = (d_1, d_2, d_3)$. La condición necesaria y suficiente para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios es que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes, es decir, existen escalares λ y μ tales que

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD}.}$$

La expresión anterior puede expresarse, en forma equivalente, como

$$\det\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & d_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & d_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & d_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{6.24}$$

o también como

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = 0.} \tag{6.25}$$

Observación 6.21 Las expresiones (6.24) y (6.25) son equivalentes puesto que, por las propiedades de los determinantes,

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ 0 & c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ 0 & d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & d_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & d_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & d_3 - a_3 \end{pmatrix}. \quad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.11 Sean los puntos $A = (0, 1, -2)$, $B = (1, 0, -1)$, $C = (0, 0, -4)$ y $D = (1, 1, 1)$. Desarrollado el determinante (6.25) por los elementos de la tercera fila, se obtiene

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - (-4) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -4 + 4 = 0.$$

Por tanto, los puntos A, B, C y D se encuentran situados en el mismo plano π. Compruébese que la ecuación del plano π es $3x + 2y - z = 4$. $\square$

6.4.6. Posiciones relativas de dos planos en el espacio

Consideremos los planos π_1 y π_2 dados por

$$\begin{cases} \pi_1 : \ \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0 \\ \pi_2 : \ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0. \end{cases} \tag{6.26}$$

En función del rango de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \ \text{y} \ \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix},$$

pueden presentarse tres casos:

1) $\boxed{\operatorname{rg}(A) = 2}$ (lo que implica que $\operatorname{rg}(\widetilde{A}) = 2$). Por el *teorema de Rouché–Fröbenius*, el sistema (6.26) es compatible e indeterminado. Supongamos, por ejemplo, que

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \neq 0. \tag{6.27}$$

Entonces el sistema (6.26) puede expresarse en la forma

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = -\gamma_1 z - \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = -\gamma_2 z - \delta_2. \end{cases}$$

Como se cumple (6.27), por la *regla de Cramer* (véase el Teorema 4.2) podemos despejar x e y en función de z, obteniendo que

$$\begin{cases} x = mz + n \\ y = pz + q, \end{cases}$$

que son las ecuaciones reducidas de una recta r (véase (6.8)) (nótese que (6.26) son las ecuaciones implícitas de la recta r (véase (6.9))). En este caso se dice que los planos π_1 y π_2 se *cortan* en la recta r (véase la Figura 6.14).

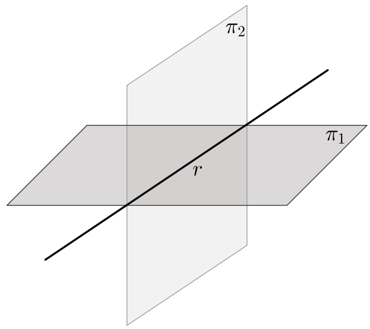


Figura 6.14: Planos π_1 y π_2 que se cortan en la recta r.

2) $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1 < 2 = \mathrm{rg}(\widetilde{A})}$ Por el teorema de Rouché–Fröbenius, el sistema 6.26 es incompatible. En este caso se tiene que

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \neq \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

y se dice que los planos π_1 y π_2 son *paralelos* (véase la Figura 6.15).

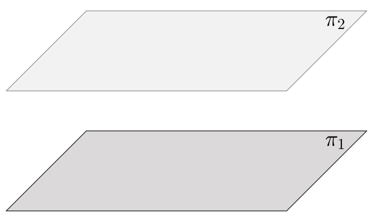


Figura 6.15: Planos π_1 y π_2 paralelos.

3) $\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\widetilde{A}) = 1}$ Por el teorema de Rouché–Fröbenius, el sistema (6.26) es compatible e indeterminado. Ahora se verifica que

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \nu,$$

por lo que

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = \nu\,(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2)$$

y, por tanto, los planos π_1 y π_2 *coinciden*. $\square$

Ejemplo 6.12 Determinemos la posición relativa de los planos que se dan a continuación:

a) $\begin{cases} \pi_1 : \ 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ \pi_2 : \ \ x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$ Teniendo en cuenta que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

ya que

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 7 \neq 0, \tag{6.28}$$

se verifica que $\mathrm{rg}(\widetilde{A}) = 2$ y, por tanto, ambos planos se cortan en la recta cuyas ecuaciones implícitas son

$$r : \begin{cases} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -z - 1 \\ x + 2y = z - 1. \end{cases}$$

La propiedad (6.28) permite resolver (en función de z) las variables x e y del sistema anterior por la regla de Cramer y obtener que las ecuaciones reducidas de la recta r son

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{7}\det\begin{pmatrix} -z-1 & -3 \\ z-1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{-2z - 2 + 3z - 3}{7} = \dfrac{z}{7} - \dfrac{5}{7} \\[2ex] y = \dfrac{1}{7}\det\begin{pmatrix} 2 & -z-1 \\ 1 & z-1 \end{pmatrix} = \dfrac{2z - 2 + z + 1}{7} = \dfrac{3z}{7} - \dfrac{1}{7}. \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \pi_1 : \ 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ \pi_2 : \ 4x - 6y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$ Puesto que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} = 1 \ \text{ y } \ \mathrm{rg}(\widetilde{A}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

(sencillo de probar), ambos planos son paralelos.

c) $\begin{cases} \pi_1 : \ 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ \pi_2 : \ 4x - 6y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$ Como se tiene que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} = 1 \ \text{ y } \ \mathrm{rg}(\widetilde{A}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

(fácil de probar), ambos planos coinciden. $\square$

6.4.7. Posiciones relativas de recta y plano en el espacio

Consideremos la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = a + \lambda v_1 \\ y = b + \lambda v_2 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = c + \lambda v_3 \end{array}\right. \tag{6.29}$$

y el plano π de ecuación

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0. \tag{6.30}$$

Sustituyendo en (6.30) los valores de x, y y z de (6.29), se obtiene que

$$\alpha\left(a + \lambda v_1\right) + \beta\left(b + \lambda v_2\right) + \gamma\left(c + \lambda v_3\right) + \delta = 0, \tag{6.31}$$

es decir,

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta + \lambda\left(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3\right) = 0. \tag{6.32}$$

Pueden presentarse dos casos:

1) $\boxed{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \neq 0.}$ En este caso, si tomamos

$$\boxed{\lambda_0 = -\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta}{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3}}$$

(véase (6.32)), el punto P de coordenadas (x_0, y_0, z_0), donde

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = a + \lambda_0 v_1 \\ y_0 = b + \lambda_0 v_2 \\ z_0 = c + \lambda_0 v_3, \end{array}\right.$$

tiene la propiedad de pertenecer a la recta r y al plano π (véanse (6.29) y (6.31)). De hecho P es el único punto en común de r y π, y se dice que la recta r y el plano π se *cortan* en el punto P (véase la Figura 6.16).

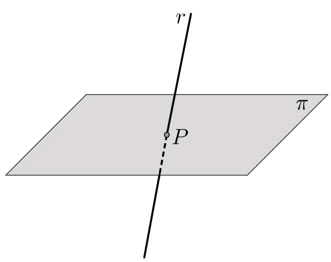


Figura 6.16: Recta r que corta al plano π en el punto P.

2) $\boxed{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0.}$ Aquí, a su vez, pueden presentarse dos casos:

a) Si el punto (a, b, c) de la recta r no pertenece al plano π, entonces la expresión (6.32) no se satisface para ningún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, lo que indica que la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común. En esta situación se dice que la recta r es *paralela* al plano π (véase la Figura 6.17).

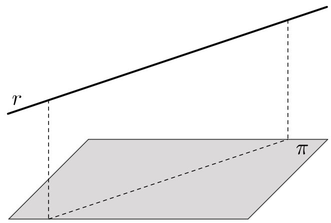


Figura 6.17: Recta r paralela al plano π.

b) Si el punto (a, b, c) de la recta r pertenece al plano π, entonces la expresión (6.32) se satisface para cualquier valor de $\lambda \in \mathbb{R}$. En este caso se dice que la recta r está *contenida* en el plano π.

Ejemplo 6.13 Determinemos la posición relativa de las rectas y planos siguientes:

a) $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ y $\pi :\ 2x - 3y + z + 1 = 0$. Al sustituir los valores de x, y, z de la ecuación de la recta en la ecuación del plano, se obtiene que

$$2(1+2\lambda)-3(-\lambda)+(-2+2\lambda)+1 = 0 \Leftrightarrow 2+4\lambda+3\lambda-2+2\lambda+1 = 0 \Leftrightarrow 9\lambda+1 = 0.$$

Como la ecuación anterior se satisface para la elección del parámetro

$$\lambda = -\frac{1}{9},$$

se tiene que la recta r y el plano π se cortan en un único punto P dado por

$$P = \left(1 + 2\left(-\frac{1}{9}\right), -\left(-\frac{1}{9}\right), -2 + 2\left(-\frac{1}{9}\right)\right) = \left(\frac{7}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{20}{9}\right).$$

b) $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ y $\pi :\ 2x + 6y + z - 1 = 0$. Al sustituir los valores de x, y, z de la ecuación de la recta en la ecuación del plano, se obtiene que

$$2(1+2\lambda)+6(-\lambda)+(-2+2\lambda)-1 = 0 \Leftrightarrow 2+4\lambda-6\lambda-2+2\lambda-1 = 0 \Leftrightarrow -1 = 0(¡!).$$

Como la ecuación anterior carece de sentido, no existe ningún punto de la recta r que se encuentre en el plano π, por lo que la recta r es paralela al plano π.

c) $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ y $\pi :\ 2x + 6y + z = 0$. Al sustituir los valores de x, y, z de la ecuación de la recta en la ecuación del plano, se obtiene que

$$2(1 + 2\lambda) + 6(-\lambda) + (-2 + 2\lambda) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2 + 4\lambda - 6\lambda - 2 + 2\lambda = 0 \ \Leftrightarrow\ 0 = 0.$$

Como la ecuación anterior se verifica para cualquier valor $\lambda \in \mathbb{R}$, todos los puntos de la recta r pertenecen al plano π, por lo que la recta r está contenida en el plano π. □

6.4.8. Posiciones relativas de tres planos en el espacio

Consideremos los planos π_1, π_2 y π_3 dados por

$$\begin{cases} \pi_1 :\ \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0 \\ \pi_2 :\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0 \\ \pi_3 :\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 = 0. \end{cases} \tag{6.33}$$

En función del rango de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{pmatrix},$$

pueden presentarse cinco casos:

1) $\boxed{\operatorname{rg}(A) = 3}$ (lo que implica que $\operatorname{rg}(\widetilde{A}) = 3$). Por el teorema de Rouché–Fröbenius, el sistema (6.33) es compatible y determinado. Los planos π_1, π_2 y π_3 se *cortan* en un punto P (véase la Figura 6.18).

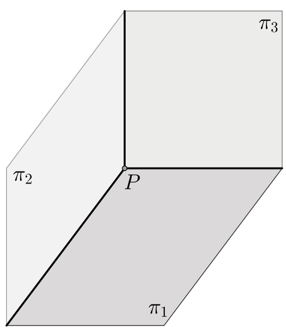
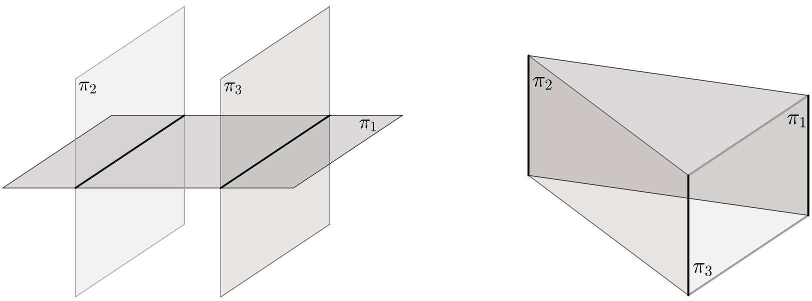


Figura 6.18: Planos π_1, π_2 y π_3 que se cortan en el punto P.

2) $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = \mathrm{rg}(\widetilde{A}).}$ Por el teorema de Rouché–Fröbenius, el sistema (6.33) es incompatible, es decir, los planos π_1, π_2 y π_3 no tienen ningún punto en común (véase la Figura 6.19). En ese caso puede ocurrir que haya dos planos paralelos (Figura 6.19(a)) o no (Figura 6.19(b)). Para determinar en cuál de los casos nos encontramos, basta aplicar lo estudiado en la Sección 6.4.6. para ver la posición relativa de los planos π_1 con π_2, π_1 con π_3 y π_2 con π_3.



(a) Dos planos (π_2 y π_3) paralelos. (b) No hay planos paralelos.

Figura 6.19: Planos π_1, π_2 y π_3 que no se cortan.

3) $\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\widetilde{A}) = 2.}$ Por el teorema de Rouché–Fröbenius, el sistema (6.33) es compatible e indeterminado. Los planos π_1, π_2 y π_3 se *cortan* en una recta r (véase la Figura 6.20); también puede ocurrir que dos de los planos coincidan (sean el mismo plano) y se corten con el otro plano en una recta.

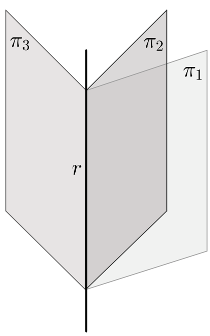


Figura 6.20: Planos π_1, π_2 y π_3 que se cortan en la recta r.

4) $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1 < 2 = \mathrm{rg}(\widetilde{A}).}$ Por el teorema de Rouché–Fröbenius, el sistema (6.33) es incompatible. En este caso, los planos π_1, π_2 y π_3 son *paralelos* (dos de los cuales pueden ser coincidentes) (véase la Figura 6.21).

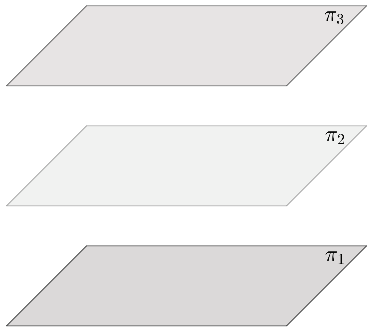


Figura 6.21: Planos π_1, π_2 y π_3 paralelos.

5) $\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\widetilde{A}) = 1.}$ Por el teorema de Rouché–Fröbenius, el sistema (6.33) es compatible e indeterminado. En este caso, los planos π_1, π_2 y π_3 *coinciden*. □

Ejemplo 6.14 Determinemos la posición relativa de los planos que se dan a continuación:

a) $\begin{cases} \pi_1 : \quad x + y + 1 = 0 \\ \pi_2 : \quad 2x - y - 1 = 0 \\ \pi_3 : \; -4x - y + 2z = 0. \end{cases}$ Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que

$$\det(A) = -2 + 0 + 0 - 0 - 4 + 0 = -6 \neq 0,$$

se verifica que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A}) = 3$$

y, por tanto, los tres planos se cortan en un punto P (se da una situación parecida a la mostrada en la Figura 6.18). Compruébese que $P = \left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$.

b) $\begin{cases} \pi_1 : \quad x + y - z + 1 = 0 \\ \pi_2 : \quad 2x - y - 1 = 0 \\ \pi_3 : \; -4x - y + 2z = 0. \end{cases}$ Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\det(A) = -2+0+2+4-4+0 = 0,\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$$

y

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0-1-2+0+2-0 = -1 \neq 0,$$

se verifica que

$$\mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = \mathrm{rg}(\widetilde{A})$$

y, por tanto, los planos π_1, π_2 y π_3 no tienen ningún punto en común. Para saber si dos de los tres planos son paralelos o no, aplicamos lo visto en la Sección 6.4.6., estudiando la posición relativa de las posibles parejas que pueden formarse con estos planos:

i) Planos π_1 y π_2. Consideramos las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0,$$

se verifica que

$$\mathrm{rg}(B) = 2 = \mathrm{rg}(\widetilde{B})$$

y, por tanto, los planos π_1 y π_2 se cortan en la recta

$$\left\{\begin{aligned} x+y &= z-1 \\ 2x-y &= 1 \end{aligned}\right. \quad \text{(ec. implícitas)} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{aligned} x &= \frac{z}{3} \\ y &= \frac{2z}{3}-1 \end{aligned}\right. \quad \text{(ec. reducidas).}$$

ii) Planos π_1 y π_3. Siguiendo el mismo razonamiento, consideramos ahora las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0,$$

se tiene que

$$\mathrm{rg}(B) = 2 = \mathrm{rg}(\widetilde{B}),$$

por lo que los planos π_1 y π_3 se cortan en la recta

$$\left\{\begin{array}{r} x+y=z-1 \\ -4x-y=-2z \end{array}\right. \text{(ec. implícitas)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{z+1}{3} \\ y=\dfrac{2(z-2)}{3} \end{array}\right. \text{(ec. reducidas).}$$

iii) Planos π_2 y π_3. Finalmente, consideramos las matrices

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0,$$

se verifica que

$$\operatorname{rg}(B)=2=\operatorname{rg}(\widetilde{B}).$$

Consecuentemente, los planos π_2 y π_3 se cortan en la recta

$$\left\{\begin{array}{r} 2x-y=1 \\ -4x-y=-2z \end{array}\right. \text{(ec. implícitas)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2z+1}{6} \\ y=\dfrac{2(z-1)}{3} \end{array}\right. \text{(ec. reducidas).}$$

Por tanto, los planos π_1, π_2 y π_3 no tienen ningún punto en común y no hay planos paralelos entre ellos, por lo que la posición relativa de los mismos es similar a la que se muestra en la Figura 6.19(b).

c) $\left\{\begin{array}{ll} \pi_1: & x+y+1=0 \\ \pi_2: & 2x+2y-1=0 \\ \pi_3: & -4x-y+2z=0. \end{array}\right.$ Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\det(A)=4-0-0+0+0-4=0,\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}=3\neq 0$$

y

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0+4-2+8-0-1=9\neq 0,$$

se verifica que

$$\operatorname{rg}(A) = 2 < 3 = \operatorname{rg}(\widetilde{A})$$

y, por tanto, los planos π_1, π_2 y π_3 no tienen ningún punto en común. Para saber si dos de los tres planos son paralelos o no, argumentando como en el aparatado b), es fácil ver que los planos π_1 y π_2 son paralelos pero no son paralelos al plano π_3, por lo que se da una situación similar a la de la Figura 6.19(a).

d) $\left\{\begin{array}{l} \pi_1 : \quad x + y + z + 1 = 0 \\ \pi_2 : \ 3x + 2y + z = 0 \\ \pi_3 : \ 2x + y - 1 = 0. \end{array}\right.$ Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que (compruébese)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0,\ \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0,\ \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ y } \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$$

se verifica que

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\widetilde{A}) = 2$$

(otra forma de verlo es que la ecuación del plano π_2 es igual a la suma de las ecuaciones de los planos π_1 y π_3), por lo que los planos π_1, π_2 y π_3 se cortan en una recta r (se da una situación similar a la de la Figura 6.20). Para obtener las ecuaciones de esa recta, dado que el rango de las matrices A y $\widetilde{A}$ se ha obtenido con la primera y la tercera filas, las ecuaciones del plano π_2 son una combinación lineal de las ecuaciones de los planos π_1 y π_3 y, por tanto, no aportan nada al sistema formado por las ecuaciones de los tres planos (como se ha dicho anteriormente, la segunda ecuación es la suma de la primera y tercera ecuaciones). Consecuentemente, este sistema se puede reescribir, en forma equivalente, como

$$\left\{\begin{array}{r} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0, \end{array}\right.$$

que son unas ecuaciones implícitas de la recta r en que se cortan los planos π_1, π_2 y π_3. Comprobar que unas ecuaciones reducidas de dicha recta r son

$$\begin{cases} x = 2 + z \\ y = -3 - 2z. \end{cases}$$

e) $\begin{cases} \pi_1 : \quad x - 2y + z + 1 = 0 \\ \pi_2 : \ 2x - 4y + 2z = 0 \\ \pi_3 : \ 3x - 6y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$ Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \ \text{y} \ \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es fácil probar que

$$\mathrm{rg}(A) = 1 < 2 = \mathrm{rg}(\widetilde{A}).$$

Consecuentemente, los planos π_1, π_2 y π_3 son paralelos. Además, como no hay dos parejas de planos que sean coincidentes (fácil de probar), la situación que se da es similar a la de la Figura 6.21.

f) $\begin{cases} \pi_1 : \quad x - 2y + z + 1 = 0 \\ \pi_2 : \ 2x - 4y + 2z + 2 = 0 \\ \pi_3 : \ 3x - 6y + 3z + 3 = 0. \end{cases}$ Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \ \text{y} \ \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la segunda ecuación es el doble de la primera, y la tercera ecuación es el triple de la primera ecuación, se verifica que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\widetilde{A}) = 1.$$

Por tanto, los planos π_1, π_2 y π_3 coinciden. $\square$

6.5. Problemas

6.1. Se considera la recta r que pasa por el punto $A = (2, 4)$ y tiene por vector de dirección $\vec{v} = (3, -2)$.

a) Escribir, en las diversas formas, las ecuaciones de r.

b) Hallar los puntos de corte de r con los ejes coordenados.

c) Representar gráficamente la recta r.

6.2. Se consideran las rectas

$$r_1 : \ y = 3x - 3, \ r_2 : \ 5x + y + 3 = 0 \ \text{ y } \ r_3 : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

a) ¿Pasa la recta r_1 por el punto $A = (2, 2)$? ¿Y la recta r_3 por el punto $B = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$?

b) Hallar los puntos de corte de la recta r_2 con los ejes de coordenadas.

c) ¿Existe algún punto de la recta r_1 que tenga las dos coordenadas iguales? ¿Y con abscisa igual al doble de la ordenada?

d) Hallar los vértices del triángulo determinado por las rectas $r_1, \ r_2$ y r_3.

6.3. Se consideran los puntos $A = (1, 3, -2)$, $B = (2, 5, 1)$ y $C = (3, 0, -4)$. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto C y es paralela a la recta definida por los puntos A y B.

6.4. Dados los puntos $A = (-1, 3, 2)$, $B = (2, -1, -1)$ y $C = (\alpha - 2, 7, \beta)$, determinar los valores de α y β para que los tres puntos estén alineados.

6.5. Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r : \ x = y = z \quad \text{y} \quad s : \ \frac{x - \alpha}{\beta} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{2}$$

en función de los parámetros α y β.

6.6. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A = (-1, 2, 0)$ y es paralela a la recta

$$s : \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

6.7. Determinar la posición relativa de las rectas

$$r : \ \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{5} = z - 4 \quad \text{y} \quad s : \ x + 2 = \frac{y - 7}{2} = \frac{z + 5}{2}.$$

6.8. Hallar la ecuación del plano π que está determinado por los puntos $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, -1, 2)$ y $C = (5, -1, 1)$.

6.9. ¿Son coplanarios los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (4, -3, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, 3)$?

6.10. Encontrar el valor de α para el cual los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (-2, 1, 3)$ y $D = (\alpha, \alpha - 1, 2)$ sean coplanarios.

6.11. Hallar la ecuación general del plano π que contiene al punto $A = (2, 5, 1)$ y a la recta

$$r:\ x - 2 = \frac{y-1}{3} = z + 1.$$

6.12. Determinar los valores de α y β para que los planos

$$\pi_1:\ -6x + \alpha y - 4z - 9 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2:\ 9x - 3y + \beta z + 7 = 0$$

sean paralelos.

6.13. Hallar la intersección de la recta r determinada por el punto $A = (1, -3, 2)$ y el vector de dirección $\vec{v} = (2, 4, 1)$ con el plano $\pi:\ x + 2y - z - 2 = 0$.

6.14. Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \qquad\qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

y es paralelo a la recta s de ecuación

$$\frac{x}{3} = \frac{y-5}{-1} = z - 4.$$

6.15. Determinar la posición relativa de la recta

$$r:\ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 3$$

y el plano $\pi:\ 3x - 2y + z = 3$.

6.16. Hallar la posición relativa de los planos

$$\begin{cases} \pi_1: & x + ky + z = 0 \\ \pi_2: & x - y - kz = 2 \\ \pi_3: & 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

6.6. Soluciones

6.1. a) $\left\{\begin{array}{l} x = 2+3\lambda \\ y = 4-2\lambda \end{array}\right.$, $y = 4 - \dfrac{2}{3}(x-2)$, $2x+3y-16=0$. b) $(8,0)$ y $\left(0, \dfrac{16}{3}\right)$.

6.2. a) No. Sí. b) $\left(-\dfrac{3}{5}, 0\right)$, $(0,-3)$. c) $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.

d) $(0,-3)$, $\left(\dfrac{17}{7}, \dfrac{30}{7}\right)$, $(-1,2)$.

6.3. $x-3 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+4}{3}$.

6.4. $\alpha = -2$ y $\beta = 5$.

6.5. $$\left\{\begin{array}{l} \beta = 2 \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \;\Rightarrow\; r = s. \\ \alpha \neq 1 \;\Rightarrow\; r \parallel s. \end{array}\right. \\ \beta \neq 2 \;\Rightarrow\; r \text{ y } s \text{ se cortan en el punto } P = \left(\dfrac{2\alpha-\beta}{2-\beta}, \dfrac{2\alpha-\beta}{2-\beta}, \dfrac{2\alpha-\beta}{2-\beta}\right). \end{array}\right.$$

6.6. $\dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{5}$.

6.7. r y s se cruzan.

6.8. $x+7y+3z-1=0$.

6.9. No.

6.10. $\alpha = 4$.

6.11. $x-y+2z+1=0$.

6.12. $\alpha = 2$ y $\beta = 6$.

6.13. Punto $P = (3,1,3)$.

6.14. $3x+7y-2z-19=0$.

6.15. La recta r corta al plano π en el punto $P = \left(\dfrac{5}{2}, 1, -\dfrac{5}{2}\right)$.

6.16. $$\left\{\begin{array}{lll} k \notin \{-1,2\} & \Rightarrow & \pi_1, \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan. El punto de corte es} \\ & & P = \left(\dfrac{k^2+2k-7}{2(k+1)(k-2)}, \dfrac{1-k}{2(k+1)(k-2)}, \dfrac{7-3k}{2(k+1)(k-2)}\right). \\ k = -1 & \Rightarrow & \pi_1 \parallel \pi_2. \text{ El plano } \pi_3 \text{ corta a } \pi_1 \text{ y } \pi_2. \\ k = 2 & \Rightarrow & \pi_1, \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan dos a dos.} \end{array}\right.$$

7 Trigonometría

7.1. Introducción

Este capítulo está dedicado a la *Trigonometría*, que es una de las bases científicas del conocimiento y de la tecnología. Por ejemplo, herramientas cotidianas como los navegadores *GPS* (*Global Positioning System*) de los coches o de los móviles están basadas en esta área de las Matemáticas. Este capítulo será, además, imprescindible en capítulos posteriores (como el Capítulo 8) para poder determinar distancias y ángulos entre puntos, rectas y planos del espacio euclídeo.

Se comienza el capítulo revisando algunas definiciones y resultados básicos de Geometría, como son la *semejanza de triángulos*, el *teorema de Tales*, el *teorema de semejanza AAA* y el *teorema de Pitágoras*.

Se continúa introduciendo la definición de *grado sexagesimal* y de *radián* como unidades de medida de los ángulos, lo que conducirá a hablar, por primera vez, del número irracional π, que permite calcular (entre otras muchas cosas) la longitud de una circunferencia de radio conocido.

A continuación se definen las razones trigonométricas básicas, sus principales propiedades y la representación gráfica de algunas de ellas.

Se finaliza el capítulo con el *teorema del coseno* (como generalización del *teorema de Pitágoras*) y del *teorema del seno*, que resultan de gran ayuda para la *resolución de triángulos*, es decir, para encontrar todos los lados y ángulos de un triángulo, supuestos conocidos sólo parte de ellos.

7.2. Resultados básicos de Geometría

Definición 7.1 Un triángulo (véase la Figura 7.1) es:

a) *Equilátero* si tiene los tres lados iguales.

b) *Isósceles* si tiene dos lados iguales y uno desigual.

c) *Escaleno* si tiene los tres lados distintos. □

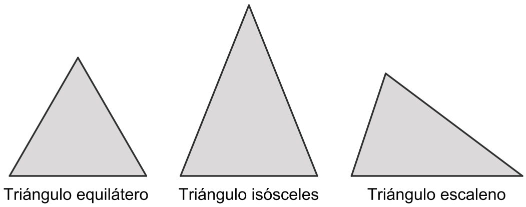
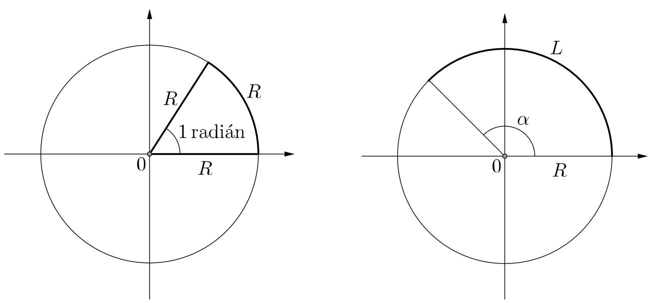


Figura 7.1: Tipos de triángulos.

Definición 7.2

a) Un *grado sexagesimal* ($^\circ$) es el ángulo que resulta al dividir el arco de una circunferencia en 360 partes iguales. Un *minuto sexagesimal* ($'$) es el ángulo que resulta al dividir un grado sexagesimal en 60 partes iguales $\left(\text{i.e., } 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ\right)$ y un *segundo sexagesimal* ($''$) es el ángulo que resulta al dividir un minuto sexagesimal en 60 partes iguales $\left(\text{i.e., } 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'\right)$.

b) Un *radián* es el ángulo que resulta al tomar un arco de circunferencia con la misma longitud que el radio $R > 0$ de la misma (véase la Figura 7.2(a)). □



(a) Ángulo de 1 radián. (b) Arco = Radio × Ángulo.

Figura 7.2: Relación entre ángulo, longitud de arco y radio.

Corolario 7.1 *La longitud del arco de una circunferencia es igual al producto del radio por el ángulo* (*en radianes*)*. Es decir, se verifica que*

$$L = R\alpha,$$

donde α es el ángulo dado en radianes y L y R son, respectivamente, la longitud del arco y el radio, dados en la misma unidad de medida (*por ejemplo en metros, en centímetros* ...) (véase la Figura 7.2(b)). □

Observación 7.1 (El número π) De acuerdo con antiguos escritos, parece que desde hace mucho tiempo (alrededor del año 2000 a.C.) se sabe que la razón entre la longitud L de una circunferencia y su diámetro D es siempre un valor constante. A ese valor constante le llamaron π, de forma que

$$\frac{L}{D} = \pi$$

o, equivalentemente, que la longitud de una circunferencia de radio R es $2\pi R$. El valor de π se fue aproximando con el paso de los años, con resultados como los obtenidos por Arquímedes (287 – 212 a.C.), que logró acotar su valor, probando que

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

En 1761 el científico suizo Johann Heinrich Lambert probó que π es un número irracional (es decir, $\pi \in \mathbb{I}$) tal que

$$\pi = 3'141592653589793\ldots \approx 3'141592653589793 \approx 3'14. \quad \square$$

Ejemplo 7.1 La longitud de una circunferencia de radio 3 es

$$L = 2\pi \times 3 = 6\pi \simeq 18'8496. \quad \square$$

Ejemplo 7.2 El ángulo generado por un arco de 3 cm en una circunferencia de 6 cm de radio es

$$\alpha = \frac{L}{R} = \frac{3}{6} = 0'5 \text{ radianes.} \quad \square$$

Observación 7.2 Aplicando el Corolario 7.1 a la longitud total de una circunferencia de radio $R > 0$ (que, como se ha visto en la Observación 7.1, es $L = 2\pi R$), se tiene que

$$\text{ángulo (circunferencia)} = \frac{\text{arco}}{\text{radio}} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Es decir, 2π radianes son $360°$, de donde se obtiene que

$$1 \text{ radián} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}. \quad \square$$

Ejemplo 7.3 Relación existente entre algunos grados sexagesimales y radianes:

Grados	360	180	120	90	60	45	30	15	$\cdots$
Radianes	2π	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\cdots$

Observación 7.3 Un *ángulo* recorrido en el sentido contrario a las agujas del reloj decimos que está *orientado positivamente* y es un *ángulo positivo*. En caso contrario, decimos que está *orientado negativamente* y es un *ángulo negativo* (véase la Figura 7.3). $\square$

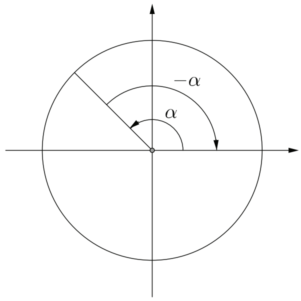


Figura 7.3: Orientación de ángulos.

Observación 7.4 En todo lo que sigue, salvo que se explicite lo contrario, trabajaremos con ángulos expresados en radianes. □

Definición 7.3 Un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ es:

a) *Agudo* si $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

b) *Recto* si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (suele representarse en las figuras con un cuadrado).

c) *Obtuso* si $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

d) *Llano* si $\alpha = \pi$.

Un triángulo con un ángulo recto se llama triángulo *rectángulo*. En los triángulos rectángulos se llama *catetos* a los lados que forman el ángulo recto e *hipotenusa* al único lado que no es cateto. En el triángulo rectángulo de la Figura 7.4 los catetos son los lados a y b y la hipotenusa es el lado c. □

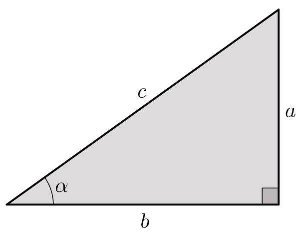


Figura 7.4: Triángulo rectángulo.

Proposición 7.1 *Los ángulos opuestos, generados por dos rectas que se cortan, son iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la Figura 7.5 y veamos que $\alpha = \beta$. Es claro que

$$\alpha + \gamma = \pi = \gamma + \beta,$$

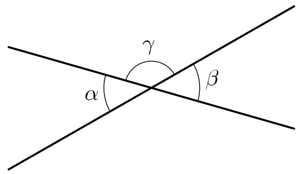


Figura 7.5: Ángulos opuestos, generados por dos rectas que se cortan.

de donde se deduce que $\alpha = \beta$. $\square$

Corolario 7.2 *La suma de los ángulos de un triángulo es π radianes.*

DEMOSTRACIÓN. Basta tener en cuenta la Proposición 7.1 y la Figura 7.6. $\square$

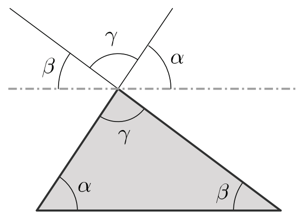


Figura 7.6: Suma de los ángulos de un triángulo.

Definición 7.4 Dos triángulos T_1 y T_2 son *semejantes*, y se denota $T_1 \sim T_2$, si sus ángulos son iguales. $\square$

Notación 7.1 En lo que sigue, denotaremos:

a) Los vértices de un triángulo con letras mayúsculas.

b) El triángulo con vértices P, Q y R como $P\overset{\triangle}{Q}R$.

c) Los lados de un triángulo y sus longitudes con las letras minúsculas correspondientes a los vértices opuestos.

d) Los ángulos de un triángulo con las letras griegas correspondientes a los vértices donde están situados. Otra posibilidad es denotar el ángulo sobre el vértice P de un triángulo $P\overset{\triangle}{Q}R$ (algo similar para los otros dos ángulos del triángulo) como $\widehat{QPR}$ o $\widehat{RPQ}$ (a veces también se denotan con la misma letra mayúscula que el vértice).

En la Figura 7.7 se muestra un triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$ con lados a, b, c y ángulos α, β, γ. En el triángulo de la Figura 7.7 se verifica que $\widehat{BAC} = \widehat{CAB} = \alpha$. $\square$

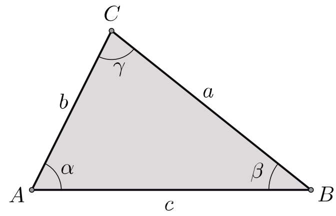


Figura 7.7: Triángulo con vértices A, B, C, lados a, b, c y ángulos α, β, γ.

Entre los resultados básicos de Geometría se encuentran los *teoremas de Tales de Mileto* (624 – 546 a.C.). A continuación, enunciamos el primero de ellos:

Teorema 7.1 (Primer teorema de Tales) Supongamos que dos rectas r y s que se cortan en un punto P son intersecadas por dos rectas paralelas m y n, tal y como se muestra en la Figura 7.8.

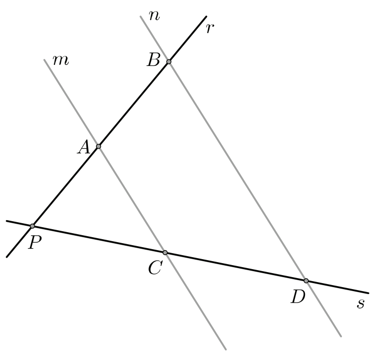


Figura 7.8: Rectas r y s intersecadas por las rectas paralelas m y n.

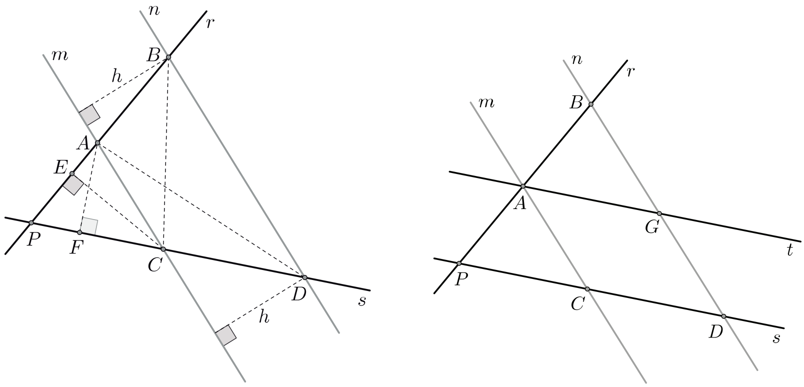
Entonces, si $\overline{RS}$ denota la distancia que hay entre dos puntos R y S, se verifica que la razón entre dos segmentos cualesquiera de r es igual a la razón de los segmentos correspondientes de s, es decir,

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{CD}}, \; \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{CD}} \;\text{ y }\; \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}. \tag{7.1}$$

Además, la razón de dos segmentos sobre r o sobre s que empiecen en P es igual a la razón de los correspondientes segmentos sobre las rectas paralelas m y n, es decir,

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}. \tag{7.2}$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que las rectas m y n son paralelas, la altura h del triángulo $C\overset{\triangle}{D}A$ que sale del vértice D es igual a la altura del triángulo $A\overset{\triangle}{C}B$ que sale del vértice B, según se muestra en la Figura 7.9(a).



(a) (b)

Figura 7.9: Gráficas para la demostración del primer teorema de Tales.

Entonces, dado que $\overline{AC}$ es la longitud de la base correspondiente a esas alturas en ambos triángulos, se tiene que el área de los mismos coincide. De aquí se deduce también (véase la Figura 7.9(a)) que las áreas de los triángulos $P\overset{\triangle}{C}B$ y $P\overset{\triangle}{A}D$ son iguales y, por tanto,

$$\frac{\text{área}\left(P\overset{\triangle}{A}C\right)}{\text{área}\left(C\overset{\triangle}{D}A\right)} = \frac{\text{área}\left(P\overset{\triangle}{A}C\right)}{\text{área}\left(A\overset{\triangle}{C}B\right)} \ \text{ y } \ \frac{\text{área}\left(P\overset{\triangle}{A}C\right)}{\text{área}\left(P\overset{\triangle}{A}D\right)} = \frac{\text{área}\left(P\overset{\triangle}{A}C\right)}{\text{área}\left(P\overset{\triangle}{C}B\right)}.$$

Teniendo en cuenta que el área de un triángulo es la mitad del producto de la longitud de su base por la de su altura, se tiene que

$$\frac{\overline{PC}\,\cancel{\overline{AF}}}{\overline{CD}\,\cancel{\overline{AF}}} = \frac{\overline{PA}\,\cancel{\overline{EC}}}{\overline{AB}\,\cancel{\overline{EC}}} \ \text{ y } \ \frac{\overline{PC}\,\cancel{\overline{AF}}}{\overline{PD}\,\cancel{\overline{AF}}} = \frac{\overline{PA}\,\cancel{\overline{EC}}}{\overline{PB}\,\cancel{\overline{EC}}},$$

es decir,

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{AB}} \ \text{ y } \ \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}, \tag{7.3}$$

que son la primera y tercera igualdades de (7.1) que queríamos probar. Despejando $\overline{PD}$ y $\overline{CD}$ en la segunda y primera igualdades de (7.3), respectivamente, se obtiene que

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PB}\,\cancel{\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}}}}{\overline{AB}\,\cancel{\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}}}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}},$$

que es la segunda igualdad de (7.1) que queríamos probar. Para terminar la demostración, es decir, para obtener (7.2), basta probar que

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}. \tag{7.4}$$

En efecto, de acuerdo con la Figura 7.9(b), la recta t que es paralela a s y pasa por el punto A corta a la recta n en el punto G, de forma que

$$\overline{AC} = \overline{DG}. \tag{7.5}$$

Entonces, aplicando el resultado probado en (7.1) a las rectas r y n que se cortan en el punto B y son intersecadas por dos rectas paralelas s y t, se verifica que

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{BD}},$$

de donde, utilizando la igualdad (7.5), se deduce (7.4). $\square$

A partir del *primer teorema de Tales* se deduce el siguiente resultado, conocido como *teorema de semejanza de triángulos ángulo–ángulo–ángulo* o *teorema de semejanza AAA*:

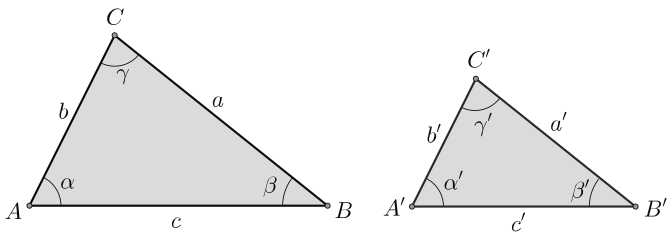


Figura 7.10: Triángulos semejantes $\overset{\triangle}{ABC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$.

Teorema 7.2 (Semejanza AAA) Sean $\overset{\triangle}{ABC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ dos triángulos semejantes como los de la Figura 7.10 tales que $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ y $\gamma = \gamma'$. Entonces se verifica que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

DEMOSTRACIÓN. Superponiendo el triángulo $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ sobre el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ como se muestra en la Figura 7.11, se tiene que la recta que pasa por los puntos A y C corta a la recta que pasa por los puntos A y B en el punto A y estas dos rectas son intersecadas, a su vez, por dos rectas paralelas: la que pasa por los puntos B y C y la que pasa por los puntos B' y C'. De esta forma, el resultado que se quiere demostrar se sigue aplicando el *primer teorema de Tales* (Teorema 7.1). $\square$

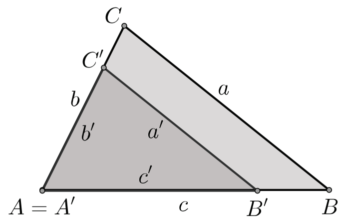


Figura 7.11: Triángulos semejantes $\overset{\triangle}{ABC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ superpuestos.

Teorema 7.3 (Pitágoras) En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

DEMOSTRACIÓN. Hay numerosas formas de probar este teorema. Mostramos, a continuación, dos de ellas: la primera es algebraica (usando semejanza de triángulos) y la segunda es visual–geométrica:

- <u>Demostración 1</u>: Supongamos que $\overset{\triangle}{ABC}$ es un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto está situado en el vértice C y h es la altura que va de C al punto H sobre la hipotenusa (véase la Figura 7.12).

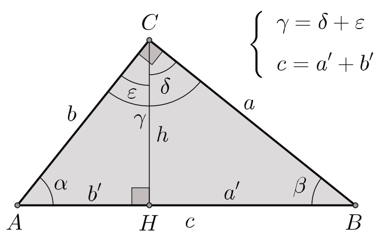


Figura 7.12: Triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$.

Veamos que los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{ACH}$ y $\overset{\triangle}{BCH}$ son semejantes. Para probar esto basta observar, por una parte, que, como el ángulo $\gamma = \delta + \varepsilon$ es recto, se tiene que

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon. \tag{7.6}$$

Por otra parte, como los tres ángulos del triángulo $\overset{\triangle}{ACH}$ suman π radianes (véase el Corolario 7.2), se tiene que

$$\varepsilon = \pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha. \tag{7.7}$$

De esta forma, de las dos igualdades (7.6) y (7.7) se deduce que

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha.$$

De forma análoga se puede mostrar que $\varepsilon = \beta$, lo que termina de probar la semejanza de los tres triángulos.

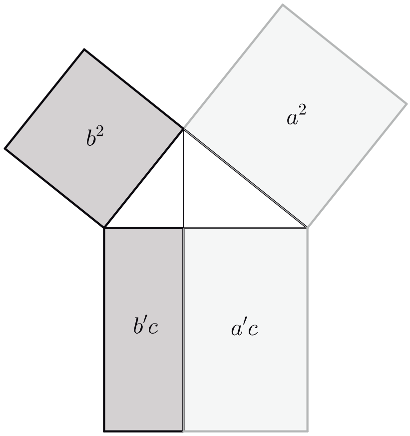


Figura 7.13: Interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.

Como $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ACH}$, aplicando el *teorema de semejanza AAA* (véase el Teorema 7.2) se tiene que la razón entre sus hipotenusas y sus catetos más pequeños coincide, es decir

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{b'},$$

de donde $b^2 = b'c$ (esta igualdad es conocida como el *teorema del cateto*). De forma similar, como $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{BHC}$, se tiene que la razón entre sus hipotenusas y sus catetos más grandes coincide, es decir

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{a'},$$

de donde $a^2 = a'c$. Finalmente, sumando los dos resultados obtenidos, se tiene que

$$a^2 + b^2 = (a' + b')c = c^2,$$

como queríamos demostrar. La Figura 7.13 muestra una interpretación geométrica de esta demostración.

- Demostración 2: La Figura 7.14 proporciona una demostración geométrica visual del teorema de Pitágoras. □

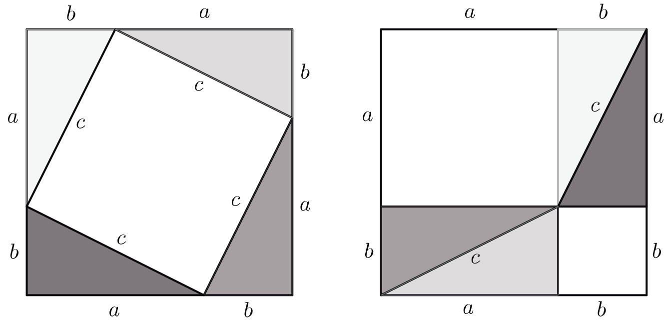


Figura 7.14: Demostración geométrica del teorema de Pitágoras.

Enunciamos, a continuación, otros dos teoremas de semejanza de triángulos (esta vez sin demostración para no extendernos demasiado en este tema). El primero de ellos es conocido como *teorema de semejanza de triángulos lado–ángulo–lado* o *teorema de semejanza LAL*:

Teorema 7.4 (Semejanza LAL) *Sean $\overset{\triangle}{ABC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ dos triángulos como los de la Figura 7.10 tales que*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ y } \gamma = \gamma'.$$

Entonces los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ son semejantes, con $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$. $\square$

También se verifica el resultado recíproco del *teorema AAA*, conocido como el *teorema de semejanza de triángulos lado–lado–lado* o *teorema de semejanza LLL*, que enunciamos a continuación:

Teorema 7.5 (Semejanza LLL) *Sean $\overset{\triangle}{ABC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ dos triángulos como los de la Figura 7.10 tales que*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Entonces los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ son semejantes, de forma que $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ y $\gamma = \gamma'$. $\square$

Corolario 7.3 *Un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Si trazamos el segmento que va del punto donde confluyen los dos lados iguales del triángulo a su lado opuesto (que es una de las *medianas* del triángulo) y llamamos M al nuevo punto (véase la Figura 7.15), se tiene que

$$1 = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CM}},$$

por lo que, aplicando el Teorema 7.5, en particular se deduce que $\alpha = \beta$. $\square$

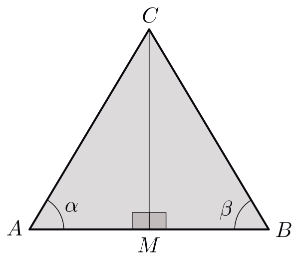


Figura 7.15: Triángulo isósceles $\overset{\triangle}{ABC}$.

Corolario 7.4 Sea s una recta que corta a una circunferencia en dos puntos A y B (véase la Figura 7.16).

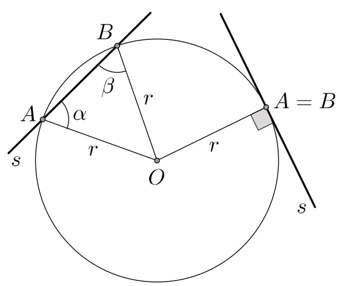


Figura 7.16: Rectas que cortan a una circunferencia en puntos A y B.

a) Si $A \neq B$, se verifica que los radios de la circunferencia con extremos en A y B forman con r dos ángulos iguales.

b) Si $A = B$ (es decir, s es una recta tangente a la circunferencia), se verifica que el ángulo que forma la recta con el radio que acaba en A es recto.

DEMOSTRACIÓN.

a) Como el triángulo $\overset{\triangle}{OAB}$ es isósceles, por el Corolario 7.3 se tiene que $\alpha = \beta$.

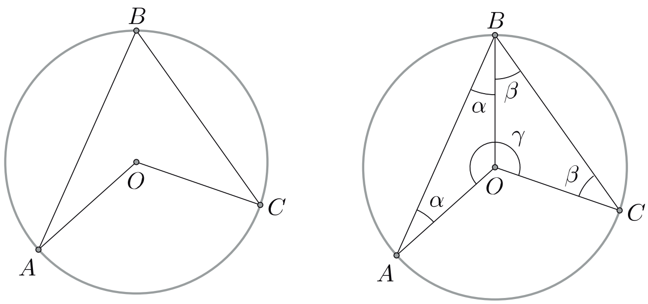
b) Sea s' la recta que corta a la circunferencia en el punto A y es perpendicular al radio $\overline{OA}$ y veamos que $s' = s$. En efecto, si esto no fuera cierto, existiría un punto $B \neq A$, de forma que la recta s' cortaría a la circunferencia en B; entonces, tal y como se ha visto en el apartado a), el triángulo $\overset{\triangle}{AOB}$ sería isósceles con dos lados iguales a $\frac{\pi}{2}$, lo cual no es posible pues, como se vio en el Corolario 7.2, la suma de los tres ángulos de un triángulo es π. Por tanto, se tiene que $s' = s$.

Demostración alternativa: Para demostrar que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ cuando r es tangente a la circunferencia, basta ir considerando los casos en los que los dos puntos A y B se van aproximando de forma que el ángulo $\widehat{AOB}$ se va a aproximando a cero y, por tanto, la suma de los dos ángulos iguales, 2α, se va aproximando a π radianes; en el límite, cuando $A = B$, se concluye que $\alpha = \frac{\pi}{2}$. □

Teorema 7.6 *Si A, B y C son tres puntos distintos de una circunferencia de centro O (véase la Figura 7.17(a)), se verifica que*

$$2\widehat{ABC} = \widehat{AOC},$$

donde $\widehat{AOC}$ es el ángulo opuesto al vértice B.



(a) Puntos A, B y C. (b) $2(\alpha + \beta) = 2\pi - \gamma$.

Figura 7.17: A, B y C puntos distintos de una circunferencia de centro O.

DEMOSTRACIÓN. Los triángulos $\overset{\triangle}{AOB}$ y $\overset{\triangle}{BOC}$ son isósceles, por lo que aplicando el Corolario 7.3 se verifica que el primero tiene dos ángulos iguales (α) y el segundo tiene otros dos ángulos iguales (β). De esta forma, por el Corolario 7.1 (con la notación de la Figura 7.17(b)) se tiene que

$$2\alpha + 2\beta + \gamma = 2\pi,$$

de donde

$$2\widehat{ABC} + \gamma = 2\pi. \tag{7.8}$$

Como, por otra parte, se verifica que

$$\widehat{AOC} + \gamma = 2\pi, \tag{7.9}$$

de las igualdades (7.8) y (7.9) se deduce que $2\widehat{ABC} = \widehat{AOC}$. □

Corolario 7.5 (Segundo teorema de Tales) *Sea B un punto de la circunferencia de diámetro AC, distinto de A y de C (véase la Figura 7.18). Entonces se verifica que el ángulo $\widehat{ABC} = 90°$ y, por tanto, $\overset{\triangle}{ABC}$ es un triángulo rectángulo.*

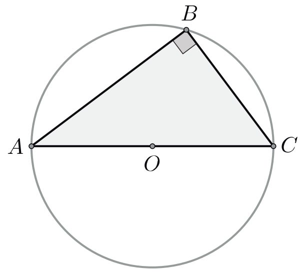


Figura 7.18: B punto de la circunferencia de diámetro AC con $B \notin \{A, C\}$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $\widehat{AOC} = 180°$, por el Teorema 7.6 se verifica que

$$2\widehat{ABC} = 180° \Rightarrow \widehat{ABC} = 90°. \quad \square$$

Definición 7.5 El *arco capaz* de un segmento $\overline{AC}$ de ángulo α es el lugar geométrico de los puntos del plano desde los que se ve el segmento $\overline{AC}$ con un ángulo α; es decir, el lugar geométrico de los vértices de los ángulos que tienen amplitud α y abarcan el segmento $\overline{AC}$. $\square$

Observación 7.5 De acuerdo con la Definición 7.5, el *segundo teorema de Tales* determina que el arco capaz de un segmento $\overline{AC}$ de ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ radianes es la circunferencia cuyo diámetro es el segmento $\overline{AC}$. $\square$

Observación 7.6 Por el Teorema 7.6 se verifica que los ángulos α que aparecen en la Figura 7.19 son iguales a la mitad del ángulo $\widehat{AOC}$, que, a su vez, es igual (en radianes) a la longitud del arco de las circunferencias entre los puntos A y C dividida por el radio de las circunferencias $r = \overline{OA} = \overline{OC} = \overline{O'A} = \overline{O'C}$.

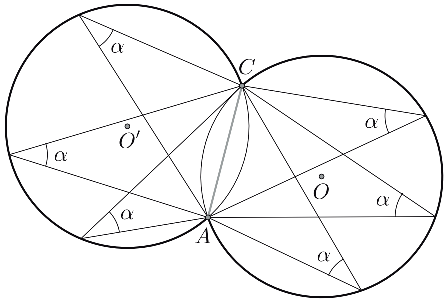


Figura 7.19: Arco capaz del segmento $\overline{AC}$ de ángulo α.

Se tiene así que el arco capaz del segmento $\overline{AC}$ de ángulo α es un par de arcos de circunferencia simétricos a cada lado del segmento $\overline{AC}$. Nótese que, en el caso particular de que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, el arco capaz del segmento $\overline{AC}$ es (como se ha visto en la Observación 7.5) la circunferencia de diámetro $\overline{AC}$, pues, en este caso, las dos circunferencias se superponen. $\square$

Utilizando los teoremas de semejanza anteriores, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 7.7 (Potencia de un punto respecto de una circunferencia) *Sean r y s dos rectas que pasan por un punto P y cortan a una circunferencia* $\mathbf{C}$ (*véase la Figura 7.20*). *Si r corta a* $\mathbf{C}$ *en los puntos A y B y s corta a* $\mathbf{C}$ *en los puntos C y D, se verifica que*

$$\overline{PA}\,\overline{PB} = \overline{PC}\,\overline{PD}.$$

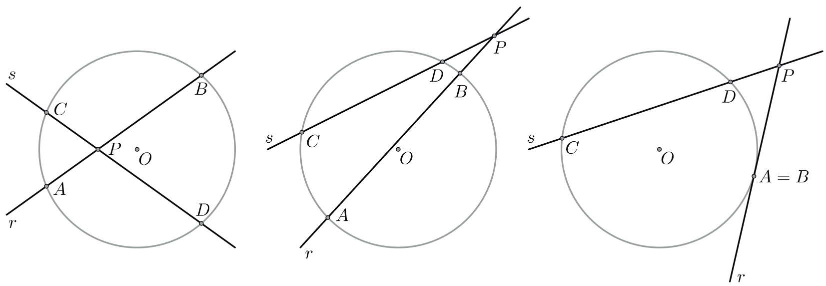


Figura 7.20: Rectas r y s que pasan por P y cortan a una circunferencia.

DEMOSTRACIÓN. Distinguimos los cinco casos que pueden presentarse:

1) Si $P \in \mathbf{C}$ es trivial (pues en la tesis del teorema se obtiene, de forma evidente, que $0 = 0$).

2) Si P es interior a la circunferencia, con la notación de la gráfica izquierda de la Figura 7.20 se tiene que $A\overset{\triangle}{C}P \sim B\overset{\triangle}{D}P$, pues se cumple lo siguiente:

   a) Teniendo en cuenta que $\widehat{PAC} = \widehat{BAC}$ y $\widehat{PDB} = \widehat{CDB}$, por el Teorema 7.6 se tiene que
   $$\widehat{PAC} = \widehat{PDB} = \frac{1}{2}\widehat{COB}.$$

   b) Por la Proposición 7.1 se verifica que $\widehat{APC} = \widehat{BPD}$.

   Entonces, aplicando el *teorema de Semejanza AAA* (véase el Teorema 7.2), se obtiene que
   $$\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}},$$
   de donde se concluye que
   $$\overline{PA}\,\overline{PB} = \overline{PC}\,\overline{PD}.$$

3) Si P es exterior a la circunferencia y ninguna de las dos rectas r y s es tangente a **C** (es decir, $A \neq B \neq C \neq D$), entonces, con la notación de la gráfica central de la Figura 7.20, se tiene que $\overset{\triangle}{ACP} \sim \overset{\triangle}{BDP}$, pues se cumple lo siguiente:

   a) Por el Teorema 7.6 se tiene que

   $$\widehat{ACD} + \widehat{DBA} = \frac{1}{2}\widehat{AOD} + \frac{1}{2}(2\pi - \widehat{AOD}) = \pi.$$

   Entonces, como $\widehat{DBA} + \widehat{DBP} = \pi$, se deduce $\widehat{ACD} = \widehat{DBP}$.

   b) Los ángulos $\widehat{BPD}$ y $\widehat{APC}$ son iguales.

   El final de la demostración de este caso se hace aplicando el *teorema de Semejanza AAA* como en el caso anterior.

4) Si P es exterior a la circunferencia, r es tangente a **C** y s no es tangente a **C** (es decir, $A = B \neq C \neq D$), entonces, con la notación de la gráfica derecha de la Figura 7.20, se tiene que $\overset{\triangle}{ACP} \sim \overset{\triangle}{ADP}$ (compruébese) y se concluye como en los casos anteriores.

5) Si P es exterior a la circunferencia y r y s son tangentes a **C**, estamos en la misma situación que en 2), donde los triángulos $\overset{\triangle}{ACP}$ y $\overset{\triangle}{BDP}$ no sólo son semejantes sino que, de hecho, son iguales. □

7.3. Razones elementales

Definición 7.6 (Razones trigonométricas) Consideremos, de nuevo, el triángulo rectángulo de la Figura 7.4.

a) El *seno* del ángulo α, $\operatorname{sen}(\alpha)$, es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}.}$$

b) El *coseno* del ángulo α, $\cos(\alpha)$, es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{b}{c}.}$$

c) La *tangente* de α, $\tan(\alpha)$, es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente:

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{a}{b}.}$$

Observación 7.7 Nótese que las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo dadas en la Definición 7.6 no dependen del triángulo rectángulo elegido (siempre que uno de sus ángulos sea α). En efecto, si tenemos dos triángulos rectángulos como los de la Figura 7.21, por el *teorema de semejanza AAA* (véase el Teorema 7.2) se tiene que

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \operatorname{sen}(\alpha),\ \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \cos(\alpha) \ \text{ y } \ \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \tan(\alpha). \quad \square$$

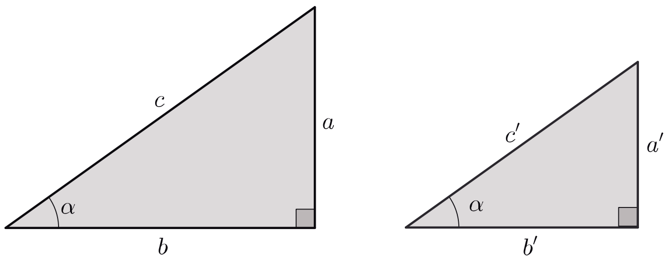


Figura 7.21: Triángulos rectángulos con ángulo α.

Observación 7.8 A partir de la definición se verifican las siguientes propiedades:

a) $\boxed{\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1,}$ pues, por el *teorema de Pitágoras* (véase el Teorema 7.3),

$$\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2}{c^2} = 1.$$

Consecuentemente, $\boxed{-1 \leq \cos\alpha \leq 1}$ y $\boxed{-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1.}$

b) $\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)},}$ ya que $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a}{b} = \tan(\alpha).$

c) Las razones trigonométricas de un ángulo α coinciden con las del ángulo que se obtiene al sumar a α un número entero de vueltas de circunferencia, es decir, si $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi),}\ \boxed{\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2k\pi)} \ \text{ y } \ \boxed{\tan(\alpha) = \tan(\alpha + 2k\pi).}$$

Observación 7.9 Considerando una circunferencia centrada en el origen y de radio 1, y el triángulo rectángulo de la Figura 7.22 (con hipotenusa de longitud 1), se verifica que

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{1} = b,\ \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{1} = a \ \text{ y } \ \tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{c}{1} = c. \quad \square$$

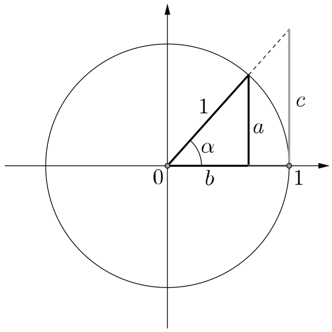


Figura 7.22: Representación gráfica de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Definición 7.7 (Razones trigonométricas inversas) A partir de un ángulo α se definen:

a) $\boxed{\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}}$ *secante* de α.

b) $\boxed{\csc(\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}}$ *cosecante* de α.

c) $\boxed{\cot(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)} = \dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}}$ *cotangente* de α. □

Observación 7.10 Veamos las razones trigonométricas de algunos ángulos que aparecen con bastante frecuencia:

a) $\boxed{\alpha = 0.}$ $\operatorname{sen} 0 = 0,\ \cos 0 = 1$ y $\tan 0 = 0$.

b) $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{6}.}$ Como el triángulo $\overset{\triangle}{OAC}$ de la Figura 7.23(a) es equilátero, se verifica que

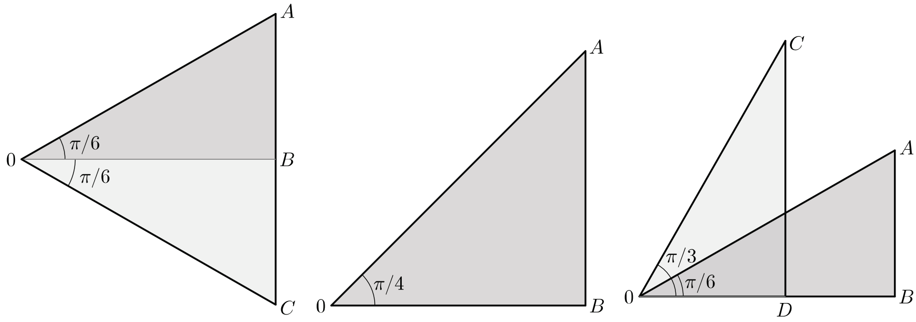
$$\overline{AB} = \frac{1}{2}\,\overline{AC} = \frac{1}{2}\,\overline{OA},$$

por lo que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2},\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



(a) Ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes. (b) Ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes. (c) Ángulos de $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$ radianes.

Figura 7.23: Triángulos con diversos ángulos.

c) $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{4}.}$ Si consideramos el triángulo $O\overset{\triangle}{A}B$ de la Figura 7.23(b), se tiene que

$$\overline{OB} = \overline{AB},$$

por lo que, por el *teorema de Pitágoras* (véase el Teorema 7.3),

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{2}\,\overline{AB}$$

y, consecuentemente,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \; \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1.$$

d) $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{3}.}$ Como se muestra en la Figura 7.23(c), se verifica que

$$\overline{CD} = \overline{OB} \text{ y } \overline{OD} = \overline{AB},$$

por lo que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \; \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

y

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}.$$

e) $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}.}$ $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty.$

f) $\boxed{\alpha = \pi.}$ $\operatorname{sen}(\pi) = 0,\ \cos(\pi) = -1$ y $\tan(\pi) = 0.$

g) $\boxed{\alpha = \frac{3\pi}{2}.}$ $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ y $\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \infty.$

Resumimos los resultados obtenidos en la Tabla 7.1. $\square$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

Tabla 7.1: Razones trigonométricas habituales.

Observación 7.11 La función $\operatorname{sen}(\alpha)$ es una función $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ cuya gráfica es la mostrada en la Figura 7.24.

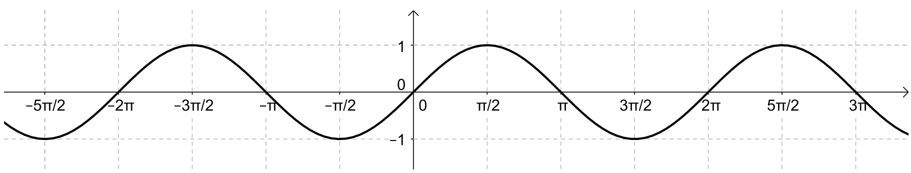


Figura 7.24: Gráfica de la función seno.

Nótese que la función seno es *periódica* con periodo 2π, es decir, se cumple que

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}(\alpha)$$

para todo ángulo $\alpha \in \mathbb{R}$. Consecuentemente, basta representar la gráfica de la función seno sobre un dominio de longitud 2π. Así, por ejemplo, se puede considerar la función $\operatorname{sen} : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ o $\operatorname{sen} : [-\pi, \pi] \to [-1, 1]$; el resto de la gráfica es una mera repetición.

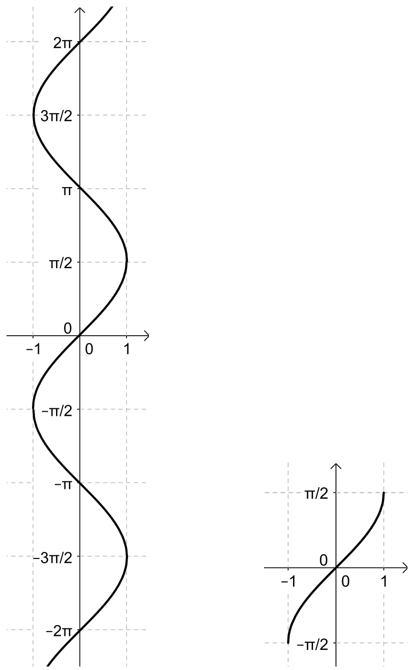
El *arcoseno* es la función (multivaluada) inversa de la función seno, es decir, es la aplicación $\mathrm{arcsen}: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$\mathrm{arcsen}(x) = \{\alpha \in \mathbb{R} : \ \mathrm{sen}(\alpha) = x\}.$$

Es claro que se cumple que

$$\mathrm{sen}\left(\mathrm{arcsen}(x)\right) = x, \ \forall\, x \in [-1, 1].$$

Su gráfica es la mostrada en la Figura 7.25(a). Nótese que su gráfica es como la de la Figura 7.24, pero cambiando los valores del eje de abscisas por los del eje de ordenadas y viceversa. Gráficamente, se puede pasar de la una a la otra sin más que hacer una *simetría* respecto de la recta $y = x$ (una de las gráficas es "reflejo" de la otra respecto a esta recta).



(a) (b)

Figura 7.25: Gráficas de: (a) Función multivaluada arcoseno. (b) Función arcoseno.

Esta función multivaluada no es, propiamente, una función (véase la Definición 2.1), pues no asigna un único valor, sino infinitos valores. Para tener una función basta reducir el conjunto imagen (todo el conjunto $\mathbb{R}$) a un intervalo adecuado de longitud 2π. Así se suele llamar "función arcoseno" a la función $\mathrm{arcsen}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por

$$\mathrm{arcsen}(x) = \alpha,$$

donde $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ verifica que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = x.$$

Su gráfica es la mostrada en la Figura 7.25(b). $\square$

Observación 7.12 La función $\cos(\alpha)$ es una función $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ cuya gráfica es la mostrada en la Figura 7.26.

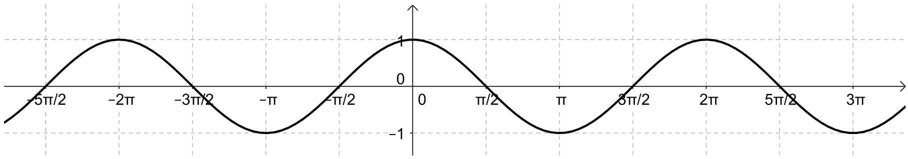


Figura 7.26: Gráfica de la función coseno.

Nótese que la función coseno también es *periódica* con periodo 2π, es decir, se cumple que

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$$

para todo ángulo $\alpha \in \mathbb{R}$. Por tanto, basta representar la gráfica de la función coseno sobre un dominio de longitud 2π. Por ejemplo, se puede considerar $\cos : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ o $\cos : [-\pi, \pi] \to [-1, 1]$; el resto de la gráfica es una mera repetición.

El *arcocoseno* es la función (multivaluada) inversa de la función coseno, es decir, es la aplicación $\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$\arccos(x) = \{\alpha \in \mathbb{R} : \ \cos(\alpha) = x\}.$$

Claramente, se verifica que

$$\cos\big(\arccos(x)\big) = x, \ \forall\, x \in [-1, 1].$$

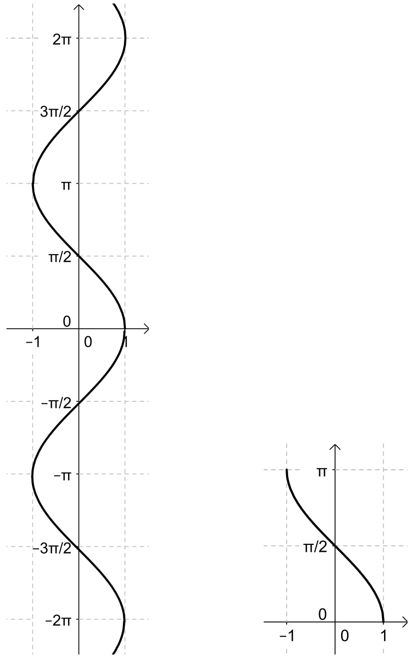
Su gráfica es la mostrada en la Figura 7.27(a). Nótese que su gráfica es como la de la Figura 7.26, pero cambiando los valores del eje de abscisas por los del eje de ordenadas y viceversa. Gráficamente, se puede pasar de la una a la otra sin más que hacer una *simetría* respecto de la recta $y = x$.
Esta función multivaluada tampoco es, propiamente, una función, pues no asigna un único valor, sino infinitos valores. Para tener una función basta reducir el conjunto imagen (todo el conjunto $\mathbb{R}$) a un intervalo adecuado de longitud π. Así se suele llamar "función arcocoseno" a la función $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ definida por

$$\arccos(x) = \alpha,$$

donde $\alpha \in [0, \pi]$ verifica que

$$\cos(\alpha) = x.$$

Su gráfica es la mostrada en la Figura 7.27(b). $\square$



(a) (b)

Figura 7.27: Gráficas de: (a) Función multivaluada arcocoseno. (b) Función arcocoseno.

Observación 7.13 La función *tangente* es una función $\tan : \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ cuya gráfica se muestra en la Figura 7.28. Nótese que la función tangente no está definida en los valores $\frac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$ y es periódica de periodo π, por lo que basta representar la gráfica de la función tangente sobre un dominio de longitud π como, por ejemplo, $\tan : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$; el resto de la gráfica es una mera repetición de la gráfica anterior.

El *arcotangente* es la función (multivaluada) inversa de la función tangente. Es una aplicación del tipo $\arctan : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$\arctan(x)=\{\alpha\in\mathbb{R} :\ \tan(\alpha)=x\}.$$

Claramente, se verifica que

$$\tan\big(\arctan(x)\big)=x,\ \forall\, x\in[-1,1].$$

Su gráfica es la mostrada en la Figura 7.29(a). Nótese que su gráfica es como la de la Figura 7.28, pero cambiando los valores del eje de abscisas por los del eje de ordenadas y viceversa. Gráficamente, se puede pasar de la una a la otra sin más que hacer una *simetría* respecto de la recta $y=x$.

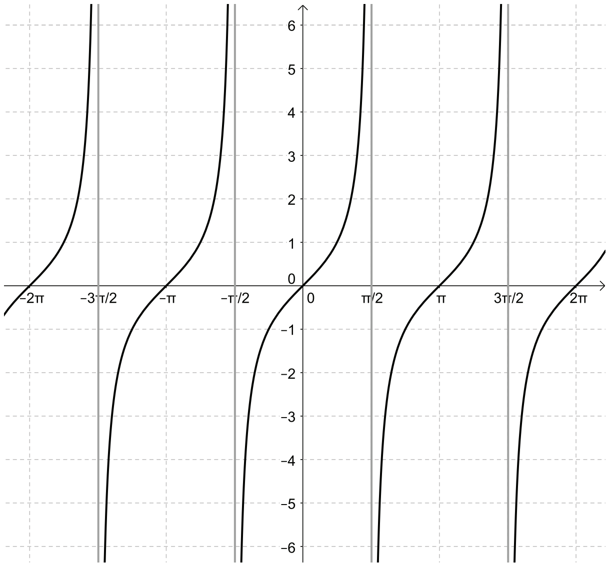


Figura 7.28: Gráfica de la función tangente.

Esta función multivaluada tampoco es, propiamente, una función, pues no asigna un único valor, sino infinitos valores. Para tener una función basta reducir el conjunto imagen a un intervalo adecuado de longitud π. Así se suele denominar "función arcotangente" a $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definida por

$$\arctan(x) = \alpha,$$

donde $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ verifica que

$$\tan(\alpha) = x.$$

Su gráfica es la mostrada en la Figura 7.29(b). $\square$

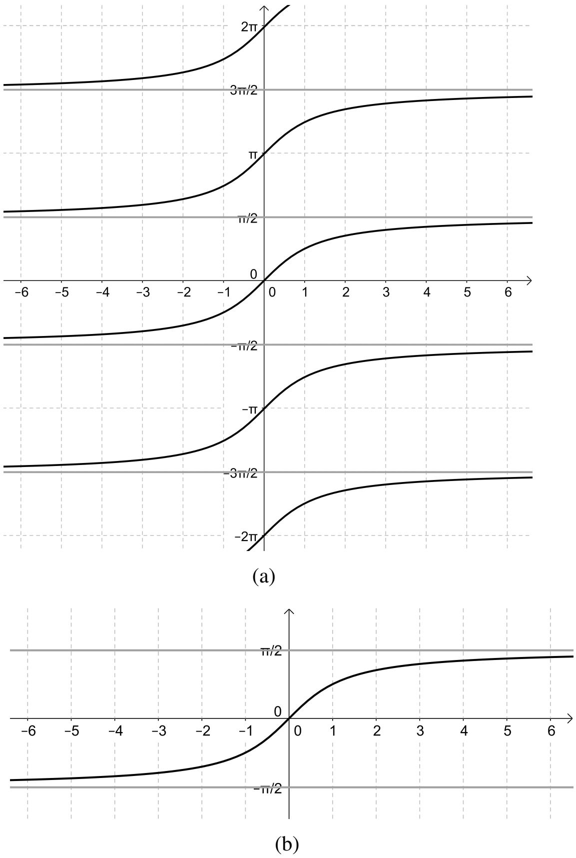


Figura 7.29: Gráficas de: (a) Función multivaluada arcotangente. (b) Función arcotangente.

7.4. Razones del ángulo suma, del ángulo doble y del ángulo mitad

Observación 7.14 A partir de la definición pueden demostrarse las siguientes relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos de distintos cuadrantes:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}(\alpha)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)$ y $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot(\alpha)$.

b) $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha)$, $\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$ y $\tan(\pi-\alpha)=-\tan(\alpha)$.

c) $\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\operatorname{sen}(\alpha)$, $\cos(\pi+\alpha)=-\cos(\alpha)$ y $\tan(\pi+\alpha)=\tan(\alpha)$.

d) $\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}(\alpha)=\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)$, $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)=\cos(2\pi-\alpha)$ y $\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)=\tan(2\pi-\alpha)$. $\square$

Las propiedades anteriores pueden visualizarse geométricamente como se muestra en la Figura 7.30.

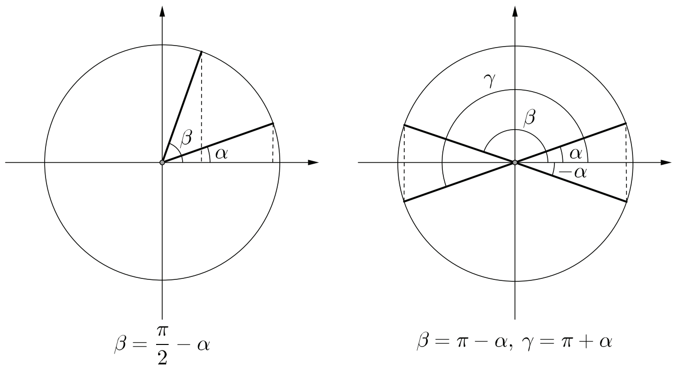


Figura 7.30: Interpretación geométrica de las relaciones entre algunas razones trigonométricas.

Observación 7.15 Calculemos el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la Figura 7.31.

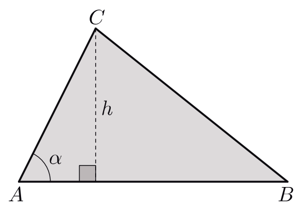


Figura 7.31: Triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ con una de sus alturas (h).

Como es sabido, el área de un triángulo es la mitad de la base por la altura, luego

$$\text{Área}\ (\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\,h. \tag{7.10}$$

Como

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{h}{\overline{AC}} \ \Rightarrow\ h = \overline{AC}\ \operatorname{sen}(\alpha).$$

Así, sustituyendo en (7.10), se obtiene que

$$\boxed{\text{Área}\ (\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\,\overline{AC}\ \operatorname{sen}(\alpha).} \tag{7.11}$$

Proposición 7.2 *Para ángulos arbitrarios α y β se tienen las siguientes relaciones:*

a) $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}$

b) $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}$

c) $\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}$

d) $\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).}$

DEMOSTRACIÓN.

a) Para el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la Figura 7.32 se verifica

$$\text{Área }(\overset{\triangle}{ABC}) = \text{Área }(\overset{\triangle}{ABD}) + \text{Área }(\overset{\triangle}{ADC}),$$

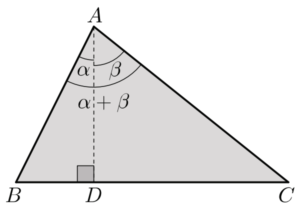


Figura 7.32: Triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$.

por lo que, a partir de la fórmula (7.11), se tiene

$$\frac{1}{2}\,\overline{AB}\,\overline{AC}\,\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\,\overline{AB}\,\overline{AD}\,\operatorname{sen}(\alpha)+\frac{1}{2}\,\overline{AD}\,\overline{AC}\,\operatorname{sen}(\beta),$$

de donde se deduce

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}\operatorname{sen}(\alpha)+\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\operatorname{sen}(\beta)=\cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta),$$

ya que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\cos(\beta)\ \text{ y }\ \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\cos(\alpha).$$

b) Gracias la Observación 7.14, si aplicamos la fórmula a) a los ángulos α y $-\beta$, se obtiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)&=\operatorname{sen}(\alpha+(-\beta))\\&=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(-\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(-\beta)\\&=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).\end{aligned}$$

c) Nuevamente por la Observación 7.14 y el apartado b) se tiene que

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) = \operatorname{sen}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)\\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\beta) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}(\beta)\\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).\end{aligned}$$

d) Por la Observación 7.14, basta aplicar la fórmula c) a los ángulos α y $-\beta$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+(-\beta))\\ &= \cos(\alpha)\cos(-\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(-\beta)\\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta). \quad \square\end{aligned}$$

Observación 7.16 Aplicando los apartados a) y c) de la Proposición 7.2 tomando $\beta = \alpha$, se obtiene

$$\boxed{\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)} \text{ y } \boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha).}$$

Observación 7.17 De las Observaciones 7.8 y 7.16, para cualquier ángulo α, se verifica

$$\left\{\begin{array}{l}\cos^2(\alpha)+\operatorname{sen}^2(\alpha)=1\\ \cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)=\cos(2\alpha).\end{array}\right. \tag{7.12}$$

Si sumamos las expresiones de (7.12), obtenemos

$$2\cos^2(\alpha) = 1+\cos(2\alpha) \;\Rightarrow\; \boxed{\cos(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}},} \tag{7.13}$$

mientras que restando las expresiones de (7.12), obtenemos

$$2\operatorname{sen}^2(\alpha) = 1-\cos(2\alpha) \;\Rightarrow\; \boxed{\operatorname{sen}(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}},} \tag{7.14}$$

donde el signo de la raíz hay que tomarlo en función del cuadrante en que se encuentre el ángulo α. En algunas ocasiones, en lugar de α suele considerarse el ángulo $\frac{\alpha}{2}$, por lo que las relaciones (7.13) y (7.14) toman la forma

$$\boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}} \text{ y } \boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.} \tag{7.15}$$

Proposición 7.3 *Para ángulos arbitrarios α y β se tienen las siguientes relaciones:*

a) $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right)}$

b) $\boxed{\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right)}$

c) $\boxed{\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)}$

d) $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right).}$

DEMOSTRACIÓN.

a) Por la Proposición 7.2 se tiene que

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + (\cos\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta). \end{cases} \tag{7.16}$$

Sumando las expresiones que aparecen en (7.16), se obtiene

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta),$$

de donde se deduce la fórmula a).

b) Si restamos las expresiones que aparecen en (7.16), obtenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta),$$

de donde se deduce la fórmula b).

c) Por la Proposición 7.2 sabemos que

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta). \end{cases} \tag{7.17}$$

Sumando las expresiones que aparecen en (7.17), se obtiene

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta),$$

de donde se deduce la fórmula c).

d) Restando las expresiones que aparecen en (7.17), obtenemos

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta),$$

de donde se deduce la fórmula d). $\square$

Corolario 7.6 *Para ángulos arbitrarios A y B se verifican las siguientes relaciones:*

a) $\boxed{\operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

b) $\boxed{\operatorname{sen}(A) - \operatorname{sen}(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

c) $\boxed{\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

d) $\boxed{\cos(A) - \cos(B) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).}$

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar las fórmulas dadas en la Proposición 7.3 a los ángulos

$$\alpha = \frac{A+B}{2} \text{ y } \beta = \frac{A-B}{2}. \quad \square$$

Veamos, a continuación, el *teorema del coseno*, que es una generalización del *teorema de Pitágoras* y que utiliza este teorema en su demostración.

Teorema 7.8 (Coseno) *En todo triángulo de lados a, b y c se verifica que*

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,}$$

siendo α el ángulo opuesto al lado a.

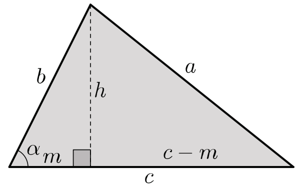


Figura 7.33: Triángulo de lados a, b y c.

DEMOSTRACIÓN. Considerando el triángulo de la Figura 7.33, por el *teorema de Pitágoras* (véase el Teorema 7.3) se verifica que

$$\begin{cases} b^2 = m^2 + h^2 \;\Rightarrow\; h^2 = b^2 - m^2 \\ a^2 = (c-m)^2 + h^2, \end{cases}$$

por lo que

$$a^2 = (c-m)^2 + b^2 - m^2 = c^2 - 2cm + m^2 + b^2 - m^2 = b^2 + c^2 - 2cm.$$

El resultado se sigue teniendo en cuenta que

$$\cos(\alpha) = \frac{m}{b} \;\Rightarrow\; m = b\cos(\alpha). \qquad \square$$

Observación 7.18 Nótese que para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se obtiene el *teorema de Pitágoras* (véase el Teorema 7.3). $\square$

Teorema 7.9 (Seno) *En todo triángulo de lados a, b y c se verifica que*

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)},}$$

donde α, β y γ son, respectivamente, los ángulos opuestos a los lados a, b y c.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el triángulo de la Figura 7.34. Claramente,

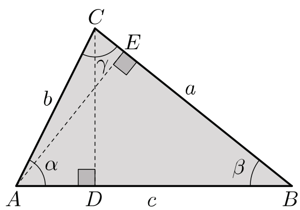


Figura 7.34: Triángulo de lados a, b y c.

$$\left\{\begin{array}{ll} \overline{CD} = b\operatorname{sen}(\alpha) & (\text{ver } A\overset{\triangle}{C}D) \\ \overline{CD} = a\operatorname{sen}(\beta) & (\text{ver } C\overset{\triangle}{D}B) \end{array}\right. \Rightarrow\; b\operatorname{sen}(\alpha) = a\operatorname{sen}(\beta) \;\Rightarrow\; \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)}.$$

Análogamente,

$$\left\{\begin{array}{ll} \overline{AE} = b\operatorname{sen}(\gamma) & (\text{ver } A\overset{\triangle}{E}C) \\ \overline{AE} = c\operatorname{sen}(\beta) & (\text{ver } A\overset{\triangle}{E}B) \end{array}\right. \Rightarrow\; b\operatorname{sen}(\gamma) = c\operatorname{sen}(\beta) \;\Rightarrow\; \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}. \qquad \square$$

Ejemplo 7.4 Supongamos que estamos cerca de un río (punto A de la Figura 7.35) y necesitamos conocer la distancia hasta la otra orilla (digamos hasta el árbol marcado en la Figura 7.35 por la letra C). Para simplificar, ignoremos la tercera dimensión. ¿Cómo

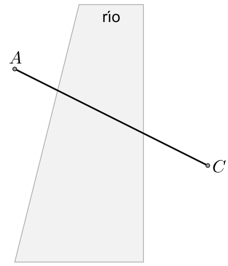


Figura 7.35: Gráfico del problema del río.

hacerlo sin cruzar el río? Suponemos que disponemos de un *teodolito*[1] (aparato de uso en topografía) para medir ángulos y de una cinta métrica.

La forma habitual de resolver este problema es la siguiente:

1) Se clavan dos postes en el suelo en los puntos A y B y se mide con una cinta métrica la distancia c entre ellos (la "base"), como se indica en la Figura 7.36.

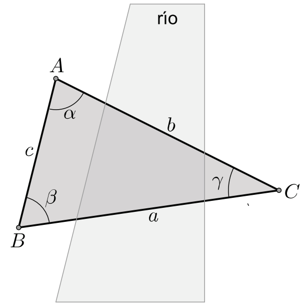


Figura 7.36: Planteamiento del problema del río.

2) Luego se extrae el poste del punto A y se sustituye por un teodolito. Dirigiendo el teodolito primero hacia el árbol y luego hacia el poste B, se mide el ángulo α.

3) Se lleva el teodolito al punto B y se mide de la misma forma el ángulo β. La longitud c de la base y los dos ángulos α y β son todo lo que se necesita para conocer el triángulo ABC.

4) En efecto, sabiendo que los tres ángulos de un triángulo suman π radianes (como se vio en el Corolario 7.2) y aplicando el *teorema del seno*, se tiene que $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ y

$$\frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)},$$

[1]Según el diccionario de la RAE: "Instrumento de precisión que se compone de un círculo horizontal y un semicírculo vertical, ambos graduados y provistos de anteojos, para medir ángulos en sus planos respectivos".

de donde, despejando, se obtiene que la distancia buscada es

$$\boxed{b = c\,\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)},}$$

donde se ha utilizado (véase el apartado b) de la Proposición 7.2) que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\gamma) &= \operatorname{sen}(\pi-(\alpha+\beta)) = \operatorname{sen}(\pi)\cos(\alpha+\beta) - \cos(\pi)\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\\ &= 0\cos(\alpha+\beta) - (-1)\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

El siguiente resultado, debido a Herón de Alejandría (siglo I d.C.), permite calcular el área de un triángulo conocidas las longitudes de los tres lados. Concretamente,

Teorema 7.10 (Fórmula de Herón) *El área de un triángulo de lados a, b y c viene dada por la expresión*

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

siendo

$$p = \frac{a+b+c}{2} \tag{7.18}$$

el semiperímetro del triángulo.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un triángulo de lados a, b, c como el de la Figura 7.37.

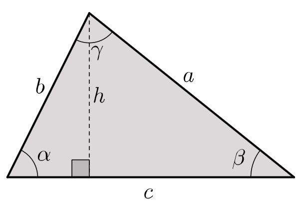


Figura 7.37: Triángulo de lados a, b, c.

Puesto que $h = b\operatorname{sen}(\alpha)$ y

$$\operatorname{sen}(\alpha) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

(véase la Observación 7.16), se tiene que el área del triángulo de la Figura 7.37 es

$$A = \frac{ch}{2} = \frac{cb\operatorname{sen}(\alpha)}{2} = cb\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{7.19}$$

Por un lado, la relación (7.18) determina que

$$a+b+c = 2p,\ a+b = 2p-c,\ b+c = 2p-a \ \text{ y } \ a+c = 2p-b$$

y, por otro, el *teorema del coseno* (véase el Teorema 7.8) hace que se tenga que

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

De esta forma, se tiene que

$$\begin{cases} 1-\cos(\alpha) = 1 - \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc} = \dfrac{a^2-(b-c)^2}{2bc} \\ \qquad = \dfrac{(a+(b-c))(a-(b-c))}{2bc} = \dfrac{(2p-2c)(2p-2b)}{2bc} = \dfrac{2(p-c)(p-b)}{bc} \\ 1+\cos(\alpha) = 1 + \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc} = \dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc} \\ \qquad = \dfrac{((b+c)+a)((b+c)-a)}{2bc} = \dfrac{2p(2p-2a)}{2bc} = \dfrac{2p(p-a)}{bc}, \end{cases}$$

con lo que las fórmulas (7.15) determinan que

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos(\alpha)}{2}} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos(\alpha)}{2}} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}. \end{cases}$$

Sustituyendo estas expresiones en (7.19), se concluye que

$$A = cb\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad \square$$

Ejemplo 7.5 El área de un triángulo de lados $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$ es

$$A = \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}-2\right)\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-4\right)} = \sqrt{\frac{135}{16}} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \simeq 2'9047. \quad \square$$

7.5. Resolución de triángulos

Finalizamos este capítulo con la *resolución de triángulos*, que consiste en determinar los tres lados y los tres ángulos de un triángulo a partir del conocimiento de ciertos datos (como puede ser alguno de los lados y/o de los ángulos). Concretamente, las situaciones en las que se puede "resolver" un triángulo son:

1) Cuando se conocen los **tres lados**: se resuelve aplicando el teorema del coseno.

2) Cuando se conocen **dos lados** y el **ángulo comprendido entre ellos**: se resuelve aplicando el teorema del coseno.

3) Cuando se conoce **un lado** y los **dos ángulos en sus extremos**: se resuelve aplicando el teorema del seno.

El triángulo no queda determinado de forma unívoca en los casos en que se conocen:

1) Dos lados y un ángulo que no es el comprendido entre ellos.

2) Un lado y los tres ángulos (sin saber cuál de ellos es el opuesto al lado conocido).

Ejemplo 7.6 Consideremos un triángulo de lados a, b, c y sean α, β, γ los ángulos opuestos a los lados a, b, c, respectivamente, como se muestra en la Figura 7.38.

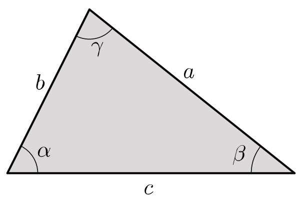


Figura 7.38: Triángulo de lados a, b y c.

Veamos algunos ejemplos que ilustran las situaciones anteriores:

a) Si $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$ son los tres lados de un triángulo, por el teorema del coseno se verifica que

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) & \Rightarrow \quad 4 = 9 + 16 - 24\cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{7}{8} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) & \Rightarrow \quad 9 = 4 + 16 - 16\cos(\beta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\beta) = \frac{11}{16}, \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} \alpha = \arccos\left(\frac{7}{8}\right) \simeq 0'5054\,\text{rad} \simeq 28.9550^\circ \\ \beta = \arccos\left(\frac{11}{16}\right) \simeq 0'8128\,\text{rad} \simeq 46.5675^\circ. \end{cases}$$

Finalmente, el tercer ángulo γ se obtiene a partir de la relación

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \simeq 104.4775^\circ.$$

b) Si $a = 2$ y $b = 3$ son dos lados de un triángulo y $\gamma = 30^\circ$ es el ángulo comprendido entre ellos, por el teorema del coseno se verifica que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) = 4 + 9 - 12\cos(30^\circ) = 13 - 12\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 13 - 6\sqrt{3},$$

por lo que

$$c = \sqrt{13 - 6\sqrt{3}} \simeq 1'6148.$$

Como ya conocemos los tres lados del triángulo, estamos en las condiciones del apartado anterior. Aplicando nuevamente el teorema del coseno, se tiene que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \;\Rightarrow\; 4 = 9 + 13 - 6\sqrt{3} - 6\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}\,\cos(\alpha),$$

de donde

$$\cos(\alpha) = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}} \simeq 0'7852$$

y, por tanto,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}}\right) \simeq 0'6678\,\mathrm{rad} \simeq 38.2620^\circ.$$

Finalmente, el tercer ángulo β se obtiene a partir de la relación

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \simeq 111.7380^\circ.$$

c) Si $a = 2$ es un lado del triángulo y $\beta = 30^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$ son los ángulos en sus extremos, obviamente, el tercer ángulo α se obtiene inmediatamente a partir de la relación

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Por el teorema del seno, se verifica que

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} \;\Rightarrow\; b = \dfrac{a\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \dfrac{2\operatorname{sen}(30^\circ)}{\operatorname{sen}(90^\circ)} = \dfrac{2\,\frac{1}{2}}{1} = 1 \\[2ex] \dfrac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)} \;\Rightarrow\; c = \dfrac{a\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \dfrac{2\operatorname{sen}(60^\circ)}{\operatorname{sen}(90^\circ)} = \dfrac{2\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \sqrt{3} \simeq 1'7321. \end{cases}$$ □

7.6. Problemas

7.1. Determinar el signo que toman $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$ cuando:

a) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ (primer cuadrante) b) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (segundo cuadrante)

c) $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ (tercer cuadrante) d) $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ (cuarto cuadrante).

7.2. Comprobar que:

a) $1+\tan^2(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$.

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)}{\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)} = \dfrac{\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$.

c) $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

d) $(\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha))^2 = 1-\operatorname{sen}(2\alpha)$.

e) $\tan(\alpha)+\tan(\beta) = (\cot(\alpha)+\cot(\beta))\tan(\alpha)\tan(\beta)$.

7.3. Si $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \xi$, calcular $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$.

7.4. Sabiendo que $0<x<\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0'3$, hallar el seno y el coseno de los ángulos

$$x, \pi+x, \frac{\pi}{2}+x, \frac{3\pi}{2}-x, \frac{3\pi}{2}+x, 2\pi-x, 2\pi+x \ \text{ y } \ -x.$$

7.5. Hallar las razones trigonométricas de los ángulos $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{4}$ y $\dfrac{5\pi}{6}$ radianes.

7.6. Hallar las razones trigonométricas de los ángulos $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ y $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ radianes.

7.7. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$.

b) $\tan(\beta) = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}$.

7.8. Comprobar las siguientes igualdades:

a) $\tan^2(\alpha) = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$ b) $\cos(2\alpha) = \dfrac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$ c) $\operatorname{sen}(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$.

7.9. Expresar $\cos(3x)$ en función de $\cos(x)$. Ídem con $\operatorname{sen}(3x)$ en función de $\operatorname{sen}(x)$.
Aplicación: Sabiendo que $\operatorname{sen}(18^\circ) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, calcular $\operatorname{sen}(54^\circ)$.

7.10. Sabiendo que $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = t$, hallar $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$.

7.11. Simplificar la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(2x)}{\operatorname{sen}(3x)-\operatorname{sen}(x)}$.

7.12. Determinar el conjunto de puntos en el que se anulan las siguientes funciones:

a) $\operatorname{sen}(\alpha)$ b) $\cos(\alpha)$ c) $\tan(\alpha)$.

7.13. Hallar el área de un triángulo de lados $a = 2$, $b = 1$ y $c = \sqrt{3}$.

7.14. Se considera un triángulo de lados $a = 4$ cm, $b = 5$ cm y $c = 6$ cm. Hallar el ángulo α que forman los lados b y c.

7.15. De un triángulo se conocen dos ángulos, $\alpha = 30°$ y $\beta = 60°$. Si el lado opuesto del ángulo α es $a = 5$ cm, determinar los otros dos lados b y c.

7.16. Resolver los siguientes triángulos, de los que se conocen:

a) Los tres lados: $a = 4$, $b = 5$ y $c = 6$.

b) Dos lados $a = 4$ y $b = 5$ y el ángulo comprendido entre ellos $\gamma = 45°$.

c) Un lado $a = 4$ y los dos ángulos en sus extremos $\beta = 45°$ y $\gamma = 30°$.

7.7. Soluciones

7.1. Se tiene la siguiente tabla:

	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
$\operatorname{sen}(\alpha)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos(\alpha)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan(\alpha)$	$+$	$-$	$+$	$-$

7.2. Inmediato.

7.3. $\cos(\alpha) = \sqrt{1-\xi^2}$ y $\tan(\alpha) = \dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$.

7.4.

$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{0'91}$ $\cos(x) = 0'3$	$\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen}(x)$ $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\operatorname{sen}(x)$	$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\pm x\right) = -\cos(x)$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm x\right) = \pm\operatorname{sen}(x)$
$\operatorname{sen}(2\pi \pm x) = \pm\operatorname{sen}(x)$ $\cos(2\pi \pm x) = \cos(x)$	$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$

7.5.

$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$	$\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$
$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$
$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

7.6.

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$	$\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}$
$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$	$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}$
$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

7.7. Basta desarrollar las expresiones que intervienen.

7.8. Basta desarrollar las expresiones que intervienen.

7.9. $\cos(3x)=4\cos^3(x)-3\cos(x)$, $\operatorname{sen}(3x)=3\operatorname{sen}(x)-4\operatorname{sen}^3(x)$ y $\operatorname{sen}(54^\circ)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

7.10. $\operatorname{sen}(x)=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ y $\tan(x)=\dfrac{2t}{1-t^2}$.

7.11. $\dfrac{1}{2}$.

7.12. a) $\{k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$. b) $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. c) $\{k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$.

7.13. Por la *fórmula de Herón*, el área del triángulo es $A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\simeq 0'8660$.

7.14. $\cos(\alpha)=\dfrac{3}{4}$, por lo que $\alpha=\arccos\left(\dfrac{3}{4}\right)\simeq 0'7227\,\text{rad}\simeq 41.4096^\circ$.

7.15. $b=5\sqrt{3}\simeq 8'6603$ cm y $c=10$ cm.

7.16. Los lados/ángulos que faltan son:

a) $\alpha\simeq 41.4096^\circ$, $\beta\simeq 55.7711^\circ$, $\gamma\simeq 82.8192^\circ$.

b) $c\simeq 3'5659$, $\alpha\simeq 52.4841^\circ$, $\beta\simeq 82.5159^\circ$.

c) $\alpha=105^\circ$, $b\simeq 2'9282$, $c\simeq 2'0706$.

8 El espacio euclídeo

8.1. Introducción

A diferencia de la *Geometría Afín* (véase el Capítulo 6), que estudia, básicamente, las relaciones de incidencia, intersección y paralelismo, la *Geometría Euclídea* se ocupa, además, de las propiedades derivadas de los conceptos de *distancia* y *ángulo*.

Se comienza con la definición abstracta, en el marco de los espacios vectoriales estudiados en el Capítulo 5, del *producto escalar* entre dos vectores y del *módulo* de un vector. Esto servirá de base para introducir la noción de *ángulo de dos vectores* de un espacio euclídeo.

A través del producto escalar se mostrará cómo calcular *distancias* y *ángulos* entre puntos, rectas y planos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

A continuación se introduce el concepto de *producto vectorial* entre dos vectores de $\mathbb{R}^3$, su interpretación física y cómo se puede utilizar en múltiples aplicaciones, como en el cálculo de *distancias* y *áreas*.

Por último, se define el concepto de *producto mixto* entre tres vectores de $\mathbb{R}^3$ y se destaca su utilidad para el cálculo de *distancias* y *volúmenes*.

8.2. Producto escalar. Módulo de un vector. Ángulo de dos vectores

Definición 8.1 Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (véase la Definición 5.1). Un *producto escalar* sobre $\mathbf{V}$ es una aplicación que a cada par de vectores de $\mathbf{V}$ le asocia un número real

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot, \cdot \rangle : & \mathbf{V} \times \mathbf{V} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \end{array}$$

de forma que la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es:

1) Bilineal, es decir, es una aplicación lineal en cada componente:

   a) $\langle \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}\rangle = \lambda\langle\vec{u}, \vec{w}\rangle + \mu\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle,\ \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V},\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

   b) $\langle \vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}\rangle = \lambda\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle + \mu\langle\vec{u}, \vec{w}\rangle,\ \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V},\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

2) Simétrica: $\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle\vec{v}, \vec{u}\rangle,\ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}.$

3) Definida positiva: $\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle \geq 0,\ \forall\, \vec{u} \in \mathbf{V}$ y $\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0.$

Se dice que $(\mathbf{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *espacio vectorial euclídeo*. □

Definición 8.2 Un *espacio afín euclídeo* es un espacio afín $\mathcal{A}$ cuyo espacio vectorial asociado $(\mathbf{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es euclídeo. □

Definición 8.3 El *espacio euclídeo estándar n–dimensional* $(\mathbb{R}^n, \langle,\cdot,\cdot\rangle)$ se obtiene al considerar el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y el *producto escalar euclídeo*, que viene dado por:

$$\begin{array}{rccl} \langle\cdot,\cdot\rangle : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & \langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n, \end{array}$$

supuesto que $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. En todo lo que sigue, siempre que hablemos de producto escalar, nos estaremos refiriendo al producto escalar euclídeo. Únicamente consideraremos los casos en que $n \in \{1, 2, 3\}$. □

Ejemplo 8.1

a) El producto escalar de los vectores $\vec{x} = (2, -\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{y} = (3, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ es

$$\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = 2 \times 3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \sqrt{2} = 6 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{12 - \sqrt{2}}{2} \simeq 5'2929.$$

b) El producto escalar de los vectores $\vec{x} = (2, 3, -1) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{y} = (-3, -2, 4) \in \mathbb{R}^3$ es

$$\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = 2 \times (-3) + 3 \times (-2) + (-1) \times 4 = -6 - 6 - 4 = -16. \quad \square$$

Observación 8.1 Se puede probar (utilizando, por ejemplo, matrices ortogonales) que el producto escalar está bien definido, en el sentido de que el producto escalar de dos vectores, tal y como se ha definido en la Definición 8.3, no cambia si elegimos para su cálculo las coordenadas respecto a cualquier base ortonormal (véase la Definición 8.7 más adelante) del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Más concretamente, si $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ son dos vectores arbitrarios de $\mathbb{R}^n$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ es cualquier base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ respecto a la cual

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i \vec{u}_i \ \text{ e } \ \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y}_i \vec{u}_i,$$

entonces se verifica que

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i \widetilde{y}_i. \quad \square$$

Definición 8.4 Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una *norma* sobre $\mathbf{V}$ es una aplicación que a cada vector de $\mathbf{V}$ le asocia un número real

$$\begin{array}{rccc} ||\cdot|| : & \mathbf{V} & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{u} & \mapsto & ||\vec{u}|| \end{array}$$

verificando las siguientes propiedades:

1) $||\vec{u}|| \geq 0$, $\forall\, \vec{u} \in \mathbf{V}$ y $||\vec{u}|| = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{u} = 0$.

2) $||\lambda \vec{u}|| = |\lambda| \, ||\vec{u}||$, $\forall\, \vec{u} \in \mathbf{V}$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

3) $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$ (*Desigualdad triangular*).

Se dice que $(\mathbf{V}, ||\cdot||)$ es un *espacio normado*. $\square$

Observación 8.2 La desigualdad triangular determina, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$, las desigualdades

$$\left\{ \begin{array}{l} ||\vec{u}|| = ||\vec{v} + (\vec{u} - \vec{v})|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{u} - \vec{v}|| \\ ||\vec{v}|| = ||\vec{u} + (\vec{v} - \vec{u})|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v} - \vec{u}||. \end{array} \right.$$

Como $||\vec{u} - \vec{v}|| = ||\vec{v} - \vec{u}||$, se deduce la desigualdad

$$\Big| ||\vec{u}|| - ||\vec{v}|| \Big| \leq ||\vec{u} - \vec{v}||, \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}. \quad \square$$

Definición 8.5 Sobre el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vamos a considerar la norma euclídea, definida por:

$$\begin{array}{rccl} ||\cdot|| : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{x} & \mapsto & ||\vec{x}|| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \end{array}$$

supuesto que $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. $\square$

El siguiente resultado muestra que la norma euclídea de un vector de $\mathbb{R}^n$ es igual a la "longitud" del mismo:

Proposición 8.1 *Para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, con $n \in \{1, 2, 3\}$, se verifica que $||\vec{x}||$ coincide con la longitud del vector $\vec{x}$.*

DEMOSTRACIÓN. Distinguimos los tres casos que pueden presentarse:

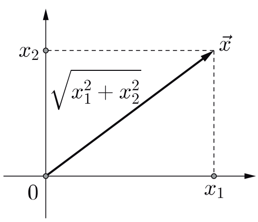
a) Para $n = 1$ el resultado es evidente, ya que si $\vec{x} = x_1 \in \mathbb{R}$, entonces

$$||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2} = |x|,$$

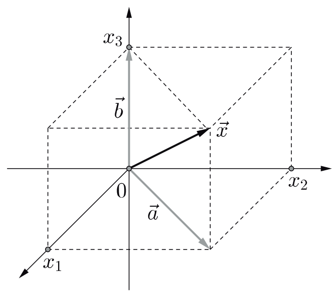
que es la longitud del vector $\vec{x}$.

b) Si $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces, a la vista de la Figura 8.1(a), por el *teorema de Pitágoras* (véase el Teorema 7.3) se tiene que la longitud del vector $\vec{x}$ es

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = ||\vec{x}||.$$



(a) Longitud de $\vec{x}$ en $\mathbb{R}^2$.



(b) Longitud de $\vec{x}$ en $\mathbb{R}^3$.

Figura 8.1: Longitud de un vector en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

c) Si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, escribimos

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} \text{ siendo } \vec{a} = (x_1, x_2, 0) \text{ y } \vec{b} = (0, 0, x_3)$$

(véase la Figura 8.1(b)). De nuevo, por el *teorema de Pitágoras* (dado que $\vec{a}$ se puede considerar un vector del plano formado por los dos primeros ejes y $\vec{b}$ un vector de la recta real formada por el tercer eje), aplicando los apartados a) y b) anteriores se tiene que la longitud del vector $\vec{x}$ es

$$\sqrt{||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = ||\vec{x}||. \quad \square$$

Observación 8.3 En general, para $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, se dice que $||\vec{x}||$ es la *norma* o *módulo* del vector $\vec{x}$. Un vector de módulo 1 se dice que es *unitario*. En todo lo que sigue, siempre que hablemos de norma (o módulo) de un vector, nos estaremos refiriendo a su norma euclídea. Únicamente consideraremos los casos en que $n \in \{1, 2, 3\}$. $\square$

Ejemplo 8.2 El módulo del vector $\vec{x} = (-2, 3, -4) \in \mathbb{R}^3$ es

$$||\vec{x}|| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29},$$

es decir, la "longitud" del vector $\vec{x}$ es $\sqrt{29} \simeq 5'3852$. $\square$

Observación 8.4 Todo espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio vectorial normado $(\mathbf{V}, ||\cdot||)$, pues basta considerar la *norma asociada* al producto escalar

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle}, \ \forall\, \vec{u} \in \mathbf{V}. \quad \square$$

Ejemplo 8.3 En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, la norma asociada al producto escalar euclídeo es la *norma euclídea*, puesto que

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\langle\vec{x}, \vec{x}\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}. \quad \square$$

Observación 8.5 Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, con $n \in \{1, 2, 3\}$, forman dos ángulos $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi]$. Uno de ellos (el menor) pertenece al intervalo $[0, \pi]$ y se denomina *ángulo formado por los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ (véase la Figura 8.2).

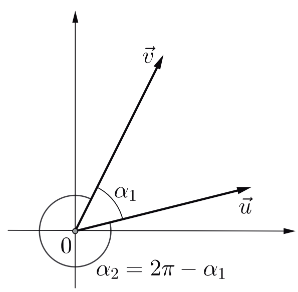


Figura 8.2: Ángulos formados por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Además, como

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi,$$

se verifica que sus cosenos coinciden (véase el apartado d) de la Observación 7.14), por lo que podemos denotar

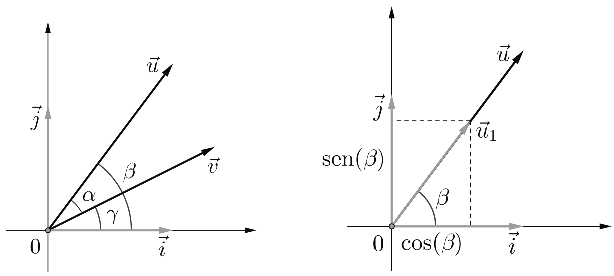
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\alpha_1) = \cos(\alpha_2). \quad \square$$

La siguiente propiedad relaciona el producto escalar de dos vectores con el ángulo que forman y con el producto de sus normas:

Proposición 8.2 *Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, con $n \in \{1, 2, 3\}$, y α el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Denotando $\cos(\alpha) = \cos(\vec{u}, \vec{v})$, se verifica que*

$$\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \cos(\vec{u}, \vec{v}).} \tag{8.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\vec{i}$ y $\vec{j}$ dos vectores unitarios y perpendiculares entre sí (es decir, forman un ángulo de $90°$) del plano generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (en el caso $n = 2$ este plano coincide con el espacio total $\mathbb{R}^2$ y se pueden tomar $\vec{i} = \vec{e}_1$ y $\vec{j} = \vec{e}_2$) tal y como se muestra en la Figura 8.3(a).



(a) Ángulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (b) $\vec{u} = ||\vec{u}||\vec{u}_1$.

Figura 8.3: Vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ unitarios y perpendiculares entre sí en el plano generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Es claro que

$$\vec{u} = ||\vec{u}||\vec{u}_1,$$

donde $\vec{u}_1$ es el vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ dado por

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = \cos(\beta)\vec{i} + \text{sen}(\beta)\vec{j}$$

(véase la Figura 8.3(b)). De forma similar

$$\vec{v} = ||\vec{v}||\vec{v}_1,$$

siendo $\vec{v}_1$ el vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{v}$ dado por

$$\vec{v}_1 = \cos(\gamma)\vec{i} + \text{sen}(\gamma)\vec{j}.$$

Entonces, de acuerdo con lo visto en la Observación 8.1, se verifica que

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= ||\vec{u}|| \cos(\beta)||\vec{v}|| \cos(\gamma) + ||\vec{u}|| \,\text{sen}(\beta)||\vec{v}|| \,\text{sen}(\gamma) \\ &= ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \big(\cos(\beta) \cos(\gamma) + \text{sen}(\beta) \,\text{sen}(\gamma) \big) \\ &= ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \cos(\beta - \gamma) = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \cos(\alpha), \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la Proposición 7.2 y el hecho de que $|\alpha| = |\beta - \gamma|$ y el coseno de un ángulo coincide con el coseno del ángulo opuesto. $\square$

Ejemplo 8.4

a) El ángulo $\alpha \in [0, \pi]$ que forman los vectores $\vec{x} = (1, -3) \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{y} = (5, 2) \in \mathbb{R}^2$ se obtiene a partir de la relación

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{||\vec{x}||\,||\vec{y}||} = \frac{5-6}{\sqrt{1+9}\sqrt{25+4}} = -\frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{29}} = -\frac{\sqrt{290}}{290} \simeq -0'0587.$$

Para hallar este ángulo $\alpha \in [0, \pi]$ consideramos la función inversa del coseno, es decir, la función $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ definida en la Observación 7.12, obteniendo que

$$\alpha = \arccos\big(\cos(\vec{x}, \vec{y})\big) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{290}}{290}\right) \simeq 1'6296\,\mathrm{rad} \simeq 93.3665°.$$

b) Consideremos los vectores $\vec{x} = (3, -2, 1)$ e $\vec{y} = (2, -4, -5)$. Teniendo en cuenta que

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 6 + 8 - 5 = 9, ||\vec{x}|| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}, ||\vec{y}|| = \sqrt{4+16+25} = \sqrt{45}$$

y

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{||\vec{x}||\,||\vec{y}||} = \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{45}} = \frac{3}{\sqrt{70}} \simeq 0'3586,$$

argumentando como en a), el ángulo $\alpha \in [0, \pi]$ que forman los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en $\mathbb{R}^3$ es

$$\alpha = \arccos\big(\cos(\vec{x}, \vec{y})\big) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{70}}\right) \simeq 1'2041\,\mathrm{rad} \simeq 68.9877°. \quad \square$$

La siguiente desigualdad relaciona el producto escalar de dos vectores con el producto de sus normas:

Teorema 8.1 (Desigualdad de Cauchy–Schwarz) *Sea* $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio vectorial euclídeo. Entonces se verifica que*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,,\ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}, \tag{8.2}$$

siendo $||\cdot||$ *la norma asociada al producto escalar. Además, en* (8.2) *se tiene una igualdad si, y sólo si, los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *son linealmente dependientes.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$, el resultado es inmediato, por lo que supondremos que $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ consideramos el vector $\vec{w} = \vec{u} - \lambda\vec{v}$, para el que se verifica:

$$\begin{aligned} 0 \leq ||\vec{w}||^2 &= \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} - \lambda\vec{v}, \vec{u} - \lambda\vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \lambda\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \lambda\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \lambda^2\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= ||\vec{u}||^2 - 2\lambda\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \lambda^2||\vec{v}||^2. \end{aligned} \tag{8.3}$$

En particular, como $\vec{v} \neq \vec{0}$, tomando

$$\widetilde{\lambda} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{||\vec{v}||^2}$$

en la expresión (8.3), se verifica que

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||\vec{u} - \widetilde{\lambda}\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\widetilde{\lambda}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \widetilde{\lambda}^2 ||\vec{v}||^2 \\ &= ||\vec{u}||^2 - 2\,\frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|^2}{||\vec{v}||^2} + \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|^2}{||\vec{v}||^4}\,||\vec{v}||^2 \\ &= ||\vec{u}||^2 - \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|^2}{||\vec{v}||^2}, \end{aligned} \tag{8.4}$$

de donde se deduce el resultado. Además, se da la igualdad en (8.4) si, y sólo si,

$$\vec{u} - \widetilde{\lambda}\vec{v} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son linealmente dependientes.} \quad \square$$

La relación (8.1) permite introducir la noción de *ortogonalidad*:

Definición 8.6 Sea $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$ son *ortogonales* (o *perpendiculares*), y se representa $\vec{u} \perp \vec{v}$, cuando $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. $\square$

Observación 8.6 Como $\langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = 0$ para todo $\vec{u} \in \mathbf{V}$, se tiene que $\vec{0} \perp \vec{u}$, $\forall\, u \in \mathbf{V}$. $\square$

Ejemplo 8.5

a) Consideremos los vectores $\vec{x} = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{y} = (8, -6) \in \mathbb{R}^2$. Puesto que

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 3 \times 8 + 4 \times (-6) = 0,$$

se verifica que $\vec{x} \perp \vec{y}$.

b) Los vectores $\vec{x} = (2, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{y} = (2, 4, -3) \in \mathbb{R}^3$ verifican que $\vec{x} \perp \vec{y}$, ya que

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2 \times 2 + (-1) \times 4 + 0 \times (-3) = 0. \quad \square$$

Observación 8.7 Emplearemos la notación $\vec{u} \parallel \vec{v}$ para indicar que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son *paralelos*, es decir, linealmente dependientes. $\square$

Observación 8.8 Dada una recta r del plano con pendiente $m_r \neq 0$, la pendiente de cualquier recta s perpendicular a r es

$$m_s = -\frac{1}{m_r}, \tag{8.5}$$

ya que, tomando $\vec{v}_r = (1, m_r)$ y $\vec{v}_s = (1, m_s)$ como vectores directores de r y s (véase la Observación 6.13), por ser perpendiculares debe cumplirse que

$$\langle \vec{v}_r, \vec{v}_s \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle (1, m_r), (1, m_s) \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + m_r m_s = 0,$$

lo que equivale a tomar m_s según la expresión (8.5) (teniendo en cuenta que $m_r \neq 0$). Por otro lado, en el caso de que $m_r = 0$ (es decir, cuando la recta r es horizontal), entonces cualquier recta s perpendicular a r es vertical (lo que se puede considerar pendiente infinita). $\square$

Definición 8.7 Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de $\mathbf{V}$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una *base ortogonal* si todos sus elementos son ortogonales dos a dos, es decir,

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Si, además, todos los elementos de $\mathcal{B}$ son unitarios, es decir,

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = ||\vec{e}_i||^2 = 1,$$

se dice que $\mathcal{B}$ es una *base ortonormal*. $\square$

Ejemplo 8.6 $\mathcal{B}_2 = \{\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)\}$ constituye una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}_3 = \{\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. A estas bases se les denomina *bases canónicas* de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. $\square$

Observación 8.9 Consideremos los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ de la Figura 8.4.

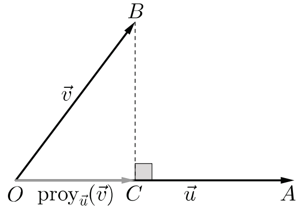


Figura 8.4: Proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$.

Veamos cómo obtener $\mathrm{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \overrightarrow{OC}$, que es el *vector proyección* del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$. El vector $\mathrm{proy}_{\vec{u}}(\vec{v})$ está en la misma dirección que el vector $\vec{u}$, por lo que

$$\mathrm{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \lambda \vec{u} \tag{8.6}$$

con $\lambda > 0$. Para calcular su módulo, tengamos en cuenta que

$$\begin{aligned} |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| &= ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,|\cos(\vec{u}, \vec{v})| = ||\vec{u}||\,||\mathrm{proy}_{\vec{u}}(\vec{v})|| \\ &= ||\vec{u}||\,||\lambda \vec{u}|| = |\lambda|\,||\vec{u}||^2 = \lambda\,||\vec{u}||^2, \end{aligned}$$

al ser $\lambda > 0$. Por tanto,

$$\lambda = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{||\vec{u}||^2}.$$

Sustituyendo este valor de λ en la expresión (8.6), se obtiene

$$\boxed{\operatorname{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{||\vec{u}||^2}\, \vec{u}.}$$

Nótese que el módulo del vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es

$$\boxed{||\operatorname{proy}_{\vec{u}}(\vec{v})|| = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{||\vec{u}||}.}$$

Ejemplo 8.7 Consideremos los vectores

$$\vec{a} = (6, 0) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ y } \ \vec{b} = (4, 4) \in \mathbb{R}^2.$$

Vamos a calcular la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$:

$$\operatorname{proy}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{||\vec{b}||^2}\, \vec{b} = \frac{24}{(4\sqrt{2})^2}\,(4, 4) = \frac{3}{4}\,(4, 4) = (3, 3)$$

y

$$\operatorname{proy}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{||\vec{a}||^2}\, \vec{a} = \frac{24}{6^2}\,(6, 0) = \frac{2}{3}\,(6, 0) = (4, 0)$$

(véase la Figura 8.5). □

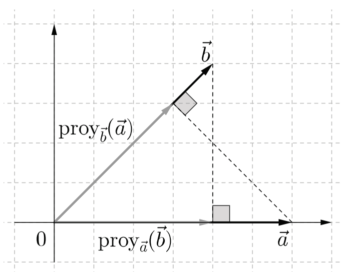


Figura 8.5: Proyecciones de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

8.3. Aplicaciones del producto escalar

8.3.1. Distancia entre dos puntos

Teniendo en cuenta que la distancia de un punto $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ a otro $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ con $n \in \{1, 2, 3\}$ es la longitud del vector que lleva uno a otro, llamaremos *distancia* del punto A al punto B, y la representamos $d(A, B)$, a la norma del vector

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)\,.$$

Por tanto,

$$\boxed{d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.}$$

Ejemplo 8.8

a) La distancia del punto $A = -5 \in \mathbb{R}$ al punto $B = 7 \in \mathbb{R}$ es

$$d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = |7 - (-5)| = 12.$$

b) La distancia del punto $A = (4, 3) \in \mathbb{R}^2$ al punto $B = (-5, 7) \in \mathbb{R}^2$ es

$$d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = ||(-9, 4)|| = \sqrt{(-9)^2 + 4^2} = \sqrt{97} \simeq 9'8489.$$

c) La distancia del punto $A = (2, -1, 3) \in \mathbb{R}^3$ al punto $B = (3, 4, -1) \in \mathbb{R}^3$ es

$$d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = ||(1, 5, -4)|| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{42} \simeq 6'4807. \qquad \square$$

8.3.2. Vector perpendicular a una recta en $\mathbb{R}^2$

Veamos cómo determinar un vector perpendicular a la recta $r:\ \alpha x + \beta y + \delta = 0$. Para ello distinguimos tres casos:

a) Si $\alpha = 0$, entonces $\beta \neq 0$ (pues en otro caso no sería una recta) y las ecuaciones de la recta se pueden reescribir como

$$r:\ y = -\frac{\delta}{\beta}.$$

Por tanto, r es una recta horizontal con vectores perpendiculares $(0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ arbitrarios. En particular, $\vec{n} = (\alpha, \beta)$ es un vector perpendicular a r.

b) Si $\beta = 0$, entonces $\alpha \neq 0$ (pues en otro caso no habría recta) y las ecuaciones de la recta pueden expresarse como

$$r: \ x = -\frac{\delta}{\alpha}.$$

Luego r es una recta vertical con vectores perpendiculares $(\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ arbitrarios. En particular, $\vec{n} = (\alpha, \beta)$ es un vector perpendicular a r.

c) Si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, entonces las ecuaciones de la recta se pueden reescribir como

$$r: \ y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\delta}{\beta}$$

y, por tanto, su pendiente es

$$m = -\frac{\alpha}{\beta}$$

(véase la Observación 2.18). La pendiente de cualquier recta perpendicular a r es

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{\beta}{\alpha}$$

(véase la Observación 8.8) y uno de los vectores directores a cualquiera de estas rectas perpendiculares es $(1, m') = (1, \frac{\beta}{\alpha})$ (véase la Observación 6.13) o cualquier vector que se obtenga de éste al multiplicarlo por una constante $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. En particular, para $\lambda = \alpha$ se tiene que $\vec{n} = (\alpha, \beta)$ es un vector perpendicular a r.

Por tanto, en todos los casos se verifica que

$$\boxed{\vec{n} = (\alpha, \beta) \ \text{ es un vector perpendicular a la recta } \ r: \ \alpha x + \beta y + \delta = 0.}$$

Ejemplo 8.9 El vector $\vec{n} = (7, -4)$ es ortogonal a la recta $7x - 4y - 3 = 0$. □

8.3.3. Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$

Veamos cómo hallar la distancia del punto $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ a la recta

$$r: \ \alpha x + \beta y + \delta = 0.$$

Sea B un punto cualquiera de r y C la *proyección ortogonal* de A sobre r, que se caracteriza por verificar que $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{CA}$, $d(A, r) = d(A, C)$ y

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \tag{8.7}$$

(véase la Figura 8.6).

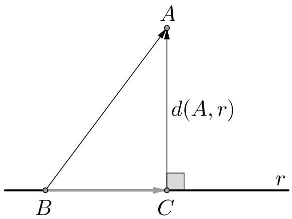


Figura 8.6: Proyección ortogonal de A sobre r.

Multiplicando la igualdad (8.7) por cualquier vector $\vec{n}$ perpendicular a r, se tiene que

$$\langle \overrightarrow{BA}, \vec{n} \rangle = \langle \overrightarrow{CA}, \vec{n} \rangle = \pm \, ||\overrightarrow{CA}|| \, ||\vec{n}||$$

(el signo $+$ o $-$ depende de si $\overrightarrow{CA}$ y $\vec{n}$ tienen sentidos iguales u opuestos). Por tanto, tomando valores absolutos, se deduce que

$$d(A, r) = d(A, C) = ||\overrightarrow{CA}|| = \frac{|\langle \overrightarrow{BA}, \vec{n} \rangle|}{||\vec{n}||}.$$

De esta forma, si $B = (b_1, b_2)$, tomando $\vec{n} = (\alpha, \beta)$ como vector perpendicular a r (véase la Sección 8.3.2.), se tiene que

$$d(A, r) = \frac{|\langle (a_1 - b_1, a_2 - b_2), (\alpha, \beta) \rangle|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{|\alpha a_1 + \beta a_2 - (\alpha b_1 + \beta b_2)|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Ahora bien, como $B = (b_1, b_2) \in r$, se verifica que $\alpha b_1 + \beta b_2 + \delta = 0$, de donde se deduce que $-(\alpha b_1 + \beta b_2) = \delta$. Se obtiene así que

$$\boxed{d(A, r) = \frac{|\alpha a_1 + \beta a_2 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.} \tag{8.8}$$

Es decir, la distancia del punto $A = (a_1, a_2)$ a la recta $\alpha x + \beta y + \delta = 0$ viene dada por el cociente entre el valor absoluto de lo que se obtiene al sustituir las coordenadas del punto A en las ecuaciones de la recta y el módulo del vector normal $\vec{n} = (\alpha, \beta)$ a dicha recta.

Ejemplo 8.10 La distancia del punto $A = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$ a la recta $r: \ 3x + 2y + 2 = 0$ es

$$d(A, r) = \frac{|3 \times 1 + 2 \times (-1) + 2|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \simeq 0'8321. \quad \square$$

8.3.4. Distancia entre dos rectas en $\mathbb{R}^2$

Sean r y s dos rectas de $\mathbb{R}^2$. De cara a calcular la distancia entre r y s, $d(r, s)$, hay tres casos posibles:

1) Si r y s no son paralelas, entonces se cortan en un punto y, por tanto, la distancia entre ellas es cero.

2) Si r y s son coincidentes (es decir, son la misma recta), entonces la distancia entre ellas es cero.

3) Si r y s son paralelas pero no coincidentes, entonces para calcular la distancia entre ellas basta hallar la distancia de un punto de ellas a la otra recta utilizando la fórmula (8.8). En particular, dados $P \in r$ y/o $Q \in s$, se tiene que
$$d(r, s) = d(Q, r) = d(P, s).$$

Ejemplo 8.11 ¿Cuál es la distancia que hay entre las rectas $r: \; 2x - 4y + 5 = 0$ y $s: \; 2x - 4y - 3 = 0$? Puesto que las rectas r y s son paralelas (nótese que ambas tienen la misma pendiente $m = \frac{1}{2}$), no coincidentes, y el punto $P = \left(0, \frac{5}{4}\right) \in r$, se tiene que la distancia entre estas rectas es
$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|2 \times 0 - 4 \times \frac{5}{4} - 3|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{8}{\sqrt{20}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \simeq 1'7889. \quad \square$$

8.3.5. Vector perpendicular a un plano en $\mathbb{R}^3$

Veamos cómo determinar un vector perpendicular al plano $\pi: \; \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$.

Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ son puntos del plano π, se verifica que
$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 + \delta = 0 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 + \delta = 0, \end{cases}$$
por lo que, si a la ecuación segunda le restamos la primera, obtenemos
$$\alpha(b_1 - a_1) + \beta(b_2 - a_2) + \gamma(b_3 - a_3) = 0.$$
La igualdad anterior expresa que los vectores
$$\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma) \;\text{ y }\; \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$
son ortogonales, es decir, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$. Dado que $\overrightarrow{AB}$ es un vector arbitrario del plano π, se tiene que $\vec{n}$ es ortogonal a todo el plano π. Por tanto,
$$\boxed{\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma) \;\text{ es un vector perpendicular al plano }\; \pi: \; \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.}$$

Ejemplo 8.12 El vector $\vec{n} = (2, 1, -1)$ es ortogonal al plano $2x + y - z + 5 = 0$. $\square$

8.3.6. Distancia de un punto a un plano en $\mathbb{R}^3$

Veamos cómo hallar la distancia del punto $A = (a_1, a_2, a_3)$ al plano

$$\pi: \ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Consideremos la recta r que pasa por el punto A y es perpendicular al plano π (véase la Figura 8.7). Según lo visto en la Sección 8.3.5., un vector de dirección de la recta r es $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$, por tratarse de un vector perpendicular al plano π.

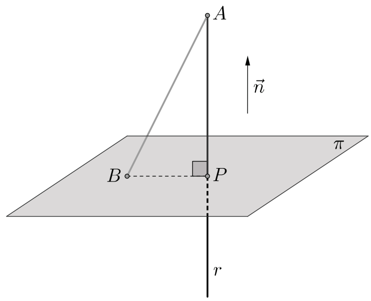


Figura 8.7: Distancia de un punto a un plano.

Por tanto, la recta r viene dada, por ejemplo, por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda\alpha \\ y = a_2 + \lambda\beta \qquad (\lambda \in \mathbb{R}). \\ z = a_3 + \lambda\gamma \end{cases}$$

La recta r corta a π en un punto P (que se denomina *proyección ortogonal* del punto A sobre el plano π) para el que se verifica

$$d(A, \pi) = d(A, P) = ||\overrightarrow{AP}||. \tag{8.9}$$

Para un punto $B = (b_1, b_2, b_3)$ arbitrario del plano π se verifica que

$$|\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle| = ||\overrightarrow{AB}|| \, ||\vec{n}|| \, |\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{n})|. \tag{8.10}$$

Además (véase, de nuevo, la Figura 8.7), según lo visto en la Definición 7.6, se tiene que

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{n}) = \frac{||\overrightarrow{AP}||}{||\overrightarrow{AB}||}.$$

De este modo, podemos escribir la relación (8.10) como

$$|\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle| = ||\overrightarrow{AP}|| \, ||\vec{n}||,$$

por lo que, despejando $||\overrightarrow{AP}||$ y sustituyendo en la expresión (8.9), se obtiene

$$\boxed{d(A,\pi) = ||\overrightarrow{AP}|| = \frac{|\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}\rangle|}{||\vec{n}||}.} \tag{8.11}$$

Ahora bien, por pertenecer $B = (b_1, b_2, b_3)$ al plano π, se tiene que

$$\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 + \delta = 0 \;\Rightarrow\; \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = -\delta,$$

por lo que, a partir de (8.11), se verifica

$$\begin{aligned} d(A,\pi) &= \frac{|\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}\rangle|}{||\vec{n}||} = \frac{|\alpha(b_1 - a_1) + \beta(b_2 - a_2) + \gamma(b_3 - a_3)|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \\ &= \frac{|\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}. \end{aligned}$$

Hemos obtenido así que

$$\boxed{d(A,\pi) = \frac{|\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.} \tag{8.12}$$

Es decir, la distancia del punto $A = (a_1, a_2, a_3)$ al plano $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ viene dada por el cociente entre el valor absoluto de lo que se obtiene al sustituir las coordenadas del punto A en las ecuaciones del plano y el módulo del vector normal $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ a dicho plano.

Ejemplo 8.13 La distancia del punto $A = (1, -1, 2)$ al plano $\pi :\ 3x + 2y - z + 2 = 0$ viene dada por

$$d(A,\pi) = \frac{|3 \times 1 + 2 \times (-1) - 1 \times 2 + 2|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14} \simeq 0'2673. \quad \square$$

Observación 8.10 La expresión (8.12) también permite hallar la distancia de un punto $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ a una recta $r :\ \alpha x + \beta y + \delta = 0$, dado que esta distancia es la distancia del punto $\widetilde{A} = (a_1, a_2, 0)$ al plano $\pi :\ \alpha x + \beta y + \delta = 0$ (véase la Figura 8.8). Por tanto, de (8.12) se deduce que

$$d(A, r) = \frac{|\alpha a_1 + \beta a_2 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

expresión que, obviamente, coincide con la obtenida en (8.8). $\square$

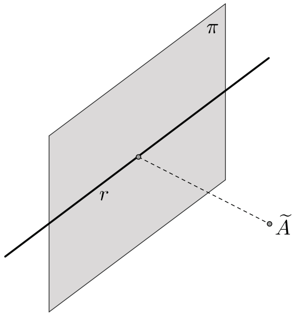


Figura 8.8: Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$ usando una perspectiva tridimensional ($\mathbb{R}^3$).

8.3.7. Ángulo que forman dos rectas

Sea $\vec{v}_1$ un vector de dirección de la recta r_1 y $\vec{v}_2$ un vector de dirección de la recta r_2. Consideremos los ángulos formados por los vectores:

a) $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ b) $-\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

(véase la Figura 8.9).

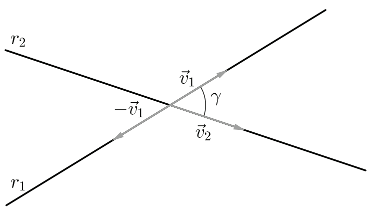


Figura 8.9: Ángulo γ formado por las rectas r_1 y r_2.

El *ángulo* formado por las *rectas* r_1 y r_2 se define como el menor de los dos ángulos anteriores. Dicho ángulo no depende de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ elegidos, se encuentra comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y se obtiene a partir de la relación

$$\boxed{\cos(r_1, r_2) = |\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{||\vec{v_1}||\,||\vec{v_2}||}.}$$

Ejemplo 8.14 Consideremos las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones paramétricas

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 4 \end{array} \right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{y} \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 3\mu \\ y = -1 + 6\mu \\ z = 5\mu \end{array} \right. \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

Como $\vec{v}_1 = (-1, 3, 0)$ es un vector de dirección de la recta r_1 y $\vec{v}_2 = (-3, 6, 5)$ es un vector de dirección de la recta r_2, se tiene que

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{||\vec{v_1}||\,||\vec{v_2}||} = \frac{21}{\sqrt{10}\sqrt{70}} = \frac{3\sqrt{7}}{10} \simeq 0'7937.$$

Por tanto, el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es el único ángulo $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{3\sqrt{7}}{10}.$$

Finalmente, para determinar este ángulo α consideramos la función inversa del coseno, es decir, la función $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ definida en la Observación 7.12, obteniendo que

$$\alpha = \arccos\big(\cos(\alpha)\big) = \arccos\left(\frac{3\sqrt{7}}{10}\right) \simeq 0'6539\,\text{rad} \simeq 37.4650°. \quad \square$$

8.3.8. Ángulo que forman dos planos

Sea $\vec{n}_1$ un vector perpendicular al plano π_1 y $\vec{n}_2$ un vector perpendicular al plano π_2. Consideremos los ángulos formados por los vectores:

a) $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ b) $-\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$

(véase la Figura 8.10).

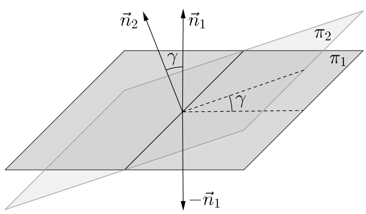


Figura 8.10: Ángulo γ formado por los planos π_1 y π_2.

Se define el *ángulo* formado por los *planos* π_1 y π_2 como el menor de los dos ángulos anteriores. Dicho ángulo no depende de los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ elegidos, se encuentra comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y se obtiene a partir de la relación

$$\boxed{\cos(\pi_1, \pi_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{||\vec{n_1}||\,||\vec{n_2}||}.}$$

Por tanto, los planos π_1 y π_2 son *paralelos* si $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ y *perpendiculares* si $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.

Ejemplo 8.15 Determinemos la ecuación del plano π_1 que pasa por $A = (2, -1, 3)$ y es paralelo al plano $\pi_2 :\ 3x - 2y + 4z - 5 = 0$.

Un vector perpendicular al plano π_2 (y, por tanto, perpendicular también al plano π_1) es $\vec{n}_2 = (3, -2, 4)$. De esta forma, si $P = (x, y, z)$ es un punto arbitrario del plano π_1, tiene que verificarse que $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}_2$, es decir,

$$\begin{aligned}\langle (x-2, y+1, z-3), (3, -2, 4)\rangle = 0 &\Leftrightarrow\ 3(x-2) - 2(y+1) + 4(z-3) = 0\\ &\Leftrightarrow\ 3x - 2y + 4z - 20 = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, el plano buscado es $\pi_1 :\ 3x - 2y + 4z - 20 = 0$.

Otra forma de hallar la ecuación del plano π_1 es la siguiente: como $\vec{n}_2 = (3, -2, 4)$ es un vector perpendicular al plano π_1, debe existir $\gamma \in \mathbb{R}$, de modo que la ecuación del plano π_1 sea de la forma

$$\pi_1 :\ 3x - 2y + 4z + \gamma = 0.$$

Además, como $A = (2, -1, 3) \in \pi_1$, tiene que cumplirse que

$$3 \times 2 - 2 \times (-1) + 4 \times 3 + \gamma = 0,$$

de donde $\gamma = -20$, y se vuelve a obtener de nuevo que

$$\pi_1 :\ 3x - 2y + 4z - 20 = 0. \quad \square$$

8.3.9. Ángulo que forman una recta y un plano

Sea $\vec{v}$ un vector de dirección de la recta r y $\vec{n}$ un vector perpendicular al plano π. Consideremos los ángulos formados por los vectores:

a) $\vec{v}$ y $\vec{n}$ b) $-\vec{v}$ y $\vec{n}$

(véase la Figura 8.11).

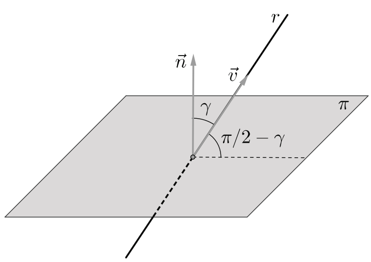


Figura 8.11: Ángulo $\dfrac{\pi}{2} - \gamma$ formado por la recta r y el plano π.

Se define el *ángulo* formado por la *recta* r y el *plano* π como el ángulo complementario del menor de los dos ángulos anteriores (es decir, el ángulo que sumado al menor de los dos ángulos anteriores forma un ángulo recto). Dicho ángulo no depende de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$ elegidos, se encuentra comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y se obtiene a partir de la relación

$$\boxed{\operatorname{sen}(r,\pi) = |\cos(\vec{v},\vec{n})| = \frac{|\langle \vec{v},\vec{n}\rangle|}{||\vec{v}||\,||\vec{n}||}.}$$

Por tanto, la recta r y el plano π son *perpendiculares* si $\vec{v} \parallel \vec{n}$ y *paralelos* si $\vec{v} \perp \vec{n}$.

Ejemplo 8.16 Calculemos el ángulo entre la recta

$$r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + 9\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = -5 \end{cases}$$

y el plano $\pi:\ 3x - 8y + 5z - 4 = 0$.

Como $\vec{v} = (1,9,0)$ es un vector de dirección de la recta r y $\vec{n} = (3,-8,5)$ es un vector perpendicular al plano π, se tiene que

$$\operatorname{sen}(r,\pi) = |\cos(\vec{v},\vec{n})| = \frac{|\langle \vec{v},\vec{n}\rangle|}{||\vec{v}||\,||\vec{n}||} = \frac{69}{\sqrt{82}\sqrt{98}} = \frac{69\sqrt{41}}{574} \simeq 0'7697.$$

Luego el ángulo formado por la recta r y el plano π es el único ángulo $\alpha \in (0,\frac{\pi}{2})$ tal que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{69\sqrt{41}}{574}.$$

Para determinar este ángulo α consideramos la función inversa del seno, es decir, la función $\operatorname{arcsen}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ definida en la Observación 7.11, obteniendo que

$$\alpha = \operatorname{arcsen}\big(\operatorname{sen}(\alpha)\big) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{69\sqrt{41}}{574}\right) \simeq 0'8784\,\mathrm{rad} \simeq 50.3282^\circ. \qquad \square$$

8.4. Producto vectorial

Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$ linealmente independientes, determinemos todos los vectores $\vec{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que son ortogonales a ambos. Éstos vienen dados por verificar:

$$\begin{cases} \vec{w} \perp \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \langle \vec{w},\vec{u}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1x + u_2y + u_3z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \langle \vec{w},\vec{v}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1x + v_2y + v_3z = 0. \end{cases} \tag{8.13}$$

Tenemos pues que resolver un sistema homogéneo de dos ecuaciones con tres incógnitas. Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, se verifica que el rango de la matriz del sistema (que coincide con el rango de la matriz ampliada) es 2. Por tanto, por el *teorema de Rouché–Fröbenius*, el sistema (8.13) es compatible e indeterminado. Sin pérdida de generalidad (en otro caso la demostración se haría de forma similar, pero tomando el determinante y las incógnitas principales adecuadas), podemos suponer que

$$\delta_1 = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

por lo que podemos considerar a x e y incógnitas principales y escribir el sistema (8.13) en la forma

$$\begin{cases} u_1 x + u_2 y = -u_3 z \\ v_1 x + v_2 y = -v_3 z, \end{cases}$$

cuya resolución la obtenemos por la *regla de Cramer*:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\det \begin{pmatrix} -u_3 z & u_2 \\ -v_3 z & v_2 \end{pmatrix}}{\delta_1} = \dfrac{u_2 v_3 - u_3 v_2}{\delta_1} z = \dfrac{\det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}}{\delta_1} z \\[2em] y = \dfrac{\det \begin{pmatrix} u_1 & -u_3 z \\ v_1 & -v_3 z \end{pmatrix}}{\delta_1} = \dfrac{u_3 v_1 - u_1 v_3}{\delta_1} z = -\dfrac{\det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix}}{\delta_1} z. \end{cases}$$

De esta forma, eligiendo

$$z = \delta_1 \alpha = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \alpha,$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario, obtenemos que las infinitas soluciones del sistema (8.13) son

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right) \alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Como se observa, la solución anterior define una recta vectorial generada por el vector

$$\left(\det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right).$$

Definición 8.8 Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Se denomina *producto vectorial* de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al vector

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right). \quad \square$$

Observación 8.11 (Regla nemotécnica) Una manera de obtener el producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ es a partir de los vectores

$$\vec{i} = (1, 0, 0),\ \vec{j} = (0, 1, 0),\ \vec{k} = (0, 0, 1),$$

pues basta desarrollar (véase la Definición 3.14) el siguiente "determinante" por los elementos de la primera fila

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.}$$

Ejemplo 8.17 El producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (3, 5, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2, 1)$ es el vector

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = (3, -2, 1).$$

Tal y como hemos dicho en la Observación 8.11, otra forma de hacer este cálculo es desarrollar el siguiente "determinante" por los elementos de la primera fila

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{i} - \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{j} + \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{k}$$

$$= 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = 3(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (3, -2, 1). \quad \square$$

Proposición 8.3 *El vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es, por construcción, ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Además, es el único vector que cumple:*

$$\det(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\ \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \ \Leftrightarrow\ \vec{y} = \vec{u} \times \vec{v}.$$

En particular, se verifica que

$$\det(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{x}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle\ \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{8.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\vec{x}$ un vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$. Para simplificar la notación vamos a denotar

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right) = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3).$$

De esta forma, se tiene que

$$\det(\vec{x},\vec{u},\vec{v}) = \langle \vec{x},\vec{y}\rangle \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$\Leftrightarrow x_1 \det\begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} - x_2 \det\begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix} + x_3 \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$\Leftrightarrow x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$\Leftrightarrow (y_1-\zeta_1)\,x_1 + (y_2-\zeta_2)\,x_2 + (y_3-\zeta_3)\,x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 = \zeta_1,\ y_2 = \zeta_2,\ y_3 = \zeta_3$$

$$\Leftrightarrow \vec{y} = \vec{u}\times\vec{v},$$

donde en la penúltima coimplicación se ha utilizado que $\vec{x}$ es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$. □

Observación 8.12 (Propiedades del producto vectorial) La propiedad (8.14) permite probar las siguientes propiedades:

a) *Propiedad antisimétrica*: $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u},\ \forall\,\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$.

b) *Homogeneidad*: $\vec{u}\times(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\times\vec{v}),\ \forall\,\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}$.

c) *Propiedad distributiva*: $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w},\ \forall\,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$.

d) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores linealmente independientes $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$.

e) El vector $\vec{u}\times\vec{v}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

f) $||\vec{u}\times\vec{v}|| = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,\mathrm{sen}\,(\vec{u},\vec{v})\,,\ \forall\,\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$. □

Observación 8.13 (Interpretación física) Sean $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$.

a) Si alguno de los vectores $\vec{u}$ ó $\vec{v}$ es nulo, entonces $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$.

b) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, entonces $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$.

c) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, entonces $\vec{u}\times\vec{v}$ es el vector que tiene:

   1) Módulo: $||\vec{u}\times\vec{v}|| = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,\mathrm{sen}\,(\vec{u},\vec{v})$.
   2) Dirección: perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
   3) Sentido: el de avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ por el camino más corto (véase la Figura 8.12). □

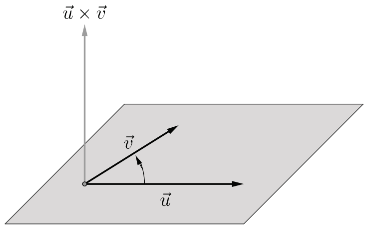


Figura 8.12: Interpretación geométrica del producto vectorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$.

8.5. Aplicaciones del producto vectorial

8.5.1. Vector perpendicular a dos rectas

Sea $\vec{u}$ un vector de dirección de la recta r y $\vec{v}$ un vector de dirección de la recta s. Entonces, por la Observación 8.12, $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector perpendicular a las rectas r y s.

Ejemplo 8.18 Consideremos las rectas

$$r:\ \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4} \ \text{ y } \ s:\ \frac{x-2}{2} = y+3 = z-4.$$

Como $\vec{u} = (2,3,4)$ y $\vec{v} = (2,1,1)$ son, respectivamente, vectores de dirección de las rectas r y s, se tiene que un vector perpendicular a ambas rectas es

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = (-1, 6, -4). \quad \square$$

8.5.2. Vector director de una recta dada por la intersección de dos planos

Consideremos la recta r determinada por la intersección de los planos

$$\pi_1:\ \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0 \ \text{ y } \ \pi_2:\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0.$$

Como vimos en la Subsección 8.3.5., los vectores $\vec{n_1} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ y $\vec{n_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ son, respectivamente, vectores perpendiculares a los planos π_1 y π_2. De esta forma, la recta r, por pertenecer a π_1 y π_2, es perpendicular a estos dos vectores y, por tanto, r es paralela al producto vectorial

$$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \left(\det \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \right).$$

De esta forma, se tiene que $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$ es un vector de dirección de la recta r.

Ejemplo 8.19 Para determinar un vector de dirección de la recta

$$r : \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x + z + 4 = 0 \end{cases}$$

basta considerar el producto vectorial

$$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \left(\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = (-1, 1, 2). \quad \square$$

8.5.3. Área de un paralelogramo y de un triángulo

Consideremos un paralelogramo de vértices O, A, B y C como se muestra en la Figura 8.13. Por definición, el área de este paralelogramo es

$$\text{Área}(OABC) = ||\overrightarrow{OA}||\, h = ||\overrightarrow{OA}||\, ||\overrightarrow{OB}||\, \text{sen}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

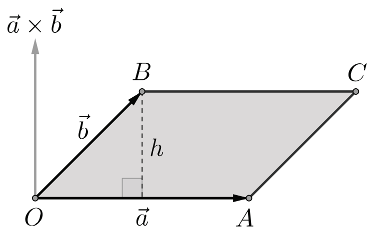


Figura 8.13: Paralelogramo de vértices O, A, B y C.

De esta forma, si $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, se tiene que

$$\boxed{\text{Área}(OABC) = ||\vec{a}||\, ||\vec{b}||\, \text{sen}(\vec{a}, \vec{b}) = ||\vec{a} \times \vec{b}||.}$$

Es decir, el área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ coincide con el módulo del vector $\vec{a} \times \vec{b}$. Obviamente, el área del triángulo que determinan los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ coincide con la mitad del módulo del vector $\vec{a} \times \vec{b}$, es decir,

$$\boxed{\text{Área}(OAB) = \frac{||\vec{a} \times \vec{b}||}{2}.} \tag{8.15}$$

Ejemplo 8.20 El área A del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{a} = (2, 3, 4)$ y $\vec{b} = (5, 6, 1)$ es el módulo del vector

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right) = (-21, 18, -3),$$

es decir,

$$A = ||\vec{a} \times \vec{b}|| = \sqrt{(-21)^2 + 18^2 + (-3)^2} = \sqrt{774} = 3\sqrt{86} \simeq 27'8209. \quad \square$$

8.5.4. Distancia de un punto a una recta

Sea A un punto exterior a la recta r. El punto $P \in r$ tal que $\overrightarrow{AP} \perp r$ se denomina la *proyección ortogonal* de A sobre la recta r (véase la Figura 8.14). La *distancia* del punto A a la recta r es la distancia de A al punto P, es decir,

$$d(A,r) = d(A,P) = ||\overrightarrow{AP}||. \tag{8.16}$$

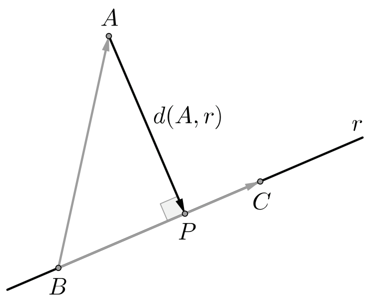


Figura 8.14: Distancia del punto A a la recta r.

Para hallar la distancia de A a P consideramos dos puntos arbitrarios B y C de la recta r. Puesto que por un lado se tiene que

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}\,||\overrightarrow{BC}||\,||\overrightarrow{AP}||$$

y, por otro,

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(BAC) = \frac{||\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}||}{2}$$

(véase (8.15)), debe cumplirse la igualdad

$$||\overrightarrow{BC}||\,||\overrightarrow{AP}|| = ||\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|| \;\Rightarrow\; ||\overrightarrow{AP}|| = \frac{||\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}||}{||\overrightarrow{BC}||}.$$

Sustituyendo esta expresión en (8.16), se obtiene que

$$\boxed{d(A,r) = \frac{||\overrightarrow{BA} \times \vec{u}||}{||\vec{u}||},}$$

siendo B un punto arbitrario de la recta r y $\vec{u}$ un vector de dirección de la misma.

Ejemplo 8.21 Para hallar la distancia del punto $A = (1, -1, 2)$ a la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right. \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

consideramos el punto $B = (1, 0, 3) \in r$ y el vector de dirección $\vec{u} = (-2, 1, 1)$ de r. Puesto que $\overrightarrow{BA} = A - B = (0, -1, -1)$ y

$$\overrightarrow{BA} \times \vec{u} = \left(\det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right) = (0, 2, -2),$$

se tiene que

$$d(A, r) = \frac{||\overrightarrow{BA} \times \vec{u}||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \simeq 1'1547. \quad \square$$

8.6. Producto mixto

Definición 8.9 Dados tres vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, se denomina *producto mixto* de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ al producto escalar del vector $\vec{u}$ por el vector $\vec{v} \times \vec{w}$, es decir, al número real

$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle. \quad \square$$

Observación 8.14 De la propiedad (8.14) se deduce que

$$\boxed{\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.}$$

La igualdad anterior permite demostrar las siguientes propiedades del producto mixto:

1) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\} = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\} = -\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\} = -\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\} = -\{\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\}$.

2) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores linealmente dependientes. $\square$

Ejemplo 8.22 Como el producto mixto de los vectores $\vec{u} = (2, 3, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$ y $\vec{w} = (1, 2, 4)$ es

$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 5,$$

se verifica que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores linealmente independientes. $\square$

8.7. Aplicaciones del producto mixto

8.7.1. Volumen de un paralelepípedo y de un tetraedro

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ (véase la Figura 8.15) es el área de la base de la base por la altura.

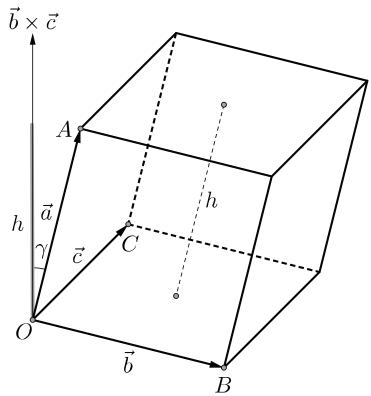


Figura 8.15: Paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ con altura $h = ||\vec{a}||\,|\cos(\gamma)|$.

Por tanto,

$$V(\text{paralelepípedo}) = ||\vec{b} \times \vec{c}||\, h = ||\vec{b} \times \vec{c}||\, ||\vec{a}||\, |\cos(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})| = |\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle|,$$

es decir,

$$\boxed{V(\text{paralelepípedo}) = |\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}|.} \tag{8.17}$$

Como acabamos de ver, el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ es el valor absoluto del producto mixto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Puesto que a partir de 6 tetraedros iguales se puede formar un paralelepípedo, a la vista de (8.17), el volumen de un tetraedro de vértices O, A, B y C es

$$\boxed{V(\text{tetraedro}) = \frac{|\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}|}{6},}$$

donde $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

Ejemplo 8.23 Consideremos los puntos $O = (-1, 1, 0)$, $A = (2, 1, 3)$, $B = (0, 1, -1)$ y $C = (1, 0, 3)$. El volumen del paralelepípedo de aristas $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ es

$$V = |\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}| = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \right| = |-6| = 6. \quad \square$$

8.7.2. Distancia entre dos rectas paralelas y distintas

Obviamente, la distancia entre dos rectas paralelas y distintas es la distancia que hay de un punto arbitrario de una de ellas a la otra recta. Por tanto, para calcular esta distancia basta aplicar lo estudiado en la Sección 8.5.4.

8.7.3. Distancia entre dos rectas que se cruzan

Sean r y s dos rectas que se cruzan. Consideremos

$$\begin{cases} A \in r \ \text{ y } \vec{u} \text{ un vector de dirección de } r \\ B \in s \ \text{ y } \vec{v} \text{ un vector de dirección de } s. \end{cases}$$

Se verifica que existen dos únicos puntos $P_1 \in r$ y $P_2 \in s$ tales que

$$\overrightarrow{P_1P_2} \perp r \ \text{ y } \ \overrightarrow{P_1P_2} \perp s.$$

La recta t determinada por los puntos P_1 y P_2 se denomina *perpendicular común* a las rectas r y s (véase la Figura 8.16). La *distancia entre las rectas* r y s es la distancia del punto P_1 al punto P_2, es decir,

$$d(r,s) = d(P_1, P_2).$$

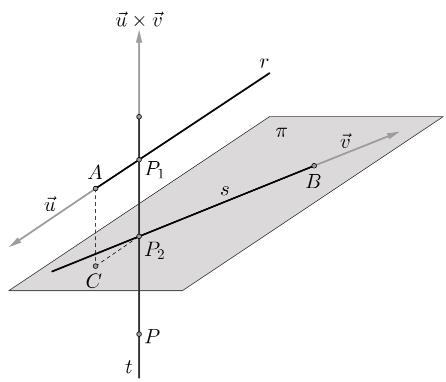


Figura 8.16: Elementos geométricos para hallar la distancia entre dos rectas r y s que se cruzan.

Consideremos el plano π determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que pasa por el punto B. Claramente,

$$d(r,s) = d(P_1, P_2) = d(A, \pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle|}{||\vec{n}||}, \tag{8.18}$$

siendo $\vec{n}$ un vector perpendicular al plano π (véase (8.11)). Tomando $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, la expresión (8.18) adquiere la forma

$$\boxed{d(r,s) = \frac{|\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\}|}{||\vec{u} \times \vec{v}||}.} \tag{8.19}$$

Observación 8.15 (Interpretación geométrica) Nótese que la expresión (8.19), que proporciona la distancia entre las rectas r y s, es el cociente entre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}, \vec{u}$ y $\vec{v}$ y el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Representa, por tanto, la altura de dicho paralelogramo. □

Para determinar las ecuaciones de la recta t, perpendicular común a las rectas r y s, tengamos en cuenta que si $P = (x, y, z)$ es un punto arbitrario de la recta t, se verifica que:

$$\begin{cases} \text{Los vectores } \overrightarrow{AP},\ \vec{u} \text{ y } \vec{u} \times \vec{v} \text{ son coplanarios} & \Rightarrow \quad \{\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}\} = 0. \\ \text{Los vectores } \overrightarrow{BP},\ \vec{v} \text{ y } \vec{u} \times \vec{v} \text{ son coplanarios} & \Rightarrow \quad \{\overrightarrow{BP}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\} = 0. \end{cases}$$

Por tanto, las ecuaciones implícitas de la recta t vienen dadas como intersección de los planos

$$\begin{cases} \boxed{\det \begin{pmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = 0} \\ \boxed{\det \begin{pmatrix} x - b_1 & y - b_2 & z - b_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = 0,} \end{cases} \tag{8.20}$$

donde $(n_1, n_2, n_3) = \vec{u} \times \vec{v}$. □

Ejemplo 8.24 Consideremos las rectas

$$r: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z \quad \text{y} \quad s: \ x = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-1}.$$

Puesto que

$$\begin{cases} A = (1, -2, 0) \in r \ \text{ y } \vec{u} = (2, 3, 1) \text{ es un vector de dirección de } r, \\ B = (0, 2, -3) \in s \ \text{ y } \vec{v} = (1, 2, -1) \text{ es un vector de dirección de } s, \end{cases}$$

se tiene que $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 4, -3)$,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = (-5, 3, 1)$$

y

$$\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\} = \det \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 14.$$

Por tanto, la distancia entre las rectas r y s es

$$d(r,s) = \frac{\left|\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\}\right|}{||\vec{u} \times \vec{v}||} = \frac{14}{\sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{35}} = \frac{2\sqrt{35}}{5} \simeq 2'3664.$$

Para hallar la perpendicular común t a las rectas r y s, aplicamos las fórmulas (8.20):

$$0 = \det \begin{pmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -7(y - 3z + 2)$$

y

$$0 = \det \begin{pmatrix} x & y-2 & z+3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 5x + 4y + 13z + 31.$$

Por tanto, la recta t viene determinada como la intersección de los planos

$$\boxed{\pi_1 :\ y - 3z + 2 = 0} \text{ y } \boxed{\pi_2 :\ 5x + 4y + 13z + 31 = 0,}$$

es decir, las ecuaciones implícitas de la recta t son

$$t : \begin{cases} y - 3z + 2 = 0 \\ 5x + 4y + 13z + 31 = 0. \end{cases} \quad \square$$

8.8. Problemas

8.1. Determinar el valor de $x \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{a} = (1,4,2)$ y $\vec{b} = (x,1,3)$ sean ortogonales.

8.2. Se consideran los vectores $\vec{u} = (-2,2,3)$, $\vec{v} = (\alpha,2,4)$ y $\vec{w} = (-1,\beta,1)$.

a) Determinar los valores de α y β sabiendo que $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $\vec{v} \perp \vec{w}$.

b) Hallar el ángulo α que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

8.3. Se consideran los vectores $\vec{u} = (1,1,0)$ y $\vec{v} = (\lambda,1,-1)$. Determinar el valor de λ sabiendo que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de $60°$.

8.4. Demostrar que para todo vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ se verifica que $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ es un vector unitario y de la misma dirección y sentido que el vector $\vec{u}$.

8.5. [Identidad del paralelogramo] Demostrar que en todo espacio vectorial $\mathbf{V}$ se verifica que

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 + ||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 2\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2\right),\ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}.$$

Dar una interpretación geométrica de este resultado.

8.6. Dados los puntos $A = (1, 2, 3)$, $B = (-2, 0, 1)$, $C = (2, 3, 4)$ y $D = (-1, 1, 0)$, hallar el vector proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el vector $\overrightarrow{CD}$ y calcular su módulo.

8.7. Hallar el producto escalar y el producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (1, -1, 3)$ y $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

8.8. Si $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$, determinar los vectores:

$$\vec{i}\times\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{j},\ \vec{i}\times\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{i},\ \vec{j}\times\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{j}\ \text{ y }\ \vec{k}\times\vec{k}.$$

8.9. Calcular el producto mixto de los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} = (-2, 3, 2)$, $\vec{v} = (1, 2, 4)$ y $\vec{w} = (1, 0, 2)$.

8.10. Determinar el ángulo α que forman los vectores $\vec{u} = (1, 3, -1)$ y $\vec{v} = (-2, 3, 4)$.

8.11. Hallar el ángulo α que forman los planos $\pi_1 : 2x - 3y = 0$ y $\pi_2 : 2x - y + 2z - 1 = 0$.

8.12. Determinar el ángulo α que forma la recta $r : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = z - 2$ con el plano de ecuación $\pi :\ -3x + 2y + z - 2 = 0$.

8.13. Sean $A = (-1, 2, 2)$, $B = (2, 3, 0)$ y $C = (1, 3, -2)$. Hallar la distancia de A a B, de A a C y el ángulo α que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

8.14. Encontrar un vector unitario y perpendicular al plano π definido por los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 2)$ y $C = (0, 1, 3)$.

8.15. Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto $A = (1, 0, 3)$ y es perpendicular a la recta $r : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$.

8.16. Determinar la distancia del punto $A = (1, 1, 1)$ al plano $\pi :\ 2x - 3y + 2z - 8 = 0$.

8.17. Hallar la distancia del punto $A = (2, 0, 1)$ a la recta $r : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-3}$.

8.18. Hallar el área del triángulo de vértices $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 3)$ y $C = (0, 1, 2)$.

8.19. Calcular el volumen del tetraedro con vértices $A = (2, 4, 2)$, $B = (3, 1, -1)$, $C = (-2, 2, 2)$ y $D = (1, 0, 2)$.

8.20. Hallar la distancia que hay entre las rectas

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{2} = z - 3 \text{ y } s: x + 2 = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

8.21. Demostrar que para vectores arbitrarios $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ se verifica:

a) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}$ b) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

8.22. Hallar las coordenadas del punto simétrico del punto $A = (1, 2, -1)$ respecto de:

a) Punto $B = (1, -2, -4)$ b) Plano $\pi: x + y - z + 3 = 0$ c) Recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$.

8.23. **[Cosenos directores]** Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ donde las componentes del vector $\vec{x}$ están referidas a una base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Si φ_1, φ_2 y φ_3 son, respectivamente, los ángulos que forma el vector $\vec{x}$ con los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$, se denomina *cosenos directores* de $\vec{x}$ respecto a la base $\mathcal{B}$ a los números $\cos(\varphi_1), \cos(\varphi_2)$ y $\cos(\varphi_3)$. Demostrar los siguientes resultados:

a) $\cos(\varphi_i) = \dfrac{x_i}{||\vec{x}||}$, $i = 1, 2, 3$.

b) $\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) + \cos^2(\varphi_3) = 0$.

c) Los cosenos directores del vector $\vec{x}$ son las componentes del vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{x}$.

8.24. Hallar los ángulos que forma con los ejes coordenados el vector $\vec{x} = (1, -1, \sqrt{2})$.

8.25. Se consideran en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 2)$, $C = (1, 2, 2)$ y $D = (\alpha, \beta, \gamma)$. Determinar valores de α, β y γ para que los puntos A, B, C y D formen un paralelogramo y hallar el perímetro y el área del mismo. ¿Son únicos los valores de estos parámetros?

8.26. Encontrar la perpendicular común t a las rectas

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ 2x - z = 0. \end{cases}$$

8.27. Determinar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A = (2, 1, -1)$, está contenida en el plano $\pi :\ x + 2y + 3z - 1 = 0$ y es perpendicular a la recta

$$s : \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z + 4. \end{cases}$$

8.28. Un rayo luminoso que pasa por el punto $A = (1, 2, 3)$ y es paralelo a la recta

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

se refleja en el plano $\pi :\ 2x + y + z - 1 = 0$. ¿Pasará el rayo reflejado por el punto $B = (-3, 0, 1)$?

8.9. Soluciones

8.1. $x = -10$.

8.2. a) $\alpha = 8$ y $\beta = 2$. b) $\cos(\alpha) = \dfrac{3\sqrt{102}}{34} \simeq 0'8911$ y $\alpha = \arccos\left(\dfrac{3\sqrt{102}}{34}\right)$ $\simeq 0'4710\,\text{rad} \simeq 26.9841°$.

8.3. $\lambda = 0$.

8.4. Evidente, a partir de la propiedad 2) de norma (véase la Definición 8.4).

8.5. Basta desarrollar los cuadrados de las normas en términos del producto escalar. Interpretación geométrica: en todo paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales coincide con la suma de los cuadrados de sus cuatro lados.

8.6. $\text{proy}_{\overrightarrow{CD}}(\overrightarrow{AB}) = \left(-\dfrac{63}{29}, -\dfrac{42}{29}, -\dfrac{84}{29}\right)$ y $\left\|\text{proy}_{\overrightarrow{CD}}(\overrightarrow{AB})\right\| = \dfrac{21\sqrt{29}}{29} \simeq 3'8996$.

8.7. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -5$ y $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 8, 3)$.

8.8. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ y $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$.

8.9. $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = -6$.

8.10. $\cos(\alpha) = \dfrac{3\sqrt{319}}{319} \simeq 0'1680$ y $\alpha = \arccos\left(\dfrac{3\sqrt{319}}{319}\right) \simeq 1'4020\,\text{rad} \simeq 80.3303°$.

8.11. $\cos(\alpha) = \dfrac{7\sqrt{13}}{39} \simeq 0'6472$ y $\alpha = \arccos\left(\dfrac{7\sqrt{13}}{39}\right) \simeq 0'8670\,\mathrm{rad} \simeq 49.6729°$.

8.12. $\mathrm{sen}(\alpha) = \dfrac{\sqrt{14}}{7} \simeq 0'5345$ y $\alpha = \mathrm{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{14}}{7}\right) \simeq 0'5639\,\mathrm{rad} \simeq 32.3115°$.

8.13. $d(A,B) = \sqrt{14} \simeq 3'7417$ y $d(A,C) = \sqrt{21} \simeq 4'5826$.
$\cos(\alpha) = \dfrac{15}{\sqrt{14}\sqrt{21}} \simeq 0'8748$ y $\alpha = \arccos\left(\dfrac{15}{\sqrt{14}\sqrt{21}}\right) \simeq 0'5057\,\mathrm{rad} \simeq 28.9766°$.

8.14. $\vec{w} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}(2,-1,1)$.

8.15. $3x + 2y + 3z - 12 = 0$.

8.16. $d(A,\pi) = \dfrac{7\sqrt{17}}{17} \simeq 1'6977$.

8.17. $d(A,r) = \dfrac{\sqrt{286}}{22} \simeq 0'7687$.

8.18. Área$(ABC) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0'7071$.

8.19. $V = 7$.

8.20. $d(r,s) = \dfrac{12\sqrt{5}}{5} \simeq 5'3666$.

8.21. Basta desarrollar las expresiones que intervienen.

8.22. a) $(1,-6,-7)$. b) $\left(-\dfrac{11}{3}, -\dfrac{8}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$. c) $\left(\dfrac{37}{29}, -\dfrac{46}{29}, \dfrac{45}{29}\right)$.

8.23. a) Basta tener en cuenta que, por definición, $\cos(\varphi_i) = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle}{||\vec{x}||\,||\vec{e}_i||}$ para $i = 1,2,3$.
b) y c) son consecuencia del apartado a).

8.24. Aplicando el Problema 8.23, se deduce que $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \dfrac{2\pi}{3}$ y $\varphi_3 = \dfrac{\pi}{4}$.

8.25. Unos posibles valores son $\alpha = 2$, $\beta = 3$ y $\gamma = 4$, que determinan el punto $D = (2,3,4)$. El perímetro del paralelogramo es $2\left(\sqrt{6} + \sqrt{8}\right) \simeq 10'5558$, y el área del mismo, $2\sqrt{3} \simeq 3'4641$. La elección de los parámetros α, β y γ no es única; otra posible elección es $D = (0,1,0)$, y existen otras posibilidades más (¿cuáles?). No obstante, el perímetro y el área del paralelogramo resultante son los mismos en todos los casos.

8.26. $t : \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t : \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$

8.27. $r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow r : x - 2 = -\dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z+1}{3}.$

8.28. Sí. Basta tener en cuenta que las ecuaciones de s', recta reflejada de s respecto al plano π, son $s' : \begin{cases} x = -5 - \lambda \\ y = -10 - 5\lambda \\ z = 21 + 10\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow s' : -x - 5 = -\dfrac{y+10}{5} = \dfrac{z-21}{10}$ y que el punto $B = (-3, 0, 1) \in s'$.

9 Cónicas

9.1. Introducción

El presente capítulo está dedicado a las *cónicas*: *circunferencias*, *elipses*, *hipérbolas* y *parábolas*. Estas curvas tienen multitud de aplicaciones en campos tan diversos como la óptica, las antenas parabólicas o el movimiento de los planetas.

Se comienza haciendo una descripción geométrica de las cónicas, como ya hacían en la antigua Grecia sobre el año 350 a.C., como la intersección de planos con *superficies cónicas*.

A continuación se presentan las ecuaciones de cada una de las cónicas y se estudian sus principales elementos geométricos (*focos*, *centros*, *vértices* ...) y características.

Se muestra también, para cada una de ellas, cómo se calculan sus *rectas tangentes* y *normales*, y se incluyen ejemplos ilustrativos.

9.2. Descripción geométrica de las cónicas

Definición 9.1 Una *superficie cónica* es la superficie de revolución que se genera al girar una recta (llamada *generatriz*) sobre otra recta (llamada *eje de revolución*), manteniendo fijo el punto de corte (llamado *vértice*) y el ángulo que forman (véase la Figura 9.1). □

Definición 9.2 Se llama *cónicas* a las curvas que se obtienen como intersección al cortar una superficie cónica con un plano que no pasa por su vértice. □

Si α es el ángulo que forma el eje de revolución con la generatriz, dependiendo de la posición relativa del plano con respecto a la superficie cónica, las cónicas se pueden clasificar en cuatro tipos: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola:

a) Una *circunferencia* es la curva que se obtiene al cortar una superficie con un plano que forma con el eje de revolución un ángulo $\beta = \frac{\pi}{2}$ (es decir, con un plano perpendicular al eje de revolución) (véase la Figura 9.2(a)).

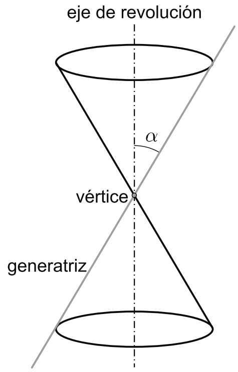
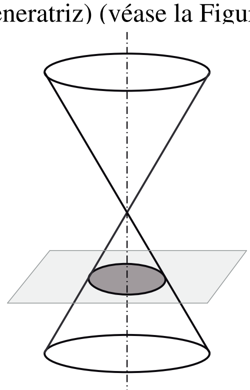


Figura 9.1: Superficie cónica.

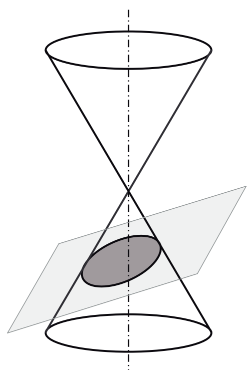
b) Una *elipse* es la curva que se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano que forma con el eje de revolución un ángulo $\beta \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ (es decir, con un plano que no es paralelo a ninguna generatriz) (véase la Figura 9.2(b)). Se puede considerar la circunferencia un tipo particular de elipse, en cuyo caso $\beta \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Una *hipérbola* es la curva que se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano que forma con el eje de revolución un ángulo $\beta \in [0, \alpha)$ (es decir, con un plano paralelo a dos generatrices) (véase la Figura 9.3(a)).

d) Una *parábola* es la curva que se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano que forma con el eje de revolución un ángulo $\beta = \alpha$ (es decir, con un plano paralelo a una sola generatriz) (véase la Figura 9.3(b)).



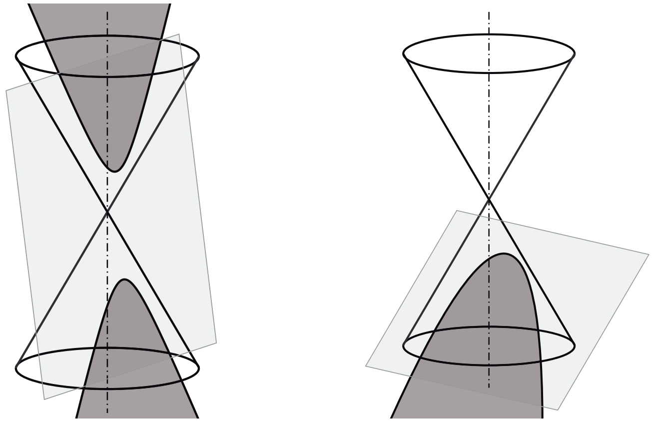
(a) Circunferencia.



(b) Elipse.

Figura 9.2: Secciones de una superficie cónica.

En las siguientes secciones daremos otras definiciones equivalentes y obtendremos las ecuaciones de cada cónica, así como algunas características de cada una. En particular es-



(a) Hipérbola. (b) Parábola.

Figura 9.3: Secciones de una superficie cónica.

tudiaremos su *excentricidad* ε, que es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia, cuya excentricidad es $\varepsilon = 0$.

En lo que sigue, utilizaremos con bastante frecuencia la distancia entre dos puntos del plano (véase la Sección 8.3.1.): la distancia de un punto $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ a otro $B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ es

$$d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

9.3. Ecuaciones de la circunferencia

Definición 9.3 Una *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo (llamado *centro*) una cantidad constante (llamada *radio*). □

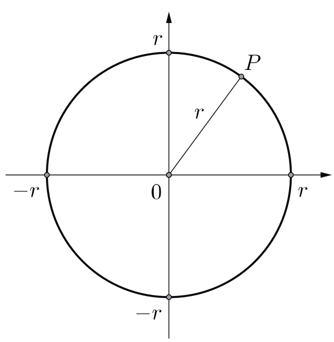


Figura 9.4: Circunferencia con centro $O = (0, 0)$ y radio r.

Consideremos una circunferencia $\mathbf{C}$ del plano con centro en el origen de coordenadas $O = (0, 0)$ y tomemos como radio r la distancia de cualquier punto $P = (x, y)$ de la circunferencia al centro (véase la Figura 9.4). De esta forma, de acuerdo con la Definición 9.3, debe cumplirse que

$$P \in \mathbf{C} \ \Leftrightarrow \ d(P, O) = r \ \Leftrightarrow \ \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Elevando al cuadrado, se obtiene la *ecuación reducida de la circunferencia*

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2.}$$

Ejemplo 9.1 La ecuación reducida de una circunferencia $\mathbf{C}$ de radio 3 es

$$x^2 + y^2 = 9.$$

La ecuación anterior nos permite obtener puntos que pertenecen a la circunferencia. Por ejemplo, si $x = 2$:

$$4 + y^2 = 9 \ \Rightarrow \ y = \pm\sqrt{5} \ \Rightarrow \ (2, -\sqrt{5}) \in \mathbf{C} \ \text{ y } \ (2, \sqrt{5}) \in \mathbf{C}.$$

En cambio, si $x = 4$:

$$16 + y^2 = 9 \ \Rightarrow \ y^2 = -7 \ \Rightarrow \ \text{ no hay puntos de } \mathbf{C} \text{ con } x = 4. \quad \square$$

Definición 9.4 El *diámetro de una circunferencia* es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro de la circunferencia (su longitud es, por tanto, el doble de la longitud del radio). $\square$

En general, si la circunferencia $\mathbf{C}$ tiene centro en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y radio $r > 0$, se verifica que

$$P \in \mathbf{C} \ \Leftrightarrow \ d((x, y), (x_0, y_0)) = r \ \Leftrightarrow \ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r,$$

de donde, elevando al cuadrado, se obtiene la *ecuación general de la circunferencia*

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.} \tag{9.1}$$

Ejemplo 9.2 La ecuación de la circunferencia de centro $(2, 3)$ y radio 1 es

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

(véase la Figura 9.5). $\square$

Observación 9.1 Dado un punto $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, veamos cómo calcular la *recta normal* (es decir, perpendicular) a la circunferencia (9.1) en el punto P. Distinguimos dos casos:

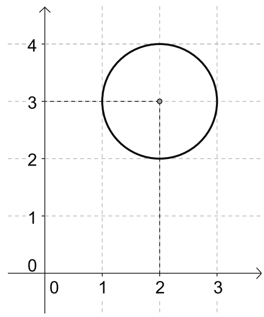


Figura 9.5: Circunferencia $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$.

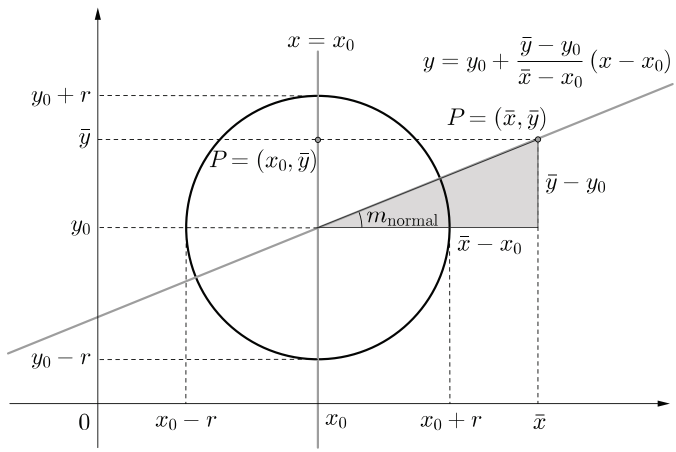


Figura 9.6: Rectas normales a una circunferencia.

a) Si $\bar{x} = x_0$, la recta normal a la circunferencia en el punto P es $x = x_0$ (véase la Figura 9.6).

b) Si $\bar{x} \neq x_0$, la recta normal a la circunferencia que pasa por P tiene como pendiente

$$m_{\text{normal}} = \frac{\bar{y} - y_0}{\bar{x} - x_0}$$

(véase, de nuevo, la Figura 9.6), por lo que, aplicando la ecuación punto–pendiente de una recta (véase (6.4)), se tiene que su ecuación es

$$y - \bar{y} = \frac{\bar{y} - y_0}{\bar{x} - x_0}(x - \bar{x}).$$

Nótese que la recta normal a la circunferencia que pasa por P es la recta que pasa por P y el centro de la circunferencia (x_0, y_0). $\square$

Ejemplo 9.3 La recta normal a la circunferencia

$$x^2 + (y + 2)^2 = 4$$

que pasa por el punto $(1, 2)$ es

$$y - 2 = \frac{2 - (-2)}{1 - 0}\,(x - 1) = 4(x - 1),$$

es decir,

$$y = 4x - 2$$

(véase la Figura 9.7). □

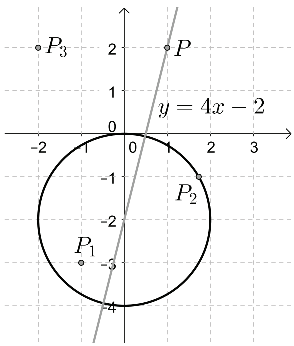


Figura 9.7: Recta normal a la circunferencia $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ en el punto $P = (1, 2)$.

Observación 9.2 Sea $\mathbf{C}$ la circunferencia de ecuación (9.1) y $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Si } (\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2 \begin{cases} < r^2 & \Rightarrow \quad P \text{ está en el interior de la circunferencia } \mathbf{C} \\ = r^2 & \Rightarrow \quad P \in \mathbf{C} \\ > r^2 & \Rightarrow \quad P \text{ está en el exterior de la circunferencia } \mathbf{C}. \end{cases}$$ □

Ejemplo 9.4 Si consideramos la circunferencia $x^2 + (y + 2)^2 = 4$, se verifica que el punto $P_1 = (-1, -3)$ está en el interior de la circunferencia, pues

$$(-1)^2 + (-3 + 2)^2 = 1 + 1 = 2 < 4,$$

el punto $P_2 = (\sqrt{3}, -1)$ pertenece a la circunferencia, dado que

$$(\sqrt{3})^2 + (-1 + 2)^2 = 3 + 1 = 4,$$

y el punto $P_3 = (-2, 2)$ está en el exterior de la circunferencia, ya que

$$(-2)^2 + (2 + 2)^2 = 4 + 16 = 20 > 4$$

(véase, nuevamente, la Figura 9.7). □

Definición 9.5 Una *recta tangente a una cónica* es una recta que corta a la cónica en un único punto, excluyendo, en el caso de la parábola, las rectas paralelas a la recta que une el vértice con el foco de la parábola. El punto donde se cortan la recta y la cónica se denomina *punto de tangencia*. $\square$

Observación 9.3 En la Observación 13.4 se verá la noción general de *tangente a una curva* utilizando el concepto de derivada de una función. $\square$

Observación 9.4 Dado un punto $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, veamos cómo calcular las *rectas tangentes* (si existen) a la circunferencia (9.1) que pasan por P. Pueden presentarse tres casos:

a) Si el punto P está en el interior de la circunferencia, no existe ninguna recta tangente a la circunferencia que pase por P.

b) Si el punto P está en la circunferencia, entonces hay una única recta tangente a la circunferencia que pasa por P, que, de acuerdo con el Corolario 7.4, es la recta que pasa por P con pendiente perpendicular al radio que pasa por P (véase la Figura 9.8). Además, en el caso particular de que el punto P sea $P = (x_0-r, y_0)$, $P = (x_0+r, y_0)$, $P = (x_0, y_0 - r)$ o $P = (x_0, y_0 + r)$, entonces la recta tangente a la circunferencia que pasa por P es, respectivamente, $x = x_0 - r$, $x = x_0 + r$, $y = y_0 - r$ o $y = y_0 + r$ (véase, de nuevo, la Figura 9.8).

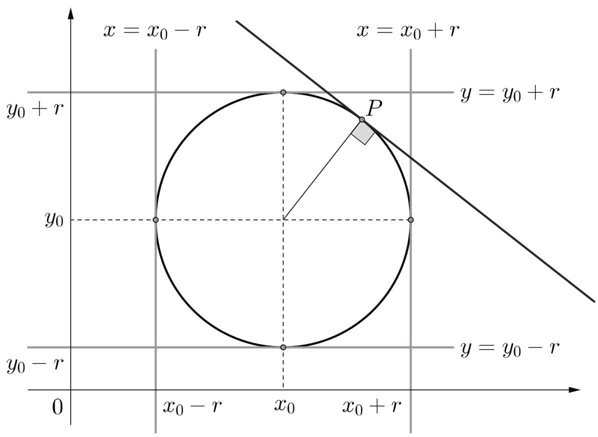


Figura 9.8: Rectas tangentes a una circunferencia en P, $(x_0 \pm r, y_0)$ y $(x_0, y_0 \pm r)$.

Si $\bar{y} \neq y_0$, utilizando que el radio que pasa por P tiene la pendiente de la recta normal m_{normal} que pasa por P (calculada en la Observación 9.1) y, puesto que la pendiente m_{tangente} de la recta tangente debe cumplir que

$$m_{\text{normal}} m_{\text{tangente}} = -1$$

(véase la Observación 8.8), se verifica que

$$m_{\text{tangente}} = -\frac{\bar{x} - x_0}{\bar{y} - y_0},$$

por lo que, aplicando la ecuación punto–pendiente de una recta (véase (6.4)), se tiene que la ecuación de la recta tangente buscada es

$$y - \bar{y} = -\frac{\bar{x} - x_0}{\bar{y} - y_0}\,(x - \bar{x}). \tag{9.2}$$

c) Si el punto P está en el exterior de la circunferencia, hay dos rectas tangentes a la circunferencia que pasan por P. El proceso para calcularlas consiste en hallar las rectas que pasan por el punto P y distan del centro un valor igual al radio (véase Figura 9.9). □

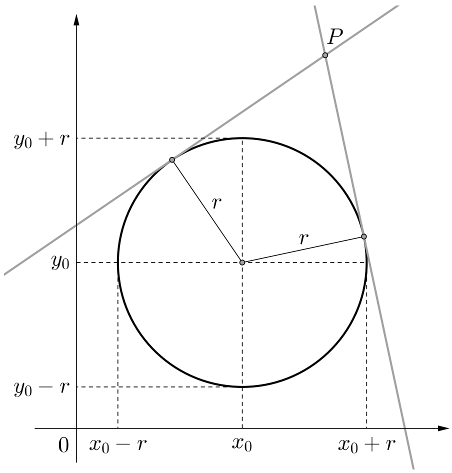


Figura 9.9: Rectas tangentes a una circunferencia en un punto P.

Ejemplo 9.5 Para hallar las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + (y+2)^2 = 4$ que pasan por los puntos $P_1 = (0, -1)$, $P_2 = (-\sqrt{3}, -1)$ y $P_3 = (1, 2)$, tenemos en cuenta lo siguiente:

a) El punto P_1 está en el interior de la circunferencia, pues $0^2 + (-1+2)^2 = 1 < 4$. Por tanto, no existen tangentes a la circunferencia que pasen por ese punto.

b) El punto P_2 pertenece a la circunferencia, pues $(-\sqrt{3})^2 + (-1+2)^2 = 4$. Entonces, por (9.2), la recta tangente a la circunferencia que pasa por ese punto es

$$y + 1 = -\frac{-\sqrt{3} - 0}{-1 - (-2)}\,(x - (-\sqrt{3})) = \sqrt{3}\,(x + \sqrt{3}),$$

es decir,

$$y = \sqrt{3}\,x + 2.$$

c) El punto P_3 está en el exterior de la circunferencia, pues $1^2 + (2+2)^2 = 17 > 4$. Entonces hay dos rectas tangentes a la circunferencia que pasan por ese punto y para calcularlas, siguiendo las indicaciones de la Observación 9.4, vamos a hallar las rectas que pasan por el punto $(1, 2)$ que están a una distancia de dos unidades del centro. Las rectas que pasan por el punto $(1, 2)$ son de la forma

$$\begin{cases} x = 1 & \text{con pendiente infinita} \\ y - 2 = m(x-1) & \text{con pendiente } m \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Como se vio en la Sección 8.3.3., la distancia en el plano de un punto $A = (x, y)$ a la recta s de ecuación $ax + by + c = 0$ viene dada por

$$d(A, s) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Por tanto, como la distancia del centro de la circunferencia $(0, -2)$ a la recta $x = 1$ es

$$\frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 1 \neq 2,$$

se tiene que $x = 1$ no es una recta tangente. Por otro lado, la distancia del centro de la circunferencia $(0, -2)$ a la recta de ecuación $y - 2 = m(x-1)$ (o, equivalentemente, $-mx + y + m - 2 = 0$) es

$$\frac{|0 - 2 + m - 2|}{\sqrt{(-m)^2 + 1^2}} = \frac{|m - 4|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Como queremos que esta distancia sea igual a 2, la pendiente m debe cumplir

$$\frac{|m - 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2.$$

Elevando al cuadrado y operando, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{(m-4)^2}{m^2+1} = 4 \Leftrightarrow\ m^2 - 8m + 16 = 4(m^2+1)\ &\Leftrightarrow\ 3m^2 + 8m - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\ m = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 144}}{6} &= \frac{-8 \pm \sqrt{208}}{6} \\ = \frac{-8 \pm 4\sqrt{13}}{6} &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{3}. \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones de las rectas tangentes buscadas son

$$y - 2 = -\frac{4 + 2\sqrt{13}}{3}(x - 1) \ \text{ e } \ y - 2 = \frac{-4 + 2\sqrt{13}}{3}(x - 1).$$

En la Figura 9.10 se muestran la circunferencia $x^2 + (y + 2)^2 = 4$, los puntos P_1, P_2 y P_3 y las tangentes a esta circunferencia que pasan por dichos puntos. □

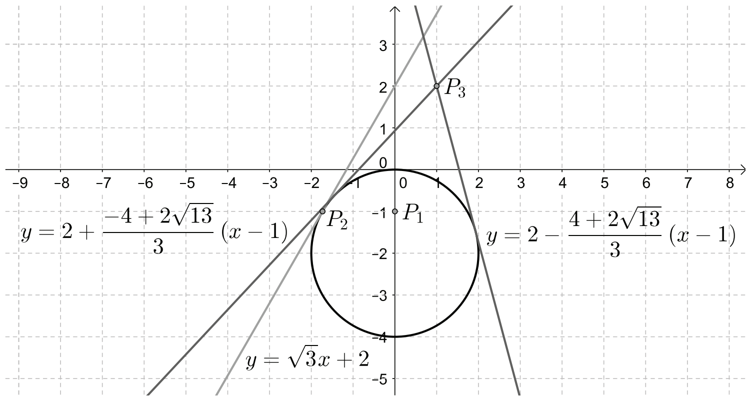


Figura 9.10: Tangentes a la circunferencia $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ en los puntos P_1, P_2 y P_3.

Dados una circunferencia **C** y un valor $m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ arbitrario, siempre existen dos rectas tangentes a **C** con pendiente m. Además, si (9.1) es la ecuación de **C**, entonces las dos rectas tangentes a **C** con pendiente 0 (rectas horizontales) son $y = y_0 - r$ e $y = y_0 + r$, mientras que las dos rectas tangentes a **C** con pendiente ∞ (rectas verticales) son $x = x_0 - r$ y $x = x_0 + r$ (véase la Figura 9.8). Veamos un ejemplo:

Ejemplo 9.6 Consideremos la circunferencia **C** de ecuación

$$x^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Las dos rectas tangentes a **C** con pendiente 0 son $y = -4$ e $y = 0$ y las dos rectas verticales tangentes a **C** son $x = -2$ y $x = 2$. Veamos cómo buscar las rectas paralelas a la recta

$$y = 2x + 1$$

que son tangentes a **C**. Como dos rectas son paralelas si, y sólo si, tienen la misma pendiente, las rectas paralelas a la recta $y = 2x + 1$ tienen pendiente 2 y, por tanto, son de la forma

$$y = 2x + k$$

con $k \in \mathbb{R}$. Como las rectas buscadas son las que intersecan a la circunferencia **C** en un solo punto, hay que determinar el valor de k para el cual el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 = 4 \\ y = 2x + k \end{cases}$$

tenga una única solución $(x, y) \in \mathbf{C}$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera, se tiene

$$\begin{aligned} x^2 + (2x + k + 2)^2 = 4 &\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 + 4kx + k^2 + 8x + 4k + 4 = 4 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 + 4(k + 2)x + k(k + 4) = 0. \end{aligned}$$

Para que esta ecuación de segundo grado en x tenga una única solución, debe cumplirse que su discriminante sea cero. Es decir,

$$\begin{aligned} &16(k + 2)^2 - 4 \times 5 \times k(k + 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4(k + 2)^2 - 5k(k + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; 4k^2 + 16k + 16 - 5k^2 - 20k = 0 \;\Leftrightarrow\; k^2 + 4k - 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow\; k = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 64}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Por tanto, las dos rectas tangentes a $\mathbf{C}$ buscadas son

$$y = 2x - 2 - 2\sqrt{5} = 2(x - 1 - \sqrt{5}) \text{ e } y = 2x - 2 + 2\sqrt{5} = 2(x - 1 + \sqrt{5})$$

(véase la Figura 9.11). □

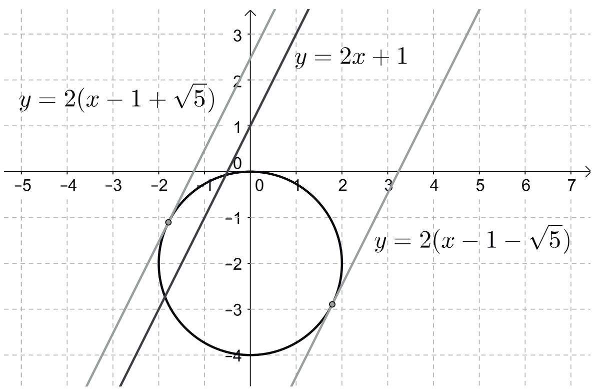


Figura 9.11: Tangentes a la circunferencia $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ paralelas a la recta $y = 2x + 1$.

9.4. Ecuaciones de la elipse

Definición 9.6 Una *elipse* es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados *focos*) es constante. □

Consideremos una elipse $\mathbf{E}$ del plano de forma que el eje de abscisas sea el eje que une los focos y el eje de ordenadas sea la *mediatriz* del segmento que une los focos (es decir, la recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio). De esta forma, los focos estarán situados en los puntos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ con $c > 0$ y vamos a suponer que la suma de las distancias a los focos desde cualquier punto $P = (x, y) \in \mathbf{E}$ es $2a$ con $a > 0$ (véase la Figura 9.12).

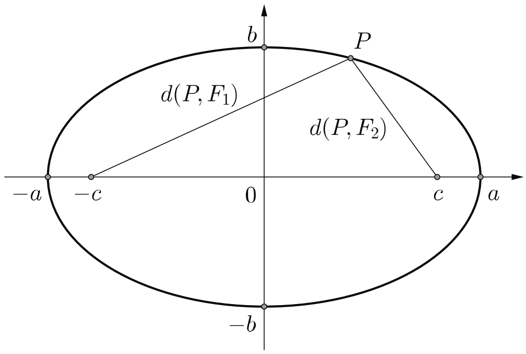


Figura 9.12: Elipse con focos en $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$.

Así, de acuerdo con la Definición 9.6, debe cumplirse que

$$\begin{aligned} P \in \mathbf{E} &\Leftrightarrow\ d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\ &\Leftrightarrow\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y operando, se obtiene que

$$\begin{aligned} &(x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y^2} \\ &\Leftrightarrow\ \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} \\ &\Leftrightarrow\ \cancel{4}cx - \cancel{4}a^2 = -\cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Volviendo a elevar al cuadrado, se deduce que

$$\begin{aligned} &c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\big((x-c)^2 + y^2\big) \\ &\Leftrightarrow\ c^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 \\ &\Leftrightarrow\ a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 \\ &\Leftrightarrow\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Entonces, denotando $b^2 = a^2 - c^2$ con $b > 0$ (véase la interpretación geométrica de b en la Figura 9.13), se tiene que

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

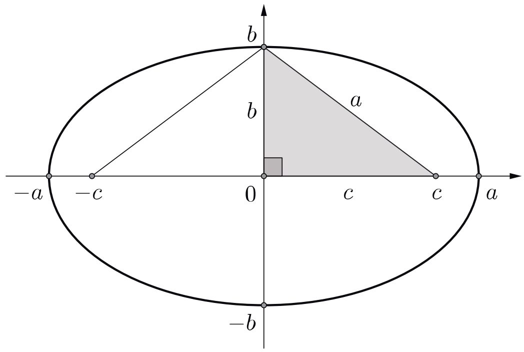


Figura 9.13: Por el *teorema de Pitágoras* (véase el Teorema 7.3) $a^2 = b^2 + c^2$.

de donde, dividiendo por a^2b^2, se obtiene la *ecuación reducida de la elipse*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{9.3}$$

Para hallar los puntos de corte de la elipse con los ejes de coordenadas (véase la Figura 9.13) hacemos:

a) $y = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \;\Rightarrow\; x = \pm a$. Luego la elipse corta al eje de abscisas en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.

b) $x = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; y = \pm b$. Por tanto, la elipse corta al eje de ordenadas en los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$.

Observación 9.5 Si los focos hubieran estado situados en el eje de ordenadas en los puntos $F_1 = (0, -c)$ y $F_2 = (0, c)$ con $c > 0$ y hubiéramos supuesto que la suma de la distancia a los focos desde cualquier punto $(x, y) \in \mathbf{E}$ es $2b$ con $b > 0$, argumentando como en el caso anterior, se tendría

$$\begin{aligned}
P \in \mathbf{E} &\Leftrightarrow\; d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2b \\
&\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2 + (y + c)^2} + \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = 2b \\
&\Leftrightarrow\; \cdots \\
&\Leftrightarrow\; b^2x^2 + (b^2 - c^2)y^2 = (b^2 - c^2)b^2,
\end{aligned}$$

por lo que, si denotamos $a^2 = b^2 - c^2$ con $a > 0$ (véase la interpretación geométrica de a en la Figura 9.14), se tiene que

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

de donde se vuelve a obtener la ecuación (9.3). $\square$

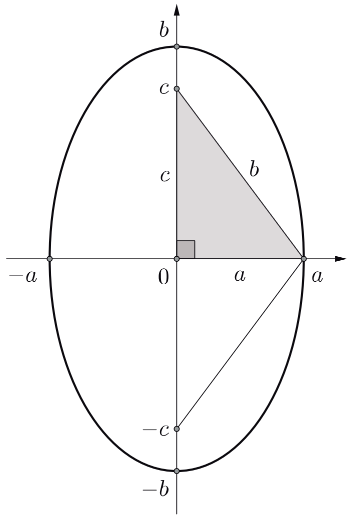


Figura 9.14: Por el *teorema de Pitágoras* (véase el Teorema 7.3) $b^2 = a^2 + c^2$.

Definición 9.7

a) Dos puntos de la elipse son *puntos diametralmente opuestos* de la elipse si son la intersección de la elipse con la recta que pasa por uno de estos puntos y por el centro de la elipse.

   i) El *eje mayor* de una elipse es el segmento más grande que puede formarse con puntos diametralmente opuestos de la elipse. Es el “diámetro” de la elipse más grande.

   ii) El *eje menor* de una elipse es el segmento más pequeño que puede formarse con puntos diametralmente opuestos de la elipse. Es el “diámetro” de la elipse más pequeño.

b) La *distancia focal* es la distancia que hay entre los focos de la elipse. La *semidistancia focal* es la mitad de la distancia focal (coincide, por tanto, con la longitud del segmento que va del centro de la elipse a uno de sus focos). □

Observación 9.6 Considerando la ecuación reducida de la elipse (9.3) con $a, b > 0$, pueden presentarse tres casos (véase la Figura 9.15):

1) $\boxed{a > b.}$ En este caso los focos están sobre el eje de abscisas, el eje mayor es el segmento que une los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ y el eje menor es el segmento que une los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$. Nótese que los ejes mayor y menor son perpendiculares, el eje mayor tiene longitud $2a$ y el eje menor tiene longitud $2b$.

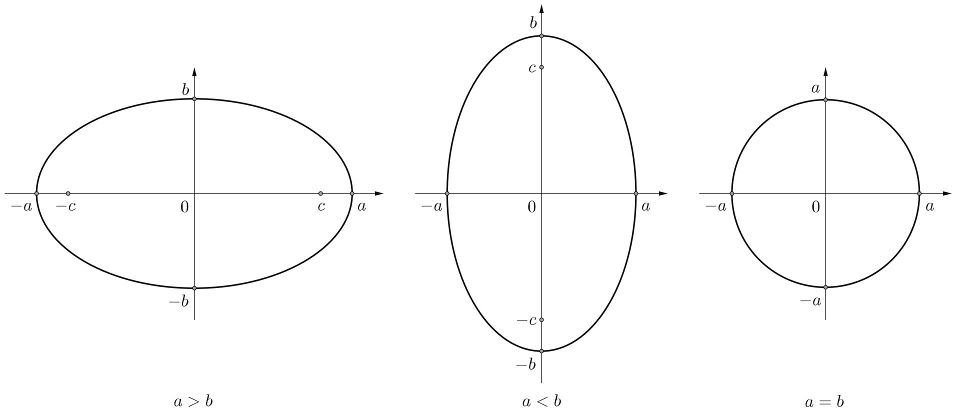


Figura 9.15: Elipses en función de la relación entre a y b.

2) $\boxed{a < b.}$ En este caso los focos están sobre el eje de ordenadas, el eje mayor es el segmento que une los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ y el eje menor es el segmento que une los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Nótese que los ejes mayor y menor son perpendiculares, el eje mayor tiene longitud $2b$ y el eje menor tiene longitud $2a$.

3) $\boxed{a = b.}$ En esta situación se tiene una circunferencia de ecuación reducida

$$x^2 + y^2 = a^2$$

y los focos coinciden con el centro $O = (0, 0)$ de la circunferencia. Nótese que una circunferencia es un caso especial de elipse en la cual los ejes mayor y menor tienen la misma longitud $2a$ y coinciden con cualquier diámetro de la circunferencia. □

Ejemplo 9.7 Hallemos la ecuación reducida de una elipse **E** cuyos focos se encuentran en los puntos $F_1 = (-3, 0)$ y $F_2 = (3, 0)$ y la suma de distancias de sus puntos a los focos es 8. Puesto que la longitud del eje mayor es 8, se tiene que

$$2a = 8 \;\Rightarrow\; a = 4.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que $c = 3$, se deduce que

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7.$$

Por tanto, la ecuación reducida de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1.$$

A partir de la ecuación anterior, podemos obtener puntos pertenecientes a la elipse. Por ejemplo, si $x = 2$:

$$\frac{1}{4}+\frac{y^2}{7} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{7} = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow \left(2, -\frac{\sqrt{21}}{2}\right) \in \mathbf{E} \text{ y } \left(2, \frac{\sqrt{21}}{2}\right) \in \mathbf{E}.$$

En cambio, si $x = 5$:

$$\frac{25}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \;\Rightarrow\; y^2 = -\frac{63}{16} \;\Rightarrow\; \text{no hay puntos de } \mathbf{E} \text{ con } x = 5.$$

Sus puntos de corte con los ejes coordenados, tal y como se ha visto, son $(-4, 0)$, $(4, 0)$, $(0, -\sqrt{7})$ y $(0, \sqrt{7})$ (véase la Figura 9.16). □

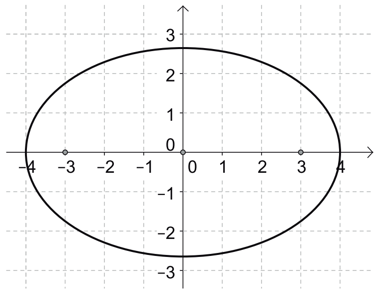


Figura 9.16: Elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$.

Definición 9.8 La *excentricidad de una elipse* de ecuación reducida (9.3) con $a, b > 0$ es el cociente entre la semidistancia focal y su semieje mayor, es decir,

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{c}{a} & \text{si } a > b \text{ (el eje mayor es paralelo al eje de abscisas)} \\[2ex] \dfrac{c}{b} & \text{si } a < b \text{ (el eje mayor es paralelo al eje de ordenadas).} \end{cases} \quad \square$$

Observación 9.7

a) Teniendo en cuenta que

$$c = \begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} & \text{si } a > b \\[2ex] \sqrt{b^2 - a^2} & \text{si } a < b, \end{cases}$$

podemos expresar la excentricidad de la elipse como

$$\varepsilon = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} & \text{si } a > b \\[2ex] \sqrt{\dfrac{b^2 - a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{b^2}} & \text{si } a < b, \end{cases}$$

es decir,

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{(\text{mín}\{a,b\})^2}{(\text{máx}\{a,b\})^2}}, \tag{9.4}$$

siendo

$$\text{mín}\{a,b\} = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \end{cases} \quad \text{y} \quad \text{máx}\{a,b\} = \begin{cases} b & \text{si } a \leq b \\ a & \text{si } a > b. \end{cases}$$

b) De (9.4) se deduce que la excentricidad de una elipse es un valor $\varepsilon \in [0,1)$ (el caso $\varepsilon = 0$ se corresponde con una circunferencia, como caso particular de una elipse en la que $a = b$ y $c = 0$). La excentricidad indica la forma que tiene una elipse, en el sentido de que ésta será tanto más "redondeada" cuanto más se aproxime su excentricidad al valor cero y será tanto más "achatada" cuanto más se aproxime ε a 1 (véase la Figura 9.17). □

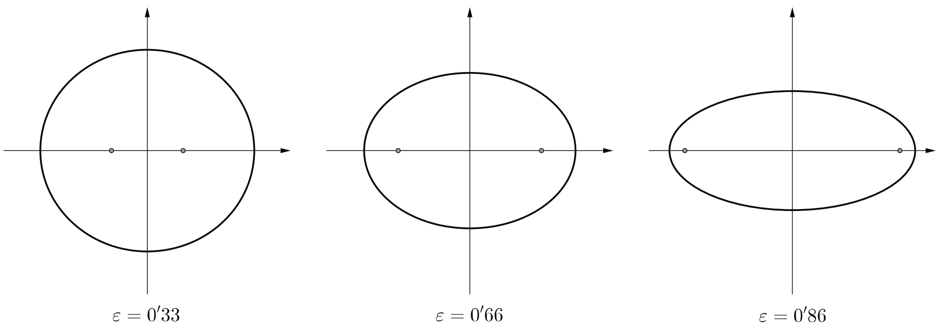


Figura 9.17: Elipses con distintas excentricidades.

Ejemplo 9.8 Determinemos la ecuación reducida de una elipse sabiendo que su distancia focal es 16 y su excentricidad $\varepsilon = \frac{4}{5}$. De los datos anteriores se deduce:

$$\begin{cases} 2c = 16 & \Rightarrow \quad c = 8 \\ \dfrac{4}{5} = \varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{8}{a} & \Rightarrow \quad 4a = 40 \Rightarrow a = 10 \\ b^2 = a^2 - c^2 = 100 - 64 = 36 & \Rightarrow \quad b = 6. \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación reducida de esta elipse es

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

(véase la Figura 9.18). □

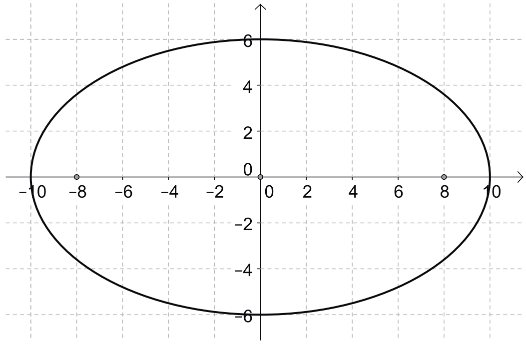


Figura 9.18: Elipse $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1.$

Si la elipse **E** no está centrada en el punto $(0, 0)$ sino en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y los ejes mayor y menor son paralelos a los ejes de coordenadas, utilizando de nuevo la Definición 9.6, se puede obtener la *ecuación general de una elipse con ejes paralelos a los ejes de coordenadas*

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.} \tag{9.5}$$

Observación 9.8 Nótese que la elipse (9.5) es una traslación de la elipse (9.3), por lo que el centro $(0, 0)$ se transforma en el punto (x_0, y_0) y los focos de la elipse (9.3) pasan a ser

$$\begin{cases} F_1 = (x_0 - c, y_0) \text{ y } F_2 = (x_0 + c, y_0) \text{ si } a > b \\ F_1 = (x_0, y_0 - c) \text{ y } F_2 = (x_0, y_0 + c) \text{ si } a < b \end{cases}$$

en la elipse (9.5). □

Ejemplo 9.9 Para hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $F_1 = (1, 1)$ y $F_2 = (7, 1)$ y cuyo eje mayor tiene una longitud de 10 unidades tenemos en cuenta que el centro (x_0, y_0) de la elipse es el punto medio del segmento que une los focos. Por tanto, viene dado por

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{1+1}{2} \right) = (4, 1)$$

(véase la Observación 6.10). Por otra parte, la distancia focal es

$$2c = 7 - 1 = 6 \Rightarrow c = 3,$$

y, como por hipótesis $2a = 10$, se tiene que

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4.$$

Por tanto, la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$$

y su excentricidad

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$$

(véase la Figura 9.19). $\square$

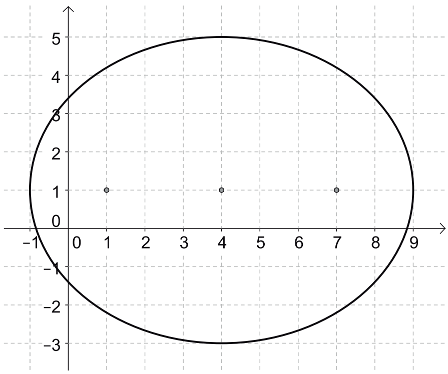


Figura 9.19: Elipse $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1.$

Observación 9.9 Las *ecuaciones paramétricas de una elipse* con centro $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ y semiejes $a>0$ y $b>0$ son

$$\begin{cases} x=x_0+a\cos\alpha \\ y=y_0+b\,\mathrm{sen}\,\alpha, \end{cases}$$

donde el parámetro α toma valores en el intervalo $[0,2\pi)$. Nótese que para cada valor $\alpha\in[0,2\pi)$ se obtiene un punto de la elipse.

En particular, en el caso en que $a=b=r$, las *ecuaciones paramétricas de una circunferencia* con centro en el punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ y radio $r>0$ son

$$\begin{cases} x=x_0+r\cos\alpha \\ y=y_0+r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

con $\alpha\in[0,2\pi)$. $\square$

Observación 9.10 Sea **E** la elipse definida por la ecuación (9.5) y $P=(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{R}^2$.

$$\text{Si } \frac{(\bar{x}-x_0)^2}{a^2}+\frac{(\bar{y}-y_0)^2}{b^2}\begin{cases} <1 \;\Rightarrow\; P \text{ está en el interior de la elipse } \mathbf{E} \\ =1 \;\Rightarrow\; P\in\mathbf{E} \\ >1 \;\Rightarrow\; P \text{ está en el exterior de la elipse } \mathbf{E}. \end{cases}\quad\square$$

Ejemplo 9.10 Si consideramos la elipse

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1,$$

se verifica que el punto $P_1=(2,-2)$ está en el interior de la elipse, pues

$$\frac{(2-3)^2}{9}+\frac{(-2+1)^2}{5}=\frac{1}{9}+\frac{1}{5}=\frac{14}{45}<1,$$

el punto $P_2=(5,\frac{2}{3})$ pertenece a la elipse, dado que

$$\frac{(5-3)^2}{9}+\frac{\left(\frac{2}{3}+1\right)^2}{5}=\frac{4}{9}+\frac{\frac{25}{9}}{5}=\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=1,$$

y el punto $P_3=(3,2)$ está en el exterior de la elipse, ya que

$$\frac{(3-3)^2}{9}+\frac{(2+1)^2}{5}=\frac{9}{5}>1$$

(véase la Figura 9.20). □

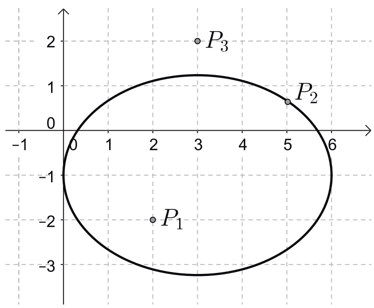


Figura 9.20: Elipse $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{5}=1.$

Observación 9.11 Dado un punto $P=(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{R}^2$, veamos cómo calcular las rectas tangentes (si existen) a la elipse (9.5) que pasan por P. Pueden presentarse tres casos:

a) Si el punto P está en el interior de la elipse, no existe ninguna recta tangente a la elipse que pase por P.

b) Si P pertenece a la elipse, entonces hay una única recta tangente a la elipse que pasa por P. Además, en el caso particular de que $P=(x_0-a,y_0)$, $P=(x_0+a,y_0)$, $P=(x_0,y_0-b)$ o $P=(x_0,y_0+b)$, entonces la recta tangente a la elipse que pasa por P es, respectivamente, $x=x_0-a$, $x=x_0+a$, $y=y_0-b$ o $y=y_0+b$ (véase la Figura 9.21).

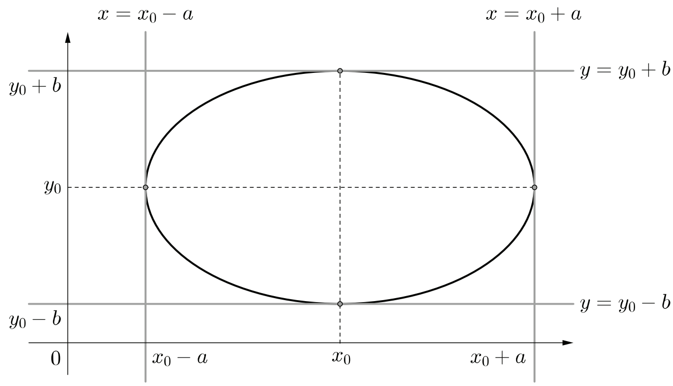


Figura 9.21: Rectas tangentes a una elipse en los puntos $(x_0 \pm a, y_0)$ y $(x_0, y_0 \pm b)$.

c) Si el punto P está en el exterior de la elipse, hay dos rectas tangentes a la elipse que pasan por P. Además, si $\bar{x} = x_0 - a$, $\bar{x} = x_0 + a$, $\bar{y} = y_0 - b$ o $\bar{y} = y_0 + b$, entonces una de las dos rectas tangentes a la elipse que pasa por P es, respectivamente, $x = x_0 - a$, $x = x_0 + a$, $y = y_0 - b$ o $y = y_0 + b$ (véase de nuevo la Figura 9.21).

En los dos últimos casos el proceso para calcular las rectas tangentes mencionadas (salvo en los casos de tangentes verticales u horizontales explicados) consiste en hallar las rectas que pasan por el punto P y cortan a la elipse en un único punto (véase la Figura 9.22). $\square$

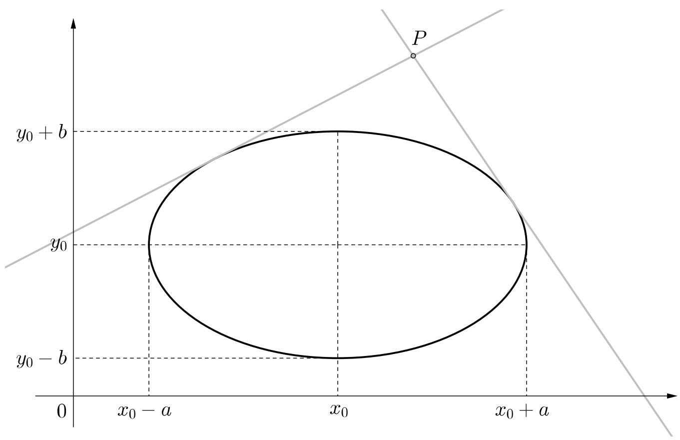


Figura 9.22: Rectas tangentes a una elipse en un punto P.

El cálculo de las rectas tangentes a la elipse que pasan por un punto exterior a ésta es muy engorroso, por lo que nos limitaremos al caso en el que el punto pertenece a la elipse. Además, para mayor sencillez, comenzaremos suponiendo que la elipse está centrada en el origen de coordenadas $(0,0)$. Sea, por tanto, $\mathbf{E}$ la elipse definida por la ecuación (9.3) y $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{E}$, que suponemos no es uno de los puntos con tangente vertical u horizontal vistos en la Observación 9.11 (en esos casos ya sabemos cuáles son las ecuaciones de la recta tangente y no necesitamos hacer los cálculos siguientes). El haz de rectas que pasa por P, en particular la recta tangente a $\mathbf{E}$, es de la forma

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x}),$$

siendo $m \in \mathbb{R}$ la pendiente de la recta (recordamos que estamos suponiendo que P no es uno de los puntos con tangente vertical u horizontal). Los puntos de corte (dos o uno) de estas rectas con la elipse son las soluciones (x, y) del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - \bar{y} = m(x - \bar{x}). \end{cases}$$

Sustituyendo el valor $y = \bar{y} + m(x - \bar{x})$ de la segunda ecuación en la primera, podemos escribir una ecuación en la variable x, dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2 + 2m\bar{y}(x - \bar{x}) + m^2(x - \bar{x})^2}{b^2} = 1.$$

De esta forma, si consideramos el polinomio

$$P(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2 + 2m\bar{y}(x - \bar{x}) + m^2(x - \bar{x})^2}{b^2} - 1, \tag{9.6}$$

se verifica que, salvo para un valor particular de m (el correspondiente a la pendiente de la recta tangente), el polinomio $P(x)$ tiene dos raíces distintas y una de ellas es $\bar{x}$; cuando m es la pendiente de la recta tangente, entonces $\bar{x}$ es la única raíz de $P(x)$ ($\bar{x}$ es una raíz doble). De acuerdo con la Observación 2.12, al dividir $P(x)$ entre el polinomio $Q(x) = x - \bar{x}$, podemos factorizar $P(x)$ en la forma

$$P(x) = C(x)(x - \bar{x}), \tag{9.7}$$

siendo $C(x)$ un polinomio de grado 1, de forma que la otra raíz de $P(x)$ es también raíz de $C(x)$. Además, si m es la pendiente de la recta tangente, entonces $\bar{x}$ también es raíz de $C(x)$ (por ser $\bar{x}$ raíz doble de $P(x)$), por lo que $C(\bar{x}) = 0$.

Para calcular $C(x)$ podemos aplicar la regla de Ruffini mostrada en el Teorema 2.2: desarrollando la expresión del polinomio $P(x)$ definido en (9.6), es inmediato comprobar que podemos escribir este polinomio en la forma

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

siendo

$$\alpha = \frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2},\ \beta = \frac{2m(\bar{y} - m\bar{x})}{b^2} \text{ y } \gamma = \frac{\bar{y}^2 - 2m\bar{x}\bar{y} + m^2\bar{x}^2}{b^2} - 1.$$

Aplicando la regla de Ruffini al dividir $P(x)$ entre $x - \bar{x}$, se obtiene

$$\begin{array}{c|ccc} & \alpha & \beta & \gamma \\ \bar{x} & & \alpha\bar{x} & \beta\bar{x} + \alpha\bar{x}^2 \\ \hline & \alpha & \alpha\bar{x} + \beta & \alpha\bar{x}^2 + \beta\bar{x} + \gamma \end{array},$$

donde, por ser $\bar{x}$ raíz de $P(x)$, se verifica (tal y como se vio en la Proposición 2.1) que

$$\alpha\bar{x}^2 + \beta\bar{x} + \gamma = P(\bar{x}) = 0.$$

Consecuentemente, podemos factorizar $P(x)$ en la forma (9.7), siendo

$$\begin{aligned} C(x) = \alpha x + \alpha\bar{x} + \beta &= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) x + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) \bar{x} + \frac{2m(\bar{y} - m\bar{x})}{b^2} \\ &= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) x + \frac{\bar{x}}{a^2} - \frac{m^2\bar{x}}{b^2} + \frac{2m\bar{y}}{b^2} \\ &= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)(x - \bar{x}) + 2\left(\frac{\bar{x}}{a^2} + \frac{m\bar{y}}{b^2}\right). \end{aligned} \tag{9.8}$$

Observación 9.12 El polinomio $C(x)$ también puede obtenerse mediante ciertas manipulaciones algebraicas. Para ello comenzamos reescribiendo el primer sumando de $P(x)$ en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{(x - \bar{x} + \bar{x})^2}{a^2} = \frac{(x - \bar{x})^2 + 2\bar{x}(x - \bar{x}) + \bar{x}^2}{a^2}. \tag{9.9}$$

Sustituyendo esta expresión en (9.6) y agrupando términos, se tiene que

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(x - \bar{x})^2 + 2\bar{x}(x - \bar{x}) + \bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2 + 2m\bar{y}(x - \bar{x}) + m^2(x - \bar{x})^2}{b^2} - 1 \\ &= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)(x - \bar{x})^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{a^2} + \frac{m\bar{y}}{b^2}\right)(x - \bar{x}) + \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1. \end{aligned}$$

Como $P \in \mathbf{E}$, se verifica que

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

y, por tanto,

$$P(x) = \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)(x - \bar{x}) + 2\left(\frac{\bar{x}}{a^2} + \frac{m\bar{y}}{b^2}\right)\right](x - \bar{x}),$$

con lo que hemos factorizado $P(x)$ en la forma (9.7) para el polinomio $C(x)$ dado en (9.8). $\square$

Una vez obtenido el polinomio $C(x)$, como hemos visto que se verifica que $C(\bar{x}) = 0$, se deduce que

$$\frac{\bar{x}}{a^2} + \frac{m\bar{y}}{b^2} = 0,$$

por lo que la pendiente de la recta tangente buscada es

$$m = -\frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}}$$

y la ecuación de dicha recta tangente es

$$\boxed{y - \bar{y} = -\frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}}\,(x - \bar{x}).} \tag{9.10}$$

Observación 9.13

a) A partir de la ecuación (9.10), teniendo en cuenta que la pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{m}$ (véase la Observación 8.8), se tiene que la ecuación de la *recta normal a la elipse* $\mathbf{E}$ en un punto $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{E}$ es

$$\boxed{y - \bar{y} = \frac{a^2\bar{y}}{b^2\bar{x}}\,(x - \bar{x}).}$$

b) Nótese que de (9.10) se deduce que

$$a^2\bar{y}(y - \bar{y}) = -b^2\bar{x}(x - \bar{x}) \;\Rightarrow\; \frac{\bar{y}(y - \bar{y})}{b^2} + \frac{\bar{x}(x - \bar{x})}{a^2} = 0$$

y, consecuentemente,

$$\frac{\bar{y}y - \bar{y}^2}{b^2} + \frac{\bar{x}x - \bar{x}^2}{a^2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\bar{x}x}{a^2} + \frac{\bar{y}y}{b^2} - \left(\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2}\right) = 0.$$

Ahora, utilizando que $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{E}$, se verifica que

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

y, por tanto, otra forma de expresar las ecuaciones de la recta tangente a $\mathbf{E}$ en P es

$$\boxed{\frac{\bar{x}x}{a^2} + \frac{\bar{y}y}{b^2} = 1.}$$

Ejemplo 9.11 Consideremos la elipse $\mathbf{E}$ de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

contemplada en el Ejemplo 9.8 y el punto $P = (8, \frac{18}{5}) \in \mathbf{E}$. La ecuación de la recta tangente a $\mathbf{E}$ en P es

$$y - \frac{18}{5} = -\frac{36 \times 8}{100 \times \frac{18}{5}} (x - 8) \Rightarrow y = \frac{18}{5} - \frac{4}{5} (x - 8)$$

y la ecuación de la recta normal a $\mathbf{E}$ en el punto P es

$$y = \frac{18}{5} + \frac{5}{4} (x - 8)$$

(véase la Figura 9.23). $\square$

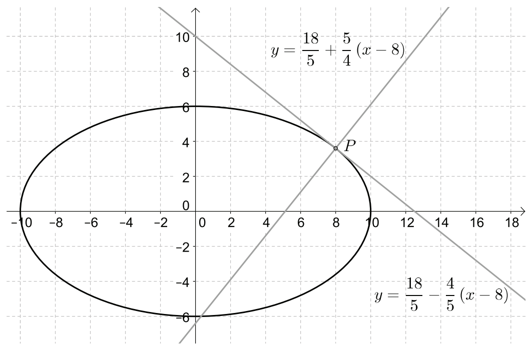


Figura 9.23: Rectas tangente y normal a la elipse $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ en el punto $P = (8, \frac{18}{5})$.

Observación 9.14 Cuando se tiene una elipse no centrada en el origen de coordenadas, los resultados anteriores sobre sus rectas tangentes y normales que pasan por uno de sus puntos se obtienen fácilmente si se piensa en las traslaciones necesarias para pasar de una elipse no centrada en el origen a otra que sí lo está. En particular, si $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{E}$, siendo $\mathbf{E}$ la elipse dada por la ecuación (9.5), se verifica:

a) Si $\bar{x} = x_0 - a$ o $\bar{x} = x_0 + a$, se verifica que $x = x_0 - a$ y $x = x_0 - a$ son, respectivamente, las rectas tangentes a $\mathbf{E}$ en el punto P. Además, $y = y_0$ es, en ambos casos, la recta normal a $\mathbf{E}$ que pasa por P.

b) En otros casos, la recta tangente que pasa por P es la trasladada de la recta tangente a la elipse de ecuación reducida (9.3) que pasa por el punto $\bar{P} = (\bar{x} - x_0, \bar{y} - y_0)$ cuya ecuación es (véase (9.10))

$$y - (\bar{y} - y_0) = -\frac{b^2(\bar{x} - x_0)}{a^2(\bar{y} - y_0)} (x - (\bar{x} - x_0))$$

(nótese que P es el trasladado de $\bar{P}$ por el vector $\overrightarrow{OC}$, siendo O el origen de coordenadas y $C = (x_0, y_0)$ el centro de la elipse). Por tanto, la recta tangente a $\mathbf{E}$ que pasa por P es

$$y - \bar{y} = -\frac{b^2(\bar{x} - x_0)}{a^2(\bar{y} - y_0)}\,(x - \bar{x})$$

y, con el mismo razonamiento, la recta normal a $\mathbf{E}$ que pasa por P es

$$y - \bar{y} = \frac{a^2(\bar{y} - y_0)}{b^2(\bar{x} - x_0)}\,(x - \bar{x}). \quad \square$$

Ejemplo 9.12 Consideremos la elipse $\mathbf{E}$ de ecuación

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1.$$

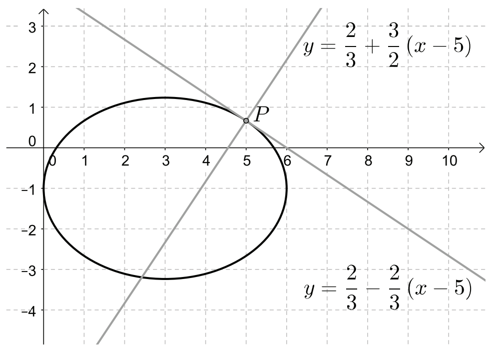


Figura 9.24: Rectas tangente y normal a la elipse $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{5} = 1$ en el punto $P = (5, \frac{2}{3})$.

Tal y como se vio en el Ejemplo 9.10, el punto $P = (5, \frac{2}{3}) \in \mathbf{E}$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente a $\mathbf{E}$ que pasa por P es

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{5(5-3)}{9(\frac{2}{3}+1)}\,(x-5) \;\Rightarrow\; y - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}\,(x-5)$$

y la de la recta normal a $\mathbf{E}$ que pasa por P es

$$y - \frac{2}{3} = \frac{3}{2}\,(x-5)$$

(véase la Figura 9.24). $\square$

Dados una elipse $\mathbf{E}$ y un valor $m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ arbitrario, al igual que vimos que sucedía en el caso de la circunferencia, siempre existen dos rectas tangentes a $\mathbf{E}$ con pendiente m (véase la Figura 9.25). Además, si (9.5) es la ecuación de $\mathbf{E}$, entonces las dos rectas tangentes a $\mathbf{E}$ con pendiente 0 (rectas horizontales) son $y = y_0 - b$ e $y = y_0 + b$, mientras que las dos rectas tangentes a $\mathbf{E}$ con pendiente ∞ (rectas verticales) son $x = x_0 - a$ y $x = x_0 + a$ (véase la Figura 9.21).

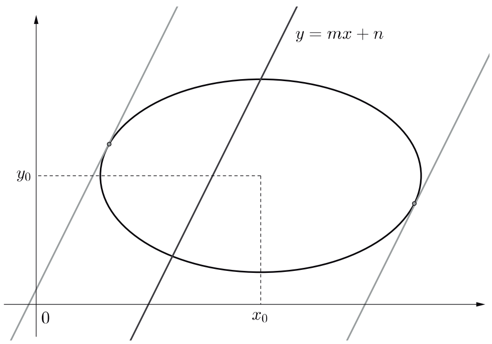


Figura 9.25: Tangentes a la elipse $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ paralelas a la recta $y = mx + n$.

9.5. Ecuaciones de la hipérbola

Definición 9.9 Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de distancias a dos puntos fijos (llamados *focos*) es constante. □

Consideremos una hipérbola $\mathbf{H}$ del plano de forma que el eje de abscisas sea el eje que une los focos y el eje de ordenadas sea la *mediatriz* del segmento que une los focos (es decir, la recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio). De esta forma, los focos estarán situados en los puntos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ con $c > 0$ y vamos a suponer que la diferencia de las distancias a los focos desde cualquier punto $(x, y) \in \mathbf{H}$ es $2a$ con $a > 0$ (véase la Figura 9.26). Así, de acuerdo con la Definición 9.9, debe cumplirse que

$$\begin{aligned} P \in \mathbf{H} \Leftrightarrow\ & |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \\ \Leftrightarrow\ & \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $d(P, F_1) - d(P, F_2) \geq 0$ (pues el caso $d(P, F_1) - d(P, F_2) \leq 0$ se aborda de forma análoga y se llega al mismo resultado). Entonces,

$$P \in \mathbf{H} \ \Leftrightarrow\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

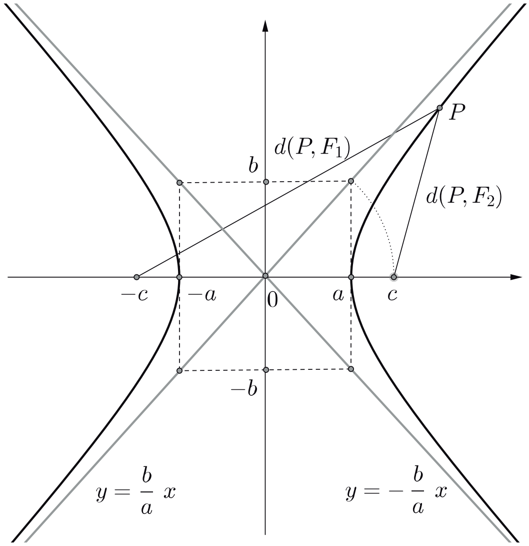


Figura 9.26: Hipérbola con focos en $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$.

Elevando al cuadrado y operando

$$\begin{aligned}
&(x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y^2} \\
&\Leftrightarrow\ \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} \\
&\Leftrightarrow\ \cancel{4}cx - \cancel{4}a^2 = \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Volviendo a elevar al cuadrado, se tiene que

$$\begin{aligned}
&c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\big((x-c)^2 + y^2\big) \\
&\Leftrightarrow\ c^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 \\
&\Leftrightarrow\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).
\end{aligned}$$

De esta forma, denotando $b^2 = c^2 - a^2$ con $b > 0$ (véase la interpretación geométrica de b en la Figura 9.27), se tiene que

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

de donde, dividiendo por a^2b^2, se obtiene la *ecuación reducida de la hipérbola*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{9.11}$$

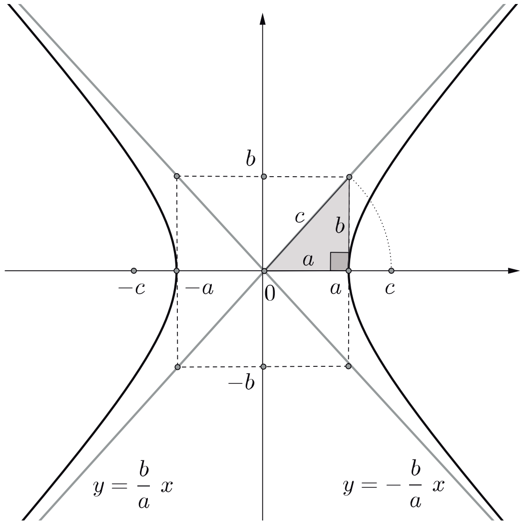


Figura 9.27: Por el *teorema de Pitágoras* (véase el Teorema 7.3) $c^2 = a^2 + b^2$.

Para hallar los puntos de corte de la hipérbola con los ejes de coordenadas (véase la Figura 9.27) hacemos:

a) $y = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \;\Rightarrow\; x = \pm a$. Luego la hipérbola corta al eje de abscisas en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.

b) $x = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{y^2}{b^2} = -1$. Por tanto, la hipérbola no corta al eje de ordenadas.

La hipérbola de ecuación (9.11) tiene dos *asíntotas* dadas por las rectas

$$y = -\frac{b}{a}\,x \ \text{ e } \ y = \frac{b}{a}\,x.$$

Aunque en el Capítulo 11 veremos el significado preciso del concepto de asíntota, de manera informal, una asíntota de la hipérbola (9.11) es una recta a la que “se pega” la hipérbola cuando $x \to \pm\infty$.

Definición 9.10

a) Los *vértices* de una hipérbola son los puntos de corte de la hipérbola con la recta que pasa por los focos.

b) El *centro* de una hipérbola es el punto medio del segmento que une los vértices (o los focos).

c) El *eje mayor* (o *real*) de una hipérbola es el segmento que une los vértices. El centro de la hipérbola es, por tanto, el punto medio del eje mayor.

d) El *eje menor* (o *imaginario*) de una hipérbola es el segmento perpendicular al eje mayor cuyo punto medio es el centro de la hipérbola y cuya longitud es tal que, dividida por la longitud del eje mayor, da el valor absoluto de las pendientes de las asíntotas de la hipérbola. Nótese que no contiene puntos de la hipérbola.

e) La *distancia focal* es la distancia que hay entre los focos de la hipérbola. La *semidistancia focal* es la mitad de la distancia focal (coincide, por tanto, con la longitud del segmento que va del centro de la hipérbola a uno de sus focos). □

Ejemplo 9.13 En una hipérbola de ecuación reducida (9.11), los vértices son los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, el eje mayor es el segmento que une los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ (tiene longitud $2a$) y el eje menor es el segmento que une los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ (tiene longitud $2b$). □

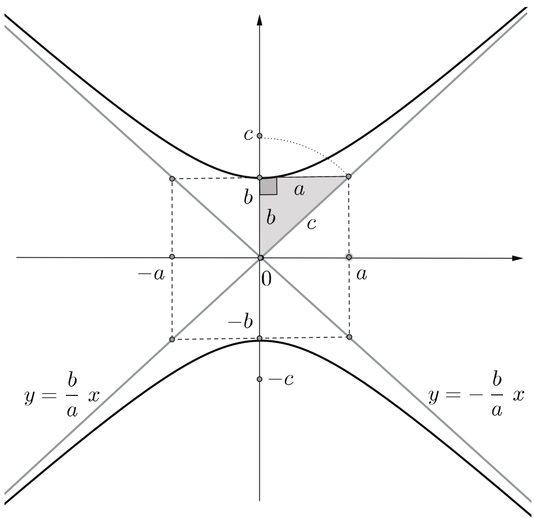


Figura 9.28: Hipérbola con focos en $F_1 = (0, -c)$ y $F_2 = (0, c)$.

Observación 9.15 Cuando los focos están situados en el eje de ordenadas en los puntos $F_1 = (0, -c)$ y $F_2 = (0, c)$ con $c > 0$ y suponemos que la diferencia de las distancias a los focos desde cualquier punto $(x, y) \in \mathbf{H}$ es $2b$ (con $b > 0$), la *ecuación reducida de la hipérbola* que se obtiene es

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.} \tag{9.12}$$

En este caso el eje mayor tiene longitud $2b$, el eje menor tiene longitud $2a$ y las *asíntotas* son las rectas

$$y = -\frac{b}{a}\,x \;\text{ e }\; y = \frac{b}{a}\,x$$

(véase la Figura 9.28). $\square$

Ejemplo 9.14 En una hipérbola de ecuación reducida (9.12), los vértices son los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$, el eje mayor es el segmento que une los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ (tiene longitud $2b$) y el eje menor es el segmento que une los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ (tiene longitud $2a$). $\square$

Ejemplo 9.15 Veamos cómo obtener la ecuación reducida de una hipérbola $\mathbf{H}$ cuyos focos son $F_1 = (-4, 0)$ y $F_2 = (4, 0)$ y la diferencia de distancias de sus puntos a los focos es 6. Como

$$2a = 6 \;\Rightarrow\; a = 3.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que $c = 4$, se obtiene que

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7.$$

Por tanto, la ecuación reducida de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1.$$

A partir de la ecuación anterior podemos obtener puntos de la hipérbola. Por ejemplo, si $x = 4$:

$$\frac{16}{9} - \frac{y^2}{7} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{7} = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9} \;\Rightarrow\; y = \pm\frac{7}{3} \;\Rightarrow\; \left(4, -\frac{7}{3}\right) \in \mathbf{H} \;\text{ y }\; \left(4, \frac{7}{3}\right) \in \mathbf{H}.$$

En cambio, si $x = 2$:

$$\frac{4}{9} - \frac{y^2}{7} = 1 \;\Rightarrow\; y^2 = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9} \;\Rightarrow\; \text{no hay puntos de } \mathbf{H} \text{ con } x = 2.$$

Sus puntos de corte con los ejes coordenados, tal y como se ha visto, son $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ y tiene por asíntotas las rectas

$$y = -\frac{\sqrt{7}}{3}\,x \;\text{ e }\; y = \frac{\sqrt{7}}{3}\,x$$

(véase la Figura 9.29). $\square$

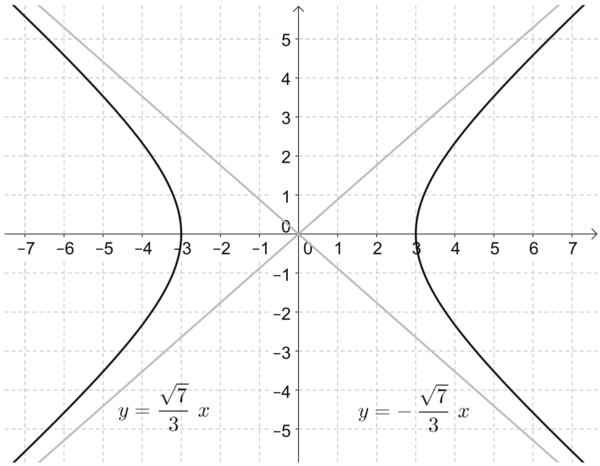


Figura 9.29: Hipérbola $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = 1$.

Definición 9.11 La *excentricidad de una hipérbola* es el cociente entre la semidistancia focal y su semieje mayor, es decir,

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{c}{a} & \text{si la ecuación reducida de la hipérbola es (9.11)} \\ \dfrac{c}{b} & \text{si la ecuación reducida de la hipérbola es (9.12).} \end{cases} \quad \square$$

Observación 9.16

a) Puesto que

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

podemos expresar la excentricidad de la hipérbola como

$$\varepsilon = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} & \text{si la ecuación reducida es (9.11)} \\ \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \dfrac{a^2}{b^2}} & \text{si la ecuación reducida es (9.12).} \end{cases} \tag{9.13}$$

b) De (9.13) se deduce que la excentricidad de una hipérbola es un valor $\varepsilon \in (1, +\infty)$. Al igual que ocurría con la elipse, la excentricidad indica la forma que tiene una hipérbola, en el sentido de que cuanto mayor sea la excentricidad, más abiertas estarán las ramas de la hipérbola. En la Figura 9.30 se muestran varios ejemplos ilustrativos. $\square$

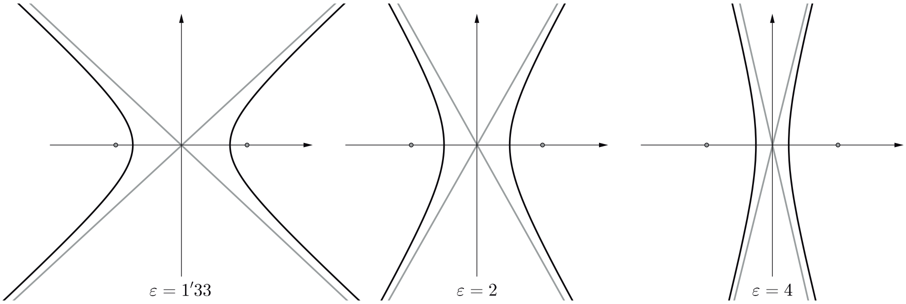


Figura 9.30: Hipérbolas con distintas excentricidades.

Ejemplo 9.16 Determinemos la ecuación reducida de una hipérbola, sabiendo que su distancia focal es 16 y su excentricidad $\varepsilon = 2$. De los datos anteriores se deduce:

$$\begin{cases} 2c = 16 & \Rightarrow \quad c = 8 \\ 2 = \varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{8}{a} & \Rightarrow \quad a = 4 \\ b^2 = c^2 - a^2 = 64 - 16 = 48 & \Rightarrow \quad b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación reducida de esta hipérbola con focos en el eje de abscisas es

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$$

y tiene por asíntotas las rectas

$$y = -\sqrt{3}\,x \ \text{ e } \ y = \sqrt{3}\,x$$

(véase la Figura 9.31). $\square$

Si la hipérbola $\mathbf{H}$ no está centrada en el punto $(0,0)$ sino en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y el segmento que une los focos es paralelo al eje de abscisas, utilizando de nuevo la Definición 9.9, se puede obtener la *ecuación general de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes de coordenadas*

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.} \tag{9.14}$$

Observación 9.17 Nótese que si el segmento que une los focos es paralelo al eje de abscisas, los focos correspondientes a una hipérbola de ecuación (9.14) son los puntos

$$F_1 = (x_0 - c, y_0) \ \text{ y } \ F_2 = (x_0 + c, y_0). \quad \square$$

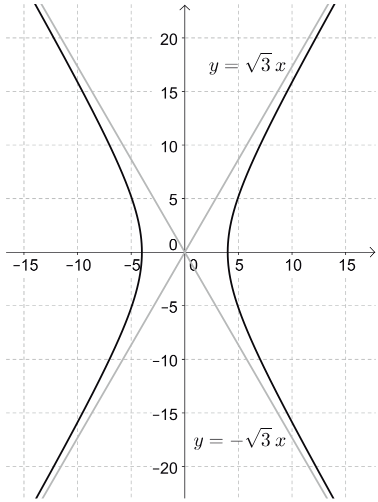


Figura 9.31: Hipérbola $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{48} = 1$.

Observación 9.18 Cuando $a = b$, se dice que la hipérbola es *equilátera*. Su ecuación reducida es

$$x^2 - y^2 = a^2$$

y tiene por asíntotas las rectas $y = -x$ e $y = x$, que son las dos bisectrices de los cuadrantes (nótese que ambas rectas son perpendiculares). Si esta hipérbola se gira un ángulo $\frac{\pi}{4}$ radianes (i.e. $45°$) con centro en el origen de coordenadas $O = (0,0)$, puede comprobarse que la nueva ecuación es

$$xy = \frac{a^2}{2},$$

que es la ecuación de una hipérbola equilátera, referida a sus asíntotas (véase la Figura 9.32). $\square$

Ejemplo 9.17 Veamos cuál es la ecuación de una hipérbola, sabiendo que sus focos son $F_1 = (0,1)$ y $F_2 = (10,1)$ y la diferencia de distancias de sus puntos a sus focos es 8 unidades. Como el centro (x_0, y_0) de la hipérbola es el punto medio del segmento que une los focos, éste viene dado por

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{0+10}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (5,1)$$

(véase la Observación 6.10). Por otra parte, la distancia focal es

$$2c = 10 - 0 = 10 \ \Rightarrow \ c = 5$$

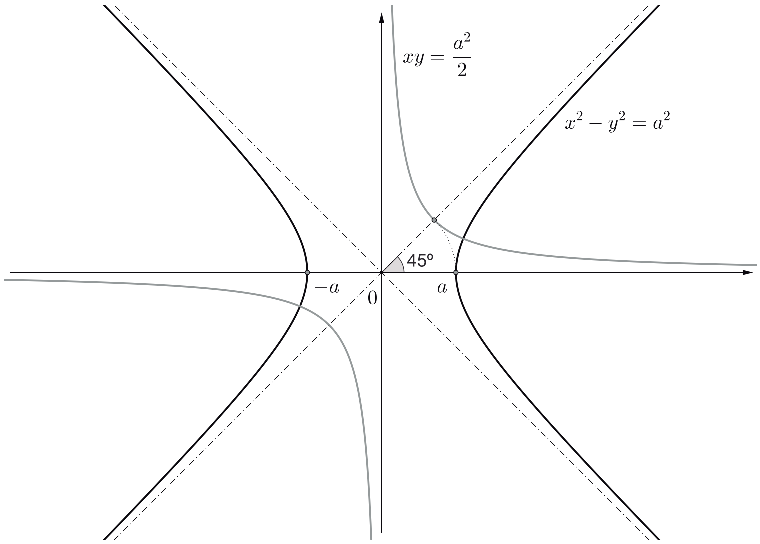


Figura 9.32: Hipérbolas $x^2 - y^2 = a^2$ e $xy = \dfrac{a^2}{2}$.

y, como por hipótesis $2a = 8$, se tiene que

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = 3.$$

Por tanto, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

y su excentricidad

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}.$$

Las asíntotas se obtienen de la siguiente forma: como $a = 4$ y $b = 3$, son las rectas paralelas a $y = -\frac{3}{4}\,x$ e $y = \frac{3}{4}\,x$ que pasan por el centro $(x_0, y_0) = (5, 1)$, es decir, las rectas

$$y = \frac{19}{4} - \frac{3}{4}\,x \ \text{ e } \ y = -\frac{11}{4} + \frac{3}{4}\,x$$

(véase la Figura 9.33). $\square$

Observación 9.19 Sea **H** la hipérbola definida por la ecuación (9.14) y $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Si } \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{a^2} - \frac{(\bar{y} - y_0)^2}{b^2} \begin{cases} < 1 \Rightarrow & P \in \mathcal{R}_1 \\ = 1 \Rightarrow & P \in \mathbf{H} \\ > 1 \Rightarrow & P \in \mathcal{R}_2, \end{cases}$$

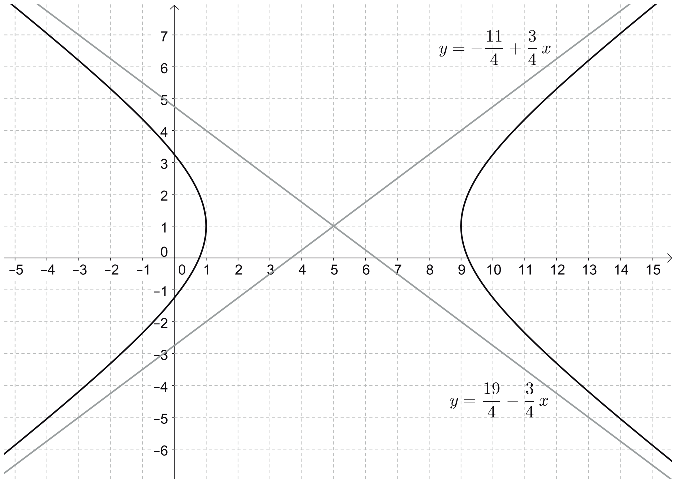


Figura 9.33: Hipérbola $\dfrac{(x-5)^2}{16} - \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1.$

siendo $\mathcal{R}_1$ el interior de la región que se encuentra entre las dos ramas de la hipérbola y $\mathcal{R}_2$ el interior de la región delimitada por las ramas de la hipérbola que contiene los focos. $\square$

Ejemplo 9.18 Si consideramos la hipérbola

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{5} = 1,$$

se verifica que el punto $P_1 = (3, -2)$ está entre las dos ramas de la hipérbola, pues

$$\frac{(3-2)^2}{9} - \frac{(-2+1)^2}{5} = \frac{1}{9} - \frac{1}{5} = -\frac{4}{45} < 1,$$

el punto $P_2 = (7, \frac{4\sqrt{5}-3}{3})$ pertenece a la hipérbola, pues

$$\frac{(7-2)^2}{9} - \frac{(\frac{4\sqrt{5}-3}{3}+1)^2}{5} = \frac{25}{9} - \frac{\frac{80}{9}}{5} = \frac{25}{9} - \frac{16}{9} = 1,$$

y el punto $P_3 = (-3, 1)$ está en la región delimitada por una de las ramas de la hipérbola que contiene uno de los focos, pues

$$\frac{(-3-2)^2}{9} - \frac{(1+1)^2}{5} = \frac{25}{9} - \frac{4}{5} = \frac{89}{45} > 1$$

(véase la Figura 9.34). $\square$

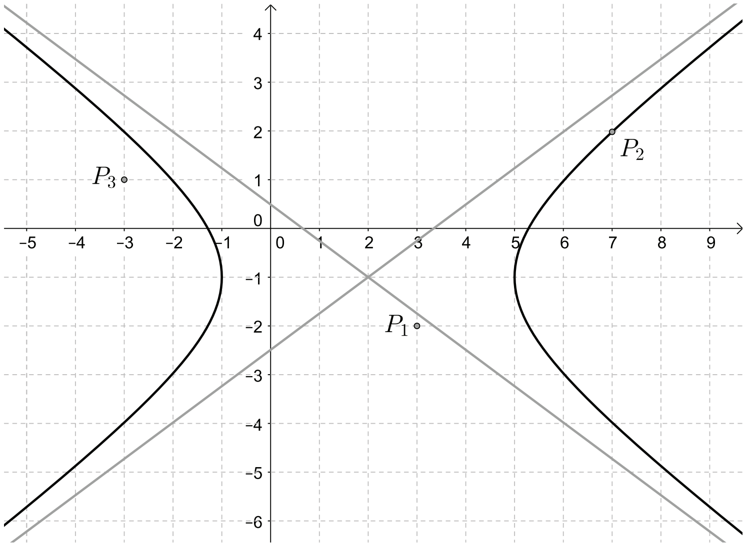


Figura 9.34: Hipérbola $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{5} = 1.$

Observación 9.20 Dado un punto $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, veamos cómo calcular las rectas tangentes (si existen) a la hipérbola (9.14) que pasan por P. Pueden presentarse tres casos:

a) Si el punto P está en el interior de la región delimitada por las ramas de la hipérbola que contiene los focos, no existe ninguna recta tangente a la hipérbola que pase por P.

b) Si el punto P está en una de las asíntotas, no existe ninguna recta tangente a la hipérbola que pase por P, aunque se puede considerar que la propia asíntota es una recta tangente a la hipérbola en el infinito (véase la Figura 9.35).

c) Si el punto P pertenece a la hipérbola o se encuentra entre las dos ramas de la hipérbola sin estar en sus asíntotas, entonces hay una única recta tangente a la hipérbola que pasa por P. Además, en el caso particular de que $\bar{x} = x_0 - a$ o $\bar{x} = x_0 + a$, entonces la recta tangente a la hipérbola que pasa por P es, respectivamente, $x = x_0 - a$ o $x = x_0 + a$ (véase, de nuevo, la Figura 9.35).

En el último caso, una forma de calcular las rectas tangentes mencionadas (salvo en los casos de tangentes verticales explicados) consiste en hallar las rectas que pasan por el punto P y cortan a la hipérbola en un único punto (véase la Figura 9.36). $\square$

El cálculo de las rectas tangentes a la hipérbola que pasan por un punto exterior a ésta es muy engorroso, por lo que nos limitaremos al caso en el que el punto pertenece a la hipérbola. Además, para mayor sencillez, comenzaremos suponiendo que la hipérbola

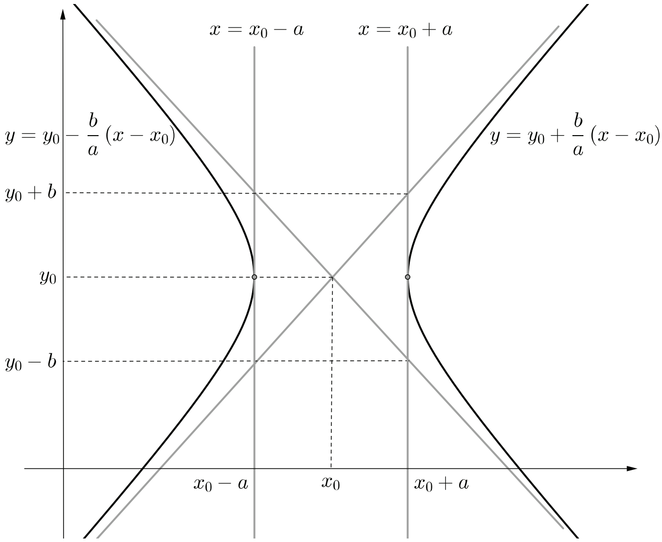


Figura 9.35: Rectas tangentes a una hipérbola en los puntos $(x_0 \pm a, y_0)$.

está centrada en el origen de coordenadas. Sea, por tanto, $\mathbf{H}$ la hipérbola definida por la ecuación (9.11) y $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{H}$, que suponemos que está en la hipérbola pero no es uno de los puntos con tangente vertical vistos en la Observación 9.20 (en esos casos ya sabemos cuáles son las ecuaciones de la recta tangente y no necesitamos hacer los siguientes cálculos). El haz de rectas que pasa por P, en particular la recta tangente a $\mathbf{H}$, es de la forma

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x}),$$

siendo $m \in \mathbb{R}$ la pendiente de la recta (recordamos que estamos suponiendo que P no es uno de los puntos con tangente vertical). Los puntos de corte (dos o uno) de estas rectas con la hipérbola son las soluciones (x, y) del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - \bar{y} = m(x - \bar{x}). \end{cases}$$

Sustituyendo el valor $y = \bar{y} + m(x - \bar{x})$ de la segunda ecuación en la primera, podemos escribir una ecuación en la variable x, dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2 + 2m\bar{y}(x - \bar{x}) + m^2(x - \bar{x})^2}{b^2} = 1.$$

De esta forma, si consideramos el polinomio

$$P(x) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2 + 2m\bar{y}(x - \bar{x}) + m^2(x - \bar{x})^2}{b^2} - 1, \tag{9.15}$$

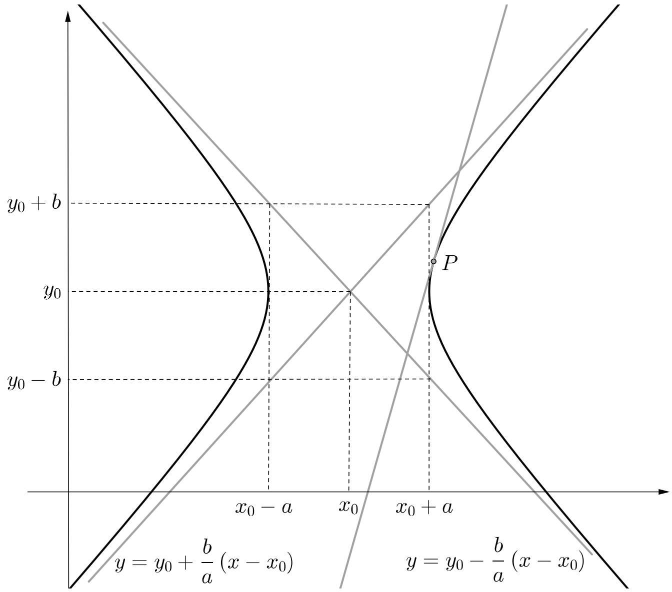


Figura 9.36: Recta tangente a una hipérbola en un punto P.

se verifica que, salvo para un valor particular de m (el correspondiente a la pendiente de la recta tangente), el polinomio $P(x)$ tiene dos raíces distintas y una de ellas es $\bar{x}$; cuando m es la pendiente de la recta tangente, entonces $\bar{x}$ es la única raíz de $P(x)$ ($\bar{x}$ es una raíz doble). De acuerdo con la Observación 2.12, al dividir $P(x)$ entre el polinomio $Q(x)=x-\bar{x}$ podemos factorizar $P(x)$ en la forma

$$P(x)=C(x)(x-\bar{x}), \tag{9.16}$$

siendo $C(x)$ un polinomio de grado 1, de forma que la otra raíz de $P(x)$ es también raíz de $C(x)$. Además, si m es la pendiente de la recta tangente, entonces $\bar{x}$ también es raíz de $C(x)$ (por ser $\bar{x}$ raíz doble de $P(x)$), por lo que $C(\bar{x})=0$.

Para calcular $C(x)$ podemos aplicar la regla de Ruffini mostrada en el Teorema 2.2 de forma análoga a como se hizo en el caso de la elipse: teniendo en cuenta que podemos escribir $P(x)$ como

$$P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

para los coeficientes

$$\alpha=\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{b^2},\ \beta=\frac{2m(m\bar{x}-\bar{y})}{b^2}\ \text{ y }\ \gamma=\frac{m^2\bar{x}^2+2m\bar{x}\bar{y}-\bar{y}^2}{b^2}-1,$$

se llega a que el polinomio $P(x)$ puede factorizarse en la forma (9.16), siendo

$$\begin{aligned} C(x) = \alpha x + \alpha\bar{x} + \beta &= \left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) x + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) \bar{x} + \frac{2m(m\bar{x} - \bar{y})}{b^2} \\ &= \left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) x + \frac{\bar{x}}{a^2} + \frac{m^2\bar{x}}{b^2} - \frac{2m\bar{y}}{b^2} \\ &= \left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)(x - \bar{x}) + 2\left(\frac{\bar{x}}{a^2} - \frac{m\bar{y}}{b^2}\right). \end{aligned} \tag{9.17}$$

Observación 9.21 Al igual que en el caso de la elipse, el polinomio $C(x)$ también puede obtenerse mediante ciertas manipulaciones algebraicas. Para ello comenzamos reescribiendo el primer sumando de $P(x)$ como se hizo en (9.9). Al sustituir la expresión anterior en (9.15) y agrupar términos, se llega a

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(x-\bar{x})^2 + 2\bar{x}(x-\bar{x}) + \bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2 + 2m\bar{y}(x-\bar{x}) + m^2(x-\bar{x})^2}{b^2} - 1 \\ &= \left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)(x-\bar{x})^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{a^2} - \frac{m\bar{y}}{b^2}\right)(x-\bar{x}) + \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - 1. \end{aligned}$$

Como $P \in \mathbf{H}$, se verifica que

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

y, por tanto,

$$P(x) = \left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)(x-\bar{x}) + 2\left(\frac{\bar{x}}{a^2} - \frac{m\bar{y}}{b^2}\right)\right](x-\bar{x}),$$

con lo que se tiene factorizado $P(x)$ en la forma (9.16) para el polinomio $C(x)$ dado en (9.17). □

Una vez obtenido el polinomio $C(x)$, como hemos visto que se verifica que $C(\bar{x}) = 0$, se deduce que

$$\frac{\bar{x}}{a^2} - \frac{m\bar{y}}{b^2} = 0,$$

por lo que la pendiente de la recta tangente buscada es

$$m = \frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}}$$

y la ecuación de dicha recta tangente es

$$\boxed{y - \bar{y} = \frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}}(x - \bar{x}).} \tag{9.18}$$

Observación 9.22

a) A partir de la ecuación (9.18), teniendo en cuenta que la pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{m}$ (véase la Observación 8.8), se tiene que la ecuación de la *recta normal a la hipérbola* $\mathbf{H}$ en un punto $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{H}$ es

$$\boxed{y - \bar{y} = -\frac{a^2\bar{y}}{b^2\bar{x}}\,(x - \bar{x}).}$$

b) Nótese que de (9.18) se deduce que

$$a^2\bar{y}(y - \bar{y}) = b^2\bar{x}(x - \bar{x}) \ \Rightarrow\ \frac{\bar{x}(x - \bar{x})}{a^2} - \frac{\bar{y}(y - \bar{y})}{b^2} = 0$$

y, consecuentemente,

$$\frac{\bar{x}x - \bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}y - \bar{y}^2}{b^2} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\bar{x}x}{a^2} - \frac{\bar{y}y}{b^2} - \left(\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2}\right) = 0.$$

Ahora, utilizando que $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{H}$, se verifica que

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

y, por tanto, otra forma de expresar las ecuaciones de la recta tangente a $\mathbf{H}$ en P es

$$\boxed{\frac{\bar{x}x}{a^2} - \frac{\bar{y}y}{b^2} = 1.}$$

Ejemplo 9.19 Consideremos la hipérbola $\mathbf{H}$ de ecuación reducida

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$$

contemplada en el Ejemplo 9.16 y el punto $P = (8, 12) \in \mathbf{H}$. La ecuación de la recta tangente a $\mathbf{H}$ en P es

$$y - 12 = \frac{48 \times 8}{16 \times 12}\,(x - 8) \ \Rightarrow\ y = 12 + 2\,(x - 8)$$

y la ecuación de la recta normal a $\mathbf{H}$ en el punto P es

$$y = 12 - \frac{1}{2}\,(x - 8)$$

(véase la Figura 9.37). $\square$

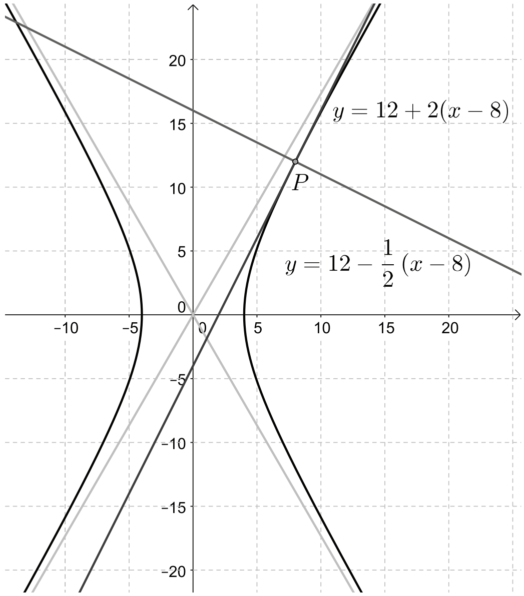


Figura 9.37: Rectas tangente y normal a la hipérbola $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{48} = 1$ en el punto $P = (8, 12)$.

Observación 9.23 Cuando se tiene una hipérbola no centrada en el origen de coordenadas, los resultados anteriores sobre sus rectas tangentes y normales que pasan por uno de sus puntos se obtienen, de manera sencilla, si se piensa en las traslaciones necesarias para pasar de una hipérbola no centrada en el origen a otra que sí lo está. Los pasos a seguir son los mismos que los realizados en el caso de la elipse. En particular, si $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{H}$, siendo $\mathbf{H}$ la hipérbola dada por la ecuación (9.14), se verifica:

a) Si $\bar{x} = x_0 - a$ o $\bar{x} = x_0 + a$ se verifica que $x = x_0 - a$ y $x = x_0 - a$ son, respectivamente, las rectas tangentes a $\mathbf{H}$ en el punto P. Además, $y = y_0$ es, en ambos casos, la recta normal a $\mathbf{H}$ que pasa por P.

b) En otros casos, la recta tangente que pasa por P es la trasladada de la recta tangente a la hipérbola de ecuación reducida (9.11) que pasa por el punto $\bar{P} = (\bar{x} - x_0, \bar{y} - y_0)$ y cuya ecuación es (véase (9.18))

$$y - (\bar{y} - y_0) = \frac{b^2(\bar{x} - x_0)}{a^2(\bar{y} - y_0)}\,(x - (\bar{x} - x_0))$$

(nótese que P es el trasladado de $\bar{P}$ por el vector $\overrightarrow{OC}$, siendo O el origen de coordenadas y $C = (x_0, y_0)$ el centro de la hipérbola). Por tanto, la recta tangente a $\mathbf{H}$ que pasa por P es

$$y - \bar{y} = \frac{b^2(\bar{x} - x_0)}{a^2(\bar{y} - y_0)}\,(x - \bar{x})$$

y, con el mismo razonamiento, la recta normal a $\mathbf{H}$ que pasa por P es

$$y - \bar{y} = -\frac{a^2(\bar{y} - y_0)}{b^2(\bar{x} - x_0)}\,(x - \bar{x}). \quad \square$$

Ejemplo 9.20 Consideremos la hipérbola $\mathbf{H}$ de ecuación

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{5} = 1.$$

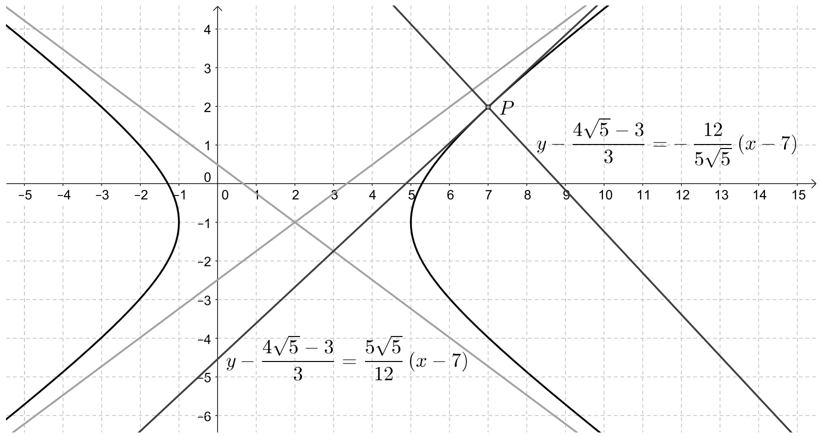


Figura 9.38: Rectas tangente y normal a la hipérbola $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{5} = 1$ en $P = (7, \frac{4\sqrt{5}-3}{3})$.

Tal y como se vio en el Ejemplo 9.18, el punto $P = (7, \frac{4\sqrt{5}-3}{3}) \in \mathbf{H}$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente a $\mathbf{H}$ que pasa por P es

$$y - \frac{4\sqrt{5}-3}{3} = \frac{5(7-2)}{9\left(\frac{4\sqrt{5}-3}{3} + 1\right)}\,(x-7) \;\Rightarrow\; y - \frac{4\sqrt{5}-3}{3} = \frac{5\sqrt{5}}{12}\,(x-7)$$

y la de la recta normal a $\mathbf{H}$ que pasa por P es

$$y - \frac{4\sqrt{5}-3}{3} = -\frac{12\sqrt{5}}{25}\,(x-7)$$

(véase la Figura 9.38). $\square$

Dados la hipérbola $\mathbf{H}$ de ecuación (9.14) y un valor $m \in \left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right]\right) \cup \{\infty\}$ arbitrario, siempre existen dos rectas tangentes a $\mathbf{H}$ con pendiente m (véase la Figura 9.39). Además, las dos rectas tangentes a $\mathbf{H}$ con pendiente ∞ (rectas verticales) son $x = x_0 - a$ y $x = x_0 + a$ (véase la Figura 9.35).

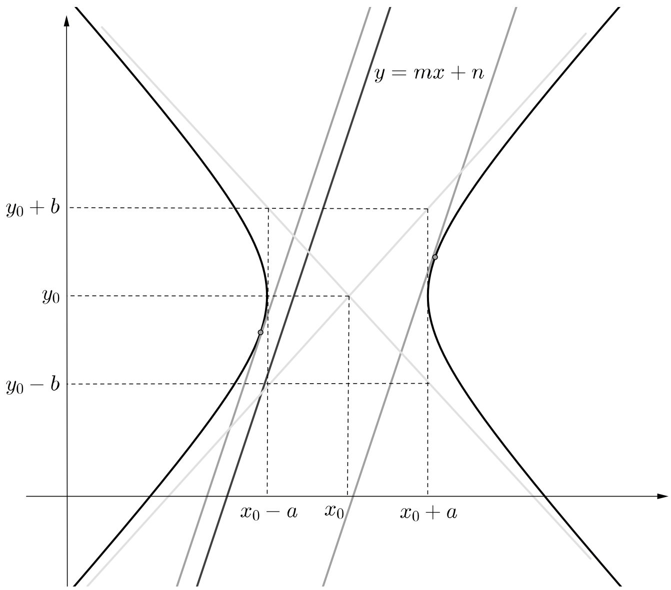


Figura 9.39: Tangentes a la hipérbola $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ paralelas a la recta $y = mx+n$.

En el caso de la hipérbola $\mathbf{H}$ de ecuación

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1,$$

dado un número $m \in \left(-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right)$, siempre existen dos rectas tangentes a $\mathbf{H}$ con pendiente m. Además, las dos rectas tangentes a $\mathbf{H}$ con pendiente 0 (rectas horizontales) son $y = y_0 - b$ e $y = y_0 + b$ (véase la Figura 9.40).

9.6. Ecuaciones de la parábola

Definición 9.12 Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta (llamada *directriz*) y de un punto fijo (llamado *foco*). □

Consideremos una parábola $\mathbf{P}$ del plano de forma que el eje de ordenadas sea paralelo a la recta directriz, el eje de abscisas contenga el foco de la parábola y el origen de

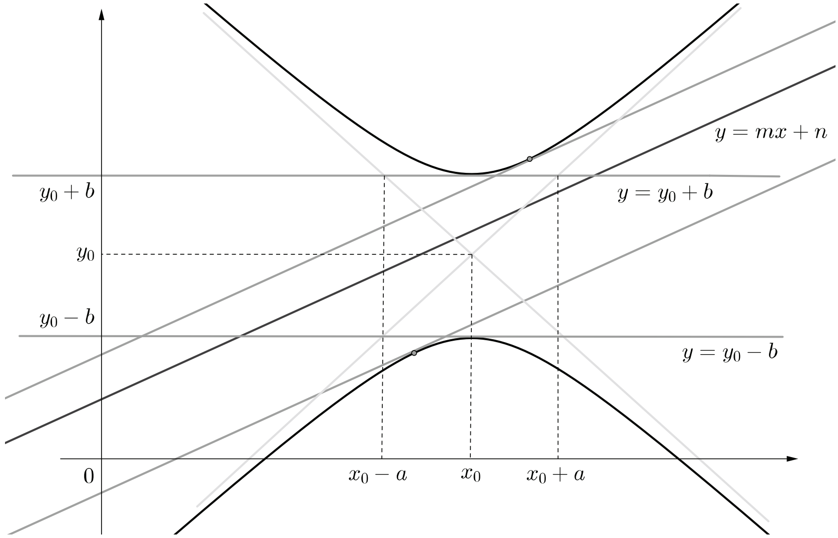


Figura 9.40: Tangentes a la hipérbola $\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$ paralelas a la recta $y = mx+n$.

coordenadas $O = (0, 0)$ sea el punto medio del segmento que une de forma perpendicular el foco con la directriz. De esta forma, el origen de coordenadas pertenece a la parábola (pues está a la misma distancia del foco que de la recta directriz), el foco estará situado en el punto $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ con $p > 0$ y la directriz de la parábola será la recta

$$r : \ x = -\frac{p}{2}$$

(véase la Figura 9.41). Entonces, de acuerdo con la Definición 9.12, para que un punto $P = (x, y)$ esté en la parábola, debe cumplirse que

$$P \in \mathbf{P} \ \Leftrightarrow \ d(P, F) = d(P, r).$$

Como se vio en la Sección 8.3.3., la distancia en el plano de un punto $A = (x, y)$ a la recta s de ecuación $ax + by + c = 0$ viene dada por

$$d(A, s) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Aplicando esto a nuestro caso, se tiene que

$$d(P, r) = \frac{\left|x + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^0 + 0^2}} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

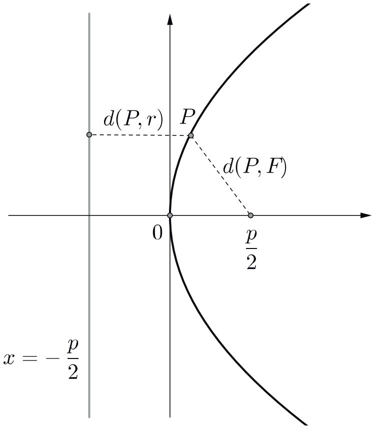


Figura 9.41: Parábola con foco $F=\left(\frac{p}{2},0\right)$ y recta directriz $x=-\frac{p}{2}$.

y, por tanto,

$$P \in \mathbf{P} \;\Leftrightarrow\; d(P,F)=d(P,r) \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Elevando al cuadrado y operando,

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-px+\cancel{\frac{p^2}{4}}+y^2=\cancel{x^2}+px+\cancel{\frac{p^2}{4}},$$

de donde se obtiene la *ecuación reducida de la parábola*

$$\boxed{y^2=2px.} \tag{9.19}$$

Observación 9.24

a) El *eje de la parábola* es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco. Se verifica que una parábola es simétrica respecto a su eje. En efecto, basta observar que si el punto (x,y) pertenece a la parábola (9.19), entonces el punto $(x,-y)$ también pertenece a esa parábola.

b) El *vértice de la parábola* es el punto de intersección de la parábola con el eje de la parábola. Nótese que el vértice de la parábola (9.19) es el origen de coordenadas $(0,0)$. Por construcción, el vértice es el punto de la parábola más cercano a la directriz.

c) La *distancia* (o *radio*) *focal* es la distancia entre el vértice y el foco de la parábola. □

Ejemplo 9.21 Dada la parábola $y^2=8x$, veamos cómo obtener su vértice, su foco y su recta directriz. Como la ecuación $y^2=8x$ está en el formato de la ecuación reducida de una parábola, comparándola con (9.19) se deduce que el vértice está en el punto $(0, 0)$ y

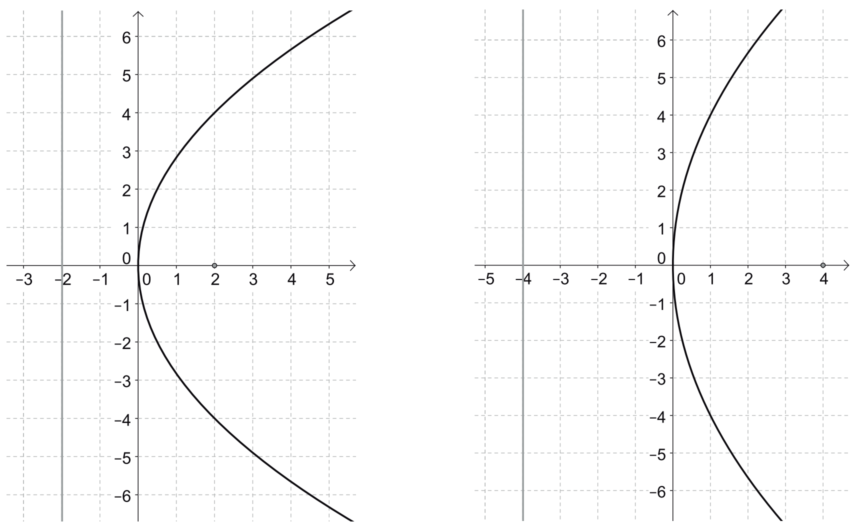
$$2p = 8 \;\Rightarrow\; p = 4 \;\Rightarrow\; \frac{p}{2} = 2.$$

Por tanto, su foco está en el punto $F = (2, 0)$ y su recta directriz es $x = -2$ (véase la Figura 9.42(a)). $\square$

Ejemplo 9.22 La ecuación de una parábola con $F = (4, 0)$ y recta directriz $x = -4$ es

$$y^2 = 16x$$

(véase la Figura 9.42(b)). $\square$



(a) Parábola $y^2 = 8x$. (b) Parábola $y^2 = 16x$.

Figura 9.42: Gráficas de parábolas.

Observación 9.25 Intercambiando el rol de los ejes de coordenadas, cuando el foco está situado sobre el eje de ordenadas en el punto $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ y la directriz de la parábola es la recta

$$y = -\frac{p}{2},$$

la *ecuación reducida de la parábola* que se obtiene es

$$\boxed{x^2 = 2py}$$

(véase la Figura 9.43). $\square$

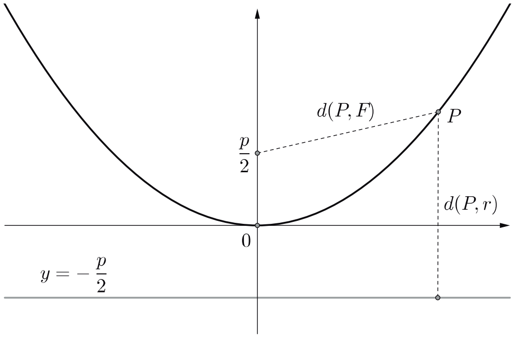


Figura 9.43: Parábola con foco $F = \left(0, \dfrac{p}{2}\right)$ y recta r directriz $y = -\dfrac{p}{2}$.

Observación 9.26 La parábola refleja sobre el foco cualquier rayo paralelo a su eje (propiedad que es utilizada, por ejemplo, en las antenas parabólicas). Análogamente, cualquier rayo emitido por un emisor situado en el foco, tras reflejarse en la parábola, será paralelo al eje (por ello cierto tipo de lámparas y faros de los coches tienen espejos reflectantes con forma parabólica que permiten enviar haces de luz paralelos provenientes de una fuente de luz situada en el foco) (véase la Figura 9.44). □

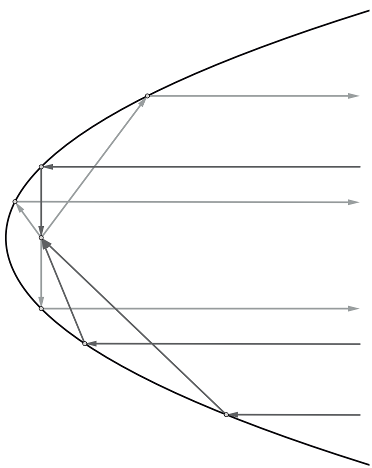


Figura 9.44: Propiedades de la parábola.

Definición 9.13 La *excentricidad de una parábola* es $\varepsilon = 1$. □

La Tabla 9.1 muestra el valor de las excentricidades de las cónicas (véase también la Figura 9.45):

Cónica	**Ecuación reducida**	**Excentricidad**
circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$	$\varepsilon = 0$
elipse	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\varepsilon = \sqrt{1 - \dfrac{(\text{mín}\{a,b\})^2}{(\text{máx}\{a,b\})^2}} \in [0,1)$
parábola	$y^2 = 2px$	$\varepsilon = 1$
hipérbola	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} \in (1, +\infty)$

Tabla 9.1: Excentricidades de las cónicas.

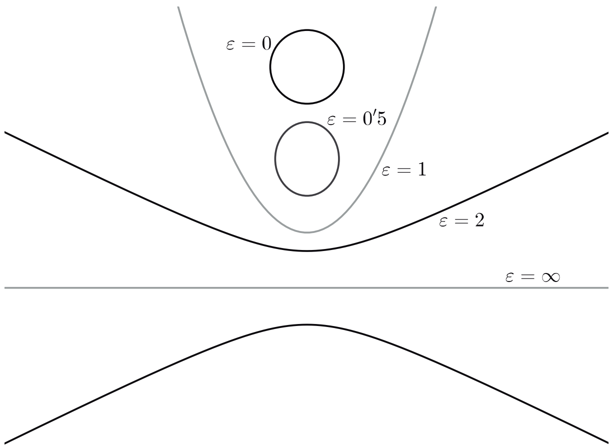


Figura 9.45: Diversas excentricidades en las cónicas.

Si la parábola $\mathbf{P}$ no está centrada en el punto $(0,0)$ sino en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y el segmento que une perpendicularmente el foco con la recta directriz es paralelo al eje de abscisas, utilizando de nuevo la Definición 9.12 se obtiene la *ecuación general de la parábola con recta directriz paralela al eje de ordenadas*

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).} \tag{9.20}$$

Observación 9.27 El foco correspondiente a un parábola de ecuación (9.20) es el punto

$$F = \left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$$

y la directriz de esta parábola es la recta

$$x = x_0 - \frac{p}{2}. \quad \square$$

Ejemplo 9.23 El foco de la parábola $(y+3)^2 = 8(x-1)$ es

$$F = \left(1 + \frac{4}{2}, -3\right) = (3, -3)$$

y su recta directriz

$$x = 1 - \frac{4}{2} = -1$$

(véase la Figura 9.46). $\square$

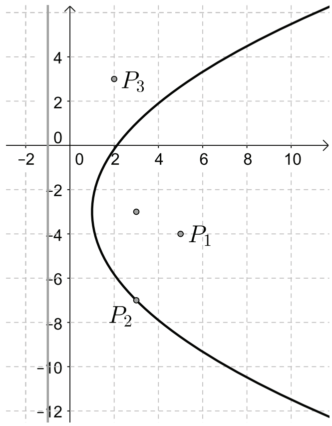


Figura 9.46: Parábola $(y+3)^2 = 8(x-1)$.

Observación 9.28 Cuando la recta directriz es paralela al eje de abscisas, la *ecuación general de la parábola con recta directriz paralela al eje de abscisas* se obtiene de forma análoga y es

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).} \tag{9.21}$$

Observación 9.29 El foco correspondiente a un parábola de ecuación (9.21) es el punto

$$F = \left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$$

y la directriz de esta parábola es la recta

$$y = y_0 - \frac{p}{2}. \quad \square$$

Ecuación	**Vértice**	**Foco**	**Directriz**
$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$	(x_0, y_0)	$\left(x_0+\frac{p}{2}, y_0\right)$	$x = x_0 - \frac{p}{2}$
$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$	(x_0, y_0)	$\left(x_0-\frac{p}{2}, y_0\right)$	$x = x_0 + \frac{p}{2}$
$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$	(x_0, y_0)	$\left(x_0, y_0+\frac{p}{2}\right)$	$y = y_0 - \frac{p}{2}$
$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$	(x_0, y_0)	$\left(x_0, y_0-\frac{p}{2}\right)$	$y = y_0 + \frac{p}{2}$

Tabla 9.2: Parábolas con directriz paralela a uno de los ejes de coordenadas.

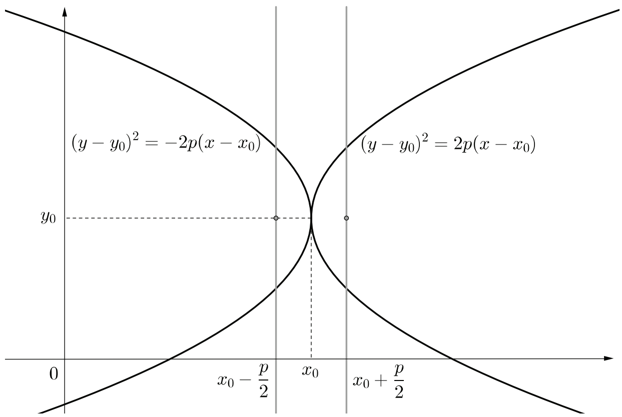


Figura 9.47: Parábolas $(y-y_0)^2 = \pm 2p(x-x_0)$.

La Tabla 9.2 muestra que hay cuatro tipos de parábolas con directriz paralela a uno de los ejes de coordenadas (véanse también las Figuras 9.47 y 9.48).

Observación 9.30 En las Observaciones 2.23, 2.24 y 2.25 se hizo un estudio de las parábolas

$$y = ax^2,\ y = x^2 + c \ \text{ e } \ y = (x-b)^2. \quad \square$$

Para estudiar las rectas tangentes y normales a las parábolas, nos vamos a centrar en la parábola definida por la ecuación (9.20) (el caso de la parábola de ecuación (9.21) se aborda de forma análoga).

Observación 9.31 Sea $\mathbf{P}$ la parábola dada en (9.20) con $p > 0$ y $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Si } (y-y_0)^2 - 2p(x-x_0) \begin{cases} < 0 \ \Rightarrow \ P \in \mathcal{R}_1 \\ = 0 \ \Rightarrow \ P \in \mathbf{P} \\ > 0 \ \Rightarrow \ P \in \mathcal{R}_2, \end{cases}$$

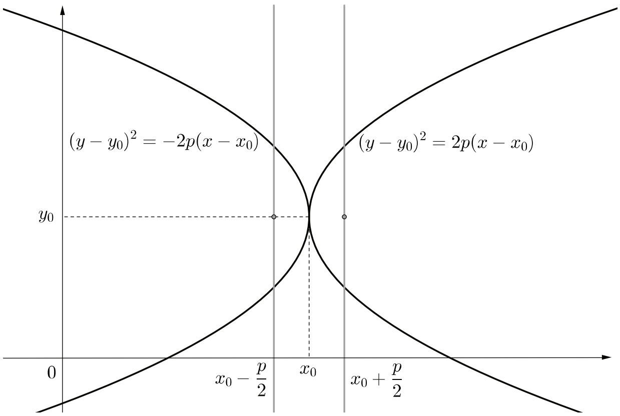


Figura 9.48: Parábolas $(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$.

siendo $\mathcal{R}_1$ el interior de la región limitada por la parábola que contiene el foco y $\mathcal{R}_2$ el exterior de la región limitada por la parábola que contiene el foco. $\square$

Ejemplo 9.24 Si consideramos la parábola

$$(y + 3)^2 = 8(x - 1)$$

del Ejemplo 9.23, se verifica que el punto $P_1 = (5, -4)$ está en el interior de la región limitada por la parábola que contiene el foco, pues

$$(-4 + 3)^2 - 8(5 - 1) = 1 - 32 = -31 < 0,$$

el punto $P_2 = (3, -7)$ pertenece a la parábola, pues

$$(-7 + 3)^2 - 8(3 - 1) = 16 - 16 = 0,$$

y el punto $P_3 = (2, 3)$ está en el exterior de la región limitada por la parábola que contiene el foco, pues

$$(3 + 3)^2 - 8(2 - 1) = 36 - 8 = 28 > 0$$

(véase la Figura 9.46). $\square$

Observación 9.32 Dado un punto $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, veamos cómo calcular las rectas tangentes (si existen) a la parábola (9.20) que pasan por P. Pueden presentarse tres casos:

a) Si el punto P está en el interior de la región delimitada por la parábola que contiene a su foco, no existe ninguna recta tangente a la parábola que pase por P.

b) Si el punto P pertenece a la parábola, entonces hay una recta tangente a la parábola que pasa por P. Además, si P es el vértice (i.e., $P = (x_0, y_0)$), entonces la recta tangente a la parábola en P es $x = x_0$ (véase la Figura 9.49).

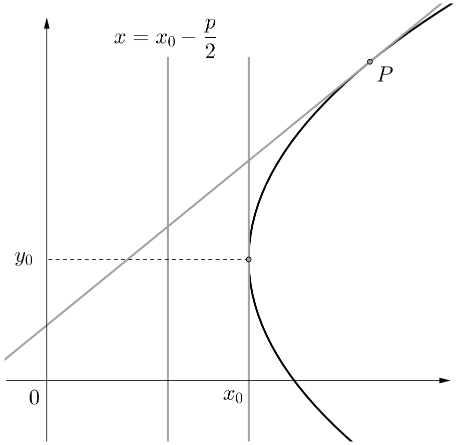


Figura 9.49: Rectas tangentes a una parábola en un punto de la parábola.

c) Si el punto P está en el exterior de la región delimitada por la parábola que contiene a su foco, hay dos rectas tangentes a la parábola que pasan por P. Además, en el caso particular de que $\bar{x} = x_0$, entonces una de las rectas tangentes a la parábola que pasa por P es $x = x_0$ (véase la Figura 9.50).

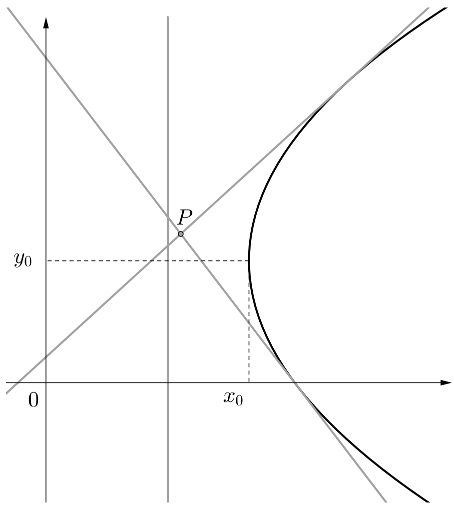


Figura 9.50: Rectas tangentes a una parábola en un punto exterior a la parábola.

En los dos últimos casos una forma de calcular las rectas tangentes mencionadas (salvo en los casos de tangentes verticales explicados) consiste en hallar las rectas que pasan por el punto P y cortan a la parábola en un único punto (véanse las Figuras 9.49 y 9.50). □

El cálculo de las rectas tangentes a la parábola que pasan por un punto exterior a ésta es muy engorroso, por lo que nos limitaremos al caso en el que el punto pertenece a la parábola. Además, para mayor sencillez, comenzaremos suponiendo que la parábola está centrada en el origen de coordenadas y es de la forma (9.19). Sea, por tanto, $\mathbf{P}$ la parábola definida por la ecuación (9.19) y $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{P}$, que suponemos que está en la parábola pero no es su vértice (pues, en ese caso, ya hemos visto en la Observación 9.32 que su recta tangente es $x = 0$ y no necesitamos hacer los cálculos siguientes). El haz de rectas que pasan por P, en particular la recta tangente a $\mathbf{P}$, es de la forma

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x}),$$

siendo $m \in \mathbb{R}$ la pendiente de la recta (recordamos que estamos suponiendo que P no es el vértice de la parábola). Los puntos de corte (dos o uno) de estas rectas con la parábola son las soluciones (x, y) del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ \\ y - \bar{y} = m(x - \bar{x}). \end{cases}$$

Sustituyendo el valor $y = \bar{y} + m(x - \bar{x})$ de la segunda ecuación en la primera, podemos escribir una ecuación en la variable x, dada por

$$(\bar{y} + m(x - \bar{x}))^2 - 2px = 0,$$

es decir,

$$\bar{y}^2 + 2m(x - \bar{x})\bar{y} + m^2(x - \bar{x})^2 - 2px = 0.$$

De esta forma, si consideramos el polinomio

$$P(x) = \bar{y}^2 + 2m(x - \bar{x})\bar{y} + m^2(x - \bar{x})^2 - 2px, \tag{9.22}$$

se verifica que, salvo para un valor particular de m (el correspondiente a la pendiente de la recta tangente), el polinomio $P(x)$ tiene dos raíces distintas y una de ellas es $\bar{x}$; cuando m es la pendiente de la recta tangente, entonces $\bar{x}$ es la única raíz de $P(x)$ ($\bar{x}$ es una raíz doble). De acuerdo con la Observación 2.12, al dividir $P(x)$ entre el polinomio $Q(x) = x - \bar{x}$, podemos factorizar $P(x)$ en la forma

$$P(x) = C(x)(x - \bar{x}), \tag{9.23}$$

siendo $C(x)$ un polinomio de grado 1, de forma que la otra raíz de $P(x)$ es también raíz de $C(x)$. Además, si m es la pendiente de la recta tangente, entonces $\bar{x}$ también es raíz de $C(x)$ (por ser $\bar{x}$ raíz doble de $P(x)$), por lo que $C(\bar{x}) = 0$.

Para calcular $C(x)$, podemos aplicar la regla de Ruffini mostrada en el Teorema 2.2 de forma análoga a como se hizo en los casos de la elipse y de la hipérbola: teniendo en cuenta que $P(x)$ puede escribirse en la forma

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

para los coeficientes

$$\alpha = m^2,\ \beta = 2(m\bar{y} - m^2\bar{x} - p)\ \text{ y }\ \gamma = \bar{y}^2 - 2m\bar{x}\bar{y} + m^2\bar{x}^2,$$

se llega a que el polinomio $P(x)$ puede factorizarse en la forma (9.23), siendo

$$\begin{aligned} C(x) &= \alpha x + \alpha\bar{x} + \beta \\ &= m^2 x + m^2\bar{x} + 2(m\bar{y} - m^2\bar{x} - p) \\ &= m^2(x - \bar{x}) + 2(m\bar{y} - p). \end{aligned} \tag{9.24}$$

Observación 9.33 El polinomio $C(x)$ también puede obtenerse mediante ciertas manipulaciones algebraicas. Para ello comenzamos reescribiendo el último sumando de $P(x)$ en la forma

$$-2px = -2p(x - \bar{x}) - 2p\bar{x}.$$

Sustituyendo esta expresión en (9.22) y agrupando términos, se tiene que

$$\begin{aligned} P(x) &= \bar{y}^2 + 2m(x - \bar{x})\bar{y} + m^2(x - \bar{x})^2 - 2p(x - \bar{x}) - 2p\bar{x} \\ &= m^2(x - \bar{x})^2 + 2(m\bar{y} - p)(x - \bar{x}) + \bar{y}^2 - 2p\bar{x}. \end{aligned}$$

Como $P \in \mathbf{P}$, se verifica que

$$\bar{y}^2 - 2p\bar{x} = 0$$

y, por tanto,

$$P(x) = \left[m^2(x - \bar{x}) + 2(m\bar{y} - p)\right](x - \bar{x}),$$

con lo que hemos factorizado $P(x)$ en la forma (9.23) para el polinomio $C(x)$ dado en (9.24). $\square$

Una vez obtenido el polinomio $C(x)$, como hemos visto que se verifica que $C(\bar{x}) = 0$, se deduce que

$$m\bar{y} - p = 0,$$

por lo que la pendiente de la recta tangente buscada es

$$m = \frac{p}{\bar{y}}$$

y la ecuación de dicha recta tangente es

$$\boxed{y - \bar{y} = \frac{p}{\bar{y}}(x - \bar{x}).} \tag{9.25}$$

Observación 9.34

a) A partir de la ecuación (9.25), teniendo en cuenta que la pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{m}$ (véase la Observación 8.8), se tiene que la ecuación de la *recta normal a la parábola* $\mathbf{P}$ en un punto $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{P}$ es

$$\boxed{y - \bar{y} = -\frac{\bar{y}}{p}\,(x - \bar{x}).}$$

b) Nótese que de (9.25) se deduce que

$$\bar{y}(y - \bar{y}) = p(x - \bar{x})$$

y, consecuentemente,

$$\bar{y}y - \bar{y}^2 = px - p\bar{x} \;\Rightarrow\; \bar{y}y = (\bar{y}^2 - p\bar{x}) + px.$$

Ahora, utilizando que $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{P}$, se verifica que

$$\bar{y}^2 = 2p\bar{x}$$

y, por tanto, otra forma de expresar la ecuación de la recta tangente a $\mathbf{P}$ en P es

$$\boxed{\bar{y}y = p(\bar{x} + x).}$$

Ejemplo 9.25 Consideremos la parábola $\mathbf{P}$ de ecuación reducida

$$y^2 = 4x$$

y el punto $P = (9, -6) \in \mathbf{P}$. La ecuación de la recta tangente a $\mathbf{P}$ en P es

$$y - (-6) = \frac{2}{-6}\,(x - 9) \;\Rightarrow\; y = -6 - \frac{1}{3}\,(x - 9)$$

y la ecuación de la recta normal a $\mathbf{P}$ en el punto P es

$$y = -6 + 3\,(x - 9)$$

(véase la Figura 9.51). $\square$

Observación 9.35 Cuando la parábola $\mathbf{P}$ es del tipo

$$x^2 = 2py,$$

las rectas tangentes y normales a sus puntos se calculan de forma análoga. En particular, si $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{P}$ y:

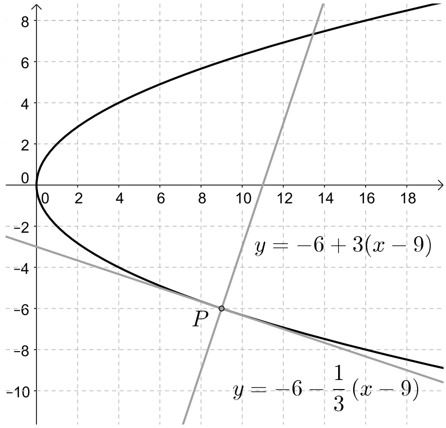


Figura 9.51: Rectas tangente y normal a la parábola $y^2 = 4x$ en el punto $P = (9, -6)$.

a) P es el vértice de la parábola, entonces la tangente y la normal a la parábola en el punto P son, respectivamente, las rectas $y = 0$ y $x = 0$.

b) P no es el vértice de la parábola, entonces la tangente a la parábola en el punto P es la recta

$$x - \bar{x} = \frac{p}{\bar{x}}\,(y - \bar{y})$$

o, dicho de otro modo,

$$y - \bar{y} = \frac{\bar{x}}{p}\,(x - \bar{x}).$$

Además, la recta normal a $\mathbf{P}$ que pasa por P es

$$y - \bar{y} = -\frac{p}{\bar{x}}\,(x - \bar{x}). \quad \square$$

Ejemplo 9.26 Consideremos la parábola $\mathbf{P}$ de ecuación reducida

$$x^2 = 4y$$

y el punto $P = (-6, 9) \in \mathbf{P}$. Entonces, la ecuación de la recta tangente a $\mathbf{P}$ en P es

$$y - 9 = \frac{-6}{2}\,(x - (-9)) \;\Rightarrow\; y = 9 - 3\,(x + 6)$$

y la ecuación de la recta normal a $\mathbf{P}$ en P es

$$y = 9 + \frac{1}{3}\,(x + 6)$$

(véase la Figura 9.52). $\square$

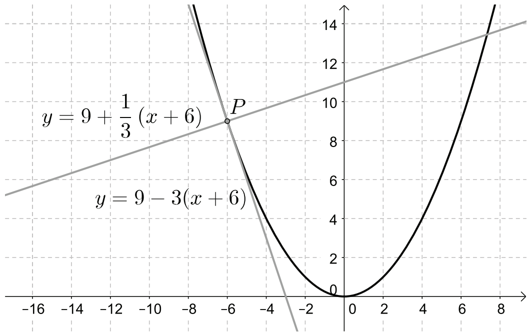


Figura 9.52: Rectas tangente y normal a la parábola $x^2 = 4y$ en el punto $P = (-6, 9)$.

Observación 9.36 Cuando se tiene una parábola que no está centrada en el origen de coordenadas, los resultados anteriores sobre sus rectas tangentes y normales que pasan por uno de sus puntos se obtienen de manera sencilla si se piensa en las traslaciones necesarias para pasar de una parábola no centrada en el origen a otra que sí lo está. En particular, si $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{P}$, siendo $\mathbf{P}$ la parábola dada por la ecuación (9.20), se verifica:

a) Si $\bar{x} = x_0$, se tiene que $x = x_0$ e $y = y_0$ son, respectivamente, las rectas tangente y normal a $\mathbf{P}$ que pasan por P.

b) En otro caso, la recta tangente que pasa por P es la trasladada de la recta tangente a la parábola de ecuación reducida (9.19) que pasa por el punto $\bar{P} = (\bar{x} - x_0, \bar{y} - y_0)$ y cuya ecuación es (véase (9.25))

$$y - (\bar{y} - y_0) = \frac{p}{\bar{y} - y_0}\,(x - (\bar{x} - x_0))$$

(nótese que P es el trasladado de $\bar{P}$ por el vector $\overrightarrow{OC}$, siendo O el origen de coordenadas y $C = (x_0, y_0)$ el centro de la parábola). Por tanto, la recta tangente a $\mathbf{P}$ que pasa por P es

$$y - \bar{y} = \frac{p}{\bar{y} - y_0}\,(x - \bar{x})$$

y, con el mismo razonamiento, la recta normal a $\mathbf{P}$ que pasa por P es

$$y - \bar{y} = -\frac{\bar{y} - y_0}{p}\,(x - \bar{x}). \quad \square$$

Ejemplo 9.27 Consideremos la parábola $\mathbf{P}$ de ecuación

$$(y+3)^2 = 8(x-1)$$

del Ejemplo 9.23 y el punto $P = (3, 1) \in \mathbf{P}$. La recta tangente a $\mathbf{P}$ que pasa por P es

$$y - 1 = \frac{4}{1 - (-3)}\,(x - 3) \;\Rightarrow\; y - 1 = x - 3$$

y la recta normal a $\mathbf{P}$ que pasa por P es

$$y - 1 = -(x - 3)$$

(véase la Figura 9.53). $\square$

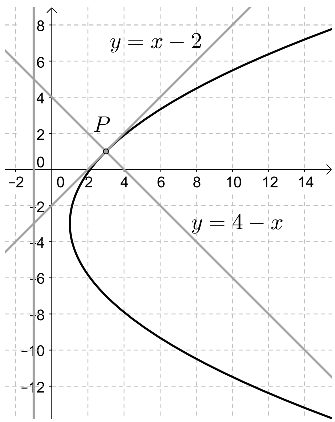


Figura 9.53: Rectas tangente y normal a la parábola $(y + 3)^2 = 8(x - 1)$ en el punto $P = (3, 1)$.

Dados una parábola $\mathbf{P}$ y un valor $m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $m \neq m^*$, siendo m^* la pendiente del eje de la parábola, siempre existe una recta tangente a $\mathbf{P}$ con pendiente m. Lo ilustramos mediante un ejemplo:

Ejemplo 9.28 Dada la parábola **P** de ecuación

$$(y + 3)^2 = 8(x - 1),$$

vamos a buscar una recta paralela a la recta

$$y = 4x + 1$$

que sea tangente a $\mathbf{P}$. Puesto que dos rectas son paralelas si, y sólo si, tienen la misma pendiente, las rectas paralelas a la recta dada tienen pendiente 4 y, por tanto, son de la forma

$$y = 4x + k$$

con $k \in \mathbb{R}$. Como la recta buscada es la que interseca a la parábola **P** en un solo punto, tendremos que encontrar el valor de k para el cual el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (y+3)^2 = 8(x-1) \\ y = 4x + k \end{cases}$$

tenga una única solución $(x, y) \in \mathbf{P}$. De la segunda ecuación se deduce que

$$x = \frac{y-k}{4}$$

y, sustituyendo esta expresión en la primera ecuación, se tiene que

$$\begin{aligned} (y+3)^2 = 8\left(\frac{y-k}{4} - 1\right) &\Leftrightarrow y^2 + 6y + 9 = 2y - 2k - 8 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 4y + 2k + 17 = 0. \end{aligned}$$

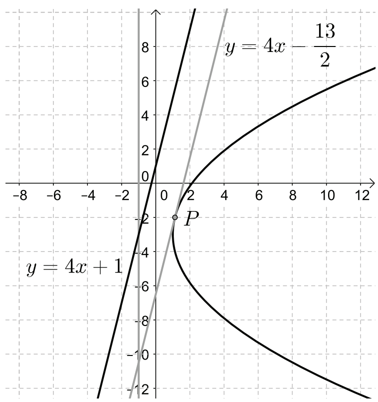


Figura 9.54: Recta paralela a $y = 4x + 1$ que es tangente a la parábola $(y+3)^2 = 8(x-1)$.

Para que esta ecuación de segundo grado en y tenga una única solución, debe cumplirse que su discriminante sea cero, es decir,

$$(-4)^2 - 4(2k+17) = 0 \;\Leftrightarrow\; -52 - 8k = 0 \;\Leftrightarrow\; k = -\frac{52}{8} = -\frac{13}{2}.$$

Por tanto, la recta tangente a **P** buscada es

$$y = 4x - \frac{13}{2}$$

y el punto de tangencia (compruébese) es $P = \left(\frac{9}{8}, -2\right)$ (véase la Figura 9.54). $\square$

9.7. Notas finales sobre cónicas

Desarrollando las ecuaciones de cualquiera de las cónicas estudiadas, todas ellas pueden escribirse en la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{9.26}$$

con $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 9.29

a) La ecuación de la circunferencia del Ejemplo 9.2 puede expresarse como

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0.$$

b) La ecuación de la elipse del Ejemplo 9.9 puede reescribirse como

$$\begin{aligned} &\frac{x^2 - 8x + 16}{25} + \frac{y^2 - 2y + 1}{16} = 1 \\ &\Leftrightarrow\; 16x^2 - 128x + 256 + 25y^2 - 50y + 25 = 400 \\ &\Leftrightarrow 16x^2 + 25y^2 - 128x - 50y - 119 = 0. \end{aligned}$$

c) La ecuación de la hipérbola del Ejemplo 9.17 puede expresarse como

$$\begin{aligned} &\frac{x^2 - 10x + 25}{16} - \frac{y^2 - 2y + 1}{9} = 1 \\ &\Leftrightarrow\; 9x^2 - 90x + 225 - 16y^2 + 32y - 16 = 144 \\ &\Leftrightarrow 9x^2 - 16y^2 - 90x + 32y + 65 = 0. \end{aligned}$$

d) La ecuación de la parábola del Ejemplo 9.23 puede escribirse como

$$y^2 + 6y + 9 = 8x - 8 \;\Leftrightarrow\; y^2 - 8x + 6y + 17 = 0. \quad \square$$

Veamos, con algunos ejemplos, que algunas ecuaciones de la forma (9.26) se corresponden con las ecuaciones de cónicas. Para ello, el procedimiento que vamos a seguir es el de “completar cuadrados”.

Ejemplo 9.30 La ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$ es de una circunferencia. Para calcular su centro y su radio, la escribimos en la forma (9.1):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0 &\Leftrightarrow\; (x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow\; \big((x-3)^2 - 9\big) + \big((y+2)^2 - 4\big) + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow\; (x-3)^2 + (y+2)^2 = 4, \end{aligned}$$

que es la ecuación general de la circunferencia de centro $(3, -2)$ y radio 2 (véase la Figura 9.55). $\square$

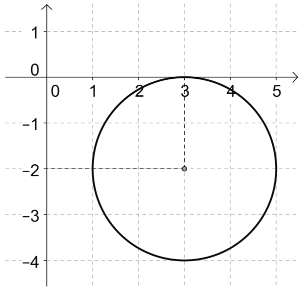


Figura 9.55: Circunferencia $(x-3)^2+(y+2)^2=4$.

Ejemplo 9.31 La ecuación $3x^2+y^2-24x+39=0$ es de una elipse. Para hallar sus elementos geométricos la escribimos en la forma (9.5):

$$\begin{aligned}3x^2+y^2-24x+39=0 &\Leftrightarrow\ 3(x^2-8x)+y^2+39=0\\ &\Leftrightarrow\ 3\left((x-4)^2-16\right)+y^2+39=0\\ &\Leftrightarrow\ 3(x-4)^2+y^2=9\\ &\Leftrightarrow\ \frac{(x-4)^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1,\end{aligned}$$

que es la ecuación general de la elipse de centro $(4,0)$, la longitud del eje mayor es 6 y está situado en el eje de ordenadas y la longitud del eje menor es $2\sqrt{3}$ y está situado en el eje de abscisas. Como, además,

$$c^2=9-3=6\ \Rightarrow\ c=\sqrt{6},$$

a la vista de la Observación 9.8 se tiene que los focos están en los puntos $F=(4,-\sqrt{6})$ y $F'=(4,\sqrt{6})$ (véase la Figura 9.56). $\square$

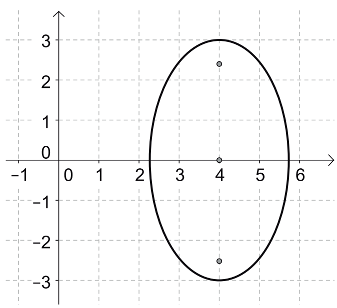


Figura 9.56: Elipse $\dfrac{(x-4)^2}{3}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Ejemplo 9.32 La ecuación $2x^2-3y^2-4x-12y-16=0$ es de una hipérbola. Podemos calcular sus elementos geométricos reescribiéndola en la forma (9.14):

$$\begin{aligned} 2x^2-3y^2-4x-12y-16=0 &\Leftrightarrow 2(x^2-2x)-3(y^2+4y)-16=0 \\ &\Leftrightarrow 2\left((x-1)^2-1\right)-3\left((y+2)^2-4\right)-16=0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-1)^2-3(y+2)^2=6 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(y+2)^2}{2}=1, \end{aligned}$$

que es la ecuación general de una hipérbola de centro $(1,-2)$ y cuya diferencia de distancias desde cualquiera de sus puntos a sus focos es igual a $2\sqrt{3}$. Como $a=\sqrt{3}$ y $b=\sqrt{2}$, se tiene que

$$c^2=2+3=5 \;\Rightarrow\; c=\sqrt{5}.$$

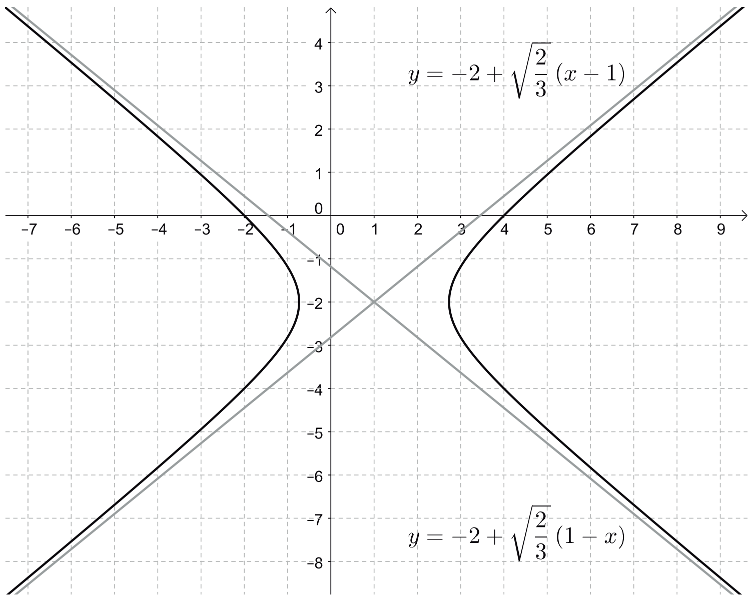


Figura 9.57: Hipérbola $\dfrac{(x-1)^2}{3}-\dfrac{(y+2)^2}{2}=1$.

De esta forma, por la Observación 9.17 se tiene que sus focos son $F=(1-\sqrt{5},-2)$ y $F'=(1+\sqrt{5},-2)$. Finalmente, las asíntotas son las rectas paralelas a $y=-\sqrt{\frac{2}{3}}\,x$ e $y=\sqrt{\frac{2}{3}}\,x$ que pasan por el centro $(1,-2)$, es decir, las rectas

$$y=-2+\sqrt{\frac{2}{3}}\,(1-x) \;\text{ e }\; y=-2+\sqrt{\frac{2}{3}}\,(x-1)$$

(véase la Figura 9.57). $\square$

Ejemplo 9.33 La ecuación $x^2 - 4x - 16y + 52 = 0$ es de una parábola. Para hallar sus elementos geométricos la expresamos en la forma (9.21)

$$x^2 - 4x - 16y + 52 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 16y - 48 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 16(y-3).$$

El centro de la parábola anterior está en el punto $(2,3)$, su foco es

$$F = \left(2, 3 + \frac{8}{2}\right) = (2,7)$$

y su recta directriz

$$y = 3 - \frac{8}{2} = -1$$

(véase la Figura 9.58). $\square$

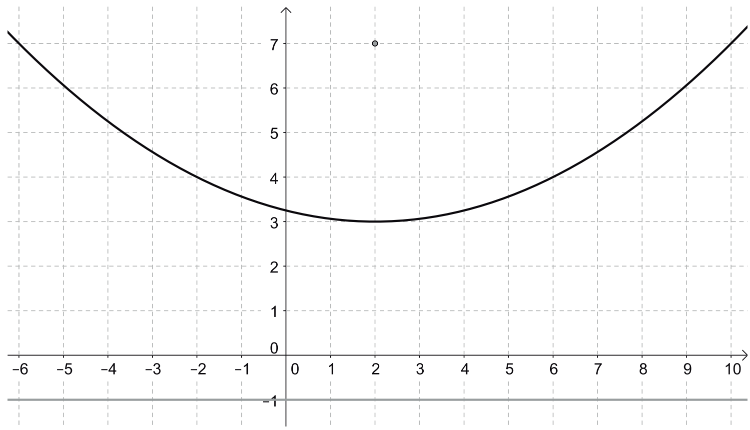


Figura 9.58: Parábola $(x-2)^2 = 16(y-3)$.

Observación 9.37 Nótese que, por sencillez de la exposición, en nuestro estudio sólo hemos considerado cónicas cuyos ejes y rectas directrices son paralelos a los ejes de coordenadas. No obstante, las ecuaciones de las cónicas que no cumplen esta propiedad también pueden escribirse en la forma (9.26) y se puede obtener fácilmente su ecuación reducida tras realizar un giro y una traslacción de ésta (es la propia ecuación la que, tras apropiadas manipulaciones, nos determina la traslacción y el ángulo a realizar).

En cualquier caso, si tenemos expresada la ecuación de una cónica en la forma (9.26), se cumple lo siguiente:

a) Si es una **elipse**, entonces $B^2 - 4AC < 0$. En el caso particular de que se trate de una circunferencia se verifica que $A = C \neq 0$ y $B = 0$.

b) Si es una **parábola**, entonces $B^2 - 4AC = 0$.

c) Si es una **hipérbola**, entonces $B^2 - 4AC > 0$.

Las implicaciones contrarias, en general, no son ciertas. $\square$

Observación 9.38 En la Sección 13.2. veremos que el cálculo de las pendientes de las tangentes y normales a una curva (sea ésta cónica o no) en un punto puede hacerse utilizando el concepto de *derivada* de una función, lo que proporciona un método alternativo al estudiado en este capítulo: si f es una función derivable en un punto a, la ecuación de la *recta tangente* a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $P = (a, f(a))$ es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la de la *recta normal* en el punto $P = (a, f(a))$ (en el supuesto de que $f'(a) \neq 0$) es

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

En la Observación 13.5 se muestra cómo utilizar esta metodología para el caso concreto de las cónicas (obteniendo, obviamente, las mismas fórmulas que las deducidas en este capítulo). $\square$

9.8. Problemas

9.1. Calcular la ecuación de una circunferencia de centro $(-1, 3)$ y radio 2.

9.2. Hallar el centro y el radio de la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$$

y representarla gráficamente.

9.3. Determinar la ecuación de una circunferencia sabiendo que uno de sus diámetros tiene por extremos los puntos $(3, 6)$ y $(-1, 2)$.

9.4. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1, 5)$, $(0, -2)$ y $(-1, -3)$.

9.5. Hallar las rectas tangentes y normales a la circunferencia

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

que pasan por los puntos:

a) $P_1 = (3, 0)$ b) $P_2 = (1, 1)$ c) $P_3 = (-1, 3)$.

9.6. Hallar las rectas tangentes a la circunferencia

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

que son paralelas a la recta

$$y = -3x - 6.$$

9.7. Calcular la ecuación de una elipse sabiendo que está centrada en el origen, tiene ejes perpendiculares a los ejes de coordenadas, su excentricidad es $\frac{1}{2}$ y el eje mayor mide 8 y está en el eje de abscisas.

9.8. Hallar la ecuación de una elipse sabiendo que está centrada en el origen, tiene ejes perpendiculares a los ejes de coordenadas, el semieje mayor está en el eje de abscisas y mide 9 y pasa por el punto $(6, 4)$.

9.9. Hallar la recta tangente y la recta normal a la elipse

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

que pasan por el punto $P = \left(3, \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right)$.

9.10. Hallar las rectas tangentes a la elipse

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

que son perpendiculares a la recta

$$x - 3y = 6.$$

9.11. Calcular la ecuación de una hipérbola sabiendo que está centrada en el origen, sus focos están en el eje de abscisas, su distancia focal es 30 y la distancia entre sus dos ramas es 24.

9.12. Hallar la ecuación de una hipérbola sabiendo que está centrada en el origen, sus focos están en el eje de abscisas, la distancia entre sus dos ramas es 12 y pasa por el punto $(-10, 4)$.

9.13. Dada la hipérbola

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1,$$

calcular sus semiejes, sus focos, los cortes con los ejes de coordenadas y sus asíntotas. Representarla gráficamente.

9.14. Hallar la recta tangente y la recta normal a la hipérbola

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

que pasan por el punto $P = (6, 3\sqrt{3} - 1)$.

9.15. Hallar las rectas tangentes a la hipérbola

$$(y+1)^2 - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

que son paralelas a las rectas

a) $y = 3x - 6$ b) $y = -\dfrac{x}{3} - 6.$

9.16. Determinar qué cónica viene dada por la ecuación

$$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0.$$

Calcular sus ejes, sus focos y sus puntos de corte con los ejes y representarla gráficamente.

9.17. Dada la ecuación

$$x^2 - 4y^2 = 9,$$

decir qué cónica representa, calcular sus semiejes, sus focos, los cortes con los ejes de coordenadas y sus asíntotas. Representar gráficamente dicha cónica.

9.18. Demostrar que

$$x^2 + 4x + 6y - 5 = 0$$

es la ecuación de una parábola y determinar su vértice, su foco y su recta directriz. Representarla gráficamente.

9.19. Determinar para cada valor $c \in \mathbb{R}$ qué curva es el conjunto de soluciones de la ecuación

$$3x^2 + 3y^2 + 2x - 4y - c = 0.$$

9.20. Calcular la recta tangente a la parábola

$$(y-2)^2 = 6(x+1)$$

que es paralela a la recta

$$y = 2x + 1.$$

9.21. Hallar la recta tangente y la recta normal a la parábola

$$(y+1)^2 = 2(x-2)$$

que pasan por el punto $P = (4, -3)$.

9.22. Hallar la recta tangente a la parábola

$$(y+1)^2 = 2(x-2)$$

que es perpendicular a la recta $x + 3y = 6$.

9.9. Soluciones

9.1. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$.

9.2. El centro es $(3, -2)$ y el radio 2.

9.3. $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$.

9.4. $\left(x + \dfrac{16}{3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{425}{9}$.

9.5. a) P_1 está en el interior de la circunferencia. Por tanto, no hay ninguna recta tangente a la circunferencia que pase por P_1. La recta normal a la circunferencia que pasa por P_1 es $y = x - 3$. b) P_2 está en la circunferencia. Por tanto, hay una recta tangente que pasa por P_2. Esta recta es $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$ y la correspondiente recta normal es $y = 1 - 2(x-1)$. c) P_3 está en el exterior de la circunferencia. Por tanto, hay dos tangentes a ésta que pasan por P_3. Estas rectas son $y = 3 - \frac{11}{2}(x+1)$ *e* $y = 3 - \frac{1}{2}(x+1)$.

9.6. Rectas tangentes buscadas: $y = -3x + 5(1 - \sqrt{2})$ e $y = -3x + 5(1 + \sqrt{2})$.

9.7. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$.

9.8. $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{5y^2}{144} = 1$.

9.9. La recta tangente buscada es $y - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-3)$ y la recta normal es $y - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x-3)$.

9.10. Rectas tangentes buscadas: $y = -3x + 5 - 3\sqrt{5}$ e $y = -3x + 5 + 3\sqrt{5}$.

9.11. $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{81} = 1.$

9.12. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{9} = 1.$

9.13. Los semiejes son $a = 12$ y $b = 5$. Los focos están en los puntos $(-13, 0)$ y $(13, 0)$. Corta al eje de abscisas en los puntos $(-12, 0)$ y $(12, 0)$. Las asíntotas son las rectas $y = \frac{5}{12}\, x$ e $y = -\frac{5}{12}\, x$.

9.14. La recta tangente buscada es $y - 3\sqrt{3} + 1 = \sqrt{3}(x - 6)$ y la recta normal es $y - 3\sqrt{3} + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 6)$.

9.15. a) No existe ninguna recta con las condiciones requeridas. b) Las rectas tangentes buscadas son $y = -\frac{1}{3}(x + 1 - \sqrt{5})$ e $y = y = -\frac{1}{3}(x + 1 + \sqrt{5})$.

9.16. Se trata de una elipse centrada en el origen, con ejes perpendiculares a los ejes de coordenadas, con focos en $(0, -4)$ y $(0, 4)$ y cortes con los ejes en los puntos $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -5)$ y $(0, 5)$.

9.17. La ecuación es de una hipérbola. Los semiejes son $a = 3$ y $b = \frac{3}{2}$. Los focos están en los puntos $\left(-\frac{\sqrt{45}}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{45}}{2}, 0\right)$. Corta al eje de abscisas en los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$. Las asíntotas son las rectas $y = \frac{x}{2}$ e $y = -\frac{x}{2}$.

9.18. $x^2 + 4x + 6y - 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x + 2)^2 = -6\left(y - \frac{3}{2}\right)$, por lo que se trata de una parábola. Su vértice es el punto $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$, su foco está en el punto $(-2, 0)$ y su recta directriz es $y = 3$.

9.19. Pueden presentarse tres casos: a) Si $c < -\frac{5}{3}$, no hay solución. b) Si $c = -\frac{5}{3}$, la única solución es el punto $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. c) Si $c > -\frac{5}{3}$, la solución es la circunferencia de centro $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{5+3c}}{3}$.

9.20. $y = 2x + \dfrac{19}{4}.$

9.21. La recta tangente es $y + 3 = -\frac{1}{2}\,(x - 4)$ y la recta normal es $y + 3 = 2\,(x - 4)$.

9.22. La recta buscada es $y = 3x - \frac{41}{6}$.

Parte II

ANÁLISIS

10 Sucesiones. Convergencia

10.1. Introducción

En este capítulo se inicia la parte de *Análisis Matemático* del libro. En él se estudian las *sucesiones* y la propiedad de *convergencia* que algunas de éstas tienen.

Se comienza con dos casos básicos de sucesiones, como son las *progresiones aritméticas* y las *progresiones geométricas*, para las cuales se puede calcular, de forma sencilla, un término n–ésimo cualquiera, o la suma y/o producto de varios de sus términos.

A continuación se introduce el concepto general de *sucesión de números reales* y se definen posibles propiedades que cumplen algunas sucesiones, como la de ser *creciente*, *alternada*, *monótona*, *acotada inferiormente* ... Se definen también, de forma rigurosa, los conceptos de *convergencia* y *divergencia* de una sucesión, se muestran ejemplos ilustrativos y se presentan propiedades de los límites que facilitan su cálculo.

Se muestran, a continuación, algunas técnicas para calcular el límite de algunas sucesiones, como las definidas como el cociente de dos polinomios o la suma de los elementos de una sucesión geométrica con razón r tal que $|r| < 1$. Llegados a este punto, surgirá el problema de las *indeterminaciones* (del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ o 1^{∞}). Se presentarán procedimientos para evitar estas indeterminaciones en ciertos casos, para lo cual se introducirá el número irracional e como límite de una sucesión particular.

10.2. Progresiones. Sucesiones de números reales

Las *progresiones aritméticas* y *geométricas* son una buena base para un primer contacto con las sucesiones de números reales.

10.2.1. Progresiones aritméticas

Los números $2, 4, 6, 8, 10 \ldots$ tienen la particularidad de que cada uno de ellos es el resultado de sumar al anterior una cantidad constante igual a 2. Esto da pie a la siguiente:

Definición 10.1 Los números reales $\{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}$ constituyen una *progresión aritmética* de *razón* (o *diferencia*) d si cada término se obtiene sumando d unidades al anterior, es decir,

$$a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d, \ldots, a_n = a_{n-1} + d \ldots \quad \square$$

Observación 10.1 Sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}$ una progresión aritmética de razón d.

a) a_n representa un término arbitrario de la progresión, por lo que se le denomina *término general*. El término anterior a a_n es a_{n-1}, el anterior a a_{n-1} es $a_{n-2} \ldots$

b) Si $d > 0$, cada término de la progresión es mayor que el anterior, por lo que la progresión es *creciente*. Ejemplo: $2, 5, 8, 11 \ldots$ (¿cuál es la razón de esta progresión aritmética?).

c) Si $d < 0$, cada término de la progresión es menor que el anterior, por lo que la progresión es *decreciente*. Ejemplo: $2, -1, -4, -7 \ldots$ (¿cuál es la razón de esta progresión aritmética?).

d) Cualquier elemento de la progresión puede ser expresado en términos del primero. En efecto, como

$$a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \ldots,$$

en general se tiene que

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.} \tag{10.1}$$

e) Cualquier término de la progresión puede ser expresado en función de cualquier término anterior. En efecto, si $n \geq m$, a partir de (10.1) se tiene que

$$a_m = a_1 + (m-1)d \ \text{ y } \ a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Si despejamos el valor de a_1 en la primera expresión y lo sustituimos en la segunda, obtenemos

$$a_n = (a_m - (m-1)d) + (n-1)d = a_m + (n-m)d,$$

de donde se deduce que

$$\boxed{a_n = a_m + (n-m)d.} \tag{10.2}$$

Nótese que (10.1) es un caso particular de (10.2) cuando se toma $m = 1$.

f) Si consideramos los términos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, se verifica que la suma del primero y el último, del segundo y el penúltimo, del tercero y el antepenúltimo ... es constante, puesto que

$$\begin{aligned} a_2 + a_{n-1} &= (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n \\ a_3 + a_{n-2} &= (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n \\ a_4 + a_{n-3} &= (a_1 + 3d) + (a_n - 3d) = a_1 + a_n \ldots \end{aligned}$$

Por tanto, para calcular el valor S_n de la suma de los n primeros términos de la progresión aritmética, escribimos

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1. \end{cases}$$

Sumando término a término las expresiones anteriores se obtiene

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n),$$

de donde

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.}$$

Ejemplo 10.1 Los términos de la progresión aritmética que comienzan en $a_1 = 12$ y cuya diferencia es $d = -5$ son $12, 7, 2, -3, -8\ldots$ El término que ocupa el lugar 15 en la progresión es

$$a_{15} = a_1 + (15 - 1)d = 12 + 14 \times (-5) = 12 - 70 = -58.$$

De esta forma, el término que ocupa el lugar 30 es

$$a_{30} = a_{15} + (30 - 15)d = -58 + 15 \times (-5) = -58 - 75 = -133.$$

La suma de los 30 primeros términos de esta progresión aritmética vale

$$S_{30} = \frac{30(a_1 + a_{30})}{2} = \frac{30(12 - 133)}{2} = 15(-121) = -1815. \quad \square$$

10.2.2. Progresiones geométricas

Los números $2, 4, 8, 16, 32\ldots$ tienen la particularidad de que cada uno de ellos es el resultado de multiplicar al anterior por una cantidad constante igual a 2. Esto da pie a la siguiente:

Definición 10.2 Los números reales $\{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}$ constituyen una *progresión geométrica* de *razón* (o *cociente*) r si cada término se obtiene multiplicando por r unidades al anterior, es decir,

$$a_2 = a_1 r, a_3 = a_2 r, \ldots, a_n = a_{n-1} r \ldots \quad \square$$

Observación 10.2 Sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}$ una progresión geométrica de razón r.

a) a_n representa un término arbitrario de la progresión, por lo que se le denomina *término general*. El término anterior a a_n es a_{n-1}, el anterior a a_{n-1} es $a_{n-2}\ldots$

b) Si todos los términos de la progresión geométrica son positivos (respectivamente, negativos) y $r > 1$, cada término de la progresión es mayor que el anterior, por lo que la progresión es *creciente* (respectivamente, *decreciente*). Ejemplo: $2, 6, 18, 54 \ldots$ (¿cuál es la razón de esta progresión geométrica?).

c) Si todos los términos de la progresión geométrica son positivos (respectivamente, negativos) y $0 < r < 1$, cada término de la progresión es menor (respectivamente, mayor) que el anterior, por lo que la progresión es *decreciente* (respectivamente, *creciente*). Ejemplo: $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27} \ldots$ (¿cuál es la razón de esta progresión geométrica?).

d) Si $r < 0$, los términos de la progresión cambian alternativamente de signo. Ejemplo: $2, -4, 8, -16, 32 \ldots$ (¿cuál es la razón de esta progresión geométrica?).

e) Cualquier elemento de la progresión puede ser expresado en términos del primero. En efecto, como

$$a_2 = a_1 r, a_3 = a_2 r = a_1 r^2, a_4 = a_3 r = a_1 r^3 \ldots,$$

en general se tiene que

$$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}.} \tag{10.3}$$

f) Cualquier término de la progresión puede ser expresado en función de cualquier término anterior. En efecto, si $n \geq m$, a partir de (10.3) se tiene que

$$a_m = a_1 r^{m-1} \text{ y } a_n = a_1 r^{n-1}.$$

Si despejamos el valor de a_1 en la primera expresión y lo sustituimos en la segunda, obtenemos

$$a_n = \frac{a_m}{r^{m-1}} r^{n-1} = a_m r^{n-m},$$

de donde se deduce que

$$\boxed{a_n = a_m r^{n-m}.} \tag{10.4}$$

Nótese que (10.3) es un caso particular de (10.4) cuando se toma $m = 1$.

g) Si consideramos los términos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, se verifica que el producto del primero y el último, del segundo y el penúltimo, del tercero y el antepenúltimo ... es constante, puesto que

$$a_2 a_{n-1} = a_1 r \frac{a_n}{r} = a_1 a_n$$
$$a_3 a_{n-2} = a_1 r^2 \frac{a_n}{r^2} = a_1 a_n$$
$$a_4 a_{n-3} = a_1 r^3 \frac{a_n}{r^3} = a_1 a_n \ldots$$

Por tanto, para calcular el valor P_n del producto de los n primeros términos de la progresión geométrica escribimos

$$\begin{cases} P_n = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \\ P_n = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1. \end{cases}$$

Multiplicando término a término las expresiones anteriores, se obtiene

$$(P_n)^2 = (a_1 a_n)(a_2 a_{n-1}) \cdots (a_{n-1} a_2)(a_n a_1) = (a_1 a_n)^n, \tag{10.5}$$

de donde

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$$

(nótese que de (10.5) se deduce que $(a_1 a_n)^n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$). Ahora bien, ¿cuál es el signo de P_n? Claramente, para cada caso concreto es fácil saberlo, pero ¿existe alguna fórmula general que nos permita obtener el valor concreto de P_n para cada $n \in \mathbb{N}$? La respuesta es afirmativa y se puede obtener, por ejemplo, a partir de la noción de *parte entera* de un número real:

Definición 10.3 Sea $r \in \mathbb{R}$. Se define la *parte entera* de r, y se denota $[r]$, como

$$[r] = m,$$

siendo m el mayor número entero tal que $m \leq r$. De esta forma, se puede escribir

$$r = [r] + d,$$

siendo $d \in [0, 1)$ la *parte decimal* de r. $\square$

Ejemplo 10.2 Como $4'7 = 4 + 0'7$ y $-2'6 = -3 + 0'4$, se verifica que $[4'7] = 4$ y $[-2'6] = -3$. $\square$

Regresando al problema que habíamos planteado de cómo obtener, de manera explícita, el valor del producto P_n, se verifica que

$$P_n = \begin{cases} \sqrt{(a_1 a_n)^n} & \text{si} \quad r > 0 \ \text{y} \ a_1 > 0 \\ (-1)^n \sqrt{(a_1 a_n)^n} & \text{si} \quad r > 0 \ \text{y} \ a_1 < 0 \\ (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sqrt{(a_1 a_n)^n} & \text{si} \quad r < 0 \ \text{y} \ a_1 > 0 \\ (-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \sqrt{(a_1 a_n)^n} & \text{si} \quad r < 0 \ \text{y} \ a_1 < 0. \end{cases}$$

En particular, si los términos de la progresión geométrica son positivos, se verifica que

$$\boxed{P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}.}$$

Ejemplo 10.3 Consideremos las progresiones geométricas:

i) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \ldots$ Como $a_1 = 1 > 0$ y $r = 2 > 0$, se verifica que

$$P_3 = \sqrt{(1 \cdot 4)^3} = 2^3 = 8 \ \text{ y } \ P_6 = \sqrt{(1 \cdot 32)^6} = 2^{15} = 32768.$$

ii) $1, -2, 4, -8, 16, -32, 64 \ldots$ Como $a_1 = 1 > 0$ y $r = -2 < 0$, se verifica que

$$P_3 = (-1)^{\left[\frac{3}{2}\right]}\sqrt{(1 \cdot 4)^3} = -2^3 = -8 \text{ y } P_6 = (-1)^3\sqrt{(1 \cdot 32)^6} = -32768. \quad \square$$

h) Para calcular el valor de la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \tag{10.6}$$

multiplicamos la expresión por la razón $r \neq 1$ (el caso $r = 1$ es trivial pues $S_n = na_1$), obteniendo

$$S_n r = a_1 r + a_2 r + \cdots + a_{n-1} r + a_n r = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_n r. \tag{10.7}$$

De esta forma, haciendo la diferencia entre (10.7) y (10.6), se obtiene que

$$(1 - r)S_n = a_1 - a_n r,$$

de donde

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}.} \tag{10.8}$$

Ejemplo 10.4 Los términos de la progresión geométrica que comienzan en $a_1 = 3$ y cuya razón es $r = 2$ son $3, 6, 12, 24, 48 \ldots$ El término que ocupa el lugar 8 en la progresión es

$$a_8 = a_1 r^{8-1} = 3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384.$$

De esta forma, el término que ocupa el lugar 12 es

$$a_{12} = a_8 r^{12-8} = 384 \times 2^4 = 384 \times 16 = 6144.$$

El producto de los 12 primeros términos de esta progresión geométrica vale

$$\begin{aligned} P_{12} &= \sqrt{(a_1 a_{12})^{12}} = \sqrt{(3 \times (3 \times 2^{11}))^{12}} = \sqrt{3^{12} \times 3^{12} \times 2^{132}} \\ &= 3^{12} \times 2^{66} \simeq 3'9213 \times 10^{25} \end{aligned}$$

y la suma de estos 12 primeros términos es

$$S_{12} = \frac{a_1 - a_{12} r}{1 - r} = \frac{3 - 6144 \times 2}{1 - 2} = 12285. \quad \square$$

10.2.3. Sucesiones de números reales

Definición 10.4 Una *sucesión* de números reales es una aplicación entre el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, es decir,

$$\begin{array}{rcc} a : \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a(n) = a_n. \end{array}$$

Los elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}$ son los *términos de la sucesión* y a_n es el *término general* de la misma. La sucesión anterior suele expresarse, de forma abreviada, como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\square$

Ejemplo 10.5 El término general de las sucesiones

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\right\}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 5, 7, 9 \ldots\},$$

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{4, 4, 4, 4 \ldots\} \text{ y } \{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1 \ldots\}$$

es, respectivamente,

$$a_n = \frac{1}{n}, b_n = 2n + 1, c_n = 4 \text{ y } d_n = (-1)^n. \quad \square$$

Observación 10.3 Las progresiones aritméticas y geométricas son casos particulares de sucesiones. $\square$

10.3. Límites de sucesiones

Definición 10.5 Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es:

a) *Creciente*, si cada término es mayor o igual que el anterior, es decir,

$$a_n \geq a_{n-1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

b) *Estrictamente creciente*, si cada término es mayor que el anterior, es decir,

$$a_n > a_{n-1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

c) *Decreciente*, si cada término es menor o igual que el anterior, es decir,

$$a_n \leq a_{n-1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

d) *Estrictamente decreciente*, si cada término es menor que el anterior, es decir,

$$a_n < a_{n-1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

e) *Monótona*, si es creciente o decreciente.

f) *Constante*, si es creciente y decreciente a la vez, es decir,

$$a_n = a_{n-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

g) *Alternada* (u *oscilante*), si cada término tiene signo opuesto al anterior. $\square$

Ejemplo 10.6 Si consideramos las sucesiones del Ejemplo 10.5, se tiene que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona estrictamente decreciente, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona estrictamente creciente, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ es constante y $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ es alternada. $\square$

Definición 10.6 Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está:

a) *Acotada superiormente*, si existe un número real $\Lambda \in \mathbb{R}$ mayor o igual que todos los términos de la sucesión, es decir,

$$a_n \leq \Lambda,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Se dice que Λ es una *cota superior* de la sucesión.

i) La menor de las cotas superiores de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada superiormente se denomina *supremo* de la sucesión y se denota

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

ii) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente, el supremo de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty.$$

b) *Acotada inferiormente*, si existe un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ menor o igual que todos los términos de la sucesión, es decir,

$$a_n \geq \lambda,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Se dice que λ es una *cota inferior* de la sucesión.

i) La mayor de las cotas inferiores de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada inferiormente se denomina *ínfimo* de la sucesión y se denota

$$\operatorname{ínf}_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

ii) Si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada inferiormente, el ínfimo de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\infty.$$

c) *Acotada*, si está acotada superior e inferiormente. □

Observación 10.4 Nótese que si Λ es una cota superior (respectivamente, λ es una cota inferior) de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces cualquier número mayor que Λ (respectivamente, menor que λ) es también una cota superior (respectivamente, inferior) de la misma. □

Ejemplo 10.7 Si consideramos las sucesiones del Ejemplo 10.5, se tiene que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada (una cota inferior es, por ejemplo, $\lambda = -2$ y una cota superior es, por ejemplo, $\Lambda = 2$, su ínfimo es 0 y su supremo es 1), mientras que la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada inferiormente (por ejemplo, por $\lambda = 1$), su ínfimo es 3 pero no está acotada superiormente (por lo que el supremo es $+\infty$). □

Observación 10.5 Consideremos las sucesiones:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \ldots\right\} \text{ y } \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{4, 4'9, 4'99, 4'999 \ldots\}.$$

Si se representan gráficamente los términos de las sucesiones anteriores en la recta real, se observa que, en ambos casos, existe un número (0 y 5, respectivamente) al que los términos de la sucesión se van aproximando cada vez más a medida que se avanza en ella. Así, por ejemplo, en el caso de la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, para cualquier número real positivo ε (por pequeño que sea) se verifica que existe un valor $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que todos los términos de la sucesión b_n posteriores a b_{n_0} verifican que la distancia de b_n a 5 es menor que ε. □

Los comentarios de la Observación 10.5 dan pie a la siguiente noción:

Definición 10.7 Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *convergente* si existe un número real $\ell \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Se dice que $\ell \in \mathbb{R}$ es el *límite* de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cuando n tiende a infinito, y se denota

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell. \quad \square$$

Observación 10.6 En *lenguaje matemático*, $\ell \in \mathbb{R}$ es el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cuando n tiende a infinito si

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n - \ell| < \varepsilon \;\forall\, n \geq n_0.}$$

Nótese que, como para todo $n \geq n_0$ se tiene la equivalencia:

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon),$$

la definición de límite indica que, desde un término en adelante, todos los términos de la sucesión se encuentran en el intervalo abierto de centro ℓ y radio ε. □

Definición 10.8 Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales y $\ell \in \mathbb{R}$. Se dice que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell^+ \text{ (respectivamente, } \lim_{n\to\infty} a_n = \ell^-)$$

cuando

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

y se verifica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n > \ell \,\forall\, n \geq n_0 \text{ (respectivamente, } a_n < \ell \,\forall\, n \geq n_0). \quad \square$$

Ejemplo 10.8 $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + e^{-n}) = 1^+$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1-n} = 0^-$. □

Definición 10.9 Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales.

a) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *divergente* a $+\infty$ si para todo $\Lambda > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n > \Lambda, \,\forall\, n \geq n_0.$$

Se denota

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

b) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *divergente* a $-\infty$ si para todo $\Lambda > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n < -\Lambda, \,\forall\, n \geq n_0.$$

Se denota

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty. \quad \square$$

Ejemplo 10.9 Si consideramos las sucesiones:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7 \ldots\} \qquad \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, -2, -3, -4 \ldots\}$$

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \ldots\right\} \qquad \{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \{4, 4'9, 4'99, 4'999 \ldots\}$$

$$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \{4'1, 4'01, 4'001 \ldots\} \qquad \{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -2, 1'9, -2'9, 1'99, -2'99 \ldots\},$$

se tiene que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge a $+\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge a $-\infty$, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene límite y las sucesiones $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes con

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0, \lim_{n\to\infty} d_n = 5 \text{ y } \lim_{n\to\infty} e_n = 4. \quad \square$$

Proposición 10.1 (Propiedades de los límites) Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales.

1) El límite de una sucesión, si existe, es único.

2) Toda sucesión convergente está acotada.

3) Toda sucesión creciente (respectivamente, decreciente) y acotada superiormente (respectivamente, inferiormente) es convergente. En particular, toda sucesión monótona y acotada es convergente.

4) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell_1 \in \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \ell_1 \ell_2$.

5) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\ell}$.

6) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0^{\pm} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \pm\infty$. En general, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$[1].

7) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell_1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell_2 \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.

8) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0^{\pm} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \ell > 0 \\ \mp\infty & \text{si } \ell < 0. \end{cases}$

9) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

10) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

11) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \pm\infty$.

12) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \ell > 0 \\ \mp\infty & \text{si } \ell < 0. \end{cases}$

Las propiedades 6) y 9) indican que $\boxed{\dfrac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty}$ y $\boxed{\dfrac{1}{\pm\infty} = 0.}$

DEMOSTRACIÓN. Demostramos los tres primeros apartados:

[1]Por ejemplo, si $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y, sin embargo, no existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

1) Supongamos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene dos límites $\ell_1 \in \mathbb{R}$ y $\ell_2 \in \mathbb{R}$ y que $\ell_1 \neq \ell_2$. Sea $d = |\ell_1 - \ell_2|$ la distancia entre ambos límites y $\varepsilon = \frac{d}{2}$. De acuerdo con la Definición 10.7, como $\ell_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, se verifica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - \ell_1| < \varepsilon \, \forall \, n \geq n_0.$$

Pero entonces, para todo $n \geq n_0$ se tiene que (véase la Observación 8.2 aplicada al valor absoluto)

$$|a_n - \ell_2| = |(a_n - \ell_1) - (\ell_2 - \ell_1)| \geq |\ell_2 - \ell_1| - |a_n - \ell_1| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,$$

con lo que, de acuerdo con la Definición 10.7, no se cumpliría que $\ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Por tanto, no es posible que existan dos límites finitos distintos.

Supongamos ahora que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene dos límites $\ell \in \mathbb{R}$ y $+\infty$ (el caso de que la sucesión tenga dos límites $\ell \in \mathbb{R}$ y $-\infty$ se aborda de manera análoga). Veamos que esto no puede ser, porque se llega a una contradicción. Como $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, por la Definición 10.7 se verifica que dado $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - \ell| < 1, \, \forall \, n \geq n_0.$$

Entonces, por las propiedades del valor absoluto (véase la Observación 1.25), se tiene que

$$a_n < \ell + 1 \leq |\ell| + 1, \, \forall \, n \geq n_0.$$

De esta forma, eligiendo $\Lambda = |\ell| + 1 > 0$, se verifica que

$$a_n < \Lambda, \, \forall \, n \geq n_0,$$

por lo que, dado $\Lambda = |\ell| + 1 > 0$, <u>no existe</u> $m_0 \in \mathbb{N}$ para el que se cumpla que

$$a_n > \Lambda, \, \forall \, n \geq m_0,$$

lo cual significa, de acuerdo con la Definición 10.9, que el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no puede ser $+\infty$. Por tanto, no puede ocurrir que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tenga dos límites $\ell \in \mathbb{R}$ y $+\infty$.

Dejamos para el lector hacer la prueba de que tampoco puede ocurrir que $-\infty$ y $+\infty$ sean límites de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, lo que concluye la demostración de este apartado.

2) Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ y veamos, de acuerdo con la Definición 10.6, que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada inferior y superiormente. Por la Definición 10.7, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \, \forall \, n \geq n_0.$$

Entonces, por la desigualdad triangular para el valor absoluto (véase la Observación 1.25), se tiene que

$$|a_n| = |(a_n + \ell) - \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| \leq \varepsilon + |\ell| \, \forall \, n \geq n_0.$$

De esta forma, si consideramos

$$\Lambda = \text{máx} \{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, \varepsilon + |\ell|\} > 0,$$

se verifica que

$$|a_n| \leq \Lambda, \ \forall \, n \in \mathbb{N}$$

y, por tanto,

$$-\Lambda \leq a_n \leq \Lambda, \ \forall \, n \in \mathbb{N},$$

de donde se deduce que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada inferior y superiormente y, por tanto, está acotada.

3) Supongamos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y está acotada superiormente (si la sucesión es decreciente y está acotada inferiormente, se argumenta de forma análoga). Si $\Lambda = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$, veamos que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \Lambda.$$

En efecto, por definición de supremo (véase la Definición 10.6), dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Lambda - \varepsilon < a_{n_0}.$$

De esta forma, como la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente, se verifica que

$$\Lambda - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \Lambda < \Lambda + \varepsilon, \ \forall \, n \geq n_0$$

y, por tanto,

$$|a_n - \Lambda| < \varepsilon, \ \forall \, n \geq n_0,$$

lo cual concluye la prueba. $\square$

Ejemplo 10.10 Consideremos las siguientes sucesiones:

a) Si $a_n = 1 + \dfrac{4}{n^2}$ y $b_n = \dfrac{1}{n}$, se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + 1 + \frac{4}{n^2} \right) = 1$$

y

$$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^3} \right) = 0.$$

b) Si $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+4}$, dividiendo por n^2 en el numerador y denominador, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^2}{n^2}}{\dfrac{n^2+4}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{4}{n^2}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)} = 1.$$

c) Si $a_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty.$

d) Si $a_n = \dfrac{n^3+4n}{2n^3+7}$, dividiendo por n^3 en el numerador y denominador, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+4n}{2n^3+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^3+4n}{n^3}}{\dfrac{2n^3+7}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{4}{n^2}}{2+\dfrac{7}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{7}{n^3}\right)} = \frac{1}{2}.$$

e) Si $a_n = 1 - \dfrac{6}{n^2}$ y $b_n = 5 + \dfrac{9}{n^3}$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^2-6}{n^2}}{\dfrac{5n^3+9}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-6n}{5n^3+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^3-6n}{n^3}}{\dfrac{5n^3+9}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\dfrac{6}{n^2}}{5+\dfrac{9}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{9}{n^3}\right)} = \frac{1}{5}.$$

f) Si $a_n = n^2+4$ y $b_n = n$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(n + \frac{4}{n}\right) = +\infty$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{n^2}}{\dfrac{n^2+4}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{4}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

g) Si $a_n = n \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

h) Si $a_n = \dfrac{1}{n}$ y $b_n = (-1)^n \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0.$

i) Si $a_n = n$ y $b_n = (-1)^n \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (n + (-1)^n) = +\infty.$

j) Si $a_n = n$ y $b_n = 3 + \dfrac{1}{n} \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} (3n+1) = +\infty.$ □

Observación 10.7 Argumentando como en los apartados b), d) y e) del Ejemplo 10.10, se verifica que el límite del cociente de dos polinomios es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad p > q \ \text{ y } \ \dfrac{a_p}{b_q} > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad p > q \ \text{ y } \ \dfrac{a_p}{b_q} < 0 \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{si} \quad p = q \\ 0 & \text{si} \quad p < q, \end{cases}$$

supuesto que $a_p \neq 0$ y $a_q \neq 0$. Así, por ejemplo, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 5n + 7}{-3n^2 + 3} = -\infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 5n + 7}{-3n^3 + 3} = -\frac{2}{3} \text{ y } \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 5n + 7}{-3n^4 + 3} = 0.$$ □

Observación 10.8 Consideremos una progresión geométrica $\{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}$ de razón $r \neq 1$. Como se ha visto en (10.8), la suma de los m primeros términos de esta progresión

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

vale

$$S_m = \frac{a_1 - a_m r}{1-r} = \frac{a_1 - a_1 r^{m-1} r}{1-r} = a_1 \frac{1-r^m}{1-r} = \frac{a_1}{1-r} - a_1 \frac{r^m}{1-r}$$

(vésase (10.3)). Como se observa, la suma parcial S_m consta de de dos términos: el primero es constante en m, mientras que el segundo varía con m. La suma ilimitada de todos los términos de la progresión geométriva se denomina *serie geométrica*, a la que denotamos por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n = \lim_{m\to\infty} S_m. \tag{10.9}$$

El valor de la serie gemétrica viene dado en función de r:

1) Si $|r| > 1$, el término $|r|^m$ crece a medida que aumenta m y llega a ser mayor que cualquier número positivo por grande que sea. Se dice que la serie geométrica (10.9) es *divergente*.

2) Si $|r| < 1$, el término $|r|^m$ disminuye a medida que aumenta m y llega a ser menor que cualquier número positivo por pequeño que sea. Se dice que la serie geométrica (10.9) es *convergente* y su suma vale

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}.}$$

3) Si $r = 1$, entonces $a_n = a_1 \forall\, n \in \mathbb{N}$, por lo que $S_m = m a_1$ y la serie geométrica (10.9) es *divergente*.

4) Si $r = -1$, entonces $a_n = (-1)^n a_1 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$S_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es par} \\ a_1 & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

y, por tanto, no existe $\lim\limits_{m\to\infty} S_m$. □

Ejemplo 10.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$. Es decir,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{1000}} + \cdots + \frac{1}{2^{1234567890}} + \cdots = 1. \quad \square$$

Observación 10.9 Una fracción decimal periódica pura, con parte entera igual a 0 (véase la Definición 10.3), puede considerarse la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
0'\,\widehat{35} &= 0'353535\ldots = 0'35 + 0'0035 + 0'000035 + 0'00000035\cdots \\
&= 0'35 + 0'35 \times 10^{-2} + 0'35 \times 10^{-4} + 0'35 \times 10^{-6} + \cdots \\
&= 0'35\,(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + 10^{-8} + 10^{-10} + \cdots) \\
&= 0'35 \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-2n} = 0'35 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2n}} = 0'35 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^2}\right)^n \\
&= 0'35 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n = 0'35\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{100}} = 0'35\,\frac{100}{100-1} = \frac{35}{99}.
\end{aligned}$$

Nótese que la fracción tiene por numerador el periodo y por denominador tantos nueves como cifras posea el periodo. □

Observación 10.10 (Indeterminaciones) En algunas situaciones, las propiedades reseñadas en la Proposición 10.1 no permiten calcular directamente el límite de una sucesión a partir de los límites conocidos de otras sucesiones. Así, por ejemplo, si dos sucesiones a_n y b_n son divergentes, su diferencia $a_n - b_n$ puede ser una sucesión:

a) Divergente. Ejemplo: si $a_n = n^2$ y $b_n = n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \lim_{n\to\infty} n(n-1) = +\infty.$$

b) Convergente. Ejemplo: si $a_n = b_n = n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(n - n) = 0.$$

c) Oscilante. Ejemplo: si $a_n = n$ y $b_n = n + (-1)^n$, entonces

$$a_n - b_n = n - n - (-1)^n = (-1)^{n+1} = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Estos casos son los llamados *casos de indeterminación* en el cálculo de límites de sucesiones. Las indeterminaciones más frecuentes son:

1) $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$ Cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, no es posible determinar, a priori, el comportamiento de la sucesión $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ cuando n tiende a infinito. Ejemplos:

a_n	b_n	$\dfrac{a_n}{b_n}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$
n^2	n	n	$+\infty$
n	n	1	1
$n(2+(-1)^n)$	n	$2+(-1)^n$	No existe

2) $\boxed{\infty - \infty}$ Cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, no es posible determinar, a priori, el comportamiento de la sucesión $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ cuando n tiende a infinito. Ejemplos:

a_n	b_n	$a_n - b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n)$
n^2	n	$n(n-1)$	$+\infty$
n	n	0	0
$n+(-1)^n$	n	$(-1)^n$	No existe

3) $\boxed{\dfrac{0}{0}}$ Cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, no es posible determinar, a priori, el comportamiento de la sucesión $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ cuando n tiende a infinito. Ejemplos:

a_n	b_n	$\dfrac{a_n}{b_n}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$
$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n^2}$	n	$+\infty$
$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n}$	1	1
$\dfrac{2+(-1)^n}{n}$	$\dfrac{1}{n}$	$2+(-1)^n$	No existe

4) $\boxed{1^\infty}$ Cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, no es posible determinar, a priori, el comportamiento de la sucesión $\{a_n^{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ cuando n tiende a infinito. Este tipo de indeterminación se estudia en la Sección 10.4. $\square$

10.4. El número e

Consideremos la sucesión de números positivos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}. \tag{10.10}$$

Algunos términos de esta sucesión se muestran en la Tabla 10.1.

n	x_n
1	$2'000000000000000$
2	$2'250000000000000$
3	$2'370370370370370$
4	$2'441406250000000$
5	$2'488319999999999$
6	$2'521626371742114$
7	$2'546499697040712$
8	$2'565784513950348$
9	$2'581174791713198$
10	$2'593742460100002$

n	x_n
100	$2'704813829421529$
300	$2'713765157942784$
500	$2'715568520651728$
1000	$2'716923932235594$
2000	$2'717602569322840$
3000	$2'717828919874323$
4000	$2'717942121080266$
5000	$2'718010050101555$
10000	$2'718145926824926$
50000	$2'718254646126732$

Tabla 10.1: Términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada en (10.10).

Proposición 10.2 *La sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definida en* (10.10) *es estrictamente creciente.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos, en primer lugar, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\begin{aligned} x_n = 1 &+ \frac{1}{1!} + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \cdots \\ &+ \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)}{(n-1)!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!} \end{aligned} \tag{10.11}$$

(nótese que el último sumando de (10.11) es igual a $\frac{1}{n^n}$, ya que

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!} = \frac{\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\cdots\frac{1}{n}}{n!} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}n!} = \frac{1}{n^n}).$$

En efecto, aplicando el binomio de Newton (véase el Teorema 2.1), se verifica que

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2}{(n-1)!}\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-3}{n}\right)}{(n-2)!} \\
&\quad + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)}{(n-1)!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!},
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. Utilizando ahora que

$$-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

la relación (10.11) determina que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
x_n &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1-\frac{1}{n+1}}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}{3!} + \cdots \\
&\quad + \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n+1}\right)}{(n-1)!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)}{n!} \\
&\quad + \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!} = x_{n+1},
\end{aligned}$$

donde se ha añdido el último sumando (que es positivo) y se ha utilizado la relación (10.11) aplicada a $n+1$. De esta forma, hemos probado que

$$x_n < x_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

lo que significa que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente. $\square$

Como la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida en (10.10) verifica que $x_1 = 2$ y, por la Proposición 10.2, es estrictamente creciente, se tiene que

$$x_n \geq x_1 = 2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Puede demostrarse que $\Lambda = 3$ es una cota superior de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, por lo que todos sus términos verifican que

$$2 \leq x_n < 3, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{10.12}$$

Corolario 10.1 *La sucesión* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definida en* (10.10) *es convergente. Su límite es el* número e*, es decir,*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 10.2 sabemos que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente y, por (10.12), que está acotada superiormente. Por tanto, basta aplicar la Proposición 10.1 para concluir el resultado. □

Definición 10.10 El *número* e está definido como

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}},}$$

siendo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cualquier sucesión convergente con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Observación 10.11 Cuando n tiende a infinito, los productos que están en los numeradores de cada sumando de la expresión (10.11) tienden a 1, por lo que el sumando k–ésimo de esta expresión tiende a $\frac{1}{k!}$. Por tanto, una forma alternativa de definir el número e es

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \quad \square$$

Observación 10.12

a) Puede demostrarse que el número e tiene infinitas cifras decimales no periódicas y es, por tanto, un número *irracional*. Las primeras cifras de este número son

$$\boxed{e = 2'71828182845905\ldots}$$

b) Como veremos en el Capítulo 11, el número e es la base de los *logaritmos neperianos*.

c) Por la propia definición, también podemos expresar el número e como

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n},}$$

siendo $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ cualquier sucesión que verifique que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$.

d) Como hemos comentado anteriormente, cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ no es posible determinar, a priori, el comportamiento de la sucesión $\left\{a_n^{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ cuando n tiende a infinito. Ejemplos:

a_n	b_n	$a_n^{b_n}$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$
$1+\dfrac{1}{n}$	n^2	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$	$+\infty$
$1+\dfrac{1}{n}$	n	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$	e

e) En muchas ocasiones pueden calcularse límites de sucesiones con indeterminaciones del tipo 1^{∞} utilizando la expresión del número e. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-1}\\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-1}\\ &= e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq 0'3679\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{3}}\right)^{-\frac{n}{3}}\right)^{-3}\\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{3}}\right)^{-\frac{n}{3}}\right)^{-3}\\ &= e^{-3} = \frac{1}{e^3} \simeq 0'0498.\end{aligned}$$

f) En general, si $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$, se verifica que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\beta_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n - 1)\beta_n},} \tag{10.13}$$

puesto que

$$\alpha_n^{\beta_n} = (1 + (\alpha_n - 1))^{\beta_n} = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_n - 1}}\right)^{\beta_n} = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_n - 1}}\right)^{\frac{1}{\alpha_n - 1}(\alpha_n - 1)\beta_n}$$

$$= \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_n - 1}}\right)^{\frac{1}{\alpha_n - 1}}\right)^{(\alpha_n - 1)\beta_n} \longrightarrow e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n - 1)\beta_n}.$$

Así, por ejemplo, para calcular

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{3n+5},$$

calculamos primeramente

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-2} - 1\right)(3n+5) = \lim_{n\to\infty}\frac{5(3n+5)}{n-2} = 5\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{n-2} = 5 \times 3 = 15.$$

De esta forma, aplicando la fórmula (10.13), se tiene que $\ell = e^{15}$. □

10.5. Problemas

10.1. Hallar el término general de la sucesión $\{0, 3, 6, 9 \ldots\}$ y la fórmula de la suma de sus n primeros términos.

10.2. Hallar el término 26 de una progresión aritmética si el término 12 es 140 y la razón vale -3.

10.3. Calcular la fórmula de la suma de los n primeros números naturales.

10.4. Determinar el valor de n sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 2, la razón 3 y la suma de los n primeros términos 3775.

10.5. Si el primer término de una progresión geométrica es $0'1$ y el segundo $0'2$, ¿cuál es la razón? Escribir los 6 primeros términos de dicha progresión.

10.6. Hallar el término sexto de una progresión geométrica de razón 2 si el primer término es 3.

10.7. Hallar el producto de los 5 primeros términos de una progresión geométrica con primer término $\frac{1}{2}$ y razón 2.

10.8. Sabiendo que el primer término de una progresión geométrica es 2, el último 2048 y la suma de los n primeros términos 2730, hallar n y la razón de la progresión.

10.9. Demostrar que cada término de una progresión aritmética es la *media aritmética* del anterior y del posterior, es decir, se verifica que

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

10.10. Demostrar que cada término de una progresión geométrica de términos positivos es la *media geométrica* del anterior y del posterior, es decir, se verifica que

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

10.11. Hallar tres números naturales sabiendo que forman una progresión aritmética, su suma es 12 y su producto 28.

10.12. Hallar la suma de la serie geométrica $2 - \frac{4}{7} + \frac{8}{49} - \frac{16}{343} + \cdots$

10.13. Un conejo se encuentra a 2 m de su madriguera. Si va saltando hacia ella en línea recta, el primer salto que da es de 1 m y la longitud de cada salto es la tercera parte del salto anterior, ¿llegará a la madriguera? (**<u>Nota</u>**: Hay que razonar la respuesta).

10.14. Expresar los siguientes números decimales en forma de fracción irreducible:

a) $0'\widehat{6}$ b) $0'\widehat{45}$ c) $0'\widehat{48}$ d) $0'0\widehat{3}$ e) $0'0\widehat{30}$ f) $0'8\widehat{3}$.

10.15. Un mendigo pide hospitalidad a un avaro por un periodo de 30 días, haciéndole la siguiente proposición:

> “Yo le pagaré 1€ por el primer día, 2€ por el segundo día, 3€ por el tercero y así sucesivamente. A cambio, usted me dará como limosna $0'01$€ el primer día y, cada día que pase, me doblará la limosna”.

El avaro aceptó, sin dudar, rápidamente el trato. ¿Cuál es el balance al final de los 30 días?

10.16. Determinar el término general de las siguientes sucesiones:

a) $2, 4, 6, 8\ldots$ b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\ldots$ c) $4, -4, 4, -4\ldots$

d) $1, 3, 5, 7\ldots$ e) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}\ldots$ f) $\frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}\ldots$

10.17. Estudiar la monotonía de las sucesiones $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{\frac{3n+2}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. ¿Están acotadas? ¿Son convergentes? En caso afirmativo, calcular sus límites.

10.18. Calcular los límites, cuando n tiende a infinito, de las siguientes sucesiones:

a) $1+\dfrac{1}{n}$ b) $\dfrac{2n+1}{3n}$ c) $\dfrac{2n^2+10}{n^2+3}$ d) $\dfrac{10^{100}n^2+70n-45}{n^3-2}$

e) $1-\dfrac{10}{3^n}$ f) $\sqrt{4-\dfrac{3}{n^2}}-\sqrt{5-\dfrac{2}{n^3}}$ g) $\left(4+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$ h) $\cos(n\pi)$

i) $\left(4+\dfrac{15}{n}\right)^2$ j) $\dfrac{(-1)^{n+3}}{2n^2}$ k) $n-100\sqrt{n}$ l) $2^n-100\times 2^{n-1}$

m) $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$ n) $\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^{4n}$ o) $\left(1+\dfrac{1}{2n-6}\right)^{4n}$ p) $\left(\dfrac{2n+1}{2n-2}\right)^{2n}$.

10.19. Calcular las soluciones de la siguiente ecuación

$$1=\operatorname{sen}(\alpha)+\operatorname{sen}^2(\alpha)+\operatorname{sen}^3(\alpha)+\operatorname{sen}^4(\alpha)+\cdots$$

10.6. Soluciones

10.1. $a_n=3(n-1)$ y $S_n=\dfrac{3(n-1)n}{2}$.

10.2. $a_{26}=98$.

10.3. $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

10.4. $n=50$.

10.5. $r=2,\ a_1=0'1,\ a_2=0'2,\ a_3=0'4,\ a_4=0'8,\ a_5=1'6,\ a_6=3'2$.

10.6. $a_6=96$.

10.7. $P_5=32$.

10.8. $r=4$ y $n=6$.

10.9 Basta desarrollar la expresión $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ y comprobar que coincide con a_n.

10.10 Basta desarrollar la expresión $\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$ y comprobar que coincide con a_n.

10.11 Hay dos posibles respuestas:

$$\begin{cases} a_1=1, a_2=4, a_3=7 & \text{si} \quad d=3 \\ a_1=7, a_2=4, a_3=1 & \text{si} \quad d=-3. \end{cases}$$

10.12. $S = \dfrac{14}{9} \simeq 1'5556.$

10.13. No.

10.14. a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{5}{11}$ c) $\dfrac{16}{33}$ d) $\dfrac{1}{30}$ e) $\dfrac{1}{33}$ f) $\dfrac{5}{6}$.

10.15. El avaro debe dar al mendigo $10736953'23$€.

10.16. a) $a_n = 2n$ b) $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ c) $c_n = 4(-1)^{n+1}$ d) $d_n = 2n-1$
e) $e_n = \dfrac{n}{2n+1}$ f) $f_n = \dfrac{n+1}{n+4}$.

10.17. Las sucesiones $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{\frac{3n+2}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ son estrictamente monótonas (creciente y decreciente, respectivamente) y acotadas, por lo que son convergentes. Sus límites son, respectivamente, 2 y $\frac{3}{2}$.

10.18. a) 1 b) $\dfrac{2}{3}$ c) 2 d) 0 e) 1 f) $2-\sqrt{5}$ g) $+\infty$ h) No existe i) 16
j) 0 k) $+\infty$ l) $-\infty$ m) $\dfrac{1}{2}$ n) $\dfrac{1}{e^{12}} \simeq 6'1442 \times 10^{-6}$ o) $e^2 \simeq 7'3891$
p) $e^3 \simeq 20'0855$.

10.19. $\alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

11 Funciones reales

11.1. Introducción

Las funciones se utilizan para representar fenómenos o situaciones que cambian, ya sea con respecto al tiempo (por ejemplo, la evolución de la temperatura a lo largo de un día), con respecto al espacio (por ejemplo, la altura sobre el nivel del mar de los distintos puntos de una carretera), con respecto al número de personas de una ciudad (por ejemplo, el consumo de electricidad de dicha ciudad) o con respecto a cualquier otra variable. En los casos anteriores la dependencia de una sola variable conduce a la noción de *función de una variable*.

La dependencia de más de una variable conduce a la noción de *función de varias variables*. Por ejemplo, se puede considerar que la pluviosidad de una ciudad depende de su latitud, altitud, cercanía de la costa ... y, por tanto, tiene una dependencia respecto a varias variables.

En los ejemplos anteriores, el tiempo, la altura, la latitud y el número de personas de una ciudad son *variables independientes* y la temperatura, la posición, el consumo de electricidad y la pluviosidad de un ciudad son *variables dependientes*.

Aquí únicamente consideraremos funciones de una variable. Desde el punto de vista matemático, la característica común a todas las funciones es que a cada valor de la variable independiente le corresponde un valor, y sólo uno, de la variable dependiente.

En el Capítulo 2 se dieron las definiciones matemáticas de *función* y de *función real de variable real*, centrándose en el caso concreto de los polinomios.

La primera parte de este capítulo está dedicada al estudio de las funciones reales de variable real (a las que, por simplicidad, denominaremos "funciones") desde un punto de vista general. Se verán las operaciones básicas que se pueden hacer con estas funciones (suma, diferencia, producto por un escalar, producto, cociente y composición), el concepto de función inversa y algunos "tipos básicos" de funciones, como las *funciones acotadas*, *pares*, *impares*, *monótonas*, *crecientes*, *periódicas*, *racionales* ...

A continuación se estudian, con cierto detalle, dos casos especiales de funciones reales de variable real, como son las *funciones exponenciales* y las *funciones logarítmicas*, mostrando sus principales propiedades, que serán utilizadas para poder resolver ecuaciones exponenciales, en las que las incógnitas aparecen en los exponentes.

Seguidamente se estudia el concepto de *límite de una función en un punto*, que permite presentar las *asíntotas verticales* y *horizontales*. La introducción de este concepto viene acompañada con la presentación de sus principales propiedades, que serán útiles para facilitar el cálculo de límites de una función (así como sus asíntotas) desde un punto de vista práctico.

Finalmente se muestra cómo los límites de una función sirven también para definir el concepto de *continuidad* de una función y los tipos de *discontinuidades*. Se presentan también varias propiedades de las funciones continuas que permiten probar, de una manera más sencilla, cuándo una función es continua y, en caso contrario, determinar cuáles son sus puntos de discontinuidad. Además de estas propiedades, también se incluyen resultados como los teoremas de *Bolzano*, de *Weierstrass* y de los *Valores Intermedios*, que aseguran, bajo ciertas hipótesis, que una función continua tiene, al menos, una *raíz* (un número real cuya imagen por la función es el número 0) y alcanza valores *máximos*, *mínimos* e *intermedios* sobre un intervalo cerrado.

11.2. Funciones acotadas, simétricas, monótonas, periódicas, polinómicas y racionales

Recordemos que en el Capítulo 2 ya se vieron las definiciones de función (véase la Definición 2.1) y de función inyectiva, sobreyectiva (o suprayectiva) y biyectiva (véase Definición 2.2).

Observación 11.1 Para el caso particular de funciones reales de variable real, los conjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ de las Definiciones 2.1 y 2.2 son subconjuntos de $\mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 11.1

a) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

es biyectiva, ya que es:

i) Sobreyectiva: para todo número real $y \in \mathbb{R}$ existe un número real $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. En efecto, basta tener en cuenta que

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}.$$

ii) Inyectiva: si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces se cumple que $x_1 = x_2$. En efecto,

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \quad \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

b) La función $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dada por

$$g(x) = x^2$$

es suprayectiva pero no inyectiva, ya que todo número $y > 0$ es la imagen por f de los valores reales

$$x_1 = \sqrt{y} \text{ y } x_2 = -\sqrt{y}.$$

En la Figura 11.1 se muestran las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. □

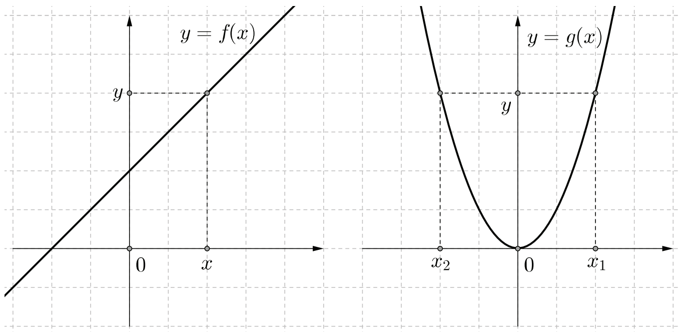


Figura 11.1: Gráficas de las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2$.

Observación 11.2 Si f es una función real de variable real, entonces $f : D \to \mathbb{R}$, donde $D \subset \mathbb{R}$ es el *dominio* de f (de forma que $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in D$). A veces una función de este tipo se suele representar sólo mediante la fórmula $y = f(x)$. En este caso, el *dominio* de la función f es el subconjunto de $\mathbb{R}$ más amplio posible dado por

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Así, por ejemplo, los dominios de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \text{ y } g(x) = \sqrt{x - 7}$$

son, respectivamente,

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\} \text{ y } \mathrm{Dom}(g) = [7, +\infty).$$

Como también se comentó en el Capítulo 2, el concepto de *gráfica* es muy útil para describir el comportamiento de $f(x)$ cuando varía x. La *gráfica* de una función f es el conjunto de puntos del plano dados por

$$\text{Grafo}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \text{Dom}(f) \ \text{ e } \ y = f(x)\}.$$

Los pares de puntos $(x, y) \in \text{Grafo}(f)$ suelen representarse en el plano, resultando así una colección de puntos llamada *curva de la función* f o, simplemente, *gráfica de la función* f (véase la Figura 11.2).

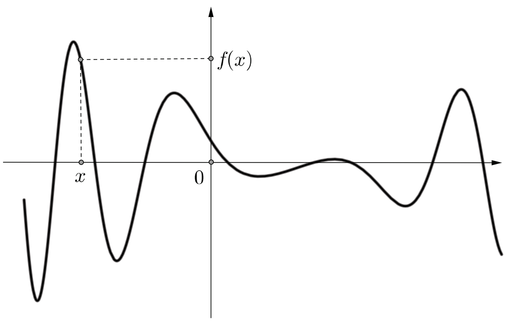


Figura 11.2: Gráfica de una función $y = f(x)$.

Nótese que ninguna recta vertical puede cortar a la gráfica de la función en más de un punto (pues, por definición de función, a cada valor x le corresponde una única imagen $y = f(x)$). □

Definición 11.1 (Operaciones con funciones) Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}$. La función:

a) *Suma* $f + g : D \to \mathbb{R}$ está definida como

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall\, x \in D.$$

i) La función $0(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es el elemento neutro para la suma de funciones y se denomina *función nula*.

ii) La función $(-f)(x) = -f(x)$ para todo $x \in D$ tiene la propiedad de que

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f(x)) = 0, \ \forall\, x \in D$$

y se denomina *función opuesta* de la función f.

b) *Diferencia* $f - g : D \to \mathbb{R}$ está definida como

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \ \forall\, x \in D.$$

c) *Producto por un escalar* $\lambda f : D \to \mathbb{R}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ está definida como

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \; \forall\, x \in D.$$

d) *Producto* $fg : D \to \mathbb{R}$ está definida como

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \; \forall\, x \in D.$$

i) La función $1(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es el elemento neutro para el producto de funciones y se denomina *función unidad*.

ii) La función $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ para todo $x \in D$ con $f(x) \neq 0$ tiene la propiedad

$$\left(f\frac{1}{f}\right)(x) = f(x)\frac{1}{f(x)} = 1, \; \forall\, x \in D \;\text{ con }\; f(x) \neq 0$$

(no confundir $\frac{1}{f}$ con la función *inversa* de f, cuya noción se verá en la Definición 11.2).

e) *Cociente* $\dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ está definida como

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \; \forall\, x \in D \;\text{ con }\; g(x) \neq 0. \quad \square$$

Observación 11.3 Nótese que el conjunto de funciones $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}$, con las operaciones suma de funciones y producto de una función por un escalar tiene estructura de *espacio vectorial* sobre $\mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 11.2 Consideremos las funciones $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2$ cuyo dominio es $D = \mathbb{R}$. A partir de ellas se obtienen las funciones:

$$(f+g)(x) = 2x - 3 + x^2, \; (f-g)(x) = 2x - 3 - x^2, \; (fg)(x) = 2x^3 - 3x^2$$

y

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x-3}{x^2},$$

todas ellas definidas en todo $\mathbb{R}$ (es decir, $D = \mathbb{R}$) salvo la última, que está definida en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. $\square$

Ejemplo 11.3 A partir de las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = x + 2 \;\text{ y }\; g(y) = y^2$$

podemos considerar, sobre un valor $x \in \mathbb{R}$, la actuación de la función f y, sobre este nuevo valor, la actuación de la función g, es decir,

$$x \xrightarrow{f} x+2 \xrightarrow{g} (x+2)^2 = x^2+4x+4$$

(véase la Figura 11.3). $\square$

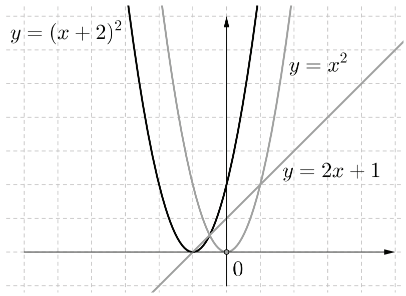


Figura 11.3: Gráficas de las funciones $y = 2x+1$, $y = x^2$ e $y = (x+2)^2$.

El ejemplo anterior da pie a la siguiente noción:

Definición 11.2 Sean $f : D_f \to \mathbb{R}$ y $g : D_g \to \mathbb{R}$ con $D_f, D_g \subset \mathbb{R}$. Se llama *función f compuesta* con g, y se representa $g \circ f$, a la función dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall\, x \in D_{g\circ f} = \{x \in D_f :\ f(x) \in D_g\}.$$

En el caso particular de que se cumpla que

$$(g \circ f)(x) = x,\ \forall\, x \in D_{g\circ f} \ \text{ y } \ (f \circ g)(x) = x,\ \forall\, x \in D_{f\circ g},$$

se dice que las funciones f y g son *inversas* la una de la otra y se denotan, respectivamente, $g = f^{-1}$ y $f = g^{-1}$. $\square$

Proposición 11.1 *Una función $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}$, tiene inversa si, y sólo si, es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si existe f^{-1} y f no fuera inyectiva, existirían dos valores $x_1, x_2 \in D$ tales que $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Aplicando la inversa de f en la igualdad anterior, se tendría que

$$x_1 = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2,$$

lo cual es absurdo.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si f es inyectiva, tomando

$$D_g = f(D_f)$$

se tiene que para todo $y \in D_g$ existe $x \in D_f$ tal que $f(x) = y$, lo que permite definir

$$g(y) = x.$$

De esta forma se tiene que $g : D_g \to \mathbb{R}$ es la función inversa de f. $\square$

Ejemplo 11.4 La inversa de la función $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por

$$f(x) = x^2$$

es la función $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida como

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

(véase la Figura 11.4). $\square$

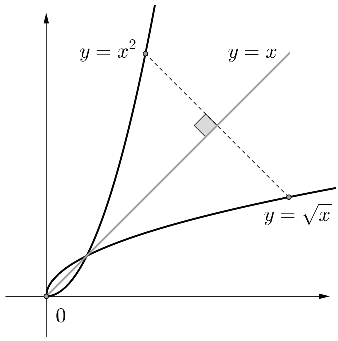


Figura 11.4: Gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Observación 11.4 Un aspecto importante sobre las gráficas de dos funciones inversas es que éstas son *simétricas* respecto de la recta $y = x$ (véase la Figura 11.4) $\square$

Ejemplo 11.5 En el Capítulo 7 se estudiaron las funciones trigonométricas inversas:

a) Función *arcoseno* $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida como

$$\operatorname{arcsen}(x) = y \Leftrightarrow \operatorname{sen}(y) = x.$$

b) Función *arcocoseno* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ definida como

$$\arccos(x) = y \Leftrightarrow \cos(y) = x.$$

c) Función *arcotangente* $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definida como

$$\arctan(x) = y \Leftrightarrow \tan(y) = x. \quad \square$$

Definición 11.3 Una función $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}$, está *acotada* si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \ \forall\, x \in D$$

o, equivalentemente,

$$-M \leq f(x) \leq M, \ \forall\, x \in D. \quad \square \tag{11.1}$$

Observación 11.5 La propiedad (11.1) indica que la gráfica de la función f se encuentra en la banda horizontal determinada por las rectas $y = -M$ e $y = M$. $\square$

Ejemplo 11.6 En la Figura 11.5 se muestran las gráficas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$. Puesto que para todo número real x se verifica que

$$-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1 \ \text{ y } \ -1 \leq \cos(x) \leq 1,$$

ambas funciones están acotadas, en valor absoluto, por 1. $\square$

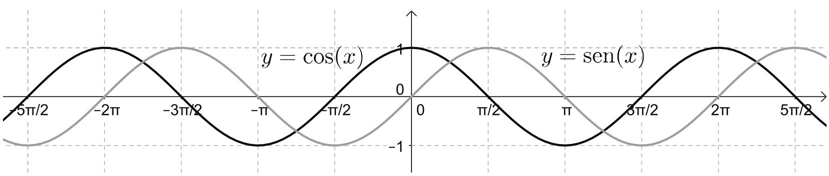


Figura 11.5: Gráficas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$.

Definición 11.4 Una función $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}$, es:

a) *Par* (respecto al origen) si

$$f(x) = f(-x), \ \forall\, x \in D.$$

b) *Impar* (respecto al origen) si

$$f(x) = -f(-x), \ \forall\, x \in D. \quad \square$$

Observación 11.6 Un ejemplo de función par es $f(x) = x^2$, y otro de función impar, $g(x) = x^3$. En la Figura 11.6 se muestran las gráficas de ambas funciones. En general, la gráfica de una función:

a) *Par* es simétrica respecto del eje de ordenadas.

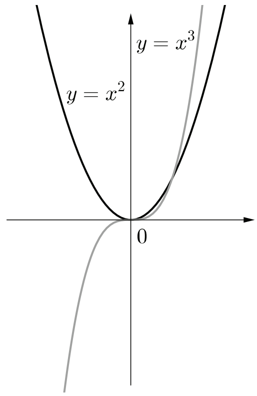


Figura 11.6: Gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.

b) *Impar* es simétrica respecto del origen. □

Definición 11.5 Una función $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}$, es:

a) *Creciente* si los valores que toma $f(x)$ son cada vez mayores a medida que x aumenta, es decir,

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ si } x_1 < x_2.$$

b) *Estrictamente creciente* cuando se verifica que

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ si } x_1 < x_2.$$

c) *Decreciente* si los valores de $f(x)$ son cada vez menores a medida que x aumenta, es decir,

$$f(x_1) \geq f(x_2) \text{ si } x_1 < x_2.$$

d) *Estrictamente decreciente* cuando de verifica que

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ si } x_1 < x_2.$$

e) *Monótona* si es creciente o decreciente. □

Observación 11.7 Geométricamente, una función f es creciente si su gráfica no tiene ningún tramo descendente cuando la recorremos de izquierda a derecha. De forma análoga se interpreta el decrecimiento. □

Ejemplo 11.7 La función $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente en el intervalo $(0, +\infty)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. □

Definición 11.6 Una función $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}$, es *periódica* de *periodo* $T > 0$ si T es el mínimo número positivo con la propiedad

$$f(x+T) = f(x),\ \forall\, x \in D. \quad \square \tag{11.2}$$

Observación 11.8 Sea $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}$, una función periódica de periodo $T > 0$.

a) Obviamente, para cualquier múltiplo entero del periodo T también se verifica (11.2), pero, como hemos señalado, el periodo es el mínimo número positivo que cumple dicha propiedad.

b) Para representar gráficamente una función periódica de periodo $T > 0$, basta dibujarla en un intervalo de longitud T, puesto que el resto de la gráfica se obtiene repitiendo esa "porción" de gráfica tanto a izquierda como a derecha. $\square$

Ejemplo 11.8 Puesto que para todo $k \in \mathbb{Z}$ se verifica que

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen}(x) \ \text{ y } \ \cos(x + 2k\pi) = \cos(x),$$

las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ son periódicas de periodo $T = 2\pi$ (véase la Figura 11.7). Nótese que, en ambos casos, su dominio es todo $\mathbb{R}$.

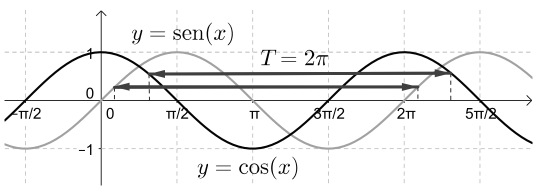


Figura 11.7: Periodo $T = 2\pi$ de las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$.

Por otro lado, la función $\tan(x)$ también es periódica de periodo 2π (véase la Figura 7.28) aunque, en este caso, su dominio es $\mathbb{R}\backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z} \right\}$. $\square$

Definición 11.7 $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}$ es una:

a) *Función polinómica*, si f es un polinomio, es decir,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde los coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$.

b) *Función racional*, si f es un cociente de polinomios, es decir,

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

donde los coeficientes $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 11.9 La función
$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$$
es polinómica y
$$g(x) = \frac{4x^4 - 5x^2 + 7x - \sqrt{2}}{x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5}$$
es una función racional. $\square$

11.3. Funciones exponenciales y logarítmicas

Como ya se comentó en la Observación 1.37, dado un número positivo $a > 0$ y un número real $r \in \mathbb{R}$, se define la potencia a^r como

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n},$$

siendo $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de números racionales que tiene límite r, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r.$$

Esto nos permite introducir la siguiente definición:

Definición 11.8 Dado un número $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, se llama *función exponencial de base* a, y se escribe $\exp_a$, a la función (biyectiva y monótona) $\exp_a : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, dada por
$$\exp_a(x) = a^x. \quad \square$$

Observación 11.9 Para el caso en el que la base es el número e definido en la Sección 10.4. se puede dar una definición alternativa de la función exponencial de base e que evita los problemas de la definición de potencias cuya base es un número irracional, comentadas en la Observación 1.38. En la Observación 10.11 vimos que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Para el caso de potencias de e distintas de 1, se puede extender el resultado anterior y definir
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

En la Sección 13.5. veremos que esta igualdad también se puede deducir a partir del polinomio de Taylor de la función e^x.

Definición 11.9 Dado un número $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, se llama *función logarítmica en base* a, y se escribe $\log_a$, a la función biyectiva y monótona $\log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\log_a(x) = y,$$

siendo $y \in \mathbb{R}$ el único número que verifica

$$a^y = x.$$

La expresión $\log_a(x)$ se denomina *logaritmo en base* a *de* x. $\square$

Ejemplo 11.10

a) $\log_2(8) = 3$, pues $2^3 = 8$.

b) $\log_2(1) = 0$, ya que $2^0 = 1$.

c) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, dado que $2^{-1} = \frac{1}{2}$. $\square$

Observación 11.10 Teniendo en cuenta que para todo $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b}$$

las funciones logarítmica $x \mapsto \log_a(x)$ y exponencial $x \mapsto a^x$ son inversas la una de la otra, pues para todo $x > 0$ se verifica que

$$a^{\log_a(x)} = x \ \text{ y } \ \log_a(a^x) = x. \quad \square$$

Observación 11.11 (Propiedades básicas de las exponenciales)

a) $a^0 = 1$ sea cual sea la base $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

b) Si $a > 1$, entonces (véase la Figura 11.8 para el caso $a = 10$)

$$a^x \begin{cases} \in (0,1) & \text{si} \quad x < 0 \\ = 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ > 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

c) Si $0 < a < 1$, entonces (véase la Figura 11.8 para el caso $a = \frac{1}{10}$)

$$a^x \begin{cases} > 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ = 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \in (0,1) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases} \quad \square$$

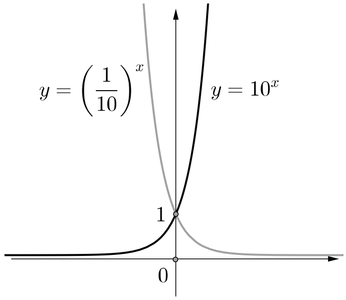


Figura 11.8: Gráficas de las funciones $f(x) = 10^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$.

Observación 11.12 Para todo $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ se verifica que la función exponencial $\exp_a : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ es biyectiva y monótona. Además, es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$. □

Observación 11.13 (Propiedades de las exponenciales respecto a operaciones)
Las propiedades de las exponenciales se deducen de las propiedades de las potencias estudiadas en el Capítulo 1:

1) $a^0 = 1$, es decir, la exponencial de 0 siempre es 1.

2) $a^{x+y} = a^x a^y$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

3) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

4) $a^{\alpha x} = (a^x)^\alpha$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

5) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = \dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Por tanto, las gráficas de las funciones $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ y a^x son simétricas respecto del eje de ordenadas (véase la Figura 11.8 para el caso $a = 10$). □

Observación 11.14 (Propiedades básicas de los logaritmos)

a) Sólo tienen sentido los logaritmos de números positivos (así, por ejemplo, no existe $\log_2(-6)$).

b) $\log_a(1) = 0$ sea cual sea la base $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ del logaritmo, pues $a^0 = 1$.

c) Si $a > 1$, entonces (véase la Figura 11.9 para el caso $a = 10$)

$$\log_a(x) \begin{cases} \text{no existe} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ < 0 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ > 0 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

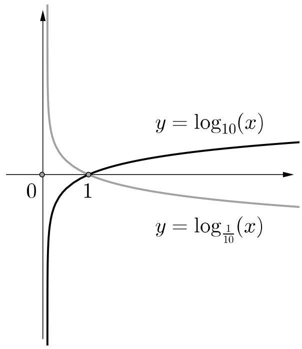


Figura 11.9: Gráficas de las funciones $f(x) = \log_{10}(x)$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{10}}(x)$.

d) Si $0 < a < 1$, entonces (véase la Figura 11.9 para el caso $a = \frac{1}{10}$)

$$\log_a(x) \begin{cases} \text{no existe} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ > 0 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ < 0 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases} \quad \square$$

Observación 11.15 Para todo $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ se verifica que la función logarítmica $\log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es biyectiva y monótona. Además, es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$. $\square$

Observación 11.16 (Propiedades de los logaritmos respecto a las operaciones)

1) $\boxed{\log_a(1) = 0}$ es decir, el logaritmo de 1 siempre es 0.

2) $\boxed{\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),\ \forall\, x, y > 0}$ es decir, el logaritmo de un producto de números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números. En efecto, si $\log_a(xy)$ es un número c verificando que $a^c = xy$, veamos que $c = \log_a(x) + \log_a(y)$. Para ello, basta tener en cuenta que

$$a^{(\log_a(x) + \log_a y)} = a^{(\log(x))} a^{(\log_a(y))} = xy.$$

3) $\boxed{\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),\ \forall\, x, y > 0}$ es decir, el logaritmo de un cociente de números positivos es la diferencia entre el logaritmo del numerador y del denominador.

En efecto, si $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = c$ siendo $c \in \mathbb{R}$ tal que $a^c = \frac{x}{y}$, entonces se verifica que $c = \log_a(x) - \log_a(y)$, ya que

$$a^{(\log_a(x)-\log_a(y))} = \frac{a^{(\log_a(x))}}{a^{(\log_a(y))}} = \frac{x}{y}.$$

Nótese que la propiedad 3) se puede demostrar a partir de 2), pues para todo par de números positivos $x, y > 0$ se verifica que

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) + \log_a(y) \overset{2)}{=} \log_a\left(\frac{x}{y}\,y\right) = \log_a(x).$$

4) $\boxed{\log_a(x^\alpha) = \alpha\log_a(x),\ \forall\, x > 0,\ \forall\,\alpha \in \mathbb{R}}$ es decir, el logartimo de una potencia es el exponente multiplicado por el logaritmo de la base. En efecto, si $\log_a(x^\alpha) = c$ siendo $c \in \mathbb{R}$ tal que $a^c = x^\alpha$, se tiene que $c = \alpha\log_a(x)$, pues

$$a^{\alpha\log_a(x)} = \left(a^{\log_a(x)}\right)^\alpha = x^\alpha.$$

5) $\boxed{\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x),\ \forall\, x > 0.}$ En efecto, si $\log_{\frac{1}{a}}(x) = c$ siendo $c \in \mathbb{R}$ tal que $\left(\frac{1}{a}\right)^c = x$, se verifica que $c = -\log_a(x)$, ya que

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-\log_a(x)} = \frac{1}{a^{-\log_a(x)}} = \frac{1}{a^{\log_a(x^{-1})}} = \frac{1}{x^{-1}} = x.$$

Por tanto, las gráficas de las funciones $\log_{\frac{1}{a}}(x)$ y $\log_a(x)$ son simétricas respecto del eje de abscisas (véase la Figura 11.9 para el caso $a = 10$). $\square$

Observación 11.17 En las aplicaciones se utilizan con bastante frecuencia el:

a) *Logaritmo decimal*, que es el que tiene por base $a = 10$. El logaritmo decimal de $x > 0$ se representa como $\log_{10}(x)$ o, simplemente, $\log(x)$[1].

x	1	10	10^2	10^3	$\cdots$	10^n	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	$\cdots$	10^{-n}
$\log(x)$	0	1	2	3	$\cdots$	n	-1	-2	-3	$\cdots$	$-n$

b) *Logaritmo neperiano* (también llamado *logaritmo natural*), cuya base es el número e ($e = 2'71828182845905\ldots$ es un número irracional que fue introducido en la Sección 10.4.). El logaritmo neperiano de $x > 0$ se representa como $\ln(x)$.

x	1	e	e^2	e^3	$\cdots$	e^n	e^{-1}	e^{-2}	e^{-3}	$\cdots$	e^{-n}
$\ln(x)$	0	1	2	3	$\cdots$	n	-1	-2	-3	$\cdots$	$-n$

[1]En algunos textos y programas informáticos se utiliza la notación log para el logaritmo neperiano.

En la Figura 11.10 se representan las gráficas de las funciones logaritmo decimal y logaritmo neperiano (recuérdense las propiedades vistas en las Observaciones 11.14 y 11.15). $\square$

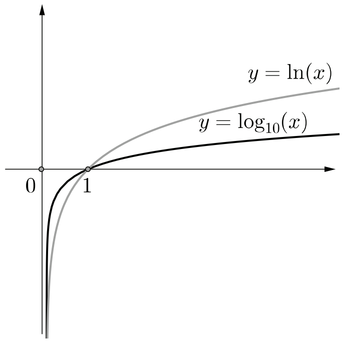


Figura 11.10: Gráficas de las funciones logaritmo decimal y logartimo neperiano.

Proposición 11.2 (Cambio de base) *Si* $a, b \in (0,1) \cup (1,+\infty)$*, para todo* $x > 0$ *se verifica que*

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}. \tag{11.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda = \log_a(x) & \Rightarrow & a^\lambda = x \\ \mu = \log_b(x) & \Rightarrow & b^\mu = x. \end{array} \right. \tag{11.4}$$

De (11.4) se deduce que

$$a^\lambda = x = b^\mu$$

y, utilizando las propiedades de los logaritmos,

$$\lambda \log_b(a) = \mu \log_b(b) = \mu,$$

de donde

$$\lambda = \frac{\mu}{\log_b(a)},$$

obteniendo así la relación (11.3). $\square$

Ejemplo 11.11 Tomando $a = e$ y $b = 10$ en la expresión (11.3), se tiene que

$$\ln(x) = \frac{\log(x)}{\log(e)},\ \forall\, x > 0.$$

Utilizando la aproximación $\log(e) = 0'43429448190325\ldots$, podemos formar la siguiente tabla

x	1	10	10^2	10^3	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$\log(x)$	0	1	2	3	-1	-2	-3
$\ln(x)$	0	$2'3026$	$4'6052$	$6'9078$	$-2'3026$	$-4'6052$	$-6'9078$

En la tabla anterior se aprecia la siguiente propiedad: para todo $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\log_a \left(x^{-\alpha}\right) = -\alpha \log_a(x) = -\left(\alpha \log_a(x)\right) = -\log_a \left(x^{\alpha}\right), \ \forall\, x > 0. \quad \square$$

Observación 11.18 En las aplicaciones la función exponencial que se emplea con mayor frecuencia es $f(x) = e^x$, a la que se denomina, simplemente, *función exponencial*.

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
e^x	1	$2'7183$	$7'3891$	$20'0855$	$0'3679$	$0'1353$	$0'0498$

En la Figura 11.11 se encuentran representadas gráficamente las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$. $\square$

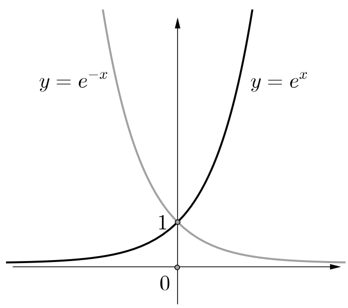


Figura 11.11: Gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$.

Observación 11.19 Como se comentó en la Observación 11.4, nótese cómo las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$ (véase la Figura 11.12). $\square$

Observación 11.20 Como se ha visto en la Observación 11.10, las funciones exponencial y logarítmica son inversas la una de la otra. Se tiene así que todo número positivo $x > 0$ puede expresarse en la forma

$$\boxed{x = e^{\ln(x)}.}$$

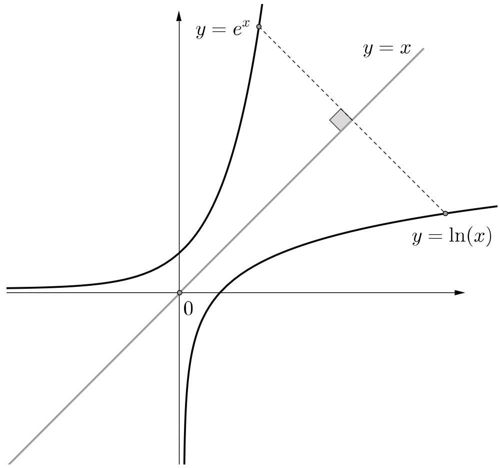


Figura 11.12: Gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$.

Esta propiedad va a permitir calcular potencias con exponente irracional en una calculadora que sólo tenga implementadas las funciones logarítmica y exponencial con base e (lo que es bastante habitual en muchas calculadoras científicas). Así, por ejemplo,

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = e^{\ln\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)} = e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}} \simeq e^{0'4901} \simeq 1'6325$$

y

$$3^{\pi} = e^{\ln(3^{\pi})} = e^{\pi\ln(3)} \simeq e^{3'4514} \simeq 31'5443. \quad \square$$

Las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas nos permiten resolver *ecuaciones exponenciales*, en las que las incógnitas aparecen en los exponentes. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 11.12

a) Para resolver la ecuación

$$2^{3x+2} = 16,$$

basta escribir

$$2^{3x+2} = 2^4 \Leftrightarrow 3x + 2 = 4 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}.}$$

Otra forma alternativa de hallar la solución es:

$$2^{3x+2} = 16 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{3x} = 16 \Leftrightarrow 2^{3x} = 4 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^2 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

b) Para encontrar las soluciones del sistema (no lineal) de ecuaciones

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^x + 5 \cdot 2^{y+1} = 10 \\ 3^{x+2} - 2^y = -1, \end{cases} \tag{11.5}$$

hacemos lo siguiente: de la segunda ecuación deducimos que

$$2^y = 9 \cdot 3^x + 1. \tag{11.6}$$

Sustituyendo (11.6) en la primera ecuación de (11.5), se obtiene que

$$2 \cdot 3^x + 10\,(9 \cdot 3^x + 1) = 10 \;\Leftrightarrow\; 92 \cdot 3^x + 10 = 10 \;\Leftrightarrow\; 92 \cdot 3^x = 0 \;\Leftrightarrow\; 3^x = 0.$$

Ahora bien, como $3^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, hemos probado que el sistema de ecuaciones (11.5) no tiene ninguna solución.

c) Para hallar las soluciones del sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^x + 5 \cdot 2^{y+1} = 102 \\ 3^{x+2} - 2^y = -1, \end{cases} \tag{11.7}$$

procedemos de la siguiente forma: de la segunda ecuación se vuelve a deducir (11.6). Sustituyendo ahora (11.6) en la primera ecuación de (11.7), se llega a que

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^x + 10\,(9 \cdot 3^x + 1) = 102 \Leftrightarrow\; 92 \cdot 3^x + 10 = 102 \;&\Leftrightarrow\; 92 \cdot 3^x = 92 \\ \Leftrightarrow\; 3^x = 1 \;&\Leftrightarrow\; \boxed{x = 0.} \end{aligned}$$

Finalmente, tomando $x = 0$ en la expresión (11.6) se tiene que

$$2^y = 9 \cdot 3^0 + 1 = 9 + 1 = 10 \;\Leftrightarrow\; \boxed{y = \log_2(10).}$$

Observación 11.21 Para resolver ecuaciones exponenciales también se pueden tomar logaritmos en ambos miembros de la igualdad, teniendo en cuenta que la función logarítmica es biyectiva. Así, por ejemplo, para resolver la ecuación

$$5^x = 4$$

bastaría escribir

$$\boxed{x = \log_5(4).}$$

Sin embargo, si queremos obtener la solución en formato numérico y disponemos de una calculadora que sólo tiene implementadas las funciones logarítmica y exponencial con base e, seguimos el siguiente proceso: tomamos logaritmos neperianos en ambos miembros de la igualdad y obtenemos

$$\ln\left(5^x\right) = \ln(4) \;\Rightarrow\; x\ln(5) = \ln(4) \;\Rightarrow\; x = \frac{\ln(4)}{\ln(5)} \simeq \frac{1'3863}{1'6094} \simeq 0'8614. \quad \square$$

11.4. Límite de una función en un punto

En la Figura 11.13 se aprecia que, si tomamos valores de x próximos a x_0, los valores de $f(x)$ resultan próximos a ℓ. Más concretamente, si dibujamos un entorno de ℓ de radio $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea ε, siempre existe un entorno del punto x_0 de radio $\delta > 0$ en el que todos los valores $f(x)$ caen dentro del entorno de centro ℓ.

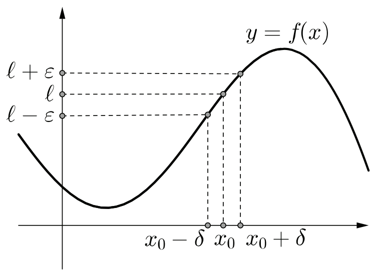


Figura 11.13: ℓ es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0.

Para expresar este hecho, se dice que existe el *límite* de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 y vale ℓ. Para ello, se emplea la notación:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.}$$

En términos de cuantificadores, se tiene la siguiente definición:

Definición 11.10 (Límite finito en un punto) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$. Un número real $\ell \in \mathbb{R}$ es el *límite* de $f(x)$ cuando x tiende a x_0, y se denota

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,$$

cuando se verifica la propiedad

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ \text{ tal que si } \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \text{ entonces } \ |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

o, equivalentemente, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$\text{si } \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}, \ \text{entonces } \ f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon). \quad \square \tag{11.8}$$

Observación 11.22

a) La idea de que ℓ es el límite de la función f cuando el punto x tiende al punto x_0 es que podemos conseguir valores $f(x)$ tan próximos a ℓ como se quiera, siempre que el punto x esté lo suficientemente próximo al punto x_0.

b) La condición (11.8) indica que

$$f\big((x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}\big) \subset (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon),$$

es decir, la imagen por la función f de $(x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}$ está contenida en el intervalo $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$.

c) Nótese que, en ningún momento, se menciona qué ocurre con el valor que toma f en el punto x_0. En la función del Ejemplo 11.13 se verifica que $f(x_0) = \ell$ por tratarse, como veremos en la Sección 11.5., de una función *continua* en x_0. No obstante, pudiera ocurrir que la función f no estuviera definida en x_0 o, incluso estando definida en ese punto, f pudiera tomar en x_0 un valor distinto de ℓ. $\square$

Definición 11.11 (Límites laterales finitos) Sea $f: D \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$.

a) Un número real $\ell_1 \in \mathbb{R}$ es el *límite* de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 *por la izquierda*, y se denota

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1,$$

cuando se verifica la propiedad

$$\forall\,\varepsilon > 0 \ \exists\,\delta > 0 \ \text{ tal que si } \ 0 < x_0 - x < \delta, \text{ entonces } \ |f(x) - \ell_1| < \varepsilon.$$

b) Un número real $\ell_2 \in \mathbb{R}$ es el *límite* de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 *por la derecha*, y se denota

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2,$$

cuando se verifica la propiedad

$$\forall\,\varepsilon > 0 \ \exists\,\delta > 0 \ \text{ tal que si } \ 0 < x - x_0 < \delta, \text{ entonces } \ |f(x) - \ell_2| < \varepsilon. \quad \square$$

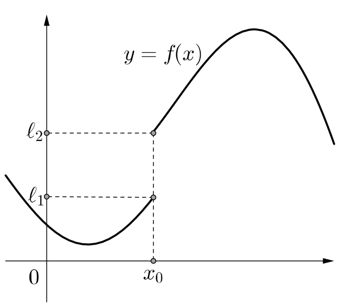


Figura 11.14: ℓ_1 y ℓ_2 son los límites laterales de $f(x)$ cuando x tiende a x_0.

Ejemplo 11.13 Para la función f de la Figura 11.14 se verifica que

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \text{ y } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2. \quad \square$$

Observación 11.23 Sea $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbb{R}$. Obviamente se tiene que

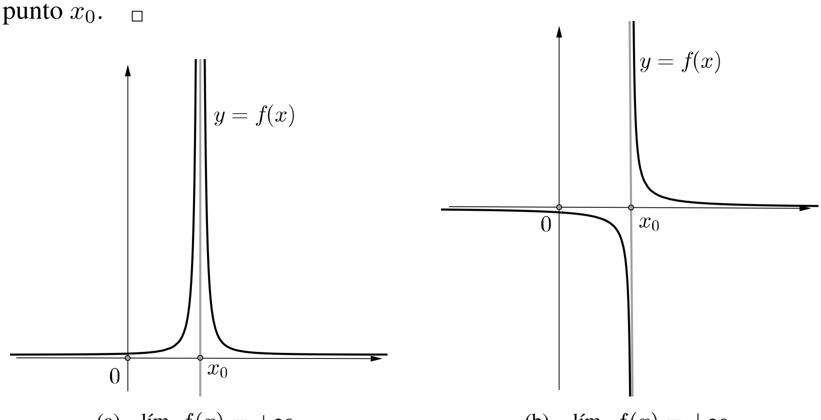
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell. \quad \square$$

Definición 11.12 (Límite infinito en un punto. Asíntotas verticales)
Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$. Se dice que el *límite* de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es:

a) *menos infinito*, y se denota
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty,$$
cuando se verifica la propiedad
$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } f(x) < -M.$$

b) *más infinito*, y se denota
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty,$$
cuando se verifica la propiedad
$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } f(x) > M.$$

En ambos casos, se dice que la recta $x = x_0$ es una *asíntota vertical* a la curva $y = f(x)$ en el punto x_0. $\square$



(a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$ (b) $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty.$

Figura 11.15: Gráficas de funciones f con asíntota vertical $x = x_0$.

Observación 11.24 La interpretación de que el límite de la función f cuando el punto x tiende al punto x_0 sea menos infinito (respectivamente, más infinito) es que podemos conseguir valores $f(x)$ tan grandes y negativos (respectivamente, positivos) como se quiera, siempre que el punto x esté lo suficientemente próximo a x_0. $\square$

Ejemplo 11.14 Para la función f de la Figura 11.15(a) se tiene que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. $\square$

Observación 11.25 La Definición 11.12 también puede extenderse para introducir las nociones de *límites laterales* por la izquierda y por la derecha (análogamente a como se hizo en la Definición 11.11). Así, por ejemplo, la función f de la Figura 11.15(b) tiene la propiedad de que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \ \text{ y } \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty. \quad \square$$

Definición 11.13 (Límite finito en el infinito. Asíntotas horizontales)
Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$. Se dice que el *límite* de $f(x)$ cuando x tiende a:

a) *menos infinito* es $\ell_1 \in \mathbb{R}$, y se denota

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_1,$$

cuando se verifica la propiedad

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Lambda > 0 \ \text{ tal que si } \ x < -\Lambda, \text{ entonces } \ |f(x) - \ell_1| < \varepsilon.$$

b) *más infinito* es $\ell_2 \in \mathbb{R}$, y se denota

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_2,$$

cuando se verifica la propiedad

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Lambda > 0 \ \text{ tal que si } \ x > \Lambda, \text{ entonces } \ |f(x) - \ell_2| < \varepsilon.$$

Se dice que las rectas $y = \ell_1$ e $y = \ell_2$ son *asíntotas horizontales* a la curva $y = f(x)$. $\square$

Observación 11.26 La interpretación de que el límite de la función f cuando el punto x tiende a menos infinito (respectivamente, más infinito) es ℓ es que podemos conseguir valores $f(x)$ tan próximos a ℓ como se quiera, siempre que el punto x sea lo suficientemente grande y negativo (respectivamente, positivo). $\square$

Ejemplo 11.15 Para la función f de la Figura 11.16 se verifica que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_1 \ \text{ y } \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_2. \quad \square$$

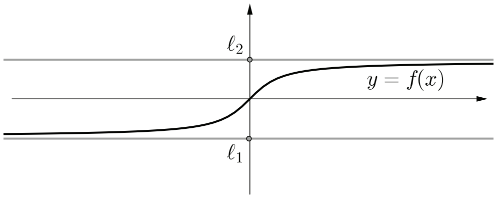


Figura 11.16: Gráfica de una función f con asíntotas horizontales $y = \ell_1$ e $y = \ell_2$.

Definición 11.14 (Límite infinito en el infinito) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}$. Se dice que el *límite* de $f(x)$ cuando x tiende a:

a) *Menos infinito* es *menos infinito*, y se denota

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

cuando se verifica la propiedad

$$\forall\, M > 0 \;\exists\, \Lambda > 0 \;\text{ tal que si }\; x < -\Lambda, \text{ entonces } f(x) < -M.$$

b) *Menos infinito* es *más infinito*, y se denota

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

cuando se verifica la propiedad

$$\forall\, M > 0 \;\exists\, \Lambda > 0 \;\text{ tal que si }\; x < -\Lambda, \text{ entonces } f(x) > M.$$

c) *Más infinito* es *menos infinito*, y se denota

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

cuando se verifica la propiedad

$$\forall\, M > 0 \;\exists\, \Lambda > 0 \;\text{ tal que si }\; x > \Lambda, \text{ entonces } f(x) < -M.$$

d) *Más infinito* es *más infinito*, y se denota

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

cuando se verifica la propiedad

$$\forall\, M > 0 \;\exists\, \Lambda > 0 \;\text{ tal que si }\; x > \Lambda, \text{ entonces } f(x) > M. \quad \square$$

Observación 11.27 La interpretación de que el límite de la función f cuando el punto x tiende más infinito es más infinito es que podemos conseguir valores $f(x)$ tan grandes y positivos como se quiera, siempre que el punto x sea lo suficientemente grande y positivo. La interpretación de los otros límites es análoga a la anterior. $\square$

Ejemplo 11.16 La función f de la Figura 11.17 verifica que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty. \quad \square$$

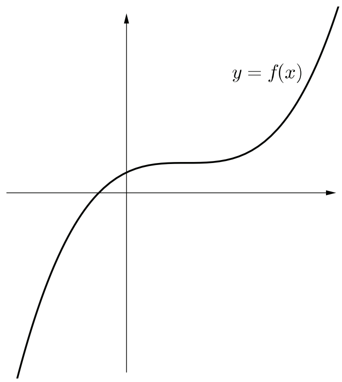


Figura 11.17: La función f tiende a $\pm\infty$ cuando $x \to \pm\infty$.

Observación 11.28 (Cálculo práctico de límites) Veamos una serie de propiedades que resultan muy útiles a la hora de calcular el límite de una función:

a) Para calcular un límite se comienza aplicando la fórmula

$$\boxed{\lim(f(x) \diamondsuit g(x)) = (\lim f(x)) \diamondsuit (\lim g(x)),}$$

donde $\diamondsuit$ denota una suma, resta, producto, cociente o potencia. Al aplicar dicha fórmula, deben tenerse en cuenta las siguientes *reglas operacionales* cuando se trabaja con ∞, donde **?** denota una *indeterminación* que suele requerir un análisis más minucioso:

i) **Suma**: Para todo número real $\ell \in \mathbb{R}$ se verifica:

- $\ell + (+\infty) = +\infty$ y $\ell + (-\infty) = -\infty$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ y $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
- $\boxed{(+\infty) + (-\infty) = \mathbf{?}}$

ii) **Producto**: Para todo número positivo $\ell > 0$ (propiedades análogas para $\ell < 0$) se verifica:

- $\ell(+\infty) = +\infty$ y $\ell(-\infty) = -\infty$.
- $(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty$ y $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$.
- $\boxed{0(\pm\infty) = \mathbf{?}}$

iii) **Cociente**: Para todo número positivo $\ell > 0$ (propiedades análogas para $\ell < 0$) se verifica:

- $\dfrac{\ell}{\pm 0} = \pm\infty$, $\dfrac{\ell}{\pm\infty} = 0$ y $\dfrac{\pm\infty}{\ell} = \pm\infty$.
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm 0} = +\infty$ y $\dfrac{\pm\infty}{\mp 0} = -\infty$.
- $\boxed{\dfrac{0}{0} = \mathbf{?}}$ y $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty} = \mathbf{?}}$

iv) **Potencia**: Para todo número positivo $\ell > 0$ (propiedades análogas para $\ell < 0$) se verifica:

- $(+\infty)^{\ell} = +\infty$.
- $\ell^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \ell > 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < \ell < 1 \end{cases}$ y $\ell^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \ell > 1 \\ +\infty & \text{si} \quad 0 < \ell < 1. \end{cases}$
- $\boxed{0^0 = \mathbf{?}}$, $\boxed{\infty^0 = \mathbf{?}}$ y $\boxed{1^\infty = \mathbf{?}}$

b) Si f es menor o igual que g en un *entorno* de x_0, es decir, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq g(x),\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}, \tag{11.9}$$

y existen los límites de $f(x)$ y $g(x)$ cuando x tiende a x_0, entonces se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x). \tag{11.10}$$

Nótese que en (11.10) puede darse la igualdad, aunque en (11.9) la desigualdad sea estricta. Así, por ejemplo,

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \text{ a pesar de que } \frac{1}{(x-1)^2} > 0\, \forall\, x \neq 1.$$

c) **Regla del sándwich**: si existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}$$

y existen los límites de $f(x)$ y $h(x)$ cuando x tiende a x_0 y coinciden, es decir,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell,$$

entonces existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a x_0 y coincide con los límites anteriores, es decir,

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell.$$

d) Si existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 y es distinto de cero, es decir,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0,$$

entonces existe un entorno del punto x_0 de forma que el signo de $f(x)$ coincide, en los puntos $x \neq x_0$, con el signo de ℓ.

e) El cálculo de límites de funciones cuando $x \to +\infty$ se hace de la misma forma en que se hizo con las sucesiones de números reales. Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} (2 + e^{-x}) = 2.$$

Al trabajar con *polinomios* se verifica que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0. \end{cases}$$

Así, por ejemplo, se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(3x^3 + 6x^2 - 4x + 3\right) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty} \left(-x^2 + x + 7\right) = -\infty.$$

Respecto a las *funciones racionales*, una consideración análoga a la realizada en la Observación 10.7 permite escribir:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n > m \text{ y } \dfrac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad n > m \text{ y } \dfrac{a_n}{b_m} < 0 \\ \dfrac{a_n}{b_n} & \text{si} \quad n = m \\ 0 & \text{si} \quad n < m, \end{cases}$$

supuesto que $a_n \neq 0$ y $a_m \neq 0$. Así, por ejemplo, se verifica que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + x - 1}{-3x^2 + 2} = -\infty, \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + x - 1}{-3x^3 + 2} = -\frac{1}{3} \text{ y } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + x - 1}{-3x^4 + 2} = 0.$$

f) El cálculo de límites de funciones cuando $x \to -\infty$ puede transformarse en límites cuando $x \to +\infty$ cambiando la variable x por $-x$. Ejemplo:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x + 5}{2x^3 - 4x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3 + 3x + 5}{-2x^3 - 4x^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

g) Puesto que la mayor parte de las funciones con las que vamos a trabajar son *continuas* (véase la Sección 11.5.), para calcular en éstas

$$\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

bastará calcular $f(x_0)$, y éste será el valor del límite buscado ℓ. Ejemplo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x + 5}{2x^3 - 4x^2 + 1} = \frac{3^3 - 3 \times 3 + 5}{2 \times 3^3 - 4 \times 3^2 + 1} = \frac{23}{19}.$$

Cuando al sustituir x por x_0 obtengamos "operaciones prohibidas" pero que no sean indeterminaciones como las descritas en el apartado a), se pondrá directamente el valor del límite sin más consideraciones. Ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{4}{(x-2)^2} = +\infty.$$

Solamente cuando al sustituir x por x_0 se obtengan *indeterminaciones*, se buscará ayuda en algunas reglas prácticas para el cálculo de límites entre las que citamos:

i) En indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ conviene simplificar, cuando ello sea posible, numerador y denominador dividiéndolos por el factor $x - x_0$, que es el causante de la indeterminación. Ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 8x + 5}{-x^4 + 4x^3 + x - 3x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + 3x - 5)}{(x-1)(-x^3 + 3x^2 + 1)}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 5}{-x^3 + 3x^2 + 1} = \frac{1 + 3 - 5}{-1 + 3 + 1} = -\frac{1}{3}.$$

En otras ocasiones, conviene multiplicar por el *conjugado* del denominador. Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+4} + 2\right)}{\left(\sqrt{x+4} - 2\right)\left(\sqrt{x+4} + 2\right)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+4} + 2\right)}{x + 4 - 4} = \lim_{x \to 0} \left(\sqrt{x+4} + 2\right) = 4.$$

ii) En indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$ conviene efectuar la operación. Ejemplo:

$$\lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - \frac{2}{x^2 + 2x + 1}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right)$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x^2 + 1)(x + 1) - 2}{(x+1)^2}$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty.$$

En otras ocasiones, conviene multiplicar por el *conjugado*. Ejemplo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = (\infty-\infty) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

h) Ejemplos de algunos límites que aparecen con frecuencia y conviene conocer (en la Sección 14.2. veremos técnicas, basadas en el cálculo de derivadas, que permiten demostrar algunos de los resultados siguientes):

$$\lim_{x\to0^+}\ln(x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n} = 0,$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1} = 1,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{a^x} = 0 \text{ si } a>1,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x} = 0 \text{ si } a>1,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x} = 1.$$

i) El límite de una función en un punto, ya sea finito o infinito, no tiene por qué existir. Así, por ejemplo, <u>no existen</u> los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{sen}(x),\ \lim_{x\to\pm\infty}\cos(x),\ \lim_{x\to\pm\infty}\tan(x),$$

$$\lim_{x\to0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right),\ \lim_{x\to0}\cos\left(\frac{1}{x}\right),\ \lim_{x\to0}\tan\left(\frac{1}{x}\right). \quad \square$$

Observación 11.29 En el apartado f) de la Observación 11.28 se ha dicho que

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1. \tag{11.11}$$

Veamos una demostración de esta propiedad. Consideremos una circunferencia de radio $r=1$ centrada en el origen de coordenadas como se muestra en la Figura 11.18 y consideremos un ángulo x de forma que $0<|x|\ll 1$. Como se aprecia,

$$\operatorname{sen}(x) \le x \le \tan(x).$$

Así, si dividimos por $\operatorname{sen}(x)$ la expresión anterior, obtenemos

$$1 \le \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \le \frac{\tan(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \tag{11.12}$$

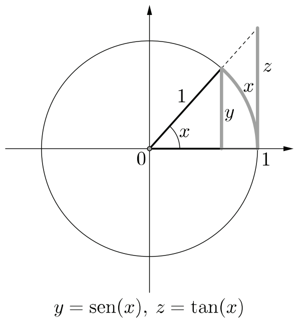


Figura 11.18: Prueba gráfica de que $\mathrm{sen}(x) \leq x \leq \tan(x)$ si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

por lo que, al hacer tender $x \to 0$ en la expresión (11.12), se obtiene, aplicando la *regla del sándwich*, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\mathrm{sen}(x)} = 1,$$

de donde se sigue (11.11). Podemos utilizar esta propiedad para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x \cos(x)} = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} \right) \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} \right) = 1 \times 1 = 1. \quad \square$$

Definición 11.15 (Infinitésimo) Una función f es un *infinitésimo* en un punto x_0 si se verifica que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0. \quad \square$$

Ejemplo 11.17 $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ es un infinitésimo en el punto $x = 0$. $\square$

Definición 11.16 Dos *infinitésimos* f y g en un punto x_0 son *comparables* si existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Pueden presentarse tres casos:

1) $\boxed{\ell = 0}$ $\Rightarrow$ f es un *infinitésimo de orden superior* a g en el punto x_0.

2) $\boxed{\ell \in \mathbb{R} \backslash \{0\}}$ $\Rightarrow$ f y g son *infinitésimos del mismo orden* en el punto x_0. En el caso particular de que $\ell = 1$, se dice que f y g son *infinitésimos equivalentes* en el punto x_0 y se emplea la notación

$$\boxed{f(x) \sim g(x) \ \text{ si } \ x \to x_0.}$$

3) $\boxed{\ell = \infty}$ $\Rightarrow$ f es un *infinitésimo de orden inferior* a g en el punto x_0. $\square$

Ejemplo 11.18

a) $f(x) = (x-2)^3$ es un infinitésimo de orden superior a $g(x) = (x-2)^2$ en $x = 2$.

b) $f(x) = (x+4)^2$ es un infinitésimo de orden inferior a $g(x) = (x+4)^5$ en $x = -4$.

c) $\operatorname{sen}(x) \sim x$ si $x \to 0$, $\tan(x) \sim x$ si $x \to 0$ y $\ln(x) \sim x - 1$ si $x \to 1$. □

Observación 11.30 Si f y g son infinitésimos equivalentes en un punto x_0 y se quiere calcular el límite cuando $x \to x_0$ en una expresión en la que aparece $f(x)$ como factor o divisor, podemos cambiar $f(x)$ por $g(x)$ sin que varíe el límite buscado. Esta "sustitución" de infinitésimos equivalentes está plenamente justificada, ya que

$$\lim_{x \to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\, g(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)h(x),$$

al ser $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{7\operatorname{sen}^3(x)}{(2x)^3} = \lim_{x \to 0} \frac{7x^3}{8x^3} = \frac{7}{8} \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3} = \frac{7}{8}. \quad \square$$

11.5. Continuidad

La idea intuitiva de función cuya gráfica "no está rota" o "se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel" es lo que se corresponde con la noción de *función continua*.

Definición 11.17 (Continuidad en un punto) Una función $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}$, es *continua* en el punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si se verifican las siguientes condiciones:

1) Existe $f(x_0)$ (es decir, $x_0 \in D$).

2) Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

3) $\ell = f(x_0)$.

En términos de cuantificadores, la función f es *continua* en x_0 cuando se verifica la propiedad

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ \text{ tal que si } \ |x - x_0| < \delta \ \text{ entonces } \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.}$$

Ejemplo 11.19 Son funciones continuas en $x = 0$ (de hecho, en cualquier punto $x \in \mathbb{R}$)

$$f_1(x) = 3, \ f_2(x) = 2x^4 - 5, \ f_3(x) = \cos(x) \ \text{ y } \ f_4(x) = e^{3x+2}. \quad \square$$

Definición 11.18 (Discontinuidadades) Los puntos en los que la función f no es continua se denominan *puntos de discontinuidad* de dicha función. Se muestran, a continuación, los diversos tipos de discontinuidades que pueden presentarse:

a) La función f tiene una *discontinuidad evitable* en el punto x_0 si existe $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ pero $\ell \neq f(x_0)$. En este caso, basta redefinir el valor que toma f en el punto x_0 como ℓ para hacerla continua en ese punto.

b) La función f tiene una *discontinuidad de salto* (o de *primera especie*) en el punto x_0 cuando no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ pero existen los límites laterales

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$$

(obviamente, $\ell_1 \neq \ell_2$).

c) La función f tiene una *discontinuidad esencial* (o de *segunda especie*) en el punto x_0 cuando no existe alguno de los límites laterales $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$ o existe pero es ∞. □

Ejemplo 11.20 La función f de la Figura 11.19 tiene una discontinuidad evitable en el punto x_0, una discontinuidad de salto en el punto x_1 y discontinuidades esenciales en los puntos x_2 y x_3. □

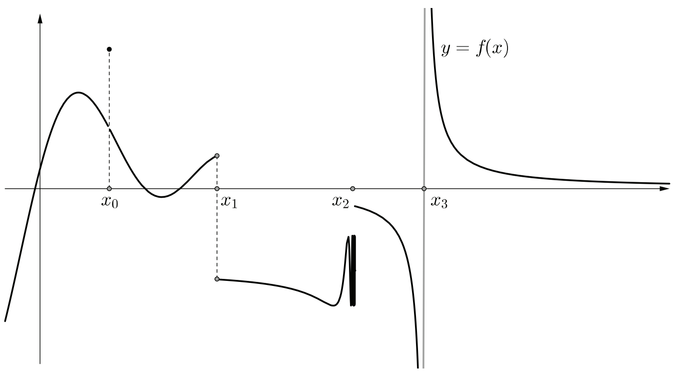


Figura 11.19: Diversos tipos de discontinuidades de una función.

Definición 11.19 (Continuidad en un intervalo abierto) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ y $a < b$, es una *función continua en el intervalo* (a,b) si f es continua en todos los puntos del intervalo (a,b). Denotaremos

$$\boxed{\mathcal{C}(a,b) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} : \ f \text{ es continua en } (a,b)\}}$$

al conjunto de funciones continuas en el intervalo abierto (a,b). □

Definición 11.20 (Continuidad en un intervalo no abierto)

a) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$, es una *función continua en el intervalo* $[a, b]$ si f es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) y en los extremos a y b del intervalo se verifica que f es *continua por la derecha* en a y *continua por la izquierda* en b, es decir, se verifica que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \ \text{ y } \ \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

b) $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ y $a < b$, es una *función continua en el intervalo* $[a, b)$ si f es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) y f es continua por la derecha en a.

c) $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, con $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, es una *función continua en el intervalo* $(a, b]$ si f es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) y f es continua por la izquierda en b.

En general, dado un intervalo I (abierto, cerrado o semiabierto), denotaremos

$$\boxed{\mathcal{C}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : \ f \text{ es continua en } I\}}$$

al conjunto de funciones continuas en el intervalo I. □

Ejemplo 11.21 Consideremos las funciones $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x-4}\right)$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

a) $f \in \mathcal{C}(4, +\infty)$ pero $f \notin \mathcal{C}([4, +\infty))$ (pues f no es continua en $x = 4$, al no estar definida en ese punto).

b) $g \in \mathcal{C}(0, +\infty)$ y, también, $g \in \mathcal{C}([0, +\infty))$. □

Proposición 11.3 (Propiedades algebraicas) *Si f y g son funciones continuas en x_0, se verifica que:*

a) $f + g,\ f - g,\ fg$ *y* λf *(con* $\lambda \in \mathbb{R}$*) son también funciones continuas en el punto* x_0.

b) $\dfrac{f}{g}$ *es continua en el punto* $x_0 \ \Leftrightarrow \ g(x_0) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN.

a) Veamos que la suma de dos funciones continuas en un punto es una función continua en ese punto (para la diferencia, producto y producto por escalares el argumento es análogo). En efecto, como las funciones f y g son continuas en el punto x_0, dado $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$\begin{cases} \exists\, \delta_1 > 0 \text{ tal que si } |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \exists\, \delta_2 > 0 \text{ tal que si } |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}. \end{cases} \tag{11.13}$$

De esta forma, si $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y $|x - x_0| < \delta$, utilizando la *desigualdad triangular* para el valor absoluto y la propiedad (11.13), se verifica que

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| &= |f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| \\ &= |f(x) - f(x_0) - (g(x) - g(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que determina la continuidad de la función $f + g$ en el punto x_0.

b) Por el apartado a) basta ver que la función $\frac{1}{h(x)}$ es continua en el punto x_0, siendo

$$h(x) = \frac{g(x)}{g(x_0)}.$$

Para ello tenemos que probar que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{h(x)} = 1$$

o, equivalentemente, dado $\varepsilon > 0$ encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{1}{h(x)} - 1 \right| = \frac{|h(x) - 1|}{|h(x)|} < \varepsilon. \tag{11.14}$$

Como

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = 1,$$

se verifica que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$|h(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |h(x) - 1| < \frac{1}{2}. \tag{11.15}$$

Teniendo en cuenta que

$$|h(x) - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < h(x) - 1 < \frac{1}{2},$$

se deduce que

$$h(x) > \frac{1}{2} \;\text{ si }\; 0 < |x - x_0| < \delta$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{|h(x)|} = \frac{1}{h(x)} < 2 \;\text{ si }\; 0 < |x - x_0| < \delta. \tag{11.16}$$

Sustituyendo la primera desigualdad de (11.15) y (11.16) en (11.14), se concluye que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$\frac{|h(x) - 1|}{|h(x)|} < 2\,\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Observación 11.31 Como consecuencia de la Proposición 11.3, se deducen las siguientes propiedades:

a) Cualquier combinación lineal de funciones continuas es una función continua.

b) Los polinomios son funciones continuas.

c) Los *polinomios trigonométricos*, que son los que se obtienen como combinaciones lineales de productos del tipo $\operatorname{sen}^n(x)\cos^m(x)$ con $n, m \in \mathbb{N}$, son funciones continuas.

d) Las discontinuidades de una función racional son las raíces de su denominador. $\square$

Ejemplo 11.22 La función

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

es continua en $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. En la Figura 11.15(a) se muestra la gráfica de esta función (tomando $x_0 = 2$). Dicha curva tiene una asíntota vertical $x = 2$. $\square$

Proposición 11.4 (Regla de la cadena) *Si f es una función continua en un punto x_0 y g es una función continua en el punto $f(x_0)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en el punto x_0.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis:

a) g es continua en $f(x_0) \;\Rightarrow\;$ dado $\varepsilon > 0 \,\exists\, \gamma > 0$ tal que

$$\text{si }\; |y - f(x_0)| < \gamma, \;\text{ entonces }\; |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

b) f es continua en $x_0 \;\Rightarrow\;$ dado $\gamma > 0 \,\exists\, \delta > 0$ tal que

$$\text{si }\; |x - x_0| < \delta, \;\text{ entonces }\; |f(x) - f(x_0)| < \gamma.$$

Los dos apartados anteriores determinan que dado $\varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0$ tal que

$$\text{si } \; |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } \; |g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon,$$

lo que determina la continuidad de la función $g \circ f$ en el punto x_0. $\square$

Ejemplo 11.23 La función $h(x) = e^{5x^3 - 2x^2 + x - 3}$ es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}$ por ser h la composición de dos funciones continuas $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + x - 3$ y $g(y) = e^y$:

$$x \xrightarrow{f(x)} y = 5x^3 - 2x^2 + x - 3 \xrightarrow{g(y)} e^y = h(x). \quad \square$$

Proposición 11.5 *Si una función f es continua en un punto x_0 y $f(x_0) \neq 0$, se verifica que existe un entorno del punto x_0 en el que la función f tiene el mismo signo que $f(x_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f(x_0) > 0$ (si $f(x_0) < 0$ el razonamiento es análogo). Puesto que, por definición

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > 0,$$

dado $\varepsilon = f(x_0) > 0$, se tiene que $\exists \, \delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < f(x_0).$$

De esta forma, para todo punto $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, se verifica que

$$-f(x_0) < f(x) - f(x_0) < f(x_0),$$

de donde se concluye que

$$f(x) > 0, \forall \, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad \square$$

A continuación enunciamos, sin demostración, uno de los teoremas más "célebres" relativos a funciones continuas:

Teorema 11.1 (Bolzano) *Sea $f \in \mathcal{C}([a, b])$ tal que $f(a)f(b) < 0$ (es decir, la función f tiene signo contrario en los extremos del intervalo $[a, b]$). Entonces al menos existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = 0$.* $\square$

Observación 11.32 (Interpretación geométrica) Si la gráfica de una función continua en un intervalo $[a, b]$ comienza en un lado del eje de abscisas y termina en el otro, necesariamente corta a dicho eje en algún punto. Lo que no indica el *teorema de Bolzano* es el número de raíces que tiene la función f en el intervalo $[a, b]$ ni su localización. Por ejemplo, la función f de la Figura 11.20 tiene tres raíces en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, 3\pi\right)$. $\square$

Ejemplo 11.24 Dado que la función $f(x) = x - 2\cos(x) - 5$ verifica que $f \in \mathcal{C}\left(\left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]\right)$,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 5 \simeq -3'4292 < 0 \ \text{ y } \ f(3\pi) = 3\pi + 2 - 5 = 3(\pi - 1) \simeq 6'4248,$$

por el *teorema de Bolzano* se verifica que existe, al menos, un punto $\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, 3\pi\right)$ tal que $f(\xi) = 0$. De hecho, como se aprecia en la Figura 11.20, hay tres valores del intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, 3\pi\right)$ en los que se anula la función f. $\square$

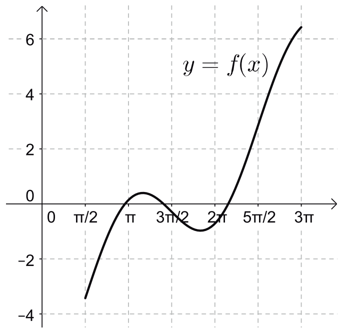


Figura 11.20: Gráfica de la función $f(x) = x - 2\cos(x) - 5$ en $\left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$.

Definición 11.21 Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$. La función f tiene un:

a) *Máximo absoluto* en el intervalo I si existe $x_{\max} \in I$ tal que

$$f(x) \leq f(x_{\max}),\ \forall\, x \in I.$$

El valor $M = f(x_{\max})$ es el *máximo* de la función f en I (se alcanza en el punto $x_{\max}$).

b) *Mínimo absoluto* en el intervalo I si existe $x_{\min} \in I$ tal que

$$f(x) \geq f(x_{\min}),\ \forall\, x \in I.$$

El valor $m = f(x_{\min})$ es el *mínimo* de la función f en I (se alcanza en $x_{\min}$). $\square$

Teorema 11.2 (Weierstrass) *Toda función $f \in \mathcal{C}([a,b])$ alcanza un máximo M y un mínimo m en el intervalo $[a,b]$. Por tanto, la función f está acotada en $[a,b]$ y*

$$m = f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) = M,\ \forall\, x \in [a,b]. \quad \square \tag{11.17}$$

Una consecuencia de los teoremas de *Bolzano* y *Weierstrass* es el *teorema de los Valores Intermedios* que afirma que una función continua en un intervalo cerrado toma todos los valores comprendidos entre el mínimo y el máximo de la función en dicho intervalo (véase la Figura 11.21):

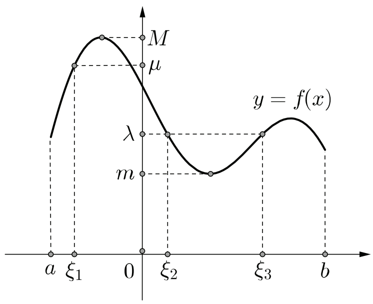


Figura 11.21: Interpretación geométrica del *teorema de los Valores Intermedios*.

Teorema 11.3 (Valores Intermedios) *Sea* $f \in \mathcal{C}([a,b])$,

$$m = \min_{a \le x \le b} f(x) \;\; y \;\; M = \max_{a \le x \le b} f(x).$$

Para cada $\lambda \in [m, M]$ *existe* (*al menos*) *un valor* $\xi \in [a,b]$ *tal que* $f(\xi) = \lambda$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función auxiliar $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(x) - \lambda, \; \forall \, x \in [a,b].$$

Por el *teorema de Weierstrass* se tiene que existen $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$ verificando (11.17). De esta forma, como $g \in \mathcal{C}([a,b])$ (por serlo f) y

$$\begin{cases} g(x_{\min}) = f(x_{\min}) - \lambda = m - \lambda \ge 0 \\ g(x_{\max}) = f(x_{\max}) - \lambda = M - \lambda \le 0, \end{cases}$$

por el *teorema de Bolzano* se tiene que, al menos, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$g(\xi) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(\xi) = \lambda. \quad \square$$

Ejemplo 11.25 La función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ verifica que $f \in \mathcal{C}([0, 3\pi])$. De acuerdo con el *teorema de Weierstrass*, su valor máximo es 1 y lo alcanza en $x_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2}$ (también lo alcanza en el punto $x^*_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$) y su valor mínimo es -1 y lo alcanza en $x_{\text{mín}} = \frac{3\pi}{2}$ (véase la Figura 11.22). Además, por el *teorema de Valores Intermedios*, para cada valor $\lambda \in [-1, 1]$ existe, al menos, un valor $\xi \in [0, 3\pi]$ tal que $f(\xi) = \lambda$. Así, por ejemplo, para $\lambda = -\frac{1}{2}$, los valores $\xi_1 = \frac{7\pi}{6}$ y $\xi_2 = \frac{11\pi}{6}$ verifican que $\xi_1, \xi_2 \in [0, 3\pi]$ y $f(\xi_1) = f(\xi_2) = -\frac{1}{2}$ (de hecho, como se aprecia en la Figura 11.22, ξ_1 y ξ_2 son los únicos valores del intervalo $[0, 3\pi]$ con esa propiedad). $\square$

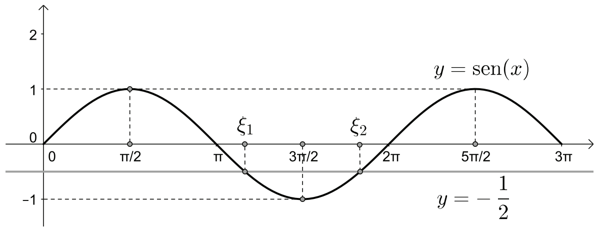


Figura 11.22: Gráfica de la función $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 3\pi]$.

Teorema 11.4 *Toda función f estrictamente creciente (respectivamente, decreciente) en $[a, b]$ tiene inversa. Además, si $f \in \mathcal{C}([a, b])$, la función inversa f^{-1} es continua y estrictamente creciente (respectivamente, decreciente) en el intervalo $[f(a), f(b)]$ (respectivamente, $[f(b), f(a)]$).*

DEMOSTRACIÓN.

a) Obviamente, toda función estrictamente creciente (respectivamente, decreciente) en $[a, b]$ es inyectiva y, por tanto, por la Proposición 11.1, tiene inversa.

b) Veamos que si la función f es estrictamente creciente (el caso estrictamente decreciente se aborda de manera análoga), entonces f^{-1} es estrictamente creciente. En primer lugar, como f es estrictamente creciente y $a < b$, se tiene que $f(a) < f(b)$. Dados $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$ tales que $y_1 < y_2$, tenemos que demostrar que

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

En efecto, por el *teorema de los Valores Intermedios* (véase el Teorema 11.3) y la inyectividad de f mencionada en el apartado a), se tiene que existen unos únicos valores $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que

$$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2),$$

lo que implica (por ser f estrictamente creciente) que $x_1 < x_2$ y, por tanto,

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2),$$

tal y como queríamos probar.

c) La demostración de que si f es estrictamente creciente en $[a, b]$ y $f \in \mathcal{C}([a, b])$ entonces $f^{-1} \in \mathcal{C}([f(a), f(b)])$ es más complicada y no la hacemos aquí. □

11.6. Problemas

11.1. Si $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ y $g(x) = \dfrac{3}{x+1}$, determinar las funciones $f + g$, $f - g$, fg y $\dfrac{f}{g}$ y hallar sus respectivos dominios de definición.

11.2. Si $f(x) = \dfrac{2x}{2x^2+1}$ y $g(x) = 4x$, hallar las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

11.3. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Para ello, intentar dibujar su gráfica, calculando previamente su dominio y los límites

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) \ \text{ y } \ \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

11.4. Demostrar que toda función estrictamente creciente o decreciente es inyectiva.

11.5. Resolver la ecuación

$$3^{x-1} = 9.$$

11.6. Hallar las soluciones de la ecuación

$$3^{x^2-1} = 27.$$

11.7. Resolver la ecuación

$$2\ln(3x) + \ln(6) = \ln(18).$$

11.8. Encontrar la solución del sistema

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 25^3 \\ 5^{x-y} = 25. \end{cases}$$

11.9. Hallar la solución del sistema

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{x+1} - 3^{y+1} = -1. \end{cases}$$

11.10. Encontrar la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(12). \end{cases}$$

11.11. ¿Cómo son entre sí los números positivos a y b si $\log(a) + \log(b) = 0$?

11.12. Hallar las soluciones de las ecuaciones:

a) $\dfrac{\log(35 - x^3)}{\log(5-x)} = 3$ b) $\dfrac{\log(2) + \log(11 - x^2)}{\log(5-x)} = 2.$

11.13. Sabiendo que $\ln(10) \simeq 2'30258$, ¿cuánto vale, aproximadamente, $e^{2'30258}$?

11.14. Escribir, como una sola potencia de 2, las siguientes expresiones:

$$\text{a) } 2^{\frac{\pi}{2}}2^{\frac{\pi}{4}} \qquad \text{b) } \frac{2^{\frac{3\pi}{2}}}{2^{\frac{\pi}{2}}} \qquad \text{c) } \frac{2^{\sqrt[3]{2}}}{2^{\sqrt{2^3}}} \qquad \text{d) } \left(2^{\sqrt[3]{2}}\right)^3 \qquad \text{e) } \left(2^{\frac{3\pi}{2}}\right)^2.$$

11.15. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } 2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=7 \qquad \text{b) } 3^x+3^{1-x}=4 \qquad \text{c) } 4^{x-1}-2^{x+2}=128.$$

11.16. Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+2} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \qquad \text{c) } \lim_{x\to 1}\frac{-x^2-5x+6}{2(x+1)} \qquad \text{d) } \lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x-2}.$$

11.17. Hallar los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to -1}\frac{3x^4+5x^3+x+1}{2x^3-3x^2+2x} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 3}\frac{x^4-3x^3+2x^2-5x-3}{x^3-3x^2-x+3}$$

$$\text{c) } \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{4x^2-1}{x^2+3x+5}\right)^{\dfrac{x^3+1}{2x^3+5x^2-x}} \qquad \text{d) } \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}.$$

11.18. Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+5\right) \qquad \text{b) } \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+4\right) \qquad \text{c) } \lim_{x\to +\infty}\frac{-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}}{\dfrac{5}{x^3}+7}$$

$$\text{d) } \lim_{x\to +\infty}\frac{2x+3}{3x-5} \qquad \text{e) } \lim_{x\to -\infty}\frac{3x-5}{4x^2-x+2} \qquad \text{f) } \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3+2x^2-5x+1}{3x^2-x+4}.$$

11.19. Hallar los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x} \qquad \text{c) } \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$$

$$\text{d) } \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) \qquad \text{e) } \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \qquad \text{f) } \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11.20. Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{x^2} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{x-2}} \qquad \text{c) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}\right)^{\frac{1}{x-2}}.$$

11.21. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-7}{7x^2-x-6}$, calcular

$$\lim_{x\to 0} f(x),\ \lim_{x\to 1} f(x),\ \lim_{x\to -\infty} f(x) \text{ y } \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

11.22. ¿Para qué valor de x es la función $f(x) = 2x - 5$ un infinitésimo?

11.23. ¿Es la función seno un infinitésimo en $x = \dfrac{\pi}{2}$? ¿Y en $x = \pi$?

11.24. Demostrar que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ es un infinitésimo de orden superior a $g(x) = x - 2$ en $x = 2$.

11.25. Probar que $f(x) = 1 - \cos(x)$ es un infinitésimo equivalente a $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ en el punto $x = 0$.

11.26. Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{\tan(3x)} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{2x} \qquad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)}{1-\cos(x)}.$$

11.27. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-1)(x-2)}$.

a) Determinar los puntos de discontinuidad de la función f indicando el tipo de cada uno de ellos.

b) Calcular el límite de la función f en cada uno de ellos.

c) Hallar las asíntotas horizontales y verticales a la gráfica de la curva $y = f(x)$.

d) Esbozar la gráfica de la función f.

11.28. Determinar las discontinuidades de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f_1(x) = 5x^6 + 7x^2 - 8x + 4 \qquad \text{b) } f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-2x+1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f_3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \qquad \text{d) } f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-3x^3-x^2+3}{x^2+2x-3} & \text{si} \quad x \neq \{-3, 1\} \\ 0 & \text{si} \quad x = -3 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

11.29. Demostrar que la función afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \lambda x + \mu$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, es continua en toda la recta real.

11.30. **[Función signo]** Determinar en qué región es continua la *función signo*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Representar gráficamente esta función.

11.31. ¿Es continua la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0? \end{cases}$$

11.32. Demostrar que la función

$$f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

11.33. Sabiendo que la función

$$f(x) = \frac{3x - 4}{x^3 + \alpha x^2 + 8x - 4}$$

es discontinua en $x = 2$, calcular α y clasificar todas las discontinuidades de f.

11.34. Hallar el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{x^2 + \lambda x + 5}{x^2 - 3x + 2}$$

tenga en $x = 2$ una discontinuidad evitable y determinar cómo hay que definir $f(2)$ para que f sea continua en el punto $x = 2$.

11.35. Hallar los valores de α y β para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 4^{\frac{x}{\pi}} & \text{si} \quad x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ \alpha \operatorname{sen}(x) + \beta & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{si} \quad x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

11.36. Demostrar que la ecuación

$$x^5 + 3x - 5 = 0$$

tiene alguna solución comprendida entre 1 y 2.

11.37. Probar que la ecuación

$$x + \operatorname{sen}(x) - 1 = 0$$

tiene, al menos, una raíz real.

11.38. La función $f(x) = \cot(x)$ verifica que $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ y $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. ¿Significa esto que la ecuación $\cot(x) = 0$ tiene alguna solución comprendida entre $-\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4}$?

11.39. Sean $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$. Demostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

11.40. Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ y $x_1, x_2 \in [a, b]$ demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

11.7. Soluciones

11.1. $(f+g)(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 9}{(x-3)(x+1)}$, $(f-g)(x) = \dfrac{2x^2 - x + 9}{(x-3)(x+1)}$, $fg(x) = \dfrac{6x}{(x-3)(x+1)}$ y $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{2x(x+1)}{3(x-3)}$. Además,

$$\operatorname{Dom}(f+g) = \operatorname{Dom}(f-g) = \operatorname{Dom}(fg) = \mathbb{R}\backslash\{3, -1\} \text{ y } \operatorname{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}\backslash\{3\}.$$

11.2. $g \circ f(x) = \dfrac{8x}{2x^2 + 1}$ y $f \circ g(x) = \dfrac{8x}{32x^2 + 1}$.

11.3. f es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

11.4. Suponer que f es estrictamente creciente (el caso decreciente se aborda de manera análoga) y considerar $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom}(f)$ tales que $x_1 \neq x_2$ (sin pérdida de generalidad puede suponerse que $x_1 < x_2$).

11.5. $x = 3$.

11.6. $x = 2$ y $x = -2$.

11.7. $x = +\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

11.8. $x = 4, y = 2$.

11.9. $x = 2, y = 1$.

11.10. $\left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 3 \end{array}\right.$ y $\left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4. \end{array}\right.$

11.11. $ab = 1$. Es decir, los números a y b son inversos el uno del otro.

11.12. a) $x = 2$ y $x = 3$ b) $x = \dfrac{1}{3}$ y $x = 3$.

11.13. 10.

11.14. a) $2^{\frac{3\pi}{4}}$ b) 2^{π} c) $2^{\sqrt[3]{2}-\sqrt{2^3}}$ d) $2^{3\sqrt[3]{2}}$ e) $2^{3\pi}$.

11.15. a) $x = 1$ b) $x = 1$ y $x = 0$ c) $x = 5$.

11.16. a) 0 b) 4 c) $-\dfrac{7}{2}$ d) $\dfrac{1}{3}$.

11.17. a) $\dfrac{2}{7}$ b) $\dfrac{17}{4}$ c) 2 d) $e^2 \simeq 7'3891$.

11.18. a) $+\infty$ b) 4 c) 0 d) $\dfrac{2}{3}$ e) 0 f) $+\infty$.

11.19. a) 2 b) $-\dfrac{1}{2}$ c) -1 d) 0 e) 0 f) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} \simeq 1'2247$.

11.20. a) 1 b) $e^{-1} = \dfrac{1}{e} \simeq 0'3679$ c) 1.

11.21. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{7}{6}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{9}{13}$ y $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \dfrac{2}{7}$.

11.22. $x = \dfrac{5}{2}$.

11.23. No. Sí.

11.24. Inmediato.

11.25. Inmediato.

11.26. a) $\dfrac{4}{3}$ b) $\dfrac{5}{2}$ c) $\dfrac{1}{2}$.

11.27. a) $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ discontinuidades evitables. $x_2 = -1$ discontinuidad de segunda especie. b) Los límites de f en los puntos anteriores son: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$. c) $y = 0$ y $x = 1$.

11.28. a) No hay discontinuidades. b) $x = 1$ discontinuidad evitable. c) $x = 2$ discontinuidad evitable. d) $x = -3$ discontinuidad de segunda especie y $x = 1$ discontinuidad de primera especie.

11.29. Basta aplicar la definición de continuidad distinguiendo los casos $\lambda \neq 0$ y $\lambda = 0$.

11.30. $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. En $x = 0$ f tiene una discontinuidad de primera especie.

11.31. $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. No existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (para demostrarlo basta considerar, por ejemplo, la sucesión $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$).

11.32. Utilizar que para todo $x \neq 0$ se verifica que $0 \leq |f(x)| = |x| \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$ y aplicar la *regla del sándwich*.

11.33. $\alpha = -5$. $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ son puntos de discontinuidad de segunda especie.

11.34. $\lambda = -\dfrac{9}{2}$. $f(2) = -\dfrac{1}{2}$.

11.35. $\alpha = -\dfrac{1}{4}$ y $\beta = \dfrac{1}{4}$.

11.36. Aplicar el *teorema de Bolzano* en el intervalo $(1, 2)$.

11.37. Aplicar el *teorema de Bolzano* en el intervalo $(0, 2)$.

11.38. No. La función f no es continua en $x = 0$ y, por tanto, $f \notin \mathcal{C}\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right)$, por lo que no se verifican las hipótesis del *teorema de Bolzano* en ese intervalo.

11.39. Basta aplicar el *teorema de Bolzano* a la función $h(x) = f(x) - g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

11.40. Basta aplicar primero el *teorema de Weierstrass* y luego el *teorema de los Valores Intermedios*.

12 Números complejos

12.1. Introducción

En el Capítulo 1 se introdujeron los conjuntos de números naturales ($\mathbb{N}$), enteros ($\mathbb{Z}$), racionales ($\mathbb{Q}$) y reales ($\mathbb{R}$), de forma que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

En este capítulo se presenta un nuevo conjunto de números, los *números complejos* ($\mathbb{C}$), que incluye a todos los anteriores y que es de una enorme utilidad en múltiples ramas de la ciencia y la tecnología como, por ejemplo, la descripción de circuitos eléctricos. Se trata de un conjunto de números que permite resolver ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$, que no son resolubles con los números reales.

12.2. Definición, conceptos básicos y representación gráfica

Es claro que ningún número real puede ser solución de la ecuación

$$x^2 + 1 = 0 \tag{12.1}$$

pues, si existiera tal número, entonces $x^2 = -1 < 0$, pero sabemos que todo número real x cumple que $x^2 \geq 0$. Llegados a este punto, denotamos por i un nuevo número (no real) definido como

$$i = \sqrt{-1},$$

al que se denomina *unidad imaginaria*, de forma que las soluciones de la ecuación (12.1) son

$$x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

A partir de la propiedad

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1, \tag{12.2}$$

se pueden extraer raíces cuadradas de números negativos.

Ejemplo 12.1 $\sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3i.$ $\square$

Definición 12.1 Se define el *conjunto de números complejos* $\mathbb{C}$ como

$$\mathbb{C} = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

La representación de un número complejo z como $z = a + bi$ se denomina *forma binómica* del número complejo z (en las Secciones 12.4. y 12.6. veremos que los números complejos se pueden representar de otras formas).

a) El número real a es la *parte real* del número complejo z y se representa $a = \mathrm{Re}(z)$.

b) El número real b se denomina *parte imaginaria* del número complejo z y se representa $b = \mathrm{Im}(z)$.

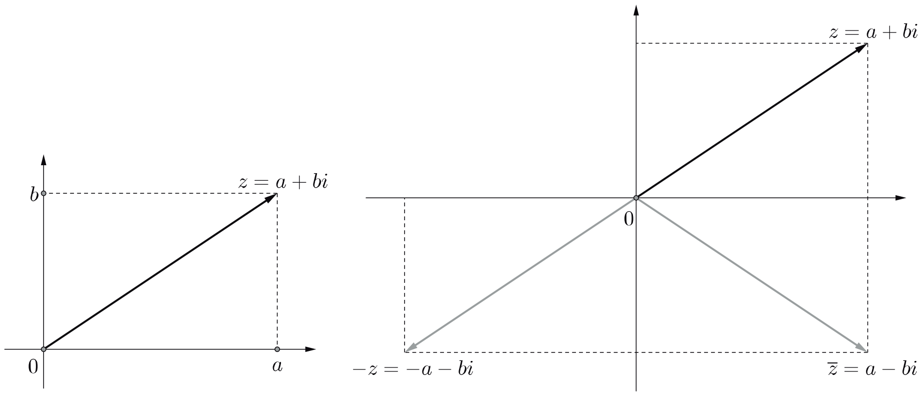
c) $\overline{z} = a - bi$ es el número complejo *conjugado* de z (tiene la misma parte real que z y como parte imaginaria la opuesta de z).

d) $-z = -a - bi$ es el número complejo *opuesto* de z (tiene como partes real e imaginaria las opuestas de las partes real e imaginaria de z).

e) Dos *números complejos* son *iguales* si, y sólo si, tienen las mismas partes real e imaginaria, es decir,

$$a + bi = c + di \ \Leftrightarrow \ a = c \ \text{ y } \ b = d. \quad \square$$

En la Figura 12.1 se muestran las partes real e imaginaria, así como el conjugado y el opuesto, de un número complejo $z = a + bi$.



(a) Partes real e imaginaria. (b) Conjugado y opuesto.

Figura 12.1: Números complejos en forma binómica.

Ejemplo 12.2 $z_1 = 4 + 2i$, $z_2 = 5 - 3i$, $z_3 = 2i$, $z_4 = 6$ y $z_5 = 2 - 7i$ son números complejos. Sus conjugados son, respectivamente, $\overline{z}_1 = 4 - 2i$, $\overline{z}_2 = 5 + 3i$, $\overline{z}_3 = -2i$, $\overline{z}_4 = 6$ y $\overline{z}_5 = 2 + 7i$ y, sus opuestos, $-z_1 = -4 - 2i$, $-z_2 = -5 + 3i$, $-z_3 = -2i$, $-z_4 = -6$ y $-z_5 = -2 + 7i$. □

Observación 12.1 Es claro que el conjugado del conjugado de un número complejo z es el mismo número complejo z, ya que si $z = a + bi$, se verifica que

$$\overline{\overline{z}} = \overline{a - bi} = a + bi = z. \quad \square$$

Observación 12.2 Es claro que los números complejos son una generalización de todos los números estudiados anteriormente, pues

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

En efecto, para mostrar la última inclusión basta observar que todo número $r \in \mathbb{R}$ es un número complejo, pues podemos escribir $r = r + 0i$ (es decir, los números reales son números complejos con parte imaginaria nula). Por otro lado a los números complejos del tipo $z = bi$ (es decir, con parte real nula) se les denomina *imaginarios puros*. □

Las soluciones de la ecuación $x^2 + 25 = 0$ se obtienen de la siguiente forma:

$$x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25}\sqrt{-1} = \pm 5i.$$

Veamos, en general, cómo son las raíces de una ecuación algebraica de segundo orden de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0.$$

En la Observación 2.26 vimos que sus raíces, si existen, son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(véase (2.4)). En dicha observación tuvimos la precaución de escribir “si existen” ya que sólo existen raíces reales cuando el discriminante $b^2 - 4ac \geq 0$. Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces no existen raíces reales pero sí complejas, y vienen dadas por

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{(-1)(4ac - b^2)}}{2a} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\, i$$

y

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{(-1)(4ac - b^2)}}{2a} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\, i.$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) = -\frac{b}{2a} \text{ e } \mathrm{Im}(z_1) = -\mathrm{Im}(z_2) = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

en el caso de que no haya raíces reales, se verifica que

$$z_1 = \overline{z}_2 \text{ y } z_2 = \overline{z}_1,$$

es decir, las dos raíces complejas son cada una conjugada de la otra.

Ejemplo 12.3 Las raíces de la ecuación $2x^2 - x - 3 = 0$ son

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$$

mientras que las raíces de la ecuación $2x^2 - x + 3 = 0$ son

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{23}\, i}{4} = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}\, i \\ \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}\, i. \end{cases} \quad \square$$

Puesto que cada número complejo $z = a + bi$ viene determinado unívocamente por la pareja ordenada de números reales (a, b), se tiene que cada número complejo se puede representar por un único punto del plano (que se denomina *afijo* de z) y, recíprocamente, cada punto del plano representa un único número complejo (véase la Figura 12.2).

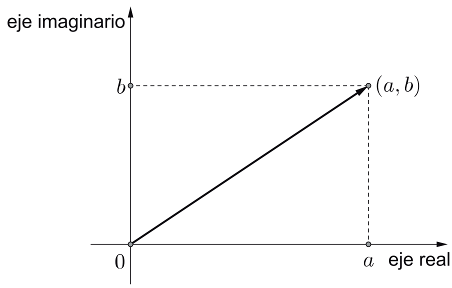


Figura 12.2: Afijo del número complejo $z = a + bi$.

Es decir, podemos establecer la siguiente equivalencia entre números complejos y puntos del plano

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a + bi & \leftrightsquigarrow & (a, b). \end{array}$$

En particular, los números complejos 1, -1, i y $-i$ se corresponden, respectivamente, con los puntos del plano $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Como se aprecia en la Figura 12.2, en la representación gráfica de los números complejos en el plano se llama *eje real* al eje de abscisas y *eje imaginario* al eje de ordenadas.

12.3. Operaciones con números complejos en forma binómica

Supongamos que tenemos dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$. Veamos cómo realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potenciación.

12.3.1. Suma y resta de números complejos

La suma de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real (respectivamente, parte imaginaria) es la suma de las partes reales (respectivamente, imaginarias) de los números sumados

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Ejemplo 12.4 $(-2 + 3i) + (1 - 5i) = (-2 + 1) + (3 - 5)i = -1 - 2i.$ □

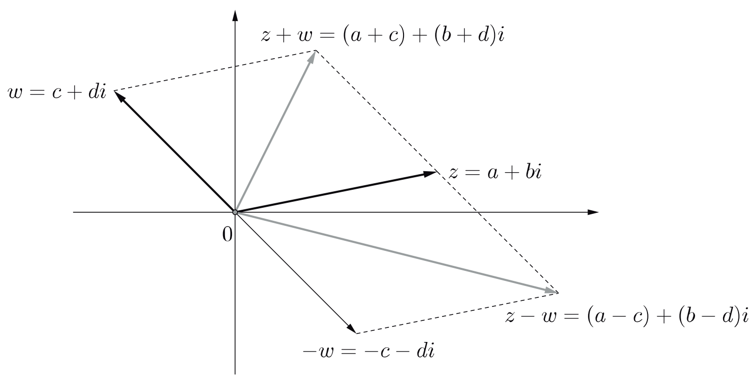


Figura 12.3: Suma y resta de números complejos.

La resta de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real (respectivamente, parte imaginaria) es la resta de las partes reales (respectivamente, imaginarias) de los números restados

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Ejemplo 12.5 $(-2 + 3i) - (1 - 5i) = (-2 - 1) + (3 + 5)i = -3 + 8i.$ □

En la Figura 12.3 se muestran la suma y la resta de los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$.

Observación 12.3 El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos con la suma cumple las siguientes propiedades:

a) Propiedad conmutativa: para todo $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$,

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a' + b'i) + (a + bi).$$

b) Propiedad asociativa: para todo $a, b, a', b', a'', b'' \in \mathbb{R}$,

$$\big((a + bi) + (a' + b'i)\big) + (a'' + b''i) = (a + bi) + \big((a' + b'i) + (a'' + b''i)\big).$$

c) Existencia de elemento neutro: para todo $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (0 + 0i) + (a + bi) = a + bi.$$

d) Existencia de elemento opuesto: para todo $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i. \quad \square$$

Proposición 12.1 *El conjugado de una suma de números complejos es la suma de los conjugados de dichos números. Es decir, para todo $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ se verifica que*

$$\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \cdots + \overline{z}_n.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que si $z_j = a_j + b_j i$ para $j = 1, 2, \dots, n$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} &= \overline{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \cdots + (a_n + b_n i)} \\
&= \overline{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)i} \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)i \\
&= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) + \cdots + (a_n - b_n i) \\
&= \overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \cdots + \overline{z}_n. \quad \square
\end{aligned}$$

12.3.2. Producto y cociente de números complejos

Para realizar el producto de dos números complejos se tiene en cuenta que $i^2 = -1$ (véase (12.2)) y, por tanto,

$$zw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Ejemplo 12.6 $(-2 + 3i)(1 - 5i) = (-2 + 15) + (10 + 3)i = 13 + 13i.$ $\square$

Observación 12.4 En particular, el resultado de multiplicar un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por un número complejo $z = a + bi$ es

$$\lambda z = \lambda(a + bi) = (\lambda + 0i)(a + bi) = \lambda a + \lambda bi.$$

En el caso de que $\lambda > 0$, el número complejo λz tiene el mismo sentido que z (entendido como vector de $\mathbb{R}^2$) mientras que, si $\lambda < 0$, tiene sentido contrario (véase la Figura 12.4). $\square$

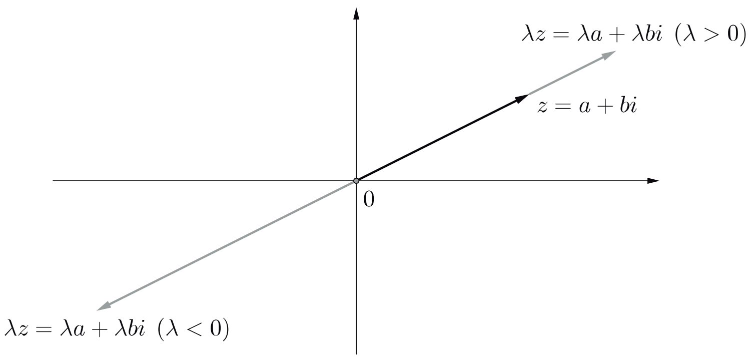


Figura 12.4: Producto de un escalar por un número complejo.

Otro caso particular de producto es cuando se multiplica un número complejo por su conjugado, cuyo resultado es un número real (no negativo), ya que

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}. \tag{12.3}$$

Ejemplo 12.7 $(-2 + 3i)(-2 - 3i) = (-2)^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$ □

Observación 12.5 Nótese que si consideramos z en su representación geométrica (a, b), se verifica que

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 = ||z||^2,$$

es decir, $z\overline{z}$ es la norma euclídea al cuadrado del vector (a, b). □

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, podemos calcular la división de un número complejo z entre otro número complejo $w \neq 0 + 0i$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \ \text{ e } \ \mathrm{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Ejemplo 12.8

$$\frac{-2 + 3i}{1 - 5i} = \frac{(-2 + 3i)(1 + 5i)}{(1 - 5i)(1 + 5i)} = \frac{(-2 - 15) + (3 - 10)i}{1 + 25} = -\frac{17}{26} - \frac{7}{26}\, i. \quad \square$$

Un caso particular es el cálculo del *inverso* de un número complejo $z = a + bi \neq 0 + 0i$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i.$$

Ejemplo 12.9 El inverso del número complejo $-2 + 3i$ es

$$(-2 + 3i)^{-1} = \frac{1}{-2 + 3i} = \frac{-2 - 3i}{(-2 + 3i)(-2 - 3i)} = \frac{-2 - 3i}{4 + 9} = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13}\, i. \quad \square$$

Observación 12.6 El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos con el producto cumple las siguientes propiedades:

a) Propiedad conmutativa: para todo $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$,

$$(a + bi)(a' + b'i) = (a' + b'i)(a + bi).$$

b) Propiedad asociativa: para todo $a, b, a', b', a'', b'' \in \mathbb{R}$,

$$\big((a + bi)(a' + b'i)\big)(a'' + b''i) = (a + bi)\big((a' + b'i)(a'' + b''i)\big).$$

c) Existencia de elemento neutro: para todo $a, b \in \mathbb{R}$,

$$(a + bi)(1 + 0i) = (1 + 0i)(a + bi) = a + bi.$$

d) Existencia de elemento inverso: para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a + bi \neq 0 + 0i$,

$$(a + bi)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i\right) = 1 + 0i.$$

e) Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma: para todo a, b, a', b', a'', $b'' \in \mathbb{R}$,

$$(a + bi)\big((a' + b'i) + (a'' + b''i)\big) = (a + bi)(a' + b'i) + (a + bi)(a'' + b''i). \quad \square$$

Proposición 12.2 *El conjugado de un producto de dos números complejos es el producto de los conjugados de dichos números. Es decir, para todo* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *se verifica que*

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que si $z_j = a_j + b_j i$ para $j = 1, 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2)i} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i} \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \\ &= (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \overline{z}_1 \overline{z}_2. \quad \square \end{aligned}$$

12.3.3. Potencias de números complejos

Dado un número natural $n \in \mathbb{N}$, la potencia $(a+bi)^n$ de un número complejo se desarrolla multiplicando $(a+bi)$ por sí mismo n veces, utilizando la regla de multiplicación de dos números vista anteriormente. Por ejemplo,

$$(a+bi)^3 = (a+bi)^2(a+bi) = \big((ac-bd)+(ad+bc)i\big)(a+bi) = \cdots$$

Esto puede generar cálculos muy tediosos.

Ejemplo 12.10

$$\begin{aligned}(-2+3i)^3 &= (-2+3i)^2(-2+3i) = \big((4-9)+(-6-6)i\big)(-2+3i)\\ &= (-5-12i)(-2+3i) = (10+36)+(24-15)i = 46+9i. \quad \square\end{aligned}$$

Una segunda forma de calcular potencias es utilizar el *binomio de Newton* (véase el Teorema 2.1), teniendo en cuenta que las sucesivas potencias de i se calculan fácilmente de la siguiente forma

$$\begin{array}{llll} i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = -i, & i^4 = 1 \\ i^5 = i^4 i = i, & i^6 = i^4 i^2 = -1, & i^7 = i^4 i^3 = -i, & i^8 = i^4 i^4 = 1 \\ i^9 = i^8 i = i, & i^{10} = i^8 i^2 = -1, & i^{11} = i^8 i^3 = -i, & i^{12} = i^8 i^4 = 1 \ldots \end{array}$$

y, en general, cualquier potencia natural de i viene dada por

$$i^{4n+p} = i^p = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p = 0 \\ i & \text{si} \quad p = 1 \\ -1 & \text{si} \quad p = 2 \\ -i & \text{si} \quad p = 3. \end{cases}$$

Es decir, todo se reduce a comprobar si el exponente de i es un múltiplo de 4, de 4 más 1, de 4 más 2 o un múltiplo de 4 más 3.

Ejemplo 12.11 Para calcular i^{322} efectuamos la división

$$\begin{array}{r|l} 322 & 4 \\ \cline{2-2} 02 & 80 \end{array},$$

por lo que

$$i^{322} = i^{4\times 80+2} = i^2 = -1. \quad \square$$

Esta segunda forma de calcular potencias de la forma $(a+bi)^n$ también puede resultar muy tediosa.

Ejemplo 12.12

$$\begin{aligned}(-2+3i)^3 &= (-2)^3 + 3(-2)^2(3i) + 3(-2)(3i)^2 + (3i)^3 \\ &= -8 + 36i + 54 - 27i = 46 + 9i. \quad \square\end{aligned}$$

En la Sección 12.5.3. veremos una forma mucho más cómoda y rápida de calcular estas potencias.

También son fáciles de calcular las potencias de i con exponente negativo. Claramente, se tiene que

$$\begin{array}{llll} i^{-1} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = -i, & i^{-2} = \dfrac{1}{i^2} = -1, & i^{-3} = \dfrac{1}{i^3} = \dfrac{i}{i^4} = i, & i^{-4} = \dfrac{1}{i^4} = 1 \\ i^{-5} = i^{-4}i^{-1} = -i, & i^{-6} = i^{-4}i^{-2} = -1, & i^{-7} = i^{-4}i^{-3} = i, & i^{-8} = i^{-4}i^{-4} = 1 \\ i^{-9} = i^{-8}i^{-1} = -i, & i^{-10} = i^{-8}i^{-2} = -1, & i^{-11} = i^{-8}i^{-3} = i, & i^{-12} = i^{-8}i^{-4} = 1 \end{array}$$

y, en general, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$i^{-(4n+p)} = \frac{1}{i^{4n+p}} = \frac{1}{i^p} = i^{-p} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p = 0 \\ -i & \text{si} \quad p = 1 \\ -1 & \text{si} \quad p = 2 \\ i & \text{si} \quad p = 3. \end{cases}$$

Ejemplo 12.13 Para calcular i^{-117} dividimos 117 entre 4, obteniendo

$$\begin{array}{r|l} 117 & 4 \\ \cline{2-2} 37 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

De esta forma,

$$i^{-117} = \frac{1}{i^{117}} = \frac{1}{i^{4\times 29+1}} = \frac{1}{i} = i^{-1} = -i. \quad \square$$

Por último, para calcular una potencia negativa

$$z^{-n} = (a+bi)^{-n}$$

con $n \in \mathbb{N}$ basta primero calcular z^n (tal y como se ha visto) y después calcular su inverso

$$z^{-n} = (z^n)^{-1},$$

siguiendo lo visto anteriormente para el cálculo de inversos.

Ejemplo 12.14 Utilizando los resultados de los Ejemplos 12.10 o 12.12, se tiene que

$$\begin{aligned}(-2+3i)^{-3} &= \frac{1}{(-2+3i)^3} = \frac{1}{46+9i} = \frac{46-9i}{(46+9i)(46-9i)} \\ &= \frac{46-9i}{2116+81} = \frac{46}{2197} - \frac{9}{2197}\, i. \quad \square\end{aligned}$$

12.4. Forma polar de un número complejo

12.4.1. Módulo y argumento de un número complejo

Tal y como se ha visto en la Sección 12.2., todo número complejo z se puede representar como un punto del plano con coordenadas cartesianas (a, b), de forma que $z = a + bi$. En lugar de dar sus coordenadas cartesianas, también podemos determinar de forma unívoca el punto (y por tanto el número complejo), si $z \neq 0 + 0i$, dando sus coordenadas polares, que son el *módulo* y el *argumento* del número complejo.

Definición 12.2 Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, representado como un punto $P = (a, b)$ del plano.

a) Se denomina *módulo* de z, y se denota $|z|$, a la distancia en el plano entre el origen de coordenadas $O = (0, 0)$ y P, es decir,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

b) Si $z \neq 0 + 0i$, se denomina *argumento* de z, y se denota $\arg(z)$, al ángulo que forma el semieje real positivo con el segmento OP, medido en sentido contrario al de las agujas del reloj. Por tanto, se verifica que

$$\tan(\arg(z)) = \frac{b}{a} \tag{12.4}$$

(véase, más adelante, la Observación 12.8). □

Ejemplo 12.15 El módulo del número complejo $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ es

$$|z| = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

y su argumento lo obtenemos a partir de la relación

$$\tan(\arg(z)) = 1,$$

de donde, tomando la función inversa de la tangente (es decir, el arco tangente), se tiene que

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

Observación 12.7

a) La propiedad (12.3) determina que para todo número complejo $z = a + bi$ se verifica que

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2,$$

por lo que podemos expresar el módulo del número complejo z como

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

b) Cualquier número complejo $z = a + bi$ y su conjugado $\overline{z} = a - bi$ tiene el mismo módulo, ya que

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|.$$

c) A partir de la Observación 12.5 podemos establecer la igualdad

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = ||(a, b)||,$$

es decir, el módulo de un número complejo $z = a + bi$ coincide con la norma euclídea del vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Por tanto, por la Definición 8.4, la aplicación $|\cdot|$ que a cada número complejo de $\mathbb{C}$ le asocia un número real

$$\begin{array}{rccc} |\cdot|: & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & |z| \end{array}$$

verifica las siguientes propiedades:

i) $|z| \geq 0,\ z \in \mathbb{C}$ y $|z| = 0 \Leftrightarrow |z| = 0.$

ii) $|zw| = |z||w|,\ z, w \in \mathbb{C}.$

iii) $|z + w| \leq |z + w|,\ z, w \in \mathbb{C}$ (*Desigualdad triangular*). $\square$

Observación 12.8

a) Para todo número $z \in \mathbb{C}$ su módulo está unívocamente definido, pero su argumento puede tomar infinitos valores. En efecto, si α es argumento de z, entonces $\alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ también es un argumento válido de z, pues representa el mismo ángulo. Normalmente se toma como argumento el único valor de este ángulo comprendido entre 0 y 2π, al que se denomina *argumento principal*.

b) A la hora de tomar inversas en la expresión (12.4), utilizando la aplicación arcotangente considerada en la Observación 7.13, hay que tener en cuenta el cuadrante en el que se halla el número complejo $z = a + bi \neq 0 + 0i$, debiéndose tomar

$$\arg(z) = \alpha + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

de manera que $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ y eligiéndose α de forma que

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \text{si } a > 0 \text{ y } b = 0 \ \ (z \text{ está en el eje de abscisas positivo}) \\ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } a > 0 \text{ y } b > 0 \ \ (z \text{ está en el primer cuadrante}) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0 \ \ (z \text{ está en el eje de ordenadas positivo}) \\ \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0 \ \ (z \text{ está en el segundo cuadrante}) \\ \alpha = \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b = 0 \ \ (z \text{ está en el eje de abscisas negativo}) \\ \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0 \ \ (z \text{ está en el tercer cuadrante}) \\ \alpha = \frac{3\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0 \ \ (z \text{ está en el eje de ordenadas negativo}) \\ \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) & \text{si } a > 0 \text{ y } b < 0 \ \ (z \text{ está en el cuarto cuadrante}). \end{cases}$$

El valor α se obtiene a partir la función arcotangente. Queremos resaltar que la mayor parte de las calculadoras y de los programas informáticos utilizan esta función definida como $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tal y como se consideró en la Observación 7.13. □

Ejemplo 12.16 Los números complejos

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \ \text{ y } \ z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

tienen el mismo módulo (ambos se encuentran en la circunferencia unidad), ya que

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

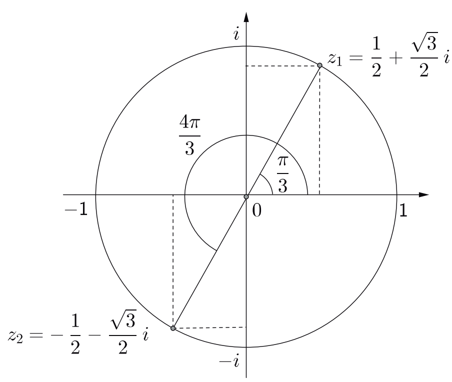


Figura 12.5: Módulo y argumento de z_1 y z_2.

En cambio, como z_1 está en el primer cuadrante y z_2 en el tercero, sus argumentos son

$$\arg(z_1) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \text{ y } \arg(z_2) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3}$$

(véase la Figura 12.5). □

Definición 12.3 La expresión de un número complejo $z \neq 0+0i$ en *forma polar* consiste en expresar z como

$$z = r_\alpha,$$

siendo $r = |z|$ el módulo de z y α un argumento de z. □

En la Figura 12.6 se puede ver la interpretación geométrica de la forma polar de un número complejo.

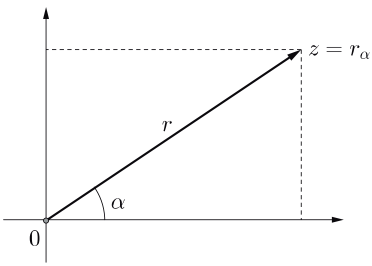


Figura 12.6: Forma polar de un número complejo $z = r_\alpha$.

Observación 12.9

a) Por la Observación 12.8, se verifica que

$$z = r_\alpha = r_{\alpha+2k\pi} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}. \tag{12.5}$$

b) La forma polar también se denomina *forma módulo–argumento*.

c) Si $z = r_\alpha$, entonces $\overline{z} = r_{-\alpha}$. □

Ejemplo 12.17 La forma polar del número complejo $z = 1 - \sqrt{3}i$ es

$$z = 2_{\frac{5\pi}{3}},$$

pues

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$

y, como z está en el cuarto cuadrante,

$$\arg(z) = \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{3}.$$ □

12.4.2. Paso de la forma polar a la forma binómica

De acuerdo con lo visto en la Definición 12.3 (véase también la Figura 12.7), si $z = r_\alpha$, se tiene que $z = a + bi$, siendo

$$a = r\cos(\alpha) \text{ y } b = r\,\mathrm{sen}(\alpha),$$

por lo que podemos expresar el número complejo z como

$$z = r(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)).$$

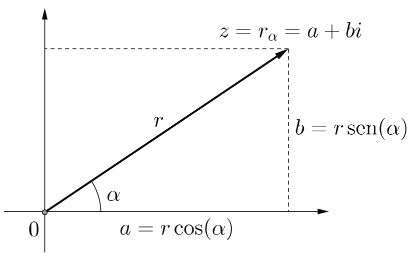


Figura 12.7: Paso de la forma polar a la forma binómica.

Definición 12.4 La expresión de un número complejo z en *forma trigonométrica* consiste en expresar z como

$$z = r(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)),$$

siendo $r = |z|$ el módulo de z y α un argumento de z. $\square$

Ejemplo 12.18 Como las partes real e imaginaria del número complejo $z = 2_{\frac{\pi}{4}}$ son, respectivamente,

$$\mathrm{Re}(z) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \text{ e } \mathrm{Im}(z) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2},$$

se tiene que la forma binomial de z es

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i. \quad \square$$

12.5. Operaciones con números complejos en forma polar

La forma polar no es muy manejable para realizar sumas y restas y, salvo casos de números complejos con el mismo argumento (en los que basta sumar o restar sus módulos), se suele pasar a la forma binomial para realizar estas operaciones. Sin embargo, la forma polar sí es muy útil para realizar multiplicaciones, divisiones y potencias.

12.5.1. Producto de números complejos

Veamos cómo realizar el producto de dos números complejos z y z' expresados en forma polar. Si $z = r_\alpha$ y $z' = r'_{\alpha'}$, se verifica que

$$
\begin{aligned}
r_\alpha r'_{\alpha'} &= r\left(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)\right) r'\left(\cos(\alpha') + i\,\mathrm{sen}(\alpha')\right) \\
&= rr'\left(\cos(\alpha)\cos(\alpha') + i\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha') + i\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha') - \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha')\right) \\
&= rr'\left(\cos(\alpha+\alpha') + i\,\mathrm{sen}(\alpha+\alpha')\right) \\
&= rr'_{\alpha+\alpha'},
\end{aligned}
$$

donde se ha utilizado la Proposición 7.2 relativa al coseno y seno de la suma de dos ángulos. Es decir, el producto de dos números complejos es un número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos de los dos números.

Ejemplo 12.19 $8_{\frac{\pi}{2}} 2_{\frac{\pi}{4}} = (8 \cdot 2)_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} = 16_{\frac{3\pi}{4}}$. □

Observación 12.10 Cuando se multiplica un número complejo de la forma $z = r_\alpha$ por el número 1_θ, el resultado

$$r_\alpha 1_\theta = r_{\alpha+\theta}$$

se interpreta gráficamente como la *rotación* (o *giro*) de z un ángulo θ alrededor del origen $O = 0 + 0i$ (véase la Figura 12.8). □

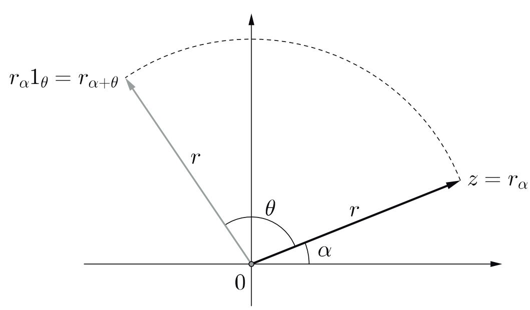


Figura 12.8: Resultado de multiplicar $z = r_\alpha$ por 1_θ.

12.5.2. Cociente de números complejos

Veamos cómo realizar el cociente de dos números complejos $z = r_\alpha$ y $z' = r'_{\alpha'} \neq 0+0i$:

$$\begin{aligned}
\frac{r_\alpha}{r'_{\alpha'}} &= \frac{r\,(\cos(\alpha)+i\operatorname{sen}(\alpha))}{r'\,(\cos(\alpha')+i\operatorname{sen}(\alpha'))} = \frac{r\,(\cos(\alpha)+i\operatorname{sen}(\alpha))\,(\cos(\alpha')-i\operatorname{sen}(\alpha'))}{r'\,(\cos(\alpha')+i\operatorname{sen}(\alpha'))\,(\cos(\alpha')-i\operatorname{sen}(\alpha'))}\\
&= \frac{r}{r'}\,\frac{\cos(\alpha)\cos(\alpha')-i\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha')+i\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha')+\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha')}{\cos^2(\alpha')+\operatorname{sen}^2(\alpha')}\\
&= \frac{r}{r'}\,(\cos(\alpha-\alpha')+i\operatorname{sen}(\alpha-\alpha'))\\
&= \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\alpha'},
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la Proposición 7.2 relativa al coseno y seno de la diferencia de dos ángulos. Es decir, el cociente entre un número complejo y otro número complejo no nulo es un número complejo que tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia de los argumentos de dichos números.

Ejemplo 12.20 $\dfrac{8_{\frac{\pi}{2}}}{2_{\frac{\pi}{4}}} = \left(\dfrac{8}{2}\right)_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}} = 4_{\frac{\pi}{4}}.$ □

12.5.3. Potencias de números complejos

Dado un número complejo z_α, la potencia n–ésima de z_α con $n \in \mathbb{N}$, $(r_\alpha)^n$, se desarrolla multiplicando r_α por sí mismo n veces. Utilizando la regla de multiplicación de dos números complejos vista en la Sección 12.5.1., se tiene que

$$(r_\alpha)^n = r_\alpha \overset{n)}{\cdots} r_\alpha = (r^n)_{n\alpha}\,. \tag{12.6}$$

Ejemplo 12.21 $\left(2_{\frac{\pi}{2}}\right)^3 = (2^3)_{\frac{3\pi}{2}} = 8_{\frac{3\pi}{2}}.$ □

Proposición 12.3 *Para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.*

DEMOSTRACIÓN. Si la forma polar de z es $z = r_\alpha$, entonces, de acuerdo con (12.6) y con el apartado c) de la Observación 12.9, se tiene que

$$\overline{z^n} = \overline{(r^n)_{n\alpha}} = (r^n)_{-n\alpha} = (r_{-\alpha})^n = \overline{z}^n. \quad \square$$

Observación 12.11

a) En forma trigonométrica, la expresión (12.6) toma la forma

$$\big(r(\cos(\alpha)+i\operatorname{sen}(\alpha))\big)^n = r^n(\cos(n\alpha)+i\operatorname{sen}(n\alpha)). \tag{12.7}$$

b) De hecho, la fórmula (12.7) es válida para todo $n \in \mathbb{Z}$, pues si $n = 0$ es obvio y si $n = -m$ con $m \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$\big(r(\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))\big)^{-m} = \frac{1}{\big(r(\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))\big)^{m}} = \frac{1_0}{(r_\alpha)^m} = \frac{1_0}{(r^m)_{m\alpha}}$$
$$= \left(\frac{1}{r^m}\right)_{-m\alpha} = r^{-m}(\cos(-m\alpha) + i \operatorname{sen}(-m\alpha)).$$

Obviamente, en el caso de que el exponente sea negativo, la expresión anterior sólo tiene sentido para números complejos no nulos.

c) Para el caso particular de $r = 1$ se obtiene la *fórmula de De Moivre*

$$(\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha). \quad \square$$

12.5.4. Raíces de números complejos

Definición 12.5 Dado un número complejo $w \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se dice que z es una *raíz n–ésima* de w si z es solución de la ecuación

$$z^n = w. \quad \square$$

Observación 12.12

a) Si $w = 0$, la única solución es $z = 0$.

b) Si $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, veremos que existen n soluciones distintas $z_1, z_2, \ldots z_n$.

c) Nótese que lo anterior no es cierto si se trabaja sólo con números reales. De hecho se tienen los siguientes casos particulares:

   i) Si $w > 0$ y n es par, sólo hay dos soluciones reales, que son

   $$z_1 = \sqrt[n]{w} \ \text{ y } \ z_2 = -\sqrt[n]{w}.$$

   Así, por ejemplo, las únicas soluciones reales de $z^4 = 16$ son $z = \sqrt[4]{16} = 2$ y $z = -\sqrt[4]{16} = -2$.

   ii) Si $w < 0$ y n es par, no hay ninguna solución real. Por ejemplo, no existe nigún número real z verificando que $z^4 = -45$.

   iii) Si $w < 0$ y n es impar, sólo hay una solución real, que es

   $$z = \sqrt[n]{w}.$$

   Por ejemplo, la única solución real de $z^3 = -8$ es $z = \sqrt[3]{-8} = -2$. $\square$

Supongamos que $w = \rho_\theta$ y que $z = r_\alpha$ es una raíz n–ésima de de w. Entonces, a partir de (12.5), se verifica que

$$z^n = w \Leftrightarrow (r^n)_{n\alpha} = \rho_\theta \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \ \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \ \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Eligiendo n valores consecutivos para k, se obtienen n ángulos distintos y, para el resto de valores de k, los valores obtenidos son repeticiones de los obtenidos previamente (módulo múltiplos de 2π). En efecto, denotando

$$\alpha_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \ \text{ con } \ k \in \mathbb{Z},$$

para los valores $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ se obtienen los n ángulos distintos

$$\alpha_0 = \frac{\theta}{n},\ \alpha_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n}, \ldots,\ \alpha_{n-1} = \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n},$$

mientras que, para valores de n mayores, se dan las repeticiones

$$\alpha_n = \frac{\theta + 2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi = \alpha_0 + 2\pi, \alpha_{n+1} = \frac{\theta + 2(n+1)\pi}{n} = \frac{\theta + 2\pi}{n} + 2\pi = \alpha_1 + 2\pi,$$

y así sucesivamente. Nótese que los n ángulos distintos pueden expresarse como

$$\begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{\theta}{n} \\ \alpha_k = \alpha_{k-1} + \dfrac{2\pi}{n},\ k = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación $z^n = w$ tiene n soluciones y vienen dadas por

$$z_0 = (\sqrt[n]{\rho})_{\alpha_0},\ z_1 = (\sqrt[n]{\rho})_{\alpha_1}, \ldots, z_{n-1} = (\sqrt[n]{\rho})_{\alpha_{n-1}}.$$

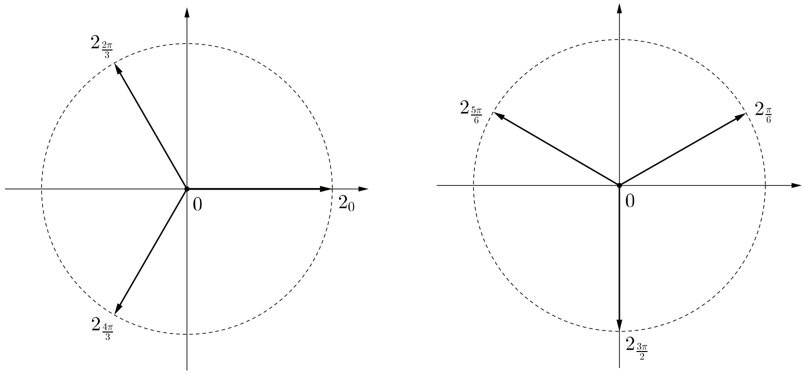
Ejemplo 12.22 Las raíces de la ecuación $z^3 = 8$ son

$$z_0 = 2_0,\ z_1 = 2_{\frac{2\pi}{3}} \ \text{ y } \ z_2 = 2_{\frac{4\pi}{3}}$$

(véase la Figura 12.9(a)), mientras que las raíces de la ecuación $z^3 = 8i$ son

$$z_0 = 2_{\frac{\pi}{6}},\ z_1 = 2_{\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}} = 2_{\frac{5\pi}{6}} \ \text{ y } \ z_2 = 2_{\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}} = 2_{\frac{3\pi}{2}}$$

(véase la Figura 12.9(b)). $\square$



(a) Raíces de $z^3 = 8$. (b) Raíces de $z^3 = 8i$.

Figura 12.9: Raíces de ecuaciones cúbicas.

Observación 12.13 (Interpretación geométrica) Desde un punto de vista geométrico, las n raíces n–ésimas de un número complejo w de módulo ρ están situadas sobre los vértices de un n–ágono regular inscrito en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{\rho}$ con centro en el origen (véase la Figura 12.10). $\square$

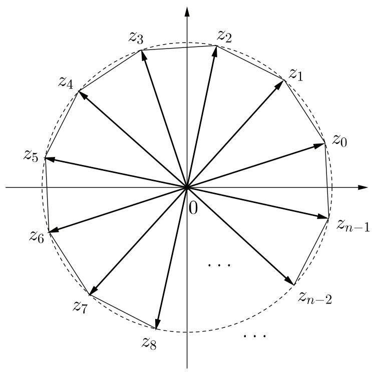


Figura 12.10: Raíces n–ésimas de un número complejo.

En cuanto a las raíces de polinomios arbitrarios, se tienen los siguientes resultados, que enunciamos sin demostración:

Teorema 12.1 (Teorema fundamental del Álgebra) *Todo polinomio en una variable de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos tiene por lo menos una raíz* (*real o compleja*). $\square$

Definición 12.6 ξ es *raíz de multiplicidad* $m \in \mathbb{N}$ de un polinomio P de grado $n \geq m$ si

$$P(x) = (x - \xi)^m Q(x) \text{ con } Q(\xi) \neq 0.$$

Las raíces de multiplicidad 1 se denominan *simples*, las de multiplicidad 2 *dobles*, las de multiplicidad 3 *triples* ... $\square$

Observación 12.14 Puede demostrarse la siguiente equivalencia: ξ es raíz de multiplicidad m de un polinomio P si, y sólo si, se verifica que

$$P(\xi) = P'(\xi) = P''(\xi) = \cdots = P^{m-1)}(\xi) = 0 \ \text{ y } \ P^{m)}(\xi) \neq 0.$$

Es decir, las raíces de multiplicidad m de P son aquellas que anulan todas las derivadas de orden k de P con $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ y no anulan la derivada de orden m de P. Así, por ejemplo, ξ es raíz doble del polinomio P si se verifica que ξ es raíz de los polinomios P y P' pero no es raíz del polinomio P''. □

Ejemplo 12.23 $\xi = 2$ es raíz triple del polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - 30x^2 + 76x - 56$, ya que éste puede factorizarse en la forma

$$P(x) = (x-2)^3(x+7)$$

(compruébese). Puesto que las primeras derivadas del polinomio $P(x)$ son

$$\begin{cases} P'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 60x + 76 = (x-2)^2(4x+19) \\ P''(x) = 12x^2 + 16x + 60 = 6(x-2)(2x+5) \\ P'''(x) = 24x + 6 = 6(4x+1), \end{cases}$$

nótese cómo se verifica que

$$P(2) = P'(2) = P''(2) = 0 \ \text{ y } \ P'''(2) = 54 \neq 0. \quad \square$$

Corolario 12.1 *Todo polinomio en una variable de grado $n \in \mathbb{N}$ con coeficientes reales o complejos tiene tantas raíces (reales o complejas) como su grado, contando cada raíz con su multiplicidad.* □

Teorema 12.2 *Si z es raíz de un polinomio con coeficientes reales, entonces $\overline{z}$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

con $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, n$, y sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$. Entonces, teniendo en cuenta que $\overline{P(z)} = \overline{0} = 0$ y que los coeficientes a_j son reales (y, por tanto, se verifica que $\overline{a}_j = a_j$), las Proposiciones 12.1 y 12.3 determinan que

$$\begin{aligned} 0 = \overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a}_0 \\ &= a_n \overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = P(\overline{z}), \end{aligned}$$

con lo que se tiene que $\overline{z}$ es raíz del polinomio $P(x)$. □

Observación 12.15 Este último resultado indica que las eventuales raíces complejas no reales de un polinomio con coeficientes reales constituyen un número par de raíces (es decir, no existe ningún polinomio con coeficientes reales que tenga un número impar de raíces complejas no reales). Así, por ejemplo, en el Ejemplo 12.3 vimos que

$$2x^2 - x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{23}}{4}\, i \\[2ex] x_2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{23}}{4}\, i \end{cases} \quad \text{y} \;\; x_2 = \overline{x}_1. \qquad \square$$

12.6. Forma exponencial de un número complejo

A continuación introducimos la *forma exponencial* de un número complejo que, probablemente, es la más utilizada y la más cómoda para las operaciones de multiplicación, división y potenciación. Se utiliza una extensión de la función exponencial e^x (véase la Sección 11.3.), siendo e el número irracional introducido en la Sección 10.4.

Sin entrar aquí en un tratamiento riguroso de la notación que se utiliza, introducimos la siguiente definición:

Definición 12.7 Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ como

$$e^{i\alpha} = 1_\alpha = \cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha).$$

La igualdad anterior se conoce como la *fórmula de Euler*. $\square$

Observación 12.16

a) Dado que $\cos(\pi) = -1$ y $\operatorname{sen}(\pi) = 0$, la *fórmula de Euler* con $\alpha = \pi$ toma la forma

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi) = -1,$$

igualdad que relaciona los tres “famosos números” e, i y π.

b) Para cualquier valor $\alpha \in \mathbb{R}$, el módulo del número complejo $e^{i\alpha}$ es 1, ya que

$$|e^{i\alpha}| = |\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)| = \sqrt{\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha)} = 1$$

(véase la Figura 12.11).

c) Teniendo en cuenta que

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha) \;\text{ y }\; e^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha) = \cos(\alpha) - i \operatorname{sen}(\alpha),$$

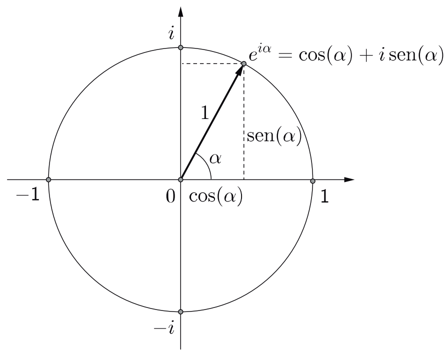


Figura 12.11: Fórmula de Euler.

donde se ha utilizado que el coseno es una función par en el origen y el seno es una función impar (véase la Observación 7.14), podemos expresar las funciones coseno y seno en términos de la exponencial compleja; concretamente,

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \text{ y } \mathrm{sen}(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}. \quad \square$$

A partir de la *fórmula de Euler*, cualquier número complejo $z = r_\alpha$ se puede escribir como

$$z = r_\alpha = r(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)) = re^{i\alpha},$$

de forma que las operaciones de producto, división y potenciación se pueden realizar, teniendo en cuenta que se siguen cumpliendo las propiedades de las exponenciales respecto a las operaciones vistas en la Observación 10.12. En este sentido, si $z = re^{i\alpha}$ y $z' = r'e^{i\alpha'}$, entonces

$$zz' = re^{i\alpha}r'e^{i'\alpha'} = rr'e^{i(\alpha+\alpha')},$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\alpha}}{r'e^{i\alpha'}} = \frac{r}{r'}\,e^{i(\alpha-\alpha')}$$

y

$$z^n = \left(re^{i\alpha}\right)^n = r^n e^{in\alpha},\ n \in \mathbb{Z}. \tag{12.8}$$

Ejemplo 12.24 Si $z = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ y $z' = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, se verifica que

$$zz' = 16e^{i\frac{3\pi}{4}},\ \frac{z}{z'} = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ y } z^7 = 128e^{i\frac{7\pi}{2}} = 128e^{i\frac{3\pi}{2}}. \quad \square$$

Observación 12.17

a) Dado $r > 0$, la representación gráfica del conjunto de puntos $\{re^{i\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ es la circunferencia de centro $0 = 0 + 0i$ y radio r.

b) La expresión obtenida en (12.7) (y, en particular, la *fórmula de De Moivre*) puede deducirse de (12.8), ya que si $z = r_\alpha$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ se verifica que

$$\big(r(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))\big)^n = \big(re^{i\alpha}\big)^n = r^n e^{in\alpha} = r^n(\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha))$$

(en el caso de que el exponente sea negativo, la expresión anterior sólo tiene sentido para números complejos no nulos). □

12.7. Problemas

12.1. Hallar las soluciones (reales o complejas) de las siguientes ecuaciones

a) $-2x^2 - 3x + 4 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 + 5x = 0$ c) $x^2 + 2x + 1 = 0.$

12.2. Realizar las siguientes sumas y restas de números complejos

a) $2 - 7i + 5 - 2i$ b) $-3i - 2 - 4i$ c) $(4 + 2i) - (5 + 2i).$

12.3. Realizar las siguientes multiplicaciones de números complejos:

a) $(2 - 7i)(5 - 2i)$ b) $-3i(-2 - 4i)$ c) $(4 + 2i)(5 + 2i)$ d) $(2 - 3i)(2 + 3i).$

12.4. Realizar las siguientes divisiones de números complejos:

a) $\dfrac{2 - 7i}{5 - 2i}$ b) $\dfrac{-3i}{-2 - 4i}$ c) $\dfrac{4 + 2i}{5 + 2i}$ d) $\dfrac{2 - 3i}{2 + 3i}.$

12.5. Calcular los inversos de los siguientes números complejos:

a) $2 - 7i$ b) $-3i.$

12.6. Hallar las siguientes potencias de números complejos:

a) $(2 - 7i)^3$ b) $(-i)^{946}.$

12.7. Calcular las siguientes potencias de la unidad imaginaria:

a) i^{68} b) i^{217} c) i^{502} d) $i^{799}.$

12.8. Obtener las siguientes potencias de la unidad imaginaria:

a) i^{-92} b) i^{-261} c) i^{-534} d) $i^{-755}.$

12.9. Escribir la forma polar, trigonométrica y exponencial de los siguientes números complejos:

a) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ b) $3\sqrt{3}\,i + 3i$ c) $-2i.$

12.10. Representar gráficamente el conjunto de números complejos que cumplen:

a) $z\overline{z} = 9$ b) $|z - 4 + 3i| = 2$.

12.11. Expresar en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i\right)^{10}}{i^{12}}$ b) $\dfrac{i^5 - i^{-8}}{\sqrt{2}\, i}$.

12.12. Hallar las raíces cuadradas de los siguientes números complejos:

a) $1 + i$ b) $1 - i$ c) $-1 + i$ d) $-1 - i$.

12.13. Hallar las raíces cúbicas de los siguientes números complejos:

a) 27 b) -27 c) $27i$ d) $-27i$.

12.14. Obtener las raíces octavas de la unidad.

12.15. ¿Por qué $e^{i\pi} = e^{-i\pi}$?

12.16. Demostrar que si $|z| = 1$, entonces $z + z^{-1}$ es un número real. (**Indicación**: escribir el número z en forma trigonométrica).

12.8. Soluciones

12.1. a) $x = -\dfrac{3}{4} \pm \dfrac{\sqrt{41}}{4}$ b) $x = 0$ y $x = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{11}}{2}\, i$ c) $x = -1$ (doble).

12.2. a) $7 - 9i$ b) $-2 - 7i$ c) -1.

12.3. a) $-4 - 39i$ b) $-12 + 6i$ c) $16 + 18i$ d) 13.

12.4. a) $\dfrac{24}{29} - \dfrac{31}{29}\, i$ b) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{10}\, i$ c) $\dfrac{24}{29} + \dfrac{2}{29}\, i$ d) $-\dfrac{5}{13} - \dfrac{6}{13}\, i$.

12.5. a) $\dfrac{2}{53} + \dfrac{7}{53}\, i$ b) $\dfrac{i}{3}$.

12.6. a) $62 - 9i$ b) -1.

12.7. a) 1 b) i c) -1 d) $-i$.

12.8. a) 1 b) $-i$ c) -1 d) i.

12.9. a) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i = 2_{\frac{5\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$ b) $3\sqrt{3}i+3i = 6_{\frac{\pi}{6}} = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 6e^{i\frac{\pi}{6}}$ c) $-2i = 2_{\frac{3\pi}{2}} = 2i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

12.10. Se trata de dos circunferencias: a) centro 0 y radio 3 b) centro $4-3i$ y radio 2.

12.11. a) i b) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

12.12. a) $z_0 = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{8}}$ y $z_1 = \sqrt{2}_{\frac{9\pi}{8}}$ b) $z_0 = \sqrt{2}_{\frac{7\pi}{8}}$ y $z_1 = \sqrt{2}_{\frac{15\pi}{8}}$ c) $z_0 = \sqrt{2}_{\frac{3\pi}{8}}$ y $z_1 = \sqrt{2}_{\frac{11\pi}{8}}$ d) $z_0 = \sqrt{2}_{\frac{5\pi}{8}}$ y $z_1 = \sqrt{2}_{\frac{13\pi}{8}}$.

12.13. a) $z_0 = 3_0$, $z_2 = 3_{\frac{2\pi}{3}}$ y $z_3 = 3_{\frac{4\pi}{3}}$ b) $z_0 = 3_{\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = 3_{\pi}$ y $z_3 = 3_{\frac{5\pi}{3}}$ c) $z_0 = 3_{\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3_{\frac{5\pi}{6}}$ y $z_3 = 3_{\frac{3\pi}{2}}$ d) $z_0 = 3_{\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = 3_{\frac{7\pi}{6}}$ y $z_3 = 3_{\frac{11\pi}{6}}$.

12.14. $z_0 = 1_0$, $z_1 = 1_{\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 1_{\frac{\pi}{2}}$, $z_3 = 1_{\frac{3\pi}{4}}$, $z_4 = 1_{\pi}$, $z_5 = 1_{\frac{5\pi}{4}}$, $z_6 = 1_{\frac{3\pi}{2}}$ y $z_7 = 1_{\frac{7\pi}{4}}$.

12.15. $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$.

12.16. $z + z^{-1} = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos(\alpha) \in \mathbb{R}$.

13 Derivadas

13.1. Introducción

Se comienza introduciendo el concepto de *derivada de una función* ayudados por las definiciones y propiedades de las funciones y sus límites estudiadas en el Capítulo 11. Las derivadas surgen a partir de la teoría del *Cálculo infinitesimal* que desarrollaron en el siglo XVII el inglés *Isaac Newton* y el alemán *Gottfried Wilhelm Leibniz*, quienes mantuvieron en esa época una enorme rivalidad por la disputa de la paternidad de dicha teoría que permitió resolver problemas muy famosos, como el *problema de la braquistócrona*, que consiste en encontrar la curva con la que se cae, por el efecto de la gravedad, de forma más rápida de un punto a otro. En 1696 el gran matemático de origen holandés *Johann Bernoulli* decidió arrojar un reto a “los matemáticos más brillantes del mundo”, proponiendo el problema de la braquistócrona en la revista *Acta Eruditorum* (con toda la intención de provocar a Newton y Leibniz). En mayo de 1697, el *Acta Eruditorum* publicó cuatro soluciones, cuyos autores eran Leibniz, el mismo Bernoulli y su hermano mayor Jakob, y una solución enviada de forma anónima que después se comprobó que fue enviada por ... Newton. Demostraron que la solución al problema de la braquistócrona era una *cicloide* (curva ya conocida) invertida[1].

Tras la definición de derivada de una función en un punto y su interpretación geométrica, se da también una interpretación física del concepto de derivada como *velocidad* de un cuerpo. Se trata, quizás, de la aplicación de uso más cotidiano de la derivada de una función (por ejemplo, el valor del velocímetro de un coche no es otra cosa que la derivada de la función de los kilómetros recorridos por éste).

La condición de derivabilidad de una función es más fuerte que la de continuidad, pues toda función derivable es continua pero el recíproco de esto no es cierto, lo cual es mostrado con un ejemplo. Con objeto de poder calcular, desde un punto de vista práctico, las derivadas de una función, se introducen varias fórmulas, como las de la derivada de una suma, la de un escalar por una función, la de un producto, la de un cociente, la de

[1] Una *cicloide* es la curva generada por un punto de una circunferencia cuando rueda, sin deslizarse, sobre una recta.

una potencia, la de la composición de funciones (*regla de la cadena*) y la de la función inversa.

Se da a continuación una lista de derivadas de funciones que deben memorizarse, con las que, utilizando las propiedades vistas con anterioridad, se pueden calcular las derivadas de muchas otras funciones.

Se acaba el capítulo definiendo el concepto de extremos (*máximos* y *mínimos*) *relativos* y *absolutos* e introduciendo el *teorema de Rolle* (que, bajo ciertas hipótesis sobre una función, asegura la existencia de, al menos, un punto en el que la derivada de la función es nula) y el *teorema del Valor Medio* (que, dado un intervalo, da la existencia de un punto de ese intervalo en el que la derivada de la función coincide con la pendiente de la recta que une los puntos de la gráfica de la función en los extremos del intervalo).

En todo este capítulo D denota un intervalo abierto o una unión de intervalos abiertos.

13.2. Derivada de una función en un punto

Definición 13.1 Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. Para $h \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |h| \ll 1$, la cantidad

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

se denomina *incremento* de la función f en el punto x_0 y representa la variación (aumento o disminución) que experimenta la función f cuando la variable independiente pasa de x_0 a $x_0 + h$. Análogamente, la cantidad

$$h = (x_0 + h) - x_0$$

se denomina *incremento* de la variable independiente x. El *cociente incremental*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h} \tag{13.1}$$

representa la variación relativa que experimenta la función f con relación a la variable x en el intervalo $(x_0, x_0 + h)$. $\square$

Observación 13.1 (Interpretación geométrica) El cociente incremental (13.1) es la *pendiente* de la recta que pasa por los puntos $P_0 = (x_0, f(x_0))$ y $P = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ (véase la Figura 13.1). $\square$

Definición 13.2 Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. Cuando el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

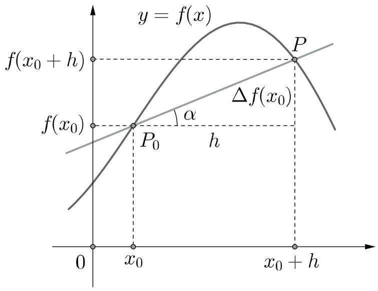


Figura 13.1: Recta que pasa por los puntos P_0 y P.

existe y es finito, se dice que la función f es *derivable* en el punto x_0 y

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{13.2}$$

es la *derivada* de la función f en el punto x_0. Esta cantidad $f'(x_0)$ representa la variación local de la función f con relación a la variable x en el punto x_0. La función f es *derivable* en el intervalo (a, b) cuando es derivable en todos los puntos de dicho intervalo. $\square$

Observación 13.2 Nótese que para hallar la derivada de la función f en el punto x_0 debe calcularse el límite dado en la expresión (13.2), que es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. $\square$

Observación 13.3 Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función derivable en un punto $x_0 \in D$.

a) Tomando $x = x_0 + h$, es claro que podemos expresar (13.2) en forma equivalente como

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

b) La derivada de la función f en el punto x_0 también suele denotarse como

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0). \quad \square$$

Ejemplo 13.1 Consideremos la función $f(x) = x^2$ y $x_0 = 3$. Como existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6,$$

la función f es derivable en el punto $x_0 = 3$ y $f'(3) = 6$. Además, la función f es derivable en toda la recta real $\mathbb{R}$, pues dado un número real arbitrario x se verifica que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

Por tanto, se verifica que $f'(1) = 2$, $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3$, $f'(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}\ldots$ $\square$

Observación 13.4 (Interpretación geométrica) Eligiendo valores de h cada vez más pequeños, los cocientes incrementales (13.1) determinan las pendientes de las correspondientes rectas P_0P, P_0Q, P_0R, $\ldots$, de forma que, al hacer tender $h \to 0$, la derivada (13.2) va a ser la *pendiente* de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ (véase la Figura 13.2).

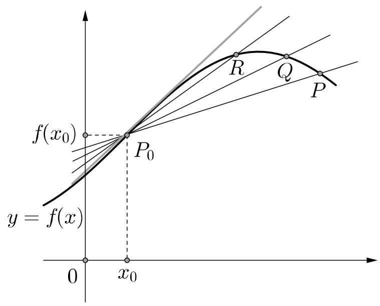


Figura 13.2: Secantes y tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P_0.

Las rectas que pasan por P_0 y no son tangentes a la gráfica de la función $y = f(x)$ se denominan *secantes*. De esta forma, la recta tangente se obtiene como límite de rectas secantes. Así pues, como la ecuación de la secante que pasa por los puntos $P_0 = (x_0, f(x_0))$ y $P = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ viene dada por

$$\boxed{y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0),} \tag{13.3}$$

para obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P_0 basta hacer tender $h \to 0$ en la expresión (13.3), obteniendo que dicha recta tangente es

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).} \tag{13.4}$$

Además, teniendo en cuenta lo visto en la Observación 8.8, la ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ es

$$\boxed{\begin{cases} y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) & \text{si} \quad f'(x_0) \neq 0 \\ x = x_0 & \text{si} \quad f'(x_0) = 0. \end{cases}}$$

Observación 13.5 Tal y como se adelantaba en la Observación 9.38, las fórmulas anteriores permiten obtener las ecuaciones de las rectas tangentes y normales a las cónicas de una forma alternativa a la seguida en el Capítulo 9. Por ejemplo, la gráfica de la circunferencia

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

coincide con las gráficas de dos funciones f_- y f_+ dadas por (despejando y)

$$f_-(x) = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \text{ y } f_+(x) = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2},$$

siendo el dominio de ambas funciones el intervalo $[x_0 - r, x_0 + r]$ (fácil de probar).

a) Si $P = (\bar{x}, \bar{y})$ es un punto de la circunferencia que pertenece a la gráfica de f_-, entonces

$$f'_-(x) = \frac{x - x_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}},$$

con lo que

$$f'_-(\bar{x}) = \frac{\bar{x} - x_0}{\sqrt{r^2 - (\bar{x} - x_0)^2}} = -\frac{\bar{x} - x_0}{\bar{y} - y_0}.$$

b) Análogamente, si $P = (\bar{x}, \bar{y})$ es un punto de la circunferencia que pertenece a la gráfica de f_+, se verifica que

$$f'_+(x) = -\frac{x - x_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}},$$

por lo que

$$f'_+(\bar{x}) = -\frac{\bar{x} - x_0}{\sqrt{r^2 - (\bar{x} - x_0)^2}} = -\frac{\bar{x} - x_0}{\bar{y} - y_0}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta (13.4), la pendiente de la recta tangente a la circunferencia dada en el punto $P = (\bar{x}, \bar{y})$ es siempre

$$-\frac{\bar{x} - x_0}{\bar{y} - y_0},$$

y la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto $P = (\bar{x}, \bar{y})$ es

$$y - \bar{y} = -\frac{\bar{x} - x_0}{\bar{y} - y_0}\,(x - \bar{x}),$$

expresión que coincide, como no podía ser de otra forma, con la fórmula (9.2). El resto de fórmulas que obtuvimos en el Capítulo 9 para las rectas tangentes y normales a las cónicas se pueden calcular, de forma análoga, mediante el uso de derivadas. □

Observación 13.6 (Interpretación física) La ecuación del movimiento de un cuerpo define una aplicación que a cada instante de tiempo t le asocia el espacio $x(t)$ recorrido durante ese tiempo. De esta forma, el cociente incremental

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado en recorrerlo}}$$

representa la *velocidad media* del móvil durante el incremento de tiempo h. Cuando dicho incremento de tiempo tiende a cero, se obtiene la *velocidad instantánea*

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

del móvil en el instante de tiempo t. Nótese que esa velocidad instantánea es, precisamente, la derivada de la función x en el instante t, es decir,

$$\boxed{v(t) = x'(t).}$$

Por esta razón, se dice que la velocidad instantánea de un móvil en un instante de tiempo es la "derivada del espacio respecto del tiempo" en ese instante. □

Definición 13.3 (Derivadas laterales) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. Cuando el límite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe y es finito, se dice que la función f es *derivable por la derecha* en el punto x_0 y se representa

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Análogamente, cuando el límite

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe y es finito, se dice que la función f es *derivable por la izquierda* en el punto x_0 y se representa

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Las cantidades $f'(x_0^+)$ y $f'(x_0^-)$ se denominan *derivadas laterales*. □

Observación 13.7 Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$.

a) La función f es derivable en el punto x_0 si, y sólo si, $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$. En tal caso, se verifica que

$$f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-).$$

b) Cuando existen las derivadas laterales $f'(x_0^+)$ y $f'(x_0^-)$, pero no coinciden, se dice que $P_0 = (x_0, f(x_0))$ es un *punto anguloso* de la función f (también x_0 es un punto anguloso cuando se verifica que uno de los anteriores límites es finito, el otro infinito y la función es continua en x_0).

c) Cuando la función f es continua en x_0 y las derivadas laterales $f'(x_0^+)$ y $f'(x_0^-)$ valen infinito pero con distinto signo, se dice que $P_0 = (x_0, f(x_0))$ es un *punto de retroceso* de la función f.

En la Figura 13.3 se muestra una función que tiene en x_0 un punto anguloso y en x_1 un punto de retroceso.

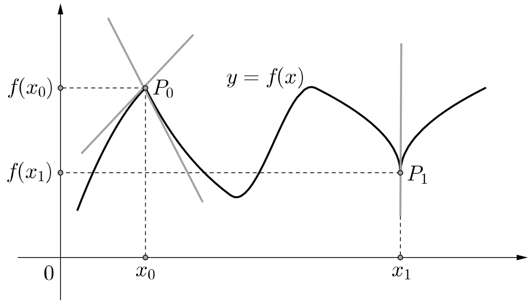


Figura 13.3: P_0 punto anguloso y P_1 punto de retroceso.

Por tanto, así como la idea intuitiva de función continua es aquella cuya gráfica puede trazarse sin levantar el lápiz del papel, la de función derivable es aquella cuya gráfica es "suave" en el sentido de que no varía bruscamente de dirección en ningún punto. Concretamente, la condición necesaria y suficiente para que una función f sea derivable en un punto x_0 es que la gráfica de la función $y = f(x)$ admita recta tangente en el punto x_0 y que dicha recta tenga pendiente distinta de $\pm\infty$. $\square$

Proposición 13.1 *Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función derivable en un punto $x_0 \in D$, entonces la función f es continua en x_0.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que para $0 < |h| \ll 1$ se verifica que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\, h, \tag{13.5}$$

haciendo tender $h \to 0$ en (13.5) se obtiene

$$\lim_{h\to 0} \left(f(x_0 + h) - f(x_0)\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\, h\right) = f'(x_0) \lim_{h\to 0} h = 0,$$

es decir,

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0),$$

lo que indica que la función f es continua en el punto x_0. $\square$

Observación 13.8 La consecuencia que se extrae de la Proposición 13.1 es que si una función f no es continua en un punto x_0, entonces f no es derivable en x_0. $\square$

Observación 13.9 El recíproco de la Proposición 13.1 no es cierto en general, es decir, existen funciones que son continuas pero no derivables. Ejemplo: consideremos la función *valor absoluto*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

(véase la Figura 13.4).

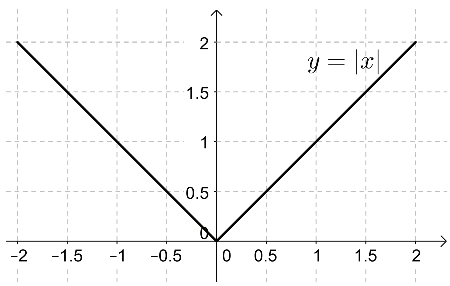


Figura 13.4: Gráfica de la función valor absoluto.

Claramente, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y es derivable en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. En efecto, puesto que para $0 < |h| \ll 1$ se verifica que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{|x+h|-|x|}{h} = \begin{cases} \dfrac{(x+h)-x}{h} = \dfrac{h}{h} = 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{(-x-h)-(-x)}{h} = -\dfrac{h}{h} = -1 & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$$

entonces

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Además, las derivadas laterales de la función f en el punto $x = 0$ existen y valen

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 \ \text{ y } \ f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1.$$

Ahora bien, como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, la función f no es derivable en el punto $x = 0$. $\square$

13.3. Cálculo de derivadas. Regla de la cadena

Definición 13.4 Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función derivable en todos los puntos de D, podemos considerar la función que a cada punto $x \in D$ le hace corresponder su derivada $f'(x)$. Esta función se denomina *función derivada* de la función f y se representa

$$\begin{array}{rccl} f': & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

A su vez, si la función derivada $f' : D \to \mathbb{R}$ es una función derivable en todos los puntos de D, podemos considerar la función que a cada punto $x \in D$ le hace corresponder la derivada $(f')'(x)$. Esta función se denomina *función derivada segunda* de la función f y se representa

$$\begin{array}{rccl} f'': & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f''(x). \end{array}$$

Análogamente se definen las *derivadas de orden superior* f''', $f^{iv)}$, $f^{v)}$, ... ,$f^{n)}$ ... $\square$

Definición 13.5 Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$. Si f es derivable en I y f' es continua en I, se dice que f es de *clase* 1 en I y se denota $f \in \mathcal{C}^1(I)$; si f es dos veces derivable en I y f'' es continua en I, se dice que f es de *clase* 2 en I y se denota $f \in \mathcal{C}^2(I)$ y, en general, si f es n veces derivable en I con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y $f^{n)}$ es continua en I, se dice que f es de *clase* n en I y se denota $f \in \mathcal{C}^n(I)$ (recuérdese que, de acuerdo con las Definiciones 11.19 y 11.20, el conjunto de funciones continuas en un intervalo I se denota por $\mathcal{C}(I)$, por lo que, cuando $n = 0$, se tiene que $\mathcal{C}^0(I) = \mathcal{C}(I)$). $\square$

Observación 13.10 Las derivadas de una función f también suele denotarse como

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x), f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x), f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}(x), \ldots, f^{n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) \ldots \quad \square$$

Ejemplo 13.2 La derivada de una función constante $f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ es 0 pues, por definición,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Ejemplo 13.3 Las derivadas sucesivas de la función $f(x) = x^2$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ y son

$$f'(x) = 2x, \ f''(x) = 2 \ \text{ y } \ f^{n)}(x) = 0 \ \text{ para } \ n \geq 3.$$

En efecto, en el Ejemplo 13.1 habíamos probado que $f'(x) = 2x$. Además,

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2.$$

El resto de conclusiones de este ejemplo se deducen de lo visto en el Ejemplo 13.2. $\square$

Proposición 13.2 (Derivada de una suma) *Si f y g son funciones derivables en D, entonces la función $f+g$ es también derivable en D y para todo $x \in D$ se tiene que*

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).} \tag{13.6}$$

Es decir, la derivada de una suma es la suma de las derivadas.

DEMOSTRACIÓN. Para todo punto $x \in D$ se verifica que

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)+g'(x). \quad \square\end{aligned}$$

Ejemplo 13.4 A partir del Ejemplo 13.1 y de la Observación 13.9 sabemos que las derivadas de las funciones

$$f(x) = x^2 \;\text{ y }\; g(x) = x$$

son, respectivamente,

$$f'(x) = 2x \;\text{ y }\; g'(x) = 1$$

y ambas están definidas para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$. De esta forma, aplicando la Proposición 13.2, se tiene que la función suma

$$h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$ y la derivada de dicha función es

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) = 2x + 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Proposición 13.3 (Derivada de un escalar por una función) *Si f es una función derivable en D y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la función λf es también derivable en D y para todo $x \in D$ se tiene que*

$$\boxed{(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x).} \tag{13.7}$$

Es decir, la derivada de un escalar por una función es el escalar por la derivada de la función.

DEMOSTRACIÓN. Para todo punto $x \in D$ se verifica que

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(\lambda f)(x+h) - (\lambda f)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda f(x+h) - \lambda f(x)}{h} \\ &= \lambda \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lambda f'(x). \quad \square\end{aligned}$$

Ejemplo 13.5 Por el Ejemplo 13.1 sabemos que la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$ y está definida para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$. De esta forma, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, si aplicamos la Proposición 13.3, obtenemos que la función

$$h(x) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda x^2$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$ y la derivada de dicha función es

$$h'(x) = \lambda f'(x) = 2\lambda x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, si $g(x) = 3x^2$, entonces $g'(x) = 6x$. $\square$

Observación 13.11 Si f y g son funciones derivables en D y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, podemos resumir las propiedades (13.6) y (13.7) como

$$\boxed{(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)}$$

para todo $x \in D$, lo que permite asegurar que el conjunto de las funciones reales derivables en D constituyen un *espacio vectorial* sobre $\mathbb{R}$ (véase el Capítulo 5). $\square$

Proposición 13.4 (Derivada de un producto) *Si f y g son funciones derivables en D, entonces la función producto fg es también derivable en D y para todo $x \in D$ se tiene que*

$$\boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).} \tag{13.8}$$

Es decir, la derivada de un producto de funciones es la derivada de la primera función por la segunda más la primera función por la derivada de la segunda.

DEMOSTRACIÓN. Para todo punto $x \in D$ se verifica que

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h) + f(x)\, \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

Nótese que

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$

por ser g una función continua en el punto x (véase la Proposición 13.1). □

Ejemplo 13.6 Consideremos las funciones

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = x$$

que están definidas para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$. Aplicando la Proposición 13.4, se tiene que la función producto

$$h(x) = (fg)(x) = f(x)g(x) = x^3$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$ y la derivada de dicha función es

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (2x)x + x^2 = 3x^2,\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Proposición 13.5 (Derivada de un cociente) *Si f y g son funciones derivables en D y*

$$g(x) \neq 0,\ \forall\, x \in D,$$

entonces la función $\frac{f}{g}$ es también derivable en D y para todo $x \in D$ se tiene que

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.}$$

Es decir, la derivada de un cociente es la derivada del numerador por el denominador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador y dividido todo ello por el denominador elevado al cuadrado.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \ \forall\, x \in D.$$

Puesto que $f(x) = h(x)g(x) = (hg)(x)$, aplicando (13.8) se tiene que

$$f'(x) = (hg)'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x)g(x) + \left(\frac{f}{g}\right)(x)g'(x)$$
$$= \left(\frac{f}{g}\right)'(x)g(x) + \frac{f(x)g'(x)}{g(x)},$$

de donde se deduce que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)}}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}. \quad \square$$

Ejemplo 13.7 Consideremos las funciones

$$f(x) = x \ \text{ y } \ g(x) = x^2$$

que están definidas para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$. Aplicando la Proposición 13.5, se tiene que la función cociente

$$h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$$

es derivable en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ y la derivada de dicha función es

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{x^2 - x(2x)}{(x^2)^2} = \frac{-x^2}{x^4} = -\frac{1}{x^2}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \quad \square$$

Proposición 13.6 (Derivada de la función potencia) *Si $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\boxed{f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.} \tag{13.9}$$

Es decir, la derivada de una potencia es otra potencia que se obtiene multiplicando por el exponente la potencia elevada a una unidad inferior del exponente.

DEMOSTRACIÓN. Distinguimos los posibles casos que pueden presentarse:

a) $\boxed{\alpha = 0}$ El resultado es evidente por lo visto en el Ejemplo 13.2.

b) $\boxed{\alpha = n \in \mathbb{N}}$ A partir del *binomio de Newton* (véase el Teorema 2.1) se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(h^n + nxh^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 h^{n-2} + \cdots + nx^{n-1}h + x^n\right) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(h^{n-1} + nxh^{n-2} + \binom{n}{2} x^2 h^{n-3} + \cdots + nx^{n-1}\right) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

c) $\boxed{\alpha = -n \in \mathbb{Z}}$ con $n \in \mathbb{N}$. Como

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n},\ \forall\, x \neq 0,$$

por el apartado b) y la regla de derivación de un cociente se tiene que

$$f'(x) = \frac{0 \times x^n - nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1},\ \forall\, x \neq 0.$$

d) $\boxed{\alpha = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}}$ siendo $\frac{n}{m}$ una fracción irreducible con $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Puesto que

$$f(x) = x^{\frac{n}{m}} \ \text{ (con } x \neq 0 \text{ si } n < 0\text{)},$$

se verifica que

$$x^n = (f(x))^m = f(x) \times \overset{m)}{\cdots} \times f(x).$$

Así, aplicando el apartado c) y la regla de derivación de un producto, se obtiene que

$$\begin{aligned} nx^{n-1} &= f'(x)(f(x))^{m-1} + \overset{m)}{\cdots} + f'(x)(f(x))^{m-1} = mf'(x)(f(x))^{m-1} \\ &= mf'(x)\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{m-1} = mf'(x)x^{\frac{n(m-1)}{m}}. \end{aligned}$$

Despejando el valor de la derivada se concluye que

$$f'(x) = \frac{n}{m}\,\frac{x^{n-1}}{x^{\frac{n(m-1)}{m}}} = \frac{n}{m}\,x^{n-1-\frac{n(m-1)}{m}} = \frac{n}{m}\,x^{\frac{n}{m}-1},$$

ya que

$$n - 1 - \frac{n(m-1)}{m} = \frac{mn - m - nm + n}{m} = \frac{n-m}{m} = \frac{n}{m} - 1.$$

e) $\boxed{\alpha = r \in \mathbb{I}}$ Sin entrar en detalles demasiado rigurosos para este caso, sólo comentar que basta escribir $x^r = \lim\limits_{n\to\infty} x^{r_n}$, siendo $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números racionales que tiene límite r, y aplicar el apartado d). $\square$

Ejemplo 13.8 Para hallar la derivada de la función

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},\ \forall\, x > 0,$$

basta tomar $\alpha = \frac{1}{2}$ en (13.9). Así, para todo $x > 0$ se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \forall\, x > 0. \quad \square$$

Corolario 13.1 (Derivada de un polinomio) La derivada de un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\{a_i\}_{i=0}^{n} \in \mathbb{R}$ es

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar las Proposiciones 13.2 y 13.6. $\square$

Ejemplo 13.9 Si $P(x) = -x^3 + 5x - 7$ y $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x - 1$, se tiene que

$$P'(x) = -3x^2 + 5 \ \text{ y } \ Q'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4x + 1. \quad \square$$

Veamos a continuación cómo obtener la derivada de una función compuesta:

Teorema 13.1 (Regla de la cadena) *Si f es una función derivable en un punto x_0 y g es una función derivable en el punto $f(x_0)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en x_0 y*

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).}$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición se tiene que

$$\begin{aligned}
(g\circ f)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.
\end{aligned} \tag{13.10}$$

Ahora bien, por la Proposición 13.1, por ser f derivable en x_0, se tiene que f es continua en x_0 y, por tanto, si $x \to x_0$, entonces $f(x) \to f(x_0)$. De esta forma, podemos expresar (13.10) como

$$(g\circ f)'(x_0) = \lim_{y\to f(x_0)} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0). \quad \square$$

Ejemplo 13.10 Para hallar la derivada de la función

$$h(x) = (3x + 1)^5$$

tenemos en cuenta que h es la composición de dos funciones

$$x \xrightarrow{f} y = 3x + 1 \xrightarrow{g} z = y^5.$$

Así pues, puesto que

$$h(x) = (g \circ f)(x)$$

y las derivadas de las funciones $f(x) = 3x+1$ y $g(y) = y^5$ son $f'(x) = 3$ y $g'(y) = 5y^4$, a partir de la *regla de la cadena* se tiene que

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = 5(3x + 1)^4 3 = 15(3x + 1)^4. \quad \square$$

Observación 13.12 La *regla de la cadena* puede aplicarse a la composición de dos o más funciones. Así, por ejemplo, la función

$$\phi(x) = \big(\operatorname{sen}(x^2 + e^x)\big)^3$$

puede escribirse como composición

$$\phi(x) = (h \circ g \circ f)(x),$$

siendo

$$x \xrightarrow{f} y = x^2 + e^x \xrightarrow{g} z = \operatorname{sen}(y) \xrightarrow{h} u = z^3.$$

De esta forma, a partir de los resultados de la Tabla 13.1 que se muestra más adelante, se tiene que

$$\phi'(x) = h'(g(f(x_0))g'(f(x_0))f'(x_0) = 3(\operatorname{sen}(x^2 + e^x))^2 \cos(x^2 + e^x)(2x + e^x). \quad \square$$

Observación 13.13 (Derivada de la función inversa) Puesto que, por la definición de función inversa se tiene que

$$y = f^{-1}(x) \;\Leftrightarrow\; x = f(y),$$

al aplicar la *regla de la cadena* derivando respecto de x se obtiene que

$$1 = f'(y)y' \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{f'(y)},$$

es decir,

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.}$$

Ejemplo 13.11 Hallemos la derivada de la función

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(x), \ -1 \le x \le 1.$$

Puesto que $f(x)$ es la inversa de la función

$$f^{-1}(x) = \operatorname{sen}(x), \ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},$$

aplicando la Observación 13.13 y utilizando que la derivada de la función sen es la función $\cos$ (véase la Proposición 13.9 que mostraremos más adelante), se obtiene que

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos\big(\operatorname{arcsen}(x)\big)}.$$

Teniendo en cuenta que

$$y = \operatorname{arcsen}(x) \ \Rightarrow \ x = \operatorname{sen}(y),$$

se verifica que

$$\cos\big(\operatorname{arcsen}(x)\big) = \cos(y) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(y)} = \sqrt{1 - x^2},$$

de donde se deduce que

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad \square$$

Proposición 13.7 (Derivada de la función logarítmica) *Si $f(x) = \log_a(x)$ con $a > 0$, entonces para todo $x > 0$ se verifica que*

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}.}$$

DEMOSTRACIÓN. Para todo $x > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)}{h \ln a} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h}{x}}{h \ln(a)} = \frac{1}{x \ln(a)}, \end{aligned}$$

donde se han utilizado las propiedades

$$\log_a(z) = \frac{\ln(z)}{\ln(a)} \ \text{ y } \ \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \sim \frac{h}{x} \ \text{ si } \ h \to 0$$

(véase la Proposición 11.2 y el Ejemplo 11.18). $\square$

Observación 13.14 En particular, como $\ln(e) = 1$, se tiene que la derivada del logaritmo neperiano

$$f(x) = \ln(x),\ \forall\, x > 0$$

es la función

$$f'(x) = \frac{1}{x},\ \forall\, x > 0. \quad \square$$

Proposición 13.8 (Derivada de la función exponencial) *Si* $f(x) = a^x$ *con* $a > 0$, *entonces*

$$\boxed{f'(x) = a^x \ln(a).}$$

Es decir, la derivada de la función exponencial con base a *es la propia función exponencial multiplicada por el logaritmo neperiano de la base.*

DEMOSTRACIÓN. Al tomar logaritmos neperianos en la función f, se obtiene que

$$\ln(f(x)) = \ln(a^x) = x\ln(a),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

El resultado se obtiene derivando la igualdad anterior (utilizando, para ello, la *regla de la cadena*), puesto que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(a). \quad \square$$

Observación 13.15 En particular, como $\ln(e) = 1$, se tiene que la derivada de la función

$$f(x) = e^x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

es la propia función f, es decir,

$$f'(x) = e^x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Proposición 13.9 (Derivada de la función seno) *Si* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, *entonces*

$$\boxed{f'(x) = \cos(x).}$$

Es decir, la derivada de la función seno es la función coseno.

DEMOSTRACIÓN. Por definición, para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h}. \tag{13.11}$$

Por una parte, por la Proposición 7.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen}(x) \\ &= \operatorname{sen}(x)\big(\cos(h) - 1\big) + \cos(x)\operatorname{sen}(h) \end{aligned} \tag{13.12}$$

y, por otra, utilizando las razones trigonométricas del ángulo mitad (véase la Observación 7.16),

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(h) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right) \\ \cos(h) = \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right). \end{cases} \tag{13.13}$$

De esta forma, al reemplazar (13.13) en (13.12), se obtiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x) &= -2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}^2\left(\frac{h}{2}\right) + 2\cos(x)\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right) \\ &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\left[\cos(x)\cos\left(\frac{h}{2}\right) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\right] \\ &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x + \frac{h}{2}\right), \end{aligned} \tag{13.14}$$

gracias a la Proposición 7.2. Consecuentemente, al sustituir (13.14) en (13.11) se llega a que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = 2\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos(x), \end{aligned}$$

puesto que, como se vio en la Observación 11.29,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \sim \frac{h}{2} \quad \text{si} \quad h \to 0. \quad \square$$

Proposición 13.10 (Derivada de la función coseno) *Si $f(x) = \cos(x)$, entonces*

$$\boxed{f'(x) = -\operatorname{sen}(x).}$$

Es decir, la derivada de la función coseno es la función seno cambiada de signo.

DEMOSTRACIÓN. A partir de la Observación 7.14 se verifica que

$$f(x) = \cos(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Por tanto, por la *regla de la cadena* y la Proposición 13.9, se tiene que

$$f'(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen}(x). \quad \square$$

Proposición 13.11 (Derivada de la función tangente) *Si* $f(x) = \tan(x)$, *entonces*

$$\boxed{f'(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).}$$

Es decir, la derivada de la función tangente es la función secante elevada al cuadrado.

DEMOSTRACIÓN. Al aplicar la regla de derivación de un cociente a la función

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)},$$

por las Proposiciones 13.9 y 13.10 se obtiene que

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\big(-\operatorname{sen}(x)\big)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}. \quad \square$$

Proposición 13.12 (Derivada de la función arcoseno) *Si* $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, *entonces*

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

DEMOSTRACIÓN. Véase el Ejemplo 13.11. $\square$

Proposición 13.13 (Derivada de la función arcocoseno) *Si* $f(x) = \arccos(x)$, *entonces*

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que la función

$$f(x) = \arccos(x),\ -1 \leq x \leq 1$$

es la inversa de la función

$$f^{-1}(x) = \cos(x),\ 0 \leq x \leq \pi,$$

aplicando la Observación 13.13 y la Proposición 13.10 se obtiene que

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\big(\arccos(x)\big)}.$$

El resultado se sigue teniendo en cuenta que

$$y = \arccos(x) \ \Rightarrow\ x = \cos(y),$$

por lo que

$$\operatorname{sen}\big(\arccos(x)\big) = \operatorname{sen}(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)} = \sqrt{1-x^2}. \quad \square$$

Proposición 13.14 (Derivada de la función arcotangente) *Si* $f(x) = \arctan(x)$*, entonces*

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.}$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que la función

$$f(x) = \arctan(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

es la inversa de la función

$$f^{-1}(x) = \tan(x),\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

aplicando la Observación 13.13 y la Proposición 13.11, se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{1+\tan^2\big(\arctan(x)\big)}.$$

El resultado se sigue teniendo en cuenta que

$$y = \arctan(x) \ \Rightarrow\ x = \tan(y),$$

por lo que

$$1+\tan^2\big(\arctan(x)\big) = 1+\tan^2(y) = 1+x^2. \qquad \square$$

En la Tabla 13.1 sumarizamos las derivadas de las funciones que aparecen con mayor frecuencia en las aplicaciones:

Ejemplo 13.12 Calculemos las derivadas de las siguientes funciones (para lo que utilizaremos las derivadas de la Tabla 13.1):

a) $f(x) = 56 - x^3 + \dfrac{1}{x} + 7\sqrt[3]{x} = 56 - x^3 + x^{-1} + 7x^{\frac{1}{3}}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 - x^{-2} + 7\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = -3x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\ &= -3x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = -3x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

b) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2} + 14e^x - 7^{2x}$. Se verifica que:

$$f'(x) = \frac{1}{2x} + 14e^x - 2\ln(7)7^{2x}.$$

$f(x)$	$f'(x)$
$\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$	0
$(u(x))^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha(u(x))^{\alpha-1}u'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$e^{u(x)}u'(x)$
$a^{u(x)}\ (a > 0)$	$a^{u(x)}u'(x)\ln(a)$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{sen}(u(x))$	$\cos(u(x))u'(x)$
$\cos(u(x))$	$-\operatorname{sen}(u(x))u'(x)$
$\tan(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
$\operatorname{arcsen}(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
$\arccos(u(x))$	$-\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
$\arctan(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

Tabla 13.1: Derivadas de algunas funciones.

c) $f(x) = \big(3\operatorname{sen}(x) + 4\cos(x)\big)^4$. Se tiene que:

$$f'(x) = 4\big(3\operatorname{sen}(x) + 4\cos(x)\big)^3\big(3\cos(x) - 4\operatorname{sen}(x)\big).$$

d) $f(x) = \sqrt[5]{\tan^2(x)} = \big(\tan(x)\big)^{\frac{2}{5}}$. Se verifica que:

$$f'(x) = \frac{2}{5}\big(\tan(x)\big)^{\frac{2}{5}-1}\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{2}{5}\big(\tan(x)\big)^{-\frac{3}{5}}\frac{1}{\cos^2(x)}. \qquad \square$$

13.4. Teoremas de Rolle y del Valor Medio

Definición 13.6 Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. La función f tiene en el punto x_0 un:

a) *Máximo relativo* si $\exists\, \delta > 0$ de forma que en un entorno del punto x_0 se verifica que

$$f(x) \leq f(x_0),\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{13.15}$$

Se dice que $M = f(x_0)$ es un *valor máximo relativo*.

b) *Mínimo relativo* si $\exists\, \delta > 0$ de forma que en un entorno del punto x_0 se verifica que

$$f(x) \geq f(x_0), \ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Se dice que $m = f(x_0)$ es un *valor mínimo relativo*.

Los máximos y mínimos relativos se denominan, indistintamente, *extremos relativos*. □

Observación 13.16 Los extremos absolutos en un intervalo I (véase la Definición 11.21) sólo son extremos relativos cuando se alcanzan en puntos interiores del intervalo I. En la función f de la Figura 13.5:

a) x_0 es el máximo absoluto (no es relativo).

b) x_6 es el mínimo absoluto (es relativo).

c) x_2 y x_5 son máximos relativos.

d) x_1, x_4 y x_6 son mínimos relativos. □

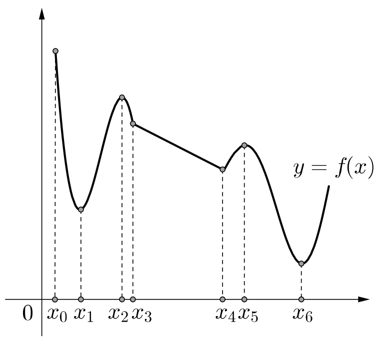


Figura 13.5: Máximos y mínimos de una función f.

Definición 13.7 Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$. Se dice que $x_0 \in I$ es un *punto crítico* (o *singular*) de la función f si $f'(x_0) = 0$ o cuando no existe $f'(x_0)$. □

Observación 13.17 Los puntos críticos de la función f de la Figura 13.5 son x_1, x_2, x_5, x_6 (en los que la función f es derivable) y x_3, x_4 (en los que la función f no es derivable). □

Teorema 13.2 *Si x_0 es un extremo relativo de una función f, entonces x_0 es un punto crítico de f.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que x_0 es un máximo relativo de f (si x_0 es un mínimo relativo, se argumenta de forma análoga) en el que la función f es derivable y veamos que $f'(x_0) = 0$. Por definición, existe $\delta > 0$ para el que se verifica (13.15). De esta forma, por ser f derivable en x_0, se tiene que:

a) $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0,\ \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0)$ y, por tanto,

$$f'(x_0) = f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0. \tag{13.16}$$

b) $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0,\ \forall\, x \in (x_0, x_0+\delta)$ y, por tanto,

$$f'(x_0) = f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0. \tag{13.17}$$

De (13.16) y (13.17) se concluye que $f'(x_0) = 0$. □

Observación 13.18

a) El Teorema 13.2 indica que los puntos críticos siempre son "candidatos" a extremos relativos.

b) El recíproco del Teorema 13.2 no es, en general, cierto. Es decir, existen puntos críticos (como el punto x_3 de la Figura 13.5) que no son extremos relativos. □

Observación 13.19 (Cálculo de los extremos absolutos) Para hallar los extremos absolutos de una función $f \in \mathcal{C}([a,b])$ procederemos de la siguiente forma:

1) Hallamos los puntos críticos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de la función f en el intervalo $[a,b]$.

2) El máximo absoluto de f en $[a,b]$ es

$$M = \max\{f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)\}$$

y el mínimo absoluto de f en $[a,b]$ es

$$m = \min\{f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)\}.$$

Como se aprecia, los extremos a y b del intervalo son siempre "candidatos" a extremos absolutos. □

El siguiente resultado nos garantiza, bajo ciertas condiciones, la existencia de puntos críticos de una función:

Teorema 13.3 (Rolle) *Si $f \in \mathcal{C}([a,b])$, f es derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $f \in \mathcal{C}([a,b])$, por el *teorema de Weierstrass* (véase el Teorema 11.2) se tiene que f alcanza el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo $[a,b]$. Pueden presentarse dos casos:

1) Si uno al menos de los puntos en donde la función f alcanza el máximo o el mínimo absolutos en $[a,b]$ está en el intervalo (a,b), entonces dicho punto, al que denominamos ξ, será un extremo relativo (por el Teorema 13.2) y, por tanto, $f'(\xi) = 0$ (puesto que ξ es un punto crítico y f es derivable en (a,b)).

2) En caso contrario, la función f es constante en $[a,b]$ y, por tanto,

$$f'(x) = 0,\ \forall\, x \in (a,b). \quad \square$$

Observación 13.20 (Interpretación geométrica) Si la gráfica de una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) toma el mismo valor en los extremos del intervalo $[a,b]$, entonces tiene tangente horizontal en algún punto interior (véase la Figura 13.6). $\square$

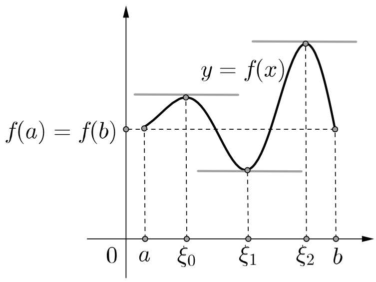


Figura 13.6: Interpretación geométrica del *teorema de Rolle*.

Ejemplo 13.13 Puesto que la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ verifica que $f \in \mathcal{C}^1([0,3\pi])$ y $f(0) = f(3\pi) = 0$, por el *teorema de Rolle* se tiene que existe $\xi \in (0,3\pi)$ tal que $f'(\xi) = 0$. De hecho, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$ (véase la Figura 13.7). $\square$

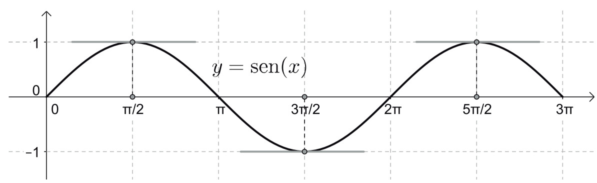


Figura 13.7: Gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0,3\pi]$.

Corolario 13.2 *Si f es una función derivable en (a,b), se verifica que:*

a) Entre dos raíces consecutivas de f en (a,b) hay, al menos, una raíz de f'.

b) Entre dos raíces consecutivas de f' en (a, b) hay, a lo sumo, una raíz de f. Más concretamente, si ξ_1 y ξ_2 son dos raíces consecutivas de f' y:

i) $f(\xi_1)f(\xi_2) > 0 \Rightarrow f$ *no tiene ninguna raíz comprendida entre ξ_1 y ξ_2.*

ii) $f(\xi_1)f(\xi_2) < 0 \Rightarrow f$ *tiene, exactamente, una raíz entre ξ_1 y ξ_2.* □

Observación 13.21 Nótese que $f(\xi_1)f(\xi_2) > 0$ indica que $f(\xi_1)$ y $f(\xi_2)$ tienen el mismo signo mientras que $f(\xi_1)f(\xi_2) < 0$ indica que $f(\xi_1)$ y $f(\xi_2)$ tienen signos contrarios, por lo que se puede aplicar el *teorema de Bolzano* (véase el Teorema 11.1) en el intervalo $[\xi_1, \xi_2]$. □

Teorema 13.4 (Valor Medio) *Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ y f es derivable en (a, b), entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función auxiliar $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

Claramente, $g \in \mathcal{C}([a, b])$, g es derivable en (a, b) y

$$g(a) = f(a) = g(b).$$

Por tanto, aplicando el *teorema de Rolle* (véase el Teorema 13.3) a la función g, se tiene que existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$g'(\xi) = 0. \tag{13.18}$$

Ahora bien, como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},\ \forall\, x \in (a, b), \tag{13.19}$$

el resultado se sigue a partir de las relaciones (13.18) y (13.19). □

Observación 13.22 (Interpretación geométrica) Si f es una función derivable en (a, b), el *teorema del Valor Medio* asegura la existencia de un punto $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

que es, precisamente, la pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Es decir, la gráfica de f tiene puntos interiores en los que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (véase la Figura 13.8). □

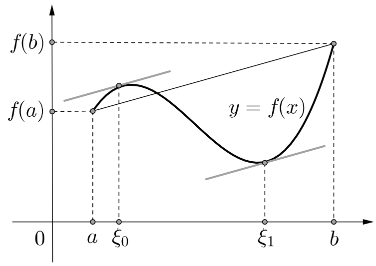


Figura 13.8: Interpretación geométrica del teorema del Valor Medio.

Ejemplo 13.14 La función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ verifica que $f \in \mathcal{C}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$. De acuerdo con el *teorema de Valor Medio*, existe $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que

$$1 - 0 = f'(\xi)\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{2}{\pi}.$$

De hecho, $\xi = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right) \simeq 0'8807$ (véase la Figura 13.9). $\square$

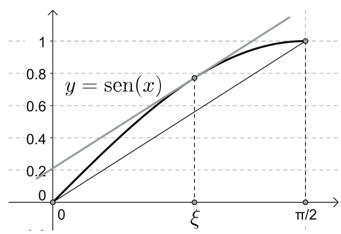


Figura 13.9: Gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Corolario 13.3 *Sea f una función derivable en un intervalo (a, b) con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Se tiene que:*

$$f \text{ es constante en } (a, b) \Leftrightarrow f'(x) = 0, \forall\, x \in (a, b).$$

DEMOSTRACIÓN. La implicación de izquierda a derecha es inmediata (véase el Ejemplo 13.2). Demostremos la implicación contraria: dado un punto arbitrario $x_0 \in (a, b)$, consideremos $x \in (a, b)$ que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_0 \leq x$. Aplicando el *teorema del Valor Medio* (véase el Teorema 13.4) en el intervalo $[x_0, x]$, se tiene que existe $\xi \in (x_0, x)$ tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0,$$

con lo que se concluye que

$$f(x) = f(x_0), \forall\, x \in (a, b). \quad \square$$

Corolario 13.4 *Si f y g son funciones derivables en un intervalo (a, b), con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, tales que*

$$f'(x) = g'(x),\ \forall\, x \in (a, b),$$

se tiene que f y g difieren, en el intervalo (a, b), en una constante. Es decir, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + \lambda,\ \forall\, x \in (a, b).$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función auxiliar

$$h(x) = f(x) - g(x),\ \forall\, x \in (a, b).$$

Por hipótesis, la función h es derivable en (a, b) y

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,\ \forall\, x \in (a, b).$$

El resultado se sigue aplicando el Corolario 13.3 a la función h. $\square$

13.5. Fórmula de Taylor

Dados $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y una función f derivable n veces en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, nos cuestionamos lo siguiente: ¿cómo debe elegirse el polinomio $P_n(x)$ para que el grado de P_n sea menor o igual que n (es decir, $\partial P_n \leq n$) y se verifique que todas las derivadas de P_n en el punto x_0 coincidan con las de f hasta el orden n, es decir, se cumpla que

$$P_n(x_0) = f(x_0),\ P_n'(x_0) = f'(x_0),\ P_n''(x_0) = f''(x_0), \ldots, P_n^{n)}(x_0) = f^{n)}(x_0)?$$

a) Si $n = 0$, el polinomio buscado es, claramente, $P_0(x) = f(x_0)$.

b) Si $n = 1$, como $\partial P_1 \leq 1$, $P_1(x)$ será de la forma

$$P_1(x) = b_0 + b_1 x \ \text{ con } \ b_0, b_1 \in \mathbb{R}$$

o, equivalentemente,

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \ \text{ con } \ a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

(basta tomar $a_1 = b_1$ y $a_0 = b_0 + b_1 x_0$). Además, se verifica que

$$\begin{cases} P_1(x_0) = a_0 \\ P_1'(x) = a_1 \quad \Rightarrow \quad P_1'(x_0) = a_1, \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{cases} P_1(x_0) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = f(x_0) \\ P_1'(x_0) = f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = f'(x_0). \end{cases}$$

Por tanto, el polinomio $P_1(x)$ buscado viene determinado, de forma unívoca, como

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

c) Si $n = 2$, como $\partial P_2 \leq 2$, argumentando como en el apartado b), el polinomio $P_2(x)$ puede ser escrito de la forma

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 \text{ con } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Este polinomio verifica

$$\begin{cases} P_2(x_0) = a_0 \\ P_2'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) & \Rightarrow \quad P_2'(x_0) = a_1 \\ P_2''(x) = 2a_2 & \Rightarrow \quad P_2''(x_0) = 2a_2, \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{cases} P_2(x_0) = f(x_0) & \Leftrightarrow \quad a_0 = f(x_0) \\ P_2'(x_0) = f'(x_0) & \Leftrightarrow \quad a_1 = f'(x_0) \\ P_2''(x_0) = f''(x_0) & \Leftrightarrow \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}. \end{cases}$$

De esta forma, el polinomio $P_2(x)$ buscado viene determinado, unívocamente, como

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

d) En general, para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, como $\partial P_n \leq n$, el polinomio $P_n(x)$ será de la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \text{ con } \{a_i\}_{i=0}^n \in \mathbb{R}.$$

Las sucesivas derivadas del polinomio $P_n(x)$ son

$$\begin{cases} P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} \\ P_n''(x) = 2!\, a_2 + 3!\, a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3\, a_4(x - x_0)^2 \\ \qquad\qquad + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \\ P_n'''(x) = 3!\, a_3 + 4!\, a_4(x - x_0) + 5 \cdot 4 \cdot 3\, a_5(x - x_0)^2 \\ \qquad\qquad + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} \\ \ldots \\ P_n^{k)}(x) = k!\, a_k + (k+1)!\, a_{k+1}(x - x_0) + (k+2)(k+1)\cdots 3\, a_{k+2}(x - x_0)^2 \\ \qquad\qquad + \cdots + n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k} \\ \ldots \\ P_n^{n)}(x) = n!\, a_n. \end{cases}$$

Como para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ se verifica que

$$P_n^{k)}(x_0) = k!\, a_k,$$

entonces

$$P_n^{k)}(x_0) = f^{k)}(x_0) \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}.$$

Por tanto, el polinomio $P_n(x)$ buscado es

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Este tipo de polinomios motiva la siguiente definición:

Definición 13.8 Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea f una función n veces derivable en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. El polinomio

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}} \tag{13.20}$$

se denomina *polinomio de Taylor* de grado n de la función f en el punto x_0. La cantidad

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \tag{13.21}$$

se denomina *resto de Taylor* de grado n de la función f en el punto x_0. $\square$

Observación 13.23 El resto $R_n(x)$ es el error que se comete al tomar $P_n(x)$ como aproximación de $f(x)$. Por tanto,

$$P_n(x) \simeq f(x) \Leftrightarrow R_n(x) \simeq 0. \quad \square$$

Observación 13.24 En la Observación 13.4 se mostró que la recta tangente a una curva $y = f(x)$ (con f derivable) en un punto x_0 es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

o, equivalentemente,

$$y = P_1(x),$$

siendo $P_1(x)$ el polinomio de Taylor de grado 1 de la función f en el punto x_0. Dicha recta se puede considerar una primera aproximación (lineal) de la función $f(x)$ alrededor del punto x_0. Esa aproximación se puede mejorar utilizando polinomios de Taylor $P_n(x)$ de la función f en el punto x_0 de grado más alto, como quedará de manifiesto en los ejemplos que consideraremos más adelante. $\square$

Ejemplo 13.15 Obtengamos los polinomios de Taylor de orden arbitrario, en el punto $x_0 = 0$, de la función $f(x) = \cos(x)$. Para ello, tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) && \Rightarrow && f(0) = 1 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen}(x) && \Rightarrow && f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos(x) && \Rightarrow && f''(0) = -1 \\ f'''(x) &= \operatorname{sen}(x) && \Rightarrow && f'''(0) = 0 \end{aligned}$$

y, en general, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$f^{k)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

De esta forma, dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se verifica que

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{f^{2n)}(0)}{(2n)!}\,x^{2n} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

y, como las derivadas de orden impar de f en $x_0 = 0$ son nulas, se da la igualdad

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Así, los primeros polinomios de Taylor que se obtienen son

$$P_0(x) = P_1(x) = 1, \ P_2(x) = P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}, \ P_4(x) = P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

y

$$P_6(x) = P_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

En la Figura 13.10 se representan gráficamente la función $f(x) = \cos(x)$ y los polinomios de Taylor $P_0(x)$, $P_2(x)$, $P_4(x)$ y $P_6(x)$ que acabamos de obtener. Como se aprecia en las gráficas, cuanto mayor es n, más se “aproxima” el polinomio $P_n(x)$ a la función $f(x)$ para valores de x alrededor del punto $x_0 = 0$. □

Ejemplo 13.16 Argumentando como en el Ejemplo 13.15, se verifica que el polinomio de Taylor de orden $2n+1$ de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el punto $x_0 = 0$ es (compruébese)

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

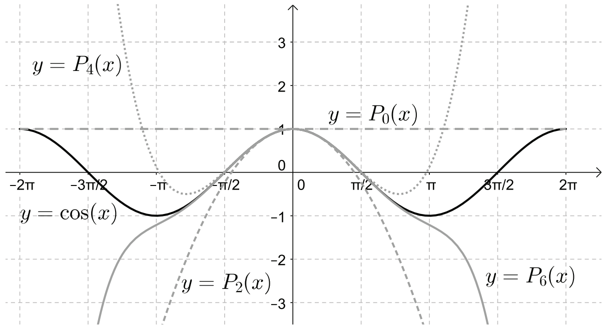


Figura 13.10: Función $f(x) = \cos(x)$ y polinomios de Taylor $\{P_{2n}(x)\}_{n=0}^{3}$ en $[-2\pi, 2\pi]$.

y, como las derivadas de orden par de f en $x_0 = 0$ son nulas, se da la igualdad

$$P_{2n+1}(x) = P_{2(n+1)}(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

De esta forma, los primeros polinomios de Taylor que se obtienen son

$$P_0(x) = 0,\ P_1(x) = P_2(x) = x,\ P_3(x) = P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!},$$

$$P_5(x) = P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ \text{ y } \ P_7(x) = P_8(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

En la Figura 13.11 se representan gráficamente la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y los polinomios de Taylor $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$ y $P_7(x)$. $\square$

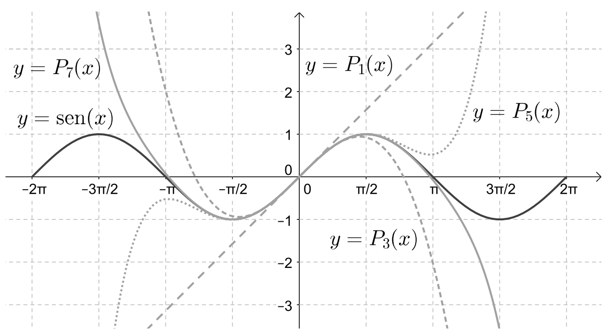


Figura 13.11: Función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y polinomios de Taylor $\{P_{2n+1}(x)\}_{n=0}^{3}$ en $[-2\pi, 2\pi]$.

Ejemplo 13.17 Para hallar el polinomio de Taylor de orden n en el punto $x_0 = 0$ de la función $f(x) = e^x$ tenemos en cuenta que para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica que

$$f^{k)}(x) = e^x \ \Rightarrow\ f^{k)}(0) = 1 \tag{13.22}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}P_n(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}\,x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

En la Figura 13.12 se representan gráficamente la función $f(x) = e^x$ y los polinomios de Taylor $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$. □

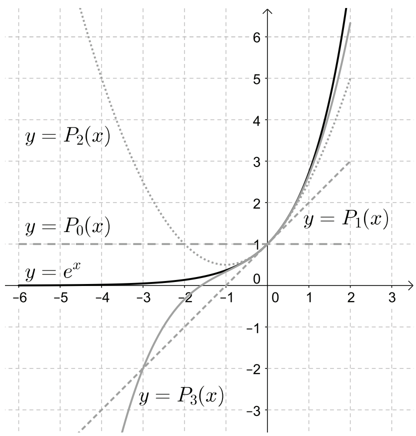


Figura 13.12: Función $f(x) = e^x$ y polinomios de Taylor $\{P_n(x)\}_{n=0}^3$ en $[-6, 2]$.

Ejemplo 13.18 Hallemos el polinomio de Taylor de orden n en el punto $x_0 = 1$ de la función $f(x) = \ln(x)$. Puesto que

$$\begin{array}{lcl} f(x) = \ln(x) & \Rightarrow & f(1) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} & \Rightarrow & f'(1) = 1 \\ f''(x) = -x^{-2} & \Rightarrow & f''(1) = -1 \\ f'''(x) = 2x^{-3} & \Rightarrow & f'''(1) = 2 \\ f^{iv)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = -3!\,x^{-4} & \Rightarrow & f^{iv)}(1) = -3! \\ f^{v)}(x) = (-4)(-3!)x^{-5} = 4!\,x^{-5} & \Rightarrow & f^{v)}(1) = 4! \\ f^{vi)}(x) = -5!\,x^{-6} & \Rightarrow & f^{vi)}(1) = -5! \end{array}$$

y, en general, para $k \in \mathbb{N}$

$$f^{k)}(1) = (-1)^{k+1}(k-1)!,$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f(1) + f'(1)\,(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}\,(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}\,(x-1)^3 \\
&\quad + \frac{f^{iv)}(1)}{4!}\,(x-1)^4 + \frac{f^{v)}(1)}{5!}\,(x-1)^5 + \cdots + \frac{f^{n)}(1)}{n!}\,(x-1)^n \\
&= 0 + (x-1) - \frac{1}{2!}\,(x-1)^2 + \frac{2}{3!}\,(x-1)^3 - \frac{3!}{4!}\,(x-1)^4 + \frac{4!}{5!}\,(x-1)^5 \\
&\quad + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!}\,(x-1)^n \\
&= x - 1 - \frac{1}{2}\,(x-1)^2 + \frac{1}{3}\,(x-1)^3 - \frac{1}{4}\,(x-1)^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,(x-1)^n.
\end{aligned}
$$

Nótese que el desarrollo anterior nos permite afirmar que el polinomio de Taylor de orden n en el punto $\widetilde{x}_0 = 0$ de la función $\widetilde{f}(x) = \ln(1+x)$ es

$$\widetilde{P}_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

En la Figura 13.13 se representan gráficamente la función $\widetilde{f}(x) = \ln(1+x)$ y los polinomios de Taylor $\widetilde{P}_1(x)$, $\widetilde{P}_2(x)$, $\widetilde{P}_3(x)$ y $\widetilde{P}_4(x)$. $\square$

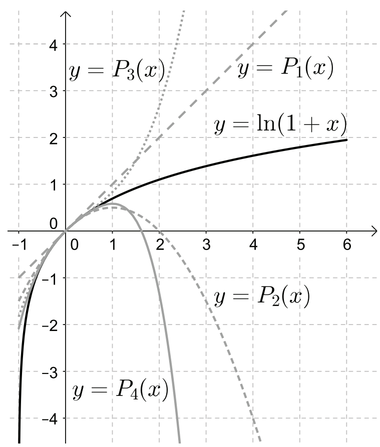


Figura 13.13: Función $\widetilde{f}(x) = \ln(1+x)$ y polinomios de Taylor $\{\widetilde{P}_n(x)\}_{n=1}^4$ en $(-1, 6]$.

Teorema 13.5 (Taylor) *Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea f una función n veces derivable en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de grado n de la función f en el punto x_0 dado por* (13.20). *Entonces, se verifica que:*

a) El resto de Taylor definido en (13.21) *es un infinitésimo de orden superior* (*véase la Definición 11.16*) *que* $(x - x_0)^n$ *en el punto* x_0*, es decir,*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Consecuentemente, la función f *y el polinomio* P_n *toman valores muy cercanos en puntos* x *próximos a* x_0*.*

b) Si, además, la función f *admite derivada de orden* $n + 1$ *en un entorno del punto* x_0*, entonces existe un valor* ξ*, comprendido entre* x *y* x_0*, tal que*

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.} \tag{13.23}$$

Observación 13.25

a) La expresión (13.23) es la *fórmula de Lagrange* para el resto.

b) Como $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, se obtiene la *fórmula de Taylor* de la función f como

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n + \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.} \tag{13.24}$$

c) Cuando $x_0 = 0$, la fórmula (13.24) se conoce como *desarrollo de MacLaurin* de la función f. $\square$

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \text{(véase la Observación 11.9)}$$

$$\operatorname{sen}(x) \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\ln(1 + x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Tabla 13.2: Algunos polinomios de Taylor.

En la Tabla 13.2 están sumarizados los polinomios de Taylor de orden n en el punto $x_0 = 0$ de las funciones e^x, $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ y $\ln(1+x)$ obtenidos en los ejemplos anteriores.

Ejemplo 13.19 Vamos a obtener una aproximación del número e de forma que el error cometido sea inferior a la millonésima. La propiedad (13.22) determina que el desarrollo de MacLaurin de la función

$$f(x) = e^x$$

es

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{13.25}$$

con ξ entre 0 y x. En particular, haciendo $x = 1$ en (13.25), se tiene que

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} = P_n(1) + R_n(1) \tag{13.26}$$

con $0 < \xi < 1$. De esta forma, para obtener una aproximación del número e de manera que el error cometido sea inferior 10^{-6} basta elegir $n \in \mathbb{N}$ verificando

$$|R_n(1)| < 10^{-6},$$

pues, por (13.26), esto implica que

$$|e - P_n(1)| = |R_n(1)| < 10^{-6}.$$

Puesto que $0 < \xi < 1$, se tiene que

$$|R_n(1)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!},$$

por lo que basta tomar $n \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-6} \;\Leftrightarrow\; (n+1)! \geq 3 \times 10^6 \;\Leftrightarrow\; n \geq 9.$$

Por tanto, tomando $n = 9$, se obtiene que $|R_9(1)| < 10^{-6}$, lo que determina la aproximación

$$e \simeq P_9(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2'7182815255731922$$

con un error inferior a la millonésima. $\square$

13.6. Problemas

13.1. Probar las afirmaciones del Ejemplo 13.3.

13.2. Obtener, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones en los siguientes puntos:

a) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 2$ en $x = 2$ b) $g(x) = 3\sqrt{x}$ en $x = 9$.

13.3. Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola

$$y = \frac{x^2}{3}$$

en el punto $(3, 3)$. Hacer una representación gráfica.

13.4. Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 3$.

13.5. Hallar las rectas normales a las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ en $x = 2$ b) $g(x) = e^{2x^3+1}$ en $x = -1$.

13.6. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 - x$$

en el punto de abscisa $x = 1$. ¿Existe algún otro punto común a la gráfica de f y a la recta tangente? En caso afirmativo, determinarlo.

13.7. La ecuación del movimiento de un cuerpo es

$$x(t) = 3t^2, \ \forall\, t \geq 0,$$

donde t es el tiempo (medido en segundos) y $x(t)$ es el espacio recorrido (en metros) en el instante de tiempo t. Calcular:

a) El espacio recorrido por el cuerpo en 4 segundos.

b) La *velocidad instantánea* en el instante de tiempo $t = 15$ segundos.

13.8. Determinar los puntos de la gráfica de la función

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

en los que la pendiente de la recta tangente sea cero. ¿En qué puntos la pendiente es 3? Hacer una representación gráfica.

13.9. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x - 7$ b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ c) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 4}$ e) $f(x) = x^2 - \dfrac{3}{x} + 5 - \dfrac{1}{x^2}$ f) $f(x) = x\sqrt{x}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$ h) $f(x) = (x^2 - 3)^2$ i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ k) $f(x) = \operatorname{sen}(2x - 1)$ l) $f(x) = \cos(x^2)$

m) $f(x) = \big(\cos(x)\big)^2$ n) $f(x) = \operatorname{arcsen}(3x)$ o) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

p) $f(x) = \ln(x^2 - 3x - 1)$ q) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ r) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

s) $f(x) = e^{4+x}$ t) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ u) $f(x) = 2^{\operatorname{sen}(x)}$.

13.10. Hallar la derivada de la función $f(x) = \ln\big(\operatorname{sen}(x)\big)$, $\forall\, x \in (0, \pi)$.

13.11. Calcular las derivadas sucesivas del polinomio

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6.$$

13.12. Hallar las seis primeras derivadas de la función

$$f(x) = \frac{1}{x},\ \forall\, x \neq 0.$$

¿Se obtiene alguna vez la función idénticamente nula si se siguen calculando las derivadas sucesivas?

13.13. Comprobar que la función

$$f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \operatorname{sen}(x)$$

verifica que

$$f''(x) + f(x) = 0$$

para valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

13.14. Hallar los coeficientes α, β, γ y δ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

sea derivable en toda la recta real.

13.15. Determinar el valor de los parámetros α y β para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln\big(e + \operatorname{sen}(x)\big), & x < 0 \\ x^3 + \alpha x + \beta, & x \geq 0 \end{cases}$$

sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

13.16. Se considera la función

$$f(x) = x^2 - 2x + 3, \; \forall\, x \in [-2, 3].$$

a) Justificar por qué la función f alcanza un máximo y un mínimo absolutos.

b) Hallar dichos extremos absolutos.

13.17. Comprobar que la función $f(x) = x^4 - 2x^2$ verifica las hipótesis del *teorema de Rolle* en el intervalo $[-2, 2]$ y hallar los puntos de ese intervalo en donde se anula la derivada.

13.18. La función

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2} - 1$$

se anula en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ pero, al mismo tiempo, su derivada es no nula en los puntos de este intervalo. Explicar esta aparente contradicción con el *teorema de Rolle*.

13.19. Se consideran los puntos del plano $A = (1, 2)$ y $B = (2, 4)$.

a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que une dichos puntos?

b) Hallar los puntos de la gráfica de la parábola

$$f(x) = x^2 + 3$$

en los que la recta tangente sea paralela a la recta anterior.

c) Hacer una representación gráfica de la recta y la parábola anteriores.

13.20. Aplicar el *teorema del Valor Medio* a la función

$$f(x) = x^2 + 3x + 5$$

en el intervalo $[-1, 0]$ y determinar el punto ξ que aparece en dicho teorema.

13.21.

a) Aplicar el *teorema del Valor Medio* a la función $f(x) = x^n$ en un intervalo adecuado para demostrar que

$$n2^{n-1} < 3^n - 2^n < n3^{n-1}$$

para todo número natural $n \geq 2$.

b) Deducir de a) que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n - 2^n}{n} = +\infty.$$

13.22. Determinar el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $x_0 = -1$ de la función

$$f(x) = xe^{3x}.$$

13.23. Obtener una aproximación del número $\sqrt[3]{e}$ de forma que el error cometido sea inferior a la milésima.

13.24. Obtener una aproximación del número $\ln(2)$ mediante un polinomio de Taylor de forma que el error cometido sea inferior a una décima.

13.7. Soluciones

13.1. Inmediato.

13.2. a) $f'(2) = -28$ b) $g'(9) = \dfrac{1}{2}$.

13.3. $y = 2x - 3$.

13.4. $y = \dfrac{2}{3} - \dfrac{x}{9}$.

13.5. a) $x = 2$ b) $y = \dfrac{1}{e} - \dfrac{e}{6}(x+1)$.

13.6. $y = 2(x-1)$ y $P = (-2, -6)$.

13.7. a) 48 m b) 90 m/s.

13.8. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ y $f'(2) = 3$.

13.9. a) $f'(x) = 5$ b) $f'(x) = 6x - 2$ c) $f'(x) = \dfrac{6x(x+1)}{(2x+1)^2}$
d) $f'(x) = \dfrac{3-2x}{(x^2-3x+4)^2}$ e) $f'(x) = 2x + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$ f) $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$
g) $f'(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ h) $f'(x) = 4x(x^2-3)$ i) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
j) $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ k) $f'(x) = 2\cos(2x-1)$ l) $f'(x) = -2x\operatorname{sen}(x^2)$
m) $f'(x) = -\operatorname{sen}(2x)$ n) $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$ o) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{x^4+3x^2+1}$
p) $f'(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x-1}$ q) $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ r) $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{\big(\ln(x)\big)^2}$
s) $f'(x) = e^{4+x}$ t) $f'(x) = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ u) $f'(x) = 2^{\operatorname{sen}(x)}\ln(2)\cos(x)$.

13.10. $f'(x) = \cot(x)$, $\forall\, x \in (0, \pi)$.

13.11. $f'(x) = 6x^2 + 6x$, $f''(x) = 12x + 6$, $f'''(x) = 12$ y $f^{n)}(x) = 0$ si $n \geq 4$.

13.12. En general, $f^{n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ningún valor de $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $f^{n)}(x) \equiv 0$.

13.13. $f'(x) = -\alpha\operatorname{sen}(x) + \beta\cos(x)$ y $f''(x) = -\alpha\cos(x) - \beta\operatorname{sen}(x) = -f(x)$.

13.14. $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = 0$ y $\delta = 1$.

13.15. $\alpha = \dfrac{1}{e}$ y $\beta = 1$.

13.16. a) f es continua en un intervalo cerrado. b) Máximo absoluto $x_{\text{max}} = -2$ (con $f(-2) = 11$) y mínimo absoluto $x_{\text{min}} = 1$ (con $f(1) = 2$).

13.17. $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.

13.18. La función f no es derivable en $x = 0$, por lo que no se verifican las hipótesis del *teorema de Rolle* en $[-1, 1]$.

13.19. a) La pendiente es 2. b) $x = 1$.

13.20. $\xi = -\dfrac{1}{2}$.

13.21. a) Considerar el intervalo $[2,3]$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{n} \geq \lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty.$

13.22. $P_2(x) = -e^{-3} - 2e^{-3}(x+1) - \dfrac{3}{2}\, e^{-3}(x+1)^2.$

13.23. Considerando $f(x) = e^x$ y el polinomio de Taylor de orden n en el punto $x_0 = 0$, para $n = 6$ se obtiene que $\left|R_6\left(\frac{1}{3}\right)\right| < 10^{-3}$, lo que determina la aproximación

$$\sqrt[3]{e} = f\left(\frac{1}{3}\right) \simeq P_6\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{6!}\,\frac{1}{3^6} = 1'39561233043743$$

con un error inferior a la milésima. Nótese que $\sqrt[3]{e} \simeq 1'395612425086090$.

13.24. Considerando $f(x) = \ln(1+x)$ y el polinomio de Taylor de orden n en el punto $x_0 = 0$, para $n = 9$ se verifica que $|R_9(1)| < 10^{-1}$, lo que determina la aproximación

$$\ln(2) = f(1) \simeq P_9(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = 0'7456349206349207$$

con un error inferior a la décima. Nótese que $\ln(2) \simeq 0'6931471805599453$.

14 Aplicaciones de las derivadas

14.1. Introducción

En este capítulo se ven algunos usos que se les pueden dar a las derivadas. Se comienza con el cálculo de límites del cociente de dos funciones cuando la evaluación de dicho cociente en el punto donde se busca el límite da lugar a ciertas *indeterminaciones*. Aquí el resultado de referencia es la *regla de L'Hôpital*, que necesita que las dos funciones involucradas sean derivables.

Se muestra a continuación cómo el signo de una derivada permite decidir si la función es creciente, decreciente, no creciente o no decreciente. Esto facilita la detección de máximos o mínimos relativos entre los puntos con derivada nula. Seguidamente se introducen los conceptos de *concavidad*, *convexidad* y *puntos de inflexión* de una función y su relación con la segunda derivada de dicha función.

Se continúa mostrando los principales pasos a seguir para dibujar la *gráfica de una función*, para los que resultan de una inestimable ayuda los conceptos de límite y derivadas (estudiados en los Capítulos 11 y 13) en los cálculos de asíntotas, máximos y mínimos.

Se finaliza este capítulo viendo cómo se utilizan las derivadas para resolver *problemas de optimización*. Normalmente estos problemas primero hay que plantearlos como el cálculo del máximo o el mínimo de una función y, a continuación, encontrar dichos máximos o mínimos a través del cálculo de la derivada de la función involucrada. Prácticamente cualquier área de la Ciencia y de la Tecnología requiere la resolución de problemas de optimización y, por tanto, necesita de las derivadas.

14.2. Cálculo de límites. Regla de L'Hôpital

Teorema 14.1 (Regla de L'Hôpital) *Supongamos que f y g son dos funciones derivables en un entorno de un punto x_0 tales que*

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

Entonces, si existe

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{14.1}$$

se verifica que existe

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y, además,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{14.2}$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el *teorema del Valor Medio* (véase el Teorema 13.4) a las funciones f y g se tiene que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)(x - x_0)}{g'(\eta_x)(x - x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\eta_x)},$$

siendo ξ_x y η_x puntos intermedios entre x y x_0. Por tanto, la hipótesis (14.1) determina que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

puesto que si $x \to x_0$, entonces $\xi_x \to x_0$ y $\eta_x \to x_0$. $\square$

Observación 14.1

a) La condición $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ de la *regla de L'Hôpital* puede extenderse al caso en el que $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (recta ampliada) y

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$$

con $\ell \in \{0, -\infty, +\infty\}$, de forma que, de nuevo, si existe

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se verifica que existe

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{14.3}$$

b) El límite en (14.2) y (14.3) puede ser finito o infinito (es decir, puede pertenecer a $\overline{\mathbb{R}}$).

c) Bajo las hipótesis del Teorema 14.1 o del apartado a), si las funciones f' y g' son continuas en x_0 y $g'(x_0) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

d) En las condiciones del Teorema 14.1 o del apartado a) si, además, las funciones f' y g' son funciones derivables en un entorno del punto x_0 y se cumple que

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = \lim_{x\to x_0} g'(x) \in \{0, -\infty, +\infty\},$$

entonces, aplicando dos veces la *regla de L'Hôpital*, se verifica que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

en el supuesto de que exista el tercer límite. En las aplicaciones, esta argumentación se va reiterando las veces que sea necesario. Así, aparece una cadena de igualdades

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \cdots$$

pero debe tenerse en cuenta que la cadena anterior se termina en el momento en que aparece un límite "no indeterminado". En el caso en que se llegue a uno que no existe, y no es infinito, entonces nada puede decirse acerca del primero.

e) Antes de aplicar reiteradamente la *regla de L'Hôpital*, conviene hacer simplificaciones previas, ya que las derivadas que van apareciendo pueden ir complicando las expresiones resultantes. Por este motivo, en muchas ocasiones es útil sustituir algunos infinitésimos por otros equivalentes. □

Ejemplo 14.1 Aplicando la *regla de L'Hôpital* para el cálculo de límites indeterminados se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+9}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x}{2x^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Observación 14.2 (Otras indeterminaciones resolubles por la regla de L'Hôpital)

a) $\boxed{\infty - \infty}$ Puede obtenerse la indeterminación $\frac{0}{0}$ a partir de la igualdad

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

b) $\boxed{0 \cdot \infty}$ Puede obtenerse la indeterminación $\frac{0}{0}$ a partir de la igualdad

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

o la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$ a partir de la expresión

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

c) $\boxed{\infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty}$ Pueden obtenerse indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$ tomando logaritmos neperianos. $\square$

Ejemplo 14.2

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0. \quad \square$$

14.3. Crecimiento y decrecimiento de una función. Máximos y mínimos relativos

Teorema 14.2 *Sea f una función derivable en un intervalo (a, b) con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.*

a) *Si $f'(x) \geq 0,\ \forall\, x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b).*

b) *Si $f'(x) > 0,\ \forall\, x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en (a, b).*

c) *Si $f'(x) \leq 0,\ \forall\, x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b).*

d) *Si $f'(x) < 0,\ \forall\, x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en (a, b).*

DEMOSTRACIÓN. Probamos únicamente el caso a) (en los demás se razona de forma análoga). Para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ por el *teorema del Valor Medio* (véase el Teorema 13.4) se verifica que existe $\xi \in (x_1, x_2)$ tal que

$$0 \leq f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

de donde se deduce que

$$f(x_1) \leq f(x_2). \quad \square$$

Ejemplo 14.3 Como la derivada de la función $f(x) = x^2$ es

$$f'(x) = 2x \begin{cases} < 0 & \text{si } x < 0 \\ > 0 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

se tiene que la función f es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y estrictamente creciente en el intervalo $(0, +\infty)$. □

Observación 14.3 A la vista del Teorema 14.2, para hallar los intervalos donde una función f es monótona se procede de la siguiente forma:

1) Se hallan los puntos críticos de la función f (véase la Definición 13.7) y se ordenan de manera creciente, es decir,

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_n$$

(en particular, entre ellos se encuentran las discontinuidades de la función f).

2) Los números del conjunto $\{c_i\}_{i=1}^n$ dividen el dominio de definición de la función f en un conjunto de subintervalos en los que la función f' tiene signo constante y, por tanto, en ellos la función f es monótona. □

Veamos algunas condiciones suficientes para que un punto sea extremo relativo (véase la Definición 13.6) de una función.

Corolario 14.1 *Sea f una función continua en x_0 y derivable en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$ con $\delta > 0$.*

a) Si $\begin{cases} f'(x) > 0, \ x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x) < 0, \ x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$ $\Rightarrow$ *la función f tiene un máximo relativo en x_0.*

b) Si $\begin{cases} f'(x) < 0, \ x_0 - \delta < x < x_0 \\ f'(x) > 0, \ x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$ $\Rightarrow$ *la función f tiene un mínimo relativo en x_0.*

c) Si f' tiene signo constante en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$ $\Rightarrow$ la función f no tiene extremo relativo en x_0.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata del Teorema 14.2. □

Ejemplo 14.4 Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$. Como

$$f'(x) = 2x \begin{cases} < 0 & \text{si } x < 0 \\ > 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g'(x) = 3x^2 > 0 \, \forall \, x \neq 0,$$

se tiene que $x_0 = 0$ es un mínimo relativo (de hecho, absoluto) de la función f pero no es extremo relativo de la función g (véase la Figura 14.1). □

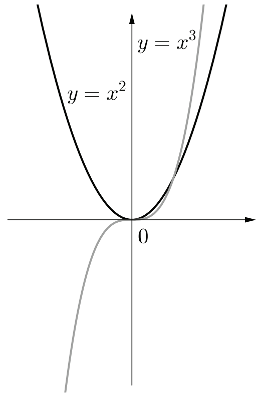


Figura 14.1: Funciones x^2 y x^3.

Teorema 14.3 *Sea f una función dos veces derivable en un punto x_0 tal que $f'(x_0) = 0$.*

a) Si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.

b) Si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

DEMOSTRACIÓN. Véase el Teorema 14.4. □

Ejemplo 14.5 Consideremos la función $f(x) = x^2$. Como $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 2 > 0$, se verifica que la función f tiene un mínimo relativo en el punto $x_0 = 0$. □

El Teorema 14.3 es un caso particular del siguiente resultado más general:

Teorema 14.4 *Dado $n \in \mathbb{N}$, sea f una función n veces derivable en un punto crítico x_0 de forma que*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1)}(x_0) = 0 \ \ y \ \ f^{n)}(x_0) \neq 0.$$

a) Si n es par y $f^{n)}(x_0) < 0$, entonces la función f tiene un máximo relativo en x_0.

b) Si n es par y $f^{n)}(x_0) > 0$, entonces la función f tiene un mínimo relativo en x_0.

c) Si n es impar, entonces la función f no tiene extremo relativo en x_0[1].

[1]Más adelante en el Teorema 14.6 se mostrará que, en este caso, x_0 es un *punto de inflexión*, que es un concepto que se estudia en la Sección 14.4.

DEMOSTRACIÓN. Por la *fórmula de Taylor* (véase el Teorema 13.5) se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{n)}(\xi_x)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f^{n)}(\xi_x)}{n!}(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

con ξ_x entre x y x_0. El resultado se sigue de la igualdad

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{n)}(\xi_x)}{n!}(x - x_0)^n$$

eligiendo x suficientemente próximo a x_0 para que $f^{n)}(\xi_x)$ y $f^{n)}(x_0)$ tengan el mismo signo (nótese que esto es posible ya que $f^{n)}(x_0) \neq 0$). $\square$

Ejemplo 14.6 Consideremos la función $f(x) = x^4$. Como $f'(x) = 4x^3$, el único punto crítico de f es $x_0 = 0$. Las derivadas sucesivas de la función f son

$$f''(x) = 12x^2,\ f'''(x) = 24x,\ f^{iv)}(x) = 24 \ \text{ y } \ f^{n)}(x) = 0 \ \text{ para } \ n \geq 5.$$

Como se verifica que

$$f''(0) = f'''(0) = 0 \ \text{ y } \ f^{iv)}(0) = 24,$$

se tiene que $x_0 = 0$ es un mínimo relativo (de hecho, absoluto) de la función f. $\square$

14.4. Concavidad y convexidad de una función. Puntos de inflexión

Definición 14.1 Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}$.

a) La función f es *convexa* en un intervalo $I \subset D$ si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in I$ se verifica que el segmento de recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por encima de la gráfica de la función f.

b) La función f es *cóncava* en un intervalo $I \subset D$ si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in I$ se verifica que el segmento de recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por debajo de la gráfica de la función f.

c) $x_0 \in D$ es un *punto de inflexión* de la función f si f pasa de ser cóncava a convexa (o de convexa a cóncava) en el punto x_0. $\square$

Observación 14.4 En algunos textos se definen como funciones cóncavas las que aquí se denominan convexas, y viceversa. También se utilizan expresiones del tipo función *cóncava hacia arriba*, función *cóncava hacia abajo* ... El lector debe estar atento a estas diferencias. □

Observación 14.5 Nótese que una función f es cóncava en un intervalo I si, y sólo si, la función $-f$ es convexa en I. □

Ejemplo 14.7 La función f de la Figura 14.2 es convexa en el intervalo (a, c) y cóncava en el intervalo (c, b). Por tanto, c es un punto de inflexión de la función f. □

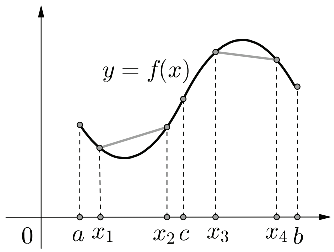


Figura 14.2: Convexidad y concavidad de una función f.

Observación 14.6 Como la recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ tiene por ecuación

$$r(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

si la función f es:

a) *Convexa* en (a, b), entonces para todo $x \in (x_1, x_2)$ se cumple que

$$f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \geq f(x)$$

o, equivalentemente, para todo $x \in (x_1, x_2)$ se verifica que

$$\boxed{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.}$$

b) *Cóncava* en (a, b), entonces para todo $x \in (x_1, x_2)$ se cumple que

$$f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \leq f(x)$$

o, equivalentemente, para todo $x \in (x_1, x_2)$ se verifica que

$$\boxed{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.}$$

Observación 14.7 Si f es una función convexa (respectivamente, cóncava) en un intervalo I y $x \in I$, entonces la gráfica de la función f queda por encima (respectivamente, por debajo) de la recta tangente en el punto $(x, f(x))$ excepto en el propio punto $(x, f(x))$. Este punto recibe el nombre de *punto de contacto* de la recta tangente. $\square$

Para funciones derivables, se puede demostrar (aunque no lo haremos aquí) la siguiente caracterización de la convexidad:

Teorema 14.5 *Sea f derivable en un intervalo (a, b) con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.*

a) f es convexa en (a, b) $\Leftrightarrow$ f' es creciente en (a, b).

b) f es cóncava en (a, b) $\Leftrightarrow$ f' es decreciente en (a, b). $\square$

Corolario 14.2 *Sea f derivable en un intervalo (a, b). Si $x_0 \in (a, b)$ es un punto de inflexión de f, entonces $f''(x_0) = 0$ o no existe $f''(x_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por ser x_0 un punto de inflexión de f, de acuerdo con la Definición 14.1, supongamos que la función f pasa de ser cóncava a convexa (respectivamente, pasa de convexa a cóncava) en el punto x_0. Entonces se verifica que existe $\delta > 0$ tal que $a < x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta < b$ y

$$f \text{ es } \begin{cases} \text{cóncava (respectivamente, convexa) en } (x_0 - \delta, x_0) \\ \text{convexa (respectivamente, cóncava) en } (x_0, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Por tanto, por el Teorema 14.5, se tiene que

$$\begin{cases} f' \text{ es decreciente (respectivamente, creciente) en } (x_0 - \delta, x_0) \\ f' \text{ es creciente (respectivamente, decreciente) en } (x_0, x_0 + \delta), \end{cases}$$

lo que implica (véase el Corolario 14.1) que f' tiene un mínimo (respectivamente, máximo) relativo en x_0 y, por tanto (véase el Teorema 13.2), x_0 es un punto crítico de la función f', por lo que $f''(x_0) = 0$ o no existe $f''(x_0)$ (véase la Definición 13.7). $\square$

Observación 14.8 Del Teorema 14.5 se deduce que los intervalos de concavidad y/o convexidad de una función f son los intervalos de monotonía de la función f'. Por tanto, puesto que $(f')' = f''$, a la vista del Teorema 14.2 y del Corolario 14.2 se tiene que:

a) Si $f''(x) > 0 \, \forall \, x \in (a, b)$, entonces la función f es convexa en (a, b).

b) Si $f''(x) < 0 \, \forall \, x \in (a, b)$, entonces la función f es cóncava en (a, b).

c) Si $f''(x_0) = 0$ o no existe $f''(x_0)$, entonces x_0 es un posible punto de inflexión de la función f (aunque pudiera no serlo). $\square$

Podemos completar la información del apartado c) del Teorema 14.4 con el siguiente resultado:

Teorema 14.6 *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n > 2$, y f una función n veces derivable en un punto x_0 de forma que*

$$f''(x_0) = \cdots = f^{n-1)}(x_0) = 0 \ \text{ y } \ f^{n)}(x_0) \neq 0. \tag{14.4}$$

Si n es impar, entonces la función f tiene un punto de inflexión en x_0. Además, en ese caso, si $f^{n)}(x_0) > 0$ (respectivamente, < 0), la función pasa en x_0 de ser cóncava a ser convexa (respectivamente, de ser convexa a ser cóncava).

DEMOSTRACIÓN. Aplicando a f'' la *fórmula de Taylor* (véase el Teorema 13.5), la hipótesis (14.4) determina que

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{iv)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{n-1)}(x_0)}{(n-3)!}(x-x_0)^{n-3} + \frac{f^{n)}(\xi_x)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} \\ &= \frac{f^{n)}(\xi_x)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}, \end{aligned} \tag{14.5}$$

con ξ_x entre x y x_0. Por otra parte, como $f^{n)}(x_0) \neq 0$, puede eligirse $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, de forma que $f^{n)}(x_0)$ y $f^{n)}(\xi_x)$ tengan el mismo signo para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. De esta forma, en el caso de que n sea impar, se verifica que $n-2$ es impar y, por tanto, la expresión (14.5) determina que

$$\begin{cases} f^{n)}(x_0) \text{ y } f''(x) \text{ tienen signos opuestos si } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f^{n)}(x_0) \text{ y } f''(x) \text{ tienen el mismo signo si } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, distinguimos los dos casos que pueden presentarse:

a) Si $f^n(x_0) > 0$, entonces

$$\begin{cases} f''(x) < 0, \ \forall\, x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f''(x) > 0, \ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \varepsilon), \end{cases}$$

por lo que el Teorema 14.2 determina que

$$\begin{cases} f' \text{ es estrictamente decreciente en } (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f' \text{ es estrictamente creciente en } (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{cases}$$

y el Teorema 14.5 concluye que

$$\begin{cases} f \text{ es cóncava en } (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f \text{ es convexa en } (x_0, x_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Esto a su vez implica, de acuerdo con la Definición 14.1, que x_0 es un punto de inflexión y, además, la función f pasa en x_0 de ser cóncava a ser convexa.

b) Si $f^n(x_0) < 0$, entonces

$$\begin{cases} f''(x) > 0, \ \forall\, x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f''(x) < 0, \ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \varepsilon), \end{cases}$$

por lo que el Teorema 14.2 determina que

$$\begin{cases} f' \text{ es estrictamente creciente en } (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f' \text{ es estrictamente decreciente en } (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{cases}$$

y el Teorema 14.5 concluye que

$$\begin{cases} f \text{ es convexa en } (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f \text{ es cóncava en } (x_0, x_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Esto a su vez implica, de acuerdo con la Definición 14.1, que x_0 es un punto de inflexión y, además, la función f pasa en x_0 de ser convexa a ser cóncava. □

Ejemplo 14.8 Para la función $f(x) = x^3$ se verifica que

$$f'(x) = 3x^2 \ \text{ y } \ f''(x) = 6x \begin{cases} < 0 \ \text{ si } \ x < 0 \\ > 0 \ \text{ si } \ x > 0, \end{cases}$$

por lo que la función f es cóncava en el intervalo $(-\infty, 0)$ y convexa en el intervalo $(0, +\infty)$. Por tanto, $x_0 = 0$ es un punto de inflexión de f. □

Ejemplo 14.9 Consideremos la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$. Las derivadas sucesivas de la función f son

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3), \ f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2),$$

$$f'''(x) = 24x - 24, \ f^{iv)}(x) = 24 \ \text{ y } \ f^{n)}(x) = 0 \ \text{ para } \ n \geq 5.$$

Claramente, las raíces de $f''(x)$ son $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. Como se verifica que

$$\begin{cases} f''(0) = 0 \ \text{ y } \ f'''(0) = -24 \\ f''(2) = 0 \ \text{ y } \ f'''(2) = 24, \end{cases}$$

se tiene que $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$ son puntos de inflexión de la función f. Nótese que $x_1 = 0$ es un punto crítico de f (con tangente horizontal a la curva) pero $x_2 = 2$ no es punto crítico de f (pues $f'(2) = -16 \neq 0$). □

14.5. Representación gráfica de funciones

El estudio de las propiedades generales sobre los puntos de corte con los ejes coordenados, las simetrías, la monotonía, la continuidad, la derivabilidad, la convexidad, los extremos relativos … de una función f culmina con su representación gráfica.

Definición 14.2 (Asíntotas) Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}$. La recta de ecuación

a) $\boxed{x = x_0}$ es *asíntota vertical* de f si se verifica que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \ \text{ o } \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

b) $\boxed{y = m}$ es *asíntota horizontal* de f si se verifica que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = m \ \text{ o } \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = m.$$

c) $\boxed{y = mx + n}$ es *asíntota oblicua* de f (con $m \neq 0$) si se verifica que

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) \end{array} \right. \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} m = \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \displaystyle\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx). \end{array} \right. \quad \square$$

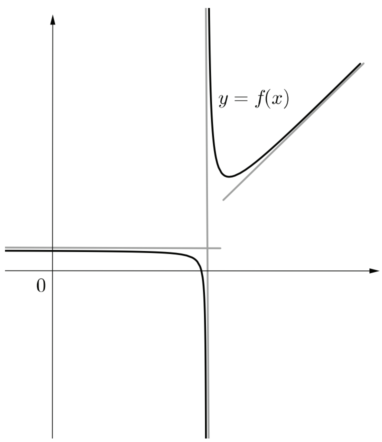


Figura 14.3: Asíntotas de una función f.

Observación 14.9 El signo de los infinitos en a), de $f(x) - m$ en b) y de $f(x) - (mx + n)$ en c) indica si la gráfica de la función f está por encima, por debajo, a la izquierda, a la derecha … de la asíntota (véase la Figura 14.3). $\square$

Observación 14.10 (Representación gráfica de funciones) Los pasos a seguir a la hora de hacer la representación gráfica de una función f son, en líneas generales, los siguientes:

- Etapa 1: Determinar el dominio $\mathrm{Dom}(f)$ de la función f.
- Etapa 2: Analizar si la función f es:
  - ◇ Par (es decir, si $f(-x) = f(x)$) o impar (es decir, si $f(-x) = -f(x)$). En tal caso, basta representar f en $\mathrm{Dom}(f) \cap (0, +\infty)$ y utilizar el hecho de que f sea par o impar para representar f en $\mathrm{Dom}(f) \cap (-\infty, 0]$.
  - ◇ Periódica (es decir, si existe $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$). En tal caso, basta representar f en un intervalo de longitud un periodo (por ejemplo, en el intervalo $[0, T]$) y utilizar la periodicidad para representar la función f en el resto del dominio.
- Etapa 3: Determinar:
  - ◇ Discontinuidades de f.
  - ◇ Las asíntotas verticales.
  - ◇ Los puntos de corte con los ejes, es decir, los valores $x \in \mathrm{Dom}(f)$ para los que $f(x) = 0$ (es decir, las raíces de f), de forma que los puntos $(x, 0)$ (y el punto $(0, f(0))$ cuando $0 \in \mathrm{Dom}(f)$) estarán en la gráfica de f.
  - ◇ Intervalos en donde f tiene un signo constante.
  - ◇ Comportamiento de f en el infinito (si procede).
  - ◇ Las asíntotas horizontales y oblicuas.
- Etapa 4: Hallar:
  - ◇ La derivada $f'(x)$.
  - ◇ Las discontinuidades de f'.
  - ◇ Las raíces de f'.
  - ◇ Los intervalos de monotonía de f.
  - ◇ Máximos y mínimos relativos.
- Etapa 5: Hallar:
  - ◇ La segunda derivada $f''(x)$.
  - ◇ Las discontinuidades de f''.
  - ◇ Las raíces de f''.
  - ◇ Los intervalos de concavidad y convexidad de f.
  - ◇ Puntos de inflexión. □

Observación 14.11 Aunque es conveniente seguir el esquema anterior, en algunas ocasiones no es necesario (ni posible) desarrollar todas las etapas. $\square$

Ejemplo 14.10 Vamos a hacer la representación gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-3}.$$

- Etapa 1: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.
- Etapa 2: La función f no es par, ni impar, ni periódica.
- Etapa 3:
  - $\diamond$ $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{3\})$.
  - $\diamond$ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$.
  - $\diamond$ $x = 3$ asíntota vertical.
  - $\diamond$ $f(0) = \frac{4}{3}$. Por tanto, la gráfica de la función f pasa por el punto $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.
  - $\diamond$ $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2$ y $x = 2$. Luego la gráfica de la función f pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.
  - $\diamond$ Tabla de signos de la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-3} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-3}$:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

  - $\diamond$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
  - $\diamond$ No hay asíntotas horizontales.
  - $\diamond$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2-4}{x-3} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x-4}{x-3} = 3.$
  - $\diamond$ $y = x + 3$ asíntota oblicua.
- Etapa 4:
  - $\diamond$ $f'(x) = \dfrac{2x(x-3) - (x^2-4)}{(x-3)^2} = \dfrac{2x^2 - 6x - x^2 + 4}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{(x-3)^2}.$

◇ $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ y $f' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{3\})$.

◇ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{5}$ y $x = 3 + \sqrt{5}$.

◇ Tabla de signos de la función $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{(x-3)^2} = \dfrac{(x - 3 + \sqrt{5})(x - 3 - \sqrt{5})}{(x-3)^2}$:

	$(-\infty, 3-\sqrt{5})$	$(3-\sqrt{5}, 3)$	$(3, 3+\sqrt{5})$	$(3+\sqrt{5}, +\infty)$
$x - 3 + \sqrt{5}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 3 - \sqrt{5}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	decrece	crece

◇ $x_1 = 3 - \sqrt{5}$ máximo relativo de f. Teniendo en cuenta que

$$f(3-\sqrt{5}) = \frac{(3-\sqrt{5})^2 - 4}{3 - \sqrt{5} - 3} = -\frac{9 - 6\sqrt{5} + 5 - 4}{\sqrt{5}} = 6 - 2\sqrt{5},$$

el punto correspondiente en la gráfica es $(3 - \sqrt{5}, 6 - 2\sqrt{5})$.

◇ $x_2 = 3 + \sqrt{5}$ mínimo relativo de f. Como

$$f(3+\sqrt{5}) = \frac{(3+\sqrt{5})^2 - 4}{3 + \sqrt{5} - 3} = \frac{9 + 6\sqrt{5} + 5 - 4}{\sqrt{5}} = 6 + 2\sqrt{5},$$

el punto correspondiente en la gráfica es $(3 + \sqrt{5}, 6 + 2\sqrt{5})$.

- Etapa 5:

◇ $f''(x) = \dfrac{(2x-6)(x-3)^2 - (x^2 - 6x + 4)2(x-3)}{(x-3)^4}$

$$= 2\frac{(x-3)^2 - (x^2 - 6x + 4)}{(x-3)^3} = 2\frac{x^2 - 6x + 9 - x^2 + 6x - 4}{(x-3)^3} = \frac{10}{(x-3)^3}.$$

◇ $\text{Dom}(f'') = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ y $f'' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\{3\})$.

◇ Tabla de signos de la función $f''(x) = \dfrac{10}{(x-3)^3}$:

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
$(x-3)^3$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava	convexa

En la Figura 14.4 se muestra la gráfica de la función f. □

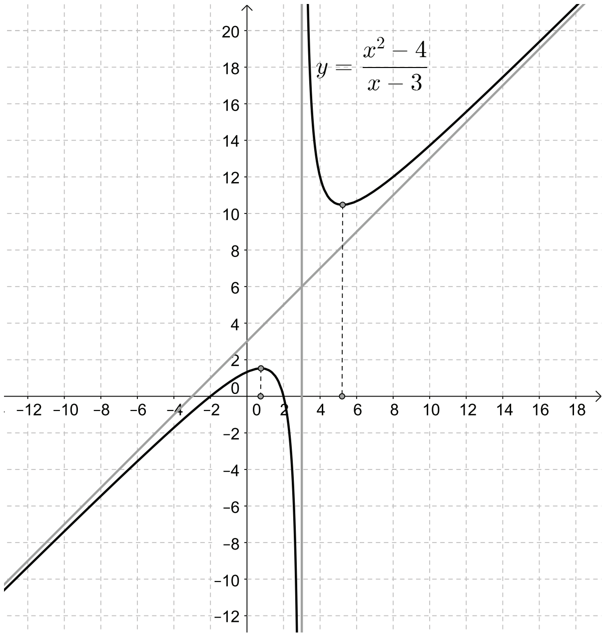


Figura 14.4: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-3}$.

14.6. Problemas de máximos y mínimos

Ejemplo 14.11 Para determinar, de entre todos los rectángulos de perímetro 12 cm, el de mayor área, consideramos el rectángulo de la Figura 14.5.

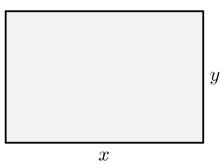


Figura 14.5: Rectángulo de lados x e y.

Como el perímetro de dicho rectángulo debe ser 12 cm, se verifica que

$$2x + 2y = 12 \;\Rightarrow\; x + y = 6 \;\Rightarrow\; y = 6 - x.$$

De esta forma, debemos hallar el máximo de la función área

$$A(x) = xy = x(6-x) = 6x - x^2,\ 0 \leq x \leq 6.$$

La restricción $0 \leq x \leq 6$ se debe a que el valor de x debe ser positivo (por representar la longitud de un lado del rectángulo) e inferior a 6 (pues $2x < 12$). Como se vio en la Observación 13.19, el máximo se alcanzará en alguno de los extremos del intervalo ($x = 0$, $x = 6$) o en algún punto crítico de la función $A(x)$. Calculemos los puntos críticos: como

$$A'(x) = 6 - 2x,\ 0 < x < 6,$$

el único punto crítico es $x_0 = 3$. Entonces, como $A(0) = A(6) = 0$ y $A(3) = 9$, se tiene que el máximo absoluto se alcanza para $x = 3$. Otra forma de verlo es la siguiente: puesto que $A''(3) = -2 < 0$, se tiene que $x_0 = 3$ es un máximo relativo de la función f que, al compararlo con los extremos $x = 0$ y $x = 6$, se obtiene que es un máximo absoluto (véase la Figura 14.6).

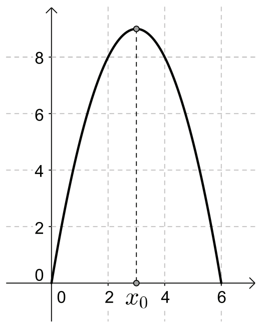


Figura 14.6: Gráfica de la función área $A(x) = x(6 - x)$.

Por tanto, el rectángulo de perímetro 12 cm con mayor área es el cuadrado de lado 3 cm y el área máxima es 9 cm^2. $\square$

Observación 14.12 El Ejemplo 14.11 puede generalizarse a rectángulos de perímetro p: de entre todos ellos, el que tiene mayor área es el cuadrado de lado $\ell = \frac{p}{4}$ y el área máxima es $A = \frac{p^2}{16}$. $\square$

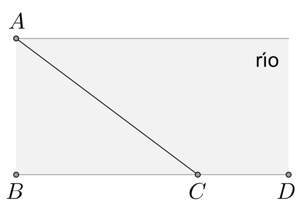


Figura 14.7: Puntos A, B, C, D del Ejemplo 14.12.

Ejemplo 14.12 Un nadador quiere ir del punto A al punto D atravesando un río, como se indica en la Figura 14.7, donde $d(A, B) = 100$ m y $d(B, D) = 200$ m. Si nada a una velocidad de 1 m/s y camina a una velocidad de 2 m/s, ¿cómo debe elegirse el punto C para llegar a D en el menor tiempo posible?

Claramente, el tiempo t que tarda en ir de A a D es la suma de los tiempos t_{AC} y t_{CD} que tarda en ir, respectivamente, de A a C y de C a D. Es decir,

$$\begin{aligned} t = t_{AC} + t_{CD} &= \frac{d(A,C)}{v_{AC}} + \frac{d(C,D)}{v_{CD}} \\ &= \frac{d(A,C)}{1} + \frac{d(C,D)}{2} = d(A,C) + \frac{d(C,D)}{2}. \end{aligned}$$

Podemos expresar el tiempo anterior en función de la variable $x = d(C,D)$. Concretamente, el tiempo que el nadador emplea para ir de A a D viene dado por

$$\tau(x) = \sqrt{100^2 + (200-x)^2} + \frac{x}{2},\ 0 \le x \le 200.$$

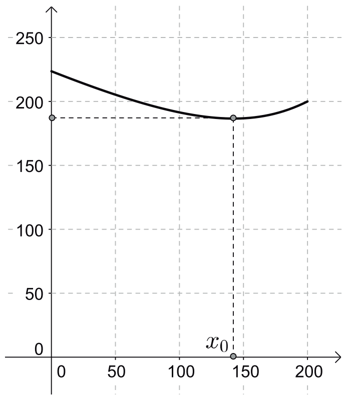


Figura 14.8: Gráfica de la función $\tau(x) = \sqrt{100^2 + (200-x)^2} + \dfrac{x}{2}$.

Se trata, pues, de minimizar la función $\tau(x)$. Puesto que

$$\tau'(x) = \frac{-2(200-x)}{2\sqrt{100^2 + (200-x)^2}} + \frac{1}{2} = -\frac{200-x}{\sqrt{100^2 + (200-x)^2}} + \frac{1}{2},\ 0 < x < 200$$

se tiene que los puntos $x \in (0,200)$ en los que $\tau'(x) = 0$ verifican que

$$\begin{aligned} &2(200-x) = \sqrt{100^2 + (200-x)^2} \Rightarrow 4(200-x)^2 = 100^2 + (200-x)^2 \\ &\Rightarrow\ 3(200-x)^2 = 100^2\ \Rightarrow\ (200-x)^2 = \frac{100^2}{3}\ \Rightarrow\ 200 - x = \frac{100\sqrt{3}}{3} \\ &\Rightarrow\ x = 200 - \frac{100\sqrt{3}}{3} = 100\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{100(6-\sqrt{3})}{3} \simeq 142'2650. \end{aligned}$$

Al evaluar la función τ en los extremos del intervalo $[0, 200]$ y en el único punto crítico $x_0 = \frac{100(6-\sqrt{3})}{3}$, se obtiene que

$$\begin{cases} \tau(0) = \sqrt{100^2 + 200^2} = 100\sqrt{5} \simeq 223'6068 \\ \tau(200) = \sqrt{100^2} + 100 = 200 \\ \tau(x_0) = \sqrt{100^2 + \frac{100^2}{3}} + \frac{100(6-\sqrt{3})}{6} = \frac{300\sqrt{3}}{6} + 100 = 50\sqrt{3} + 100 \simeq 186'6025, \end{cases}$$

por lo que, de acuerdo con lo visto en la Observación 13.19, se tiene que $x_0 = \frac{100(6-\sqrt{3})}{3}$ es el mínimo absoluto de la función τ en el intervalo $[0, 200]$ y, por tanto, el tiempo mínimo empleado para ir de A a D es

$$\tau(x_0) = 50\sqrt{3} + 100 \simeq 186'6025 \text{ s}$$

(véase la Figura 14.8). Aunque no es necesario para la resolución del problema planteado en este ejemplo, se puede utilizar el criterio de la segunda derivada para comprobar que x_0 es un mínimo relativo. En efecto, puesto que

$$\tau''(x) = \frac{100^2}{\sqrt{(100^2 + (200 - x)^2)^3}}$$

(compruébese), se verifica que $\tau''(x_0) = \frac{3\sqrt{3}}{800} > 0$ y, por tanto, $x_0 = \frac{100(6-\sqrt{3})}{3}$ es mínimo relativo de la función τ en el intervalo $[0, 200]$. $\square$

14.7. Problemas

14.1. Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(8x)}{\operatorname{sen}(4x)}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{-4x}}{\ln(1 + 2x)}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\ln(\cos(x^2) + x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \cos^2 x}{\operatorname{sen}(x)}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^3}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen}(x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(7x) + 3x}{\operatorname{sen}(2x)}$ i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}$ j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{7x}}{2x^3}$.

14.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, determinar el valor que debe tomar en $x = 0$ la función

$$f(x) = \frac{(1 + x)^n - 1}{x}$$

para que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

14.3. Calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan(x)}{x^3}.$$

14.4. Es evidente que se verifica que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{1}{x^2} = 1 \times \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

En cambio, al aplicar la *regla de L'Hôpital*, resulta

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{3x^2} = - \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

Explicar la aparente contradicción.

14.5. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0^+} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$ b) $\lim_{x \to 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{1 - \cos(x)}}$.

14.6. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y los mínimos, de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ b) $f(x) = x^2 e^x$ c) $f(x) = (x - 1)^4 (x + 1)^2 (x - 3)$.

14.7. Calcular los coeficientes α, β y γ de la función

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sabiendo que la gráfica de la función f tiene en $(1, 1)$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo.

14.8. Demostrar que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

14.9. Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión, de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ b) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1$

c) $f(x) = (x^2 - 4)^2$ d) $f(x) = (x - 1) e^{\frac{1}{x}}$.

14.10. Determinar para qué valores del parámetro λ la función polinómica

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + \lambda x^2 + x + 1$$

es convexa en toda la recta real.

14.11. Determinar los valores de α, β y γ de la función racional

$$f(x) = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + 5}{x^2 - \gamma}$$

sabiendo que la gráfica de la función f tiene por asíntotas las rectas $x = 2$ e $y = 3x + 2$.

14.12. Representar gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x^3 - 3x}$ b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ c) $f(x) = e^{-x^2}$ d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{5x^2 - 26x + 5}$ g) $f(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 - 9}$

h) $f(x) = \dfrac{(x^3 - 8)x}{3x^2 + x + 5}$ i) $f(x) = 2 + e^{-x}\ln(x)$ j) $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$.

14.13. Con una cuerda de 30 cm de longitud se desea formar un triángulo isósceles de la mayor área posible. Determinar los lados de dicho triángulo y el valor del área máxima.

14.14. Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 8 cm de radio.

14.15. Hallar las dimensiones de un campo rectangular de 36 m^2 de área, de forma que su perímetro sea mínimo.

14.16. De una cartulina cuadrangular de lado 18 cm se recortan cuatro cuadrados iguales (uno en cada esquina) y, con la superficie resultante, se construye una caja. ¿Cómo deben hacerse los recortes para que el volumen de la caja sea máximo?

14.8. Soluciones

14.1. a) 2 b) 3 c) 0 d) 0 e) $-\dfrac{1}{3}$ f) 1 g) 2 h) 5 i) $+\infty$ j) $+\infty$.

14.2. $f(0) = n$.

14.3. $-\dfrac{1}{3}$.

14.4. El error radica en aplicar una segunda vez la *regla de L'Hôpital* al límite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{3x^2}$, que ya no es indeterminado.

14.5. a) $+\infty$ b) $\ell = e^2 \simeq 7'3891$.

14.6. a) $\begin{cases} f \text{ crece en } \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty) \\ f \text{ decrece en } \left(\frac{1}{3}, 1\right). \end{cases}$

$x_1 = \frac{1}{3}$ máximo relativo y $x_2 = 1$ mínimo relativo.

b) $\begin{cases} f \text{ crece en } (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \\ f \text{ decrece en } (-2, 0). \end{cases}$

$x_1 = 0$ máximo relativo y $x_2 = -2$ mínimo relativo.

c) $\begin{cases} f \text{ crece en } (-\infty, -1) \cup \left(\frac{8-\sqrt{113}}{7}, 1\right) \cup \left(\frac{8+\sqrt{113}}{7}, +\infty\right) \\ f \text{ decrece en } \left(-\infty, \frac{8-\sqrt{113}}{7}\right) \cup \left(1, \frac{8+\sqrt{113}}{7}\right). \end{cases}$

$x_1 = -1,\ x_2 = 1$ máximos relativos y $x_3 = \frac{8-\sqrt{113}}{7},\ x_4 = \frac{8+\sqrt{113}}{7}$ mínimos relativos.

14.7. $\alpha = -3$, $\beta = 3$ y $\gamma = 0$.

14.8. Considerar la función $f(x) = e^x - 1 - x$ y demostrar (estudiando el signo de la derivada) que $f(x) \geq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

14.9. a) f convexa en todo $\mathbb{R}$. No tiene puntos de inflexión.

b) $\begin{cases} f \text{ convexa en } \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, +\infty\right) \\ f \text{ cóncava en } \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right). \end{cases}$ $\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ puntos de inflexión.

c) $\begin{cases} f \text{ convexa en } \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \\ f \text{ cóncava en } \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right). \end{cases}$ $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ puntos de inflexión.

d) $\begin{cases} f \text{ convexa en } (-\infty, -1) \\ f \text{ cóncava en } (-1, 0) \cup (0, +\infty). \end{cases}$ $x_1 = -1$ punto de inflexión.

14.10. $\lambda \geq \dfrac{3}{2}$.

14.11. $\alpha = 3$, $\beta = 2$ y $\gamma = 4$.

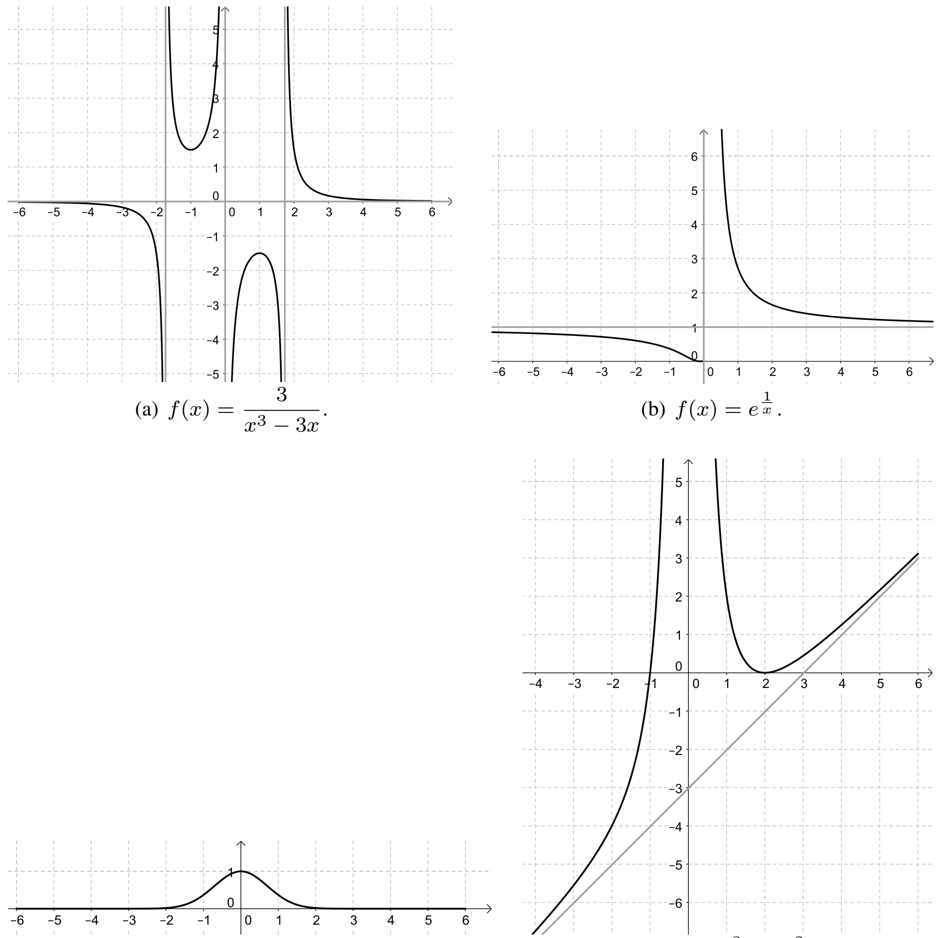
14.12. Ver las gráficas de las Figuras 14.9, 14.10 y 14.11. En cada caso se deben detallar los datos concretos de cada gráfica. En particular los puntos donde se alcanzan los máximos y mínimos relativos, los intervalos donde la función es creciente, decreciente, cóncava, convexa, los puntos de inflexión, las asíntotas ...

14.13. Triángulo equilátero de lado 10 cm. Área máxima $25\sqrt{3} \simeq 43'3012$ cm^2.

14.14. Cuadrado de lado $8\sqrt{2} \simeq 11'3137$ cm. Área máxima 128 cm^2.

14.15. Campo cuadrado de 6 m de lado.

14.16. En cada esquina hay que recortar un cuadrado de lado 3 cm. Volumen máximo 432 cm^3.



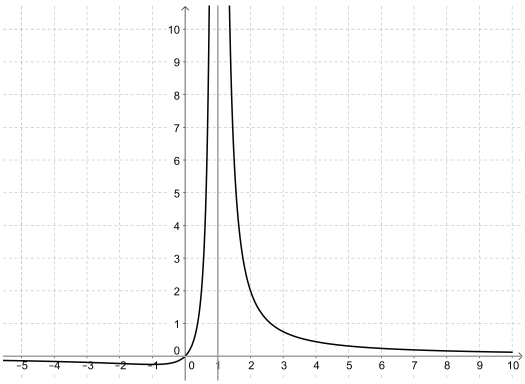
(a) $f(x) = \dfrac{3}{x^3 - 3x}$.

(b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

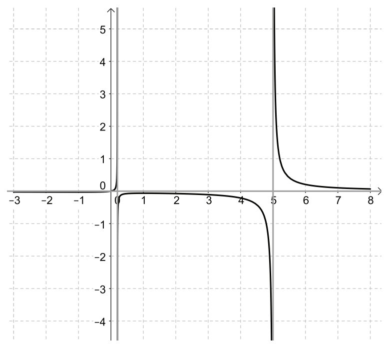
(c) $f(x) = e^{-x^2}$.

(d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$.

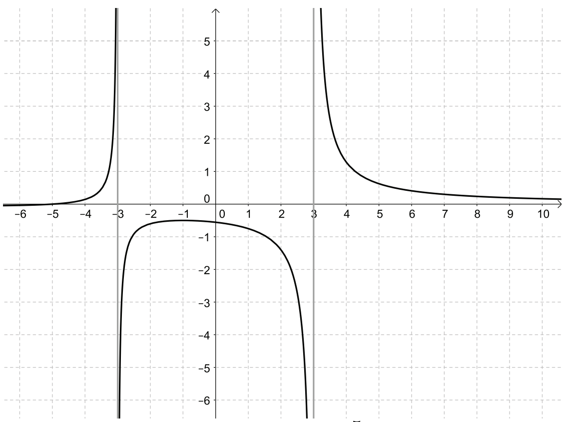
Figura 14.9: Gráficas de las funciones $f(x)$ del Problema 14.12.



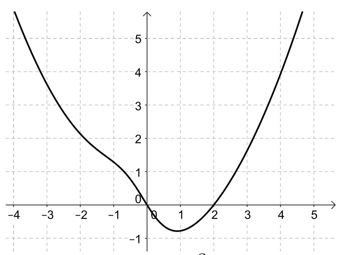
(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$.



(b) $f(x) = \dfrac{x}{5x^2 - 26x + 5}$.

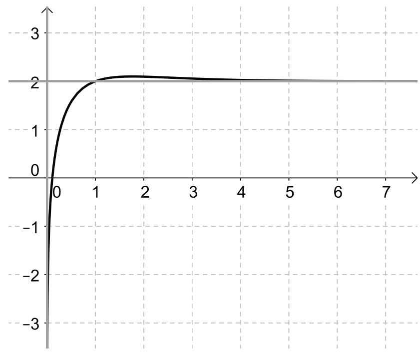


(c) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2 - 9}$.

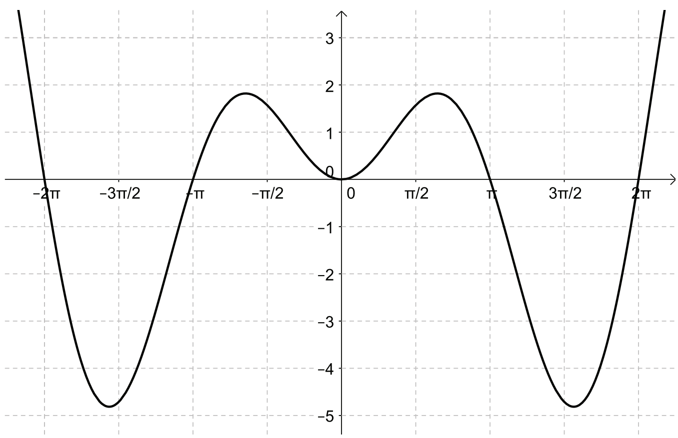


(d) $f(x) = \dfrac{(x^3 - 8)x}{3x^2 + x + 5}$.

Figura 14.10: Gráficas de las funciones $f(x)$ del Problema 14.12.



(a) $f(x) = 2 + e^{-x}\ln(x)$.



(b) $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$.

Figura 14.11: Gráficas de las funciones $f(x)$ del Problema 14.12.

15 Cálculo integral. Integrales indefinidas

15.1. Introducción

En este capítulo se introduce el concepto de *primitiva* e *integral indefinida* de una función, basándose en las derivadas estudiadas en el Capítulo 13.

Tras introducir las definiciones de estos conceptos, se presentan sus principales propiedades y los *métodos elementales de integración*, junto con oportunas tablas para su cálculo práctico que es conveniente memorizar.

A continuación se muestran las técnicas necesarias para calcular las integrales indefinidas de funciones racionales. Se trata de integrales que suelen ser no inmediatas, pues necesitan ciertas manipulaciones algebraicas para su obtención. Se estudiará con cierto detalle el caso de funciones racionales con denominadores de grado menor o igual a dos y se indicará la forma de obtener las integrales indefinidas de funciones racionales en el caso general.

Este capítulo es la base teórica en la que se sustentará el Capítulo 16, en el que se mostrarán las aplicaciones prácticas de las integrales mediante *integrales definidas*.

15.2. Primitivas e integrales indefinidas. Métodos elementales de integración

15.2.1. Primitivas e integrales indefinidas

El cálculo de la *primitiva* de una función es la operación inversa de hallar la derivada de la misma. A pesar de que cualquier función continua admite primitivas, no existen fórmulas ni métodos de carácter general que sirvan para determinar primitivas de funciones.

En toda esta sección D denota un intervalo abierto o una unión de intervalos abiertos.

Definición 15.1 Sea $f : D \to \mathbb{R}$. Una *primitiva* de la función f en D es una función derivable $F : D \to \mathbb{R}$ verificando que

$$F'(x) = f(x),\ \forall\, x \in D. \quad \square$$

Notación 15.1 En general denotaremos a la primitiva de una función con la misma letra de la función pero en mayúscula, es decir, $F, G, H \dots$ denotarán primitivas de las funciones $f, g, h \dots$ respectivamente. $\square$

Ejemplo 15.1

a) Una primitiva de la función
$$f(x) = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$
es la función
$$F(x) = \frac{x^2}{2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

b) Una primitiva de la función
$$g(x) = \frac{1}{x},\ \forall\, x > 0$$
es la función
$$G(x) = \ln(x),\ \forall\, x > 0.$$

c) Una primitiva de la función
$$h(x) = \frac{1}{x},\ \forall\, x < 0$$
es la función
$$H(x) = \ln(-x),\ \forall\, x < 0.$$

d) De los apartados b) y c) se deduce que una primitiva de la función
$$r(x) = \frac{1}{x},\ \forall\, x \neq 0$$
es la función
$$R(x) = \ln(|x|),\ \forall\, x \neq 0. \quad \square$$

En general, como se muestra en el siguiente resultado, dos primitivas de una función sólo difieren, en cada intervalo, en una constante:

Proposición 15.1 *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ y F una primitiva de f.*

$\widetilde{F}$ *es una primitiva de f en (a, b)* $\Leftrightarrow$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$ *tal que* $\widetilde{F}(x) = F(x) + c,\ \forall\, x \in (a, b).$

DEMOSTRACIÓN.

$\boxed{\Rightarrow)}$ Como F y $\widetilde{F}$ son primitivas de f en (a, b), para todo $x \in (a, b)$ se verifica que

$$(\widetilde{F}(x) - F(x))' = \widetilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Por tanto, por el Corolario 13.3 se tiene que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\widetilde{F}(x) - F(x) = c, \ \forall\, x \in (a, b).$$

$\boxed{\Leftarrow)}$ Para todo $x \in (a, b)$ se verifica que

$$\widetilde{F}'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x),$$

por ser F una primitiva de f en (a, b). Luego $\widetilde{F}$ es una primitiva de f en (a, b). □

Corolario 15.1 *Si* $D = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ *siendo* $\{I_j\}_{j=1}^{n}$ *un conjunto de intervalos abiertos disjuntos dos a dos,* $f : D \to \mathbb{R}$ *y* $F : D \to \mathbb{R}$ *es una primitiva de* f*, se verifica que:*

$$\widetilde{F} \text{ es una primitiva de } f \text{ en } D \Leftrightarrow \exists\, \{c_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathbb{R} \text{ tal que } \widetilde{F}(x) = F(x) + c_j, \\ \forall\, x \in I_j, \ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar la Proposición 15.1 a las funciones $f_j : I_j \to \mathbb{R}$ definidas como

$$f_j(x) = f(x), \ \forall\, x \in I_j. \quad \square$$

Ejemplo 15.2 En el Ejemplo 15.1 las funciones

$$\widetilde{F}(x) = \frac{x^2}{2} + 4, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \widetilde{R}(x) = \begin{cases} \ln(-x) + 2, & x < 0 \\ \ln(x) - 5, & x > 0 \end{cases}$$

son también primitivas de las funciones f y r, respectivamente. □

Definición 15.2 El conjunto de primitivas de una función f se denomina *integral indefinida* de la función f y se representa, indistintamente, como

$$\int f(x)\, dx, \ \int f(y)\, dy, \ \int f(t)\, dt, \ \int f(u)\, du, \ \int f(v)\, dv \ldots \quad \square$$

Observación 15.1 A la vista de la Proposición 15.1, si F es una primitiva de f en un intervalo (a,b), entonces la integral indefinida de f viene dada por

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ \forall\, x \in (a,b)}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. En el caso de que $F : D \to \mathbb{R}$ sea una primitiva de $f : D \to \mathbb{R}$, con $D = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ siendo I_j intervalos abiertos disjuntos dos, entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c_j,\ \forall\, x \in I_j,\ \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\},$$

con $c_j \in \mathbb{R}$ arbitrario. En lo sucesivo nos limitaremos, por simplicidad de exposición, a dar los resultados para el caso en el que el dominio es un intervalo abierto (a,b) con $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, dejando para el lector la extensión al caso de un dominio D que sea unión de intervalos abiertos (en los casos en que proceda). $\square$

Ejemplo 15.3 Las integrales indefinidas de las funciones f y r del Ejemplo 15.1 son

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(-x) + c_1, & x < 0 \\ \ln(x) + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

con $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarios. $\square$

Proposición 15.2 *Si F y G son, respectivamente, primitivas de las funciones f y g en un intervalo (a,b), con $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lambda F + \mu G$ es una primitiva de la función $\lambda f + \mu g$ en (a,b). Es decir, se verifica que*

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx \ \textit{ en } \ (a,b). \tag{15.1}$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado es inmediato, pues para todo $x \in (a,b)$ se tiene que

$$(\lambda F(x) + \mu G(x))' = \lambda F'(x) + \mu G'(x) = \lambda f(x) + \mu g(x). \quad \square$$

Observación 15.2 La propiedad 15.1 indica que la integral es un operador lineal. $\square$

Ejemplo 15.4

$$\int \left(4x + \frac{5}{x}\right) dx = 4\int x\,dx + 5\int \frac{dx}{x} = 2x^2 + 5\ln(x) + c \ \text{ en } \ (0,+\infty)$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. $\square$

Observación 15.3 Como regla general, para comprobar que una integral indefinida ha sido calculada correctamente, basta derivarla y verificar que la derivada obtenida coincide con el integrando. Así, para el Ejemplo 15.4 basta comprobar que

$$(2x^2 + 5\ln(x) + c)' = 4x + \frac{5}{x} \ \text{ en } \ (0,+\infty). \quad \square$$

15.2.2. Métodos elementales de integración

• Integrales inmediatas

Las primitivas que se obtienen aplicando en sentido inverso las fórmulas básicas de derivación se denominan *integrales inmediatas*.

Ejemplo 15.5 Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}$, $\forall\, x > 0$. Puesto que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \forall\, x > 0,$$

entonces

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + c,\ \forall\, x > 0$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. □

Presentamos, a continuación, las integrales que aparecen con mayor frecuencia en las aplicaciones. En la Tabla 15.1 se muestran las integrales inmediatas que deducen a partir de las derivadas de la Tabla 13.1 con $u(x) = x$ y en la Tabla 15.2 se muestran las integrales (casi inmediatas) que se deducen a partir de las derivadas de la Tabla 13.1 con $u(x)$ general.

$f(x)$	$\int f(x)\, dx$
$\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$
$x^\alpha\ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + c$
e^x	$e^x + c$
$a^x\ (a > 0, a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)} + c$

$f(x)$	$\int f(x)\, dx$
$\cos(x)$	$\operatorname{sen}(x) + c$
$\operatorname{sen}(x)$	$-\cos(x) + c$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen}(x) + c$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + c$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$

Tabla 15.1: Integrales indefinidas inmediatas ($c \in \mathbb{R}$ denota una constante arbitraria).

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$
$(u(x))^{\alpha} u'(x)\ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)} + c$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert) + c$
$e^{u(x)} u'(x)$	$e^{u(x)} + c$
$a^{u(x)} u'(x)\ (a > 0, a \neq 1)$	$\dfrac{a^{u(x)}}{\ln(a)} + c$
$\cos(u(x)) u'(x)$	$\operatorname{sen}(u(x)) + c$
$\operatorname{sen}(u(x)) u'(x)$	$-\cos(u(x)) + c$
$\dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$	$\tan(u(x)) + c$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\operatorname{arcsen}(u(x)) + c$
$-\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\arccos(u(x)) + c$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$

Tabla 15.2: Integrales indefinidas (casi) inmediatas ($c \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria).

Nótese que dos de las integrales indefinidas de la Tabla 15.1 pueden unificarse como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(x) + c = -\arccos(x) + k,$$

siendo $c, k \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias. El dominio de todas las funciones f de la Tabla 15.1 y sus primitivas coincide con el de cada función f. Más concretamente, el dominio de x^α y sus primitivas depende del valor de α (no detallamos todos los casos posibles); el dominio de $\frac{1}{x}$ y sus primitivas es $\mathbb{R}\backslash\{0\}$; el dominio de $\frac{1}{\cos^2(x)}$ y sus primitivas es $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$; y el dominio de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y sus primitivas es $(-1, 1)$.

• Integración por cambio de variable (I)

Observación 15.4 Algunas integrales que no son inmediatas pueden reducirse a integrales más sencillas mediante un cambio de variable del tipo

$$t = r(x),$$

siendo $r(x)$ una función derivable, de modo que

$$dt = r'(x)\, dx.$$

Para ello se necesita que la función f pueda escribrirse como

$$f(x) = g(r(x))r'(x)$$

para alguna función g, con lo que

$$\int f(x)\, dx = \int g(t)\, dt.$$

Veamos algunos ejemplos:

a) Para hallar la integral indefinida

$$\int (x+2)^2\, dx, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

podemos considerar como nueva variable

$$t = x + 2, \ t \in \mathbb{R}$$

y, utilizando las reglas de derivación, se tiene que $dt = dx$. De este modo,

$$\int (x+2)^2\, dx = \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{(x+2)^3}{3} + c, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. Nótese que esta integral es una de las integrales (casi inmediatas) mostradas en la Tabla 15.2. □

b) Si queremos hallar
$$\int \cos(2x-7)\,dx,\ \forall\, x\in\mathbb{R},$$
podemos hacer el cambio de variable
$$t=2x-7,\ t\in\mathbb{R}.$$
Como ahora $dt=2dx$, se tiene que
$$\int \cos(2x-7)\,dx=\frac{1}{2}\int\cos(t)\,dt=\frac{\operatorname{sen}(t)}{2}+c=\frac{\operatorname{sen}(2x-7)}{2}+c,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$
con $c\in\mathbb{R}$ arbitrario. Nótese que esta integral es también una de las integrales (casi inmediatas) de la Tabla 15.2.

c) Para hallar la integral
$$\int e^{x^2+x+1}(2x+1)\,dx,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$
podemos hacer el cambio de variable
$$t=x^2+x+1\ \Rightarrow\ dt=(2x+1)\,dx$$
(nótese que $t\in\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$, aunque el cálculo de este intervalo no es necesario para encontrar la integral indefinida buscada). De esta forma,
$$\int e^{x^2+x+1}(2x+1)\,dx=\int e^t\,dt=e^t+c=e^{x^2+x+1}+c,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$
con $c\in\mathbb{R}$ arbitrario. Nuevamente, esta integral es una de las integrales (casi inmediatas) de la Tabla 15.2.

d) Para calcular la integral
$$\int\frac{\cos(x)}{2+\operatorname{sen}(x)}\,dx,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$
podemos hacer el cambio de variable
$$t=2+\operatorname{sen}(x),\ t\in[-1,1]\ \Rightarrow\ dt=\cos(x)\,dx,$$
a partir del cual se tiene que
$$\int\frac{\cos(x)}{2+\operatorname{sen}(x)}\,dx=\int\frac{dt}{t}=\ln(|t|)+c=\ln(2+\operatorname{sen}(x))+c,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$
con $c\in\mathbb{R}$ arbitrario. De nuevo, esta integral es una de las integrales (casi inmediatas) de la Tabla 15.2. □

Ejemplo 15.6 Vamos a hallar las siguientes integrales indefinidas ($c \in \mathbb{R}$ denota una constante arbitraria):

a) $\displaystyle\int \left(x^3 + 2x^2 - 3\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - 3x + c,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

b) $\displaystyle\int (x-1)^3\, dx = \frac{(x-1)^4}{4} + c,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} + 5 + \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = -\frac{1}{x} + 5x + \ln(x) - 2\sqrt{x} + c,\ \forall\, x > 0.$

d) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x-5} + \frac{2}{\cos^2(2x)} + \cos(2x+1)\right) dx = \ln(x-5) + \tan(2x) + \frac{\operatorname{sen}(2x+1)}{2} + c,$
$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{5, \left\{\tfrac{\pi}{4} + k\tfrac{\pi}{2}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}\right\}.$

e) $\displaystyle\int \left(5e^{2x} + \operatorname{sen}(3x+4)\right) dx = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{\cos(3x+4)}{3} + c,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$ $\square$

• Integración por descomposición

Consiste en aplicar la propiedad 15.1 de la siguiente forma: para hallar la integral indefinida de una función f, se expresa $f(x)$ como una suma

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x),$$

de forma que cada sumando tenga una primitiva que se sepa calcular. De esta forma, la integral indefinida de f se obtiene como la suma

$$\int f(x)\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx + \cdots + \int f_n(x)\, dx.$$

Ejemplo 15.7 Para hallar integrales del tipo

$$\int \operatorname{sen}(\alpha x + \beta)\cos(\gamma x + \delta)\, dx,\ \int \operatorname{sen}(\alpha x + \beta)\operatorname{sen}(\gamma x + \delta)\, dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

y

$$\int \cos(\alpha x + \beta)\cos(\gamma x + \delta)\, dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

se utilizan, respectivamente, las identidades trigonométricas

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(r)\cos(s) = \dfrac{\operatorname{sen}(r+s) + \operatorname{sen}(r-s)}{2} \\[2ex] \cos(r)\cos(s) = \dfrac{\cos(r+s) + \cos(r-s)}{2} \\[2ex] \operatorname{sen}(r)\operatorname{sen}(s) = \dfrac{\cos(r-s) - \cos(r+s)}{2} \end{cases}$$

obtenidas en la Proposición 7.3. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x+1)\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen}(5x+1)+\operatorname{sen}(x-1)}{2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\int \operatorname{sen}(5x+1)\,dx + \int \operatorname{sen}(x-1)\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(5x+1)}{5} - \cos(x-1)\right) + c\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(5x+1)}{5} + \cos(x-1)\right) + c,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. $\square$

Ejemplo 15.8 Para hallar integrales del tipo

$$\int \operatorname{sen}^2(\alpha x+\beta)\,dx,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\ \text{ y }\ \int \cos^2(\alpha x+\beta)\,dx,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

se utilizan, respectivamente, las relaciones trigonométricas

$$\begin{cases}\operatorname{sen}^2(r) = \dfrac{1-\cos(2r)}{2}\\[2mm] \cos^2(r) = \dfrac{1+\cos(2r)}{2}\end{cases}$$

obtenidas en la Observación 7.17. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2(x+3)\,dx &= \int \frac{1-\cos(2x+6)}{2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos(2x+6)x\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\operatorname{sen}(2x+6)}{2}\right) + c,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. $\square$

• Integración por partes

Dados $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, a partir de la fórmula de derivación de un producto

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ \text{ en }\ (a,b),$$

la propiedad (15.1) permite escribir

$$f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx\ \text{ en }\ (a,b),$$

de donde se obtiene que

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \text{ en } (a,b).} \tag{15.2}$$

Observación 15.5 En algunas ocasiones se emplea la notación

$$u = f(x),\ v = g(x),\ du = f'(x)\,dx \text{ y } dv = g'(x)\,dx,$$

por lo que la expresión (15.2) toma la forma abreviada

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.} \tag{15.3}$$

Ejemplo 15.9 Para calcular

$$\int xe^x\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

aplicamos la fórmula (15.2) a las funciones $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x$. Puesto que $f'(x) = 1$ y $g(x) = e^x$, se obtiene que

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{15.4}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. Utilizando la notación de la Observación 15.5, se tiene que $u = x$ y $dv = e^x\,dx$, por lo que $du = dx$ y $v(x) = e^x$. Aplicando (15.3), se vuelve a obtener, obviamente, el mismo resultado que en (15.4). $\square$

• Integración por cambio de variable (II)

En algunas ocasiones, para calcular la integral indefinida de una función

$$f(x),\ x \in (a,b)$$

con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, resulta conveniente considerar la variable x función de otra variable, por ejemplo,

$$x = g(t),\ t \in I,$$

siendo

$$\boxed{I = \big(\text{mín}\{g^{-1}(a), g^{-1}(b)\}, \text{máx}\{g^{-1}(a), g^{-1}(b)\}\big)}$$

(supuesto que g es una función inversible y derivable e inversible), y tener en cuenta la regla de la cadena. Como buscamos una función $F(x)$ verificando que

$$F'(x) = f(x),\ \forall\, x \in (a,b),$$

al hallar la derivada de $F(g(t))$ respecto de la variable t se tiene que

$$(F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t),\ t \in I.$$

Además, se tiene que $dx = g'(t)dt$. De esta forma, la expresión

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ \forall\, x \in (a,b)}$$

es equivalente a

$$\boxed{\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) + c,\ \forall\, t \in I} \tag{15.5}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. En el método de integración por cambio de variable conviene elegir adecuadamente la función $g(t)$ para conseguir que el cálculo sea más sencillo. Los pasos a seguir son:

1) Hacer el cambio de variable $x = g(t)$.

2) Sustituir dx por $g'(t)\,dt$.

3) Hallar la integral $\displaystyle\int f(g(t))g'(t)\,dt,\ t \in I$.

4) Deshacer el cambio de variable. □

Ejemplo 15.10 Para calcular la integral indefinida

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \forall\, x \in (-1,1)$$

podemos hacer el cambio de variable

$$x = \operatorname{sen}(t),\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ \Rightarrow\ dx = \cos(t)\,dt,$$

con lo que se tiene que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}}\cos(t)\,dt = \int \frac{\cos(t)}{\cos(t)}\,dt \\ &= \int dt = t + c = \operatorname{arcsen}(x) + c,\ \forall\, x \in (-1,1)\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. Nótese que esta integral es una de las integrales inmediatas mostradas en la Tabla 15.1. □

15.3. Integración de funciones racionales

En esta sección vamos a considerar integrales indefinidas del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,\ \forall\, x \in \mathrm{Dom}\left(\frac{P}{Q}\right),$$

donde P y Q son polinomios en la variable x. Estudiaremos con detalle el caso en el que el grado de Q es menor o igual que 2 (es decir, $\partial Q \leq 2$) y mostraremos más adelante (en la Observación 15.6) la metodología a aplicar en el caso general.

Si $\partial Q \leq 2$, distinguimos los siguientes casos:

a) Denominador de grado 1: $\boxed{\int \frac{P(x)}{\alpha x+\beta}\,dx}$ con $\alpha \neq 0$. Al dividir el polinomio $P(x)$ entre $\alpha x+\beta$ (véase la Observación 2.11), se obtiene que

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{\alpha x+\beta}\,dx &= \int \left(C(x)+\frac{\gamma}{\alpha x+\beta}\right)\,dx = \int C(x)\,dx + \gamma\int \frac{dx}{\alpha x+\beta}\\ &= \int C(x)\,dx + \frac{\gamma}{\alpha}\ln(|\alpha x+\beta|)+c\end{aligned}}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario y donde la integral $\int C(x)\,dx$ es inmediata, por ser $C(x)$ un polinomio.

Ejemplo 15.11 Puesto que $x^2+x+1=(x-3)(x+4)+13$, se tiene que

$$\int \frac{x^2+x+1}{x-3}\,dx = \int \left(x+4+\frac{13}{x-3}\right)\,dx = \frac{x^2}{2}+4x+13\ln(|x-3|)+c,\ \forall\, x \neq 3$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. □

b) Denominador de grado 2: $\boxed{\int \frac{P(x)}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\,dx}$ con $\alpha \neq 0$. Distinguimos dos casos:

i) $\boxed{\partial P < \partial Q}$ Se factoriza el denominador $Q(x)$ en términos de sus raíces ξ_1 y ξ_2, es decir,

$$Q(x) = \alpha(x-\xi_1)(x-\xi_2).$$

En función de si las raíces ξ_1 y ξ_2 son reales o complejas, se hace la siguiente *descomposición en fracciones simples*:

$$\boxed{\begin{cases} \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R},\ \xi_1 \neq \xi_2 & \Rightarrow \quad \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A}{x-\xi_1} + \dfrac{B}{x-\xi_2} \\[2ex] \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R},\ \xi_1 = \xi_2 = \xi & \Rightarrow \quad \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A}{x-\xi} + \dfrac{B}{(x-\xi)^2} \\[2ex] \xi_1 = a+ib, \xi_2 = a-ib,\ b \neq 0 & \Rightarrow \quad \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}. \end{cases}} \tag{15.6}$$

Con este procedimiento, las integrales que surgen a partir de (15.6) son fáciles de resolver, ya que

$$\int \frac{dx}{x-\xi} = \ln(|x-\xi|) + c, \int \frac{dx}{(x-\xi)^2} = -\frac{1}{x-\xi} + c$$

y, si $b \neq 0$, se verifica que

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{b^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1} = \frac{1}{b^2} \int \frac{b\,dt}{t^2+1} \\ &= \frac{1}{b} \arctan(t) + c = \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c, \end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio de variable $t = \frac{x-a}{b}$. De esta integral se deduce que para todo $A, B \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, se verifica que

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}\,dx &= \frac{A}{2} \int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2} dx + \int \frac{Aa+B}{(x-a)^2+b^2} dx \\ &= \frac{A}{2} \ln\left((x-a)^2+b^2\right) + \frac{Aa+B}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c. \end{aligned}$$

En todas las integrales anteriores $c \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. □

Ejemplo 15.12

1) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{3x+4}{(x-1)(x-2)}\,dx$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{1,2\}$ (las raíces del denominador son $\xi_1 = 1$ y $\xi_2 = 2$). Puesto que

$$\frac{3x+4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x + (-2A-B)}{(x-1)(x-2)},$$

debe cumplirse que

$$\begin{cases} A+B = 3 \\ -2A-B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -7 \\ B = 10. \end{cases}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+4}{x^2-3x+2}\,dx &= -7\int \frac{dx}{x-1} + 10\int \frac{dx}{x-2}\\ &= -7\ln(|x-1|) + 10\ln(|x-2|) + c,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{1,2\}\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario.

2) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{2x-1}{(x-1)^2}\,dx$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ ($\xi = 1$ es raíz doble del denominador). Puesto que

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{Ax+(B-A)}{(x-1)^2},$$

debe cumplirse que

$$\left\{\begin{aligned} A &= 2\\ B-A &= -1\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} A &= 2\\ B &= 1.\end{aligned}\right.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x^2-2x+1}\,dx &= 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}\\ &= 2\ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1} + c,\ \forall\, x \neq 1\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario.

3) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-2x+2}\,dx = \int \frac{x+1}{(x-1)^2+1}\,dx$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ (las raíces del denominador son $\xi_1 = 1+i$ y $\xi_2 = \overline{\xi}_1 = 1-i$). Como se verifica que

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{(x-1)^2+1} &= \frac{x}{(x-1)^2+1} + \frac{1}{(x-1)^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1} + \frac{2}{(x-1)^2+1},\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-2x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}\,dx + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\ln((x-1)^2+1) + 2\arctan(x-1) + c,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. $\square$

ii) $\boxed{\partial P \geq \partial Q}$ Dividiendo el polinomio $P(x)$ entre $Q(x)$, se expresa la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de un polinomio $C(x)$ más una expresión del tipo (15.6).

Ejemplo 15.13 Para hallar la integral indefinida

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{x^3+2x^2+3x+1}{(x-1)(x+1)}\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$$

efectuamos la división del numerador entre el denominador, obteniendo

$$\begin{aligned}\frac{x^3+2x^2+3x+1}{(x-1)(x+1)} &= x+2+\frac{4x+3}{(x-1)(x+1)}\\ &= x+2+\frac{7}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

(nótese que también hemos efectuado la descomposición en fracciones simples). Consecuentemente, para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, se verifica que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2x^2+3x+1}{x^2-1}\,dx &= \int (x+2)\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}\\ &= \frac{x^2}{2}+2x+\frac{7}{2}\ln(|x-1|)+\frac{1}{2}\ln(|x+1|)+c\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. □

Observación 15.6 En el caso general (con grado arbitrario del denominador), la descomposición en fracciones simples de una función racional

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \ \text{ con } \ \partial P < \partial Q$$

se lleva a cabo de la siguiente forma: suponiendo que

a) $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r\}$ son las r raíces reales del polinomio Q con multiplicidades respectivas $\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ (véase la Definición 12.6),

b) $\{\eta_1 = a_1 + ib_1, \eta_2 = a_2 + ib_2, \ldots, \eta_s = a_s + ib_s\}$ son las s raíces complejas de Q con multiplicidades respectivas $\{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$,

podemos factorizar el polinomio Q en la forma

$$\begin{aligned}Q(x) = \alpha(x-\xi_1)^{n_1}(x-\xi_2)^{n_2}\ldots(x-\xi_r)^{n_r}((x-a_1)^2+b_1)^{m_1}\\ \cdot((x-a_2)^2+b_2)^{m_2}\ldots((x-a_s)^2+b_s)^{m_s}.\end{aligned}$$

Se lleva a cabo la siguiente descomposición en fracciones simples:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{11}}{x-\xi_1} + \frac{A_{12}}{(x-\xi_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1n_1}}{(x-\xi_1)^{n_1}} \\ & + \frac{A_{21}}{x-\xi_2} + \frac{A_{22}}{(x-\xi_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2n_2}}{(x-\xi_2)^{n_2}} \\ & + \cdots + \frac{A_{r1}}{x-\xi_r} + \frac{A_{r2}}{(x-\xi_r)^2} + \cdots + \frac{A_{rn_r}}{(x-\xi_r)^{n_r}} \\ & + \frac{B_{11}x+C_{11}}{(x-a_1)^2+b_1^2} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{((x-a_1)^2+b_1^2)^2} + \cdots + \frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{((x-a_1)^2+b_1^2)^{m_1}} \\ & + \frac{B_{21}x+C_{21}}{(x-a_2)^2+b_2^2} + \frac{B_{22}x+C_{22}}{((x-a_2)^2+b_2^2)^2} + \cdots + \frac{B_{2m_2}x+C_{2m_2}}{((x-a_2)^2+b_2^2)^{m_2}} \\ & + \cdots + \frac{B_{s1}x+C_{s1}}{(x-a_s)^2+b_s^2} + \frac{B_{s2}x+C_{s2}}{((x-a_s)^2+b_s^2)^2} + \cdots + \frac{B_{sm_s}x+C_{sm_s}}{((x-a_s)^2+b_s^2)^{m_s}}.\end{aligned}}$$

Nótese que las integrales que surgen a partir de las fracciones simples anteriores se resuelven de forma análoga a las que surgieron en (15.6), teniendo en cuenta que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ se verifica que

$$\int \frac{dx}{(x-\xi)^n} = \int (x-\xi)^{-n} dx = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{(x-\xi)^{n-1}}$$

y

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{((x-a)^2+b^2)^n}\,dx &= \frac{1}{b^{2n}} \int \frac{Bx+C}{\left(\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1\right)^n}\,dx = \frac{1}{b^{2n-1}} \int \frac{B(a+bt)+C}{(t^2+1)^n}\,dt \\ &= \frac{1}{b^{2n-1}} \left[\frac{Bb}{2} \int \frac{2t}{(t^2+1)^n}\,dt + (Ba+C) \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}\right] \\ &= \frac{1}{b^{2n-1}} \left[-\frac{Bb}{2(n-1)}\,\frac{1}{(t^2+1)^{n-1}} + (Ba+C) \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}\right] \\ &= -\frac{B}{2(n-1)}\,\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{n-1}} + \frac{Ba+C}{b^{2n-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n},\end{aligned}$$

donde se ha efectuado el cambio variable $t = \frac{x-a}{b}$. La última integral indefinida que aparece en la expresión anterior se obtiene aplicando, repetidamente, el Lema 15.1 que enunciamos a continuación, para ir reduciendo el exponente n del denominador hasta obtener una integral del tipo

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan(t) + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario.

Lema 15.1 *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se verifica que*

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \begin{cases} \dfrac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2(n-1)} \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} & \textit{si } n \geq 2 \\ \arctan(t) + c \quad (c \in \mathbb{R} \textit{ constante arbitraria}) & \textit{si } n = 1. \end{cases} \tag{15.7}$$

DEMOSTRACIÓN. Una forma sencilla de probar este lema consiste en comprobar que derivando el término de la derecha de la expresión (15.7) se obtiene $\frac{1}{(t^2+1)^n}$ (animamos al lector a que haga este cálculo). Esta forma de proceder tiene el inconveniente de no ser útil si nos dieran sólo el término de la izquierda de (15.7) y nos pidieran que lo calculáramos. Hacemos por tanto aquí una demostración constructiva, basada en la integración por partes, cuando $n \geq 2$ (pues para $n = 1$ el resultado es obvio). Claramente,

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^n}\, dt = \int \frac{t^2}{(t^2+1)^n}\, dt + \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} \tag{15.8}$$

e, integrando por partes en la primera integral de la última suma, se verifica que

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{(t^2+1)^n}\, dt &= \int \frac{t}{2(-n+1)} \frac{2(-n+1)t}{(t^2+1)^n}\, dt \\ &= -\frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}. \end{aligned} \tag{15.9}$$

De esta forma, sustituyendo la expresión (15.9) en (15.8), se obtiene que

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} = -\frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} + \int \frac{dt}{(t^2+1)^n},$$

de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} &= \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} \\ &= \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}. \quad \square \end{aligned}$$

Ejemplo 15.14 A partir del Lema 15.1, se verifica que

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan(x) + c,$$

siendo $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria. $\square$

Ejemplo 15.15 Para hallar

$$\int \frac{x^2+3}{x^7 + 9x^6 + 33x^5 + 57x^4 + 31x^3 - 41x^2 - 65x - 25}\, dx,$$

hacemos la descomposición en fracciones simples de la función racional

$$\begin{aligned}
R(x) &= \frac{x^2+3}{x^7+9x^6+33x^5+57x^4+31x^3-41x^2-65x-25} \\
&= \frac{x^2+3}{(x-1)(x+1)^2((x+2)^2+1)^2} \\
&= \frac{1}{100}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} \\
&\quad - \frac{1}{100}\frac{101x+255}{(x+2)^2+1} - \frac{1}{10}\frac{11x+25}{((x+2)^2+1)^2},
\end{aligned}$$

a partir de la cual, para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int R(x)\,dx &= \frac{1}{100}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} \\
&\quad - \frac{1}{100}\int \frac{101x+255}{(x+2)^2+1}\,dx - \frac{1}{10}\int \frac{11x+25}{((x+2)^2+1)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{100}\,\ln(|x-1|) + \ln(|x+1|) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} \\
&\quad - \frac{1}{100}\left[\frac{101}{2}\ln\left((x+2)^2+1\right) + 53\arctan(x+2)\right] \\
&\quad - \frac{1}{10}\left[-\frac{11}{2}\,\frac{1}{(x+2)^2+1} + \frac{3}{2}\,\arctan(x+2) + \frac{3}{2}\,\frac{x+2}{(x+2)^2+1}\right] + c,
\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria. □

15.4. Otros métodos de integración

Hay una enorme cantidad de métodos de integración para casos especiales de integrandos. A modo de ejemplo, en esta sección vamos a mostrar uno de ellos, dejando para el lector interesado la búsqueda de otro tipo de métodos en libros de Cálculo especializados.

Cuando el integrando es función de las razones trigonométricas estudiadas en el Capítulo 7, se puede utilizar el cambio de variable

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$$

teniendo en cuenta que, tal y como se vio en el Problema 7.10, con dicho cambio se tiene que

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ \text{ y }\ \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Al hacer dicho cambio, aplicando la *regla de la cadena* a la función $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (véase la Proposición 13.11), se verifica que

$$\frac{1}{2}\left[1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]dx = dt,$$

de donde

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Éste es un caso especial de cambio de variable de los que hemos denominado "Integración por cambio de variable (I)" en la Sección 15.2.2., combinado con los métodos de integración de funciones racionales estudiados en la Sección 15.3.

Ejemplo 15.16 Vamos a calcular, por este método, las integrales

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)} \ \text{ y } \ \int \frac{dx}{\cos(x)}$$

(cada una en su máximo dominio de definición, que, por simplicidad, no especificamos aquí). Para ello procedemos de la siguiente forma:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln(|t|)+c = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)+c$$

y

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos(x)} &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = \int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt\\ &= \ln(|t+1|)-\ln(|t-1|)+c = \ln\left(\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)+c\\ &= \ln\left(\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right|\right)+c.\end{aligned}$$

En ambas integrales $c\in\mathbb{R}$ es una constante arbitraria. □

Observación 15.7 Tal y como decíamos al comienzo de la Sección 15.2.1., el cálculo de la primitiva de una función es la operación inversa de hallar la derivada de la misma. Ahora bien, mientras que siempre es posible hallar la derivada de una función derivable f (por complicada que sea la expresión de la función f y por largos y tediosos que sean los cálculos para su obtención), no ocurre así con el cálculo de una primitiva de la función f. De hecho, existen funciones con "apariencia sencilla", como

$$\frac{e^x}{x},\ \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \ \text{ y } \ \frac{\cos(x)}{x},$$

cuyas primitivas no pueden ser expresadas en términos de "funciones elementales" (es decir, polinomios, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas ...). □

15.5. Problemas

15.1. Hallar las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 3x + 2}{x}\,dx,\ \forall\, x \neq 0$ b) $\displaystyle\int 3\sqrt{x}\,dx,\ \forall\, x > 0$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x}}\,dx,\ \forall\, x > 0$ d) $\displaystyle\int \tan^2(x)\,dx,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\displaystyle\int \frac{2 - 2\operatorname{sen}^2(x) + 3\cos(x)}{\cos(x)}\,dx,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $\displaystyle\int 3^{2+x}\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

15.2. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ b) $\displaystyle\int \cos^4(x)\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(4x)\cos(2x)\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ d) $\displaystyle\int \sqrt{1 - \cos(4x)}\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

15.3. Hallar las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x^3 \ln(x)\,dx,\ \forall\, x > 0$ b) $\displaystyle\int x\cos(x)\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ c) $\displaystyle\int xe^x\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

d) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ e) $\displaystyle\int (x^2 + 1)\operatorname{sen}(x)\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

15.4. Calcular $\displaystyle\int \ln(x)\,dx,\ \forall\, x > 0$. (**Indicación**: Escribir la integral como

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,dx$$

e integrar por partes).

15.5. Hallar $\displaystyle\int x\ln(x)\,dx,\ \forall\, x > 0.$

15.6. Calcular las siguientes integrales, que son "casi" inmediatas:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx,\ \forall\, x > 0$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{7x + 5},\ \forall\, x \neq -\frac{5}{7}$ c) $\displaystyle\int \cos(x)\operatorname{sen}^2(x)\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

d) $\displaystyle\int \frac{6x+5}{3x^2+5x+7}\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ e) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,:\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,\ \forall\, x > 0$ g) $\displaystyle\int x^5 \operatorname{sen}(x^6)\,dx,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

15.7. Efectuar el cambio de variable $x = \operatorname{sen}(t)$ para hallar la integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx,\ \forall\, x \in [-1,1].$$

15.8. Efectuar el cambio de variable $t = \sqrt{1+x}$, con $x \geq -1$, para hallar las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \sqrt{1+x}\,dx$ b) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\,dx$ c) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x}\,dx.$

15.9. Calcular las siguientes integrales, especificando en cada caso los máximos dominios de definición:

a) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{2x^2-18x+40}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x-2}{3x^2-3x-18}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$

d) $\displaystyle\int \frac{2x-7}{x^2-6x+9}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-4x+5}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2-6x+13}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2-5x+4}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{3x^3-6x^2-9}{2x^2-4x+2}\,dx$ i) $\displaystyle\int \frac{4x^3-2x^2+x-3}{x^2-8x+17}\,dx.$

15.10. Hallar las siguientes integrales, especificando en cada caso los máximos dominios de definición:

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+1}{x^3+3x^2-4}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x^2-4x+5}{x^3-3x+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^6+1}{x^2(x^2+1)}\,dx.$

15.11. Calcular las siguientes integrales en sus máximos dominios de definición (que, para simplificar, no es necesario especificar) utilizando el cambio de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$ b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}\,dx.$

15.6. Soluciones

<u>**Nota**</u>: En todas las soluciones se ha omitido la constante arbitraria de integración.

15.1. a) $\dfrac{2}{3}\,x^3 - 3x + 2\ln(|x|),\ \forall\, x \neq 0$ b) $2x^{\frac{3}{2}} = 2x\sqrt{x},\ \forall\, x > 0$
c) $\dfrac{2}{5}\,x^2\sqrt{x} + 3\ln(x) - \dfrac{2}{\sqrt{x}},\ \forall\, x > 0$ d) $\tan(x) - x,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
e) $2\,\text{sen}(x) + 3x,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ f) $\dfrac{9}{\ln(3)}\,3^x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

15.2. a) $-\cos(x) + \dfrac{\cos^3(x)}{3},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ b) $\dfrac{12x + 8\,\text{sen}(2x) + \text{sen}(4x)}{32},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
c) $-\dfrac{\cos(6x) + 3\cos(2x)}{12},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(2x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

15.3. a) $\dfrac{x^4}{16}\,(4\ln(x) - 1),\ \forall\, x > 0$ b) $x\,\text{sen}(x) + \cos(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
c) $e^x(x-1),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ d) $\dfrac{e^x(\text{sen}(x) - \cos(x))}{2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
e) $(1 - x^2)\cos(x) + 2x\,\text{sen}(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

15.4. $x(\ln(x) - 1),\ \forall\, x > 0.$

15.5. $\dfrac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1) = \dfrac{x^2}{4}(\ln(x^2) - 1),\ \forall\, x > 0.$

15.6. a) $\dfrac{(\ln(x))^2}{2},\ \forall\, x > 0$ b) $\dfrac{\ln(|7x+5|)}{7},\ \forall\, x \neq -\dfrac{5}{7}$ c) $\dfrac{\text{sen}^3(x)}{3},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
d) $\ln(3x^2 + 5x + 7),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ e) $-\ln(|\cos(x)|),\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
f) $2e^{\sqrt{x}},\ \forall\, x > 0$ g) $-\dfrac{\cos(x^6)}{6},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

15.7. $\dfrac{1}{2}\left(\text{arcsen}(x) + x\sqrt{1 - x^2}\right),\ \forall\, x \in [-1, 1].$

15.8. a) $\dfrac{2\sqrt{(1+x)^3}}{3}$ b) $\dfrac{2\sqrt{(1+x)^3}}{15}\,(3x - 2)$ c) $\dfrac{2\sqrt{(1+x)^3}}{105}\,\big(15x^2 - 12x + 8\big).$
En las tres integrales anteriores x toma valores en $[-1, +\infty)$.

15.9. a) $\dfrac{15}{2}\ln(|x-5|) - \dfrac{13}{2}\ln(|x-4|),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{4, 5\}$
b) $\dfrac{4\ln(|x-3|) + 6\ln(|x+2|)}{15},\ \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 3\}$ c) $-\dfrac{1}{x+1},\ \forall\, x \neq -1$

d) $2\ln(|x-3|)+\dfrac{1}{x-3},\ \forall\, x\neq 3$ e) $\dfrac{3}{2}\ \ln(x^2-4x+5)+5\arctan(x-2),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$

f) $\dfrac{1}{2}\ \ln(x^2-6x+13)+\dfrac{7}{2}\ \arctan\left(\dfrac{x-3}{2}\right),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$

g) $\dfrac{x^2}{2}+5x+23\ln(|x-4|)-\ln(|x-1|),\ \forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\{1,4\}$

h) $\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{3}{2}\ \ln(|x-1|)+\dfrac{6}{x-1},\ \forall\, x\neq 1$

i) $2x^2+30x+\dfrac{173}{2}\ \ln(x^2-8x+17)+179\arctan(x-4),\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$

15.10. a) $\dfrac{23}{3}\ \dfrac{1}{x+2}+\dfrac{28}{9}\ln(|x+2|)-\dfrac{1}{9}\ln(|x-1|),\ \forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$

b) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{7}{3}\ln(|x+2|)-\dfrac{1}{3}\ln(|x-1|),\ \forall\, x\in\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$ c) $\dfrac{x^3}{3}-x-\dfrac{1}{x},\ \forall\, x\neq 0.$

15.11. a) $\ln(|\tan(x)|)$

b) $\ln\left(\left|\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right|\right)-2\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}=\ln\left(\left|\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right|\right)-\operatorname{sen}(x).$

16 Cálculo integral. Integrales definidas

16.1. Introducción

Tomando como base las integrales indefinidas estudiadas en el Capítulo 15, se introduce en este capítulo el concepto de *integral definida* de una función f entre las abscisas a y b por medio de las sumas inferiores y superiores de f para particiones del intervalo $[a, b]$. Se muestran las propiedades elementales de este tipo de integrales, como son el *teorema Fundamental del Cálculo* y la *regla de Barrow*.

Las aplicaciones de las integrales definidas surgen en muchas áreas de conocimiento (Matemáticas, Física, Ingeniería, Economía, Estadística ...). Aquí sólo mostraremos algunas de estas aplicaciones, como son las relativas al cálculo de *áreas* de figuras planas, *longitudes* de curvas, *volúmenes* de sólidos de revolución y *área* de una superficie de revolución.

16.2. Integral definida. Propiedades elementales. Regla de Barrow

Históricamente, la noción de integral definida surge a la hora de buscar métodos para determinar el área de regiones planas.

Definición 16.1 Una *partición* de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto ordenado de puntos de la forma

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}. \quad \square \tag{16.1}$$

Observación 16.1 Nótese que los puntos de la partición Δ dada en (16.1) dividen el intervalo $[a, b]$ en n partes (que no tienen por qué ser iguales). $\square$

Definición 16.2 Sea $f \in \mathcal{C}([a, b])$ una función <u>no negativa</u> y Δ una partición del intervalo $[a, b]$ de la forma (16.1). Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, consideramos las cantidades

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ y } M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

y los rectángulos L_i y U_i que tienen por base $x_i - x_{i-1}$ y alturas respectivas m_i y M_i (obviamente, se verifica que Área$(L_i) \leq$ Área(U_i)).

a) La *suma inferior* de f para la partición Δ es la suma de las áreas de todos los rectángulos $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ y la denotamos por

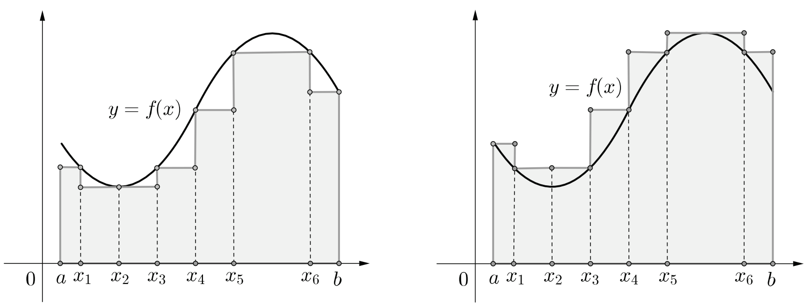
$$L(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \text{Área}(L_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}). \tag{16.2}$$

La suma inferior de f representa un área total menor que el área limitada por la gráfica de la función f y el eje OX entre las abscisas $x = a$ y $x = b$ (véase la Figura 16.1(a)).

b) La *suma superior* de f para la partición Δ es la suma de las áreas de todos los rectángulos $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ y la denotamos por

$$U(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \text{Área}(U_i) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}). \tag{16.3}$$

La suma superior de f representa un área total mayor que el área limitada por la gráfica de la función f y el eje OX entre las abscisas $x = a$ y $x = b$ (véase la Figura 16.1(b)).



(a) Suma inferior $L(f, \Delta)$. (b) Suma superior $U(f, \Delta)$.

Figura 16.1: Sumas inferior y superior de una función f en $[a, b]$.

Las notaciones L y U son de origen anglosajón: L por *lower* (inferior) y U por *upper* (superior). □

Observación 16.2 Nótese que $L(f, \Delta)$ y $U(f, \Delta)$ son aproximaciones del área que encierra la gráfica de la función f entre las abscisas $x = a$ y $x = b$, tanto mejores cuanto más pequeños sean los subintervalos que constituyen la partición Δ. Además,

$$L(f, \Delta) \leq U(f, \Delta)$$

cualquiera que sea la partición Δ del intervalo $[a, b]$ y el área que encierra la función f en el intervalo $[a, b]$ es siempre una cantidad intermedia entre $L(f, \Delta)$ y $U(f, \Delta)$. □

Definición 16.3 Sea f una función acotada en el intervalo $[a,b]$ (pudiendo no ser continua ni positiva). La función f es *integrable* en $[a,b]$ si existe un único número real I de forma que para cualquier partición Δ del intervalo $[a,b]$ se verifica que

$$L(f,\Delta) \leq I \leq U(f,\Delta).$$

El número I se denomina *integral definida* de la función f entre las abscisas a y b y se denota

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{16.4}$$

(véase la Figura 16.2). $\square$

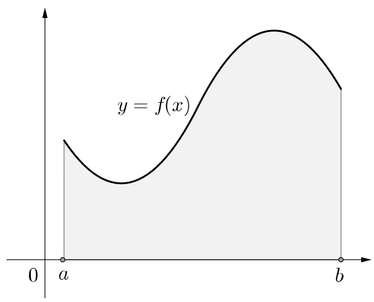


Figura 16.2: Integral de una función f en $[a,b]$.

Observación 16.3 Nótese que $\int_a^b$ denota una suma infinita que se obtiene como paso al límite en las sumas finitas de (16.2) y (16.3) (sumas de particiones del $[a,b]$). Además, en el mismo paso al límite, m_i y M_i "se convierten" en $f(x)$ y $(x_i - x_{i-1})$ en dx. Es decir, se trata de una suma infinita de áreas de rectángulos de base dx y altura $f(x)$, con x entre a y b. Por tanto, geométricamente, si f es una función no negativa, la integral definida (16.4) representa el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre las abscisas $x = a$ y $x = b$. $\square$

Observación 16.4 La expresión (16.4) no sólo tiene sentido cuando $a < b$. También se define para $a \geq b$ de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} -\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx & \text{si} \quad a > b \\ 0 & \text{si} \quad a = b. \end{cases} \quad \square$$

Observación 16.5 Puede demostrarse que toda función:

a) $f \in \mathcal{C}([a,b])$ (véase la Definición 11.20) es integrable.

b) f monótona en $[a,b]$ (véase la Definición 11.5) es integrable. $\square$

Observación 16.6 (Propiedades de la integral definida)

a) Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces la función $\lambda f + \mu g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

b) Para números reales $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a < c < b$ se verifica que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

c) Si f y g son integrables en $[a, b]$ verificando que

$$f(x) \leq g(x),\ \forall\, x \in [a, b],$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

d) Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ y $f(x) > 0\, \forall\, x \in [a, b]$ (respectivamente, < 0), entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0 \text{ (respectivamente, } < 0).$$

e) Si f es una función integrable en $[a, b]$ y

$$m = \min_{a \leq x \leq b} f(x) \ \text{ y } \ M = \max_{a \leq x \leq b} f(x),$$

entonces

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a).$$

Por tanto, el *valor medio* de la función f en el intervalo $[a, b]$ (véanse el Teorema 16.1 y la Observación 16.8 más adelante) queda comprendido entre los valores mínimo y máximo de f en $[a, b]$, ya que

$$m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx}{b - a} \leq M. \quad \square$$

Observación 16.7 La propiedad d) de la Observación 16.6 afirma que si $f \in \mathcal{C}([a,b])$ y cambia de signo en el intervalo $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

determina la suma de las áreas que están por encima del eje OX entre las abscisas $x=a$ y $x=b$ menos la suma de las áreas que están por debajo de este eje entre las dos abscisas anteriores. Para hallar el área de la función en términos absolutos debe hallarse la integral

$$\int_a^b |f(x)|\,dx. \quad \square$$

Teorema 16.1 (Valor Medio Integral) *Si $f \in \mathcal{C}([a,b])$, entonces existe $\xi \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

DEMOSTRACIÓN. Como $f \in \mathcal{C}([a,b])$, por el Teorema 11.2 existen

$$m = \min_{a \le x \le b} f(x) \ \text{ y } \ M = \max_{a \le x \le b} f(x).$$

Puesto que para todo $x \in [a,b]$ se verifica que

$$m \le f(x) \le M,$$

por el apartado e) de la Observación 16.6 se tiene que

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

y, por tanto,

$$m \le \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M.$$

De esta forma, por ser $f \in \mathcal{C}([a,b])$, el *teorema de los Valores Intermedios* (véase el Teorema 11.3) garantiza la existencia de un valor $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(\xi). \quad \square$$

Observación 16.8 (Interpretación geométrica) Si f es no negativa, el área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y el eje OX entre las abscisas $x=a$ y $x=b$ coincide con el área de un rectángulo de base el intervalo $[a,b]$ y altura una cantidad comprendida entre el mínimo y el máximo de la función f en $[a,b]$ (véase la Figura 16.3). $\square$

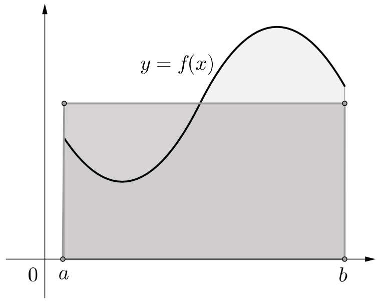


Figura 16.3: Interpretación geométrica del *teorema del Valor Medio Integral*.

Definición 16.4 Sea f una función integrable en $[a,b]$. La *función área* de f es la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \quad \square \tag{16.5}$$

Observación 16.9

a) Nótese que si f es no negativa, para cada $x \in [a,b]$ la cantidad (16.5) representa el área que encierra la gráfica de la función f entre las abscisas a y x. En particular,

$$F(a) = 0 \;\text{ y }\; F(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

b) La función área definida en (16.5) es siempre continua en $[a,b]$ (aunque la función f no lo sea). Además, como se muestra en el Teorema 16.2, cuando $f \in \mathcal{C}([a,b])$, entonces F es, de hecho, una función derivable en $[a,b]$. $\square$

Teorema 16.2 (Fundamental del Cálculo) *Si $f \in \mathcal{C}([a,b])$, entonces su función área F es derivable en $[a,b]$ y, además,*

$$F'(x) = f(x),\ \forall\, x \in [a,b]. \tag{16.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $x \in [a,b]$ se verifica que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(x).
\end{aligned}$$

En efecto, como $f \in \mathcal{C}([x, x+h])$, por el Teorema 11.2 existen

$$m(h) = \min_{x \le t \le x+h} f(t) \ \text{ y } \ M(h) = \max_{x \le t \le x+h} f(t)$$

y se verifica que

$$m(h)h \le \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le M(h)h,$$

de donde se deduce que

$$m(h) \le \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \le M(h). \tag{16.7}$$

Ahora bien, por continuidad, de la función f

$$\lim_{h \to 0} m(h) = \lim_{h \to 0} M(h) = f(x),$$

por lo que la *regla del sándwich* (véase la Observación 11.28) aplicada a (16.7) determina que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(x),$$

como queríamos demostrar. De esta forma, como para cada $x \in [a, b]$ hemos demostrado que existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x),$$

se tiene que la función F es derivable en $[a, b]$ y se verifica (16.6). □

Observación 16.10 El Teorema 16.2 indica que la función área de una función continua f en un intervalo $[a, b]$ es una primitiva de dicha función en $[a, b]$. Por tanto, toda función continua en un intervalo cerrado tiene primitiva. □

La consecuencia más importante del Teorema 16.2 es:

Teorema 16.3 (Regla de Barrow) *Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ y F es una primitiva de f en $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{x=b}. \tag{16.8}$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 16.2 se tiene que la función

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \ \forall\, x \in [a, b]$$

es una primitiva de f en $[a,b]$. Como también F es una primitiva de f en $[a,b]$, por la Proposición 15.1, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \Phi(x) + c = \int_a^x f(t)\,dt + c,\ \forall\, x \in [a,b].$$

Ahora bien, puesto que

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + c = c,$$

se verifica que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a),\ \forall\, x \in [a,b]. \tag{16.9}$$

La expresión (16.8) se sigue al tomar $x = b$ en (16.9). □

Observación 16.11 La *regla de Barrow* permite obtener integrales definidas a partir de integrales indefinidas: para calcular una integral definida basta con encontrar una primitiva, evaluarla en los extremos del intervalo y obtener la diferencia entre ellos. Se trata de una herramienta muy importante del Análisis Matemático, pues representa una conexión entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral. □

Ejemplo 16.1

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x + e^{-x})\,dx &= \left[\frac{x^2}{2} - e^{-x}\right]_{x=0}^{x=1} = \left(\frac{1}{2} - e^{-1}\right) - \left(\frac{0}{2} - e^{-0}\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{e} = \frac{3e-2}{2e} \simeq 1'1321.\end{aligned}$$ □

Corolario 16.1 (Derivación bajo el signo integral) *Sean $f \in \mathcal{C}([c,d])$ y u, v funciones derivables en (a,b) tales que $u((a,b)) \subset [c,d]$ y $v((a,b)) \subset [c,d]$. Para todo $x \in (a,b)$, se verifica que*

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las funciones

$$\Phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt,\ x \in (a,b) \ \text{ y } \ F(y) = \int f(y)\,dy,\ y \in [c,d].$$

Por la *regla de Barrow* (véase el Teorema 16.3), para todo $x \in (a,b)$ se tiene que

$$\Phi(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Derivando la expresión anterior (haciendo uso de la *regla de la cadena*, véase el Teorema 13.1), se deduce que

$$\Phi'(x) = F'(v(x))v'(x) - F'(u(x))u'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x),$$

como queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 16.2

$$\frac{d}{dx}\int_{e^x}^{\mathrm{sen}(x)} \left(2+\sqrt[3]{t}\right)\,dt = \left(2+\sqrt[3]{\mathrm{sen}(x)}\right)\cos(x) - \left(2+\sqrt[3]{e^x}\right)e^x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

A partir de (15.2) se tiene que:

Corolario 16.2 (Integración por partes) *Dadas $f \in \mathcal{C}([a,b])$ y $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$, se verifica que*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN. De (15.2) (o, directamente, a partir de la fórmula de derivación de un producto (13.8)) se tiene que fg es una primitiva de $f'g + fg'$. El resultado se concluye aplicando la *regla de Barrow* (véase el Teorema 16.3). $\square$

Ejemplo 16.3 A partir del Ejemplo 15.9 se tiene que

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 e^x\,dx = (e-0) - [e^x]_{x=0}^{x=1} = e - (e-1) = 1.$$

Nótese que también podríamos haber calculado antes la primitiva y, finalmente, particularizar. En efecto, como se vio en el Ejemplo 15.9,

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [(x-1)e^x]_{x=0}^{x=1} = 0 - (-1) = 1. \quad \square$$

Corolario 16.3 (Cambio de variable (II)) *Sea $f \in \mathcal{C}([a,b])$ y $g : [m,M] \to [a,b]$ una función biyectiva, continua y con derivada continua, donde*

$$m = \text{mín}\{\alpha,\beta\}, M = \text{máx}\{\alpha,\beta\}, \alpha = g^{-1}(a)\ \text{ y }\ \beta = g^{-1}(b).$$

Con el cambio de variable $x = g(t)$ se verifica que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con la *regla de Barrow* (véase el Teorema 16.3), si F es una primitiva de f en $[a,b]$, se verifica que

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx=F(g(\beta))-F(g(\alpha)).$$

Ahora bien, por (15.5) se tiene que $F(g(t))$ es una primitiva de $f(g(t))g'(t)$, por lo que, aplicando de nuevo la *regla de Barrow*, se concluye que

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt,$$

tal y como queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 16.4 Para hallar el valor de la integral

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

podemos efectuar el cambio de variable

$$x=\operatorname{sen}(t),\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

obteniendo que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}\cos(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\simeq 0'7854.\quad\square\end{aligned}$$

Corolario 16.4 (Cambio de variable (I)) *Sea $f\in\mathcal{C}([a,b])$ y $r\in\mathcal{C}^1([a,b])$ una función biyectiva. Si $r(a)=\alpha$, $r(b)=\beta$ y*

$$f(x)=g(r(x))r'(x),\ \forall\, x\in[a,b]$$

para alguna función g, con el cambio de variable $t=r(x)$ se verifica que

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta g(t)\,dt.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Corolario 16.3, se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(r(x))r'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)\,dt.$$

Nótese que el Corolario 16.3 se ha utilizado, intercambiando los roles de x y de t, para conseguir la segunda de las igualdades anteriores. □

Ejemplo 16.5 Para calcular la integral definida

$$\int_0^1 e^{3x+4}\,\mathrm{sen}\left(e^{3x+4}+2\right)\,dx$$

podemos efectuar el cambio de variable

$$e^{3x+4}+2=t,\ t\in\left(e^4+2, e^4+7\right).$$

Teniendo en cuenta que $3e^{3x+4}dx = dt$, se verifica que

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{3x+4}\,\mathrm{sen}\left(e^{3x+4}+2\right)\,dx &= \frac{1}{3}\int_{e^4+2}^{e^7+2}\mathrm{sen}(t)\,dt = \frac{1}{3}\left[-\cos(t)\right]_{t=e^4+2}^{t=e^7+2} \\ &= \frac{\cos\left(e^4+2\right)-\cos\left(e^7+2\right)}{3} \simeq 0'1321. \quad \square\end{aligned}$$

16.3. Aplicaciones de la integral definida

A lo largo de esta sección supondremos que $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

16.3.1. Cálculo de áreas de figuras planas

La *regla de Barrow* facilita el cálculo de áreas comprendidas entre las gráficas de funciones cuyas primitivas sean conocidas. Hay que hacer especial hincapié en considerar los puntos en los que la función cambie de signo.

• Área comprendida entre una curva y el eje de abscisas

Si para hallar el área que encierra la curva $y = f(x)$ con el eje OX entre las abscisas a y b nos limitamos a calcular

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

el resultado puede ser erróneo. De acuerdo con lo visto en la Observación 16.7, esta área se determina de la siguiente forma:

$$\boxed{A(f,[a,b]) = \int_a^b |f(x)|\,dx.} \tag{16.10}$$

Observación 16.12 En la práctica, para calcular (16.10), suelen considerarse las raíces $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ de la función f en $[a, b]$, pues, de esta forma, si dichas raíces están ordenadas en forma creciente, se tiene que

$$A(f,[a,b]) = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^{c_1} |f(x)|\,dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x)|\,dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} |f(x)|\,dx. \quad \square$$

Ejemplo 16.6 El área que encierra la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ es

$$\begin{aligned} A(\operatorname{sen}(x),[0,2\pi]) &= \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\operatorname{sen}(x))\,dx \\ &= [-\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} + [\cos(x)]_{x=\pi}^{x=2\pi} = (1+1) + (1-(-1)) = 4 \end{aligned}$$

(véase la Figura 16.4). Nótese que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx = [-\cos(x)]_{x=0}^{x=2\pi} = -(1-1) = 0. \quad \square$$

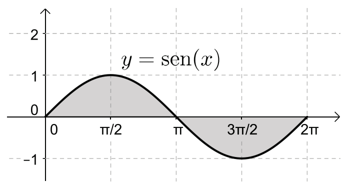


Figura 16.4: Gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en $[0, 2\pi]$.

Ejemplo 16.7 Calculemos el área A de un círculo de centro $(0, 0)$ y radio $r > 0$. A la vista de la Figura 16.5, el área A buscada es cuatro veces el área que encierra la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ en el intervalo $[0, r]$, por lo que

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

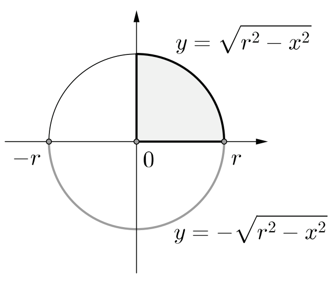


Figura 16.5: Área de un círculo de centro $(0, 0)$ y radio $r > 0$.

Para hallar esta integral, podemos realizar el cambio de variable

$$x = r\,\mathrm{sen}(t),\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Teniendo en cuenta que $dx = r\cos(t)dt$, por el Corolario 16.3 se verifica que

$$\begin{aligned} A &= 4r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\,\mathrm{sen}^2(t)}\cos(t)\,dt = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt \\ &= 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = 2r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\,dt \\ &= 2r^2\left[t + \frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \pi r^2, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la fórmula trigonométrica (7.13). Por tanto, el área buscada es

$$A = \pi r^2. \quad \square$$

• Área comprendida entre dos curvas

A partir de (16.10) se verifica que el área comprendida entre las gráficas de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ entre las abscisas a y b viene dada por

$$\boxed{A(f, g, [a, b]) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.}$$

Ejemplo 16.8 Consideremos la Figura 16.6 y veamos que el área que limitan las gráficas de las funciones $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ entre las abscisas 0 y 2π viene dada por

$$A(\mathrm{sen}(x), \cos(x), [0, 2\pi]) = 4\sqrt{2}.$$

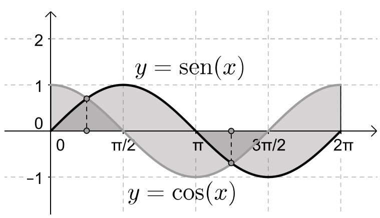


Figura 16.6: Gráficas de las funciones $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ en $[0, 2\pi]$.

En efecto, si denotamos por

$$A = A(\mathrm{sen}(x), \cos(x), [0, 2\pi]),$$

a la vista de la Figura 16.6 se tiene que

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(x) - \cos(x)|\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \operatorname{sen}(x))\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\operatorname{sen}(x) - \cos(x))\, dx \\
&\quad + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos(x) - \operatorname{sen}(x))\, dx \\
&= [\operatorname{sen}(x) + \cos(x)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} + [-\cos(x) - \operatorname{sen}(x)]_{x=\frac{\pi}{4}}^{x=\frac{5\pi}{4}} + [\operatorname{sen}(x) + \cos(x)]_{x=\frac{5\pi}{4}}^{x=2\pi} \\
&= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1\right] + \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \\
&\quad + \left[1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \\
&= (\sqrt{2} - 1) + 2\sqrt{2} + (1 + \sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \simeq 5'6569. \quad \square
\end{aligned}
$$

16.3.2. Longitud de arco de una curva

Si f es una función definida en el intervalo $[a, b]$, denotaremos por γ a la curva definida como

$$\gamma = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b]\right\}$$

y por $\ell(\gamma)$ a la longitud de la curva γ.

Proposición 16.1 *Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, entonces la longitud de la curva γ es*

$$\boxed{\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.}$$

Ejemplo 16.9 La longitud de la curva $y = e^x$ comprendida entre las abscisas 0 y 1 es

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

(véase la Figura 16.7). Para hallar el valor de la anterior integral, hacemos el cambio de variable

$$\sqrt{1 + e^{2x}} = t \ \Rightarrow \ \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\, dx = dt \ \Rightarrow \ dx = \frac{t}{t^2 - 1}\, dt,$$

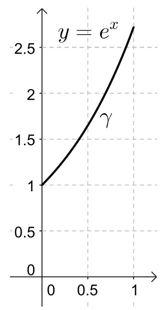


Figura 16.7: Gráfica de la función $f(x) = e^x$ en $[0, 1]$.

con lo que, por el Corolario 16.4, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right) dt = \left[t + \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\right]_{t=\sqrt{2}}^{t=\sqrt{1+e^2}} \\
&= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right] \\
&= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{1+e^2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{1+e^2}+1)}}\right) \simeq 2'0035. \quad \square
\end{aligned}
$$

16.3.3. Volumen de un cuerpo de revolución

Al hacer girar el arco de curva $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$ alrededor del eje de abscisas, se engendra un sólido de revolución como se indica en la Figura 16.8.

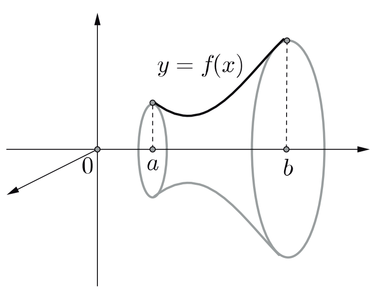


Figura 16.8: Sólido de revolución al girar $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$ alrededor del eje OX.

El volumen V de este cuerpo de revolución se obtiene de la siguiente forma: para cada $x \in [a,b]$ el área del círculo que se genera al girar el punto $(x, f(x)$ alrededor del eje de abscisas es

$$A(x) = \pi(f(x))^2,$$

por tratarse de un círculo de radio $f(x)$. Por tanto, el volumen buscado se obtiene como suma (infinita) de volúmenes de cilindros verticales al eje de abscisas, con área de la base $A(x)$ y altura dx. Aunque no lo detallamos aquí, la obtención de este volumen se puede hacer de forma rigurosa como límite de volúmenes inferiores y superiores de particiones de $[a,b]$, de forma similar a las hechas en la Definición 16.3 y la Observación 16.3 (en la Figura 16.9 se puede ver un ejemplo de estos volúmenes inferiores y superiores), con lo que el volumen se puede calcular mediante la siguiente integral definida

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.}$$

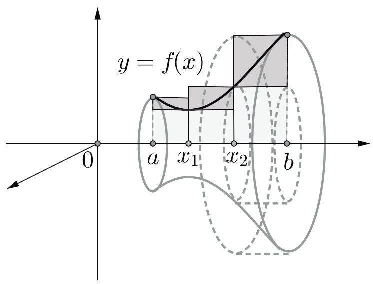


Figura 16.9: Volúmenes inferiores y superiores para el sólido de revolución de la Figura 16.8.

Ejemplo 16.10 El volumen que engendra la parábola $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje OX entre las abscisas 0 y 4 es

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2\,dx = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=4} = 8\pi \simeq 25'1327. \quad \square$$

16.3.4. Área de una superficie de revolución

Al hacer girar el segmento de longitud ℓ que une el punto (x_1, r_1) con el punto (x_2, r_2), con $x_1 < x_2$, se obtiene un tronco de cono como el de la Figura 16.10. De esta forma, utilizando el Lema 16.1, se tiene que el área lateral de la superficie del tronco de cono de la Figura 16.10 (sin incluir el área de sus dos bases) es

$$A([x_1, x_2]) = \pi(r_1 + r_2)\ell.$$

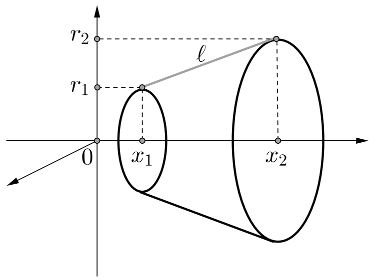


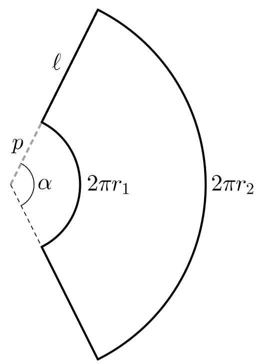
Figura 16.10: Tronco de cono.

Lema 16.1 *El área lateral A de la superficie del tronco de cono de la Figura 16.10* (*sin incluir el área de sus dos bases*) *es*

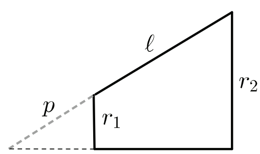
$$A = \pi(r_1 + r_2)\ell.$$

DEMOSTRACIÓN. El área lateral A del tronco de cono es igual al área de su desarrollo lateral, representado en la Figura 16.11(a). Aplicando el Corolario 7.1, se tiene que el ángulo de la sección circular en la que está contenido el desarrollo lateral del tronco de cono es

$$\alpha = \frac{2\pi r_2}{p + \ell} = \frac{2\pi r_1}{p}.$$



(a) Área del tronco de cono.



(b) Relación entre p, r_1 y r_2.

Figura 16.11: Área lateral del tronco de cono A.

Por tanto, el área A buscada es igual al área de la sección circular de radio $p+\ell$ y ángulo α menos el área de la sección circular de radio p y ángulo α. Ahora bien, como el área de un círculo (equivalente a una sección circular de ángulo 2π) de radio k es πk^2 (véase el Ejemplo 16.7), el área de una sección circular de radio k y ángulo α es

$$\pi k^2 \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Por tanto, eligiendo $k = p + \ell$ y $k = p$, se tiene que el área buscada es

$$A = \pi(p+\ell)^2 \frac{2\pi r_2}{2\pi(p+\ell)} - \pi p^2 \frac{2\pi r_1}{2\pi p} = \pi\big((p+\ell)r_2 - pr_1\big). \tag{16.11}$$

Ahora, de la relación geométrica entre p, r_1 y r_2 que se observa en la Figura 16.11(b), por el *teorema de semejanza AAA* (véase el Teorema 7.2) se tiene que

$$\frac{r_2}{p+\ell} = \frac{r_1}{p} \;\Rightarrow\; pr_2 = pr_1 + \ell r_1,$$

lo que implica que

$$p = \frac{\ell r_1}{r_2 - r_1} \;\text{ y }\; p + \ell = \frac{\ell r_2}{r_2 - r_1}.$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (16.11), se concluye que

$$A = \pi\left(\frac{\ell r_2^2}{r_2 - r_1} - \frac{\ell r_1^2}{r_2 - r_1}\right) = \pi\left(\frac{(r_2 - r_1)(r_1 + r_2)}{r_2 - r_1}\right)\ell = \pi(r_1 + r_2)\ell. \quad \square$$

Al hacer girar un arco de curva $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$ alrededor del eje de abscisas, se engendra un sólido de revolución como el de la Figura 16.8, cuyo volumen se ha estudiado en la Sección 16.3.3. El área A de este cuerpo de revolución, sin contar el área de las superficies correspondientes a $x = a$ y $x = b$, se obtiene de la siguiente forma (nuevamente, sin entrar en detalles rigurosos): sea $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. De acuerdo de nuevo con el Lema 16.1, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, el área del tronco de cono que resulta al girar el segmento que va del punto $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ al punto $(x_i, f(x_i))$ alrededor del eje de abscisas es

$$A([x_{i-1}, x_i]) = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\ell_i, \tag{16.12}$$

siendo ℓ_i la longitud del segmento que va del punto $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ al punto $(x_i, f(x_i))$, es decir,

$$\ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \tag{16.13}$$

Por un lado, dado que

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

es el promedio de $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$, por el *teorema de los Valores Intermedios* (véase el Teorema 11.3) existe $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\xi_i). \tag{16.14}$$

Además, por el *teorema del Valor Medio* (véase el Teorema 13.4), existe $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{16.15}$$

Sustituyendo (16.14) en (16.12) y (16.15) en (16.13), se obtiene que

$$\begin{cases} A([x_{i-1}, x_i]) = 2\pi f(\xi_i)\ell_i \\ \ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\eta_i))^2(x_i - x_{i-1})^2} = \sqrt{1 + (f'(\eta_i))^2}\,(x_i - x_{i-1}), \end{cases}$$

de donde

$$A([x_{i-1}, x_i]) = 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + (f'(\eta_i))^2}\,(x_i - x_{i-1}),$$

con $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Sumando el área correspondiente a todos los intervalos y pasando al límite se obtiene que

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.}$$

Ejemplo 16.11 La esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$ se obtiene al girar la curva

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

alrededor del eje OX entre las abscisas $-r$ y r. Por tanto, el área de dicha esfera es

$$A = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r\,dx = 2\pi r\,[x]_{x=-r}^{x=r} = 4\pi r^2.$$

Como se aprecia, el área de una esfera de radio r coincide con la suma de las áreas de cuatro círculos de radio r. $\square$

16.4. Problemas

16.1. Se considera la función $f(x) = x^2 + x + 1$ en el intervalo $[1, 4]$. Hallar el valor ξ que determina el *teorema del Valor Medio Integral*.

16.2. Hallar el valor de las integrales definidas:

$$\text{a)} \int_0^1 e^x\,dx \qquad\qquad \text{b)} \int_0^{e^{\sqrt{2}}} \sqrt[\pi]{x}\,dx.$$

16.3. Utilizar la integración por partes para calcular el valor de la integral

$$\int_1^2 x^5 \ln(x)\,dx.$$

16.4. Hallar el área del recinto limitado por las curvas

$$y = x^3 - 3x + 8 \ \text{ e } \ y = -3x$$

entre las abscisas -3 y 0.

16.5. Determinar el área del recinto delimitado por las curvas

$$y = x,\ y = x^2 \ \text{ e } \ y = \frac{x^2}{4}.$$

16.6. Calcular el área del recinto delimitado por la gráfica del polinomio

$$P(x) = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$$

y el eje de abscisas.

16.7. Determinar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 66x - 70 \ \text{ y } \ g(x) = x^2 - 13x + 50.$$

16.8. Calcular la longitud de una circunferencia de radio r a través de una adecuada integral definida.

16.9. Determinar la longitud de la curva

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}} \quad (p > 0),$$

conocida como *astroide* y representada en la Figura 16.12.

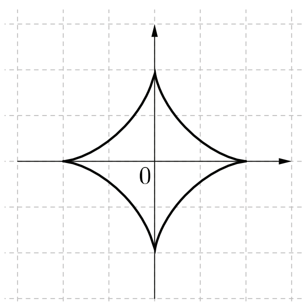


Figura 16.12: Astroide con $p = 2$.

16.10. Hallar el volumen de una esfera de radio r como el volumen de revolución de una curva $y = f(x)$.

16.11. Determinar el volumen de un cono circular con radio de la base r y altura h como el volumen de revolución de una curva $y = f(x)$.

16.12. Calcular el volumen que determina la sinusoide

$$y = \operatorname{sen}(x)$$

cuando gira alrededor del eje OX entre las abscisas 0 y π.

16.13. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la gráfica de la función

$$f(x) = x^2 - x$$

entre las abscisas 0 y 1 respecto al eje de abscisas.

16.14. Calcular el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva

$$y = 2\sqrt{x} \ \text{ con } \ x \in [0, 3],$$

alrededor del eje de abscisas.

16.5. Soluciones

16.1. $\xi = \dfrac{\sqrt{39} - 1}{2} \simeq 2'6225.$

16.2. a) $e - 1 \simeq 1'7183$ b) $\dfrac{\pi}{1+\pi}\, e^{\frac{(1+\pi)\sqrt{2}}{\pi}} \simeq 4'8941.$

16.3. $\dfrac{32}{3}\ln(2) - \dfrac{7}{4} \simeq 5'6436.$

16.4. $\dfrac{81}{4} = 20'25.$

16.5. $\dfrac{5}{2} = 2'5.$

16.6. $\dfrac{16}{15} \simeq 1'0667.$

16.7. $\dfrac{253}{12} \simeq 21'0833.$

16.8. La longitud de una circunferencia de radio r es el doble de la longitud de la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ entre $-r$ y r. Haciendo dicho cálculo, se obtiene que la longitud buscada es $2\pi r$.

16.9. $6p$.

16.10. Calculando el volumen de revolución al girar la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje de abscisas, se obtiene que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

16.11. Al hacer girar la recta $y = \frac{r}{h}\,x$ alrededor del eje de abscisas entre las abscisas $x = 0$ y $x = h$, se obtiene que el volumen de un cono circular con radio de la base r y altura h es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

16.12. $\dfrac{\pi^2}{2} \simeq 4'9348.$

16.13. $\dfrac{\pi}{30} \simeq 0'1047.$

16.14. $\dfrac{56\pi}{3} \simeq 58'6431.$

Parte III

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

17 Análisis combinatorio

17.1. Introducción

Hay muchas situaciones cotidianas y científicas que requieren el recuento de casos o cosas. Por ejemplo, el número de butacas en un teatro, el número de posibles resultados de una quiniela, el número de grupos de 3 personas de una clase de 45 alumnos, el número de posibles códigos de seguridad con 3 letras y 2 números ...

Un área científica en la que este tipo de recuento es de especial importancia es la *Probabilidad* (que estudiaremos en el Capítulo 19), pues, como se verá, en muchas situaciones se necesita "contar casos" para el cálculo de probabilidades.

Este capítulo está dedicado a la *Combinatoria*, que es una disciplina que se encarga de desarrollar herramientas para el recuento de casos, posibilidades o cosas, en determinadas situaciones generales de interés. En este contexto se mostrarán, con adecuados ejemplos, algunas de estas herramientas y se harán las demostraciones de los resultados correspondientes. En particular estudiaremos las *variaciones* (incluyendo las *permutaciones*, que son un caso particular de variaciones) y las *combinaciones*. Mostraremos el interés de unas y otras y su relación con el *reemplazamiento* (o repetición) y el *orden*, cuando se trata de contar las maneras de escoger r objetos de un conjunto de n elementos.

17.2. Permutaciones. Variaciones

Supongamos que tenemos n objetos distintos. ¿De cuántas formas pueden agruparse, teniendo en cuenta su orden?

Definición 17.1 La cantidad de posibles ordenaciones de n elementos distintos se llama *permutación* y se denota P_n (permutación de n elementos). $\square$

Proposición 17.1 *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se verifica que* $\boxed{P_n = n!}$

DEMOSTRACIÓN. Agrupar n objetos distintos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es equivalente a ponerlos en una caja con n compartimentos en algún orden específico. La primera casilla puede llenarse de n maneras; por cada una de esas n maneras de llenar la primera casilla, la segunda puede llenarse de $n-1$ maneras, por lo que tenemos $n(n-1)$ maneras de llenar las dos primeras casillas; por cada una de esas $n(n-1)$ maneras hay $n-2$ maneras de llenar la tercera casilla, por lo que tenemos $n(n-1)(n-2)$ maneras de llenar las tres primeras casillas. Este proceso se continúa hasta llegar a la última casilla, para la que, una vez llenadas las anteriores, sólo queda una manera de llenarla. Esquemáticamente:

casilla 1	casilla 2	casilla 3	$\cdots$	casilla $n-1$	casilla n
n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	2	1

Luego el número de maneras en que pueden rellenarse las n casillas es

$$P_n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n! \quad \square$$

Ejemplo 17.1 Las diferentes formas en que pueden colocarse las letras A, B y C vienen dadas por $P_3 = 3! = 6$; las posibles ordenaciones son

$$\{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}. \quad \square$$

Supongamos ahora que tenemos n objetos distintos y tomamos una cantidad $r \leq n$ de esos objetos. Teniendo en cuenta el orden, ¿cuántas ordenaciones distintas habrá?

Definición 17.2 El número de ordenaciones de n elementos distintos en los que sólo intervienen $r \leq n$ elementos en cada ordenación y se tiene en cuenta el orden de las mismas se llama *variación* y se denota $V_{n,r}$ (variación de n elementos tomados de r en r). $\square$

Proposición 17.2 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n$ se verifica que*

$$\boxed{V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1).}$$

DEMOSTRACIÓN. Recurrimos al mismo esquema de la demostración de la Proposición 17.1 de llenar una caja que tiene n componentes sólo que, ahora, nos detendremos después de haber llenado el compartimento r–ésimo. Así, tal y como se ha visto en la demostración de la Proposición 17.1, la primera casilla puede llenarse de n maneras; por cada una de las n maneras anteriores la segunda casilla puede llenarse de $n-1$ maneras; por cada una de las $n(n-1)$ maneras anteriores la tercera casilla puede llenarse de $n-2$ maneras ... y la casilla r–ésima puede llenarse de $n-(r-1)$ maneras. Esquemáticamente:

casilla 1	casilla 2	casilla 3	$\cdots$	casilla $r-1$	casilla r
n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	$n-r+2$	$n-r+1$

Luego, $V_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)$. $\square$

Observación 17.1 Nótese que $V_{n,n} = n! = P_n$ y $V_{n,1} = n$. $\square$

Ejemplo 17.2 El número de parejas que pueden formarse con las letras A, B y C, sin que éstas aparezcan repetidas y teniendo en cuenta el orden, es $V_{3,2} = \dfrac{3!}{1!} = 6$:

$$\{AB, AC, BA, BC, CA, CB\}. \quad \square$$

Si tenemos n elementos distintos y queremos formar grupos de r elementos sin que importe que se repitan pero teniendo en cuenta su orden, ¿cuántas ordenaciones hay?

Definición 17.3 El número de ordenaciones de n elementos distintos en los que sólo intervienen $r \leq n$ elementos en cada ordenación, pudiendo aparecer elementos repetidos y teniendo en cuenta el orden de las mismas, se llama *variación con repetición* y se denota $RV_{n,r}$ (variación con repetición de n elementos tomados de r en r). $\square$

Proposición 17.3 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n$ se verifica que*

$$\boxed{RV_{n,r} = n^r.}$$

DEMOSTRACIÓN. Recurrimos nuevamente al esquema de llenar una caja que tiene n componentes de forma que nos detendremos después de haber llenado el compartimento r–ésimo. Como los elementos pueden aparecer repetidos, cada una de las r casillas puede llenarse de n maneras. Esquemáticamente:

casilla 1	casilla 2	casilla 3	$\cdots$	casilla $r-1$	casilla r
n	n	n	$\cdots$	n	n

Luego, $RV_{n,r} = n \times \overset{r)}{\cdots} \times n = n^r$. $\square$

Ejemplo 17.3 El número de parejas que pueden formarse con las letras A, B y C, pudiendo aparecer éstas repetidas y teniendo en cuenta el orden, es $RV_{3,2} = 3^2 = 9$:

$$\{AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC\}. \quad \square$$

Ejemplo 17.4 El número total de "combinaciones" de una caja fuerte de 4 números es

$$RV_{10,4} = 10^4 = 10000$$

(lo cual era obvio en este caso, pues hay tantas posibilidades como números de 4 dígitos más el cero). Entre éstas, el número de ordenaciones sin dígitos repetidos es

$$V_{10,4} = \frac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040. \quad \square$$

17.3. Combinaciones

Supongamos que tenemos n objetos distintos y tomamos una cantidad $r \leq n$ de esos objetos. ¿Cuántas posibilidades, sin considerar el orden de los elementos, habrá?

Definición 17.4 Una *combinación* de los elementos de un conjunto es una selección de éstos sin importar el orden. El número de combinaciones de n objetos tomando r a la vez es el número de subconjuntos, cada uno de tamaño r, que pueden formarse a partir de los n objetos y se denota $C_{n,r}$ (combinación de n elementos tomados de r en r). $\square$

Observación 17.2 La diferencia entre una *variación* y una *combinación* es que la primera centra su interés en contar todas las posibles selecciones y todas las permutaciones de éstas, mientras que en la segunda el interés recae únicamente en contar el número de selecciones diferentes. De esta forma, ABC y ACD son diferentes combinaciones de 3 letras, mientras que ACD y ADC son permutaciones de la misma combinación. $\square$

Proposición 17.4 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n$ se verifica que*

$$\boxed{C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.}$$

DEMOSTRACIÓN. En la Proposición 17.2 se ha visto que el número de maneras de elegir r objetos entre n y luego permutarlos es

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1).$$

Como, una vez que se han elegido los r objetos, hay $r!$ maneras de permutarlos, entonces

$$C_{n,r} = \frac{V_{n,r}}{P_r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$

(véase la Definición 2.12). $\square$

Observación 17.3

a) Los números $\binom{n}{r}$ a menudo se llaman *coeficientes binomiales*, pues aparecen como coeficientes en el desarrollo de $(a+b)^n$. En efecto, como vimos en el *binomio de Newton* (véase el Teorema 2.1), para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots$$
$$+ \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

b) Entre las propiedades más importantes de los números combinatorios recordamos las siguientes:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, \ \binom{n}{n-1} = n, \ \binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}, \ \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

(véase la Observación 2.8). □

Ejemplo 17.5 En una empresa se presentan 10 hombres y 4 mujeres para ocupar 5 puestos de trabajo. Si el jefe de personal decide que de los 5 puestos 3 deben ser para hombres y 2 para mujeres, ¿cuántos grupos de 5 personas en esas condiciones habrá?

El número de posibilidades de seleccionar 3 hombres de un grupo de 10 es

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120.$$

Análogamente, el número de maneras en que pueden seleccionarse 2 mujeres de entre 4 es

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

Como por cada una de las 120 posibilidades de elegir los 3 hombres hay 6 posibilidades de elegir las 2 mujeres (o por cada una de las 6 posibilidades de elegir las 2 mujeres hay 120 posibilidades de elegir los 3 hombres), se tiene que el número de posibles grupos de 5 personas, en las condiciones deseadas, es

$$\binom{10}{3}\binom{4}{2} = 120 \times 6 = 720. \quad \square$$

Observación 17.4 En general, si de entre un total de N artículos elegimos n de ellos al azar, sin reemplazamiento, hay $\binom{N}{n}$ muestras posibles diferentes. Si los N artículos están formados por r_1 de una clase A y $r_2 = N - r_1$ de otra clase B, el número de agrupaciones de n elementos que contienen exactamente s_1 de A y $s_2 = n - s_1$ de B viene dado por el modelo *hipergeométrico*:

$$\boxed{\binom{r_1}{s_1}\binom{N-r_1}{n-s_1}} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} N & \left\{ \begin{array}{ll} r_1 & \text{de } A \\ r_2 = N - r_1 & \text{de } B \end{array} \right. \\ n & \left\{ \begin{array}{ll} s_1 & \text{de } A \\ s_2 = n - r_1 & \text{de } B. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \square$$

Observación 17.5 Cuando se hable de escoger artículos al azar, es muy importante especificar si escogemos con o sin *reemplazamiento*. Por ejemplo, si inspeccionamos un número de artículos manufacturados con el objeto de descubrir cuántos defectuosos podría haber, generalmente no pretendemos inspeccionar el mismo artículo dos veces, por lo que sería sin reemplazamiento. Hemos estudiado diversas maneras de escoger r objetos entre n:

a) Sin reemplazamiento e importando el orden: $V_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

b) Sin reemplazamiento y sin importar el orden: $C_{n,r} = \dbinom{n}{r}$.

c) Con reemplazamiento e importando el orden: $RV_{n,r} = n^r$. □

Ejemplo 17.6 Algunas elecciones posibles al escoger dos letras al azar entre A, B, C, D:

a) Sin reemplazamiento e importando el orden: $V_{4,2} = \dfrac{4!}{2!} = 12$. Estas elecciones son:

$$\{AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB, DC\}$$

(se indican las letras elegidas y el orden de selección; nótese, p. e., que $AB \neq BA$).

b) Sin reemplazamiento y sin importar el orden: $C_{4,2} = \dbinom{4}{2} = 6$. Las elecciones posibles son:

$$\{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$$

(sólo se indican cuáles fueron las dos letras elegidas y no el orden en que se escogieron).

c) Con reemplazamiento e importando el orden: $RV_{4,2} = 4^2 = 16$. Estas elecciones son:

$$\{AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC, DD\}$$

(ahora se indican las letras elegidas y el orden de selección). □

Supongamos ahora que tenemos n objetos distintos y tomamos una cantidad r de esos objetos, no necesariamente distintos. ¿Cuántas ordenaciones, sin considerar el orden de los elementos, habrá?

Definición 17.5 El número de maneras de escoger r elementos de un conjunto de n elementos, con posible repetición y sin importar el orden, se llama *combinación con repetición* y se denota $RC_{n,r}$ (combinación con repetición de n elementos tomados de r en r). □

Proposición 17.5 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n$ se verifica que*

$$\boxed{RC_{n,r} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}.} \tag{17.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Cada elección de r elementos de un conjunto de n elementos, con posible repetición y sin importar el orden, se puede caracterizar por una ordenación de r números 1 y $n-1$ números 0, en la que cada número 0 separa los elementos elegidos de cada uno de los n elementos. Por ejemplo, si tenemos un conjunto de 4 elementos A, B, C y D, la ordenación

$$1101011011$$

caracteriza la elección de 7 elementos (con posible repetición y sin importar el orden) de los 4 elementos del conjunto inicial, en la que 2 elementos son de A, 1 elemento es de B, 2 elementos son de C y 2 elementos son de D. Del mismo modo,

$$0011101111$$

caracteriza la elección en la que 0 elementos son de A, 0 elementos son de B, 3 elementos son de C y 4 elementos son de D. En este ejemplo concreto el número de posibilidades es el número de posibles elecciones de 7 posiciones para los números 1 entre un total de $10\,(= 4+7-1)$ posibles posiciones, es decir, $\binom{10}{7}$, lo cual, obviamente, coincide con el número de posibles elecciones de 3 posiciones para los números 0 entre un total de $10\,(= 4+7-1)$ posibles posiciones, es decir, $\binom{10}{3}$.

Para el caso general tendremos que elegir r posiciones para los números 1 entre un total de $n+r-1$ posibles posiciones, es decir, $\binom{n+r-1}{r}$, que coincide con el número de posibles elecciones de $n-1$ posiciones para los números 0 entre un total de $n+r-1$ posibles posiciones, es decir, $\binom{n+r-1}{n-1}$. $\square$

Ejemplo 17.7 El número de formas distintas de colocar 5 bolas indistinguibles en tres urnas numeradas U_1, U_2 y U_3 es

$$RC_{3,5} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{2!5!} = 21.$$

Concretamente, las disposiciones de las bolas en las urnas son

$$\{500, 410, 401, 311, 320, 302, 221, 212, 230, 203, 104,$$
$$113, 122, 140, 131, 014, 005, 023, 032, 041, 050\}.$$

Si se piensa en la disposición de números 1 y 0 descrita en la demostración de la Proposición 17.5, el problema equivale a elegir 5 posiciones para los números 1 entre un total de $3+5-1=7$ posibles posiciones. Por ejemplo, 1111100 se corresponde con el caso de colocar todas las bolas en la urna U_1; 1111010 se corresponde con el caso de colocar 4 bolas en la urna U_1, 1 bola en la urna U_2 y ninguna bola en la urna U_3. Se recomienda al lector pensar de esta forma la solución de este tipo de problemas, en lugar de memorizar la fórmula (17.1).

En general, el número de formas de colocar r bolas indistinguibles en n urnas viene dado por (17.1). □

Observación 17.6 Hasta ahora hemos presentado métodos de enumeración para objetos diferentes (es decir, *distinguibles*). Sin embargo, no siempre es éste el caso. Supongamos que tenemos que elegir n objetos de forma que haya n_1 de una clase A_1, n_2 de una clase $A_2, \ldots, n_k$ de una clase A_k, con $n_1+n_2+\cdots+n_k = n$. El número de *permutaciones* de esos objetos está dado por

$$\boxed{P_{n;n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} = \binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_k},}$$

que equivale al número total de permutaciones ($n!$) que se tendría si todos los objetos fuesen diferentes, dividido por las permutaciones de cada uno de los grupos A_j, con $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, que se corresponden con la misma elección. □

Ejemplo 17.8 Las diferentes formas en que pueden disponerse las letras A, A, B y C son

$$P_{4;2,1,1} = \frac{4!}{2!1!1!} = 4 \times 3 = 12.$$

Concretamente, las posibles disposiciones de las letras A, A, B y C son

$$\{AABC, AACB, ABCA, ABAC, ACBA, ACAB,$$
$$BAAC, BACA, BCAA, CAAB, CABA, CBAA\}. \quad \square$$

17.4. Problemas

17.1. ¿De cuántas maneras puede vestirse un muchacho que tiene 3 camisas y 4 pantalones?

17.2. ¿Cuántas matrículas de automóviles pueden formarse con 4 cifras y 3 consonantes (de 22)?

17.3. Alrededor de una mesa hay 4 sillas numeradas del 1 al 4. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse en ellas 4 personas?

17.4. ¿Qué número de quinielas de fútbol deben rellenarse para acertar con seguridad 14 resultados?

17.5. ¿Cuántos números de 2 cifras pueden formarse con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5$?

17.6. ¿Cuántos números de 2 cifras distintas pueden formarse con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5$?

17.7. Tres amigos van a una papelería para comprarse cada uno un bolígrafo. Si hay bolígrafos de 6 colores distintos, ¿cuál es el número posible de elecciones?

17.8. Si 3 amigos eligen un bolígrafo cada uno de entre 6 bolígrafos distintos, ¿cuál es el número total de elecciones?

17.9. ¿De cuántas formas distintas pueden escogerse 3 bolígrafos de un total de 6 bolígrafos distintos?

17.10. ¿Cuántos números de 6 cifras pueden formarse con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5$ de forma que empiecen y terminen por 2?

17.11. Si en una carrera compiten 10 corredores y se clasifican los 3 primeros para la fase siguiente, ¿de cuántas formas distintas puede producirse la clasificación sin tener en cuenta el orden de los corredores al clasificarse?

17.12. Si en una carrera compiten 10 corredores y se clasifican los 3 primeros para la fase siguiente, ¿de cuántas formas distintas puede producirse la clasificación teniendo en cuenta el orden de los corredores al clasificarse?

17.13. Determinar el número de formas de escoger 5 bolas del interior de un saco que contiene 20 bolas distinguibles.

17.14. ¿De cuántas formas puede desdoblarse una clase de 11 alumnos en dos grupos, uno de 5 y otro de 6 alumnos?

17.15. Para una competición de ciclismo se eligen 6 ciclistas del equipo A (que tiene 12 en total) y otros 6 ciclistas del equipo B (que dispone de 8). ¿Cuántas carreras distintas pueden organizarse de forma que dos de ellas se diferencien en algún corredor?

17.16. Si se tienen 5 libros cuya única diferencia es el color y 2 de ellos son verdes y 3 azules, ¿de cuántas formas distintas pueden situarse en una estantería?

17.17. Un tren se compone de un vagón de primera, tres de segunda, un coche restaurante y cuatro coches cama. ¿De cuántas formas pueden disponerse los vagones?

17.18. ¿Cuántas palabras de 5 signos pueden formarse en el *alfabeto Morse* con 3 rayas y 2 puntos?

17.5. Soluciones

17.1. 12.

17.2. 106480000.

17.3. 24.

17.4. 4782969.

17.5. 25.

17.6. 20.

17.7. 216.

17.8. 120.

17.9. 20.

17.10. 625.

17.11. 120.

17.12. 720.

17.13. 15504.

17.14. 462.

17.15. 25872.

17.16. 10.

17.17. 2520.

17.18. 10.

18 Estadística descriptiva unidimensional

18.1. Introducción

A pesar de que mucha gente puede creer que la *Estadística* consiste en realizar meras descripciones numéricas (principalmente por noticias y datos que aparecen diariamente en la prensa y en los medios de comunicación), en términos más precisos la Estadística es el estudio de fenómenos aleatorios (tal y como se definen en el Capítulo 19), y su aspecto más importante consiste en la *Inferencia Estadística*. Se distingue entre:

a) **Estadística Descriptiva**: consiste en un conjunto de métodos de descripción para conjuntos numerosos y puede considerarse un paso previo a la Estadística Inferencial. Cuando el conjunto de datos es muy numeroso, esta gran cantidad de información puede resultar confusa y poco transparente; es por ello por lo que se necesitan técnicas que nos permitan asimilar de una forma razonable toda la información anterior. La Estadística Descriptiva, como método de descripción numérica, no necesita el concepto de probabilidad.

b) **Estadística Inferencial**: su aspecto más importante es la obtención de conclusiones basadas, principalmente, en datos experimentales y en nociones de probabilidad (como las que se muestran en el Capítulo 19).

En este capítulo se muestran herramientas de la *Estadística Descriptiva unidimensional* (es decir, asociada a datos que se pueden representar como números reales) junto con ejemplos ilustrativos y una breve introducción a la *Estadística Inferencial*. Para un estudio de la Estadística Descriptiva bidimensional (o multidimensional) y de la Inferencia Estadística remitimos al lector a textos más avanzados sobre esta materia como [1].

18.2. Medidas numéricas descriptivas

En esta sección definimos algunas medidas numéricas que usualmente se emplean para describir conjuntos de datos. Fundamentalmente se distinguen tres tipos de medidas de interés:

a) La *tendencia central*: disposición de los datos para agruparse alrededor de ciertos valores.

b) La *variabilidad*: dispersión de los datos en el conjunto.

c) La *posición*: situación de ciertos valores destacados en los datos.

18.2.1. Generalidades

Supondremos que el conjunto de datos que tenemos es un conjunto de números de uno de los siguientes tipos:

1) Un conjunto de números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, posiblemente repetidos. Por ejemplo: $\{1, 2, 2, 5, 2, 4, 3, 3, 8, 5\}$.

2) Cuando el conjunto de números es muy grande, para poder manejarlo de una forma más cómoda conviene agruparlos en ciertos intervalos denominados *clases* o *intervalos de agrupación*. Los datos organizados en clases se llaman *datos agrupados*. La *marca de clase* es el punto medio del intervalo de clase. Por lo general, todas las observaciones pertenecientes a una misma clase se "identifican" con la *marca de clase*, es decir, en la marca de clase se "concentra" toda la información del intervalo de clase. En estos casos se proporciona el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de las marcas de clase junto con la "frecuencia absoluta" o "relativa" de cada uno de ellos:

   a) La *frecuencia absoluta* n_i de x_i es el número de veces que aparece x_i en el conjunto.

   b) La *frecuencia relativa* f_i de x_i es el cociente entre la frecuencia absoluta n_i de x_i y el número total de elementos del conjunto $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_n$. Es decir,

   $$f_i = \frac{n_i}{n},\ i = 1, 2, \ldots, n_n.$$

   Nótese que

   $$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{n}{n} = 1.$$

   Las frecuencias relativas también suelen expresarse como un porcentaje y, como acabamos de probar, la suma de las frecuencias relativas de todas las clases es 1 (o sea, el 100%).

También se pueden considerar:

a) La *frecuencia acumulativa* N_i, que se obtiene sumando las frecuencias absolutas con índices menores o iguales a i, es decir,

$$N_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_i.$$

b) La *frecuencia relativa acumulativa* F_i, que se obtiene sumando las frecuencias relativas con índices menores o iguales a i, es decir,

$$F_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_i.$$

Otra forma de obtener F_i es dividiendo la frecuencia acumulativa N_i entre el tamaño n de la muestra, ya que

$$F_i = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \cdots + \frac{n_i}{n} = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_i}{n} = \frac{N_i}{n}.$$

Ejemplo 18.1 La siguiente tabla muestra la altura (en metros) de los empleados de una oficina:

$1'68$	$1'59$	$1'72$	$1'75$	$1'50$	$1'84$	$1'56$	$1'60$	$1'68$
$1'83$	$1'72$	$1'76$	$1'58$	$1'75$	$1'80$	$1'64$	$1'74$	$1'69$
$1'64$	$1'72$	$1'59$	$1'52$	$1'80$	$1'62$	$1'71$	$1'73$	$1'71$

Agrupando, por ejemplo, los datos anteriores en 4 clases de igual longitud, se obtiene la siguiente tabla:

Clase	Marca de clase	n_i	f_i	N_i	F_i
$[1'50, 1'60]$	$1'55$	7	$\frac{7}{27} \simeq 0'2593$	7	$\frac{7}{27} \simeq 0'2593$
$(1'60, 1'70]$	$1'65$	6	$\frac{2}{9} \simeq 0'2222$	13	$\frac{13}{27} \simeq 0'4815$
$(1'70, 1'80]$	$1'75$	12	$\frac{4}{9} \simeq 0'4444$	25	$\frac{25}{27} \simeq 0'9259$
$(1'80, 1'90]$	$1'85$	2	$\frac{2}{27} \simeq 0'0741$	27	$\frac{27}{27} = 1$
TOTAL		27	1		

Observación 18.1 Aunque el proceso de agrupamiento destruye, en general, detalles de los datos iniciales, es muy ventajosa la visión nítida obtenida y las relaciones que, a veces, saca a la luz. □

En algunas ocasiones, cuando el volumen de datos no es muy grande, las clases pueden tomarse como números (en lugar de intervalos). Así, para el ejemplo anterior $\{1, 2, 2, 5, 2, 4, 3, 3, 8, 5\}$, podemos agrupar los elementos del conjunto anterior mediante la tabla

x_i	1	2	3	4	5	8
n_i	1	3	2	1	2	1
f_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
N_i	1	4	6	7	9	10
F_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{10}$	1

18.2.2. Medidas de tendencia central

Las medidas de centralización se denominan así porque pretenden resumir toda la distribución en un solo valor y dan una idea del *centro* de la distribución o del valor alrededor del cual se distribuyen los datos.

Media aritmética

La *media aritmética* de los números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es el promedio de dichos números, es decir,

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Ejemplo 18.2 La media aritmética de los números $\{8, 3, 5, 12, 10\}$ es

$$\overline{x} = \frac{8 + 3 + 5 + 12 + 10}{5} = 7'6. \quad \square$$

Observación 18.2 La media aritmética tiene la propiedad de equilibrar las desviaciones positivas y negativas de los datos respecto a su valor. Es decir, la suma de las diferencias entre los datos y la media aritmética vale cero, puesto que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\overline{x} = 0. \tag{18.1}$$

Actúa, por tanto, como *centro geométrico* o *centro de gravedad* para el conjunto de puntos. $\square$

Observación 18.3 Para calcular la media de un conjunto de datos agrupados, si n es el número de clases y x_i es la marca de la i–ésima clase, entonces, suponiendo que n_i y f_i

son, respectivamente, las frecuencias absoluta y relativa de la clase x_i, se tiene que

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i.}$$

Ejemplo 18.3 Si los números $\{5, 8, 6, 2\}$ han ocurrido $\{3, 2, 4, 1\}$ veces, respectivamente, entonces

$$\overline{x} = \frac{3 \times 5 + 2 \times 8 + 4 \times 6 + 1 \times 2}{3 + 2 + 4 + 1} = \frac{57}{10} = 5'7. \quad \square$$

Mediana

La *mediana* de los números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es el valor para el cual, ordenados los datos de menor a mayor, la mitad de éstos es menor que ella y la otra mitad mayor. Es, por tanto, su valor central si el número de datos es impar o la semisuma de los dos centrales si el número de datos es par, es decir,

$$\boxed{M = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{si} \quad n \text{ es par.} \end{cases}}$$

Ejemplo 18.4 La mediana de los números $\{3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10\}$ es $M = 6$, mientras que la mediana de $\{5, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 18\}$ es $M = \frac{9+11}{2} = 10$. $\square$

Observación 18.4 Para calcular la mediana con datos agrupados suele utilizarse el diagrama de frecuencias relativas acumulativas que se define en la Sección 18.4. Más adelante, en la Observación 18.22, veremos cómo hacer este cálculo. $\square$

Moda

La *moda* es el valor (o valores) de los datos que ocurre con mayor frecuencia absoluta (muestra hacia qué valor tienden los datos a agruparse) y, por tanto, coincide con alguno (o algunos) de ellos. Si todos los valores de los datos se repiten con la misma frecuencia absoluta, se dice que *no hay moda*.

Ejemplo 18.5 La moda de los números $\{2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18\}$ es 9. $\square$

Desde el punto de vista descriptivo las tres medidas anteriores proporcionan información complementaria:

a) La *media* es preferible si los datos son homogéneos; sin embargo, es muy sensible a valores de datos atípicos y un valor anormal o un error en los datos puede modificarla notablemente.

Ejemplo 18.6 La media arimética de los números $\{1'9, 1'99, 2, 2'01, 2'1\}$ es 2, mientras que la media aritmética de $\{1'9, 1'99, 2, 2'01, 1000\}$ es $201'58$. □

b) La *mediana* sólo tiene en cuenta el orden de los datos y no su magnitud, por lo que puede no alterarse mucho si una pequeña parte de éstos contiene errores grandes de medida.

Ejemplo 18.7 La mediana de los números $\{-5, -2, 1, 3, 4\}$ y $\{-5, -2, 1, 3, 4000\}$ es 1. □

c) La *moda* puede no existir y, aun existiendo, no ser única, ya que puede ocurrir que las frecuencias absolutas más altas se encuentren compartidas por dos o más valores de los datos. En estos casos la moda tiene una utilidad limitada como medida de tendencia central.

Ejemplo 18.8 El conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ no tiene moda y $\{1, 2, 2, 3, 4, 4, 5\}$ tiene dos modas: 2 y 4 (se dice por ello que es *bimodal*). □

Observación 18.5 Nótese que la media, la mediana ... de un conjunto de datos no tiene por qué coincidir con la media, la mediana ... de los mismos datos agrupados. No obstante, si las clases se van haciendo más pequeñas, las correspondientes medias, medianas ... se van "acercando" a las de los datos sin agrupar. Esto mismo sucede con las medidas de dispersión que se estudian en la Sección 18.2.3. □

18.2.3. Medidas de dispersión

Las secuencias de datos

x	$2'89$	$2'90$	$3'00$	$3'10$	$3'11$
y	$-1000'00$	$-100'00$	$15'00$	$100'00$	$1000'00$

(18.2)

tienen la misma media $\overline{x} = \overline{y} = 3$, pero los datos están más agrupados alrededor de la media en el primer caso que en el segundo. Es por ello interesante introducir medidas de variabilidad de los datos (se llaman así porque miden el grado de concentración de la distribución alrededor de ciertos valores). Entre las principales medidas de dispersión destacamos:

Rango

El *rango* o *recorrido* de un conjunto de datos es la diferencia entre su valor más grande y el más pequeño. Así, en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ el rango es $4 - 1 = 3$.

Observación 18.6 Como se observa, el rango no aporta mucha información respecto a la dispersión de los datos, pues nada dice acerca de los datos en estudio. Es por esto por lo que se consideran otras medidas de dispersión que contemplan la distribución que tiene la masa de datos con respecto a alguna referencia común, como puede ser la media. $\square$

Varianza

La *varianza* de los números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es el promedio de los cuadrados de las desviaciones de los datos con respecto a su media, es decir,

$$\boxed{s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,}$$

siendo $\overline{x}$ la media de los números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Observación 18.7 Hay que resaltar que se ha elegido promediar los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media puesto que, a la vista de (18.1), se verifica que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0.$$

En algunas ocasiones se utiliza la *desviación media*

$$\boxed{DM = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|,}$$

que es el promedio de los valores absolutos de las diferencias entre cada valor de los datos y la media de éstos. La desviación media tiene importancia cuando el interés se centra en las desviaciones y no en los signos de éstas. $\square$

Observación 18.8 La varianza es una medida relativamente buena de la variabilidad debido a que si muchas de las diferencias son grandes (o pequeñas), entonces el valor de la varianza será grande (o pequeño). Concretamente, si los datos están "próximos" a la media $0 \leq s^2 \ll 1$, mientras que si los datos están "alejados" de ésta, entonces $s^2 \gg 1$. Así, por ejemplo, para los datos dados en (18.2) se tiene que $s_x^2 = 0'0088$ y $s_y^2 = 404036$. $\square$

Ejemplo 18.9 Tenemos dos lotes de 100 bombillas de los tipos A y B:

	A (horas)	B (horas)
vida media	1700	1600
varianza	300	10

¿Cuál de los dos lotes tomaremos? Una persona que prefiera bombillas con una duración que garantice cierta fiabilidad elegirá las de tipo B, pues, a pesar de que la vida media de las bombillas es menor, la distribución está más concentrada (menos dispersa), con lo que la mayoría de sus bombillas tendrán una vida media no muy inferior a 1600 horas. □

Observación 18.9 Para calcular la varianza de datos agrupados, si n es el número de clases y x_i es la marca de la i–ésima clase, entonces, suponiendo que n_i y f_i son, respectivamente, las frecuencias absoluta y relativa de la clase x_i, se tiene que

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 f_i.}$$

Proposición 18.1 *La varianza es la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media, es decir,*

$$\boxed{s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2.}$$

Es decir, la expresión de la varianza para datos no agrupados y agrupados es, respectivamente,

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \quad y \quad s^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right)^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Lo probamos para datos sin agrupar (la otra demostración se hace de forma análoga). De la definición se tiene que

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2\overline{x}x_i + \overline{x}^2) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \overline{x}^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2. \quad \square \end{aligned}$$

Ejemplo 18.10 Para hallar la media y varianza de los datos sin agrupar $\{x_1, x_2, \ldots, x_{27}\}$ del Ejemplo 18.1 conviene formar, desde el punto de vista práctico, la siguiente tabla:

x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
$1'50$	1	$2'2500$	$1'50$	$2'2500$
$1'52$	1	$2'3104$	$1'52$	$2'3104$
$1'56$	1	$2'4336$	$1'56$	$2'4336$
$1'58$	1	$2'4964$	$1'58$	$2'4964$
$1'59$	2	$2'5281$	$3'18$	$5'0562$
$1'60$	1	$2'5600$	$1'60$	$2'5600$
$1'62$	1	$2'6244$	$1'62$	$2'6244$
$1'64$	2	$2'6896$	$3'28$	$5'3792$
$1'68$	2	$2'8224$	$3'36$	$5'6448$
$1'69$	1	$2'8561$	$1'69$	$2'8561$
$1'71$	2	$2'9241$	$3'42$	$5'8482$
$1'72$	3	$2'9584$	$5'16$	$8'8752$
$1'73$	1	$2'9929$	$1'73$	$2'9929$
$1'74$	1	$3'0276$	$1'74$	$3'0276$
$1'75$	2	$3'0625$	$3'50$	$6'1250$
$1'76$	1	$3'0976$	$1'76$	$3'0976$
$1'80$	2	$3'2400$	$3'60$	$6'4800$
$1'83$	1	$3'3489$	$1'83$	$3'3489$
$1'84$	1	$3'3856$	$1'84$	$3'3856$
SUMAS	27		$45'47$	$76'7921$

Por tanto, la media aritmética y la varianza de ese conjunto de datos es, respectivamente,

$$\overline{x} = \frac{45'47}{27} = 1'6841 \text{ y } s^2 = \frac{76'7921}{27} - 1'6841^2 = 0'0080. \tag{18.3}$$

Como los datos ordenados de menor a mayor vienen dados por

$1'50$	$1'52$	$1'56$	$1'58$	$1'59$	$1'59$	$1'60$	$1'62$	$1'64$
$1'64$	$1'68$	$1'68$	$1'69$	$1'71$	$1'71$	$1'72$	$1'72$	$1'72$
$1'73$	$1'74$	$1'75$	$1'75$	$1'76$	$1'80$	$1'80$	$1'83$	$1'84$

se tiene que la mediana es $M = x_{14} = 1'71$ y la moda $1'72$. □

Observación 18.10 La varianza tiene dimensiones cuadráticas con respecto a las dimensiones de los datos. Así, como los datos del Ejemplo 18.1 (y, por tanto, los del Ejemplo 18.10) están dados en metros, las unidades de la media y varianza dadas en (18.3) son, respectivamente, metros y metros cuadrados. □

Desviación típica

La *desviación típica* de los números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es la raíz cuadrada de la varianza, es decir,

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.}$$

Observación 18.11 Las unidades de la desviación típica son las mismas que las de los datos y, al igual que ocurría con la varianza, si los datos están "próximos" a la media $0 \leq s \ll 1$, mientras que si los datos están "alejados" de ésta, entonces $s \gg 1$. Así, para los datos dados en (18.2), se tiene que $s_x = 0'0940$ y $s_y = 635'6383$. □

A partir de la *desigualdad de Tchebychev*, que es un resultado clásico de probabilidad (que no veremos en este libro), puede probarse el siguiente resultado que muestra una de las utilidades de la desviación típica.

Proposición 18.2 *Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de números con media $\overline{x}$ y desviación típica s. Entonces, para cada $k > 0$, se verifica que el intervalo $(\overline{x} - ks, \overline{x} + ks)$ contiene, como mínimo, el*

$$100\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\%$$

de los números del conjunto dado. □

Ejemplo 18.11 Si la media es $\overline{x} = 500$ y la desviación típica $s = 20$, tomando $k = 5$ se verifica que en el intervalo $(400, 600)$ estarán, al menos, el

$$100\left(1 - \frac{1}{25}\right) = 96\%$$

de los datos. □

Observación 18.12 Para calcular la desviación típica de datos agrupados, si n es el número de clases y x_i es la marca de la i–ésima clase, entonces, suponiendo que n_i y f_i son, respectivamente, las frecuencias absoluta y relativa de la clase x_i, se tiene que

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 f_i}.}$$

Observación 18.13 Otras medidas de dispersión habituales, similares a la varianza y la desviación típica, son la *cuasivarianza*

$$\boxed{\widehat{s}^{\,2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

y la *desviación estándar* (o *cuasidesviación típica)*

$$\boxed{\widehat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}$$

(con las correspondientes definiciones para datos agrupados). Puesto que

$$(n-1)\widehat{s}^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = ns^2,$$

se verifica que

$$\boxed{\widehat{s}^2 = \frac{n}{n-1}s^2} \text{ y } \boxed{\widehat{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,s.}$$

Coeficiente de variación

El cociente de la desviación típica entre la media se denomina *coeficiente de variación*

$$\boxed{CV = \frac{s}{\overline{x}}}$$

y es un valor que indica el número de veces que la desviación típica contiene a la media (en ingeniería se utiliza el coeficiente inverso, que se conoce como *coeficiente de señal–ruido*). Se trata de un coeficiente adimensional, es decir, independiente de las unidades en las que estén expresados los datos x_i (metros, segundos ...): como la desviación típica s y la media $\overline{x}$ tienen las mismas unidades, el cociente de variación CV no tiene ninguna unidad. Por ejemplo, si la unidad de los datos es el kg, con $\overline{x} = 4$ kg y $s = 0'5$ kg, entonces

$$CV = \frac{4\,\mathrm{kg}}{0'5\,\mathrm{kg}} = \frac{4}{0'5} = 8.$$

Observación 18.14 El coeficiente de variación es una medida estandarizada de la variación con respecto a la media y es especialmente útil para comparar datos muy distintos o cuando la escala de medición difiere de manera apreciable entre éstos. Así, por ejemplo, si consideramos dos conjunto de datos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ con medias y desviaciones típicas

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{x} = 120 \\ s_x = 6\end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l}\overline{y} = 40 \\ s_y = 4,\end{array}\right.$$

respectivamente, a pesar de que la dispersión en el primer caso (por su desviación típica) es más grande que la segunda en un sentido absoluto, la dispersión relativa de la primera es menor que la segunda, pues

$$CV_x = \frac{6}{120} = 0'05 \text{ y } CV_y = \frac{4}{40} = 0'1.$$

Por tanto, la segunda muestra una mayor dispersión relativa con respecto a la media que la distribución correspondiente a la primera. □

Momentos

El *momento* de orden k respecto al *origen* y el *momento* de orden k respecto a la *media* de los números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es, respectivamente,

$$\boxed{\alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k} \text{ y } \boxed{\mu_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^k.}$$

Observación 18.15 Para calcular los momentos de datos agrupados, si n es el número de clases y x_i es la marca de la i–ésima clase, entonces, suponiendo que n_i y f_i son, respectivamente, las frecuencias absoluta y relativa de la clase x_i, se tiene que

$$\boxed{\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i} \text{ y } \boxed{\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^k f_i.}$$

Observación 18.16 La media es el momento de orden 1 respecto al origen y la varianza es el momento de orden 2 respecto a la media, es decir, $\overline{x} = \alpha_1$ y $s^2 = \mu_2$. Además, a partir de la Proposición 18.1 se tiene que

$$\boxed{\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2.}$$

18.2.4. Medidas de posición

Si el conjunto de datos está ordenado en forma creciente, vimos que el valor central (o la media entre los dos valores centrales) es la *mediana*. Extendiendo esta idea, podemos pensar en aquellos valores que dividan el conjunto en cuatro partes iguales; esos valores, denotados Q_1, Q_2 y Q_3, se llaman, respectivamente, *primer, segundo* y *tercer cuartiles* (obviamente, el segundo cuartil coincide con la mediana). Análogamente, los valores que dividen los datos en diez partes iguales se llaman *deciles* y se denotan $D_1, D_2, \ldots, D_9$, mientras que los valores que los dividen en 100 partes iguales se llaman *percentiles* $P_1, P_2, \ldots, P_{99}$. Así, el quinto decil y el 50° percentil coinciden con la mediana; los 25° y 75° percentiles coinciden con el primer y tercer cuartiles. En general, dado $p \in (0, 100]$, se llama *cuantil* C_p al valor promedio por debajo del cual se encuentra el $p\%$ de los datos.

Observación 18.17 Una medida de dispersión asociada a los cuartiles es el *recorrido intercuartílico*, que es la diferencia entre el tercer y el primer cuartiles, es decir,

$$\boxed{Q_3 - Q_1 = P_{75} - P_{25}.}$$

El recorrido intercuartílico determina la longitud de un intervalo que contiene el 50% de los datos centrales. $\square$

Ejemplo 18.12 En el conjunto de datos $\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 15\}$ se tiene que la mediana es $Q_2 = P_{50} = 7$, el primer cuartil es $Q_1 = P_{25} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$ y el tercer cuartil es $Q_3 = P_{75} = \frac{10+11}{2} = \frac{21}{2}$. Su recorrido intercuartílico es

$$Q_3 - Q_1 = \frac{21}{2} - \frac{9}{2} = 6. \quad \square$$

Observación 18.18 En la Observación 18.24 veremos cómo se pueden utilizar los diagramas de frecuencias relativas acumulativas que se definen en la Sección 18.4. para calcular, mediante interpolación lineal, un cuantil arbitrario C_p, con $p \in (0, 100]$. $\square$

18.3. Introducción a la Estadística Inferencial

Ejemplo 18.13 Como por motivos de tipo económico o de tiempo no es posible conocer la estatura de todos los españoles, en la práctica se considera un grupo reducido de españoles a los que se les talla, de forma que los resultados obtenidos se extiendan a la totalidad. $\square$

Ejemplo 18.14 Si el fabricante de un tipo de bombillas desea comprobar la duración de éstas, no es posible realizar la prueba con todas ellas pues, por tratarse de un proceso destructivo, la única manera de comprobar la duración de una bombilla es dejarla encendida hasta que se funda y, seguidamente, anotar el tiempo. Es por esto por lo que, en la práctica, se toma una selección de bombillas a las que se somete a la prueba de duración para, después, poder extender las conclusiones a la totalidad de la producción. $\square$

Para comprender la naturaleza de la Inferencia Estadística es necesario entender las nociones de:

a) *Población*: es el conjunto formado por todos los elementos en cuyo estudio estamos interesados. Llamaremos *tamaño de la población* al número de elementos que la componen; así, una población es *finita* cuando tiene tamaño finito (como el número de piezas que produce una fábrica en un día) e *infinita* en caso contrario (como los posibles resultados de sucesivas tiradas de una moneda).

b) *Muestra*: es un subconjunto representativo seleccionado de la población. La palabra "representativo" es la clave de esta idea: una "buena" muestra es aquella que refleja las características esenciales de la población de la cual se obtuvo. Entre éstas destacamos las *muestras aleatorias*, que son aquellas que tienen una oportunidad igual e independiente de ser elegidas.

c) *Unidad estadística* o *individuo*: es cada elemento componente de la población estudiada. Cada unidad estadística puede describirse según uno o varios *caracteres*, entre los que distinguimos:

   i) *Cualitativos* (o *atributos*): expresan alguna característica no medible (como el color, el sabor, las preferencias del consumidor, clasificar una pieza como defectusosa o no ...).

   Ejemplo 18.15 La Tabla 18.1 muestra las preferencias en cuanto al sabor de helado de 169 personas encuestadas en una ciudad:

Sabor de helado	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Fresa	25	$\frac{25}{169} \simeq 0'1479$
Nata	48	$\frac{48}{169} \simeq 0'2840$
Vainilla	36	$\frac{36}{169} \simeq 0'2130$
Chocolate	42	$\frac{42}{169} \simeq 0'2485$
Otros	18	$\frac{18}{169} \simeq 0'1065$
TOTAL	169	1

Tabla 18.1: Preferencias sobre el sabor de helado.

   El "sabor de helado" es una variable cualitativa que presenta cinco atributos: fresa, nata, vainilla, chocolate y otros. El número de veces que aparece cada uno de estos atributos se denomina *frecuencia absoluta*. La *frecuencia relativa* de cada atributo se obtiene dividiendo su frecuencia absoluta entre el tamaño de la muestra (en este caso, 169). $\square$

   ii) *Cuantitativos*: cuando son medibles. A su vez, éstos pueden ser:

      1) *Discretos*: si el resultado de la observación es un número natural (como el número de hijos de una familia, el número de vecinos de una comunidad ...). Corresponden, en general, a contar el número de veces que ha ocurrido un fenómeno.

Ejemplo 18.16 La siguiente tabla muestra el número de hijos por hogar en una comunidad de vecinos de 16 viviendas:

1	3	0	2	1	0	4	1
1	0	2	1	1	0	3	2

El "número de hijos por hogar" es una variable cuantitativa discreta que, necesariamente, toma como valores números naturales (incluyendo el cero). Al igual que en el Ejemplo 18.15, podemos resumir la información anterior en la tabla de frecuencias:

x_i	n_i	f_i	%
0	4	$\frac{1}{4} = 0'2500$	$25'00$
1	6	$\frac{3}{8} = 0'3750$	$37'50$
2	3	$\frac{3}{16} = 0'1875$	$18'75$
3	2	$\frac{1}{8} = 0'1250$	$12'50$
4	1	$\frac{1}{16} = 0'0625$	$6'25$
TOTAL	16	1	100

2) *Continuos*: cuando el resultado de la observación es un número real (como la estatura, el peso, el tiempo ...).

   Ejemplo 18.17 Regresando al Ejemplo 18.1, la "altura" es una variable cuantitativa continua que puede tomar cualquier valor positivo. □

En Estadística la Inferencia es *inductiva*, pues se proyecta de lo particular (*muestra*) a lo general (*población*), y en un procedimiento como éste existe una posibilidad de error, que está en función de la muestra elegida. Así por ejemplo, si efectuamos una encuesta en una ciudad de 4 millones de habitantes, no es lo mismo tomar una muestra de 30 personas (*poco fiable*) que una de 3 millones de personas (*muy fiable*).

18.4. Representaciones gráficas de datos

Una técnica muy habitual consiste en representar gráficamente las tablas de frecuencias para, de esta forma, tener una primera impresión general de toda la masa de datos. Entre las principales representaciones gráficas destacamos:

a) *Diagramas de Pareto y diagramas de sectores*.

b) *Diagramas de barras*.

c) *Histogramas*.

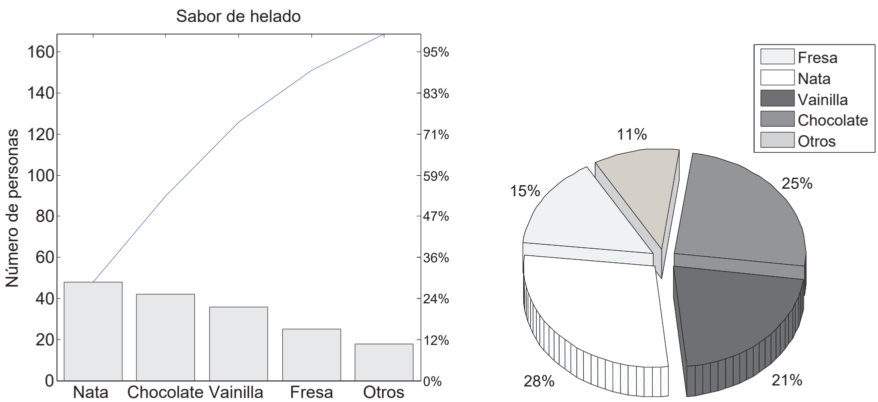
d) *Poligonales de frecuencias*.

Salvo en el diagrama de sectores, en todos los demás se representan en el eje de abscisas el valor de los datos y, en el eje de ordenadas, las frecuencias (ya sean absolutas o relativas).

Diagramas de Pareto y diagramas de sectores

En ambos se hace un reparto proporcional de las frecuencias: en rectángulos (*diagramas de Pareto*) o en un círculo (*diagramas de sectores*) de forma que cada área sea proporcional a la frecuencia correspondiente. Así, por ejemplo, en los diagramas de sectores se hace que la suma de frecuencias T (nótese que si las frecuencias son relativas, entonces $T = 1$) corresponda a los 360° del círculo; de esta forma, si se utilizan frecuencias absolutas, cada dato se corresponde con $\left(\frac{360}{T}\right)^\circ$ y k datos con $\left(k\frac{360}{T}\right)^\circ$.

Ejemplo 18.18 En la Figura 18.1 se presentan los diagramas de Pareto y de sectores correspondientes a los datos del Ejemplo 18.15 (la línea que aparece en el diagrama de Pareto representa la frecuencia acumulada que estudiaremos más adelante). □



(a) Diagrama de Pareto. (b) Diagrama de sectores.

Figura 18.1: Diagramas de Pareto y de sectores para los datos del Ejemplo 18.15.

Observación 18.19 Este tipo de diagramas se suelen utilizar cuando el número de estados en que clasificamos los valores es pequeño y son especialmente adecuados para representar varias situaciones similares y poder establecer comparaciones (por ejemplo, reparto de los trabajadores británicos, españoles y griegos en agricultura, industria y servicios). □

Diagramas de barras

Se utilizan para representar gráficamente una distribución de frecuencias de datos sin agrupar. En ellos se presentan los valores posibles y sus frecuencias absolutas (o relativas) de aparición.

Ejemplo 18.19 En la Figura 18.2 se muestra el diagrama de barras de los datos del Ejemplo 18.16. □

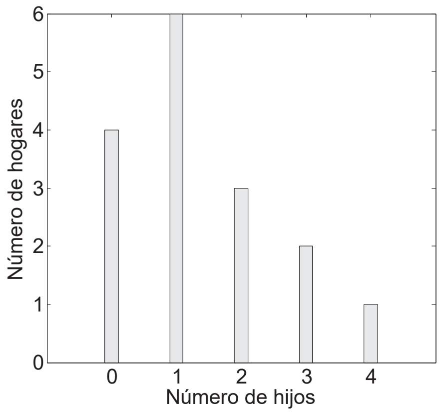


Figura 18.2: Diagrama de barras para los datos del Ejemplo 18.16.

Histogramas

Son uno de los tipos de representación gráfica más frecuentes para datos agrupados. Pueden ser de *frecuencias absolutas*, de *frecuencias relativas*, de *frecuencias absolutas acumuladas* y de *frecuencias relativas acumuladas*.

El histograma de frecuencias (absolutas o relativas) correspondiente a una determinada agrupación de datos consiste en un conjunto de rectángulos cada uno de los cuales representa un *intervalo de agrupación* o *clase* que (aunque no es necesario) suelen tomarse de la misma longitud. Sus bases son la amplitud del intervalo y las alturas se determinan de manera que su área sea proporcional a la frecuencia (absoluta o relativa) de cada clase. En el caso de que se tomen clases de la misma longitud, se pueden tomar como alturas sus frecuencias absolutas o relativas.

Ejemplo 18.20 El histograma de frecuencias absolutas correspondiente a los datos agrupados del Ejemplo 18.1 se muestra en la Figura 18.3. □

Observación 18.20 Nótese que no se proporcionan reglas precisas para seleccionar el número, amplitud y localización de los intervalos que se utilizan para construir el histo-

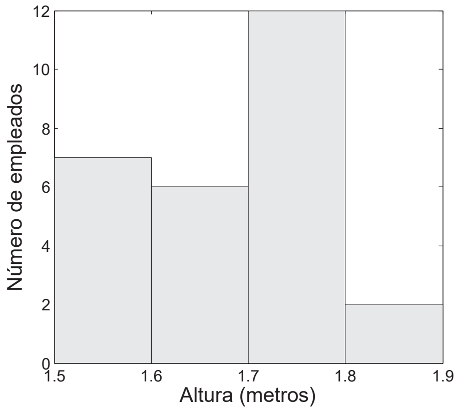


Figura 18.3: Histograma de frecuencias absolutas (4 clases).

grama. Así, en el Ejemplo 18.20 hemos hecho una elección concreta de los intervalos de clase, pero podríamos haber hecho otras muchas. □

Observación 18.21 La forma de un histograma puede cambiar ostensiblemente al variar los intervalos de clases que utilicemos. En efecto, si en el Ejemplo 18.20 consideramos el reparto en clases de la Tabla 18.2, el histograma de frecuencias absolutas que se obtiene es el de la Figura 18.4, que, como se observa, difiere bastante del histograma de la Figura 18.3. □

Clase	Marca de clase	n_i	f_i	N_i	F_i
$[1'50, 1'55]$	$1'525$	2	$\frac{2}{27} \simeq 0'0741$	2	$\frac{2}{27} \simeq 0'0741$
$(1'55, 1'60]$	$1'575$	5	$\frac{5}{27} \simeq 0'1852$	7	$\frac{7}{27} \simeq 0'2593$
$(1'60, 1'65]$	$1'625$	3	$\frac{1}{9} \simeq 0'1111$	10	$\frac{10}{27} \simeq 0'3704$
$(1'65, 1'70]$	$1'675$	3	$\frac{1}{9} \simeq 0'1111$	13	$\frac{13}{27} \simeq 0'4815$
$(1'70, 1'75]$	$1'725$	9	$\frac{1}{3} \simeq 0'3333$	22	$\frac{22}{27} \simeq 0'8148$
$(1'75, 1'80]$	$1'775$	3	$\frac{1}{9} \simeq 0'1111$	25	$\frac{25}{27} \simeq 0'9259$
$(1'80, 1'85]$	$1'825$	2	$\frac{2}{27} \simeq 0'0741$	27	$\frac{27}{27} = 1$
TOTAL		27	1		

Tabla 18.2: Agrupación en 7 clases de los datos del Ejemplo 18.1.

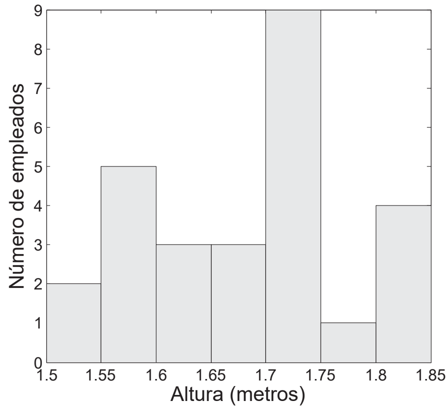


Figura 18.4: Histograma de frecuencias absolutas (7 clases).

Un histograma de frecuencias (absolutas o relativas) acumulativas, correspondiente a una determinada agrupación de datos, se construye de forma análoga a su histograma de frecuencias (no acumulativas), pero de forma que la altura del rectángulo correspondiente a una clase sea proporcional a la suma de frecuencias (absolutas o relativas) de dicha clase y las clases anteriores.

Ejemplo 18.21 En la Figura 18.5 se muestra el histograma de frecuencias absolutas acumulativas correspondiente a la agrupación de datos de la Tabla 18.2. □

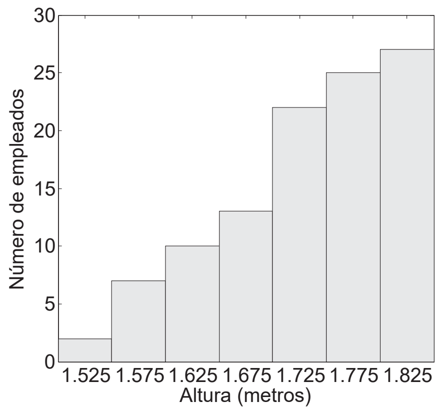


Figura 18.5: Histograma de frecuencias absolutas acumulativas (7 clases).

Poligonal de frecuencias y poligonal de frecuencias acumulativas

La *poligonal de frecuencias* es un gráfico que relaciona la frecuencia (absoluta o relativa, ya sea acumulativa o no) de cada clase con respecto a la marca de dicha clase; se obtiene uniendo los puntos medios de las partes superiores de los rectángulos que constituyen el histograma (obviamente, no es necesario dibujar un histograma para poder dibujar la correspondiente poligonal de frecuencias).

Ejemplo 18.22 La poligonal de frecuencias correspondiente al Ejemplo 18.20 viene dada en la Figura 18.6. Nótese que se han añadido un tramo inicial y otro final en las marcas de clase extremas como asociadas a una frecuencia de clase cero para que, así, la suma de las áreas de los rectángulos del histograma coincida con el área total limitada por la poligonal de frecuencias y el eje OX. □

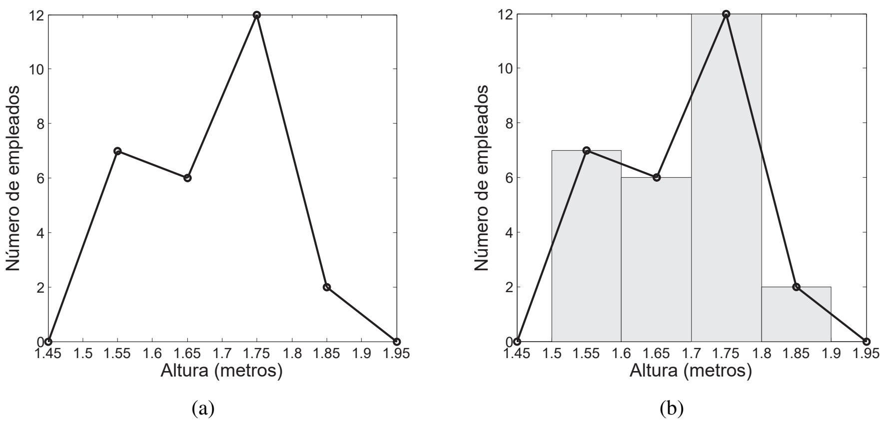


Figura 18.6: Poligonal de frecuencias absolutas para los datos del Ejemplo 18.20.

En lo que resta de sección veremos cómo utilizar las poligonales de frecuencias para el cálculo de la mediana, la moda y los cuartiles (y cuantiles, en general) de un conjunto de datos agrupados.

Observación 18.22 Para datos agrupados, la mediana se obtiene por *interpolación lineal*: la mediana es el valor M para el cual el punto $\left(M, \frac{1}{2}\right)$ pertenece a su poligonal de frecuencias relativas acumulativas. □

Ejemplo 18.23 Consideremos los datos del Ejemplo 18.1 agrupados en las 4 clases que allí se indican. Para hallar la mediana, puesto que ésta se encuentra entre $1'7$ y $1'8$, consideramos la recta que une los puntos

$$\left(1'7, \frac{13}{27}\right) \text{ y } \left(1'8, \frac{25}{27}\right).$$

Como dicha recta tiene por ecuación

$$y = \frac{1}{27}\left(1 + 120(x - 1'7)\right), \tag{18.4}$$

la mediana viene dada por el valor de la abscisa que se corresponde con la ordenada $y = 0'5$ (véase la Figura 18.7). Despejando en (18.4), se obtiene que la mediana es

$$M = \frac{409}{240} \simeq 1'7042.$$

Nótese que este valor puede ser distinto al que se obtiene al considerar los datos sin agrupar (véase el Ejemplo 18.10). □

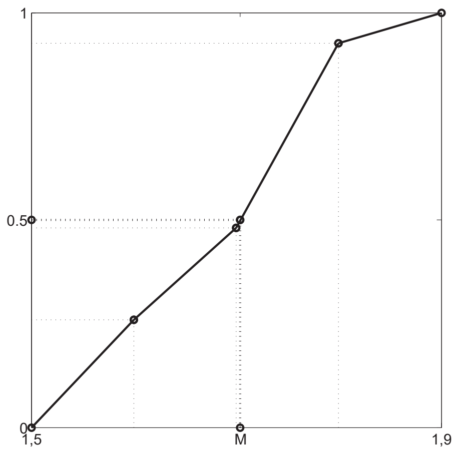


Figura 18.7: Mediana de los datos agrupados en 4 clases del Ejemplo 18.1.

Observación 18.23 Para datos agrupados, la moda es el valor o valores de la abscisa M para los cuales la curva de un diagrama de frecuencias (relativas o absolutas) asociado a esa agrupación de datos alcanza un máximo. □

Los histogramas y las poligonales de frecuencias no acumulativas de muchas distribuciones de datos de la vida real tienen la forma de una montaña, es decir, se pueden aproximar por una curva con forma de campana que se conoce como *curva normal* (o *campana de Gauss*); diremos que una distribución de datos es, aproximadamente, *normal* con media $\overline{x}$ y desviación típica s cuando se cumple la siguiente *regla empírica*:

El intervalo $(\overline{x} - s, \overline{x} + s)$ contiene aproximadamente el 68% de los datos.
El intervalo $(\overline{x} - 2s, \overline{x} + 2s)$ contiene aproximadamente el 95% de los datos.
El intervalo $(\overline{x} - 3s, \overline{x} + 3s)$ contiene casi todos los datos.

Así, podemos calificar de:

a) *"Normales"* los datos que se encuentren en el intervalo $(\overline{x} - s, \overline{x} + s)$.

b) *"Menos normales"* aquellos datos que se encuentren comprendidos entre los intervalos $(\overline{x} - s, \overline{x} + s)$ y $(\overline{x} - 2s, \overline{x} + 2s)$.

c) *"Excepcionales"* los datos que se hallen fuera del intervalo $(\overline{x} - 2s, \overline{x} + 2s)$.

La utilidad y valor de la regla empírica anterior son muy grandes debido al gran número de distribuciones de datos aproximadamente *normales* que aparecen en la naturaleza.

Ejemplo 18.24 Para los datos sin agrupar del Ejemplo 18.1 se tiene que

$$\overline{x} = 1'6841 \;\text{ y }\; s = 0'0897$$

(véase (18.3)) y, por tanto,

$$\begin{cases} (\overline{x} - s, \overline{x} + s) = (1'5944, 1'7738) \\ (\overline{x} - 2s, \overline{x} + 2s) = (1'5047, 1'8635) \\ (\overline{x} - 3s, \overline{x} + 3s) = (1'4150, 1'9532). \end{cases}$$

Los intervalos anteriores contienen, respectivamente, 17, 26 y 27 datos, lo que supone el $62'96\%$, el $96'30\%$ y el 100% del total de datos. Por tanto, no son datos aproximadamente normales, de acuerdo al criterio antes establecido, aunque no están muy lejos de serlo. □

Observación 18.24 Para datos agrupados, un cuantil arbitrario C_p, con $p \in (0, 100]$, se obtiene por *interpolación lineal*: es aquel valor para el cual el punto $\left(C_p, \frac{p}{100}\right)$ pertenece a su poligonal de frecuencias relativas acumulativas. □

Ejemplo 18.25 Consideremos los datos del Ejemplo 18.1 agrupados en las 4 clases que allí se indican. De acuerdo con la Observavión 18.24, para hallar los cuartiles tenemos que encontrar las abscisas para las cuales los valores de la poligonal de frecuencias relativas acumulativas (véase la Figura 18.8) son $0'25$, $0'50$ y $0'75$. En el caso de este ejemplo, tenemos en cuenta las rectas

$$\begin{cases} r_1 \;\text{ que une los puntos }\; (1'5, 0) \;\text{ y }\; \left(1'6, \dfrac{7}{27}\right) \\ r_2 \;\text{ que une los puntos }\; \left(1'7, \dfrac{13}{27}\right) \;\text{ y }\; \left(1'8, \dfrac{25}{27}\right) \end{cases}$$

que son, respectivamente,

$$r_1 : \; y = \frac{70}{27}(x - 1'5) \;\text{ y }\; r_2 : \; y = \frac{1}{27}\left(13 + 120(x - 1'7)\right). \tag{18.5}$$

El primer cuartil es el valor de la abscisa que se corresponde con la ordenada $y = 0'25$ de la recta r_1; el segundo cuartil (la mediana) y el tercer cuartil son, respectivamente, las abscisas que se corresponden con las ordenadas $y = 0'5$ e $y = 0'75$ de la recta r_2. Despejando en (18.5), se obtienen los valores

$$Q_1 = \frac{447}{280} \simeq 1'5964, \; Q_2 = M = \frac{409}{240} \simeq 1'7042 \text{ y } Q_3 = \frac{169}{96} \simeq 1'7604$$

(véase la Figura 18.8). Así, el recorrido intercuartílico (véase su definición en la Observación 18.17) es

$$Q_3 - Q_1 = \frac{169}{96} - \frac{447}{280} = \frac{551}{3360} \simeq 0'1639. \quad \square$$

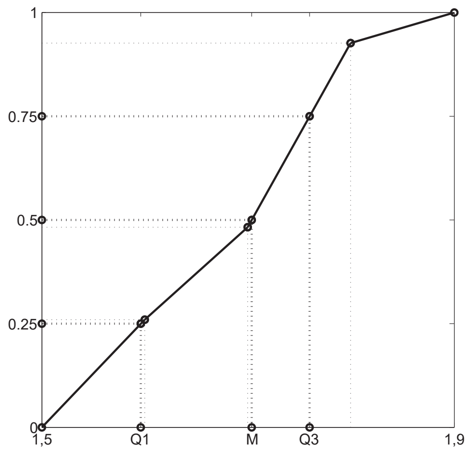


Figura 18.8: Cuartiles de los datos agrupados en 4 clases del Ejemplo 18.1.

18.5. Problemas

18.1. [Media aritmética ponderada] Asociamos a los números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}$ ciertos *pesos* $\{\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n\}$ dependientes de la relevancia asignada a cada uno de los números x_i. De esta forma, se define la *media aritmética ponderada* de los números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ como

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \cdots + \varrho_n x_n}{\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varrho_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varrho_i}.}$$

Aplicación: Si el tercer examen parcial cuenta tres veces más que los otros dos y un estudiante obtuvo unas calificaciones de $7, 9$ y $8'5$, respectivamente, calcular su nota media global.

18.2. [Media geométrica y armónica] La *media geométrica* de números no negativos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es la raíz n–ésima del producto de los mismos

$$\boxed{MG = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.}$$

La *media armónica* de números no nulos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es el inverso de la media aritmética de los inversos de dichos números, es decir,

$$\boxed{MA = \frac{1}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}.}$$

Aplicación: Si $a, b > 0$, demostrar que

$$MA \leq MG \leq \overline{x}.$$

Además,

$$MA = MG = \overline{x} \iff a = b.$$

18.3. Los resultados obtenidos al lanzar un dado al aire 100 veces y anotar los resultados fueron

2	6	4	4	2	4	6	3	4	3	4	5	3	3	4	6	3	3	4	4
5	6	5	5	3	1	4	3	1	4	5	5	6	6	1	3	4	2	4	1
3	4	5	1	6	6	4	2	6	4	5	3	6	1	4	2	6	3	5	1
1	6	5	5	5	5	2	2	4	4	1	1	2	3	3	6	4	2	3	4
5	4	5	3	2	4	5	6	5	5	3	3	3	4	4	1	5	6	4	1

a) Hacer una tabla de frecuencias.

b) Representar gráficamente los datos anteriores mediante un diagrama de barras.

c) Calcular la media, mediana, moda, varianza y desviación típica.

18.4. En un colegio se realizó una encuesta sobre el número de hermanos de 50 alumnos y se obtuvieron los siguientes resultados:

0	1	0	2	5	3	0	2	1	1
0	2	4	3	2	7	1	2	0	3
2	1	1	3	4	2	0	1	0	0
6	3	2	2	1	1	3	2	4	4
3	2	0	1	1	0	2	0	0	2

a) Construir una tabla de frecuencias y una tabla de frecuencias acumuladas.

b) Representar dichas tablas mediante un diagrama de barras.

c) Idear un método para transformar los anteriores diagramas en otros de frecuencias relativas (simples y acumuladas) donde la altura correspondiente al 100% está dada.

d) Hallar la media, mediana, moda, varianza y desviación típica.

e) Al clasificar exclusivamente como *normales*, *menos normales* y *excepcionales*, ¿qué número de hermanos aparecen como tales?

f) Hacer una crítica sobre el aspecto representativo que pudiera tener una encuesta de este tipo para el estudio del número de hijos de una familia del país.

18.5. En una muestra de 40 bolas fabricadas por una máquina se han medido los diámetros (en cm) y se ha obtenido

$0'853$	$0'859$	$0'851$	$0'840$	$0'859$	$0'841$	$0'846$	$0'857$	$0'862$	$0'845$
$0'851$	$0'846$	$0'855$	$0'861$	$0'868$	$0'852$	$0'843$	$0'840$	$0'841$	$0'854$
$0'854$	$0'847$	$0'853$	$0'855$	$0'843$	$0'847$	$0'859$	$0'863$	$0'856$	$0'857$
$0'842$	$0'850$	$0'860$	$0'852$	$0'856$	$0'856$	$0'860$	$0'854$	$0'861$	$0'868$

a) Hallar la media, mediana, moda, varianza y desviación típica.

b) ¿Se considera "normal" para esa máquina una bola de $0'846$ cm?

c) Determinar el rango.

d) Agrupar los datos anteriores en 7 clases de igual longitud y construir una tabla de frecuencias para esas clases.

e) Dibujar el histograma de frecuencias correspondiente a la tabla del apartado b).

18.6. En un determinado lugar se recoge una precipitación media de 542 mm de agua durante un año hidraúlico (del 1 de octubre al 30 de septiembre), con una desviación típica de 47 mm. Hallar los límites en la siguiente tabla que se correspondan con la clasificación exhaustiva, que se da en ese lugar, relativa a la pluviosidad:

Muy seco	Menos de ....
Seco	De .... a ....
Normal	De .... a ....
Lluvioso	De .... a ....
Muy lluvioso	Más de ....

18.7. La siguiente tabla indica el dinero gastado en material escolar, en el mes de marzo, por las familias de 1000 alumnos, donde x_i es la marca de clase y f_i representa la frecuencia relativa:

€	x_i	f_i
50–60	55	0′060
60–70	65	0′115
70–80	75	0′105
80–90	85	0′075
90–100	95	0′085
100–110	105	0′100
110–120	115	0′110
120–130	125	0′095
130–140	135	0′070
140–150	145	0′090
150–160	155	0′050
160–170	165	0′030
170–180	175	0′015

a) Hallar la media y la desviación típica.

b) Representar los datos mediante un histograma.

c) Dibujar la poligonal de frecuencias relativas acumulativas.

d) Calcular la moda y la mediana.

e) Determinar el primer y tercer cuartiles.

f) Hallar el percentil 90.

18.6. Soluciones

18.1. $8'3$.

18.2. Utilizar la desigualdad $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$.

18.3. c) Media $3'74$, mediana 4, moda 4, varianza $2'3924$ y desviación típica $1'5467$.

18.4. d) Media $1'84$, mediana 2, moda 2, varianza $2'6144$ y desviación típica $1'6169$. e) Normales: $1, 2, 3$. Menos normales: $0, 4, 5$. Excepcionales: $6, 7$. f) No puede ser representativo.

18.5. a) Media $0'8529$, mediana $0'854$, modas $0'854$, $0'856$ y $0'859$, varianza $0'000056$ y desviación típica $0'007475$. b) Sí. c) $0'028$.

18.6. Muy seco: menos de 448 mm. Seco: de 448 a 495 mm. Normal: de 495 a 589 mm. Lluvioso: de 589 a 636 mm. Muy lluvioso: más de 636 mm.

18.7. a) Media $105'950$ y desviación típica $1028'5975$. d) Moda 65 y mediana 106 (se obtiene como la intersección de la recta que une los puntos $(100, 0'44)$ y $(110, 0'54)$ con $y = 0'5$). e) Primer cuartil $77'1429$ (se obtiene como la intersección de la recta que une los puntos $(70, 0'175)$ y $(80, 0'28)$ con $y = 0'25$) y tercer cuartil $130'7143$ (se obtiene como la intersección de la recta que une los puntos $(130, 0'745)$ y $(140, 0'815)$ con $y = 0'75$). f) Percentil 90: $149'4444$ (se obtiene como la intersección de la recta que une los puntos $(140, 0'815)$ y $(150, 0'905)$ con $y = 0'90$).

19 Probabilidad

19.1. Introducción

En muchos aspectos de la vida cotidiana nos encontramos con fenómenos influidos por el *azar*: el número de personas esperando en la parada del autobús cuando llegamos nosotros, el resultado de lanzar un dado al aire y ver el número que queda en la cara superior, las veces que tendremos fiebre en un año, la carta que sacamos de una baraja, el número que sale premiado en la lotería …

Este capítulo está dedicado al estudio de las nociones básicas de la *teoría de la Probabilidad*. Dicha teoría intenta sacar conclusiones sobre lo que puede ocurrir en *fenómenos* o *experimentos aleatorios*, que son aquellos en los que, al igual que sucede en los ejemplos anteriores, el azar hace que no se pueda prever con certeza el resultado que va tener lugar al observar el fenómeno o al realizar el experimento.

Se comienza describiendo los *sucesos* y el *espacio muestral* asociados a un experimento aleatorio, así como las operaciones que se pueden realizar con estos sucesos y sus propiedades.

A continuación se da la definición rigurosa de Kolmogorov de lo que es una *probabilidad*, junto con sus principales propiedades. Para los casos de espacios muestrales finitos se presenta el *método de los puntos muestrales* para asignar probabilidades a cada suceso elemental y se muestra también la *regla de Laplace* para el cálculo de sus probabilidades.

Se continúa con el estudio de la *probabilidad condicionada* y la *independencia de sucesos*, mostrando algunos resultados asociados y varios ejemplos ilustrativos.

Por último se introduce el concepto de *sistema completo de sucesos* de un espacio muestral, que permite obtener el *teorema de la Probabilidad Total* y el *teorema de Bayes*.

19.2. Álgebra de sucesos

Un *modelo matemático* para representar un fenómeno suele considerarse “aceptable” cuando las predicciones que éste determina se corresponden con los resultados obtenidos cuando el fenómeno se repite un gran número de veces. Frente a los *experimentos deterministas* (en los que, conocidas las condiciones iniciales en que se realiza el experimento, sabemos cuál es el resultado) se encuentran los *experimentos aleatorios*, que se caracterizan por las siguientes propiedades:

1) Se conocen los posibles resultados del experimento con anterioridad a su realización.

2) No se conoce el resultado del experimento antes de su realización.

3) Pueden realizarse un número indefinido de veces en las mismas condiciones.

Ejemplo 19.1 Un ejemplo de experimento determinista es soltar una piedra desde una cierta altura y ver si cae al suelo. Ejemplos de fenómenos aleatorios son:

a) Lanzar un dado al aire y observar el resultado.

b) Sacar una bola de una caja en la que hay 10 bolas numeradas del 1 al 10.

c) Tirar dos dados y observar la suma de puntos obtenida.

d) Coger una carta de una baraja y observar la carta extraída.

e) Anotar el número de vehículos que entran cada hora en un determinado parking.

f) Comprobar, en el proceso de fabricación de móviles, si su sistema de encendido es defectuoso encendiéndolo y apagándolo 200 veces; se acepta como bueno si al final de la prueba el sistema de encendido sigue funcionando con normalidad.

g) Lanzar una moneda al aire hasta obtener cara por primera vez.

h) Anotar el tiempo de espera en la parada de un autobús. $\square$

Definición 19.1

a) Se denomina *espacio muestral* al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Suele designarse con la letra Ω.

b) El número de elementos de Ω se denomina *cardinal* de Ω y se representa $\mathrm{card}(\Omega)$. $\square$

Ejemplo 19.2 Los espacios muestrales asociados a los experimentos aleatorios del Ejemplo 19.1 son:

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

c) $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ d) $\Omega = \{$las 40 cartas de la baraja$\}$

e) $\Omega = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ f) $\Omega = \{$bueno, defectuoso$\}$

g) $\Omega = \{C, +C, ++C, , \ldots, + \overset{n)}{\cdots} +C \ldots\}$ h) $\Omega = [0, +\infty)$. $\square$

Observación 19.1 Como se aprecia en el Ejemplo 19.2, existen tres tipos de espacio muestral:

1) *Espacio muestral finito*: tiene un número finito de elementos (casos a), b), c), d) y f)).

2) *Espacio muestral discreto*: tiene una cantidad a lo sumo numerable (es decir, contable) de elementos (casos a), b), c), d), e), f) y g)).

3) *Espacio muestral continuo*: posee una cantidad no numerable de elementos (caso h)).

En todo lo que sigue, únicamente nos ocuparemos de espacios muestrales finitos. $\square$

Definición 19.2 Sea Ω un espacio muestral. Se denomina *suceso* a todo subconjunto de Ω. El conjunto de todos los sucesos constituye el conjunto de las *partes* de Ω, que se denota $\mathcal{P}(\Omega)$, y es el conjunto formado por todos los subconjuntos de Ω. Se distingue entre:

a) *Sucesos elementales*: son los sucesos que constan de un único elemento (es decir, el conjunto de los sucesos elementales son los posibles resultados del experimento).

b) *Sucesos compuestos*: son los sucesos formados por dos o más sucesos elementales.

c) *Suceso seguro*: es el espacio muestral Ω (se verifica siempre).

d) *Suceso imposible*: es el conjunto vacío $\emptyset$ (no se verifica nunca). $\square$

Ejemplo 19.3 Al lanzar una moneda al aire y observar el resultado, el espacio muestral es el conjunto

$$\Omega = \{C, +\}$$

y el conjunto partes de Ω es

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\{C\}, \{+\}, \{C, +\}, \{\emptyset\}\}. \quad \square$$

Ejemplo 19.4 Al lanzar un dado al aire y observar el resultado, los sucesos elementales son

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

y son sucesos compuestos

$$A = \{1, 3\},\ B = \{\dot{3}\} = \{3, 6\} \ldots \quad \square$$

Definición 19.3 Sea S un suceso de un espacio muestral Ω. Si al realizar el experimento resulta un caso perteneciente a S, se dice que el suceso S *ha ocurrido*. $\square$

Observación 19.2 Es evidente que si $S = \Omega$, entonces S ocurre siempre (de ahí que se le llame "suceso seguro"). $\square$

Ejemplo 19.5 Si al coger una carta de una baraja hemos obtenido el as de oros, ha ocurrido el suceso $A = \{\text{salir oros}\}$ pero no ha ocurrido el suceso $B = \{\text{salir sota}\}$. $\square$

Las operaciones conjuntistas permiten combinar sucesos para obtener otros:

Definición 19.4 Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral Ω.

a) El suceso A *implica* el suceso B, y se denota $A \subset B$ o $B \supset A$, si siempre que se verifica A se verifica B. Ejemplo: $A = \{4\}$ y $B = \{\dot{2}\} = \{2, 4, 6\}$.

b) El suceso A es *igual* al suceso B si A implica B y B implica A (es decir, si $A \subset B$ y $B \subset A$).

c) $A \cup B = \{w \in \Omega :\ w \in A \text{ o } w \in B\}$ es la *unión* de los sucesos A y B. Este suceso ocurre cuando al menos ocurre uno de ellos. Ejemplo: si al lanzar un dado al aire consideramos los sucesos

$$A = \{\text{salir par}\} = \{2, 4, 6\} \text{ y } B = \{\text{salir un valor inferior a } 4\} = \{1, 2, 3\},$$

se verifica que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

d) $A \cap B = \{w \in \Omega :\ w \in A \text{ y } w \in B\}$ es la *intersección* de los sucesos A y B. Este suceso ocurre cuando ocurren ambos. Ejemplo: en el caso del apartado c) se tiene que $A \cap B = \{2\}$.

e) Los sucesos A y B son *disjuntos*, *excluyentes* o *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$. Este suceso ocurre cuando no pueden verificarse ambos simultáneamente. Ejemplo: si al escoger una letra al azar consideramos los sucesos

$$A = \{\text{obtener vocal}\} \text{ y } B = \{\text{obtener consonante}\}.$$

f) $A^{\mathrm{c}} = \{w \in \Omega : \ w \notin A\}$ es el *complementario* o *contrario* del suceso A (en algunos textos se emplea la notación $\overline{A}$ para denotar al complementario del suceso A). Este suceso ocurre cuando no ocurre A. Ejemplo: en el caso del apartado c) se tiene que $A^{\mathrm{c}} = \{1, 3, 5\}$.

g) $A - B = \{w \in \Omega : \ w \in A \ \text{y} \ w \notin B\} = A \cap B^{\mathrm{c}}$ es la *diferencia* entre los sucesos A y B (en algunos textos se emplea la notación $A \backslash B$ para denotar la diferencia entre los sucesos A y B). Este suceso ocurre cuando A y no ocurre B. Nótese que $A^{\mathrm{c}} = \Omega - A$. Ejemplo: en el caso del apartado c) se tiene que $A - B = \{4, 6\}$. □

Observación 19.3 Nótese la relación existente entre los sucesos y la teoría de conjuntos:

a) Propiedad asociativa: $\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C). \end{cases}$

b) Propiedad conmutativa: $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A. \end{cases}$

c) Propiedad idempotente: $\begin{cases} A \cup A = A \\ A \cap A = A. \end{cases}$

d) Elemento neutro: $\begin{cases} A \cup \emptyset = A \\ A \cap \Omega = A. \end{cases}$

e) Propiedad absorbente: $\begin{cases} A \cup \Omega = \Omega \\ A \cap \emptyset = \emptyset. \end{cases}$

f) Propiedad distributiva: $\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{cases}$

g) Propiedad de los complementarios: $\begin{cases} A \cup A^{\mathrm{c}} = \Omega, \ A \cap A^{\mathrm{c}} = \emptyset \\ (A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = A, \ \emptyset^{\mathrm{c}} = \Omega. \end{cases}$

h) Leyes de Morgan: $\begin{cases} (A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}} \\ (A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}. \end{cases}$ □

Observación 19.4 Las *Leyes de Morgan* son válidas para una familia arbitraria de sucesos $\{A_i\}_{i \in I}$:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^{\mathrm{c}} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\mathrm{c}} \ \text{y} \ \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^{\mathrm{c}} = \bigcup_{i \in I} A_i^{\mathrm{c}}. \quad \square$$

19.3. Nociones y propiedades elementales de Probabilidad

Al observar una muestra de una población (recuérdese que estos términos fueron introducidos en la Sección 18.3.), nos planteamos el problema de inferir propiedades de la población a partir de las propiedades de la muestra. De esta forma, los *modelos estadísticos* van a actuar de puente entre lo observado (*muestra*) y lo desconocido (*población*). Su construcción y estudio son el objetivo del *Cálculo de Probabilidades*.

Definición 19.5 Supongamos que repetimos un experimento aleatorio n veces. Si un suceso A del espacio muestral Ω ha ocurrido n_A veces, se denomina:

a) *Frecuencia absoluta* del suceso A a la cantidad n_A.

b) *Frecuencia relativa* del suceso A al cociente $\mathrm{fr}(A) = \frac{n_A}{n}$, es decir,

$$\boxed{\mathrm{fr}(A) = \frac{\text{número de veces que ha ocurrido } A \text{ en } n \text{ pruebas}}{\text{número total de pruebas}}.}$$

Observación 19.5 Nótese la similitud entre esta definición de frecuencias y la introducida en la Sección 18.2. para conjuntos de datos. □

Observación 19.6 (Propiedades de las frecuencias absolutas y relativas)

1) $n_\Omega = n$ y $\mathrm{fr}(\Omega) = 1$.

2) $0 \leq \mathrm{fr}(A) \leq 1$ para todo suceso A de Ω.

3) Si $A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; n_{A\cup B} = n_A + n_B$ y $\mathrm{fr}(A \cup B) = \mathrm{fr}(A) + \mathrm{fr}(B)$. □

Ejemplo 19.6 Al escoger al azar un día de la semana se obtuvieron los siguientes resultados al repetir el experimento 8 veces:

$$\{\text{lunes, miércoles, lunes, sábado, viernes, martes, domingo, jueves}\}.$$

Si consideremos los sucesos $A = \{\text{lunes, martes}\}$ y $B = \{\text{miércoles, jueves}\}$, se tiene que

$$A \cup B = \{\text{lunes, martes, miércoles, jueves}\}.$$

Por tanto,

$$n_{A\cup B} = 5, n_A = 3, n_B = 2, \mathrm{fr}(A \cup B) = \frac{5}{8}, \mathrm{fr}(A) = \frac{3}{8} \text{ y } \mathrm{fr}(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$ □

Observación 19.7

a) El desarrollo inicial de la probabilidad se asocia con los *juegos de azar*; un hecho constatable empíricamente es que las frecuencias relativas de aparición de ciertos sucesos en experiencias similares se aproximan a un valor fijo constante al aumentar el número de experiencias. Esto llevó, en el siglo XIX, a definir la probabilidad de un suceso como el valor límite de su frecuencia relativa al repetir indefinidamente la experimentación, es decir, lo que se conoce como *ley de azar* o *ley de estabilidad de las frecuencias estadísticas*: si un experimento se repite n veces en las mismas condiciones y n_A de los resultados son favorables al suceso A, el límite de $\frac{n_A}{n}$, conforme n se vuelve grande, se define como la *probabilidad* del suceso A. Esta definición presenta problemas importantes:

   i) Desde el punto de vista teórico, pues el "límite" anterior no puede interpretarse en el sentido del Análisis Matemático, ya que no puede fijarse a priori un número de repeticiones a partir del cual la diferencia entre la frecuencia relativa y la probabilidad sea menor que una cierta cantidad prefijada de antemano.

   ii) Desde el punto de vista práctico, pues esta definición no permite, en muchos casos, el conocimiento exacto de la probabilidad, ya que no es posible una experimentación indefinida y el sistema observado puede variar a lo largo del tiempo. Ejemplos: determinar la duración de un terremoto; el tiempo que tarda una persona en beber 3 vasos de vino; el número de días que una persona puede estar sin comer ...

b) La base para la interpretación de frecuencia relativa de la probabilidad es la repetición de un experimento en las mismas condiciones. No obstante, existen muchos fenómenos que no se prestan a su repetición pero que, a pesar de ello, requieren de una noción de probabilidad. Por ejemplo, las compañías de seguros tienen que determinar a priori los riesgos. En estos casos, la interpretación de probabilidad no puede tener su fundamento en la frecuencia de aparición, sino que se interpreta como grado de creencia o convicción con respecto a que se verifique una afirmación. Esta interpretación de la *probabilidad* se conoce como *subjetiva* o *personal*.

Para evitar estos inconvenientes, *Kolmogorov* dio, en 1933, una definición axiomática de la probabilidad en el marco general de la *teoría de la Medida*, de forma que la definición incluye las dos interpretaciones anteriores: la probabilidad es un número real que mide la posibilidad de que ocurra un suceso del espacio muestral cuando el experimento se lleve a cabo. □

Desde el punto de vista coloquial, si un suceso en un experimento aleatorio tiene una frecuencia relativa próxima a 1, se dice que es "muy probable" que ocurra ese suceso. Por el contrario, si la frecuencia relativa es cercana a 0, se dice que es "poco probable" que ocurra. Esto da pie a definir la probabilidad, a partir de las propiedades de las frecuencias relativas, de la siguiente forma:

Definición 19.6 (Kolmogorov) Sea Ω un espacio muestral. Una *probabilidad* es una aplicación $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ verificando los siguientes axiomas:

I) $P(A) \geq 0$, $\forall\, A \subset \Omega$.

II) $P(\Omega) = 1$.

III) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $\forall\, A, B \subset \Omega$ tales que $A \cap B = \emptyset$.

Se dice que $P(A)$ es la *probabilidad del suceso* $A \subset \Omega$. $\square$

Proposición 19.1 (Propiedades de la probabilidad) *Sea Ω un espacio muestral.*

a) $P(\emptyset) = 0$.

b) Si $A, B \subset \Omega$ son tales que $A \subset B \;\Rightarrow\; P(B - A) = P(B) - P(A)$. En particular, $P(A) \leq P(B)$.

c) $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall\, A \subset \Omega$.

d) $P(A^{\mathrm{c}}) = 1 - P(A)$, $\forall\, A \subset \Omega$.

e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $\forall\, A, B \subset \Omega$.

DEMOSTRACIÓN.

a) Puesto que $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ y $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, por el axioma III) de la Definición 19.6 se tiene que

$$P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) = 2P(\emptyset) \;\Rightarrow\; P(\emptyset) = 0.$$

b) Dado que $B = A \cup (B - A)$ y $A \cap (B - A) = \emptyset$, por los axiomas III) y I) de la Definición 19.6 se tiene que

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) \geq P(A).$$

c) A partir de los axiomas I) y II) de la Definición 19.6 y del apartado b) se tiene que

$$0 \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1.$$

d) Puesto que $\Omega = A \cup A^{\mathrm{c}}$ y $A \cap A^{\mathrm{c}} = \emptyset$, por los axiomas III) y II) de la Definición 19.6 se tiene que

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^{\mathrm{c}}) = P(A) + P(A^{\mathrm{c}}) \;\Rightarrow\; P(A^{\mathrm{c}}) = 1 - P(A).$$

e) Dado que $A \cup B = A \cup (B - (A \cap B))$ con $A \cap (B - (A \cap B)) = \emptyset$, por el axioma III) de la Definición 19.6 se verifica que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - (A \cap B)).$$

Ahora bien, puesto que $B - (A \cap B) \subset B$, por el apartado b) se tiene que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad \square$$

Observación 19.8

i) Los apartados a) y e) conducen al axioma III) de la Definición 19.6 en el caso de que los sucesos A y B verifiquen que $A \cap B = \emptyset$.

ii) La propiedad e) puede extenderse a más de dos sucesos. Así, se verifica que

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\ & - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

En efecto, denotando $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, se verifica que

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) \\ &\quad - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\ &\quad - (P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3))) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \quad \square \end{aligned}$$

La idea del apartado ii) de la Observación 19.8 puede extenderse a una unión finita de sucesos. Enunciamos el resultado que se obtiene (sin demostración):

Proposición 19.2 *Dado $n \in \mathbb{N}$, para toda familia de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^n$ de un espacio muestral Ω se verifica que*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ + \cdots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right). \quad \square \end{aligned}$$

Observación 19.9 (Método de los puntos muestrales) Nótese que la definición de probabilidad sólo expresa cuáles son las propiedades que tiene que cumplir una probabilidad, pero no expresa cómo asignar las probabilidades específicas a los sucesos. Para los espacios muestrales finitos, basta con asignar las probabilidades a cada suceso elemental. Con el *método de los puntos muestrales* deben seguirse los siguientes pasos para asignar la probabilidad de un suceso:

1) Definir correctamente el experimento y establecer los sucesos elementales $\{A_i\}_{i=1}^n$ asociados a él, obteniendo el espacio muestral Ω.

2) Asignar a cada suceso elemental A_i una probabilidad adecuada verificando
$$P(A_i) \geq 0 \ \text{ y } \ \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(\Omega) = 1.$$

3) Expresar el suceso compuesto A en estudio como una colección de puntos muestrales, es decir,
$$A = \bigcup_{i \in J} A_i \ \text{ con } \ J \subset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

4) Finalmente, se determina $P(A)$ sumando las probabilidades de los puntos muestrales que constituyen A, es decir,
$$P(A) = \sum_{i \in J} P(A_i).$$

De esta forma, si $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es un espacio muestral finito y denotamos por
$$p_i = P(A_i), \ i = 1, 2, \ldots, n,$$
deben verificarse las siguientes propiedades:
$$\begin{cases} 0 \leq p_i \leq 1, \ i = 1, 2, \ldots, n \\ 1 = P(\Omega) = P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) = p_1 + \cdots + p_n. \end{cases} \tag{19.1}$$
Una opción (de las infinitas posibles) es hacer una asignación uniforme de probabilidad, es decir, considerar que los sucesos elementales son *equiprobables*. De esta forma, a partir de (19.1) se tiene que
$$p_i = \frac{1}{n}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$
Así, la probabilidad de cualquier otro suceso
$$A = \bigcup_{i \in J} A_i \ \text{ con } \ J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$$

será la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen. Es decir, si $\mathrm{card}(J) = m$, entonces

$$P(A) = \sum_{i \in J} P(A_i) = \frac{1}{n} + \overset{m)}{\cdots} + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Se llega así, para este caso particular de probabilidad uniforme, a la conocida *regla de Laplace*:

$$\boxed{\text{probabilidad de un suceso } A = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos posibles en } \Omega}.}$$

Observación 19.10 Aunque los valores $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pueden elegirse de cualquier forma, siempre y cuando sean valores no negativos que sumen 1, en la práctica se eligen de manera que representen de forma adecuada las posibilidades de ocurrencia de los sucesos elementales $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Así, por ejemplo, si se considera el experimento de lanzar una moneda al aire, se tiene que $\Omega = \{C, +\}$, por lo que la aplicación P que asigna

$$P(C) = p \ \text{ y } \ P(+) = 1 - p$$

es una función de probabilidad para cualquier valor $0 \leq p \leq 1$.

No obstante, si la moneda está equilibrada (es decir, no está trucada), se consideran los dos posibles resultados equiprobables y, por tanto, se toma

$$P(C) = P(+) = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Ejemplo 19.7 La probabilidad de obtener un número primo al lanzar un dado al aire es

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Observación 19.11 El *método de los puntos muestrales* es simple y efectivo en la mayoría de los casos, pero no es infalible:

a) Frecuentemente se cometen errores al interpretar equivocadamente la naturaleza de un suceso elemental y al no incluir todos los puntos muestrales en Ω.

b) Muchos espacios muestrales discretos contienen gran número de puntos muestrales, y la especificación detallada de cada uno es tediosa y lenta.

c) El *método de los puntos muestrales* sólo es aplicable a espacios muestrales finitos. $\square$

Observación 19.12 Las técnicas del *Análisis Combinatorio* estudiadas en el Capítulo 17 son particularmente útiles al aplicar el método de puntos muestrales para calcular la probabilidad de un suceso, puesto que permiten contar el número de puntos muestrales de un espacio muestral Ω, y especialmente cuando el *cardinal* (número de elementos) del espacio es “grande”. $\square$

Ejemplo 19.8 Se considera una urna compuesta por 4 bolas blancas y 6 negras. Si se extraen tres bolas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos blancas y una negra?

Una forma de resolver este problema es considerar que tenemos 10 bolas distintas (a pesar de que dos bolas del mismo color puedan ser indistinguibles) y tomar como espacio muestral los posibles conjuntos que se pueden formar al extraer 3 de estas 10 bolas. El cardinal de dicho espacio es

$$n = \text{card}(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120.$$

Si consideramos el suceso $A = \{\text{extraer } 2 \text{ bolas blancas y } 1 \text{ negra}\}$, los casos favorables a A se obtienen a partir del modelo hipergeométrico:

$$m = \binom{4}{2}\binom{6}{1} = \frac{4!}{2!2!}\,\frac{6!}{5!1!} = \frac{4 \times 3}{2} \times 6 = 36.$$

De esta forma, a partir de la regla de Laplace, se tiene que

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = 0'3. \quad \square$$

19.4. Probabilidad condicionada

Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 19.9 Se saca una carta al azar de una baraja española de 40 cartas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el caballo de oros? $\frac{1}{40}$.

b) Si la carta extraída es de oros, ¿cuál es la probabilidad de que sea el caballo? $\frac{1}{10}$.

c) Si la carta extraída es un caballo, ¿cuál es la probabilidad de que sea el de oros? $\frac{1}{4}$. $\square$

Como se observa en el Ejemplo 19.9, la probabilidad de un suceso cambia al dar información segura acerca del resultado obtenido. Si A y B son dos sucesos cualesquiera de un espacio muestral Ω tal que $P(A) > 0$, la *probabilidad del suceso B condicionado por el suceso A*, que se denota $P(B/A)$, es una medida de cómo está B contenido en A (o cómo B es implicado por A).

Justifiquemos esta noción desde el punto de vista frecuentista. Supongamos que repetimos un experimento n veces y que n_A, n_B y $n_{A\cap B}$ son, respectivamente, los números de veces que han ocurrido los sucesos A, B y $A \cap B$. En esta situación, se tiene que

$$\text{fr}(A \cap B) = \frac{n_{A\cap B}}{n} = \frac{n_{A\cap B}}{n_A}\,\frac{n_A}{n} = \text{fr}(B/A)\text{fr}(A),$$

donde $\mathrm{fr}(B/A)$ representa la *frecuencia relativa condicional* de B sabiendo que ha ocurrido A. Por tanto,

$$\mathrm{fr}(B/A) = \frac{\mathrm{fr}(A \cap B)}{\mathrm{fr}(A)} \text{ si } \mathrm{fr}(A) > 0. \tag{19.2}$$

La relación (19.2), junto con el hecho de que, interpretando la probabilidad desde el punto de vista frecuentista, la frecuencia relativa de un suceso debe estar "próxima" a su probabilidad, motiva la siguiente definición:

Definición 19.7 Sean A y B dos sucesos cualesquiera de un espacio muestral Ω tal que $P(A) > 0$. Se denomina *probabilidad del suceso B condicionado por el suceso A* a la cantidad

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.}$$

Observación 19.13

a) Para cada $A \subset \Omega$ fijo con $P(A) > 0$, la función $P(\cdot/A)$ satisface los tres axiomas que definen una probabilidad, pues:

   I) $0 \leq P(B/A) \leq 1, \; \forall\, B \subset \Omega.$

   II) $P(\Omega/A) = 1.$

   III) $P((B \cup C)/A) = P(B/A) + P(C/A), \; \forall\, B, C \subset \Omega$ tales que $B \cap C = \emptyset$.

b) Hay dos maneras de calcular la probabilidad condicional $P(B/A)$:

   i) Directamente, considerando la probabilidad de B con respecto al espacio muestral reducido A.

   ii) Usando la definición anterior, donde $P(A \cap B)$ y $P(A)$ se calculan con respecto al espacio muestral original Ω.

c) Veamos si podemos hacer una afirmación general acerca de la magnitud relativa de $P(A/B)$ y $P(A)$. Para ello, si $A, B \subset \Omega$, consideramos las siguientes situaciones:

   i) $A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; P(A/B) = 0 \leq P(A).$

   ii) $A \subset B \;\Rightarrow\; P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} \geq P(A).$

   iii) $B \subset A \;\Rightarrow\; P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1 \geq P(A).$

   iv) Si $A \cap B \neq \emptyset$ no puede hacerse ninguna afirmación acerca de la magnitud relativa de $P(A \cap B)$ y $P(A)$. $\square$

	Chicas	Chicos	TOTAL
Rubios	8	6	14
Morenos	12	4	16
TOTAL	20	10	30

Tabla 19.1: Clase con 30 estudiantes.

Ejemplo 19.10 En una clase hay 30 estudiantes, de los cuales 20 son chicas y 10 son chicos. Además, 8 chicas y 6 chicos son rubios y el resto son morenos (véase la Tabla 19.1).

¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante (chico o chica) rubio, escogido al azar, sea chica? Esta probabilidad viene dada por

$$P(\text{Chica}/\text{Rubio}) = \frac{P(\text{Chica} \cap \text{Rubio})}{P(\text{Rubio})} = \frac{\frac{8}{30}}{\frac{14}{30}} = \frac{4}{7} \simeq 0'5714. \quad \square$$

Ejemplo 19.11 Una urna contiene 3 bolas rojas y 5 negras. Si se escogen dos bolas al azar sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?

Si consideremos los sucesos

$$A = \{\text{la primera bola extraída es roja}\} \text{ y } B = \{\text{la segunda bola extraída es roja}\},$$

hay que calcular $P(A \cap B)$. Claramente,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{8}\frac{2}{7} = \frac{3}{28} \simeq 0'1071. \quad \square$$

En el Ejemplo 19.11 se ha utilizado la noción de probabilidad condicional para determinar la probabilidad de la intersección de dos sucesos. Si se tuvieran tres, sería:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2)P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \\ &= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \end{aligned}$$

y, en general, se tiene:

Proposición 19.3 (Regla de la multiplicación) *Sea Ω un espacio muestral. Si el conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \Omega$ con $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) > 0$, entonces*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \cdots P\left(A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right). \quad \square$$

Al considerar la probabilidad de un suceso B condicionado por otro A se tiene que las probabilidades de A y B son, en cierto sentido, “dependientes” entre sí, es decir, la información sobre A afectará a la probabilidad de B. Si A no tiene ninguna influencia sobre B, entonces

$$P(B/A) = P(B) \text{ si } P(A) > 0,$$

aun en el caso en que haya ocurrido el suceso A. Se origina así un concepto muy importante que se conoce como *independencia estadística*.

Ejemplo 19.12 Consideremos el experimento de lanzar dos monedas al aire consecutivamente y observar el resultado. El espacio muestral asociado a este experimento aleatorio es

$$\Omega = \{CC, C+, +C, ++\}.$$

Si definimos los sucesos

$$\begin{cases} A = \{\text{obtener cara en el primer lanzamiento}\} = \{CC, C+\} \\ B = \{\text{obtener cara en el segundo lanzamiento}\} = \{CC, +C\}, \end{cases}$$

se verifica que

$$P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0.$$

Intuitivamente sabemos que los sucesos A y B no están relacionados: saber que ha ocurrido A no proporciona información acerca de la ocurrencia de B, como pone de manifiesto el siguiente cálculo:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(CC)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(B)$$

y, análogamente,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(CC)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = P(A). \quad \square$$

Por tanto, podríamos estar inclinados a decir que dos sucesos A y B son "independientes" si

$$P(B/A) = P(B) \text{ y } P(A/B) = P(A).$$

No obstante, para poder hacerlo así, hemos necesitado que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$. Hay una forma de evitar estas restricciones; si A es "independiente" de B, entonces

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(A)P(B).$$

Ello nos conduce a la siguiente definición:

Definición 19.8 Dos sucesos A y B de un espacio muestral Ω son *independientes* si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad \square$$

Ejemplo 19.13 Se considera el experimento aleatorio de extraer una carta de una baraja española de 40 cartas. Los sucesos $A = \{\text{sacar caballo}\}$ y $B = \{\text{sacar oros}\}$ son independientes, pues

$$P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10},\ P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \text{ y } P(A \cap B) = \frac{1}{40}. \quad \square$$

Observación 19.14 En la práctica, si entre dos sucesos A y B no se observa ninguna relación de causa–efecto, se supondrá que ambos sucesos son independientes. $\square$

Ejemplo 19.14 Consideremos el experimento de escoger una carta de una baraja española, devolverla al mazo y escoger otra carta. Para hallar la probabilidad del suceso

$$S = \{\text{las dos cartas extraídas son oros}\},$$

tenemos en cuenta que los sucesos

$$\begin{cases} A_1 = \{\text{sacar oros en la primera extracción}\} \\ A_2 = \{\text{sacar oros en la segunda extracción}\} \end{cases}$$

son independientes y, por tanto,

$$P(S) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{10}{40}\frac{10}{40} = \frac{1}{16} = 0'0625. \quad \square$$

Observación 19.15

a) No es necesario hacer restricciones sobre $P(A)$ y $P(B)$.

b) Si $A \subset \Omega$ con $P(A) > 0$, se tiene que A y $\emptyset$ (y A y Ω) son independientes, pues

$$\begin{cases} P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(A) \times 0 = P(A)P(\emptyset) \\ P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \times 1 = P(A)P(\Omega). \end{cases}$$

c) Si $A \subset \Omega$ con $P(A) = 0$, entonces A y cualquier suceso $B \subset \Omega$ son independientes. En efecto, como

$$A \cap B \subset A \ \Rightarrow\ 0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$$

y, por tanto,

$$P(A \cap B) = 0 = 0 \times P(B) = P(A)P(B). \quad \square$$

Obviamente, se tiene la siguiente equivalencia:

Proposición 19.4 *Sea Ω un espacio muestral y $A, B \subset \Omega$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) A *y* B *son independientes.*

b) $P(A/B) = P(A)$ *si* $P(B) > 0$.

c) $P(B/A) = P(B)$ *si* $P(A) > 0$.

DEMOSTRACIÓN.

$\boxed{a) \;\Rightarrow\; b)}$ Por ser A y B independientes, si $P(B) > 0$, se verifica que

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

$\boxed{b) \;\Rightarrow\; c)}$ Supongamos que $P(A) > 0$. Distinguimos dos casos:

i) Si $P(B) = 0$, se verifica que

$$0 \leq P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq \frac{P(B)}{P(A)} = 0,$$

de donde se sigue que

$$P(B/A) = 0 = P(B).$$

ii) Si $P(B) > 0$, entonces

$$P(A)P(B/A) = P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = P(B)P(A),$$

de donde se concluye que

$$P(B/A) = P(B).$$

$\boxed{c) \;\Rightarrow\; a)}$ Distinguimos dos casos:

i) Si $P(A) = 0$, entonces, tal y como se ha visto en el apartado c) de la Observación 19.15, se tiene que A y B son sucesos independientes.

ii) Si $P(A) > 0$, se tiene que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(A)P(B),$$

por lo que los sucesos A y B son independientes. $\square$

Conviene destacar que no existe relación entre los sucesos independientes e incompatibles (véase el apartado e) de la Definición 19.4):

Observación 19.16 Sea Ω un espacio muestral y $A, B \subset \Omega$ con $P(A) \neq 0 \neq P(B)$.

a) $\boxed{A \text{ y } B \text{ independientes } \not\Rightarrow A \text{ y } B \text{ incompatibles}}$

En efecto, si A y B son independientes, se tiene que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \neq 0 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

y, por tanto, A y B no son incompatibles.

b) $\boxed{A \text{ y } B \text{ incompatibles } \not\Rightarrow A \text{ y } B \text{ independientes}}$

En efecto, si A y B son incompatibles, entonces

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(B),$$

por lo que A y B no son independientes. $\square$

19.5. Teorema de la Probabilidad Total. Teorema de Bayes

Definición 19.9 Una familia de sucesos $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de un espacio muestral Ω constituye un *sistema completo de sucesos* (o *partición*) de Ω si se verifica:

1) $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ (los sucesos son disjuntos dos a dos).

2) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (la unión de todos los sucesos es el espacio muestral).

3) $P(A_i) > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (los sucesos son verosímiles).

De esta forma, cuando se efectúa el experimento, ocurre uno, y solamente uno, de los sucesos A_i. $\square$

Ejemplo 19.15 Al elegir una carta de una baraja española, el conjunto de sucesos

$$S = \{A_1 = \{\text{oros}\}, A_2 = \{\text{copas}\}, A_3 = \{\text{espadas}\}, A_4 = \{\text{bastos}\}\}$$

constituye un sistema completo de sucesos del espacio muestral, mientras que no lo es el conjunto

$$\widetilde{S} = \{\tilde{A}_1 = \{\text{reyes}\}, \tilde{A}_2 = \{\text{ases}\}\}. \quad \square$$

Como aplicación directa de la probabilidad condicional se deducen el *teorema de la Probabilidad Total* y el *teorema de Bayes*.

Teorema 19.1 (Probabilidad Total) *Si* $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *es un sistema completo de sucesos de un espacio muestral* Ω*, entonces para todo* $B \subset \Omega$ *se verifica que*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

y, por tanto,

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i).}$$

DEMOSTRACIÓN. Tal y como se muestra en la Figura 19.1, por ser S un sistema completo de sucesos, se tiene que (véase la propiedad distributiva en la Observación 19.3)

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

con

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = B \cap \emptyset = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

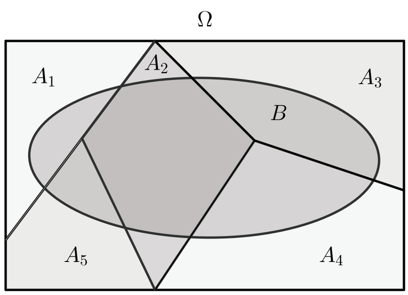


Figura 19.1: Sistema completo de sucesos.

Por tanto, por el axioma III) de la Definición 19.6, se verifica que

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

(nótese que tiene sentido considerar probabilidades condicionadas al ser $P(A_i) > 0$). $\square$

Ejemplo 19.16 El 60% de los pasajeros de un tren son mujeres. Si el 35% de los hombres y el 20% de las mujeres miden más de $1'80$ cm y se elige un pasajero al azar, ¿cuál es la probabilidad de que mida más de $1'80$ cm?

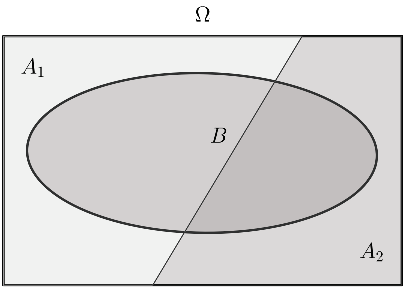


Figura 19.2: Sistema completo de sucesos para el Ejemplo 19.16.

Si consideramos los sucesos

$$\begin{cases} A_1 = \{\text{el pasajero es mujer}\},\ A_2 = \{\text{el pasajero es hombre}\} \\ B = \{\text{el pasajero mide más de } 1'80 \text{ cm}\}, \end{cases}$$

puesto que $S = \{A_1, A_2\}$ constituye un sistema completo de sucesos (véase la Figura 19.2), aplicando el *teorema de la Probabilidad Total*, se tiene que

$$P(B) = \sum_{i=1}^{2} P(A_i)P(B/A_i) = \frac{60}{100}\,\frac{20}{100} + \frac{40}{100}\,\frac{35}{100} = \frac{13}{50} = 0'26.$$

Por tanto, la probabilidad buscada es el 26%. $\square$

Teorema 19.2 (Bayes) *Si $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es un sistema completo de sucesos de un espacio muestral Ω, entonces, para todo $B \subset \Omega$ con $P(B) > 0$, se verifica que*

$$\boxed{P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}}$$

para $j = 1, 2, \ldots, n$ ($P(A_i)$ se denominan probabilidades "a priori", $P(B/A_i)$ "verosimilitudes" y $P(A_j/B)$ probabilidades "a posteriori").

DEMOSTRACIÓN. Por una parte, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene que

$$\begin{cases} P(B) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(A_j/B) = \dfrac{P(B \cap A_j)}{P(B)} \\ P(A_j) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(B \cap A_j) = P(A_j)P(B/A_j), \end{cases}$$

por lo que

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{P(B)}. \tag{19.3}$$

Por otro lado, por el *teorema de la Probabilidad Total* (véase el Teorema 19.1)

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i). \tag{19.4}$$

El resultado se concluye sustituyendo (19.4) en (19.3). □

Ejemplo 19.17 En las condiciones del Ejemplo 19.16, si el pasajero elegido al azar mide más de $1'80$ cm, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Por el *teorema de Bayes* (véase el Teorema 19.2) se tiene que

$$\begin{aligned} P(A_1/B) &= \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)} \\ &= \frac{\frac{60}{100}\,\frac{20}{100}}{\frac{60}{100}\,\frac{20}{100} + \frac{40}{100}\,\frac{35}{100}} = \frac{6}{13} \simeq 0'4615, \end{aligned}$$

por lo que la probabilidad buscada es, aproximadamente, el $46'15\%$.

Obviamente, si el pasajero elegido al azar mide más de $1'80$ cm y queremos hallar la probabilidad de que sea un hombre, podemos calcular $P(A_2/B)$ aplicando de nuevo el *teorema de Bayes*, aunque no es necesario, pues, teniendo en cuenta que

$$P(A_1/B) + P(A_2/B) = 1,$$

esta probabilidad se obtiene directamente como

$$P(A_2/B) = 1 - P(A_1/B) = 1 - \frac{6}{13} = \frac{7}{13} \simeq 0'5385$$

(compruébese que se obtiene el mismo resultado aplicando el *teorema de Bayes*). □

19.6. Problemas

19.1. Determinar el espacio muestral en cada uno de los siguientes experimentos:

a) Se tiran dos monedas iguales al aire simultáneamente y se anota el resultado.

b) Se tiran dos monedas distintas simultáneamente y se anota el resultado.

c) De una bolsa con tres bolas (roja, blanca y negra) se seleccionan dos de ellas con reemplazamiento (esto es, se saca una bola, se ve su color y antes de la segunda extracción se repone en la bolsa).

d) El mismo experimento que c), pero sin reemplazamiento.

e) Se lanza 6 veces un dado y se anotan los resultados.

19.2. Si se lanza un dado al aire 6 veces, hallar la probabilidad de que los 6 resultados obtenidos sean diferentes.

19.3. De los 30 temas de un examen un alumno sabe 18. Se proponen 2 tipos de examen:

a) Los miembros del tribunal eligen 3 temas y el alumno debe contestar correctamente 2.

b) El tribunal elige 5 temas de los cuales debe contestar 3.

¿Cuál es el tipo de examen más favorable para el alumno?

19.4. Sabiendo que una función de probabilidad verifica que $P(A) = 0'3$, $P(B) = 0'4$ y $P(A \cap B) = 0'2$, hallar $P(A/B)$, $P(B/A^{\mathrm{c}})$ y $P(B^{\mathrm{c}}/A)$.

19.5. Se lanzan 3 monedas sucesivamente y se considera A el suceso “obtener cruz en el primer lanzamiento”, B el suceso “obtener al menos una cara” y C el suceso “obtener exactamente dos caras”. ¿Son A y B incompatibles? ¿Son independientes? ¿Y A y C? Hallar $P(A \cup B \cup C)$ y $P(A \cap B \cap C)$.

19.6. Calcular la probabilidad de que los 100 alumnos de una clase tengan todos sus cumpleaños en días diferentes, indicando la hipótesis implícita en el razonamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos alumnos cumplan los años el mismo día?

19.7. El 70% de los habitantes de una determinada ciudad tiene coche. Si se eligen 5 habitantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 3 de ellos tengan coche? ¿Y lo de que no lo tenga ninguno?

19.8. La probabilidad de que un tirador dé en el blanco es de $\frac{2}{3}$. Si dispara al blanco hasta que le da por primera vez, hallar la probabilidad de que necesite 5 disparos.

19.9. Un examen consta de 14 temas y se debe escoger 1 tema de 2 elegidos al azar.

a) Hallar la probabilidad de que a un alumno que ha preparado 5 temas le toque al menos 1 que sabe.

b) ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para tener una probabilidad superior a $0'5$ de superar el examen?

19.10. Una marca de coches tiene tres fábricas en España que reparten su producción en un 20%, 30% y 50%. Los porcentajes de coches defectuosos en la producción de cada fábrica son, respectivamente, el 5%, el 2% y el 6%. ¿Cuál es el porcentaje a nivel estatal? Si compramos un coche de esa marca y resulta ser defectuoso, ¿cuáles son las probabilidades de que proceda de cada una de las tres fábricas?

19.11. En una población de adultos, el 48% son hombres. Se sabe que el 55% de los hombres y el 30% de las mujeres son fumadores. Determinar el porcentaje de adultos fumadores y el porcentaje de fumadores que son hombres.

19.7. Soluciones

19.1. a) $\Omega = \{CC, C+, ++\}$. b) $\Omega = \{C_1C_2, C_1+_2, +_1C_2, +_1+_2\}$.
c) $\Omega = \{RR, RB, RN, BR, BB, BN, NR, NB, NN\}$.
d) $\Omega = \{RB, RN, BR, BN, NR, NB\}$.
e) $\Omega = \{(1,1,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,2), \ldots, (6,6,6,6,6,6)\}$. El número de elementos de Ω es $\operatorname{card}(\Omega) = RV_{6,6} = 6^6 = 46656$.

19.2. $\dfrac{5}{324} \simeq 0'0154$.

19.3. a) $\dfrac{663}{1015} \simeq 0'6532$. b) $\dfrac{1836}{2639} \simeq 0'6957$. Luego el segundo tipo de examen es más favorable al alumno.

19.4. $P(A/B) = 0'5$, $P(B/A^c) = \dfrac{2}{7} \simeq 0'2857$ y $P(B^c/A) = \dfrac{1}{3} \simeq 0'3333$.

19.5. A y B son compatibles. A y B son dependientes. A y C son dependientes.
$P(A \cup B \cup C) = 1$ y $P(A \cap B \cap C) = 0'125$.

19.6. a) $p \simeq 3'0725 \times 10^{-7}$. La hipótesis que estamos haciendo es que todos los cumpleaños son equiprobables (lo cual es falso). b) $1 - p \simeq 0'9999996927$.

19.7. a) $10 \times 0'3430 \times 0'09 \simeq 0'3087$. b) $0'3^5 \simeq 0'0024$.

19.8. $\dfrac{2}{243} \simeq 0'0082$.

19.9. a) El alumno tiene el $60'44\%$ de aprobar el examen. b) Basta que el alumno prepare $n = 4$ temas.

19.10. El $4'6\%$ de los coches son defectuosos.
$P(F_1/D) = \dfrac{5}{23} \simeq 0'2174,\ P(F_2/D) = \dfrac{3}{23} \simeq 0'1304,\ P(F_3/D) = \dfrac{15}{23} \simeq 0'6522$.

19.11. El $42'00\%$ de los adultos son fumadores. El $62'86\%$ de los fumadores son hombres.

Bibliografía

[1] S. J. Álvarez: *Estadística Aplicada. Teoría y Problemas*. CLAG, S.A. 2000.

[2] F. Bernis, A. Malet y C. Molinas: *Curso de problemas de Matemáticas* (COU). Noguer Didáctica. 1983.

[3] G. C. Canavos: *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*. McGraw–Hill. 1987.

[4] F. González y J. Villanova: *Curso práctico de Matemáticas* (3° BUP). Edunsa. 1987.

[5] F. González y J. Villanova: *Curso práctico de Matemáticas* (COU). Edunsa. 1987.

[6] M. de Guzmán y J. Colera: *Matemáticas I* (COU). Anaya. 1989.

[7] M. de Guzmán y J. Colera: *Matemáticas II* (COU). Anaya. 1989.

[8] A. Martínez, M. C. Davalillo, L. M. Garrido y L. Villacorta: *Matemáticas*. Documentos 48/1, 48/2 y 48/3 (3° BUP). INBAD. 1978.

[9] A. Martínez, J. Valdés, F. Hernández, F. Lorenzo y S. Marsinyach: *Matemáticas* (COU). Bruño. 1986.

[10] W. Mendenhall, R. L. Scheaffer y D. D. Wackerly: *Estadística Matemática con aplicaciones*. Grupo editorial Iberoamérica. 1986.

[11] P. Meyer: *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. Addison–Wesley Iberoamericana. 1992

[12] D. Peña: *Estadística. Modelos y Métodos 1. Fundamentos*. Alianza Universidad Textos. 1989.

[13] S. Segura: *Matemáticas* (1° BUP). Ecir. 1975.

Índice alfabético