PRECÁLCULO

HAEUSSLER | PAUL | WOOD | CANTÚ

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Precálculo

Ernest Haeussler
Richard Paul
Richard Woaod
Idalia Cantú Martínez
Ma. de los Ángeles Flores Treviño
María del Carmen Garza Santos
María Teresa Flores Garza
Aminta Garza Pinal
Rita Arenas Velasco
Mireya Isabel Sánchez Velázquez

PEARSON

CONTENIDO

Prólogo

Después de buscar en el mercado y no encontrar ningún libro que cumpliera con el programa que se imparte en el curso de Precálculo, de la Universidad de Monterrey, nos dimos a la tarea de elaborar un texto que cubriera en la medida de lo posible, el plan de estudio de la materia.

La estructura de este libro se pensó como algo dinámico, fácil de entender y muy práctico para el alumno por lo que en cada capítulo se incluyó:

- Una parte teórica con problemas resueltos y con su respectiva explicación
- Una parte práctica que incluyera ejercicios propuestos para que el alumno los resuelva.

De igual manera, se buscó dar mayor énfasis a la parte algebraica, necesaria para cursar con éxito la materia de *Cálculo*, y de esta forma el alumno pudiera adquirir mayor habilidad y reforzar los conocimientos imprescindibles del álgebra.

Los temas que se abordan son:

Capítulo 1 Sistemas de números.
Capítulo 2 Exponentes.
Capítulo 3 Radicales.
Capítulo 4 Expresiones algebraicas y sus operaciones.
Capítulo 5 Productos notables.
Capítulo 6 Factorización.
Capítulo 7 Fracciones simples y complejas.
Capítulo 8 Ecuaciones.
Capítulo 9 Desigualdades y valor absoluto.
Capítulo 10 Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales
Capítulo 11 Funciones.
Capítulo 12 Aplicaciones diversas.
Capítulo 13 Evaluación de expresiones algebraicas.
Capítulo 14 El álgebra y su conexión con el Cálculo.

Esperamos que este texto les sea de utilidad a los alumnos y a los profesores.

1

SISTEMAS DE NÚMEROS

1.1 Clasificación de los números

El siguiente esquema muestra la clasificación de números con los cuales trabajaremos.

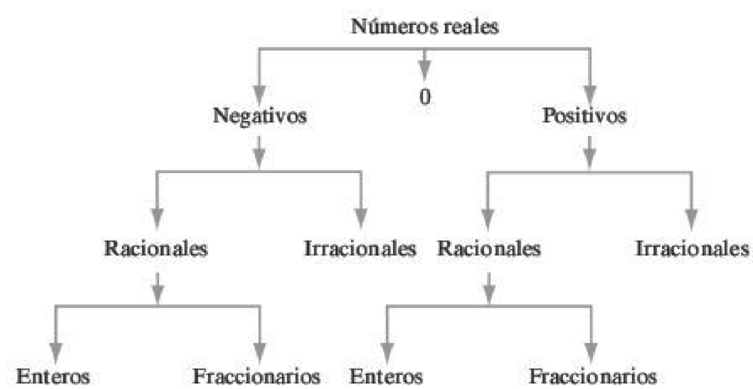


FIGURA 1.1

El cero representa un elemento de separación entre los números positivos y negativos, de modo que es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier número positivo.

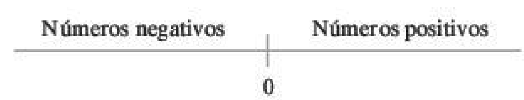


FIGURA 1.2

En la recta numérica aparecen así:
Cada uno de estos conjuntos se representa con la siguiente notación:

- Números complejos: **C**
- Números reales: **R**
- Números reales negativos: $\mathbf{R}^-$
- Números reales positivos: $\mathbf{R}^+$
- Números racionales: **Q**
- Números irracionales: **Q′**
- Números enteros: **Z**
- Números naturales: **N** o $\mathbf{Z}^+$

El primer conjunto de números que se utiliza es el de los **enteros positivos**, también llamados números de conteo o **naturales:**

$$\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, \ldots}$$

Los **enteros negativos** se representan de la siguiente manera:

$$\ldots\ -1, -2, -3, -4, -5, \ldots$$

Cuando se combinan los **enteros positivos**, los **enteros negativos** y el **cero,** se obtienen los **enteros:**

$$\ldots\ -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

A continuación veremos algunas aplicaciones de los números enteros positivos y negativos:

EJEMPLOS

a. El número para representar que la temperatura es de 5° bajo cero es:

$$\mathbf{R = -5}$$

b. El número para representar que Juan tiene ahorrados $23 en su alcancía es:

$$\mathbf{R = +23}$$

c. El número que representaría, en términos de ganancia, que hubo una pérdida de $25 000 es:

$$\mathbf{R = -25\,000}$$

Y así sucesivamente podemos mencionar una serie de situaciones en las que se utilizan los números **enteros** en general.

Los **números racionales** son aquellos que pueden ser expresados como el cociente de dos enteros, excepto si la división es entre cero, pues ésta no existe. Los números con decimales exactos o que se repiten (decimales periódicos), son casos de números racionales.

EJEMPLOS

a. $\frac{2}{5} = 0.4$ Número con decimales exactos.

b. $\frac{1}{6} = 0.1\overline{666}$ Número con decimales repetidos.

c. $\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}$ Se repite después de un número máximo de seis dígitos.

d. $\sqrt{9} = 3$ Número exacto.

e. $\frac{4}{1} = 4$ Número exacto.

Observación: Todos los enteros forman parte del conjunto de los números racionales, ya que todo entero se puede escribir como el cociente del mismo número entre la unidad positiva o negativa.

EJEMPLOS

$$\frac{-4}{1} = -4 \qquad \frac{4}{-1} = -4 \qquad \frac{8}{1} = 8 \qquad \frac{-8}{1} = -8$$

Lo anterior nos lleva a una expansión del sistema numérico. Por definición, los **números irracionales** son todos los números decimales que no se repiten y no son exactos.

EJEMPLOS

a. 0.10010001.

b. 0.12345678910111213.

Los cuales siguen un patrón definido que no se repite.

Otros ejemplos son: π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{15}$, etcétera.

Considerando los conjuntos de números anteriores definimos los **números reales** como aquellos que son racionales o irracionales, o bien, como los números decimales en general.

EJEMPLOS

$$\pm 2,\ \pm 3,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\pi,\ \pm 0.5,\ \pm 1.1212\ldots,\ \pm\sqrt{2}, \sqrt{15}, \text{etcétera.}$$

De acuerdo con la definición anterior, todos estos números se identifican como números reales.

Por otra parte, extendiendo más el sistema numérico real tendremos un sistema mayor llamado **números complejos,** del cual podemos decir que está integrado por números de la forma $\boldsymbol{a + bi}$, donde $\boldsymbol{a}$ es un número real y $\boldsymbol{bi}$ es un número imaginario. De este modo, tanto el conjunto de los números reales como el de los números imaginarios son subconjuntos de los números complejos.

En la expresión $\boldsymbol{a + bi}$ se tiene que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números reales e $i = \sqrt{-1}$ es un número complejo.

Al número $\boldsymbol{bi}$ se le llama también número imaginario puro.

EJEMPLOS

a. $3 + 2i$

b. i

c. $\sqrt{-4} = \pm 2i$

d. $-5 + \sqrt{-9} = -5 \pm 3i$

e. $-10 - 4i$

f. $-8i$

Ejercicios 1.1

I. Diga a qué campo o campos, de los siguientes: naturales (**N**), enteros (**Z**), racionales (**Q**), irracionales (**Q′**), reales (**R**) o complejos (**C**), pertenecen los números que se presentan a continuación.

Nota: Un número puede pertenecer a más de un campo.

1. -3

2. $4i$

3. $\sqrt{2}$

4. $-\frac{1}{5}$

5. $\sqrt{7}$

6. 8

7. -1000

8. $\frac{8}{17}$

9. $-\sqrt{3}$

10. $\frac{80}{2}$

11. $\frac{-2}{1}$

12. $\sqrt[4]{16}$

13. 0.838383...

14. 12.5

15. 0.05

16. 4.31313

17. $\sqrt{-4}$

18. $\frac{3}{2}$

19. -75

20. 3.14168125...

21. $-\frac{1}{2}$

22. 4

23. $-i$

24. 117.38

25. 2

26. 0

27. 0.333

28. 3.2

29. 3

30. 1

31. $-\sqrt{5}$

32. -2

33. $\frac{4}{5}$

34. $\sqrt[3]{64}$

35. 2π

II. Escriba el número que representa cada situación.

(a) Un submarino se encuentra sumergido a una profundidad de 37.9 metros.

(b) Un termómetro marca 23 °C.

(c) Cierta ciudad se encuentra a 500 metros sobre el nivel del mar.

(d) Luis vendió periódicos y su ganancia fue de $107.40.

(e) La temperatura promedio del mes pasado fue de 7 °C bajo cero.
(f) Tomás le pidió prestado a Joaquín $900.
(g) Un avión se eleva a 10 000 metros sobre el nivel del mar.
(h) Un día de febrero de 2011, en la ciudad de Monterrey la temperatura fue de −3 °C bajo cero.
(i) Un barco hundido en 1900 se encuentra en el llamado Triángulo de las Bermudas a 1 000 metros bajo el nivel del mar.
(k) Laura compró una laptop y por ello adquirió una deuda de 25 000 pesos.

1.2 Operaciones y propiedades de los números reales

Las operaciones fundamentales que pueden efectuarse con los números reales son **suma, resta, multiplicación y división.**

Propiedades de los números reales

a. Propiedad reflexiva. Para cualquier $a \in \mathrm{R}$, tenemos que:

$$a = a$$

Ejemplos: $6 = 6, -3 = -3$

b. Propiedad simétrica. Para cualquier $a, b \in \mathrm{R}$, tenemos que:

$$\text{si } a = b \Rightarrow b = a$$

Ejemplos: $5 = x \Rightarrow x = 5, \quad x = -3 \Rightarrow -3 = x$

c. Propiedad transitiva. Para cualquier $a, b, c \in \mathrm{R}$, tenemos que:

$$\text{si } a = b \quad \text{y} \quad b = c \Rightarrow a = c$$

Ejemplos: $\text{Si } 2 + 2 = 3 + 1 \quad \text{y} \quad 3 + 1 = 4 \Rightarrow 2 + 2 = 4$

$\text{Si } x = 9 \quad \text{y} \quad 9 = (3)(3) \Rightarrow x = (3)(3)$

Leyes de los números reales

a. Ley de cerradura. Para cualquier $a, b \in \mathrm{R}$, tenemos que:

$$a + b \in \mathbf{R} \quad \text{y} \quad a \cdot b \in \mathbf{R}$$

Ejemplos: $3 + 4$ es un número real y $3 \cdot 4$ es un número real

b. Ley conmutativa. Para cualquier $a, b \in \mathrm{R}$, tenemos que:

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Ejemplos: $7 + 1 = 1 + 7 \quad \text{y} \quad 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$

c. Ley asociativa. Para cualquier $a, b, c \in \mathrm{R}$, tenemos que:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{y} \quad (ab)c = a(bc)$$

Ejemplos: $(3 + 2) + 4 = 3 + (2 + 4) \quad \text{y} \quad (2 \cdot 3)\, 4 = 2\, (3 \cdot 4)$

d. Ley distributiva. Para cualquier $a, b, c \in \mathrm{R}$, tenemos que:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (b + c)\, a = ba + ca$$

Ejemplos: $4\,(2 + 1) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \quad \text{y} \quad (2 + 1)\, 4 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4$

e. El elemento identidad (para la suma). Existe un número real llamado **cero,** denotado como 0, tal que para cualquier $a \in \mathrm{R}$, tenemos que:

$$\boldsymbol{a + 0 = a} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{0 + a = a}$$

Ejemplos: $5 + 0 = 5$ y $0 + 5 = 5$

f. El elemento identidad (para el producto). Existe un número real, denominado **uno** y designado con 1, tal que para cualquier $a \in \mathrm{R}$, tenemos que:

$$a \cdot 1 = a \qquad 1 \cdot a = a$$

Ejemplos: $5 \cdot 1 = 5$, $1 \cdot 5 = 5$ y $-8 \cdot 1 = -8$

g. El elemento inverso (para la suma). Para cada $a \in \mathrm{R}$ existe un número real denotado con $-a$, tal que:

$$a + (-a) = 0 \qquad \text{y} \qquad (-a) + a = 0$$

Ejemplos: $3 + (-3) = 0$ y $-3 + (3) = 0$

h. El elemento inverso (para el producto). Para cada número no nulo $a \in \mathrm{R}$ existe un número real, designado con $\frac{1}{a}$, llamado también el recíproco de a, tal que:

$$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 \qquad \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

Ejemplos: $4\left(\frac{1}{4}\right) = 1$ $\quad 5\left(\frac{1}{5}\right) = 1$ y $-\frac{1}{3}(-3) = 1$ $\quad -\frac{1}{8}(-8) = 1$

Nota: En el ejemplo anterior observamos que $\frac{1}{4}$ es el recíproco de 4, igual que 4 es el recíproco de $\frac{1}{4}$. Para los otros ejemplos podemos afirmar lo mismo.

Ejercicios 1.2

I. En cada uno de los siguientes ejercicios señale qué propiedad o ley de los números reales se utiliza.

1. $3 + 2 = 2 + 3$ __________
2. $3 \cdot 4$ es un número real __________
3. $8 \cdot 2 = 2 \cdot 8$ __________
4. $\frac{1}{2} + (0) = \frac{1}{2}$ __________
5. $2 - 5$ es un número real __________
6. $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ __________
7. $(x + 2) + b = x + (2 + b)$ __________
8. $5x + (-5x) = 0$ __________
9. $a(b + 2) = ab + 2a$ __________
10. $9(2 + 3) = 9(2) + 9(3)$ __________
11. $4 + 0 = 4$ __________
12. $7 = 7$ __________
13. $(3 + x)2 = 6 + 2x$ __________
14. Si $\frac{1}{2}W = T$ y $T = 4 \Rightarrow \frac{1}{2}W = 4$ __________
15. $8 \cdot 1 = 8$ __________
16. $y = 3$ entonces $3 = y$ __________
17. $3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ __________
18. $x = z$ y $z = w \Rightarrow x = w$ __________
19. $4 + (-4) = 0$ __________
20. $a = a$ __________
21. $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$ __________
22. $-9 + 9 = 0$ __________
23. $x + y + z = y + z + x$ __________
24. $\left(-\frac{1}{2}\right)(-2) = 1$ __________
25. $1 \cdot x = x$ __________

1.3 Suma, resta, multiplicación y división con números enteros y fraccionarios

a. Si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c} \in$ R, entonces la operación de **suma** o **adición** se define mediante la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{a + b = c}$$

Ejemplo: $5 + 4 = 9$

b. Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b} \in$ R, entonces la operación de **sustracción o resta** se define mediante la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{a - b = a + (-b)}$$

Ejemplo: $6 - 5 = 6 + (-5)$

c. Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b} \in$ R, entonces la operación de **multiplicación** se define mediante la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a = c}$$

Ejemplo: $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4 = 20$

d. Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b} \in$ R, con $\boldsymbol{b} \neq 0$ la operación de **división** se define mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$$

Ejemplo: $\frac{2}{3} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$

e. Si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d} \in$ R, con $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{d} \neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplo: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$

f. Si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c} \in$ R, con $\boldsymbol{c} \neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Ejemplo: $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3$

g. Si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d} \in$ R, con $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{d} \neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Ejemplo: $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1(5) + 2(3)}{15} = \frac{5 + 6}{15} = \frac{11}{5}$

h. Para cualquier $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d} \in$ R, donde $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d} \neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo: $\frac{4}{7} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{1} = \frac{8}{7}$

Observación: Tome en cuenta que al sumar dos números positivos el resultado es otro número positivo. Por otra parte, si se suman dos números con signo diferente, se restan los números, y el resultado tendrá el signo del número mayor. Si se suman dos números negativos su resultado es otro número negativo.

Si se multiplican o se dividen:

– Números con igual signo, el resultado es un número positivo.
– Números con signos diferentes, el resultado es un número negativo.

Esquematizando lo anterior con las leyes de los signos para la **multiplicación y división**, tenemos lo siguiente:

$(\cdot)$	$(\div)$
$+ \cdot + = +$	$+ \div + = +$
$+ \cdot - = -$	$+ \div - = -$
$- \cdot + = -$	$- \div + = -$
$- \cdot - = +$	$- \div - = +$

EJEMPLOS

Multiplicación	**División**
$(4)(2) = 8$	$\frac{4}{2} = 2$
$(5)(-3) = -15$	$\frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$
$(-4)(2) = -8$	$\frac{-6}{3} = -2$
$(-2)(-3) = 6$	$\frac{-15}{-3} = 5$

Ejercicios 1.3

I. Efectúe las siguientes operaciones con números reales.

1. $2 + (-3) + 1 =$
2. $8 + 5 + 10 =$
3. $-3 - 1 - 9 =$
4. $(-5) + (-7) + (-1) =$
5. $15 + (-16) + 4 =$
6. $23 + 25 - 48 =$
7. $(2)(3)(4) =$
8. $(-8)(-7) =$
9. $(-1)\,(2)\,(-4) =$
10. $\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right) =$
11. $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{4}\right) =$
12. $\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) =$
13. $\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{9}{2}\right) =$
14. $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{13}{2}\right)\left(-\frac{9}{13}\right) =$
15. $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} =$
16. $\frac{1}{3} - \frac{8}{3} + \frac{7}{3} =$
17. $\frac{2}{15} - \frac{9}{15} + \frac{4}{15} =$
18. $\frac{7}{8} + \frac{3}{8} + \frac{10}{8} =$
19. $-\frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{14}{5} =$
20. $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{1}{6} =$
21. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$
22. $\frac{4}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{3} =$
23. $\frac{5}{24} + \frac{7}{8} - \frac{7}{2} =$
24. $-\frac{3}{4} - \frac{5}{12} + 1 =$
25. $\frac{5}{6} - 3 + \frac{11}{2} =$
26. $\frac{8}{9} \div \frac{2}{9} =$
27. $\frac{3}{2} \div \frac{4}{7} =$
28. $\left(\frac{7}{5}\right) \div \left(\frac{-14}{15}\right) =$

29. $\left(\frac{5}{27}\right) \div \left(\frac{-10}{27}\right) =$

30. $\frac{11}{33} \div \frac{66}{33} =$

31. $(-4.6) + 5.3 + (-8.7) + (-1.2) =$

32. $2.9 + 1 + (-6.8) + (-3.1) + 7 =$

33. $(-3.75) + (-7.52) + (-11.1) =$

34. $\left(-\frac{1}{4}\right) + 3 + \left(-1\frac{3}{4}\right) + (-1) =$

35. $\frac{9}{8} + \left(-\frac{13}{6}\right) + \left(-\frac{17}{2}\right) + \frac{27}{8} + \left(-\frac{35}{8}\right) =$

36. $-5.3 - 2.8 =$

37. $-(-37.89) - 57 =$

38. $3\frac{5}{6} - 4\frac{2}{3} =$

39. $\left(\frac{25}{6} - \frac{55}{6}\right) - \left(\frac{43}{6} - \frac{85}{6}\right) =$

40. $-\left(4\frac{1}{6} \div 1\frac{1}{2}\right) \div 1\frac{2}{3} =$

41. $\left(-\frac{25}{3}\right) \div \left(\frac{8}{5} \div \frac{2}{3}\right) =$

1.4 Cálculo de promedios

Un promedio se calcula con el objetivo de hallar un número medio entre varios de la misma especie. Debe entenderse que el número medio no es aquel que divide al conjunto de datos en dos partes iguales.

Regla general

Para determinar el promedio de un conjunto de datos hay que sumar cada uno de ellos y dividir el producto de la suma entre el número total de datos.

EJEMPLO 1

Un niño gastó el lunes \$3.95, el martes \$4, el miércoles \$2.85 y el jueves \$7. ¿Cuál es su gasto promedio por día?

Solución: Si se suman las cantidades que ha gastado el niño por día, se obtiene \$17.8. Esta cantidad se divide entre el número de días que el niño ha gastado dinero (4). El resultado es el gasto promedio diario, esto es:

$$\text{Gasto promedio} = \frac{3.95 + 4 + 2.85 + 7}{4} = \frac{\$17.8}{4} = \$4.45$$

EJEMPLO 2

Los siguientes datos representan el aumento de peso (en gramos) de pollos alimentados con una dieta rica en proteínas. Halle el aumento de peso promedio de estos pollos.

12.5, 12.7, 13, 13.1, 13.2, 13.8

Solución: Se suman los aumentos de peso (los datos anteriores) para obtener como resultado 78.3 gramos, cifra que se divide entre el número total de datos para determinar el aumento de peso promedio. Esto es:

$$\begin{array}{c}\text{Aumento}\\\text{promedio}\end{array} = \frac{12.5 + 12.7 + 13.0 + 13.1 + 13.2 + 13.8}{6} = \frac{78.3}{6} = 13.05 \text{ gramos}$$

EJEMPLO 3

Las tres calificaciones parciales obtenidas por un alumno de un curso de matemáticas son: 8, 5 y 7. Determine el promedio de las calificaciones.

Solución: Para obtener el promedio se suman las cantidades y el total se divide entre el número total de calificaciones. Esto es:

$$\text{Promedio de calificaciones} = \frac{8 + 5 + 7}{3} = \frac{20}{3} = 6.6$$

Ejercicios 1.4

I. Resuelva los siguientes ejercicios de promedios.

a. En las últimas seis semanas un vendedor de seguros ha ganado, por comisiones, las siguientes cantidades: \$1 250, \$1 320, \$965, \$1 040, \$896 y \$1 480. ¿Cuál fue su comisión promedio?

b. Una persona camina durante siete días de este modo: el primer día 12 kilómetros; el segundo, 15; el tercero, 13; el cuarto, 12.5; el quinto, 11.5; el sexto, 10 y el séptimo, 11.8 ¿Cuántos kilómetros en promedio caminó por día?

c. Un estudiante gasta en comidas diarias lo siguiente: el lunes, \$75; el martes, \$82; el miércoles, \$74; el jueves, \$65 y el viernes \$97. ¿Cuánto gasta al día, en promedio, en comidas?

d. En Monterrey, una estancia infantil puede ser subsidiada por la oficina de asistencia social del ayuntamiento si el ingreso anual promedio de las familias cuyos hijos asisten a la institución llega, cuando mucho, a \$12 500. El ingreso familiar, en pesos, de los padres de los niños es: 15 500, 12 500, 8 600, 7 800, 6 500, 5 900, 10 200, 8 800, 14 300 y 13 900.

- ¿Cumple la estancia infantil con los requisitos para recibir el apoyo financiero del municipio de Monterrey? Explique por qué.
- Si la respuesta del inciso anterior es negativa, ¿cuánto debe disminuir el ingreso familiar promedio para tener acceso al subsidio?
- Si la respuesta de la primera pregunta es afirmativa, ¿cuánto puede aumentar el ingreso familiar promedio sin que la estancia infantil pierda el subsidio?

1.5 Cálculo de porcentajes

1.5.1 Definición

Se le llama **tanto por ciento** a una o varias de las cien partes iguales en que se puede dividir un número; es decir, una o varias centésimas de dicho número. El símbolo con que se representa el tanto por ciento es %.

EJEMPLO 1

¿Cuál es el 4% de 80?

Solución: El 4% equivale a $\frac{4}{100}$; es decir, el 4% de 80 es cuatro centésimas partes de 80, esto es: $\frac{4}{100} \times 80 = 3.2$.

Otra alternativa para calcular el porcentaje es utilizar una simple **regla de tres.** Si se toma en cuenta que el 100% de un número es el mismo número, entonces podemos encontrar el 4% de 80.

Si el 100% es 80, ¿a qué cantidad corresponderá el 4%? La cifra que se busca se establece como x y después se forma una regla de tres simple con estas cantidades, es decir:

$$\begin{array}{rcl} 100\% & - & 80 \\ 4\% & - & x \end{array}$$

y se despeja x.

Nota: Para despejar x se efectúan, en diagonal, los productos de la ecuación anterior, de modo que se logre la forma $100x = (80)\,(4\%)$. De ello podemos concluir que:

$$x = \frac{80(4\%)}{100\%} = 3.2$$

EJEMPLO 2

Halle el $\frac{1}{8}\%$ de 96.

Solución: Para encontrar el porcentaje que se pide se utilizarán dos métodos, a saber:

Alternativa I

El número se divide entre 100 partes iguales y de ellas se toma $\frac{1}{8}$, esto es: $\frac{96}{100} \times \frac{1}{8} =$ 0.12. Por lo tanto, el $\frac{1}{8}\%$ de 96 es 0.12.

Alternativa II

Utilizando la regla de tres simple se sabe que el 100% de 96 es el mismo número (96). Como nos interesa saber qué cantidad será para $\frac{1}{8}\%$, lo expresamos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} 100\% & - & 96 \\ \frac{1}{8}\% & - & x \end{array}$$

De donde, como en el ejemplo anterior despejando a x, se concluye que:

$$x = \frac{96\left(\frac{1}{8}\%\right)}{100\%} = 0.12$$

Con ambas alternativas es posible concluir que el $\frac{1}{8}\%$ de 96 es 0.12.

1.5.2 Hallar un número cuando se conoce cierto porcentaje de él

Se usará el método de la regla de tres simple para decir:

Si el % dado corresponde a la cantidad dada, ¿el 100% a qué cantidad corresponderá?

EJEMPLO 1

¿Cuál es el número del que 46 es el 23%?

Solución: Para encontrar el número se utiliza una regla de tres simple. Se sabe que 46 es el 23%, entonces, ¿qué cantidad será el 100%? De lo anterior se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} 23\% & - & 46 \\ 100\% & - & x \end{array}$$

Así pues, el número que se busca es: $x = \frac{(100\%)(46)}{23\%} = 200.$

Por lo tanto, el número del cual el 23% es 46 es: **200**.

EJEMPLO 2

¿Cuál es el número del cual su $\frac{3}{4}\%$ es 21?

Solución: Utilizando una regla de tres simple se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{4}\% & - & 21 \\ 100\% & - & x \end{array}$$

Como se puede ver, el número que se busca es: $x = \frac{(21)(100)}{\frac{3}{4}\%} = 2\,800.$

Es decir, el número es **2 800**.

Ejercicios 1.5

I. Hallar…

1. 18% de 72
2. 35% de 180
3. 90% de 1 315
4. $\frac{1}{2}$% de 18
5. $\frac{3}{5}$% de 108
6. 0.2% de 84
7. 10% de $15\frac{2}{5}$
8. 33% de 2 346
9. 10% de 1 327
10. 1% de 915
11. 8.6% de 129
12. 19.5% de 1 560
13. 75% de 1 250
14. 55% de 40 000
15. 86% de 172
16. 95% de 304
17. 18% de 45
18. 5% de 64
19. 1.75% de 3 576
20. 5.6% de 750
21. 4% de 208
22. 20% de 258
23. 35% de 1 215
24. 12.5% de 918
25. 21% de 907.5

II. ¿Cuál es el número del cual su…

1. 5% es 35?
2. 90% es 60?
3. 82% es 115?
4. $\frac{1}{4}$% es 16?
5. 0.4% es 50?
6. $\frac{1}{16}$% es 24?
7. 3.5% es 70?
8. 2.75% es 55?
9. 0.56% es 196?
10. 10% es 130?
11. 12% es 920?
12. 5% es 245?
13. 32% es 18?
14. 3% es 84?
15. 2% es 18?
16. 7% es 84?
17. 35% es 91?
18. 18% es 240?
19. 17% es 133?
20. 43% es 520?
21. 72% es 1 680?
22. 34% es 326?
23. 39% es 25?
24. 12% es 64.5?
25. 92% es 1 500?

1.6 Razonamiento aritmético

En este capítulo se aplicará todo lo visto anteriormente, es decir, las leyes, propiedades, operaciones de los números reales, etcétera.

Enseguida se presentan algunas recomendaciones para resolver problemas de razonamiento aritmético, así como varios ejercicios resueltos.

Recomendaciones

1. Lea cuidadosamente el problema y, de ser necesario, haga un dibujo para representarlo.
2. Identifique los datos que se conocen.
3. Proponga las incógnitas del problema.
4. Presente una o varias ecuaciones que involucren tanto los datos conocidos como los desconocidos.

5. Resuelva la o las ecuaciones hasta despejar la incógnita de interés.
6. Presente la solución del problema.

EJEMPLOS

1. Después de gastar \$215 me quedaron \$475. ¿Cuánto tenía al principio?

Solución: Para resolver este ejercicio lo único que hay que hacer es razonar la pregunta, esto es, si gasté \$215 y me sobraron \$475, ¿cuánto tenía al principio?

Basta con sumar \$215 y \$475; el resultado es la respuesta. Por lo tanto: \$215 + \$475 = \$690, es decir, lo que tenía al principio eran **\$690.**

2. Julia compró una casa en \$750 000 y un automóvil en \$87 000. Con posterioridad, vendió la casa en \$835 000 y el automóvil en \$93 500, ¿Julia ganó o perdió? ¿Cuánto?

Solución: A simple vista se aprecia que si Julia compró la casa en \$750 000 y la vendió en \$835 000 tuvo una ganancia de \$85 000. Esta cantidad se obtiene restando \$750 000 a \$835 000.

Por otra parte, si compró el automóvil en \$87 000 y lo vendió en \$93 500 también hay una ganancia, en este caso de \$6 500.

La respuesta a la primera pregunta es **ganó**. La ganancia total es la suma de las cantidades que obtuvo por la casa y el automóvil, es decir, \$85 000 + \$6 500 = **\$91 500.**

3. Juan el carnicero pide 1 000 kg de carne. Primero le mandan 294 kg; más tarde 100 kg menos que la primera vez y, finalmente, 120 kg más que la primera vez. ¿Cuánto le falta por recibir?

Solución: El total de carne que pide es 1 000 kg. Como lo primero que le mandan es 294 kg y, más tarde, 100 kg menos que esa primera vez, lo que le mandan en esta ocasión es 194 kg. Después le enviaron 120 kg más que la primera vez; esto es, 294 kg más 120 kg igual a 414 kg. En total le enviaron lo siguiente:

294 kg la primera vez

194 kg la segunda vez

414 kg la tercera vez

En total son 902 kg. Si Juan pidió 1 000 kg, lo que le falta es la diferencia entre lo que quiere y lo que le enviaron: 1 000 kg menos 902 kg, igual a 98 kg, que es la cantidad de carne que espera el carnicero.

4. Una mueblería vende cierto estilo de refrigerador en \$3 600. Si por promoción lo ofrece a un precio de \$2 970, ¿cuál es el porcentaje de descuento?

Solución: Dado que el precio de venta del refrigerador era de \$3600 y se ofreció en \$2970, tenemos que el descuento es de:

$$\$3\,600 - \$2\,970 = \mathbf{\$630}$$

El porcentaje de descuento sería:

$$\begin{array}{lcl} 3\,600 & - & 100\% \\ 630 & - & x \qquad x = \dfrac{630}{3\,600}\cdot 100\% = \mathbf{17.5\%} \end{array}$$

El porcentaje de descuento se obtiene dividiendo la cantidad descontada entre el precio de venta y multiplicándola por el 100%.

5. Si una libreta cuesta \$8.50 y se ofrece a la venta con un descuento del 30%, ¿cuánto hay que pagar por ella?

Solución: Por un lado, sabemos que el 30% de \$8.50 es:

$$\begin{array}{lcl} 100\% & - & 8.50 \\ 30\% & - & x \end{array} \qquad x = \frac{30}{100} \cdot \$\,8.50 = \$2.55$$

Por otro lado, sabemos que el costo de un artículo ya con descuento se obtiene con la diferencia del precio original menos la cantidad descontada. De ahí que el costo de la libreta con un 30% de descuento sea:

$$\$8.50 - \$2.55 = \mathbf{\$5.95}$$

Otra alternativa para resolver este problema es tomar en cuenta que, si están haciendo un descuento del 30%, lo que hay que pagar neto por el artículo es el 70%. Por lo tanto, para obtener el resultado basta multiplicar el precio de venta por lo que realmente se debe pagar, esto es:

$$\begin{array}{lcl} 100\% & - & 8.50 \\ 70\% & - & x \end{array} \qquad x = \frac{30}{100} \cdot \$\,8.50 = \mathbf{\$5.95}$$

Como se observa, con ambos procedimientos se llega al mismo resultado.

Ejercicios 1.6

1. Durante cinco días del mes de enero se registraron estas temperaturas: −13 °C, 8 °C, 1 °C, 18 °C y −1 °C. ¿Cuál fue la temperatura promedio de esos cinco días?
2. El Banco de México registró durante una semana las siguientes fluctuaciones: ganó 132 puntos, perdió 53, perdió 68, ganó 45 y perdió 30. ¿Cuál fue el resultado de la semana?
3. Durante el amanecer de un día de verano la temperatura fue de 22 °C. A media mañana subió 8 °C; por la tarde descendió 3 °C, y en la noche bajó 5 °C más. ¿Qué temperatura hubo en la noche?
4. Mara tenía \$307. Tuvo que pagar una cuenta de \$18.65, una de \$52 y otra de \$20.50. Juan le pagó \$91.60 que le debía. ¿Cuánto dinero tiene ahora Mara?
5. Un aeroplano subió una altura de 7 285 m. Debido al mal tiempo tuvo que descender 1 457m. Después se elevó 1 329 m para continuar su viaje. ¿A qué altura volaba?
6. Pablo tiene una tarjeta de crédito con un saldo a favor de \$300 y pagó con ella \$296, \$99 y \$67. Como había gastado mucho depositó \$103. ¿Qué saldo tiene ahora en su tarjeta de crédito?
7. El área de un rectángulo es igual a 48 cm^2. Si se deforma el rectángulo disminuyendo su altura pero manteniendo el área constante, ¿qué le sucede a la base? (Recuerde que el área del rectángulo se calcula multiplicando su base por su altura).
8. Un depósito de agua que tiene una capacidad de 1 600 L se llena en cuatro horas. ¿Cuántos litros por minuto arroja la llave?
9. Escribiendo tres páginas en una hora durante jornadas de ocho horas diarias, ¿cuántos días se requieren para escribir un libro de 912 páginas?
10. Después de gastar \$319, a Lorena le quedaron \$615. ¿Cuánto tenía al principio?
11. Si tuviera 35 caballos más de los que ya poseo, tendría 216. ¿Cuántos caballos tiene mi hermano si el número de los míos excede a los suyos en 89?
12. Si recibiera \$145 podría comprarme un vestido que vale \$560. ¿Cuánto tengo en este momento?
13. ¿En cuánto excede la suma de 756 y 8 134 a la diferencia entre 5 234 y 1 514?
14. Al vender una casa en \$121 380 gané \$18 150. ¿Cuánto me había costado la casa?
15. Tenía \$305 400, compré un automóvil y me quedé con \$196 500. Entonces, recibí \$87 300, compré un terreno y me quedaron \$73 200. ¿Cuánto me costó el auto y cuánto el terreno?
16. El lunes deposité \$500 en el banco, el martes pagué \$256, el miércoles pagué \$96 y el jueves deposité \$84. Además, presté \$45. ¿Cuánto tengo?
17. Un hombre deja \$950 000 para repartir entre sus tres hijos y su esposa. El hijo mayor debe recibir \$230 000; el segundo \$50 000 menos que el mayor; el tercero tanto como los dos primeros, y la esposa lo restante. ¿Cuánto recibió la mujer?
18. Un comerciante pide 3 000 kg de mercancía. Primero le mandan 854 kg, más tarde 123 kg menos que la primera vez, y después 156 kg más que la primera vez. ¿Cuánto le falta por recibir?
19. Ana obtuvo en sus exámenes un total de 240 puntos de 320 posibles. ¿Cuál es su calificación porcentual?
20. Pedro gasta \$750 a la semana en alimentos. ¿Cuánto gastará a la semana si el precio de los alimentos se incrementa en 8%?
21. Un corredor de bienes raíces recibió una comisión de \$31 440 por la venta de una casa en Los Ángeles. ¿En cuánto vendió la casa si cobró un 6% del precio de venta?
22. Catalina compró un abrigo de pieles en \$9 372, con un impuesto del 6.5% incluido. ¿Cuál fue el precio de venta del abrigo sin impuesto?
23. ¿En cuánto se venderá un sofá si su precio normal es de \$840 y la tienda lo ofrece con un 15% de descuento?
24. Un equipo de aire acondicionado fue vendido en \$10 500, luego de aplicarle un 25% de descuento. ¿Cuál era el precio normal del equipo?

2

EXPONENTES

2.1 Exponentes

Definición: Si a es un número real y n es un entero positivo, entonces a^n representa el producto de n factores, cada uno de los cuales es a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

A la cantidad a^n se le llama la e-nésima potencia de a, o bien, a elevada a la n. El número a es la base y n es el exponente de la base.

Leyes de los exponentes

Donde m y n representan números reales se tienen:

1) Productos de potencia de la misma base

Para multiplicar potencias de la misma base **se suman los exponentes.**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

EJEMPLO **Simplificar la expresión $2^3 \cdot 2^2$**

Solución: Como la expresión dada tiene bases iguales, los exponentes se suman, esto es:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$$

EJEMPLO **Simplificar las siguientes expresiones**

Solución:

a. $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2+3}{6}} = 5^{\frac{5}{6}}$

b. $3^{-2} \cdot 3^4 = 3^{-2+4} = 3^2 = 9$

2) Potencia de una potencia

Cuando se tiene potencia de una potencia **los exponentes se multiplican,** esto es:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

EJEMPLO **Simplificar la expresión $(2^3)^2$**

Solución: $(2^3)^2 = 2^{(3)(2)} = 2^6 = 64.$

Hay un número elevado a una potencia y éste, a su vez, está elevado a otra potencia, por lo tanto los exponentes se multiplicaron.

EJEMPLO Simplificar las siguientes expresiones

a. $(7^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 7^{\frac{3}{3}} = 5$

b. $(3^3)^{\frac{1}{2}} = 3^{3 \cdot \frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

c. $(8^{-2})^{-1} = 8^{(-2)(-1)} = 8^2 = 64$

3) Potencia de un producto

Cuando una base está formada por dos o más factores elevados a una misma potencia, **cada uno de los factores se eleva a la potencia dada**, esto es:

$$(abc)^n = a^n b^n c^n$$

EJEMPLO Simplificar la expresión $(3 \cdot 2)^2$

Solución: elevando cada factor a la potencia indicada se tiene: $(3 \cdot 2)^2 = 3^2 \cdot 2^2 = 9 \cdot 4 = 36$.

EJEMPLO Simplificar las siguientes expresiones: a. $(2 \cdot 9)^{\frac{1}{2}}$, b. $(3 \cdot 6)^{-2}$

Solución:

a. $(2 \cdot 9)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3$

b. $(3 \cdot 6)^{-2} = 3^{-2} \cdot 6^{-2} = \dfrac{1}{3^2 \cdot 6^2} = \dfrac{1}{324}$

Nota: En el apartado 6) se explica el cambio de exponentes negativos a positivos.

4) Cocientes de potencias de la misma base

Cuando se dividen potencias que tienen igual base, **los exponentes se restan**. Hay tres casos que se esquematizan de la siguiente manera:

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si} \quad m > n \\ 1 & \text{si} \quad m = n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{si} \quad m < n \end{cases}$$

EJEMPLO Simplificar cada una de las siguientes expresiones

Solución: como las bases son iguales, los exponentes se restan teniendo presente el esquema anterior:

a. $\dfrac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2 = 9$

b. $\dfrac{4^5}{4^5} = 1$

c. $\dfrac{6^3}{6^5} = \dfrac{1}{6^{5-3}} = \dfrac{1}{6^2} = \dfrac{1}{36}$

5) Un número elevado a una potencia nula (cero)

Cualquier número elevado a una potencia nula **da uno**, siempre que $a \neq 0$. Esto es:

$$a^0 = 1$$

EJEMPLO Simplificar la expresión $(-57)^0$

Solución: hay un número negativo elevado a una potencia nula, por lo que la respuesta es 1. Esto es:

$$(-57)^0 = 1$$

EJEMPLO Simplificar las siguientes expresiones

a. $(5^{\frac{1}{2}})^0 = 1$

b. $(125^0)^{-3} = 125^{(0)(-3)} = 125^0 = 1$

c. $45^0 = 1$

d. $(-5\ )^0 = 1$

e. $-(4)^0 = -1$

f. $(5^{100})^0 = 5^{(100)(0)} = 5^0 = 1$

g. $\left(\frac{8}{5}\right)^0 = \frac{(8)^0}{(5)^0} = 1$

6) Un número elevado a una potencia negativa

Cuando existe un número elevado a un exponente negativo, éste da como resultado una fracción con el exponente positivo. En forma general se tiene que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

EJEMPLO Simplificar la expresión 5^{-2}

Solución: se observa un número elevado a un exponente negativo y, de acuerdo con la regla anterior, sabemos que para quitar el signo negativo del exponente hay que escribirlo en forma de fracción, esto es:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

EJEMPLO Simplificar las siguientes expresiones

a. $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{7^{-1}} = 1$

b. $(-3)^2(-3)^{-3} = (-3)^2 \cdot \frac{1}{(-3)^3} = \frac{(-3)^2}{(-3)^3} = \frac{9}{-27} = -\frac{1}{3}$

o bien, utilizando la ley $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, se tiene que:

$(-3)^2\,(-3)^{-3} = (-3)^{2-3} = (-3)^{-1} = \frac{1}{(-3)^1} = -\frac{1}{3}$; que nos da el mismo resultado.

c. $(4^{-2})^{-3} = 4^{(-2)(-3)} = 4^6 = 4\,096$

d. $(2^3 \cdot 3^{-2})^{-1} = 2^{-3} \cdot 3^2 = \frac{1}{2^3} \cdot 3^2 = \frac{9}{8}$

e. $\frac{2^{-3} \cdot 3^{-2}}{2^2 \cdot 3^{-4}} = \frac{3^4}{2^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2} = \frac{3^2}{2^5} = \frac{9}{32}$

Observación: hay otras alternativas para resolver estos ejercicios, pero independientemente de la que se emplee el resultado es el mismo.

7) Un número elevado a una potencia fraccionaria

Si se tiene que $a^{m/n}$ y $\frac{m}{n}$ es un número racional donde m representa el exponente y n representa el índice del radical, entonces $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, donde $a \geq 0$ si n es un número par, esto es:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

EJEMPLO Utilizando las leyes de los exponentes simplifique $8^{2/3}$

Solución: para simplificar $8^{\frac{2}{3}}$ hay dos alternativas:

Alternativa I

Primero se expresa $8^{\frac{2}{3}}$ en forma de radical, $\sqrt[3]{8^2}$, luego se eleva el 8 al cuadrado y el resultado es 64. Después se extrae la raíz cúbica de 64, es decir, se busca un número que multiplicado tres veces por sí mismo dé 64. El número que se obtiene es 4, por lo tanto:

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Alternativa II

Se utilizan las leyes de los exponentes, sin cambiar a radicales, de la siguiente forma:

$$8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

En la solución de este problema se observa que el número 8 se reescribió como 2 elevado al cubo. Asimismo, se pudo comprobar una vez más que al emplear procedimientos diferentes **(pero correctos)** se llega al mismo resultado.

EJEMPLO Simplificar cada una de las siguientes expresiones utilizando las leyes de los exponentes

1. $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = 2$ o $4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2\cdot\frac{1}{2}} = 2$
2. $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ o $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} = 2$
3. $81^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{81} = 9$ o $81^{\frac{1}{2}} = (9^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2\cdot\frac{1}{2}} = 9$
4. $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[2]{4})^3 = 9$ o $4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$
5. $9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9^{-\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt[2]{9}} = \dfrac{1}{3}$ o $9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{(3^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{3^{2\cdot\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{3}$
6. $(5^{\frac{1}{3}})^3 = 5^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5$
7. $(4^{\frac{2}{5}})^{-\frac{5}{2}} = 4^{-\frac{10}{10}} = 4^{-1} = \dfrac{1}{4}$
8. $(32^2)^{\frac{5}{2}} = 32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(32)^2} = (\sqrt[5]{32})^2 = (2)^2 = 5$ o $32^{\frac{2}{5}} = (2^5)^{\frac{2}{5}} = 2^{5\cdot\frac{2}{5}} = 2^2 = 4$

Observación: cuando la raíz es cuadrada no hay necesidad de escribir el índice en el símbolo del radical.

Nota: para simplificar números que comprendan exponentes se utilizan las leyes antes mencionadas. En ocasiones se podrá utilizar más de una ley, dependiendo de lo que se quiera simplificar.

EJEMPLOS

a. $(-3)^2\,(-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5 = -243$

b. $(2^2)^2 = 2^4 = 16$

c. $(3\cdot 2\cdot 1)^2 = 3^2\cdot 2^2\cdot 1^2 = 9\cdot 4\cdot 1 = 36$

d. $\dfrac{8^4}{8^2} = 8^{4-2} = 8^2 = 64$

e. $\dfrac{(5\cdot 3^2)^2}{5^3} = \dfrac{5^2\cdot 3^4}{5^3} = \dfrac{3^4}{5^{3-2}} = \dfrac{3^4}{5} = \dfrac{81}{5}$

2.2 Suma, resta, multiplicación y división de números reales

Suma y resta

EJEMPLOS Efectuar las siguientes operaciones con números reales y simplificar

a. $2^2 + 3^3 = 4 + 9 = 13$

b. $2^{-3} - 1 = \frac{1}{2^3} - 1 = \frac{1}{8} - 1 = \frac{1-8}{8} = \frac{-7}{8}$

c. $(-5)^0 + 5^0 = 1 + 1 = 2$

d. $3^0 - (-3)^0 = 1 - 1 = 0$

e. $4^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}} = 2 - 3 = -1$

f. $27^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} = 3 + 4 = 7$

Observe que para realizar estas operaciones primero se simplifica cada una de las expresiones y, después, se efectúa la operación indicada. Recuerde que dichas operaciones no se pueden realizar directamente si no se tienen términos semejantes.

Multiplicación

EJEMPLOS Resolver las siguientes multiplicaciones con números reales

a. $2^2 \cdot 3^4 = 4 \cdot 81 = 324$

b. $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$

c. $(2^3)^0 \cdot 2^{-2} = 1 \cdot \frac{1}{2^2} = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

d. $4^{-1} \cdot 5^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

e. $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2+3}{6}} = 2^{\frac{5}{6}}$

f. $8^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} =$

Observación: a diferencia del ejemplo **e**, en el **f** existen dos alternativas ya que se tienen bases diferentes con el mismo exponente. A continuación se presentan ambas posibilidades.

Alternativa I

De acuerdo con la teoría antes mencionada (ley 7), tenemos que:

$8^{\frac{1}{3}} = 2$ y $27^{\frac{1}{3}} = 3$, de donde se concluye que: $8^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (3^3)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 = 6$

Alternativa II

La ley 3 indica que si se tienen los mismos exponentes puede escribirse la expresión como el producto de sus bases elevadas al mismo exponente, entonces:

$$8^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} = (8 \cdot 27)^{\frac{1}{3}} = (216)^{\frac{1}{3}} = (6^3)^{\frac{1}{3}} = 6$$

Se concluye que el resultado debe ser el mismo al utilizar cualquiera de los dos métodos propuestos.

2.3 Exponentes y radicales con expresiones algebraicas

Las leyes de los exponentes también son válidas para expresiones algebraicas.

2.3.1 Exponentes positivos

Para simplificar una expresión que contiene exponentes positivos se efectúan todas las operaciones posibles utilizando las leyes de los exponentes (9.1). El resultado también se reduce a su mínima expresión.

EJEMPLO Efectuar las siguientes operaciones y simplificar

$$3x^2 \cdot 3x$$

Solución: si se aplica la ley de los exponentes que indica que cuando se tienen bases iguales se suman los exponentes ($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$), primero el coeficiente numérico y luego la variable, se tiene que:

$$3x^2 \cdot 3x = 3^2 \cdot x^3 = 9x^3$$

EJEMPLO Efectuar las siguientes operaciones y simplificar

$$(2y^3)^2$$

Solución: en este problema se aplica la ley que dice que cuando existen productos a una misma potencia cada uno de los factores se eleva a la potencia dada. El resultado de la expresión es:

$$(2y^3)^2 = (2)^2(y^3)^2 = 4y^6$$

EJEMPLO Efectuar las siguientes operaciones y simplificar

$$3x^2 + 3(x)^2$$

Solución: en este caso se aplica la ley de los exponentes que señala que cuando se tiene potencia de una potencia los exponentes se multiplican. El resultado es:

$$3x^2 + 3(x)^2 = 3x^2 + 3x^2 = 6x^2$$

observamos que $(x)^2 = x^2$. Si comparamos este factor con $3x^2$ veremos que son términos semejantes y, por lo tanto, se puede efectuar la suma indicada.

EJEMPLO Efectuar las siguientes operaciones y simplificar

$$\frac{(2xy^2)^3}{8x^2y^6}$$

Solución: lo primero que tenemos que hacer es aplicar la ley de los exponentes que indica que cuando se tienen productos a una misma potencia cada uno de los números se eleva a la potencia dada. Al emplear en el numerador dicha ley queda que: $(2xy^2)^3 = 2^3x^3y^6 = 8x^3y^6$; después se acomoda la expresión resultante en el numerador y se simplifica con el denominador, aplicando la ley 4 (cuando se dividen potencias de igual base los exponentes se restan), dando así cualquiera de los tres casos ya mencionados. Siguiendo todos los pasos se obtiene:

$$\frac{(2xy^2)^3}{8x^2y^6} = \frac{8x^3y^6}{8x^2y^6} = x$$

EJEMPLO Efectuar las siguientes operaciones y simplificar

$$\left(-\frac{3a^2b^3}{4a^3b^2}\right)^3$$

Solución: a diferencia del ejemplo anterior, en este caso toda la expresión está elevada a la misma potencia, de manera que podemos optar entre dos caminos.

Alternativa I

Se simplifica primero la parte que está dentro del paréntesis (cuando se dividen potencias de igual base **los exponentes se restan**), luego se eleva a la potencia establecida (cuando hay una base formada por dos o más factores que se encuentran elevados a una misma potencia, **cada uno de los factores se eleva a la potencia dada**). El resultado es:

$$\left(-\frac{3a^2b^3}{4a^3b^2}\right)^3 = \left(-\frac{3b}{4a}\right)^3 = -\frac{3^3b^3}{4^3a^3} = -\frac{27b^3}{64a^3}$$

Alternativa II

Aquí se invierte el procedimiento: primero se eleva a la potencia establecida (cuando hay una base formada por dos o más factores que se encuentran elevados a una misma potencia, **cada uno de los factores se eleva a la potencia dada**) y luego se simplifica la expresión resultante (cuando se dividen potencias de igual base **los exponentes se restan**). Como conclusión, el resultado tiene que ser el mismo, esto es:

$$\left(-\frac{3a^2b^3}{4a^3b^2}\right)^3 = -\frac{3^3a^6b^9}{4^3a^9b^6} = -\frac{27a^6b^9}{64a^9b^6} = -\frac{27b^3}{64a^3}$$

Se observa que el resultado es el mismo con cualquiera de las dos alternativas, aunque generalmente es preferible simplificar primero.

EJEMPLO Efectuar las siguientes operaciones y simplificar

$$\frac{(7wy^2z^3)^2}{(3w^2yz^2)^3}$$

Solución: en este caso numerador y denominador están elevados a potencias distintas, por lo que se recomienda aplicar primero la ley de los exponentes donde se tiene $(abc)^n = a^n b^n c^n$. En segundo lugar hay que simplificar utilizando la ley de los exponentes que se refiere a cocientes de potencias de la misma base, de aquí que:

$$\frac{(7wy^2z^3)^2}{(3w^2yz^2)^3} = \frac{7^2w^2y^4z^6}{3^3w^6y^3z^6} = \frac{49y}{27w^4}$$

2.3.2 Exponentes negativos

Para simplificar expresiones con exponentes negativos se puede convertir cualquier expresión de dichos exponentes en otra equivalente en la cual todos los exponentes sean positivos. Luego se simplifica tal como se hace cuando se tienen exponentes positivos.

Regla: cualquier factor del numerador de una fracción se puede pasar al denominador si se cambia el signo del exponente del factor. De igual forma, cualquier factor del denominador se puede pasar al numerador si se cambia el signo del exponente del factor.

Como se recordará, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, según la ley 6 de los exponentes.

EJEMPLOS Simplificar las siguientes expresiones utilizando las leyes de los exponentes, sin dejar exponentes negativos en el resultado

a. $\dfrac{4xy^{-6}}{z^{-2}} = \dfrac{4xz}{y^6}$

b. $\dfrac{2a^{-2}bc^{-3}}{x^{-4}} = \dfrac{2bx^4}{a^2c^3}$

c. $\dfrac{6x^3y^{-2}z^{-1}}{3^{-1}xy^{-1}z} =$

Solución: para simplificar expresiones en las que aparecen números con exponentes negativos tanto en el numerador como en el denominador, algunos de ellos con la misma base, primero se convierten los factores con exponente negativo a factores con exponente positivo, esto es:

$$\frac{6x^3y^{-2}z^{-1}}{3^{-1}xy^{-3}z} = \frac{6\cdot 3x^3y^3}{xy^2zz}$$

Ya que se tiene esta expresión se efectúan las operaciones indicadas, resultando:

$$\frac{6\cdot 3x^3y^3}{xy^2zz} = \frac{18x^2y}{z^2}$$

EJEMPLO Simplificar la siguiente expresión sin dejar exponentes negativos en la respuesta

$$\left(\frac{3a^{-2}b^2}{a^3bc^3}\right)^{-2}$$

Solución: dado que hay una fracción elevada a un exponente negativo se tienen dos alternativas.

Alternativa I

Piense en la ley de los exponentes que se refiere a potencias de producto donde cada uno de los números se eleva a la potencia dada. Recuerde, además, que cuando se multiplican números que tienen signos iguales el signo del número resultante es positivo $(+)$, y cuando se multiplican números con signos diferentes el signo del número resultante es negativo $(-)$. Así se obtiene:

$$\left(\frac{3a^{-2}b^2}{a^3bc^3}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}a^4b^{-4}}{a^{-6}b^{-2}c^{-6}}$$

El siguiente paso es convertir la expresión resultante en otra equivalente pero con los exponentes positivos, esto es:

$$\frac{3^{-2}a^4b^{-4}}{a^{-6}b^{-2}c^{-6}} = \frac{a^4a^6b^2c^6}{3^2b^4}$$

Para finalizar se simplifica la expresión efectuando las operaciones indicadas y utilizando tanto la **ley 4** para cocientes de potencias de igual base como la **ley 1** para productos de potencias de igual base. De todo lo anterior se tiene:

$$\frac{a^4a^6b^2c^6}{3^2b^4} = \frac{a^{10}c^6}{9b^2}$$

Alternativa II

Esta opción nos lleva, primero, a simplificar lo que está dentro del paréntesis, dejando los exponentes positivos. Luego se efectúan las operaciones necesarias:

$$\left(\frac{3a^{-2}b^2}{a^3bc^3}\right) = \left(\frac{3b}{a^2a^3c^3}\right)^{-2} = \left(\frac{3b}{a^5c^3}\right)^{-2}$$

Enseguida se aplica la **ley 3** de los exponentes hasta lograr:

$$\left(\frac{3b}{a^5c^3}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}b^{-2}}{a^{-10}c^{-6}}$$

por último, la expresión resultante se convierte en otra equivalente con exponentes positivos, esto es:

$$\frac{3^{-2}b^{-2}}{a^{-10}c^{-6}} = \frac{a^{10}c^6}{3^2b^2} = \frac{a^{10}c^6}{9b^2}$$

Nótese que la solución es la misma que se obtuvo con la alternativa I.

EJEMPLO **Simplificar la siguiente expresión**

$$\frac{x^{-2}-9y^{-2}}{x^{-1}+3y^{-1}}$$

Solución: en contraste con los ejemplos anteriores, aquí tenemos operaciones de suma y resta de términos. Eso significa que no se puede hacer ninguna cancelación ni es posible cambiar al numerador o denominador, según sea el caso. Se comienza convirtiendo aquellos términos que presenten exponentes negativos a términos con exponentes positivos, es decir, se forma una fracción compleja:

$$\frac{x^{-2}-9y^{-2}}{x^{-1}+3y^{-1}}=\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{9}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}}$$

Ahora se procede a simplificar la fracción compleja:

$$\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{9}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}}=\frac{\frac{y^2-9x^2}{x^2y^2}}{\frac{y+3x}{xy}}=\frac{(y^2-9x^2)(xy)}{(x^2y^2)(y+3x)}=\frac{(y+3y)(y-3x)(xy)}{(x^2y^2)(y+3x)}=\frac{y-3x}{xy}$$

Reglas

1. Si una fracción está formada por términos con varios factores tanto en el numerador como en el denominador, y si algún(os) factor(es) tiene(n) exponentes negativos, para hacerlos positivos hay que pasarlos al numerador o denominador, según convenga, y cambiar el signo del exponente del factor tal como se describe a continuación:

   EJEMPLO

   $$\frac{3x^{-2}y^3}{2x^{-1}y^{-2}}$$

   Solución:

   $$\frac{3x^{-2}y^3}{2x^{-1}y^{-2}}=\frac{3xy^2y^3}{2x^2}=\frac{3y^5}{2x}$$

2. Si una fracción está formada por más de un término con varios factores tanto en el numerador como en el denominador, la manera de hacer positivos los exponentes es generando una fracción compleja como se describe a continuación:

EJEMPLO

$$\frac{x^{-1}+3y^{-1}}{x^{-2}+9y^{-2}}$$

Solución:

$$\frac{x^{-1}+3y^{-1}}{x^{-2}+9y^{-2}}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{9}{y^2}}=\frac{\frac{y+3x}{xy}}{\frac{y^2-9x^2}{x^2y^2}}=\frac{(x^2y^2)(y+3y)}{(xy)(y^2-9x^2)}$$

$$=\frac{(x^2y^2)(y+3x)}{(xy)(y-3x)(y+3x)}=\frac{(xy)}{(y-3x)}$$

Nota: Observe que en este caso es imposible mover al numerador o al denominador porque los términos o factores con exponentes negativos están involucrados en operaciones de suma y resta.

2.4 Simplificación de expresiones que resultan de las derivadas

Estas expresiones son las que se obtienen al derivar una función. A continuación se explicará la forma en que deben ser simplificadas dichas expresiones.

2.4.1 Exponentes positivos

EJEMPLO **Simplificar la expresión $3x(2)(x-2)+(x-2)^2(3)$**

Solución: esta expresión se simplifica a través de factorización (factor común), de la siguiente manera:

$$3x(2)(x-2)+(x-2)^2(3)=3(x-2)[2(x)+(x-2)]$$

Se efectúan las operaciones indicadas y se reducen los términos semejantes, esto es:

$$3(x-2)[2(x)+(x-2)]=3\,(x-2)(2x+x-2)=3(x-2)(3x-2)$$

La expresión simplificada es: $3(x-2)(3x-2)$.

EJEMPLO **Simplificar $(2x-1)^3(4)(3x+2)^3(3)+(3x+2)^4(3)(2x-1)^2(2)$**

Solución: factorizando como en el ejemplo anterior, tenemos que:

$$(2x-1)^3(4)(3x+2)^3(3)+(3x+2)^4(3)(2x-1)^2(2)$$

$$=6(2x-1)^2(3x+2)^3[2(2x-1)+(3x+2)]$$

Se efectúan las operaciones indicadas entre corchetes hasta obtener la expresión:

$$=6\,(2x-1)^2(3x+2)^3(4x-2+3x+2)$$

Se suman los términos semejantes: $=6(2x-1)^2(3x+2)^3\,(7x)$

La expresión simplificada es: $=42x(2x-1)^2(3x+2)^3$

EJEMPLO **Simplificar la expresión**

$$\frac{(a+1)^5(4)(a^2+5)^3(2a)-(a^2+5)^4(5)(a+1)^4(1)}{[(a+1)^5]^2}$$

Solución:

$$\frac{(a+1)^5(4)(a^2+5)^3(2a)-(a^2+5)^4(5)(a+1)^4(1)}{[(a+1)^5]^2}$$

$$=\frac{(a+1)^4(a^2+5)^3[8a(a+1)-5(a^2+5)]}{(a+1)^{10}}$$

$$=\frac{(a+1)^4(a^2+5)^3[8a^2+8a-5a^2-25]}{(a+1)^{10}}$$

$$=\frac{(a+1)^4(a^2+5)^3[3a^2+8a-25]}{(a+1)^{10}}$$

$$=\frac{(a^2+5)^3(3a^2+8a-25)}{(a+1)^6}$$

La expresión simplificada es:

$$\frac{(a+1)^5(4)(a^2+5)^3(2a)-(a^2+5)^4(5)(a+1)^4(1)}{[(a+1)^5]^2}$$

$$=\frac{(a^2+5)^3(3a^2+8a-25)}{(a+1)^6}$$

2.4.2 Exponentes negativos

EJEMPLO Simplificar y obtener el resultado sin exponentes negativos o cero, de la siguiente expresión

$$a^2(-2)(3a-5)^{-3}(3)+(3a-5)^{-2}(2a)$$

Solución: para resolver este tipo de expresiones hay dos alternativas.

Alternativa I

Convertir la expresión en una fracción equivalente en la que los exponentes sean positivos, esto es:

$$a^2(-2)(3a-5)^{-3}(3)+(3a-5)^{-2}(2a)=\frac{-6a^2}{(3a-5)^2}+\frac{2a}{(3a-5)^2}$$

La expresión resultante se resuelve obteniendo el común denominador, que es $(3a-5)^3$, y efectuando las operaciones. De ello queda:

$$\frac{-6a^2}{(3a-5)^3}+\frac{2a}{(3a-5)^2}=\frac{-6a^2+2a(3a-5)}{(3a-5)^3}$$

Se efectúan las operaciones indicadas y se tiene:

$$\frac{-6a^2+6a^2-10a}{(3a-5)^3}=\frac{-10a}{(3a-5)^3}$$

Ésta es la expresión simplificada.

Alternativa II

Primero se obtiene el factor común, que es $2a(3a-5)^{-3}$. La factorización queda:

$$2a(3a-5)^{-3}[-3a+3a-5]$$

Se reducen los términos semejantes y se tiene:

$$2a(3a-5)^{-3}\,(-5)$$

la cual es equivalente a: $\dfrac{-10a}{(3a-5)^3}$.

Concluimos que las respuestas logradas con las dos alternativas son iguales.

EJEMPLO Simplificar la expresión sin dejar en la respuesta exponentes negativos o nulos

$$-2\left(\frac{x-2}{3x-1}\right)^{-3}\left[\frac{(3x-1)(1)-(x-2)(3)}{(3x-1)^2}\right]$$

Solución: para simplificar este tipo de expresiones se realizan las operaciones indicadas dentro de los corchetes, esto es:

$$-2\left(\frac{x-2}{3x-1}\right)^{-3}\left[\frac{(3x-1)(1)-(x-2)(3)}{(3x-1)^2}\right]=-2\left(\frac{x-2}{3x-1}\right)^{-3}\left[\frac{3x-1-3x+6}{(3x-1)^2}\right]$$

En la expresión resultante hay un factor, el cual es una fracción elevada a un exponente, por lo que se separa en dos y cada parte es afectada por el exponente correspondiente; después se reducen los términos semejantes, esto es:

$$-2\left(\frac{x-2}{3x-1}\right)^{-3}\left[\frac{3x-1-3x+6}{(3x-1)^2}\right]=-2\frac{(x-2)^{-3}}{(3x-1)^{-3}}\left[\frac{5}{(3x-1)^2}\right]$$

Luego se simplifican las expresiones, sin olvidar que no deben quedar exponentes negativos, esto es:

$$-2\frac{(x-2)^{-3}}{(3x-1)^{-3}}\left[\frac{5}{(3x-1)^{2}}\right]=\frac{-10}{(x^{2}-2)^{3}(3x-1)^{-1}}=\frac{-10(3x-1)}{(x^{2}-2)^{3}}$$

2.4.3 Exponentes fraccionarios

EJEMPLO **Simplificar la expresión**

$$(2x-3)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)(3x+2)^{-\frac{2}{3}}(3)+(3x+2)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)(2x-3)^{-\frac{1}{2}}(2)$$

Solución: primero se efectúan las operaciones solicitadas:

$$(2x-3)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)(3x+2)^{-\frac{2}{3}}(3)+(3x+2)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)(2x-3)^{\frac{1}{2}}(2)$$

$$=(2x-3)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{3}\right)(3x+2)^{-\frac{2}{3}}+(3x+2)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{2}\right)(2x-3)^{-\frac{1}{2}}$$

Esto es equivalente a:

$$(2x-3)^{\frac{1}{2}}(3x+2)^{-\frac{2}{3}}+(3x+2)^{\frac{1}{3}}(2x-3)^{-\frac{1}{2}}$$

Para simplificar la expresión resultante hay dos alternativas.

Alternativa I

Se reescribe la expresión resultante con exponentes positivos, esto es:

$$\frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{(3x+2)^{\frac{2}{3}}}+\frac{(3x+2)^{\frac{1}{3}}}{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}$$

Simplificamos la expresión obteniendo el mínimo común denominador:

$$\frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}(2x-3)^{\frac{1}{2}}+(3x+2)^{\frac{1}{3}}(3x+2)^{\frac{2}{3}}}{(3x+2)^{\frac{2}{3}}(2x-3)^{\frac{1}{2}}}$$

Efectuamos las operaciones hasta llegar a:

$$\frac{2x-3+3x+2}{(3x+2)^{\frac{2}{3}}(2x-3)^{\frac{1}{2}}}=\frac{5x-1}{(3x+2)^{\frac{2}{3}}(2x-3)^{\frac{1}{2}}}$$

Alternativa II

Se obtiene el factor común:

$$(2x-3)^{\frac{1}{2}}(3x+2)^{-\frac{2}{3}}+(3x+2)^{\frac{1}{3}}(2x-3)^{-\frac{1}{2}}=(3x+2)^{-\frac{2}{3}}(2x-3)^{-\frac{1}{2}}[2x-3+3x+2]$$

Se efectúan las operaciones del corchete sin olvidar que no deben quedar exponentes negativos. Así, se tiene que:

$$(3x+2)^{-\frac{2}{3}}(2x-3)^{-\frac{1}{2}}[2x-3+3x+2]=\frac{5x-1}{(3x+2)^{\frac{2}{3}}(2x-3)^{\frac{1}{2}}}$$

Nótese que la expresión simplificada es la misma con cualquiera de las dos alternativas.

EJEMPLO Simplificar

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^2-3}{3a-5}\right)^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{(3a-5)(2a)-(a^2-3)(3)}{(3a-5)^2}\right]$$

Solución: se efectúan las operaciones indicadas dentro del corchete, quedando:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^2-3}{3a-5}\right)^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{(3a-5)(2a)-(a^2-3)(3)}{(3a-5)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{a^2-3}{3a-5}\right)^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{6a^2-10a-3a^2+9}{(3a-5)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{a^2-3}{3a-5}\right)^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{3a^2-10a+9}{(3a-5)^2}\right]$$

En la expresión resultante hay un factor, el cual es una fracción elevada a un exponente, por lo que se separa en dos y cada parte es afectada por el exponente correspondiente. Después se reducen los términos semejantes, esto es:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^2-3}{3a-5}\right)^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{3a^2-10a+9}{(3a-5)^2}\right]=\frac{1}{3}\frac{(a^2-3)^{-\frac{2}{3}}}{(3a-5)^{-\frac{2}{3}}}\left[\frac{3a^2-10a+9}{(3a-5)^2}\right]$$

Debido a que no se deben dejar exponentes negativos en la respuesta, para simplificar al máximo hay que:

$$\frac{1}{3}\frac{(a^2-3)^{-\frac{2}{3}}}{(3a-5)^{-\frac{2}{3}}}\left[\frac{3a^2-10a+9}{(3a-5)^2}\right]=\frac{3a^2-10a+9}{3(a^2-3)^{\frac{2}{3}}(3a-5)^{\frac{4}{3}}}$$

Ejercicios 2.1

Simplifique cada expresión, realizando las operaciones indicadas y escriba la respuesta sin dejar exponentes negativos o nulos.

1. $2 \cdot 2^3$
2. $-2^3 \cdot 2^2$
3. $3a^3 \cdot a^4$
4. $x^5(-x)^3$
5. $2(x+y)^3(x+y)^4$
6. $(2x^2)(3xy^2)$
7. $-2^3x^2(-3^2xy^3)$
8. $(3^3)^2$
9. $(a^2)^4$
10. $(3x^2)^4$
11. $(2^3x^2)^2$
12. $(3x^2y^3)^3$
13. $3ab^2(2b^2)^3$
14. $\frac{3^8}{3^6}$
15. $\frac{5^4}{5^6}$
16. $\frac{(-2)^3}{2^6}$
17. $\frac{a^9}{a^3}$
18. $\frac{3x^2}{x^3}$
19. $\frac{-x^6y^4}{-x^3y^2}$
20. $\frac{9a^2b^5}{36a^6b^{10}}$
21. $\frac{26a^3b^2}{-39b^5c^6}$
22. $\left(\frac{2b^4}{b^3}\right)^3$
23. $\left(\frac{x^4y^2z^7}{2x^3y^4z^7}\right)^3$
24. $\frac{(a^2b^3)^4}{(a^2b^5)^2}$
25. $\frac{(-5ab^4c^3)^3}{(10a^2bc^2)^4}$
26. $(-4)^0$
27. $\frac{7^0}{9}$

28. 3^0x

29. $(3-5^0)^5$

30. $2x^0(x-2)$

32. 3^{-3}

32. $2^{-2}\cdot 2^{-3}$

33. $\dfrac{3^{-2}}{3^{-1}}$

35. $(2^{-2})^3$

35. $(5^2)^{-2}$

36. $\left(\dfrac{2^{-2}}{3^{-1}}\right)^2$

37. $\left(\dfrac{3^{-1}}{2^{-3}}\right)^{-3}$

38. $(x^2y^{-2})^{-1}(x^3y^0)^2$

39. $\dfrac{a^{-2}b^{-1}}{a^{-2}b^{-2}}$

40. $\dfrac{5^{-2}a^2b^3}{10^{-1}a^0b^{-2}}$

41. $\dfrac{2^{-1}+1^{-1}}{2^{-1}-1^{-1}}$

42. $\dfrac{x^{-2}y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$

43. $\dfrac{x^{-1}y^2+x^2y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$

44. $5(x+3)^4(x-1)^3+(x+3)^5(3)(x-1)^2$

45. $(4x-1)^6(3)(x-3)^2+(6)(4x-1)^5(4)(x-3)^3$

46. $3(4x+1)^2(4)(5x-3)^{-4}+(4x+1)^3(-4)(5x-3)^{-5}(5)$

47. $(-6)(3x+5)^{-7}(3)(2x+7)^4+(3x+5)^{-6}(4)(2x+7)^3(2)$

48. $3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{5}{3}}\cdot 3^0$

49. $2^2\cdot 2^{\frac{1}{3}}$

50. $4\cdot 2^{\frac{1}{2}}$

51. $x^2\cdot x^{\frac{3}{2}}$

52. $x^{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{1}{6}}$

53. $27^{\frac{1}{3}}\cdot 2$

54. $4^{\frac{1}{2}}\cdot 5$

55. $-3x^{\frac{1}{5}}\cdot 3x^{\frac{4}{5}}$

56. $x^{\frac{5}{4}}y^2\cdot x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$

57. $(x^2)^{\frac{3}{2}}$

58. $(x^{\frac{5}{6}})^3$

59. $[(x^3y^9)^{\frac{2}{3}}(x^2y)^4]^{\frac{1}{2}}$

60. $(x^2y^3)^{\frac{3}{2}}(x^4y^5)^{\frac{1}{2}}$

61. $x^2(x^{\frac{1}{2}}-2)$

62. $x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+4)$

63. $(x^{\frac{1}{2}}-3)^2$

64. $(3x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(3x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$

65. $\dfrac{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{11}{2}}+y^{\frac{3}{8}}}$

66. $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^2$

67. $\dfrac{(16x^4y^{12})^{\frac{1}{4}}}{(8x^6y^3)^{\frac{2}{3}}}$

68. $\dfrac{(2x^2y^3)^{\frac{3}{2}}}{(4x^4y^6)^{\frac{1}{4}}}$

69. $(4x+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)(5x+3)^{-\frac{1}{2}}(5)+(5x+3)^{\frac{1}{2}}(4)$

70. $\dfrac{(4x^2+9)^{\frac{1}{2}}(2)-(2x+3)\left(\dfrac{1}{2}\right)(4x^2+9)^{-\frac{1}{2}}(8x)}{\left[(4x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$

3

RADICALES

3.1 Radicales

Definición: La raíz n-ésima de un número real $\boldsymbol{a}$ se denota con el símbolo $\sqrt[n]{a}$, al cual se le llama radical. La raíz n-ésima de $\boldsymbol{a}$ es un número cuya potencia n-ésima es $\boldsymbol{a}$. Esto es:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,$$

bajo las siguientes condiciones:

1. Cuando $\boldsymbol{n}$ es par y $\boldsymbol{a} > 0$, $\sqrt[n]{a} > 0$, llamada raíz principal; cuando $\boldsymbol{n}$ es par y $\boldsymbol{a} < 0$, $\sqrt[n]{a}$, **no es un número real**.
2. Cuando $\boldsymbol{n}$ es impar y $\boldsymbol{a} > 0$, $\sqrt[n]{a} > 0$; cuando $\boldsymbol{n}$ es impar y $\boldsymbol{a} < 0$, $\sqrt[n]{a} < 0$.

El número natural $\boldsymbol{n}$, presente en el radical $\sqrt[n]{a}$, se llama índice u orden del radical, en tanto que $\boldsymbol{a}$ se denomina radicando o subradical. Cuando no se escribe ningún índice, como en $\sqrt{a}$, significa que el índice es 2 y se lee "raíz cuadrada de a".

Leyes de los radicales

Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}, \boldsymbol{a} > \mathbf{0}, \boldsymbol{b} > \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$, entonces:

a. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

b. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

c. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; b \neq 0$

d. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

e. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nc]{a^c}$ si $a \geq 0$ cuando c es par

Operaciones que se pueden efectuar con los radicales

1. Simplificación
2. Suma y resta
3. Multiplicación
4. División
5. Racionalización

3.2 Simplificación de radicales

Simplificar un radical significa expresarlo en su forma más simple. Se dice que una expresión radical está simplificada si los exponentes de los factores del radicando son menores que el índice del radical y no existen fracciones dentro del radical.

EJEMPLO **Simplificar la expresión**

$$\sqrt[3]{-x^7}$$

Solución: observamos que el radicando tiene un número elevado a una potencia mayor (7) que el índice del radical (3), por lo que escribimos la x^7 como $x^6 \cdot x$ y aplicamos la ley de los radicales $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, esto es:

$$\sqrt[3]{-x^7} = \sqrt[3]{-x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{-x^6} \cdot \sqrt[3]{x}$$

En la expresión resultante uno de los factores $\sqrt[3]{-x^6}$ tiene una raíz exacta, que es $-x^2$, no así $\sqrt[3]{x}$, quedando:

$$\sqrt[3]{-x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = -x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$$

El radical simplificado es: $-x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

EJEMPLO **Simplificar la expresión**

$$\sqrt{8x^3y^2z^5}$$

Solución:

$$\sqrt{8x^3y^2z^5} = \sqrt{4 \cdot x^2y^2z^4 \cdot 2xz} = 2xyz^2\sqrt{2xz}$$

Se dejaron primero los factores que tienen raíz exacta y, a un lado, los factores que no la tienen. Después se procedió a sacar del radical los factores que tienen raíz exacta, de esta forma el radical aparece completamente simplificado. La respuesta queda así:

$$\sqrt{8x^3y^2z^5} = 2xyz^2\sqrt{2xz}$$

EJEMPLO **Simplificar**

$$\sqrt[4]{64x^4y^{10}}$$

Solución: en este caso el índice del radical y los exponentes de todos los factores del radicando poseen un factor común, entonces el radical se expresa como radical de radical, esto es:

$$\sqrt[4]{64x^4y^{10}} = \sqrt{\sqrt{2^6x^4y^{10}}}$$

Para simplificar la expresión resultante se inicia con el radical que se encuentra más adentro, dando así:

$$\sqrt{\sqrt{2^6x^4y^{10}}} = \sqrt{2^3x^2y^5}$$

Ahora se simplifica la expresión que se ha obtenido, esto es:

$$\sqrt{2^3x^2y^5} = \sqrt{2^2x^2y^4 \cdot 2y} = 2xy^2\sqrt{2y} \qquad \text{Radical simplificado.}$$

EJEMPLO **Simplificar**

$$\sqrt[3]{\frac{27}{y^{18}}}$$

Solución: según las leyes de los radicales donde $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $\boldsymbol{b} \neq 0$, se tiene que:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{y^{18}}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{y^{18}}}$$

Se simplifica cada uno de los radicales, esto es:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{y^{18}}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{y^{18}}} = \frac{3}{y^6}$$

El radical simplificado es: $\frac{3}{y^6}$

3.3 Suma y resta con radicales

Para efectuar la suma y resta con radicales existe como condición **que se tenga el mismo índice y el mismo subradical**.

$$\text{índice del radical} \rightarrow \sqrt[n]{a} \leftarrow \text{subradical}$$

EJEMPLO **Efectuar las siguientes operaciones con radicales de**

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32}$$

Solución: recuerde que para sumar y restar con radicales debe tener el mismo índice y el mismo subradical. En este caso, ninguno de los tres radicales cumple con esa condición, pero es posible descomponer cada uno de ellos en factores que tengan raíz exacta, esto es:

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32} = \sqrt{2} + \sqrt{4\cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2}$$

Aplicando la ley de los radicales donde $\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, se tiene que:

$$\sqrt{2} + \sqrt{4\cdot 2} - \sqrt{16\cdot 2} = \sqrt{2} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

EJEMPLO **Efectuar las siguientes operaciones con radicales y simplificar a su mínima expresión**

$$x\sqrt{147y^3} + y\sqrt{75x^2y} - \sqrt{48x^2y^3}$$

Solución:

$$x\sqrt{147y^3} + y\sqrt{75x^2y} - \sqrt{48x^2y^3} = x\sqrt{3 \cdot 7^2y^2y} + y\sqrt{3 \cdot 5^2x^2y} - \sqrt{2^4 \cdot 3x^2y^2y}$$
$$= 7xy\sqrt{3y} + 5xy\sqrt{3y} - 4xy\sqrt{3y}$$

por la propiedad distributiva $= (7xy + 5xy - 4xy)\sqrt{3y}$

$$= 8xy\sqrt{3y}$$

El radical simplificado es: $8xy\sqrt{3y}$

EJEMPLO **Efectuar las siguientes operaciones con radicales y simplificar a su mínima expresión**

$$\sqrt{9a^3b^3} + a\sqrt[4]{16a^2b^6} - b\sqrt[6]{a^9b^3}$$

Solución:

$$\sqrt{9a^3b^3} + a\sqrt[4]{16a^2b^6} - b\sqrt[6]{a^9b^3} = \sqrt{3^2a^2b^2 \cdot ab} + a\sqrt{\sqrt{2^4a^2b^6}} - b\sqrt{\sqrt[3]{a^9b^3}}$$
$$= 3ab\sqrt{ab} + a\sqrt{2^2ab^3} - b\sqrt{a^3b}$$
$$= 3ab\sqrt{ab} + a\sqrt{2^2b^2\cdot ab} - b\sqrt{a^2\cdot ab}$$
$$= 3ab\sqrt{ab} + 2ab\sqrt{ab} - ab\sqrt{ab}$$
$$= 4ab\sqrt{ab}$$

3.4 Multiplicación y división con radicales

Para efectuar el producto o división con radicales, la condición es **que se tenga el mismo índice**.

Nota 1: Para multiplicar o dividir con dos radicales de índices diferentes, primero es necesario expresarlos como radicales con el mismo índice. El índice de los nuevos radicales debe ser el mínimo común múltiplo de los índices de los radicales originales. La ley 5 se utiliza en esta operación de la siguiente manera:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{c}{c}} = a^{\frac{c}{cn}} = \sqrt[cn]{a^c}\text{ ; considerando que } \boldsymbol{a} \geq 0 \text{ cuando } \boldsymbol{c} \text{ es par}$$

EJEMPLO **Efectuar el siguiente producto**

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$$

Solución: los radicales tienen el mismo índice, por lo que se efectúa la multiplicación de los subradicales. Esto es:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$$

Nota 2: en algunas ocasiones es conveniente efectuar primero el producto y, en otros casos, es mejor simplificar cada uno de los radicales y posteriormente efectuar el producto.

EJEMPLO **Efectuar el siguiente producto**

$$\sqrt{54}\cdot\sqrt{24}$$

Solución: hay dos alternativas para resolver este producto:

Alternativa I

Efectuamos la multiplicación de los radicales y luego simplificamos el radical:

$$\sqrt{54}\cdot\sqrt{24}=\sqrt{1296}=\sqrt{(36)^2}=36$$

Alternativa II

Simplificamos cada radical y luego efectuamos la multiplicación:

$$\sqrt{54}\cdot\sqrt{24}=\sqrt{9\cdot 6}\cdot\sqrt{4\cdot 6}=3\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}=6\sqrt{36}=(6)(6)=36$$

EJEMPLO **Efectuar el siguiente producto**

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{4}$$

Solución:

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{4}=\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{\sqrt{4}}=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{6}$$

EJEMPLO **Efectuar el siguiente producto**

$$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{3}$$

Solución:

$$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{4^2}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{16}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{48}$$

EJEMPLO **Efectuar el siguiente producto**

$$\left(3\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}\right)$$

Solución: se observa que las expresiones a multiplicar son un binomio y un monomio, por lo que se utiliza la propiedad distributiva, esto es:

$$\left(3\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}\right)=3\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}-2\sqrt{x}=3x-2\sqrt{x}$$

EJEMPLO **Efectuar la siguiente multiplicación**

$$\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)$$

Solución: se obtiene el producto de los dos binomios y, para efectuar las operaciones, se elige entre dos alternativas:

Alternativa I

Se utiliza la propiedad distributiva, esto es:

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)&=2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}+2\sqrt{x}\left(-3\sqrt{y}\right)+3\sqrt{y}\cdot 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}\left(-3\sqrt{y}\right)\\&=4x-6\sqrt{xy}+6\sqrt{xy}-9y=4x-9y\end{aligned}$$

Alternativa II

Si se recuerdan los productos notables se observará que en este caso hay binomios conjugados. Al aplicar la regla de estos productos queda:

$$\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)=\left(2\sqrt{x}\right)^2-\left(3\sqrt{y}\right)^2=4x-9y$$

Las dos alternativas conducen a la misma respuesta.

Nota: Se recomienda preferir la alternativa II, pues se utilizará más adelante para racionalizar.

EJEMPLO **Efectuar la siguiente división**

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$$

Solución: los radicales tienen el mismo índice por lo que se efectúa la división de los subradicales, esto es:

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$$

EJEMPLO **Efectuar la siguiente división y simplificar**

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}$$

Solución:

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}=\frac{\sqrt{9\cdot 3}}{\sqrt{16\cdot 3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{3}{4}$$

O bien, se puede resolver así: $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{9\cdot 3}{16\cdot 3}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$

EJEMPLO **Efectuar**

$$\left(\sqrt[3]{3x^5}\right)\div\left(\sqrt[3]{81x^2}\right)$$

Solución:

$$\frac{\sqrt[3]{3x^5}}{\sqrt[3]{81x^2}}=\sqrt[3]{\frac{3x^5}{81x^2}}=\sqrt[3]{\frac{x^3}{27}}=\frac{x}{3}$$

3.5 Racionalización de radicales

Hay expresiones racionales con radicales que, en ciertos casos, son más fáciles de trabajar si se elimina el radical del numerador o del denominador. Este procedimiento recibe el nombre de racionalización del numerador o del denominador, respectivamente. El proceso puede llevarse a cabo utilizando el principio de que cualquier número multiplicado por 1 no se altera, este 1 puede estar representado por todas aquellas fracciones en que resulte el 1.

EJEMPLO **Racionalizar el denominador de la expresión**

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Solución: lo que se pretende es eliminar el radical del denominador, por lo que se va a multiplicar tanto el denominador como el numerador por $\sqrt{5}$ (se eligió $\sqrt{5}$ porque al multiplicarlo por el denominador obtenemos la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto). Esto es:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

La expresión racionalizada queda como: $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

EJEMPLO **Racionalizar el denominador de la expresión**

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2x^2}}$$

Solución: para eliminar el radical del denominador y obtener un cubo perfecto, la expresión se debe multiplicar tanto en el numerador como en el denominador por $\sqrt[3]{4x}$, esto es:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2x^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{4x}}{\sqrt[3]{4x}}=\frac{\sqrt[3]{4x}}{\sqrt[3]{8x^3}}=\frac{\sqrt[3]{4x}}{2x}$$

Observación: para racionalizar el denominador (numerador) de una fracción con más de un término en el denominador (numerador), se multiplica tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador (numerador).

EJEMPLO **Racionalizar**

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}}$$

Solución: multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado de $3+\sqrt{5}$ que es $3-\sqrt{5}$, dando:

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{9-\sqrt{25}}$$

Simplificando se tiene:

$$\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{9-\sqrt{25}}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{9-5}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}$$

EJEMPLO **Racionalizar el numerador de**

$$\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$$

Solución: se puede resolver este problema de dos maneras.

Alternativa I

Se racionaliza la expresión multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado de $\sqrt{x}+2$, que es $\sqrt{x}-2$, dando:

$$\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-(2)^2}{(x-4)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

Efectuando las operaciones y simplificando queda:

$$\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-(2)^2}{(x-4)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

Alternativa II

Otra manera de resolver este problema es reescribir el denominador como una diferencia de cuadrados. Observamos que x y 4 son el cuadrado de $\sqrt{x}$ y 2, respectivamente, y que al factorizar el denominador se tiene:

$$\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}=\frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\frac{1}{(\sqrt{x}-2)}$$

Se comprueba así que la respuesta es la misma desarrollando cualquiera de las dos alternativas.

Ejercicios 3.1

I. Simplificar los siguientes radicales utilizando las leyes que convengan.

1. $\sqrt{8}$
2. $\sqrt{12}$
3. $\sqrt{20}$
4. $-\sqrt{27}$
5. $2\sqrt{54}$
6. $\sqrt{9-5}$
7. $\sqrt{16-4}$
8. $\sqrt{x^3}$
9. $\sqrt{x^2y}$
10. $\sqrt{x^5y}$
11. $\sqrt{50x^2y^5}$
12. $\sqrt{48x^3y^2z^2}$
13. $\sqrt{x^4y^5(x+y)^2}$
14. $\sqrt[3]{81}$
15. $\sqrt[3]{-40}$
16. $\sqrt[5]{-64}$
17. $\sqrt[3]{-x^3y}$
18. $\sqrt[3]{-x^4}$
19. $\sqrt[3]{16x^6y^4}$
20. $\sqrt[4]{8x^5y^4}$
21. $\sqrt[6]{8x^3y^6}$
22. $\sqrt[6]{64x^2y^6}$
23. $\sqrt[6]{9x^6y^8}$
24. $\sqrt[3]{-x^4y^5}$
25. $\sqrt{xy^2(x+2)^3}$
26. $\sqrt[4]{64(3x-1)^6}$
27. $\sqrt{x^2y^4(y-2)^3}$
28. $\sqrt[3]{-54x^4y^{-6}z^0}$

II. Efectúe las siguientes operaciones.

1. $6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\sqrt{2}$
2. $8\sqrt[3]{6}-3\sqrt[3]{6}-5\sqrt[3]{6}$
3. $6\sqrt{x}-2\sqrt{x}-4\sqrt{x}$
4. $x\sqrt{2}+2y\sqrt{2}-4x\sqrt{2}$
5. $3x\sqrt[3]{2}-6y\sqrt[3]{2}+4y\sqrt[3]{2}$
6. $4\sqrt{8}+\sqrt{81}-\sqrt{32}$
7. $2\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{36}$
8. $\sqrt{81}-\sqrt{32}-\sqrt{50}$
9. $6x\sqrt{x}-7\sqrt{x^3}+\frac{1}{x}\sqrt{x^5}$
10. $x\sqrt[3]{8xy^3}-\frac{1}{x}\sqrt[3]{x^7y^3}-\frac{1}{y}\sqrt[3]{64x^4y^6}$
11. $\sqrt[4]{64}+\sqrt{18}+\sqrt{50}$
12. $\sqrt{4a^2b}-\sqrt{25ab^2}+\sqrt{a^2b}+\sqrt{16ab^2}$
13. $\sqrt[3]{8c^5d}+\sqrt[3]{27c^4d^5}+\sqrt[3]{27c^2d^4}-\sqrt[3]{c^7d^5}$
14. $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{4}{x}}-\frac{4}{\sqrt{x}}$
15. $\sqrt{9u^2v}-\sqrt{4uv^2}-\sqrt{u^2v}+\sqrt{25uv^2}$

III. Obtenga los productos.

1. $\sqrt{2}\sqrt{3}$
2. $3\sqrt{6}(-2\sqrt{7})$
3. $2\sqrt{2}(-3\sqrt{2})$
4. $\sqrt{2}\sqrt{14}$
5. $\sqrt{2}\sqrt{10}$
6. $\sqrt{2x}\sqrt{y}$
7. $4\sqrt{x}(3\sqrt{x})$
8. $3\sqrt{xy}\sqrt{y}$
9. $\sqrt{x}\sqrt{x-1}$
10. $\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}$
11. $\sqrt{x}\sqrt{xy-x}$
12. $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$
13. $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{-6}$
14. $\sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{x^2}$
15. $\sqrt[5]{4a^2}\sqrt[5]{8a^4}$
16. $\sqrt{2}\sqrt{8}$
17. $\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
18. $\sqrt{x}(\sqrt{xy}+\sqrt{3x})$
19. $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$
20. $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$
21. $(\sqrt{2}-2\sqrt{3})(\sqrt{2}+2\sqrt{3})$

22. $\left(\sqrt{2}+x\right)^2$

23. $\left(\sqrt{x-1}+2\right)^2$

24. $\sqrt{6x^2y}\,\sqrt{2xy^5}$

25. $\sqrt{14h^3k^2}\,\sqrt{7hk}$

26. $\sqrt{3a^3t^5}\,\sqrt{27at}$

27. $\sqrt[4]{3p^2q}\,\sqrt[4]{12p^0q}$

28. $\sqrt{3xy^2}\,\sqrt{18x^3y}$

29. $\sqrt{3x^2y}\,\sqrt{30xy^3}$

30. $\sqrt[4]{24xy^3}\,\sqrt[4]{18x^2y^2}$

IV. Efectúe las siguientes divisiones de radicales y simplifique.

1. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

2. $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

4. $\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$

5. $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

6. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

7. $\dfrac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$

8. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

9. $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

10. $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{10}}$

11. $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

12. $\dfrac{3}{\sqrt{75x}}$

13. $\dfrac{\sqrt{4a^2b^5}}{\sqrt{3xy^3}}$

14. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}}$

15. $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$

16. $\dfrac{2\sqrt{12}+4\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$

17. $\dfrac{12+\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

18. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$

19. $\dfrac{\sqrt{14x}-\sqrt{3y}}{\sqrt{21xy}}$

20. $\dfrac{4}{1+\sqrt{3}}$

21. $\dfrac{3}{1-\sqrt{2}}$

22. $\dfrac{\sqrt{5}}{3+\sqrt{2}}$

23. $\dfrac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{6}}$

24. $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$

25. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

26. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

27. $\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{10}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

28. $\dfrac{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$

29. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

30. $\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

4

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y SUS OPERACIONES

Empezaremos recordando algunos conceptos que serán de gran utilidad:

4.1 Definición de expresión algebraica

Expresión algebraica es la combinación de números y letras (que representan números), combinadas, a su vez, con una o más de las operaciones fundamentales del álgebra.

EJEMPLOS

$$3x^2 - 2x + 5, \quad \frac{2}{x} - 10, \quad (4x+2) - y, \quad \text{etcétera}$$

Término es un número, una letra o la combinación de ambos, únicamente bajo la operación de producto o división. A menos que se utilice algún símbolo de agrupación, todo lo que está dentro de él se considera término.

EJEMPLOS

$$3x, \quad \frac{2}{x}, \quad 3, \quad (4x+2)$$

Coeficiente numérico es el número que acompaña a una literal incluyendo el signo. Considérese que si no está escrito ningún número ni signo se da por hecho que el número es 1 y el signo es positivo.

EJEMPLOS

$3x \rightarrow$ el **coeficiente numérico** es 3

$\frac{-5}{2}x \rightarrow$ el **coeficiente numérico** es $\frac{-5}{2}$

$-x \rightarrow$ el **coeficiente numérico** es -1

Potencia es el número de veces que la base será multiplicada por sí misma.

EJEMPLOS

x^5 la base es x, **la potencia es 5**

$-4x^3$ la base es x, **la potencia es 3**

$(-2x)^2$ la base es $-2x$, **la potencia es 2**

x la base es x, **la potencia es 1**

Términos semejantes: son aquellos que tienen la misma base y potencia, sin importar el valor de su coeficiente numérico.

EJEMPLOS

$$5x \text{ es } \textbf{semejante} \text{ a } -3x$$

$$-5x^2 \text{ es } \textbf{semejante} \text{ a } \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{2}{x} \text{ es } \textbf{semejante} \text{ a } \frac{-5}{x}$$

$$3x^3 \text{ es } \textbf{semejante} \text{ a } -\frac{1}{5}x^3$$

Las expresiones algebraicas se pueden clasificar, según la cantidad de términos que las componen, en **monomios**, **binomios** y **polinomios**.

- Si la expresión contiene sólo un término se llama **monomio**.

EJEMPLOS

$$3x, -2y, \frac{1}{2}x, \frac{2x^2y}{3x}$$

- Si la expresión contiene dos términos se llama **binomio**.

EJEMPLOS

$$3x + 2y, 5x - 1, \frac{2}{x} + 3, (2x + 3y) - 4$$

- Si la expresión contiene tres o más términos se llama **polinomio**.

EJEMPLOS

$$3x + 2y - 5, x^4 - 3x^3 + x^2 - 5$$

4.2 Operaciones con expresiones algebraicas

En esta sección se explicarán las operaciones con expresiones algebraicas de **suma, resta, multiplicación y división**.

4.2.1 Suma y resta

Para efectuar sumas y restas con expresiones algebraicas es necesario saber:

a. Qué es un término semejante.

b. Aplicar correctamente las leyes de los signos para la suma.

c. Efectuar sin errores operaciones aritméticas fundamentales.

A continuación se exponen algunos ejemplos así como las diferentes formas en que se pueden resolver.

EJEMPLO Efectuar las operaciones indicadas en la siguiente expresión algebraica

$$3x - 2y + 6x - 3y =$$

Solución: aplicando conceptos anteriores, como el manejo de signos y el de términos semejantes, tenemos que $3x$ y $6x$ son semejantes y de signos iguales; combinándolos, el resultado es $9x$. Por otra parte, $-2y$ y $-3y$ también son semejantes y de signos iguales, pero ambos negativos; el resultado es $-5y$. Así, la solución es:

$$3x - 2y + 6x - 3y = 9x - 5y$$

EJEMPLO Efectuar las operaciones en la siguiente expresión algebraica

$$2 - 3x - 2 + 5x + 6 =$$

Solución: este problema se puede resolver recurriendo a los símbolos de agrupación, es decir, agrupando términos semejantes de la siguiente manera:

$$(2 - 2 + 6) + (5x - 3x) = 6 + 2x$$

o bien, el resultado se puede obtener combinando mentalmente los términos que sean semejantes.

EJEMPLO Efectuar las operaciones en las siguientes expresiones algebraicas

$$(3x - 2y + z) + (8x - 2y - z) + (-5x + 4y - 2z)$$

Solución: existen varias alternativas para resolver este problema, aquí se presentará la que tiene menos riesgo de error pero se deja en libertad al alumno para que compruebe de otro modo el resultado.

Primero se escriben todas las expresiones algebraicas hacia abajo, se acomodan los términos debajo de sus semejantes y se efectúa la suma como si se tratara de una suma aritmética.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & + & z \\ 8x & - & 2y & - & z \\ -5x & + & 4y & - & 2z \\ \hline 6x & & & - & 2z \end{array}$$

Podemos concluir que el resultado final es:

$$6x - 2z$$

Otra forma de presentar una suma o resta de expresiones algebraicas es a través de símbolos de agrupación.

Los **símbolos de agrupación** sirven para agrupar uno o más términos de una expresión algebraica, así como más de una operación fundamental; los símbolos de agrupación más usados son:

$$\{\ \},\ (\ ),\ [\ ]$$

Cuando tenemos más de un símbolo de agrupación en una expresión algebraica, se eliminan de adentro hacia fuera. Hay que recordar el manejo de signos y considerar que:

> Si a un símbolo de agrupación le antecede un signo **positivo** los términos que agrupa no cambian de signo; si a un símbolo de agrupación le antecede un signo **negativo** los términos que agrupa sí cambian de signo.

EJEMPLO Eliminar los símbolos de agrupación y combinar términos semejantes

$$2 - \{(3x + 2) - [5x + 6]\}$$

Solución: se eliminan los símbolos de agrupación de acuerdo con la regla antes mencionada y se combinan los términos semejantes dentro del símbolo con el fin de reducir la expresión algebraica.

$$2 - \{(3x + 2) - [5x + 6]\} = 2 - \{3x + 2 - 5x - 6\} = 2 - \{-2x - 4\}$$

$$= 2 + 2x + 4 = \mathbf{2x + 6}$$

EJEMPLO Eliminar los símbolos de agrupación y combinar términos semejantes

$$3 + 2\{b - 4[a + 2(2a - b) + b] - a\} + 2b$$

Solución

$$
\begin{aligned}
3 + 2\{b - 4[a + 2(2a - b) + b] - a\} + 2b &= 3 + 2\{b - 4[a + 4a - 2b + b] - a\} + 2b \\
&= 3 + 2\{b - 4a - 16a + 8b - 4b - a\} + 2b \\
&= 3 + 2\{5b - 21a\} + 2b \\
&= 3 - 42a + 12b
\end{aligned}
$$

Observación: hay distintas maneras de resolver estos ejercicios. Una alternativa es la que se presentó en ambos ejemplos, es decir, se eliminaron los símbolos de agrupación y se efectuaron las operaciones individuales por cada símbolo de agrupación eliminado. Otra alternativa es desechar los símbolos de agrupación, sin reducir los términos semejantes, manejar correctamente los signos durante el procedimiento y, al final, efectuar las sumas y restas indicadas. El resultado debe ser el mismo.

4.2.2 Multiplicación y división de expresiones algebraicas

Lo primero que se hará en esta sección es recordar algunas leyes y propiedades que se requieren para efectuar el producto y división de expresiones algebraicas.

a. Leyes de los signos para el producto y la división.

b. Las leyes conmutativa y distributiva para el producto.

c. La ley distributiva para la división.

d. Leyes de los exponentes para el producto y la división.

e. Procedimiento para dividir polinomio entre polinomio.

A continuación se explican los conceptos relacionados con el producto:

a. Leyes de los signos para el producto

$+ \cdot + = +$ **Ejemplo:** $(3)(2) = 6$

$+ \cdot - = -$ **Ejemplo:** $(5)(-3) = -15$

$- \cdot + = -$ **Ejemplo:** $(-10)(5) = -50$

$- \cdot - = +$ **Ejemplo:** $(-20)(-2) = 40$

b. Ley conmutativa para el producto

Para cualquier $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathrm{R}$ tenemos que:

$$\boldsymbol{ab = ba}$$

EJEMPLO

$$(4)(8) = (8)(4)$$

EJEMPLO

$$(x)(-5) = (-5)(x)$$

c. Ley distributiva por izquierda y derecha, respectivamente, para el producto

Para cualquier $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c} \in \mathrm{R}$ tenemos que:

$$\boldsymbol{a(b + c) = ab + ac}$$

EJEMPLO

$$2\,(3 + 4) = 2(3) + 2(4)$$

$$\boldsymbol{(b + c)a = ba + ca = ab + ac}$$

EJEMPLO

$$(3 + 4)(2) = (3)(2) + (4)(2) = (2)(3) + (2)(4)$$

d. Leyes de los exponentes para el producto

Para cualquier m y $n \in$ R tenemos que: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ y $(a^m)^n = a^{mn}$

EJEMPLOS

1. $x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$
2. $(x^3)^4 = x^{(3)(4)} = x^{12}$

Aplicando los conceptos anteriores se pueden efectuar productos de dos o más expresiones algebraicas.

EJEMPLOS

Efectuar las siguientes operaciones y simplificar.

a. $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$

b. $(-3x^4)(2x^2) = -6x^{4+2} = -6x^6$

c. $(3x)^2(x^3)^2 = (9x^2)(x^6) = 9x^{6+2} = 9x^8$

d. $3x(2x + y) = 3x(2x) + 3x(y) = 6x^2 + 3xy$

e. $(3x + 2y)(3x + y) =$

El último ejercicio puede resolverse de dos maneras: aplicando la ley distributiva o como una multiplicación aritmética común (colocando una expresión debajo de la otra).

Aplicando la ley distributiva

$$\begin{aligned}(3x + 2y)(3x + y) &= 3x(3x + y) + 2y(3x + y)\\ &= 9x^2 + 3xy + 6xy + 2y^2\\ &= 9x^2 + 9xy + 2y^2\end{aligned}$$

El otro procedimiento es:

$$\begin{array}{rrrrr} & 3x & + & 2y \\ & 3x & + & y \\ \hline & 9x^2 & + & 6xy \\ & +\,3xy & + & 2y^2 \\ \hline 9x^2 & + & 9xy & + & 2y^2 \end{array}$$

Los resultados son iguales, es decir, las dos formas de resolver el problema son correctas. Ahora se enuncian las leyes y propiedades para la división.

a. Leyes de los signos para la división

$+ \div + = +$ **Ejemplo:** $4 \div 2 = 2$

$+ \div - = -$ **Ejemplo:** $6 \div (-2) = -3$

$- \div + = -$ **Ejemplo:** $(-8) \div 4 = -2$

$- \div - = +$ **Ejemplo:** $(-10) \div (-2) = 5$

b. Leyes de los exponentes para la división

Para cualesquier $m, n, a \in$ R y $a \neq 0$, tenemos que:

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}\ ; \text{si } m \text{ es mayor que } n;\ (m>n) \\ 1\ ; \text{si } m \text{ es igual a } n;\ (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}\ ; \text{si } n \text{ es mayor que } m;\ (n>m) \end{cases}$$

c. Ley distributiva para la división

- Polinomio entre monomio

$$\frac{a+b+c+\dots}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}+\dots \qquad \text{con } d \neq 0$$

EJEMPLO

$$\frac{6x^8-9x^6+3x^2}{3x^2}=\frac{6x^8}{3x^2}-\frac{9x^6}{3x^2}+\frac{3x^2}{3x^2}=2x^6-3x^4+1$$

d. Procedimiento para dividir polinomio entre polinomio

- Ordenar el numerador y denominador con letras iguales, en forma descendente en función del exponente. Dejar espacio para cualquier potencia faltante del numerador, que presente una letra distinta.
- Dividir el primer término del numerador entre el primero del denominador. El resultado es el primer término del cociente.
- Multiplicar cada uno de los términos del denominador por el primer término del cociente. Colocar los resultados debajo de cada uno de los términos semejantes del numerador, con signo contrario.
- Considerar el residuo así obtenido como un nuevo numerador. Repetir los pasos segundo y tercero para encontrar el segundo término del cociente y el siguiente residuo.
- Continuar este proceso hasta que el residuo sea igual a cero o hasta que el exponente de la letra común sea menor que el exponente de la letra común del denominador.

Si el residuo es cero se dice que la división es exacta. El resultado que se obtiene es el siguiente:

$$\frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}=\text{Cociente}$$

Por el contrario, **si el residuo no es cero**, el resultado es:

$$\frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}=\text{Cociente}+\frac{\text{Residuo}}{\text{Denominador}}$$

Nota: la división es llamada también "división de casita". Sus partes se organizan de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l} & \text{Cociente} \\ \cline{2-2} \text{Denominador} & \text{Numerador} \\ & \text{Residuo} \end{array}$$

EJEMPLOS

Efectuar las operaciones indicadas.

1. $\dfrac{8x^4}{4x^3}=2x$

2. $\dfrac{-6a^3b^2c^2}{-2abc}=3a^2bc$

3. $\dfrac{4x^3}{8x^4}=\dfrac{1}{2x}$

4. $\dfrac{14x^3-28x^2}{7x^2}=\dfrac{14x^3}{7x^2}-\dfrac{28x^2}{7x^2}=2x-4$

5. $\dfrac{3x^2+x-24}{3x-8}=$

En los ejercicios 1 a 4 se aplicaron sólo algunas leyes y propiedades de la división, mientras que el ejercicio 5 requiere la división polinomio entre polinomio. La solución es:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+3 \\
\hline
3x-8 & 3x^2+x-24 \\
 & \underline{-3x^2+8x} \\
 & 9x-24 \\
 & \underline{-9x+24} \\
 & 0
\end{array}
$$

Por lo tanto: $\dfrac{3x^2+x-24}{3x-8}=x+3$

EJEMPLO **Dividir** $(8x^4-24+15x)$ **entre** $(4-x+2x^2)$

Solución: la manera de resolver este ejercicio es emplear el procedimiento antes mencionado (dividir polinomio entre polinomio). Al seguir los pasos se tiene que:

- **a.** Ordenar numerador y denominador (de mayor a menor con respecto a la potencia).
- **b.** Si falta alguna potencia, dejar un espacio en blanco o colocar un cero para representarla.
- **c.** Dividir el primer término del numerador entre el primero del denominador, obteniendo así el primer término del cociente.
- **d.** Multiplicar el primer término del cociente por cada uno de los términos del denominador. Los productos se colocan con signo contrario debajo de cada uno de sus términos semejantes, con respecto al numerador.
- **e.** Efectuar las sumas o restas indicadas en el numerador. Repetir los pasos **c** y **d** hasta que el primer término del numerador sea menor al primero del denominador, o bien, cuando el residuo sea igual a cero.

Con todo lo anterior tenemos que:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2+2x-7 \\
\hline
2x^2-x+4 & 8x^4+0x^3+0x^2+15x-24 \\
 & \underline{-8x^4+4x^3-16x^2} \\
 & 4x^3-16x^2+15x-24 \\
 & \underline{-4x^3+2x^2-8x} \\
 & -14x^2+7x-24 \\
 & \underline{+14x^2-7x+28} \\
 & 4
\end{array}
$$

El resultado de la división es: $4x^2+2x-7+\dfrac{4}{2x^2-x+4}$

EJEMPLO **Dividir** $(6x^4-5x^2y^2-5xy^3-y^4)$ **entre** $(2x^2+2xy+y^2)$.

Solución: obsérvese que este ejercicio, comparado con los anteriores, es una división con dos variables. El procedimiento es exactamente el mismo, aunque ahora hay que ordenar tanto el numerador como el denominador con respecto a una de las variables. Se ordenará con respecto a x, sin importar el orden de y, tomando en cuenta que falta la potencia cúbica de x y, por lo tanto, hay que dejar un espacio para representar la potencia cúbica.

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{} & \quad 3x^2 - 3xy - y^2 \\
\cline{2-2}
2x^2 + 2xy + y^2 & 6x^4 \qquad\qquad - 5x^2y^2 - 5xy^3 - y^4 \\
 & \underline{-6x^4 - 6x^3y - 3x^2y^2} \\
 & \quad - 6x^3y - 8x^2y^2 - 5xy^3 - y^4 \\
 & \quad \underline{+ 6x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3} \\
 & \qquad\qquad - 2x^2y^2 - 2xy^3 - y^4 \\
 & \qquad\qquad \underline{+2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Por lo tanto: $\dfrac{6x^4 - 5x^2y^2 - 5xy^3 - y^4}{2x^2 + 2xy + y^2} = 3x^2 - 3xy - y^2$

Observación: como el residuo es cero, el resultado final de la división no se escribe como en el ejemplo anterior.

En resumen, dependiendo del tipo de **división** se puede:

a. $\dfrac{\text{Monomio}}{\text{Monomio}}$, simplificar numerador y denominador al mismo tiempo.

b. $\dfrac{\text{Polinomio}}{\text{Monomio}}$, aplicar la ley distributiva y simplificar cada una de las fracciones resultantes, como en el caso de monomio entre monomio.

c. $\dfrac{\text{Polinomio}}{\text{Polinomio}}$, resolver igual que la división aritmética ("de casita").

Ejercicios 4.1

I. Efectuar las operaciones indicadas.

1. $mn + (-mn) + 6mn$

2. $-x + (-7x)$

3. $(-8a) - (-3a) - (-2a)$

4. $5a - 6a - 7a$

5. $10b - 3b - 4b$

6. $12y + 3a - 5y - a$

7. $10xy + y - 7xy - 8y$

8. $4ax - 10bx - 9bx - 4ax$

9. $7x + 3x - 2y - 8y$

10. $12x + 2x - 7x$

II. Eliminar los símbolos de agrupación y reducir a términos semejantes.

1. $3a + (2 + 5a)$

2. $2a + (8 - a)$

3. $x - (2x - 4)$

4. $4 + 6(x - 1)$

5. $7 - 2(3x - 8)$

6. $(2x - 3y) - 4(x - 5y)$

7. $4x - [9 - 4(3 - x)]$

8. $1 - [a - 2b - (3 - a) + 3]$

9. $x - [3x + (4 - x)] - [8 - 3(x - 2)]$

10. $2x + 2\{y - [4x - (z + 2y)] + z\} - 2y$

11. $8 - 3\{a - 2[a - (b - 2) + 3(b - 3)] - 6\}$

12. $3x - \{2x + [3x - 2y - (5x - 4y) - 2x] - 5y\}$

III. Obtener la suma de las siguientes expresiones.

1. $2a + 6b, 7a - 2b$

2. $x - 3y, 2y - 5x$

3. $3x - 8, 7x - 4, 2x - 1$

4. $7a - 3b + 11c, -14a + 10b + 10c, 8a + 8b + 13c$

5. $a + 10b - 9, 3a - 5b + 4c, 2c + b - 6$

6. $3x + 6xy + 3yz + 4, 3x - 7xy - 6yz - 13, 9 - 2xy + 3yz$

IV. En cada uno de los siguientes ejercicios restar la segunda expresión de la primera.

1. $5a + 9b - 10c, \quad -6a + 7c$

2. $2a - t, \quad a + t$

3. $2x + 3a + 5y, \quad x + 3a - 2y$

4. $6a - 10b + 8c, \quad 5a + 7b - c$

5. $3x + 6xy + 3yz + 4, \quad 3x - 7xy - 6yz - 13$

V. Efectuar la multiplicación que se indica y simplificar.

1. $(3y^3)(2y^2)$

2. $(2a^3b^2)(-3a^4b^3)$

3. $(2a^2b^3)(-3a^2c)(b^2c^3)$

4. $xy(x^3 - y^3)$

5. $(x + 2y)(x - 2y)$
6. $(x + 3)(x - 2)$
7. $(2x - 3)(2x + 4)$
8. $(w - 6)(w - 5)$
9. $(1 - 2x)(4 + 3x)$
10. $(c - 4a)(2c^2 + 5ac - a^2)$
11. $3 + x[-6 + x(4 + x)]$
12. $[2^2ab^4]^3[3a^2b]^4$
13. $(-2ax)^2 - (-a^2)(x^2)$
14. $a(2a - b) - 2b(a - b) + ab(a + 3)$
15. $xy(x - 3y) - x(y^2 - 3x) - y(x^2 - y)$
16. $4\left[\dfrac{x+4}{2} + \dfrac{x+1}{4}\right]$
17. $30\left[\dfrac{2x-1}{5} - \dfrac{x-8}{6}\right]$
18. $(2x + 3y - 2)(x + 2y + 4)$

VI. Realizar las siguientes divisiones.

1. $\dfrac{4 - 8x}{4}$
2. $\dfrac{6x^2 - 3x}{3x}$
3. $\dfrac{x^4 - 5x^3 + 6x^2}{x^2}$
4. $\dfrac{12x^5 + 18x^4 - 6x^3}{-6x^3}$
5. $\dfrac{5x^2y^3 - 10x^4y^4}{5x^2y^3}$
6. $\dfrac{2x^3y^2 + 4x^2y^3 + xy^4}{-2x^2y^2}$
7. $\dfrac{(2x - a)^3 - (2x - a)^2}{(2x - a)}$
8. $\dfrac{a^5 - a^4 + 2a^3}{a^3} - (a - 1)(a + 2)$
9. $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$
10. $\dfrac{3x^2 + x - 24}{x + 3}$
11. $\dfrac{8 - 6x + x^3}{x + 2}$
12. $\dfrac{a^3 + b^3}{a + b}$
13. $\dfrac{8x^4 + 15x - 24}{2x^2 - x + 4}$
14. $\dfrac{3x^3 - 16x^2 + 15x + 5}{x^2 - 2x + 1}$
15. $\dfrac{10x^4 + 11x^3 - 26x^2 + 23x - 6}{5x - 2}$

5

PRODUCTOS NOTABLES O ESPECIALES

Hay ciertos productos de polinomios que aparecen con mucha frecuencia y conviene recordarlos para hacer más rápida y segura la manipulación algebraica. Estos productos se llaman productos notables.
Los productos notables son aquellos que se resuelven a través de fórmulas específicas que deben ser memorizadas y aplicadas hasta dominar el proceso de obtención de los productos notables.

5.1 Binomio elevado al cuadrado o cuadrado de un binomio da como resultado un trinomio cuadrado perfecto

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \tag{1}$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \tag{2}$$

EJEMPLO **Resolver** $(2a + 3b)^2$

Solución: al aplicar paso a paso la ecuación (1), se tiene que:

$$\begin{aligned}(2a+3b)^2 &= (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2\\ &= 4a^2 + 12ab + 9b^2\end{aligned}$$

EJEMPLO **Resolver** $(5x - 2)^2$

Solución: al aplicar paso a paso la ecuación (2), se tiene que:

$$\begin{aligned}(5x-2)^2 &= (5x)^2 - 2(5x)(2) + (2)^2\\ &= 25x^2 - 20x + 4\end{aligned}$$

5.2 Binomios conjugados dan como resultado una diferencia de cuadrados

$$(x+y)\,(x-y) = x^2 - y^2$$
$$(x-y)\,(x+y) = x^2 - y^2$$

EJEMPLO **Resolver** $(5a + 2b)\,(5a - 2b)$.

Solución: aplicando la fórmula anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}(5a+2b)\,(5a-2b) &= (5a)^2 - (2b)^2\\ &= 25a^2 - 4b^2\end{aligned}$$

EJEMPLO **Resolver** $\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{y}\right)$

Solución: aplicando la fórmula anterior se tiene que:

$$\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{y}\right)=\left(\frac{2}{x}\right)^2-\left(\frac{3}{y}\right)^2=\frac{4}{x^2}-\frac{9}{y^2}$$

5.3 Binomios con término común dan como resultado un trinomio general de segundo grado

$$(x+a)\,(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

EJEMPLO **Resolver**

$$(x+2)\,(x+3)$$

Solución: aplicando la fórmula anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}(x+2)\,(x+3)&=x^2+(2+3)x+(2)\,(3)\\&=x^2+5x+6\end{aligned}$$

EJEMPLO **Resolver**

$$(x-4)\,(x-1)$$

Solución: aplicando la fórmula anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}(x-4)\,(x-1)&=x^2+(-4-1)x+(-4)\,(-1)\\&=x^2-5x+4\end{aligned}$$

5.4 Binomios con términos semejantes dan como resultado un trinomio general de segundo grado

$$(ax+by)\,(cx+dy)=acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2$$

EJEMPLO **Resolver**

$$(3x+2y)\,(2x+y)$$

Solución: aplicando la fórmula anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}(3x+2y)\,(2x+y)&=(3)(2)\,x^2+[(3)(1)+(2)(2)]xy+(2)(1)y^2\\&=6x^2+7xy+2y^2\end{aligned}$$

EJEMPLO **Resolver**

$$(2x-3y)\,(5x+4y)$$

Solución: aplicando la fórmula anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}(2x-3y)\,(5x+4y)&=(2)(5)x^2+[(2)(4)+(-3)(5)]xy+(-3)(4)y^2\\&=10x^2-7xy-12y^2\end{aligned}$$

5.5 Binomio elevado al cubo o cubo de un binomio da como resultado un cubo perfecto

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \tag{3}$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \tag{4}$$

EJEMPLO Resolver

$$(2x + 3y)^3$$

Solución: aplicando la ecuación (3) se tiene que:

$$\begin{aligned}(2x + 3y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3 \\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3\end{aligned}$$

EJEMPLO Resolver

$$(x - 2y)^3$$

Solución: aplicando la ecuación (4) se tiene que:

$$\begin{aligned}(x - 2y)^3 &= (x)^3 - 3(x)^2(2y) + 3(x)(2y)^2 - (2y)^3 \\ &= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3\end{aligned}$$

5.6 Productos de un binomio por un trinomio dan como resultado una suma o diferencia de cubos

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3 \tag{5}$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3 \tag{6}$$

EJEMPLO Resolver

$$(5x + 2)(25x^2 - 10x + 4)$$

Solución: aplicando la ecuación (5) se tiene que:

$$\begin{aligned}(5x + 2)(25x^2 - 10x + 4) &= (5x)^3 + (2)^3 \\ &= 125x^3 + 8\end{aligned}$$

EJEMPLO Resolver

$$(6x - 5z)(36x^2 + 30xz + 25z^2)$$

Solución: aplicando la ecuación (6) se tiene que:

$$\begin{aligned}(6x - 5z)(36x^2 + 30xz + 25z^2) &= (6x)^3 - (5z)^3 \\ &= 216x^3 - 125z^3\end{aligned}$$

5.7 Cuadrado de un polinomio

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \tag{7}$$

EJEMPLO Resolver

$$(x + 2y + 3z)^2$$

Solución: aplicando la ecuación (7) se tiene que:

$$\begin{aligned}(x + 2y + 3z)^2 &= (x)^2 + (2y)^2 + (3z)^2 + 2(x)(2y) + 2(x)(3z) + 2(2y)(3z) \\ &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz\end{aligned}$$

Resumen de fórmulas de productos notables o especiales

Binomios conjugados $(x + y)(x - y)$	$=$	Diferencia de cuadrados $x^2 - y^2$
Binomio al cuadrado $(x + y)^2$ $(x - y)^2$	 $=$ $=$	Trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 2xy + y^2$ $x^2 - 2xy + y^2$
Binomios con término común $(x + a)(x + b)$	$=$	Trinomio general $x^2 + (a + b)x + ab$
Binomios con términos semejantes $(ax + by)(cx + dy)$	$=$	Trinomio general $acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$
Polinomio al cuadrado $(x + y + z)^2$	$=$	$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
Binomio al cubo $(x + y)^3$ $(x - y)^3$	 $=$ $=$	Cubo perfecto $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
Binomio por trinomio $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$	 $=$ $=$	Suma o diferencia de cubos $x^3 + y^3$ $x^3 - y^3$

Ejercicios 5.1

I. Efectuar los siguientes productos notables.

1. $(2r + 10s)^2$
2. $(4x^3 - 5y^2)^2$
3. $(2x - 1)^2$
4. $(x - 2y)^3$
5. $(2a + 3b)^3$
6. $(x^2 + y^2)^3$
7. $(3b^2 + 6c^3)(3b^2 - 6c^3)$
8. $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)$
9. $[(3b^2 + c^2) - 3bc][(3b^2 + c^2) + 3bc]$
10. $(4x - 1)(x + 7)$
11. $(2 + x)(3 - x)$
12. $(3 - 2x)(3 + 4x)$
13. $(5x^2 + 2y)(3x^2 - 7y)$
14. $(x + y + z)^2$
15. $(2m^3 - 2m + m^2 + 1)^2$
16. $(a - 3b + 2)^2$
17. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
18. $(x + 1)(x^2 - x + 1)$
19. $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
20. $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$
21. $[(3b^4 - b) + (b^3 - 2b^2)][(3b^4 - b) - (b^3 - 2b^2)]$
22. $(3r + 10s)^2$
23. $(x^2 + y^2)^3$
24. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
25. $(x - 3)(2x + 1)$
26. $(3x + 2y + z)^2$
27. $(7y + 4c)(7y - 4c)$
28. $(4x - 1)(x + 7)$
29. $(xy - 5)^3$
30. $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
31. $\left(\frac{m^2}{3} + \frac{2n^3}{5}\right)\left(\frac{m^2}{3} - \frac{2n^3}{5}\right)$
32. $[(2x - y) + 3][(2x - y) - 5]$
33. $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^3$
34. $(4x^2y - xy^2)(4x^2y - xy^2)$
35. $(a - 2b + 3c)^2$
36. $(m^3 + m^2 - 2m + 1)^2$
37. $(2x + 5)(3x - 2)$
38. $(3x - 4)^2$
39. $(7x - 5y)(7x + 5y)$
40. $(4a - 3)(16a^2 + 12a + 9)$

6

FACTORIZACIÓN

En el capítulo anterior se revisó el tema de productos especiales o notables, en particular cómo obtener los productos a partir de determinados factores. En este apartado se determinarán los factores de los productos, es decir, el proceso contrario.

Definición: la **factorización** es el proceso de descomponer una expresión algebraica en sus factores, o bien, el procedimiento para escribir un polinomio como el producto de dos o más factores.

Al descomponer diversas expresiones algebraicas en factores, los resultados son expresiones factorizadas identificadas como:

a. Expresión algebraica con factor común

b. Diferencia de cuadrados

c. Trinomio cuadrado perfecto

d. Trinomio general o de segundo grado

e Suma y diferencia de cubos

6.1 Expresión algebraica con factor común

Cuando cada uno de los términos de un polinomio tiene como factor el mismo término, éste se denomina factor común.

Observación: si hay un factor que se repite en toda la expresión, pero con diferente potencia, el factor común es el que presenta la mínima. En otras palabras, el factor común es la máxima expresión entre la cual pueden ser divididos cada uno de los términos de la expresión dada.

EJEMPLO **Factorizar completamente la siguiente expresión**

$$Ax + Ay + Az$$

Solución: en la expresión dada hay una letra que se repite, la cual sería el factor común. Para obtener el factor que multiplica al común, debe dividirse cada uno de los términos de la expresión original entre el factor común. De esta forma la expresión queda completamente factorizada:

$$Ax + Ay + Az = \mathbf{A}\,(x + y + z)$$

$\downarrow$

Factor común

EJEMPLO **Factorizar completamente la siguiente expresión**

$$4x^3y^2 + 6\,x^2y^2 - 10xy$$

Solución: en este ejemplo se observa claramente la teoría antes mencionada, según la cual aquel factor que se repite en todos los términos de la expresión es el común. Entonces, el factor común es $\mathbf{2xy}$ y el resultado queda:

$$4x^3y^2 + 6x^2y^2 - 10xy = 2xy(2x^2y + 3xy - 5)$$

EJEMPLO Factorizar completamente la siguiente expresión

$$3(x - 2) - a(2 - x)$$

Solución: en este ejemplo no hay, aparentemente, un factor común. Si se observa con atención es claro que los términos $(x - 2)$ y $(2 - x)$ difieren entre sí por los signos. Entonces, primero se saca el signo de factor común de los términos del paréntesis de la derecha, y después el factor común $\mathbf{(x - 2)}$. Luego se termina de factorizar la expresión.

$$3(x - 2) - a(2 - x) = 3(x - 2) + a(x - 2) = (x - 2)(3 + a)$$

6.2 Diferencia de cuadrados

En el tema de productos especiales se analizó cómo el producto de dos factores (binomios conjugados) da como resultado una diferencia de cuadrados. Si ahora se tiene una diferencia de cuadrados, ésta se descompone en factores y el resultado es el producto de dos **binomios conjugados**.

$$\underbrace{\mathbf{a^2 - b^2}}_{\text{Diferencia de cuadrados}} = \underbrace{\mathbf{(a + b)(a - b)}}_{\text{Binomios conjugados}}$$

Dicho de otro modo, al ser factorizada, la diferencia de cuadrados da como resultado el producto de dos binomios conjugados.

Regla general para factorizar una diferencia de cuadrados

Se extrae la raíz cuadrada de cada uno de los términos de la diferencia dada. Luego se combinan estas dos raíces en la suma y diferencia de las raíces cuadradas, de tal manera que su resultado sea el producto de dos binomios conjugados.

Nota: antes de verificar si el binomio es una diferencia de cuadrados, se debe analizar si la expresión tiene factor común. En caso afirmativo debe **siempre** obtenerse el factor común para poder continuar la factorización.

EJEMPLO Factorizar completamente la siguiente expresión

$$4x^2 - 9y^2$$

Solución: de acuerdo con lo anterior, hay que extraer las raíces de cada uno de los términos y acomodarlas en una suma y diferencia de factores para formar los binomios conjugados. El resultado es:

$$\begin{array}{ccccl} 4x^2 & - & 9y^2 & = & (2x - 3y)(2x + 3y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \sqrt{4x^2} & & \sqrt{9y^2} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 2x & & 3y & & \end{array}$$

EJEMPLO Factorizar completamente la siguiente expresión

$$x^2 - 4(y - 3)^2$$

Solución: se sigue el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, así que el resultado es:

$$x^2 - 4(y-3)^2 = [x + 2(y-3)]\,[x - 2(y-3)]$$
$$= (x + 2y - 6)(x - 2y + 6)$$
$$\sqrt{x^2} = x \; y\sqrt{4(y-3)^2} = 2(y-3)$$

EJEMPLO **Factorizar completamente la siguiente expresión**

$$a^2(x - 4y) + b^2\,(4y - x)$$

Solución: esta expresión puede transformarse en otra equivalente para sacar el signo negativo de factor común del término $b^2\,(4y - x)$. Esto es:

$$a^2(x-4y) + b^2\,(4y-x) = a^2(x-4y) \quad b^2\,(-4y+x) = a^2(x-4y) - b^2\,(x-4y)$$

recuerde que si se saca un signo negativo de factor común, los términos que están dentro del símbolo de agrupación cambian de signo. Ahora se ve que la expresión tiene un factor común: $\boldsymbol{(x - 4y)}$**, y *ya*** factorizada queda de la siguiente manera:

$$a^2(x-4y) + b^2\,(4y-x) = a^2\,(x-4y) - b^2\,(x-4y) = (x-4y)(a^2-b^2)$$

Hay que seguir factorizando esta expresión porque el factor $(a^2 - b^2)$ es también una diferencia de cuadrados. La expresión completamente factorizada queda:

$$a^2(x-4y) + b^2\,(4y-x) = a^2\,(x-4y) - b^2\,(x-4y) = (x-4y)(a^2-b^2)$$
$$= (x-4y)\,(a+b)\,(a-b)$$

6.3 Trinomio cuadrado perfecto

Es una expresión algebraica que contiene exactamente tres términos. Su representación general está dada por $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$. Su factorización, recordando los productos notables o especiales, es un binomio al cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} a^2 \pm 2ab + b^2 & = & (a \pm b)^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Trinomio} & & \text{Binomio} \\ \text{cuadrado} & & \text{al} \\ \text{perfecto} & & \text{cuadrado} \end{array}$$

Regla para reconocer un trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio ordenado con relación a una letra es cuadrado perfecto cuando su primer y tercer términos tienen raíz cuadrada positiva, en tanto que el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Regla general para factorizar un trinomio cuadrado perfecto

Se extrae la raíz cuadrada al primer y tercer términos del trinomio y se separan por el signo del segundo término. El binomio así formado se eleva al cuadrado y la expresión resultante es la factorización del trinomio cuadrado perfecto.

EJEMPLO **Factorizar completamente la siguiente expresión**

$$4x^2 + 12xy + 9y^2$$

Solución: con base en la teoría anterior, el **primer** paso es ordenar el trinomio con respecto a una letra, en este caso con respecto a x. El **segundo** paso es verificar si el primer y tercer términos tienen raíces positivas, lo cual en este ejemplo así es y son: $\boldsymbol{2x}$ y $\boldsymbol{3y}$. El **tercer** paso es verificar si el doble producto de estas dos raíces corresponde al segundo término, es decir, que $2(2x)(3y)$ debe dar como resultado $\boldsymbol{12xy}$ para afirmar que se trata de un trinomio cuadrado perfecto.

Dado que todas las condiciones se cumplieron a lo largo del proceso, la factorización queda de la siguiente manera:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$$

Nótese que la expresión del lado derecho se construye con las dos raíces y el signo del segundo término.

6.4 Trinomio general o de segundo grado

Es una expresión algebraica que contiene tres términos y su representación general está dada por $x^2 + (a + b)x + ab$. Se sabe, recordando los productos notables, que la **factorización que resulta es el producto de dos binomios con término común**, es decir:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Trinomio} \\ \text{general}}}{\boldsymbol{x^2 + (a + b)x + ab}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Binomios con} \\ \text{término común}}}{(x + a)(x + b)}$$

Regla general para factorizar un trinomio general
(El que resulta de multiplicar dos binomios con término común).

Ordenar el trinomio con respecto a una letra, extraer la raíz cuadrada del primer término y colocarla, a su vez, como primer término en cada uno de los binomios. Luego, descomponer el tercer término en parejas de manera que las cantidades multiplicadas den como resultado dicho término; además, considerar también que la combinación de esas parejas sumadas o restadas con sus signos respectivos deben dar como resultado el segundo término.

EJEMPLO **Factorizar completamente la siguiente expresión**

$$x^2 + 5x + 6$$

Solución: de acuerdo con la regla establecida se tiene que la raíz cuadrada del primer término es $\boldsymbol{x}$, por lo tanto el primer término de los binomios es $\boldsymbol{x}$. Ahora se procede a encontrar las parejas que, multiplicadas, den como resultado el tercer término, y que sumadas o restadas den como resultado el segundo término. Tentativamente, las parejas pueden ser:

$$6, 1 \qquad 3, 2 \qquad -3, -2 \qquad -6, -1$$

Se comprueba que cada par de parejas cumple el requisito, pues multiplicadas dan como resultado 6 (el **tercer término**), **pero no todas** dan 5 (**segundo término**) al ser sumadas o restadas. Por lo tanto, la única pareja que cumple con todos los requisitos es 3, 2 y la factorización de la expresión queda:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

Otra expresión considerada trinomio general es aquella que tiene la forma:

$$acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$$

la cual, si se recuerdan los productos notables, *es la que resulta de multiplicar dos binomios con términos semejantes.* Su factorización se representa de la siguiente forma:

$$acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 = (ax + by)(cx + dy)$$

Regla para factorizar este tipo de trinomios

Lo primero que se hace es buscar las parejas cuyo resultado, una vez multiplicadas, sea el primer término; luego se hace lo mismo con el tercer término. Por último hay que comprobar que el producto de sus diagonales sumadas o restadas sea el segundo término. Si se cumple lo anterior se concluye que la factorización de la expresión dada se forma con los factores en línea recta.

El siguiente esquema nos muestra más claramente esta regla.

$$\begin{array}{ccc} acx^2 + (ad+bc)xy + bdy^2 \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ ax \qquad\qquad\qquad\qquad by \\ cx \qquad\qquad\qquad\qquad dy \end{array}$$

Observación: hay otras alternativas para llegar al resultado, es decir, diferentes métodos para factorizar los trinomios generales, uno de ellos es por visualización. Lo importante es que cualquier procedimiento conduce siempre al mismo resultado.

EJEMPLO **Factorizar completamente la siguiente expresión**

$$\mathbf{3x^2 + 10x - 8}$$

Solución: se inicia buscando las parejas que, multiplicadas, den el primer número **($3x^2$)**. Al mismo tiempo se identifica a las parejas que, también multiplicadas, den **(-8)** y, después, sumadas o restadas en diagonal arrojen el segundo término **($10x$)**. Así se determinan los binomios cuyo resultado, al ser multiplicados, es la expresión dada.

A continuación se listan las posibles parejas ordenadas para verificar cuál de ellas cumple con todas las condiciones.

$$\begin{array}{cc} 3x & 4 \\ x & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 3x & -2 \\ x & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 3x & -8 \\ x & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 3x & 1 \\ x & -8 \end{array}$$

Obsérvese que todas las parejas ordenadas cumplen con el requisito del **primer** y **tercer términos, pero no todas cumplen** con la condición de que el producto de sus diagonales, sumadas o restadas, sea el **segundo término.** Así, las únicas parejas válidas son:

$$\begin{array}{cc} 3x & -2 \\ x & 4 \end{array}$$

Para formar los binomios se colocan las parejas en línea recta, por lo que la expresión dada queda totalmente factorizada de la siguiente manera:

$$\mathbf{3x^2 + 10x - 8 = (3x - 2)\,(x + 4)}$$

o

$$\mathbf{3x^2 + 10x - 8 = (x + 4)\,(3x - 2)}$$

Para verificar que la factorización es correcta se multiplican los dos binomios semejantes. El resultado debe ser igual a la expresión del lado derecho de la igualdad.

6.5 Suma y diferencia de cubos

Si se divide $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}$ y $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}$ los resultados, respectivamente, son:

$$\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$$

Debido a que en toda división exacta el numerador es igual al producto del cociente por el denominador, obtenemos:

$$1)\ a^3 + b^3 = \underbrace{(a + b)}_{\substack{\text{Suma} \\ \text{de cubos}}} (a^2 - ab + b^2) \qquad \text{y} \qquad 2)\ a^3 - b^3 = \underbrace{(a - b)}_{\substack{\text{Diferencia} \\ \text{de cubos}}} (a^2 + ab + b^2)$$

De este proceso se deducen las siguientes fórmulas:

Fórmula 1 La **suma de dos cubos perfectos** se descompone en dos factores:

1er factor: la suma de sus dos raíces cúbicas.
2º factor: el cuadrado de la primera raíz, **menos** el producto de las dos raíces, **más** el cuadrado de la segunda raíz.

Fórmula 2 La **diferencia de dos cubos perfectos** se descompone en dos factores:

1er factor: la diferencia de sus raíces cúbicas.
2º factor: el cuadrado de la primera raíz, **más** el producto de las dos raíces, **más** el cuadrado de la segunda raíz.

EJEMPLO **Factorizar completamente la siguiente expresión**

$$x^3 + 125$$

Solución: se aplica la fórmula 1 en virtud de que la expresión dada es una suma de cubos. El **1er factor** de la expresión se forma con las raíces cúbicas de cada uno de los términos y queda el siguiente binomio:

$$(x + 5)$$

Posteriormente se forma el **2º factor** con base en el binomio, justo como indica la fórmula 1. Esto es el cuadrado de la primera raíz $\mathbf{(x)^2}$, menos el producto de ambas raíces $\mathbf{(5)(x)}$, más el cuadrado de la segunda raíz $\mathbf{(5)^2}$. El resultado es el siguiente trinomio que es también el segundo factor:

$$(x^2 - 5x + 25)$$

De donde se concluye que la expresión dada queda totalmente factorizada con el producto de estos dos factores, es decir, con el producto del binomio por el trinomio. Ello se expresa de la siguiente forma:

$$x^3 + 125 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$$

EJEMPLO **Factorizar completamente la siguiente expresión**

$$8x^3 - 64$$

Solución: al observar la expresión se determina que se trata de una diferencia de cubos, aunque **antes debe recordarse que el primer paso a seguir es verificar si se tiene un factor común**. En este caso el factor común de la expresión es 8. El primer paso de la factorización queda de la siguiente manera:

$$8x^3 - 64 = \mathbf{8(x^3 - 8)}$$

En la expresión resultante se aprecia que el factor $\mathbf{(x^3 - 8)}$ es una diferencia de cubos, por lo que debe continuarse la factorización siguiendo la **fórmula 2:**

El **1er factor** se obtiene con las raíces cúbicas de cada uno de los términos y se forma el siguiente binomio:

$$(x - 2)$$

Luego, el **2º factor** se obtiene a través del binomio y siguiendo la **fórmula 2**: el cuadrado de la primera raíz $\mathbf{(x)^2}$, más el producto de las dos raíces $\mathbf{(x)\ (2)}$, más el cuadrado de la segunda raíz $\mathbf{(2)^2}$. Se forma así el trinomio:

$$(x^2 + 2x + 4)$$

De lo anterior se concluye que la expresión dada queda totalmente factorizada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 8x^3 - 64 &= 8(x^3 - 8) \\ &= 8(x-2)(x^2+2x+4) \end{aligned}$$

Resumen de fórmulas de factorización

Expresión	=	Factorización
$Wx + Wy + Wz$	=	Factor común $W(x+y+z)$
Diferencia de cuadrados $x^2 - y^2$	=	Binomios conjugados $(x+y)(x-y)$
Trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 2xy + y^2$ $x^2 - 2xy + y^2$	= =	Binomio al cuadrado $(x+y)^2$ $(x-y)^2$
Trinomio general $x^2 + (a+b)x + ab$	=	Binomios con término común $(x+a)(x+b)$
Trinomio general $acx^2 + (ad+bc)xy + bdy^2$	=	Binomios con términos semejantes $(ax+by)(cx+dy)$
Suma y diferencia de cubos $x^3 + y^3$ $x^3 - y^3$	= =	Binomio por trinomio $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ $(x-y)(x^2+xy+y^2)$
Cubo perfecto $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$	= =	Binomio al cubo $(x+y)^3$ $(x-y)^3$

Ejercicios 6.1

I. Factorizar completamente las siguientes expresiones.

1. $3x^2y + 6x^2y^2$

2. $52x^2y^2 + 16xy^3 + 26z$

3. $x(x+2) + 3(x+2)$

4. $7x(4x-3) - 4(4x-3)$

5. $(2x+1)^3 + 2(2x+1)^2$

6. $3x^2(3x+1) - 6x(3x+1)^2$

7. $(x+3)(x-2) - 2(x+5)(x-2)$

8. $2(x+2)^2 - (x+2)(x-1)$

9. $4x(x-7) - 2y(7-x)$

10. $x^2(2x-1) - x(1-2x)$

11. $3x(x-1) - 6y(1-x)$

12. $6x(3x-1) - 12x^2(1-3x)$

13. $z^2 - 64$

14. $16x^2 - 9y^2$

15. $2x^4 - 50y^2$

16. $y^4 - 4x^2$

17. $49m^4 - 16n^2$

18. $16n^2$

19. $4x^3 - xy^2$

20. $25y^2 - 49$

21. $16b^3 - 4b^5$

22. $y^4 - 16$

23. $x^2 + 7x + 10$

24. $x^2 - 8x + 12$

25. $p^2 - 3p - 10$

26. $y^2 - 16y + 15$

27. $w^2 - 18w + 45$

28. $x^2 + 8xy + 15y^2$

29. $x^2 - 4xy + 4y^2$

30. $2x^2 - 14x + 12$
31. $3y^2 - 33y + 54$
32. $x^3 - 3x^2 - 18x$
33. $2x^3 + 6x^2 - 56x$
34. $3x^2 + 5x + 2$
35. $2x^2 + 11x + 15$
36. $5a^2 - 11a + 6$
37. $4x^2 + 13x + 3$
38. $5m^2 - 16m + 3$
39. $10x^2 - 27x + 5$
40. $12z^2 + 32z + 20$
41. $2x^2 - 7xy + 3y^2$
42. $40x^5 + 5x^2$
43. $3a^3 - 81$
44. $8x^3 + 27$
45. $64x^3 - 27y^3$
46. $x^6 + 1$
47. $27a^3 - 64$
48. $27 - 8y^3$
49. $64 - x^3$
50. $x^4y^2 - xy^5$
51. $x^2 + 7x + 12$
52. $x^2 + 7x + 10$
53. $x^2 + x - 6$
54. $4x^2 - 9$
55. $15x^2 - 38x + 24$
56. $10x^2 - 37xy + 30y^2$
57. $a^2 (\mathrm{a} + 2) + (a + 2)$
58. $x^2 (x + 4) - 3 (x + 4)$
59. $y^2 (y + 2) - 4 (y + 2)$
60. $2x^2 + 5x - 3$
61. $8x^2 - 6x + 1$
62. $18x^3y^2 - 9x^2$
63. $5(x - 4) - 10(x - 4)^2$
64. $x^2 - 16$
65. $3x(2x - 5) - 6(5 - 2x)$
66. $m^2 + 2mn - n^2$
67. $36x^6 + 60x^3y^2 + 25y^4$
68. $x^2 + 7x + 12$
69. $2x^2 - 18x + 16$
70. $3a^3 - 18a^2 + 27^a$
71. $2x^3y + x^2y - 3xy$
72. $(3x + 2)(x - 4) + (1 + 2x)(4 - x)$
73. $4 - 49x^2$
74. $8(2y + 1) - 32(2y + 1)^2$
75. $4k^2 - 4k + 1$
76. $81c^{16} - 126c^8d^6 + 49d^{12}$
77. $x^2 - 9x + 20$
78. $ax^2 + 5ax + 6a$
79. $6w^2 - 25w + 4$
80. $6(2x + 1) + x(2x + 1)$
81. $x^2y - 4y$
82. $x^4 - \frac{16}{81}$
83. $49m^2 - 14m + 1$
84. $x^2 + 60 + 17x$
85. $x^3 - w^3$
86. $64x^3 + 27$
87. $8 - 125z^6$
88. $x^2 (x - 4) + 9 (4 - x)$
89. $18x^3 + 12x^2y + 2xy^2$
90. $4x^3 - 8x^2 + 4x$
91. $16x^4 - y^4$
92. $10x^2 + 11x - 6$
93. $12x^3 - 27x$
94. $6x^2 - x - 1$
95. $a^3 - 8b^3$
96. $64bx^3 - b$
97. $6(3x - 2) - 12y (2 - 3x)$
98. $81a^4 - 25b^2$
99. $2z^2 (x + 3y) - 6xz (x + 3y)$
100. $x^6 - 7x^3 - 8$
101. $2a^2b^2 - abc - 10c^2$
102. $y^2 (y - 2) + 9 (2 - y)$
103. $4y^2 - 16y + 16$
104. $m^2 - 6mn + 9n^2$
105. $27x^3 - 64y^3$
106. $p^{12} + q^6$
107. $12a^2 - 14ab - 10b^2$
108. $16a^4 - 81b^4$

7

FRACCIONES SIMPLES Y COMPLEJAS

7.1 Fracciones simples

Una **fracción algebraica simple** es aquella expresión que contiene números o letras o la combinación de ambos, tanto en el numerador como en el denominador.

Considere que una fracción tiene tres signos asociados con ella: el signo que antecede a la fracción, el del numerador y el del denominador.

Si se tiene que:

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}\,;\text{si } b \neq 0$$

Lo anterior demuestra que el valor de una fracción no se altera si se cambia, al mismo tiempo, el signo del numerador y el del denominador.

De igual forma, el valor de una fracción permanece igual al cambiar simultáneamente el signo de la fracción y el numerador o el signo de la fracción y el denominador. Esto se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}\,;\text{si } \boldsymbol{b} \neq 0$$

Tal como lo muestran las igualdades anteriores, cualesquiera dos de los tres signos asociados con una fracción se pueden cambiar sin alterar el valor de la fracción.

Cambiar el signo del numerador de una fracción con más de un término significa cambiar los signos de todos los términos del numerador, y lo mismo ocurre si se cambia un signo en el denominador. Esto es equivalente a sacar el signo negativo como factor común.

EJEMPLO

$$\frac{-2x^2 + 5x - 6}{3x - 5} = \frac{-(2x^2 - 5x + 6)}{3x - 5} = -\frac{2x^2 - 5x + 6}{3x - 5}$$

o

$$\frac{-2x^2 + 5x - 6}{3x - 5} = \frac{-2x^2 + 5x - 6}{-(-3x + 5)} = -\frac{-2x^2 + 5x + 6}{-3x + 5}$$

Si numerador y denominador están factorizados, los signos de los términos de cualquiera de los dos factores o los signos de los términos de uno de los factores y el signo de la fracción, se pueden cambiar sin alterar el valor de la misma.

EJEMPLO Utilizando los conceptos anteriores escriba una fracción equivalente a:

$$\frac{(6-x)(7x+4)}{(x-6)(3x-7)}=\frac{(-1)(-6+x)(7x+4)}{(x-6)(-1)(-3x+7)}=\frac{-(x-6)(7x+4)}{-(x-6)(7-3x)}=\frac{(x-6)(7x+4)}{(x-6)(7-3x)}$$

EJEMPLO Utilizando los conceptos anteriores escriba una fracción equivalente a:

$$\frac{(3-x)(4x+3)}{(x-3)(3x-7)}$$

Solución: aplicando todos los conceptos antes mencionados el resultado queda representado así:

$$\frac{(3-x)(4x+3)}{(x-3)(3x-7)}=\frac{(-3+x)(4x+3)}{(x-3)(-3x+7)}=\frac{(x-3)(4x+3)}{(x-3)(7-3x)}$$

7.1.1 Simplificación de fracciones simples

Se dice que una fracción simple está totalmente simplificada si el numerador y el denominador no tienen factor común, excepto el 1. Para simplificar una fracción se factorizan el numerador y el denominador, y si aparecen simultáneamente en ambas partes de la fracción uno o más factores comunes, éstos se eliminan con facilidad por medio de la división.

EJEMPLO Expresar en términos mínimos la siguiente expresión

$$\frac{4x^2y^3}{2xy}$$

Solución: hay dos maneras de simplificar esta expresión, una es aplicar las leyes de los exponentes; otra, aplicar la factorización.

Se va a resolver este ejercicio por factorización, procedimiento cuyo resultado puede ser comprobado. Por lo tanto

$$\frac{4x^2y^3}{2xy}=\frac{2xy(2xy^2)}{2xy}=2xy^2; \qquad \text{para } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\neq 0$$

EJEMPLO Simplificar a términos mínimos la siguiente expresión

$$\frac{2xy}{4x^2y^3}$$

Solución: de nuevo se elegirá la factorización para resolver este ejercicio. Así, el resultado queda como sigue:

$$\frac{2xy}{4x^2y^3}=\frac{1(2xy)}{2xy^2(2xy)}=\frac{1}{2xy^2}; \text{para } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\neq 0$$

Observación: en los ejemplos anteriores se canceló el término $2xy$ porque es un factor común; además, el numerador y el denominador están expresados como productos porque es la única forma en que puede ser eliminado un factor.

EJEMPLO Simplificar a términos mínimos la siguiente expresión

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$$

Solución: para simplificar esta fracción es necesario expresar el numerador y el denominador en forma de productos (factores); después se procede a simplificar. Esto es:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x - 2)\,(x - 1)}{(x - 3)\,(x - 2)} = \frac{(x - 1)}{(x - 3)};\ \text{para } x \neq 2$$

El factor que se cancela es $(x - 2)$, así que las expresiones anteriores son iguales cuando $x - 2 \neq 0$, esto es $x \neq 2$.

EJEMPLO **Simplificar a términos mínimos la siguiente expresión**

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{9 - x^2}$$

Solución: el primer paso es factorizar el numerador y el denominador:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{9 - x^2} = \frac{(x - 3)\,(x - 1)}{(3 - x)\,(3 + x)}$$

Obsérvese que la expresión no puede ser simplificada porque no hay un factor común. Sin embargo, de acuerdo con la teoría antes vista, si sacamos el signo $-$ de factor común tenemos un factor igual en numerador y denominador, esto es:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{9 - x^2} = \frac{(x - 3)\,(x - 1)}{(3 - x)\,(3 + x)} = \frac{-(3 - x)\,(x - 1)}{(3 - x)\,(3 + x)} = \frac{-(x - 1)}{(3 + x)} = \frac{-x + 1}{3 + x} = \frac{1 - x}{x + 3};$$

si $x \neq 3$.

Ésta no es la única forma de simplificar una fracción. A continuación se presenta otra alternativa para comprobar su resultado; usted puede elegir cuál emplear para resolver este problema.

Alternativa II

Primero hay que ordenar el numerador y el denominador con respecto a x, tratando de trabajar con la variable cuadrática positiva en ambos para factorizar más fácilmente. A partir de la expresión dada se hace un cambio de signo en el denominador de esta forma:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{9 - x^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{-(x^2 - 9)}$$

El siguiente paso es factorizar la expresión y luego hacer la simplificación, esto es:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{9 - x^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{-(x^2 - 9)} = \frac{(x - 3)\,(x - 1)}{-(x - 3)\,(x + 3)} = \frac{(x - 1)}{-\,(3 + x)} = -\frac{x - 1}{x + 3} = \frac{-x + 1}{x + 3} = \frac{1 - x}{x + 3};$$

si $x \neq 3$.

Como se puede apreciar, ambas alternativas nos llevan al mismo resultado.

EJEMPLO **Simplificar a términos mínimos la siguiente expresión**

$$\frac{x + 1}{(x + 2)\,x + 1}$$

Solución: en los ejercicios anteriores el numerador y el denominador tenían que estar factorizados para poder hacer una cancelación, es decir, sí había un factor común. Aquí en particular hay que ser cuidadosos para no hacer una cancelación errónea, ya que este ejercicio parece tener a $(x + 1)$ como factor común y no es así. Nótese que en el denominador hay una suma y no un producto, por lo tanto, primero se resuelven las operaciones indicadas en el denominador y después se factoriza la expresión resultante. A continuación se describe este procedimiento.

$$\frac{x + 1}{(x + 2)\,x + 1} = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x + 1}{(x + 1)^2} = \frac{1}{x + 1}$$

7.1.2 Multiplicación y división de fracciones simples

Para multiplicar o dividir fracciones simples hay que recordar los siguientes conceptos:

1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; para $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \neq 0$.

2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$; para $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \neq 0$.

Para facilitar el producto y división de fracciones es conveniente simplificar cada una de las fracciones antes de efectuar las operaciones indicadas.

EJEMPLO Efectuar las operaciones y simplificar a su mínima expresión

$$\frac{12a^2b^2}{6b} \cdot \frac{36b}{2a^2}$$

Solución: se puede empezar haciendo la reducción a términos mínimos, de manera que sea posible extraer partes a los coeficientes numéricos (del numerador con los del denominador). Luego se aplican las leyes de los exponentes a las variables hasta que el resultado quede en su mínima expresión. A continuación se muestra la expresión después de este procedimiento:

$$\frac{12a^2b^2}{6b} \cdot \frac{36b}{2a^2} = \frac{(12)(36)\, a^2b^3}{12a^2b} = 36b^2$$

EJEMPLO Efectuar las operaciones indicadas y simplificar a su mínima expresión

$$\frac{x^2 - y^2}{x + 2y} \cdot \frac{2x + 4y}{x + y}$$

Solución: primero se reduce cada una de las fracciones, es decir, se factoriza para verificar si hay factores iguales que puedan cancelarse en numerador y denominador, esto es:

$$\frac{x^2 - y^2}{x + 2y} \cdot \frac{2x + 4y}{x + y} = \frac{(x + y)\,(x - y)}{x + 2y} \cdot \frac{2(x + 2y)}{x + y} = 2(x - y)$$

EJEMPLO Efectuar las operaciones indicadas y simplificar a su mínima expresión

$$\frac{x(x + 2) + 2(2x + 4)}{2x(x + 2) + (x + 3)} \cdot \frac{x^2 - (x + 2)}{x^2 - 4} \cdot \frac{x}{x + 4}$$

Solución: hay que tener cuidado al hacer una cancelación, pues ésta se efectúa sólo hasta que están totalmente factorizados el numerador y denominador. Enseguida se muestra el procedimiento:

$$\frac{x(x + 2) + 2(2x + 4)}{2x(x + 2) + (x + 3)} \cdot \frac{x^2 - (x + 2)}{x^2 - 4} \cdot \frac{x}{x + 4} = \frac{x(x + 2) + 2[2(x + 2)]}{2x^2 + 4x + x + 3} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{(x + 2)\,(x - 2)} \cdot \frac{x}{x + 4}$$

$$= \frac{x(x + 2) + 4(x + 2)}{2x^2 + 4x + x + 3} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{(x + 2)\,(x - 2)} \cdot \frac{x}{x + 4}$$

$$= \frac{(x + 2)\,(x + 4)}{2x^2 + 5x + 3} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{(x + 2)\,(x - 2)} \cdot \frac{x}{x + 4}$$

$$= \frac{(x + 2)\,(x + 4)}{(2x + 3)\,(x + 1)} \cdot \frac{(x - 2)\,(x + 1)}{(x + 2)\,(x - 2)} \cdot \frac{x}{x + 4} = \frac{x}{2x + 3}$$

Como puede observarse es mucho más sencillo hacer primero la simplificación de fracciones y después las operaciones indicadas.

EJEMPLO Efectuar las operaciones indicadas y simplificar a su mínima expresión

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 8x + 7} \div \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2}$$

Solución: una manera fácil de resolver este problema es cambiar la operación de división por multiplicación y aplicar la teoría utilizada en los tres ejemplos anteriores. Para esto hay que recordar la siguiente propiedad.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Por lo tanto, la expresión dada es equivalente a:

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 8x + 7} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6}$$

Ahora se procede a factorizar cada uno de los factores del numerador y del denominador, cancelando aquellos que sean iguales hasta obtener el resultado final como se ve enseguida.

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 8x + 7} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6} = \frac{(x - 3)^2}{(x + 7)(x + 1)} \cdot \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x + 7)(x + 2)}$$

Observación: para concluir este tema hay que enfatizar que la herramienta más útil para realizar operaciones con fracciones es la **factorización**, recurso que también será aplicado en temas posteriores.

7.1.3 Suma y resta de fracciones simples

Para **sumar** o **restar** dos o más fracciones que tienen el mismo denominador, lo único que hay que hacer es sumar o restar todos los términos de los numeradores y después reescribir la fracción como el total de la suma o resta de los numeradores entre el denominador.

EJEMPLO Efectuar las operaciones y simplificar a su mínima expresión

$$\frac{3}{5} + \frac{12}{5} =$$

Solución: las fracciones tienen el mismo denominador, así que basta con sumar los numeradores y reescribir la fracción como la suma de los numeradores entre el mismo denominador. Es decir:

$$\frac{3}{5} + \frac{12}{5} = \frac{3 + 12}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

EJEMPLO Efectuar las operaciones y simplificar a su mínima expresión

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4} =$$

Solución: $\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

EJEMPLO Efectuar las operaciones y simplificar a su mínima expresión

$$\frac{5a}{2xy} + \frac{2b}{2xy} - \frac{4b - 5a}{2xy} =$$

Solución: este ejemplo se resuelve exactamente igual que los anteriores, sólo hay que tomar en cuenta que no se está trabajando con cantidades numéricas sino con expresiones algebraicas. Por lo tanto es necesario corroborar que en todas las fracciones esté el mismo denominador. Observe:

$$\frac{5a}{2xy}+\frac{2b}{2xy}-\frac{4b-5a}{2xy}=\frac{5a+2b-(4b-5a)}{2xy}=\frac{5a+2b-4b+5a}{2xy}$$
$$=\frac{10a-2b}{2xy}=\frac{2(5a-b)}{2xy}=\frac{5a-b}{xy}$$

A continuación se explicará el procedimiento para **sumar y restar fracciones que no tienen el mismo denominador**. El procedimiento es diferente y se compone de los siguientes pasos:

1. Factorizar cada uno de los denominadores para extraer un factor que los divida a todos. Dicho factor es llamado **mínimo común denominador** (MCD).
2. El MCD se forma con el producto de los distintos factores de los denominadores. Si hay un factor que se repite con diferentes exponentes, debe elegirse el que contenga el exponente más grande.
3. Una vez que se ha obtenido en MCD se le divide entre cada uno de los denominadores. El resultado de la división se multiplica por cada uno de los términos del numerador y se obtiene una nueva fracción. Efectuando las operaciones indicadas y simplificando se obtiene el resultado de la expresión dada.

A continuación se aplica este procedimiento en varios ejercicios.

EJEMPLO **Efectuar las operaciones y simplificar a su mínima expresión**

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{10}=$$

Solución: al factorizar el 10 como (2)(5), encontramos que el MCD entre 5 y 10 es, justamente, 10, ya que el mínimo común denominador es un número formado con el producto de los factores repetidos (5), por los factores no repetidos (2), y es capaz de dividir a todos los denominadores. Por tanto, el resultado de la expresión dada es:

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{10}=\frac{(2)(3)+(1)(7)}{10}=\frac{6+7}{10}=\frac{13}{10}$$

EJEMPLO **Efectuar las operaciones y simplificar a su mínima expresión**

$$\frac{3}{(x-1)\,(x+3)}-\frac{2}{(x+2)\,(x-1)}=$$

Solución: obsérvese que ya están factorizados los denominadores, por lo que únicamente hay que obtener su MCD. De acuerdo con la teoría antes mencionada, el MCD es: $(x-1)\,(x+3)\,(x+2)$; el factor $(x-1)$ se pone una sola vez porque está repetido. El resultado de la expresión se representa así:

$$\frac{3}{(x-1)\,(x+3)}-\frac{2}{(x+2)\,(x-1)}=\frac{3(x+2)-2(x+3)}{(x-1)\,(x+3)\,(x+2)}$$
$$=\frac{3x+6-2x-6}{(x-1)\,(x+3)\,(x+2)}=\frac{x}{(x-1)\,(x+3)\,(x+2)}$$

EJEMPLO **Efectuar las operaciones y simplificar a su mínima expresión**

$$\frac{3x+y}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x^2-xy}-\frac{1}{x+y}=$$

Solución: el **primer paso** es factorizar todos los denominadores para obtener el MCD que, como **segundo paso,** se divide entre cada uno de los denominadores, de manera que cada resultado se multiplica por el numerador correspondiente. En el **tercer paso** se efectúan las operaciones indicadas y se simplifica el resultado final.

Procederemos a factorizar cada uno de los denominadores.

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y), x^2 - xy = x(x - y), (x + y) = (x + y)$$

entonces: el **MCD** $= \boldsymbol{x(x - y)(x + y)}$.

La expresión dada queda resuelta así:

$$\frac{3x + y}{x^2 - y^2} - \frac{2y}{x^2 - xy} - \frac{1}{x + y} = \frac{3x + y}{(x + y)(x - y)} - \frac{2y}{x(x - y)} - \frac{1}{x + y}$$

$$= \frac{x(3x + y) - 2y(x + y) - x(x - y)}{x(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{3x^2 + xy - 2xy - 2y^2 - x^2 + xy}{x(x + y)(x - y)} = \frac{2x^2 - 2y^2}{x(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{2(x^2 - y^2)}{x(x + y)(x - y)} = \frac{2(x + y)(x - y)}{x(x + y)(x - y)} = \frac{2}{x}$$

EJEMPLO **Efectuar las operaciones y simplificar a su mínima expresión**

$$\frac{5}{x^3y} - \frac{4}{x^2y^2} - \frac{3}{xy^3} =$$

Solución: a diferencia de los ejemplos anteriores, en este ejercicio no aparecen las operaciones de suma o resta en los denominadores, así que no será necesario factorizar los denominadores para determinar el MCD, que simplemente se obtiene con el producto de la máxima potencia de $\boldsymbol{x}$ y la máxima potencia de $\boldsymbol{y}$.

Por lo tanto el **MCD es:** $\boldsymbol{x^3 y^3}$, de lo que se desprende que:

$$\frac{5}{x^3y} - \frac{4}{x^2y^2} - \frac{3}{xy^3} = \frac{5(y^2) - 4(xy) - 3(x^2)}{x^3y^3} = \frac{5y^2 - 4xy - 3x^2}{x^3y^3}$$

Observe que el resultado ya no puede ser simplificado porque la expresión del numerador no tiene un factor igual al del denominador, de modo que éste es el resultado final.

EJEMPLO **Efectuar las operaciones y simplificar a su mínima expresión**

$$\frac{3x}{2x^2 + 3xy - 2y^2} + \frac{y}{x^2 - 4y^2} - \frac{2x + y}{2x^2 - 5xy + 2y^2} =$$

Solución: como los denominadores no están factorizados ése es el primer paso para resolver el problema, por lo tanto:

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 = (2x - y)(x + 2y)$$

$$x^2 - 4y^2 = (x + 2y)(x - 2y)$$

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = (2x - y)(x - 2y)$$

El **MCD es:** $\boldsymbol{(2x - y)(x + 2y)(x - 2y)}$.

Por lo tanto, el resultado de la expresión dada es:

$$\frac{3x}{2x^2 + 3xy - 2y^2} + \frac{y}{x^2 - 4y^2} - \frac{2x + y}{2x^2 - 5xy + 2y^2}$$

$$= \frac{3x}{(2x - y)(x + 2y)} + \frac{y}{(x + 2y)(x - 2y)} - \frac{2x + y}{(2x - y)(x - 2y)}$$

$$= \frac{3x(x - 2y) + y(2x - y) - (2x + y)(x + 2y)}{(2x - y)(x + 2y)(x - 2y)}$$

$$= \frac{3x^2 - 6xy + 2xy - y^2 - 2x^2 - 4xy - xy - 2y^2}{(2x - y)(x + 2y)(x - 2y)}$$

$$= \frac{x^2 - 9xy - 3y^2}{(2x - y)(x + 2y)(x - 2y)}$$

Observe que el numerador ya no se puede factorizar, así que ésta es la respuesta.

7.2 Fracciones complejas

Una fracción compleja es aquella expresión en la que al menos uno de sus dos miembros (numerador o denominador) está compuesto por fracciones.

EJEMPLO

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}, \qquad \frac{1 + \frac{x}{y}}{2 + \frac{1}{y}}, \qquad \frac{\frac{x}{x - y} + \frac{y}{x + y}}{x^2 - y^2}$$

7.2.1 Simplificación de fracciones complejas

Para simplificar una fracción compleja basta con simplificar el numerador por una parte, el denominador por otra o los dos al mismo tiempo. Hecho lo anterior se aborda la división de la forma que más convenga, por ejemplo, se puede dejar el numerador igual y multiplicar por el recíproco del denominador de la fracción compleja.

Otra manera de resolver la división consiste en, ya simplificados numerador y denominador, dividir extremos por extremos (queda el numerador de una fracción simple) y medios por medios (que es el denominador de la misma fracción simple). Finalmente se verifica si la fracción resultante ya no puede ser simplificada.

Si la fracción compleja está escrita así: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$, se pueden simplificar por separado las fracciones de manera que la división indicada se hace en forma cruzada, es decir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Cualquiera que sea la opción elegida el resultado debe ser el mismo.

EJEMPLO **Simplificar la siguiente expresión**

$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{2}} =$$

Solución: con la opción de simplificar el numerador y el denominador de la fracción compleja al mismo tiempo, se tiene que:

$$\frac{1 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{2 + 1}{2}}{\frac{4 - 3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{2} = 3$$

Observe que para simplificar el numerador y el denominador se tiene que sacar por separado el mínimo común denominador de cada uno de ellos. Después se resuelven las operaciones y, por último, se efectúa la división, que en este caso se realizó invirtiendo el denominador de la fracción compleja.

EJEMPLO **Simplificar la siguiente expresión**

$$\frac{4-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}$$

Solución: se obtienen los MCD del numerador y del denominador, que son, respectivamente, x^2 y x. Después de las operaciones se tiene:

$$\frac{4-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}=\frac{\dfrac{4x^2-1}{x^2}}{\dfrac{2x+1}{x}}$$

Luego, al multiplicar extremos por extremos y medios por medios, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{4-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}=\frac{\dfrac{4x^2-1}{x^2}}{\dfrac{2x+1}{x}}=\frac{x(4x^2-1)}{(2x+1)\,(x^2)}$$

Simplificando esta última expresión el resultado final es:

$$\frac{4-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}=\frac{\dfrac{4x^2-1}{x^2}}{\dfrac{2x+1}{x}}=\frac{x(4x^2-1)}{(2x+1)\,(x^2)}=\frac{x(2x+1)\,(2x-1)}{x^2(2x+1)}=\frac{2x-1}{x}$$

EJEMPLO **Simplificar la siguiente expresión**

$$\frac{a-\dfrac{2}{a-1}}{\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{2}{(a-1)^2}}$$

Solución: como en el ejemplo anterior, primero se determinan los MCD del numerador y denominador, que en este caso son: $a-1$ y $(a-1)^2$, respectivamente. Efectuando operaciones se obtiene:

$$\frac{a-\dfrac{2}{a-1}}{\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{2}{(a-1)^2}}=\frac{\dfrac{a(a-1)-2}{a-1}}{\dfrac{a-1+2}{(a-1)^2}}=\frac{\dfrac{a^2-a-2}{a-1}}{\dfrac{a+1}{(a-1)^2}}$$

$$=\frac{(a^2-a-2)\,(a-1)^2}{(a-1)\,(a+1)}=\frac{(a-2)\,(a+1)(a-1)^2}{(a-1)\,(a+1)}=(a-2)\,(a-1)$$

Ejercicios 7.1

I. Reduzca las fracciones dadas a su mínima expresión.

1. $\dfrac{24ab^2c}{18a^2bc^2}$

2. $\dfrac{3^2a^6b}{18a^4b^6}$

3. $\dfrac{ax+3x}{a^2+3a}$

4. $\dfrac{3x}{x^2+2x}$

5. $\dfrac{3x}{6x+9}$

6. $\dfrac{4x+12}{x+3}$

7. $\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

8. $\dfrac{x^2-2x-8}{4-x}$

9. $\dfrac{4x-8}{4-2x}$

10. $\dfrac{2x-3}{3-2x}$

11. $\dfrac{x^2-25}{(x-5)^2}$

12. $\dfrac{6x^2-13x+6}{3x-2}$

13. $\dfrac{2h^2+3h-2}{3h^2+7h+2}$

14. $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-x-2}$

15. $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

16. $\dfrac{m^6-n^6}{m^9-n^9}$

17. $\dfrac{2x^2-5x-12}{2x^2+11x+12}$

18. $\dfrac{x^2+2x-8}{2x^2+11x+12}$

19. $\dfrac{15x^2+16x+4}{6x^2-5x+6}$

20. $\dfrac{2x^2+6x+4}{4x^2+20x+24}$

II. Efectuar las operaciones indicadas y expresar su resultado en términos mínimos.

1. $\dfrac{28y}{15x}\cdot\dfrac{5x}{7y}$

2. $\dfrac{4x^2}{3a^2b}\cdot\dfrac{9a^2b}{2x}$

3. $\dfrac{12x^2}{6y^2}\cdot\dfrac{36xy^5}{12}$

4. $\dfrac{x^2+x}{y^2-1}\cdot\dfrac{y+1}{x+1}$

5. $\dfrac{7x+21y}{x^2-9y^2}\cdot\dfrac{x^2-6xy+9y^2}{x^2-2xy-3y^2}$

6. $\dfrac{2x^2-9x+9}{8x-12}\cdot\dfrac{2x}{x^2-3x}$

7. $\dfrac{x+3}{x-3}\cdot\dfrac{x^3-27}{x^2+3x+9}$

8. $\dfrac{x^3+8}{x^2-x-6}\cdot\dfrac{x+3}{x^2-2x+4}$

9. $\dfrac{2a(a+b)^2}{3b^3}\cdot\dfrac{b^2(a-b)}{8a^3(a+b)}\cdot\dfrac{12a^2b^2}{a^2-b^2}$

10. $\dfrac{24q^2(2p+3q)^2}{5p^3}\cdot\dfrac{10p^5}{9q^3(4p^2-9q^2)}\cdot\dfrac{(2p-3q)\,6q^4}{p^4}$

11. $\dfrac{7bc}{9a}\div\dfrac{14c}{a^2}$

12. $64x^3\div\dfrac{8x^2y^3}{3}$

13. $\dfrac{-2xw}{y^5}\div\dfrac{6x^2}{y^6}$

14. $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+8x+7}\div\dfrac{x^2-x-6}{x^2-x-2}$

15. $\dfrac{a-b}{9a+9}\div\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2a+1}$

16. $\dfrac{2x^2+9x+4}{x^2+7x+12}\div\dfrac{2x^2-x-1}{(x+3)^2}$

17. $\dfrac{3a^2-a-10}{8x^2-2a-3}\cdot\dfrac{10a^2+a-2}{3a^2+20a+25}\div\dfrac{5a^2+8a-4}{12a^2+11a-15}$

18. $\dfrac{x^2+4xy-12y^2}{x^2+7xy+6y^2}\cdot\dfrac{x^2-6xy-7y^2}{x^2-xy-12y^2}\div\dfrac{x^2-9xy+14y^2}{x^2-xy-12y^2}$

III. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar a su mínima expresión

1. $\dfrac{x-1}{6}+\dfrac{x}{6}$

2. $\dfrac{x+11}{8}+\dfrac{2x+5}{8}$

3. $\dfrac{3x+6}{2}-\dfrac{x}{2}$

4. $\dfrac{x+y}{x-6}-\dfrac{5x-2y}{x-6}$

5. $\dfrac{-2x-4}{x^2+2x+1}+\dfrac{3x+5}{x^2+2x+1}$

6. $\dfrac{-2x+6}{x^2+x-6}+\dfrac{3x-3}{x^2+x-6}$

7. $\dfrac{4x+12}{3-x}-\dfrac{3x+15}{3-x}$

8. $\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{2x}$

9. $\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{3}{2x}$

10. $\dfrac{3}{4x^2y}+\dfrac{7}{5xy^2}$

11. $\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{a+b}{b}$

12. $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2-x}$

13. $\dfrac{x+2}{x^2-4}-\dfrac{2}{x+2}$

14. $\dfrac{x+3}{x^2-3x-10}-\dfrac{2}{x-5}$

15. $\dfrac{y}{xy-x^2}-\dfrac{x}{y^2-xy}$

16. $\dfrac{5}{x^2-9x+8}-\dfrac{3}{x^2-6x-16}$

17. $\dfrac{m^2-1}{m^3+1}-\dfrac{2}{m^2-m+1}$

18. $\dfrac{2a^2-5b^2}{a^2+ab-2b^2}+\dfrac{a-2b}{a+2b}-\dfrac{a-2b}{a-b}$

IV. Simplifique las fracciones complejas para obtener una fracción simple en términos mínimos.

1. $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{4}{7}}{1-\frac{2}{21}}$

2. $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{10}}$

3. $\dfrac{2+\frac{3}{8}}{1+\frac{1}{3}}$

4. $\dfrac{\frac{15a}{b^2}}{\frac{5}{b^3}}$

5. $\dfrac{\frac{36x^4}{5y^4z^5}}{\frac{9xy^2}{15z^5}}$

6. $\dfrac{x-\frac{x}{y}}{\frac{1+x}{y}}$

7. $\dfrac{\frac{2}{a}+\frac{1}{2a}}{a+\frac{a}{2}}$

8. $\dfrac{\frac{a^2}{b}-b}{\frac{b^2}{a}-a}$

9. $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}$

10. $\dfrac{\frac{a}{b}-2}{-\frac{a}{b}+2}$

11. $\dfrac{\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{3x-1}}{\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{3x-1}}$

12. $\dfrac{\frac{x-y}{x+y}+\frac{1}{x^2-y^2}}{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}}$

13. $\dfrac{1-\frac{x-6}{x^2-x-6}}{2+\frac{x+6}{x^2-x-6}}$

14. $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}-1}{\frac{2x}{y-x}+2}$

15. $\dfrac{\frac{p+2}{p-2}-\frac{p}{p+2}}{3-\frac{4}{p+2}}$

8

ECUACIONES

Introducción

La gráfica de una ecuación lineal es una línea recta que debe cumplir con ciertas condiciones. Lo más común para realizar la gráfica es tener dos puntos, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y ubicarlos en un sistema coordenado. La distancia entre ellos se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Otro de los conceptos relacionados con la línea recta (gráfica de una ecuación lineal) es el cálculo de su pendiente, la cual representa la tangente del ángulo de inclinación. Si conocemos dos puntos de la recta, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, su pendiente se determina por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación punto-pendiente

La ecuación $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$ es la de una línea recta y se obtiene a partir de dos puntos o de un punto y la pendiente. Cuando sólo contamos con el dato de los dos puntos, se determina la pendiente con la definición del párrafo anterior (la pendiente representa la tangente del ángulo de inclinación). Ya con este dato y cualquiera de los dos puntos se construye la ecuación de la recta.

Ecuación general de la recta

La ecuación $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$ es conocida como ecuación general de la recta, donde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son constantes con $\mathbf{B} \neq 0$. La ecuación general puede obtenerse al igualar a cero la ecuación punto-pendiente y acomodar sus términos.

Si se tiene la ecuación general de una recta $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$, puede determinarse su pendiente despejándola hasta que quede $\boldsymbol{y = mx + b}$ (llamada ecuación particular de la recta), donde $\boldsymbol{m}$ representa la pendiente y $\boldsymbol{b}$ la intersección con el eje y.

La pendiente y la intersección con el eje y de una recta pueden determinarse a partir de la ecuación general $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$, donde $\boldsymbol{m = -\frac{A}{B}}$ y la intersección con el eje y es $\boldsymbol{-\frac{C}{B}}$.

Se dice que una recta es paralela a otra cuando sus pendientes son iguales, $\boldsymbol{m_1 = m_2}$.

Se dice que una recta es perpendicular a otra cuando sus pendientes son recíprocas entre sí y tienen signo contrario, esto es: $\boldsymbol{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$ o $\boldsymbol{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$.

Ejercicios 8.1

I. Determine la distancia entre los siguientes pares ordenados.

1. $P_1\,(3,-2), P_2\,(-1,3)$
2. $P_1\,(0,3), P_2\,(-1,3)$
3. $P_1\,(7,2), P_2\,(7,-2)$
4. $P_1\,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right), P_2\,\left(\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right)$
5. $P_1\,(-1,-3), P_2\,(-5,-4)$

II. Determine la pendiente de la recta que pasa por los siguientes pares de puntos.

1. $P_1\,(3,2), P_2\,(-1,4)$
2. $P_1\,(-3,0), P_2\,(1,0)$
3. $P_1\,(1,3), P_2\,(2,3)$
4. $P_1\,(-3,-3), P_2\,(-3,2)$
5. $P_1\,(0,0), P_2\,(3,0)$

III. Determine la ecuación de la recta que cumple con las condiciones establecidas.

1. Que pase por el punto $(-1,3)$; $m=2$.
2. Que pase por los puntos $(3,2)$ y $(-1,4)$.
3. Que pase por el punto $(1,2)$; $m=-\frac{1}{2}$.
4. Que pase por los puntos $(3,-2)$ y $(0,-2)$.
5. Que pase por el punto $(3,5)$; $m=0$.
6. Que pase por el punto $(2,3)$ y sea paralela a $x-y=4$.
7. Que pase por el punto $(0, 1)$ y sea perpendicular a $3x-2y+1=0$.
8. Que pase por el punto $(1,1)$ y sea paralela a $y=x$.
9. Que pase por el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ y sea perpendicular a $5x-3y=1$.
10. Que pase por el punto $(0,0)$ y sea paralela a $2x+4y+2=0$.

8.1 Definición de ecuación

Una **ecuación** es una igualdad de dos expresiones algebraicas. A esas expresiones se les llama miembros de la ecuación; el miembro que aparece del lado izquierdo de la igualdad se le llama primer miembro, mientras que el que se encuentra en el lado derecho se le llama segundo miembro.

EJEMPLOS

1. $2x-3=5x+2$
2. $3y-5=2$
3. $\frac{2}{x}-1=4$

8.2 Clasificación de las ecuaciones

Hay dos tipos de ecuaciones con las que comúnmente se trabaja, uno son las llamadas **ecuaciones identidades**; mientras que en el otro son las **ecuaciones condicionales**.

Las **ecuaciones identidades** son aquellas que resultan válidas para todos los valores posibles de las letras que contienen.

EJEMPLO

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Si se asigna cualquier valor a ***a*** y a ***b***, efectuamos las operaciones indicadas en cada lado de la igualdad y obtenemos el mismo resultado, estamos ante una ecuación identidad.

Otros ejemplos de ecuaciones identidad son todos los productos notables vistos con anterioridad.

Las **ecuaciones condicionales** son aquellas que, como su nombre lo indica, están condicionadas a algún(os) valor(es) de su(s) variable(s), es decir, la igualdad se cumple sólo para ciertos valores de la variable.

EJEMPLO **Resolver para *x* la siguiente ecuación**

$$x+3=5$$

Solución: sin utilizar ningún método de solución podemos deducir que el único valor que satisface la igualdad es $x = 2$, por lo tanto, la ecuación es del tipo condicional.

Por otro lado, si la ecuación contiene sólo una incógnita (el valor que se desconoce) a cada solución se le conoce como raíz. Por ejemplo, la raíz o solución de la ecuación anterior es $x = 2$.

Las **ecuaciones equivalentes** son aquellas que tienen la misma solución. Por ejemplo, por sustitución directa se comprueba que $x = 2$ es la solución de $x + 3 = 5$ y de $4x + 3 = 11$, por lo tanto, dichas ecuaciones son equivalentes.

8.3 Solución de ecuaciones de primer grado con una variable

En esta sección resolveremos ecuaciones de la forma $\boldsymbol{ax + b = 0}$ o que son reducibles a dicha forma.

En la ecuación $\boldsymbol{ax + b = 0}$, $\boldsymbol{b}$ representa cualquier número y $\boldsymbol{a}$ cualquier número distinto de cero. Esta ecuación es de primer grado en $\boldsymbol{x}$ y es llamada **ecuación lineal**.

Una ecuación de primer grado es aquella en la que la incógnita del numerador tiene como exponente uno.

Para resolver una ecuación de este tipo hay que acomodar del lado izquierdo de la igualdad todos los términos que contengan la incógnita; a la derecha los términos constantes, o viceversa, según convenga. Tomando en cuenta que:

a. Si un término está en un lado de la igualdad, sumando o restando, pasa al otro lado de la igualdad efectuando la operación contraria.

b. Cada lado de la igualdad debe quedar reducido a un solo término.

c. Si un número está multiplicando de un lado de la igualdad, pasa hacia el otro dividiendo a todos los términos de ese lado y conservando su signo.

- Si un número está dividiendo de un lado de la igualdad pasa hacia el otro multiplicando a todos los términos de ese lado y conservando su signo.
- El resultado de una ecuación debe expresarse de la forma más simplificada posible.

EJEMPLO **Resolver para *x* la siguiente ecuación**

$$5x - 8 = x + 2$$

Solución: al pasar al lado izquierdo las $\boldsymbol{x}$ y al lado derecho las constantes, obtenemos la siguiente ecuación equivalente:

$$5x - x = 2 + 8$$

Después de efectuar las operaciones indicadas tenemos que:

$$4x = 10$$

Por último, para despejar $\boldsymbol{x}$ vemos que el 4 está multiplicando, entonces pasa dividiendo al otro lado de la igualdad. El resultado es:

$$x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

La solución se puede comprobar sustituyendo este valor en la ecuación original para verificar la igualdad.

EJEMPLO **Resolver para *x* la siguiente ecuación**

$$3\,(3x - 1) + 4\,(9 - 5x) = 0$$

Solución: para resolver la ecuación con respecto a x primero hay que efectuar las operaciones indicadas y, posteriormente, dejar las x de un lado y las constantes del otro. Por lo tanto, la ecuación dada es equivalente a:

$$9x - 3 + 36 - 20x = 0$$

y a su vez esta ecuación es equivalente a:

$$9x - 20x = -36 + 3$$

Haciendo operaciones y despejando la variable tenemos que:

$$-11x = -33$$

$$x = \frac{-33}{-11}$$

$$\mathbf{x = 3}$$

Nota: todos los resultados de las ecuaciones pueden comprobarse sustituyendo en la ecuación original el valor obtenido, por ejemplo, para el problema anterior la comprobación es:

$$3\,(3x - 1) + 4\,(9 - 5x) = 0$$

$$3\,[3\,(3) - 1] + 4\,[9 - 5\,(3)] = 0$$

$$3\,[9 - 1] + 4\,[9 - 15] = 0$$

$$3\,[8] + 4\,[-6] = 0$$

$$24 - 24 = 0$$

$$0 = 0$$

EJEMPLO **Resolver para *x* la siguiente ecuación**

$$x\,(x - 8) + 3x^2 = 2\,(x - 2)\,(2x + 1)$$

Solución: efectuando las operaciones indicadas tenemos que:

$$x\,(x - 8) + 3x^2 = 2\,(x - 2)\,(2x + 1)$$

$$x^2 - 8x + 3x^2 = 2\,(2x^2 - 3x - 2)$$

$$x^2 - 8x + 3x^2 = 4x^2 - 6x - 4$$

$$x^2 - 8x + 3x^2 - 4x^2 + 6x = -4$$

$$-2x = -4$$

$$x = \frac{-4}{-2}$$

$$\mathbf{x = 2}$$

EJEMPLO **Resolver para *x* la siguiente ecuación**

$$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = x + 9$$

Solución: efectuando las operaciones indicadas y despejando x tenemos que:

$$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = x + 9$$

$$x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) = x + 9$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = x + 9$$

$$3x = 9$$

$$x = \frac{9}{3}$$

$$\mathbf{x = 3}$$

Solución: para resolver la ecuación con respecto a x primero hay que efectuar las operaciones indicadas y, posteriormente, dejar las x de un lado y las constantes del otro. Por lo tanto, la ecuación dada es equivalente a:

$$9x - 3 + 36 - 20x = 0$$

y a su vez esta ecuación es equivalente a:

$$9x - 20x = -36 + 3$$

Haciendo operaciones y despejando la variable tenemos que:

$$-11x = -33$$

$$x = \frac{-33}{-11}$$

$$\mathbf{x = 3}$$

Nota: todos los resultados de las ecuaciones pueden comprobarse sustituyendo en la ecuación original el valor obtenido, por ejemplo, para el problema anterior la comprobación es:

$$3\,(3x - 1) + 4\,(9 - 5x) = 0$$

$$3\,[3\,(3) - 1] + 4\,[9 - 5\,(3)] = 0$$

$$3\,[9 - 1] + 4\,[9 - 15] = 0$$

$$3\,[8] + 4\,[-6] = 0$$

$$24 - 24 = 0$$

$$0 = 0$$

EJEMPLO **Resolver para x la siguiente ecuación**

$$x\,(x - 8) + 3x^2 = 2\,(x - 2)\,(2x + 1)$$

Solución: efectuando las operaciones indicadas tenemos que:

$$x\,(x - 8) + 3x^2 = 2\,(x - 2)\,(2x + 1)$$

$$x^2 - 8x + 3x^2 = 2\,(2x^2 - 3x - 2)$$

$$x^2 - 8x + 3x^2 = 4x^2 - 6x - 4$$

$$x^2 - 8x + 3x^2 - 4x^2 + 6x = -4$$

$$-2x = -4$$

$$x = \frac{-4}{-2}$$

$$\mathbf{x = 2}$$

EJEMPLO **Resolver para x la siguiente ecuación**

$$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = x + 9$$

Solución: efectuando las operaciones indicadas y despejando x tenemos que:

$$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = x + 9$$

$$x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) = x + 9$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = x + 9$$

$$3x = 9$$

$$x = \frac{9}{3}$$

$$\mathbf{x = 3}$$

8.4 Ecuaciones que comprenden fracciones

Son aquellas que incluyen fracciones en alguno de sus términos. Se resuelven multiplicando todos los términos por el mínimo común múltiplo de los denominadores (el MCM divide a todos los denominadores), esto hace que la ecuación se convierta en una ecuación entera, lo cual facilita su solución.

EJEMPLO **Resolver para *x* la siguiente ecuación**

$$\frac{5}{6}x - \frac{7}{9}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{4}x - \frac{8}{9}$$

Solución: hay varias alternativas para resolver este problema, una es pasar de un solo lado las x y del otro las constantes y efectuar las operaciones indicadas para despejar a x. Otra alternativa es determinar el mínimo común denominador de cada lado de la igualdad y después resolver las operaciones para despejar a x. Una tercera opción es, como se mencionó en el párrafo anterior, sacar el mínimo común múltiplo para convertir la ecuación dada en una entera, de manera que sea fácil despejar el valor de x.

Aplicando este último procedimiento tenemos que el MCM de todos los denominadores es 36, de aquí que la ecuación dada es equivalente a:

$$36\left[\frac{5}{6}x - \frac{7}{9}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{4}x - \frac{8}{9}\right]$$

Al efectuar las operaciones y despejar la variable tenemos:

$$6\,(5x) - 4\,(7x) + 12\,(2) = 9\,(1x) - 4\,(8)$$

$$30x - 28x + 24 = 9x - 32$$

$$30x - 28x - 9x = -32 - 24$$

$$-7x = -56$$

$$x = \frac{-56}{-7}$$

$$\mathbf{x = 8}$$

EJEMPLO **Resolver para *x* la siguiente ecuación**

$$\frac{3x - 2}{4} + 3 = x - \frac{1}{2}$$

Solución: como la ecuación comprende fracciones hay que multiplicar ambos lados por el MCM de los denominadores para obtener una ecuación sin fracciones.

El MCM es 4, por lo tanto tenemos que:

$$4\left[\frac{3x - 2}{4} + 3 = x - \frac{1}{2}\right]$$

Es equivalente a:

$$\frac{4(3x - 2)}{4} + 3\,(4) = 4\,(x) - 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

Efectuando las operaciones indicadas y despejando x tenemos:

$$3x - 2 + 12 = 4x - 2$$

$$3x - 4x = -2 + 2 - 12$$

$$-x = -12$$

$$x = \frac{-12}{-1}$$

$$\mathbf{x = 12}$$

8.4 Ecuaciones que comprenden fracciones

Son aquellas que incluyen fracciones en alguno de sus términos. Se resuelven multiplicando todos los términos por el mínimo común múltiplo de los denominadores (el MCM divide a todos los denominadores), esto hace que la ecuación se convierta en una ecuación entera, lo cual facilita su solución.

EJEMPLO **Resolver para *x* la siguiente ecuación**

$$\frac{5}{6}x - \frac{7}{9}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{4}x - \frac{8}{9}$$

Solución: hay varias alternativas para resolver este problema, una es pasar de un solo lado las x y del otro las constantes y efectuar las operaciones indicadas para despejar a x. Otra alternativa es determinar el mínimo común denominador de cada lado de la igualdad y después resolver las operaciones para despejar a x. Una tercera opción es, como se mencionó en el párrafo anterior, sacar el mínimo común múltiplo para convertir la ecuación dada en una entera, de manera que sea fácil despejar el valor de x.

Aplicando este último procedimiento tenemos que el MCM de todos los denominadores es 36, de aquí que la ecuación dada es equivalente a:

$$36\left[\frac{5}{6}x - \frac{7}{9}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{4}x - \frac{8}{9}\right]$$

Al efectuar las operaciones y despejar la variable tenemos:

$$6\,(5x) - 4\,(7x) + 12\,(2) = 9\,(1x) - 4\,(8)$$

$$30x - 28x + 24 = 9x - 32$$

$$30x - 28x - 9x = -32 - 24$$

$$-7x = -56$$

$$x = \frac{-56}{-7}$$

$$\mathbf{x = 8}$$

EJEMPLO **Resolver para *x* la siguiente ecuación**

$$\frac{3x - 2}{4} + 3 = x - \frac{1}{2}$$

Solución: como la ecuación comprende fracciones hay que multiplicar ambos lados por el MCM de los denominadores para obtener una ecuación sin fracciones.

El MCM es 4, por lo tanto tenemos que:

$$4\left[\frac{3x - 2}{4} + 3 = x - \frac{1}{2}\right]$$

Es equivalente a:

$$\frac{4(3x - 2)}{4} + 3\,(4) = 4\,(x) - 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

Efectuando las operaciones indicadas y despejando x tenemos:

$$3x - 2 + 12 = 4x - 2$$

$$3x - 4x = -2 + 2 - 12$$

$$-x = -12$$

$$x = \frac{-12}{-1}$$

$$\mathbf{x = 12}$$

Nota: hay ecuaciones que contienen fracciones, lo que significa que sus denominadores no son sólo números sino términos con variables. En tal caso hay que evitar que la solución sea un valor que anule al o a los denominadores, porque la división entre cero no existe. Si esto sucede se dice que la ecuación no tiene solución. Por ello, antes de resolver el problema se recomienda determinar el o los valores que no pueden ser solución.

Los valores permisibles para las variables de una ecuación son todos aquellos con los que se cumple la igualdad.

EJEMPLO **Resolver para *x* la siguiente ecuación**

$$\frac{x}{x+1}+\frac{3}{8}=\frac{5}{2(x+1)}+\frac{1}{2}$$

Solución: considérese $x \neq -1$ y que el MCM de los denominadores es $8\,(x+1)$. Entonces tenemos que:

$$8\,(x+1)\left[\frac{x}{x+1}+\frac{3}{8}=\frac{5}{2\,(x+1)}+\frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{8x(x+1)}{x+1}+\frac{3(8)(x+1)}{8}=\frac{5(8)\,(x+1)}{2\,(x+1)}+\frac{8(x+1)}{2}$$

$$8\,(x)+3\,(x+1)=20+4\,(x+1)$$

$$8x+3x+3=20+4x+4$$

$$8x+3x-4x=20+4-3$$

$$7x=21$$

$$x=\frac{21}{7}$$

$$\mathbf{x=3}$$

EJEMPLO **Resolver para *x* la siguiente ecuación**

$$\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x-3}=\frac{6}{x^2-7x+12}$$

Solución: considérese $x \neq 4$, $x \neq 3$ y que para obtener el MCM tienen que estar completamente factorizados todos los denominadores, de aquí que:

$$x^2-7x+12=(x-4)\,(x-3)$$

por lo tanto, el MCM de los denominadores es $(x-4)\,(x-3)$. Con esto tenemos que:

$$(x-4)\,(x-3)\left[\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x-3}=\frac{6}{(x-4)\,(x-3)}\right]$$

$$\frac{3\,(x-4)\,(x-3)}{x-4}-\frac{2\,(x-4)\,(x-3)}{x-3}=\frac{6\,(x-4)\,(x-3)}{(x-4)\,(x-3)}$$

$$3\,(x-3)-2\,(x-4)=6$$

$$3x-9-2x+8=6$$

$$3x-2x=6+9-8$$

$$\mathbf{x=7}$$

EJEMPLO **Resolver para *x* la siguiente ecuación**

$$\frac{2x-4}{x-3}=3+\frac{2}{x-3}$$

Solución: considérese $x \neq 3$ y que el MCM es $(x-3)$, de aquí que:

$$(x-3)\left[\frac{2x-4}{x-3} = 3 + \frac{2}{x-3}\right]$$

$$\frac{2x-4\,(x-3)}{x-3} = 3\,(x-3) + \frac{2\,(x-3)}{x-3}$$

$$2x-4 = 3\,(x-3)+2$$

$$2x-4 = 3x-9+2$$

$$2x-3x = -9+2+4$$

$$-x = -3$$

$$\boldsymbol{x = 3}$$

Observación: 3 no es una raíz de la ecuación dada porque este valor hace al denominador igual a cero. Por lo tanto, se concluye que *la ecuación dada no tiene solución.*

EJEMPLO Resolver para *x* la siguiente ecuación

$$\frac{3}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

Solución: recuerde que para obtener el MCM de los denominadores, éstos tienen que estar totalmente factorizados. Entonces tenemos que: $x^2-4=(x-2)\,(x+2)$. Luego, observe que el MCM de los denominadores es $(x-2)\,(x+2)\,(x+1)$. Considere $\boldsymbol{x \neq 2}$, $\boldsymbol{x \neq -2}$ y $\boldsymbol{x \neq -1}$.

$$(x+2)\,(x-2)\,(x+1)\left[\frac{3}{(x+2)\,(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right]$$

$$\frac{3\,(x+2)\,(x-2)\,(x+1)}{(x+2)\,(x-2)} = \frac{(x+2)\,(x-2)\,(x+1)}{x-2} - \frac{(x+2)\,(x-2)\,(x+1)}{x+1}$$

$$3\,(x+1) = (x+2)\,(x+1) - (x+2)\,(x-2)$$

$$3x+3 = x^2+3x+2-(x^2-4)$$

$$3x+3 = x^2+3x+2-x^2+4$$

$$3x-x^2-3x+x^2 = 2+4-3$$

$$0 = 3$$

Debido a que la última igualdad es una contradicción, se concluye que la *ecuación no tiene solución.*

Ejercicios 8.2

I. Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $3x-5=0$
2. $7x+8=-3$
3. $3w-2=w-6$
4. $[2x-2(x-1)]5=4-x$
5. $2(x-3)=3(x+1)$
6. $3(x+2)=5(x-1)$
7. $-(x+3)-(x-6)=3x-4$
8. $29=-43+x$
9. $p^2+6p-1=p^2-p+6$
10. $(w-1)(w+1)=w\,(w-4)$
11. $(x-1)^3=x^2(x-3)+x$
12. $(x+3)^2+(x+2)^3=x^3+7x^2+9$
13. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=\frac{1}{6}$
14. $\frac{1}{4}x+3=\frac{2}{5}x+4$
15. $5-\frac{3}{4}x=\frac{2}{3}x+2$
16. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}$

17. $\frac{1}{3}(t-2)+\frac{2}{3}t=2t+\frac{4}{3}$

18. $\frac{1}{4}s+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}s$

19. $\frac{2w-3}{3}=w-3$

20. $\frac{3x-2}{5}+3=\frac{4x-1}{3}$

21. $\frac{2x-9}{3}-2=\frac{x-3}{3}$

22. $\frac{3t+10}{2}-t-4=\frac{3t+6}{4}$

23. $\frac{2}{3x+1}=\frac{5}{8x+1}$

24. $\frac{4}{x-2}-\frac{3}{x+1}=\frac{8}{(x-2)(x+1)}$

25. $\frac{1}{2x+3}-\frac{3}{x-3}=\frac{3}{(2x+3)(x-3)}$

26. $\frac{x}{x-4}+1=\frac{4}{x-4}$

27. $\frac{3y}{y+4}=7-\frac{12}{y+4}$

28. $\frac{2x}{x-3}-11=\frac{6}{x-3}$

8.5 Ecuaciones cuadráticas

Definición: una ecuación cuadrática es una expresión algebraica de segundo grado que se representa: $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$; donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son números reales y $\boldsymbol{a\neq 0}$.

Ecuaciones de las formas:

$$3x^2-5=x^2+2x-1 \qquad \text{o} \qquad 5x^2-1=2x$$

que se pueden reducir a la forma general de una ecuación cuadrática, también son ecuaciones de este tipo.

Para resolver una ecuación cuadrática es necesario encontrar el conjunto de soluciones o las raíces de la ecuación.

Solución de ecuaciones cuadráticas por factorización

El procedimiento general es:

a. Escribir la ecuación en su forma general (igualada a cero).
b. Factorizar completamente el lado izquierdo.
c. Igualar a cero cada uno de los factores.
d. Despejar la variable de cada uno de los factores.

EJEMPLO **Resolver la ecuación $9x^2-25=0$**

Solución: como ya tenemos la ecuación en su forma general empezaremos por factorizarla:

$$(3x+5)(3x-5)=0$$

Igualamos a cero cada factor:

$$3x+5=0 \qquad \text{y} \qquad 3x-5=0$$

Despejamos la variable de cada uno de los factores:

$$3x=-5 \qquad 3x=5$$

$$x=-\frac{5}{3} \qquad x=\frac{5}{3}$$

Por lo tanto, la solución o las raíces de la ecuación son:

$$\left\{\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right\}$$

EJEMPLO Resolver la ecuación $x^2 - x = 2$

Solución:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{y} \quad x + 1 = 0$$

$$\mathbf{x = 2} \qquad \mathbf{x = -1}$$

Por lo tanto, la solución o raíces de la ecuación son: $\{-1, 2\}$.

EJEMPLO Resolver la ecuación $7x^2 - 11x = 0$

Solución:

$$x(7x - 11) = 0$$

$$\mathbf{x = 0} \quad \text{y} \quad 7x - 11 = 0$$

$$7x = 11$$

$$x = \frac{11}{7}$$

Por lo tanto, la solución o raíces de la ecuación son: $\left\{0, \frac{11}{7}\right\}$.

EJEMPLO Resolver la ecuación $18x^2 + 3 = 29x$

Solución:

$$18x^2 - 29x + 3 = 0$$

$$(9x - 1)(2x - 3) = 0$$

$$9x - 1 = 0 \quad \text{y} \quad 2x - 3 = 0$$

$$9x = 1 \qquad 2x = 3$$

$$x = \frac{1}{9} \qquad x = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la solución o raíces de la ecuación son: $\left\{\frac{1}{9}, \frac{3}{2}\right\}$.

Nota: existen ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 - c = 0$, en las que ***a*** y ***c*** o alguna de ellas no tiene raíz exacta. En este caso la ecuación se puede resolver más fácilmente si sólo despejamos la variable con el siguiente procedimiento:

- **a.** Pasar el término independiente ***c*** del lado derecho de la igualdad.
- **b.** En caso de que x^2 tenga coeficiente diferente de 1, pasar este coeficiente dividiendo al lado derecho de la igualdad.
- **c.** Sacar raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad para obtener las dos raíces o soluciones de la ecuación.
- **d.** Racionalizar el denominador en caso necesario.

EJEMPLO Resolver la ecuación $3x^2 - 5 = 0$

Solución: primero se pasa el término independiente del lado derecho de la igualdad.

$$3x^2 = 5$$

El coeficiente de x^2 pasa dividiendo al lado derecho de la igualdad.

$$x^2 = \frac{5}{3}$$

Se extrae la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad.

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Para finalizar, se racionaliza el denominador, para ello se multiplica tanto el numerador como el denominador por $\sqrt{3}$.

$$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{(5)(3)}}{\sqrt{(3)(3)}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3^2}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{3}$$

Por lo tanto, las dos raíces o soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{\sqrt{15}}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{15}}{3}$$

El conjunto solución de la ecuación es: $\left\{\frac{\sqrt{15}}{3}, \quad -\frac{\sqrt{15}}{3}\right\}$.

EJEMPLO Resolver la ecuación $4x^2 - 7 = 0$

Solución:

$$4x^2 - 7 = 0$$

$$4x^2 = 7$$

$$x^2 = \frac{7}{4}$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es: $\left\{\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$.

EJEMPLO Resolver la ecuación $x^2 - 8 = 0$

Solución:

$$x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 8$$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{8}$$

$$x = \pm\sqrt{(4)(2)} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = 2\sqrt{2} \quad \text{y} \quad x_2 = -2\sqrt{2}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es: $\{2\sqrt{2}, \quad -2\sqrt{2}\}$.

Solución de las ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula general

En ocasiones las ecuaciones cuadráticas no pueden resolverse por factorización debido a que no son factorizables o tal procedimiento no se puede hacer con facilidad, por eso necesitamos uno que se aplique a cualquier tipo de ecuación cuadrática. El proceso de solución consiste en utilizar una fórmula general que se describe en la siguiente ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ésta es la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. El $\pm$ que aparece en el numerador indica las dos raíces o soluciones de la ecuación cuadrática de la siguiente manera:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para aplicar la fórmula general debemos tener la ecuación en su forma general, es decir, igualada a cero.

EJEMPLO Resolver la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$

Solución: a simple vista se aprecia que la ecuación **no es factorizable**, entonces aplicamos la fórmula general sin despejar puesto que la ecuación está igualada a cero.

$$\boldsymbol{a = 1, b = 1, c = -1}$$

Sustituimos estos valores en la fórmula general:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

De este modo:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es: $\left\{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right\}$.

EJEMPLO Resolver la ecuación $2x^2 + 1 = 5x$

Solución: primero debemos igualar la ecuación a cero:

$$2x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\boldsymbol{a = 2, b = -5, c = 1}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es: $\left\{\frac{5 + \sqrt{17}}{4}, \frac{5 - \sqrt{17}}{4}\right\}$.

EJEMPLO Resolver la ecuación $9x^2 + 10x + 2 = 0$

Solución:

$$\boldsymbol{a = 9, b = 10, c = 2}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4(9)(2)}}{2(9)} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 72}}{18} = \frac{-10 \pm \sqrt{28}}{18}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{(4)(7)}}{18} = \frac{-10 \pm \sqrt{7}\ \sqrt{4}}{18} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{7}}{18}$$

Factorizando el numerador y el denominador tenemos:

$$x = \frac{2(-5 \pm \sqrt{7})}{2(9)} = \frac{-5 \pm \sqrt{7}}{9}$$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{7}}{9} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{7}}{9}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es: $\left\{\frac{-5 + \sqrt{7}}{9}, \frac{-5 - \sqrt{7}}{9}\right\}$.

Casos especiales

A veces las ecuaciones cuadráticas no presentan la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$. En tales casos es necesario transformar la ecuación original en una equivalente, sin olvidar que en la solución de estas ecuaciones hay que eliminar los valores de la variable que conviertan en cero algún denominador.

EJEMPLO **Resolver la ecuación** $\mathbf{\frac{7}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} = 5}$

Solución: debemos considerar que $x \neq \pm 1$ ya que estos valores hacen que el denominador sea cero.

Multiplicamos toda la ecuación por el MCM:

$$(x + 1)\,(x - 1)\left[\frac{7}{x - 1} - \frac{6}{x^2 - 1} = 5\right]$$

$$7(x + 1) - 6 = 5\,(x + 1)\,(x - 1)$$

$$7x + 7 - 6 = 5(x^2 - 1)$$

$$7x + 1 = 5x^2 - 5$$

$$0 = 5x^2 - 7x - 6$$

Que equivale a:

$$5x^2 - 7x - 6 = 0$$

Esta ecuación se resuelve por factorización:

$$5x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$(5x + 3)\,(x - 2) = 0$$

$$5x + 3 = 0 \qquad x - 2 = 0$$

$$x = -\frac{3}{5} \qquad x = 2$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es: $\left\{-\frac{3}{5}, 2\right\}$.

EJEMPLO **Resolver la ecuación $(x + 5)^2 + 3x = (x + 3)\,(2x - 1)$**

$$x^2 + 10x + 25 + 3x = 2x^2 + 5x - 3$$

$$0 = 2x^2 + 5x - 3 - x^2 - 13x - 25$$

$$0 = x^2 - 8x - 28$$

Que equivale a:

$$x^2 - 8x - 28 = 0$$

Resolveremos esta ecuación con la fórmula general:

$$a = 1, b = -8, c = -28$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(1)(-28)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{176}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(16)(11)}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{11}}{2}$$

$$x = \frac{2(4 \pm 2\sqrt{11})}{2} = 4 \pm 2\sqrt{11}$$

$$x_1 = 4 + 2\sqrt{11} \quad \text{y} \quad x_2 = 4 - 2\sqrt{11}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es: $\{4 + 2\sqrt{11},\ \ 4 - 2\sqrt{11}\}$.

Ejercicios 8.3

I. Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 - 4 = 0$
2. $2x^2 = 18$
3. $16 = 4x^2$
4. $5x^2 = 6x$
5. $3x^2 + 9x = 0$
6. $25 = x^2$
7. $2x^2 = 72$
8. $7x = 49x^2$
9. $4x^2 = 25$
10. $3x^2 = 18$
11. $5x^2 = 75$
12. $4x^2 - 9 = 0$
13. $25x^2 = 16$
14. $2x^2 - 7 = 0$
15. $5 = 35x^2$
16. $64 = 9x^2$
17. $49x^2 = 81$
18. $3x^2 = 4$
19. $25 = 2x^2$
20. $x^2 = 144$

II. Resolver las siguientes ecuaciones por el método de factorización.

1. $x^2 - x = 2$
2. $x^2 + 8 = -9x$
3. $2x^2 + 3x + 1 = 0$
4. $2x^2 + 3 = 5x$
5. $18x^2 + 3 = 29x$
6. $x^2 - 3x + 2 = 0$
7. $3y^2 + y = 2$
8. $z^2 - z = 12$
9. $3x^2 - x = 2$
10. $2x^2 - 3 = x$
11. $3y^2 - y = 2$
12. $4z^2 = 11z + 3$

III. Resolver las siguientes ecuaciones por fórmula general.

1. $x^2 - 4x + 3 = 0$
2. $2x^2 + 2 = 5x$
3. $6y^2 + 1 = 5y$
4. $x^2 - 6x + 8 = 0$
5. $8x^2 + 10x + 1 = 0$
6. $x^2 - x - 20 = 0$
7. $6x^2 + 5x + 1 = 0$
8. $2x^2 + 1 = 4x$
9. $2x^2 + 3x = 2$
10. $9x^2 + 10x + 2 = 0$
11. $x^2 = x + 3$
12. $4x^2 + 3 = 9x$

IV. Resolver las siguientes ecuaciones por el método que más convenga.

1. $4x(x - 2) - 7 = 5x - 10$
2. $5x(x + 4) + 21 = 6x + 24$
3. $7 = (3x + 8)(2 - 3x)$
4. $(3x - 2)(x + 1) = 2$
5. $4(x + 1) - 2(x - 2) = x^2 - x - 2$
6. $\dfrac{2x}{x - 1} + \dfrac{4}{x + 2} = 5$
7. $\dfrac{5x}{2x - 1} + \dfrac{2x}{3x + 2} = 3$

8. $\dfrac{2x}{3x-1}-\dfrac{2}{2x+1}=1$

9. $\dfrac{3x}{x^2+x-2}-\dfrac{22}{x^2+5x+6}=\dfrac{2}{x^2+2x-3}$

10. $\dfrac{18}{x^2-x-6}+\dfrac{2}{x^2+x-2}=\dfrac{2}{x^2-4x+3}$

8.6 Ecuaciones con radicales que conducen a ecuaciones lineales

Existen ecuaciones con radicales que conducen a ecuaciones lineales. La ecuación lineal equivalente se puede obtener mediante la eliminación de dichos radicales.

Es importante mencionar que no todas las ecuaciones con radicales conducen necesariamente a una ecuación lineal.

Procedimiento para resolver una ecuación con radicales

a. Si la ecuación contiene solamente un radical, éste debe ser aislado en uno de los lados de la ecuación.
b. Si la ecuación contiene dos radicales hay que dejar sólo uno en cada lado de la ecuación.
c. Aplicar la operación de potenciación en ambos lados de la ecuación tantas veces como sea necesario para eliminar todos los radicales y obtener una ecuación lineal.
d. Resolver la ecuación lineal.

EJEMPLO **Ecuación con un radical**

Obtener la solución de la ecuación:

$$\sqrt{x-4}=3$$

Solución: se elevan al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\left(\sqrt{x-4}\right)^2=(3)^2$$

El radical del lado izquierdo se elimina y la constante ubicada a la derecha de la ecuación se eleva al cuadrado.

$$x-4=9$$

Se despeja x para obtener la solución:

$$x=9+4$$

$$x=13$$

EJEMPLO **Ecuación con dos radicales**

Obtener la solución de la ecuación:

$$\sqrt{-x+2}-\sqrt{2x-1}=0$$

Solución: pasamos al otro lado de la ecuación uno de los dos radicales, dejando sólo uno en cada lado.

$$\sqrt{-x+2}=\sqrt{2x-1}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\left(\sqrt{-x+2}\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2$$

Eliminamos los radicales en ambos lados de la ecuación.

$$-x+2=2x-1$$

Despejamos x y obtenemos la solución:

$$-x - 2x = -1 - 2$$

$$-3x = -3$$

$$x = \frac{-3}{-3}$$

$$x = 1$$

EJEMPLO Ecuación con dos radicales

Resolver la ecuación:

$$\sqrt{3x + 1} + \sqrt{3x - 2} = 5$$

Solución: pasamos al otro lado de la ecuación uno de los dos radicales, dejando sólo uno en cada lado.

$$\sqrt{3x + 1} = 5 - \sqrt{3x - 2}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\left(\sqrt{3x + 1}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{3x - 2}\right)^2$$

Eliminamos el radical del lado izquierdo de la ecuación y desarrollamos el binomio al cuadrado $[(1o.)^2 + 2\,(1o.)(2o.) + (2o.)^2]$ ubicado en la parte derecha, esto es:

$$3x + 1 = (5)^2 - 2\sqrt{3x - 2} + \left(\sqrt{3x - 2}\right)^2$$

Simplificamos:

$$3x + 1 = 25 - 2\sqrt{x - 2} + 3x - 2$$

$$3x + 1 = 3x + 23 - 2\sqrt{x - 2}$$

Dejamos de un lado de la ecuación el término con radical y simplificamos.

$$3x - 3x + 1 - 23 = -2\sqrt{x - 2}$$

$$-22 = -2\sqrt{x - 2}$$

$$\frac{-22}{-2} = \sqrt{x - 2}$$

$$11 = \sqrt{x - 2}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$(11)^2 = \left(\sqrt{x - 2}\right)^2$$

El radical del lado derecho se elimina y elevamos al cuadrado la constante ubicada a la izquierda de la ecuación.

$$121 = x - 2$$

Se despeja x para obtener esta solución:

$$x = 121 + 2$$

$$x = 123$$

EJEMPLO Ecuación con radicales que no conduce a una ecuación lineal

Obtener la solución de la ecuación:

$$x = \sqrt{4x + 1} - 1$$

Solución: aislamos el radical en un lado de la ecuación, cambiando el -1.

$$x + 1 = \sqrt{4x + 1}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$(x + 1)^2 = \left(\sqrt{4x + 1}\right)^2$$

Eliminamos el radical de la parte derecha de la ecuación y desarrollamos el binomio al cuadrado ubicado en la parte izquierda.

$$x^2 + 2x + 1 = 4x + 1$$

Igualamos a cero la ecuación y simplificamos.

$$x^2 + 2x - 4x + 1 - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

Como se observa, obtuvimos una ecuación cuadrática que resolveremos por factorización.

$$x(x - 2) = 0$$

Igualamos cada factor a cero y obtenemos la solución.

$$x = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Solución:

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = 2$$

Ejercicios 8.4

1. $\sqrt{2x + 1} = 5$
2. $\sqrt{3x + 1} - 4 = 0$
3. $\sqrt{5x - 1} = -2$
4. $\sqrt{3x + 3} = \sqrt{2x}$
5. $\sqrt{7x + 4} = \sqrt{1 - 4x}$
6. $\sqrt{x^2 + x + 3} = x + 2$
7. $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 2} = 5$
8. $\sqrt{5x - 11} - \sqrt{5x + 1} = 2$
9. $\sqrt{x} - 2 = \sqrt{x - 4}$
10. $\sqrt{3x - 3} + 3 = \sqrt{3x}$
11. $5 + \sqrt{x} = 7$
12. $3\sqrt{x} + 5 = 8$
13. $5 - \sqrt{3x + 1} = 0$
14. $\sqrt{5x + 1} = \sqrt{14x + 2}$
15. $2\sqrt{2x - 9} = \sqrt{4x - 11}$
16. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1} = 1$
17. $\sqrt{2x + 1} = \sqrt{x + 5}$
18. $\sqrt{3x - 1} - \sqrt{2x + 1} = 0$
19. $\sqrt{2x + 2} = \sqrt{5x - 1}$
20. $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 2} = 0$
21. $\sqrt{x - 1} = \sqrt{x + 2}$
22. $\sqrt{4x - 11} - \sqrt{x + 1} = 0$
23. $\sqrt{2x + 1} = 2 + \sqrt{x - 3}$
24. $\sqrt{2x + 3} = x$
25. $\sqrt{x^2 + 5} = x - 1$
26. $x - \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$
27. $\dfrac{\sqrt{4x - 7}}{\sqrt{x - 3}} = 4$
28. $\dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{3x - 2}} = 2$
29. $\sqrt{5x + 1} = x + 1$
30. $\sqrt{x^2 + 3x - 7} - \sqrt{4x + 5} = 0$

8.7 Aplicaciones de las ecuaciones lineales

Muchos problemas que se suscitan en distintos ámbitos pueden ser resueltos en términos de una ecuación lineal. Para resolver un problema de aplicación lo más importante es saber plantear una ecuación que describa la situación. Iniciaremos este tema convirtiendo enunciados en ecuaciones.

Para obtener una expresión algebraica que corresponda al enunciado planteado, cada expresión se puede ir construyendo por partes.

a. El cubo de la suma de dos números.

"El cubo": $(\ )^3$

"de la suma de dos números": $(x - y)^3$.

b. El triple del cubo de la diferencia de dos números.

"El triple": $3(\ )$

"del cubo": $3(\ )^3$

"de la diferencia de dos números": $3(x - y)^3$.

c. Un quinto de un número o la quinta parte de un número.

$$\frac{1}{5}x$$

d. Un tercio del doble de un número, menos el triple de otro.

"Un tercio": $\frac{1}{3}(\ )$

"del doble de un número, menos el triple de otro": $\frac{1}{3}(2x - 3y)$.

e. Un número más su quíntuplo.

"Un número": x

"más su quíntuplo": $x + 5x$.

Pasos para la resolución de problemas de aplicación.

a. Leer con atención el problema y realizar un esquema que permita visualizar el planteamiento de la ecuación.

b. Identificar la variable (x) en función de la cual se calcula el resto de las cantidades desconocidas.

c. Identificar qué igualdades se pueden establecer con base en lo que dice el problema.

d. Plantear la ecuación de acuerdo con el esquema.

e. Resolverla para x.

f. Revisar cuál es la incógnita que se solicita resolver.

EJEMPLO

Pepe quiere comprar 10 piezas en una liquidación de ropa. Los pantalones cuestan $300 cada uno y las camisas $80 cada una. ¿Cuántos artículos de cada uno puede comprar con $1900?

Primero hacemos un esquema:

En total quiere comprar 10 piezas.

10 Llamaremos x a las camisas.

camisas pantalones

x $10 - x$

Como Pepe quiere gastar $1900, entonces multiplicamos:

(cantidad de camisas)(precio) + (cantidad de pantalones)(precio) = gasto total

$$x(80) + (10 - x)(300) = 1900$$

De manera que generamos la siguiente ecuación:

$$80x + 300(10 - x) = 1900$$

Resolvemos para x:

$$80x + 3000 - 300x = 1900$$

$$-220x = 1900 - 3000$$

$$x = \frac{-1100}{-220}$$

$$x = 5$$

Finalmente, en el problema se pide determinar cuántas camisas y cuántos pantalones puede comprar Pepe.

$$x = 5 \text{ camisas}$$

$$10 - x = 5 \text{ pantalones}$$

EJEMPLO

Un soldador tarda ocho horas en realizar cierto trabajo. Otro soldador realiza la misma labor en 24 horas. ¿Cuánto tardarán los dos juntos en realizar el trabajo?

Esquema

Trabajo realizado en una hora

Primer soldador Segundo soldador

$\frac{1}{8}$ del trabajo $\frac{1}{24}$ del trabajo

En una hora hace una octava parte del trabajo. En una hora hace una veinticuatroava parte del trabajo.

Si x es el número de horas requeridas para terminar el trabajo, entonces:

(parte del soldador 1 + parte del soldador 2) * (número de horas) = trabajo terminado

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right)x = 1$$

$$\left(\frac{4}{24}\right)x = 1$$

$$x = \frac{24}{4}$$

$$x = 6$$

Juntos, ambos soldadores tardarían seis horas en concluir el trabajo.

EJEMPLO

Pedro obtuvo un 12% de aumento de sueldo, lo que significa que recibe $6300 más al mes. ¿Cuál era su sueldo anterior y cuál es el actual?

Sueldo anterior: x

Aumento: $x(0.12) = 6300$

Despejamos x:

$$x = \frac{6300}{0.12}$$

$$x = \frac{6300}{0.12}$$

$x = 52500$ Sueldo anterior

$x = 58800$ Sueldo actual

EJEMPLO

En un taxi la tarifa se obtiene tomando como base un valor fijo de $8.50 más $4.50 por cada kilómetro recorrido. Si el taxista cobra $90, ¿cuántos kilómetros recorrió en ese servicio?

Esquema

Tarifa

Valor fijo + 4.50 (kilómetros) = $90

Llamamos $\boldsymbol{x}$ a los kilómetros.

Ecuación: $8.50 + (4.50)x = 90$

$$(4.50)x = 90 - 8.50$$

$$x = \frac{81.50}{4.50}$$

$$x = 18.11 \text{ kilómetros}$$

Ejercicios 8.5

I. Representе como expresión algebraica cada una de las siguientes expresiones.

1. El cuadrado de la suma de dos números:
2. Un quinto de un número más un medio de otro:
3. El cuadrado de la tercera parte de la suma de dos números:
4. La mitad del cuadrado de la diferencia de dos números:
5. El triple de la diferencia de un número menos dos:
6. El triple de un número menos su quinta parte:
7. El cuadrado de un número más el doble producto de ese número por otro:
8. Un quinto de la diferencia de un número menos tres:
9. El producto de tres números consecutivos:

II. Resuelva los siguientes problemas (utilice los pasos sugeridos en esta sección).

1. Un túnel mide 1300 m y debe recorrerse a una velocidad máxima de 70 km/h. ¿Cuál es el tiempo mínimo

que puede emplearse en cruzar el túnel? Recuerde que $v = d/t$.

2. Un vendedor inicia su día con \$200 en caja; vende jugos a \$12 y tortas a \$24. Si termina el día con \$980, ¿cuántos jugos y cuántas tortas vendió si se sabe que vendió cinco jugos más que tortas?

3. Ana, Laura y María compraron un juego de mesa. Si Laura pagó la cuarta parte del costo, Ana la tercera parte y María \$100, ¿cuánto costó el juego? ¿Cuánto pagó Ana? ¿Cuánto pagó Laura?

4. La suma de tres números consecutivos es 105. ¿Cuáles son esos números?

5. Tres números impares consecutivos suman 87. ¿Cuáles son los números?

6. Andy tiene el triple de la edad de su hermano y la cuarta parte de la edad de su padre. ¿Qué edad tiene cada uno, si entre los tres suman 48 años?

7. Hace seis años el tío de Beto tenía el cuádruplo de su edad. En 10 años más tendrá sólo el doble. Halle la edad actual de ambos.

8. Para producir cierto producto se requieren tres materias primas diferentes. Se compran 25 unidades de la primera, 32 de la segunda y 24 de la tercera pagando en total \$16900. Si la primera cuesta el triple de la tercera, más \$20, y la segunda cuesta el doble de la tercera, más \$ 8, ¿cuál es el costo de cada una?

9. Un rectángulo tiene un perímetro de 174 m. Si se sabe que su largo es tres unidades más grande que su ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

10. Si el lado de un cuadrado se duplica, su perímetro aumenta 12 cm. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado original?

11. El papá de Juan puede pintar una casa en cinco horas; su primo lo hace en seis horas y su hermano en 12. ¿Cuántas horas tardarán en pintar la casa los tres familiares de Juan juntos?

12. La cabeza de un cachorro pesa un tercio de su peso total; la cola, una duodécima parte y el resto del cuerpo 5 kg. ¿Cuánto pesa el cachorro?

13. Claudia compró tres regalos para sus amigas y en total gastó \$500. Calcule el precio de cada regalo, si el primero vale el triple del segundo y el tercero el doble del primero.

14. La entrada para una función benéfica de teatro se vendió en \$80 para los adultos y \$60 para los niños. Si se recaudaron \$11 200 y el total de boletos vendidos fue de 150, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron?

Reto

"La mitad de mis alumnos estudia LIN, la cuarta parte estudia LAE, la séptima parte IIS y tres más no sé qué estudian". ¿Cuántos alumnos tengo?

9

DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

Introducción

En muchas ocasiones no nos interesa encontrar valores exactos de cantidades sino rangos o intervalos de valores para una cantidad. Decimos que la temperatura está entre 30 y 40 °C, que el precio de un carro oscila entre los $200 000 y los $300 000, que el tiempo que nos toma llegar al trabajo es de entre 15 y 20 minutos, que las ganancias de una compañía van a exceder el pronóstico en dos millones de pesos este año, o que el nivel de tolerancia para un error en el diámetro de una máquina es menor a 0.003 pulgadas. Decimos, también, que para jugar beisbol en una liga juvenil debes tener al menos 14 años, que los elevadores de un edificio fueron construidos para soportar un peso máximo de 3 600 lb o que el reglamento de un parque de diversiones señala que las personas que deseen subirse a la montaña rusa deben medir no menos de 42 in. Para representar como expresiones algebraicas todas estas cifras se requiere una notación específica.

9.1 Desigualdades

La desigualdad utiliza los símbolos $>$ (mayor que), $<$ (menor que), $\geq$ (mayor o igual que) y $\leq$ (menor o igual que). Éstos son símbolos de desigualdad y se utilizan para expresar rangos o intervalos de números reales. *Obsérvese que, para los símbolos de desigualdad, la cantidad mayor queda siempre del lado hacia el cual abre el símbolo, mientras que el vértice señala hacia la cantidad menor.*

Por ejemplo:

Simbolismo	Representación de números reales
$x < 3$	x es "menor que" 3
$t \geq 0$	t es "mayor o igual que" 0
$3 < x < 5$	x está "entre 3 y 5"

Muchas desigualdades pueden ser resueltas usando las mismas técnicas empleadas con las ecuaciones, la diferencia entre ellas es el resultado.

Para ver tal diferencia comparamos ecuaciones y desigualdades que parecen similares al ser resueltas e interpretadas.

Ecuación	Desigualdad
$4x + 1 = 5$ $4x = 4$ $x = 1$	$4x + 1 < 5$ $4x < 4$ $x < 1$

9

DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

Introducción

En muchas ocasiones no nos interesa encontrar valores exactos de cantidades sino rangos o intervalos de valores para una cantidad. Decimos que la temperatura está entre 30 y 40 °C, que el precio de un carro oscila entre los $200 000 y los $300 000, que el tiempo que nos toma llegar al trabajo es de entre 15 y 20 minutos, que las ganancias de una compañía van a exceder el pronóstico en dos millones de pesos este año, o que el nivel de tolerancia para un error en el diámetro de una máquina es menor a 0.003 pulgadas. Decimos, también, que para jugar beisbol en una liga juvenil debes tener al menos 14 años, que los elevadores de un edificio fueron construidos para soportar un peso máximo de 3 600 lb o que el reglamento de un parque de diversiones señala que las personas que deseen subirse a la montaña rusa deben medir no menos de 42 in. Para representar como expresiones algebraicas todas estas cifras se requiere una notación específica.

9.1 Desigualdades

La desigualdad utiliza los símbolos $>$ (mayor que), $<$ (menor que), $\geq$ (mayor o igual que) y $\leq$ (menor o igual que). Éstos son símbolos de desigualdad y se utilizan para expresar rangos o intervalos de números reales. *Obsérvese que, para los símbolos de desigualdad, la cantidad mayor queda siempre del lado hacia el cual abre el símbolo, mientras que el vértice señala hacia la cantidad menor.*

Por ejemplo:

Simbolismo	Representación de números reales
$x < 3$	x es "menor que" 3
$t \geq 0$	t es "mayor o igual que" 0
$3 < x < 5$	x está "entre 3 y 5"

Muchas desigualdades pueden ser resueltas usando las mismas técnicas empleadas con las ecuaciones, la diferencia entre ellas es el resultado.

Para ver tal diferencia comparamos ecuaciones y desigualdades que parecen similares al ser resueltas e interpretadas.

Ecuación	Desigualdad
$4x + 1 = 5$	$4x + 1 < 5$
$4x = 4$	$4x < 4$
$x = 1$	$x < 1$

En la solución de la ecuación, x es igual a 1, mientras que en la desigualdad esta variable representa cualquier número real menor a 1.

Antes de resolver más desigualdades revisaremos la notación y simbolismos. Existen dos formas de representar las soluciones de las desigualdades, ambas se aprecian en la siguiente tabla junto con una representación gráfica en una línea de números reales. Observe que la variable de la notación en la izquierda aparece en la representación. En la de la derecha, que se conoce como notación de intervalo, la variable no aparece. El símbolo $+\infty$ se utiliza para representar el infinito positivo, mientras que el símbolo $-\infty$ representa el infinito negativo.

En la tabla no está incluido el punto final de un intervalo, se utilizan paréntesis; en la línea de números reales ocupamos un círculo abierto. Cuando el punto final se incluye se utilizan corchetes y círculos rellenos.

$x < b$	$(-\infty, b)$	
$x > a$	$(a, +\infty)$	
$x \leq b$	$(-\infty, b]$	
$x \geq a$	$[a, +\infty)$	
$a < x < b$	(a, b)	
$a < x \leq b$	$(a, b]$	
$a \leq x < b$	$[a, b)$	
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	

Nota: (a, b) se conoce como un intervalo abierto.
$[a, b]$ se conoce como un intervalo cerrado.
$(a, b]$ y $[a, b)$ se conocen como intervalos semiabiertos.

Para resolver desigualdades es recomendable repasar las reglas generales.

Regla 1. Cualquier número real puede ser sumado o restado de ambos lados de una desigualdad.

Regla 2. Ambos lados de una desigualdad pueden ser multiplicados o divididos por el mismo número real positivo.

Regla 3. Si ambos lados de una desigualdad son multiplicados o divididos por el mismo número real negativo, entonces el sentido o dirección de la desigualdad se invierte (es decir, "<" se convierte a ">" y viceversa).

EJEMPLO **Resuelva las siguientes desigualdades e interprete los resultados**

a. $3x - 8 \geq 7$

b. $2x + 6 < 5$

Solución:

$$\begin{array}{rlr} 3x - 8 \geq 7 & & 2x + 6 < 5 \\ 3x \geq 15 & \textbf{Regla 1} & 2x < -1 \\ x \geq 5 & \textbf{Regla 2} & x < -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

La solución de la primera desigualdad es cualquier número real mayor o igual a 5, mientras que la solución de la segunda desigualdad es cualquier número real menor a $-\frac{1}{2}$.

EJEMPLO **Resuelva la siguiente desigualdad y escriba la respuesta en notación de intervalo y en forma gráfica**

$$4 - 3x \leq 7$$

Solución:

$$\begin{aligned} 4 - 3x &\leq 7 \\ -3x &\leq 3 \\ x &\geq -1 \qquad \textbf{Regla 3} \end{aligned}$$

La solución en notación de intervalo es: $[-1, +\infty)$.

En forma gráfica:

Una manera más concisa de expresar la solución de una desigualdad es la notación de conjuntos: $\{x|x \geq -1\}$ el conjunto de todos los números $\{x|x$ *es mayor o igual a* $-1\}$.

EJEMPLO **Resuelva la siguiente desigualdad y escriba la respuesta en notación de intervalo y en forma gráfica**

$$6 + 3(x - 1) > 2x$$

Solución:

$$\begin{aligned} 6 + 3(x - 1) &> 2x \\ 6 + 3x - 3 &> 2x \\ 3x + 3 &> 2x \\ 3x - 2x &> -3 \\ x &> -3 \end{aligned}$$

La solución en notación de intervalo es: $(-3, +\infty)$.

En forma gráfica:

9.2 Desigualdades compuestas

Las desigualdades compuestas son aquellas unidas por las preposiciones "y" u "o", por ejemplo:

$$a)\ x + 4 > 2 \qquad \text{y} \qquad x - 5 < 7$$

$$b)\ x + 8 > 3 \qquad \text{o} \qquad x - 8 < -3$$

El conjunto solución de una desigualdad compuesta que tenga la conjunción "y" está formado por la intersección de los conjuntos solución de ambas desigualdades.

Por ejemplo, al determinar el conjunto solución de la siguiente desigualdad compuesta:

$$3x - 9 > -6 \qquad \text{y} \qquad 3x - 9 < 6$$

Resolver cada desigualdad:

$$\begin{array}{ll} 3x - 9 > -6 & \qquad 3x - 9 < 6 \\ 3x > -6 + 9 & \qquad 3x < 6 + 9 \\ 3x > 3 & \qquad 3x < 15 \\ x > 1 & \qquad x < 5 \end{array}$$

De acuerdo con lo anterior, x es mayor que 1 pero menor a 5. Esto lo podemos expresar en forma de intervalo $(1, 5)$ o en forma gráfica:

También se pueden resolver juntas las dos desigualdades.

$$-6 < 3x - 9 < 6$$

$$-6 + 9 < 3x < 6 + 9$$

$$3 < 3x < 15$$

$$\frac{3}{3} < x < \frac{15}{3}$$

$$1 < x < 5$$

La expresión se lee: *x es mayor que 1 y menor que 5.*

La solución de una desigualdad compuesta que tiene la conjunción "o" es la unión de los dos conjuntos solución de las desigualdades.

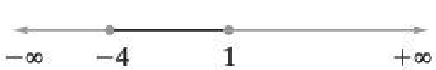
Encuentre los valores x tales que:

$$4x + 6 \geq 10 \qquad \text{o} \qquad 4x + 6 \leq -10$$

Resolver cada desigualdad.

$$\begin{array}{ll} 4x + 6 \geq 10 & \qquad 4x + 6 \leq -10 \\ 4x \geq 10 - 6 & \qquad 4x \leq -10 - 6 \\ 4x \geq 4 & \qquad 4x \leq -16 \\ x \geq 1 & \qquad x \leq -4 \end{array}$$

El conjunto solución de $4x + 6 \geq 10$ es $[1, +\infty]$ y el de $4x + 6 \leq -10$ es $(-\infty, -4]$; por consiguiente, el conjunto solución de la desigualdad compuesta es la unión de ambos intervalos, o sea: $(-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$, su representación gráfica es:



Al resolver una desigualdad no siempre encontramos una solución. Es decir, puede suceder que ningún número haga verdadera la desigualdad, o bien, que todos los números reales la hagan verdadera. Observe los siguientes ejemplos.

EJEMPLO

$$-\frac{2}{3}x + 4 > 7 - \frac{2}{3}x$$

Solución:

$$-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x > 7 - 4$$

$$0 > 3$$

Esta expresión es falsa, entonces, la desigualdad no tiene solución y se representa como $\varnothing$, conjunto vacío, o como:

una gráfica $\longleftrightarrow$ sin puntos.

EJEMPLO 2

$$-3(2x + 1) + 7x < x + 5$$

Solución:

$$-6x - 1 + 7x < x + 5$$

$$-6x + 7x - x < 5 + 1$$

$$0 < 6$$

Esta expresión es verdadera, entonces el conjunto solución de la desigualdad es el conjunto de los números reales $(-\infty, +\infty)$. La gráfica de este conjunto contiene todos los puntos de la recta:

$$\longleftrightarrow$$

EJEMPLO

$$\frac{x+1}{3} \le \frac{x-2}{3}$$

Solución:

$$x + 1 \le x - 2$$

$$x - x \le -2 - 1$$

$$0 \le -3$$

Esta expresión se lee: 0 es menor o igual a -3 y es verdadera porque cumple una de las dos condiciones pues 0 es menor o igual a -3. Entonces, el conjunto solución es el de todos los números reales; en forma de intervalo se representa $(-\infty, +\infty)$ y, en forma gráfica:

$$\longleftrightarrow$$

Ejercicios 9.1

Determine el conjunto solución de las siguientes desigualdades lineales y represéntelo: *a*) en forma de intervalo y *b*) en forma gráfica.

1. $3x - 5 \ge 2$
2. $2x + 6 < 5$
3. $4 - 5x \le 7$
4. $5 + 3(x - 1) > 2x$
5. $x + 2 \le 0$
6. $2x - 1 > 0$
7. $7 + 2x > 3$
8. $3 - \frac{2x}{3} < \frac{1}{2} + \frac{3x}{4}$

9. $3x - 7 \leq 2$

10. $5x - 1 \geq 14$

11. $-4 - 3x \geq 2$

12. $15 - 4x \geq 21$

13. $5(x - 1) - 2(x - 3) \geq 13$

14. $8 - 2(x - 3) < 2 + x$

15. $2x + 1 < x + \frac{1}{2}$

16. $x - 4 \leq 3x + 4$

17. $6x - 3(x + 1) > 0$

18. $2(x - 3) \leq 3x$

19. $-16 \leq 5x - 6 \leq 10$

20. $21 < 3(5 - 2x) < 39$

21. $-14 \leq 7(3 - x) \leq 7$

22. $3 \leq 2x - 5 \leq -3$

23. $20 < 30 - 5x < -20$

24. $4 < x + 3 \leq 12$

25. $-3 \leq \frac{x}{2} \leq 5$

26. $\frac{x}{3} + \frac{2}{5} > \frac{3x - 4}{9}$

27. $\frac{1 - 2x}{3} < \frac{5 - 4x}{6}$

28. $\frac{5}{3} + \frac{x}{3} > \frac{3 + 4x}{12}$

29. $\frac{3}{2} - \frac{2x}{3} < \frac{3 - 4x}{6}$

30. $\frac{2x + 1}{5} \geq \frac{7 + 2x}{5}$

31. $-6\left(2 - \frac{1}{6}x\right) + 3x > -4\left(\frac{1}{4} - x\right)$

32. $6x - 3 \leq 2x - 3$

9.3 Valor absoluto

El valor absoluto de un número es el valor positivo de dicho número. Se denota con dos barras verticales.

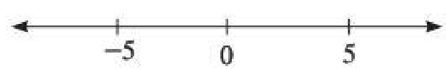
Por ejemplo:

$$|-5| = 5$$

$$|5| = 5$$

El valor absoluto está relacionado con el concepto de distancia.

Observe la siguiente recta numérica. Note que la distancia que hay entre 0 y 5 es la misma que existe entre 0 y -5. Así, el valor absoluto de un número real es la distancia entre ese número y el cero en la recta numérica.



Propiedades del valor absoluto

Para todo número real x y y:

i) $|x| = |-x| = x$

ii) $|x| = 0$, si y sólo si $x = 0$

iii) $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$

iv) $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$

v) $|x| + |y| \geq |x + y|$

Ecuaciones con valor absoluto

En esta sección resolveremos ecuaciones con valor absoluto aplicando sus propiedades.

EJEMPLO

$$|3x - 1| = 5$$

Por la propiedad i), para que el valor absoluto de la expresión sea 5, puede ser que:

$$3x - 1 = 5 \qquad \text{o bien,} \qquad 3x - 1 = -5$$

Entonces, resolvemos ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{ll} 3x - 1 = 5 & 3x - 1 = -5 \\ 3x = 5 + 1 & 3x = -5 + 1 \\ x = \dfrac{6}{3} = 2 & x = \dfrac{-4}{3} \end{array}$$

Las soluciones para la ecuación son: $\left\{2, \quad \dfrac{-4}{3}\right\}$.

EJEMPLO Resuelva

$$|3x - 2| = 13$$

Primero elimine las barras de valor absoluto, considerando que sin ellas la expresión puede ser positiva o negativa.

$$|3x - 2| = 13$$

$$\begin{array}{ll} 3x - 2 = 13 & 3x - 2 = -13 \\ 3x = 13 + 2 & 3x = -13 + 2 \\ x = \dfrac{15}{3} = 5 & x = \dfrac{-11}{3} \end{array}$$

Las soluciones para la ecuación son: $\left\{5, \quad \dfrac{-11}{3}\right\}$.

EJEMPLO Resuelva

$$\left|2 - \frac{x}{5}\right| = 2$$

$$\begin{array}{ll} 2 - \dfrac{x}{5} = 2 & 2 - \dfrac{x}{5} = -2 \\ -\dfrac{x}{5} = 2 - 2 & -\dfrac{x}{5} = -2 - 2 \\ x = 0(-5) & x = (-4)(-5) \\ x = 0 & x = 20 \end{array}$$

Las soluciones para la ecuación son: $\{0, 20\}$.

Ejercicios 9.2

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. $\left|\dfrac{6x + 1}{4}\right| = 1$
2. $\left|\dfrac{2x - 3}{1}\right| = 2$
3. $\left|\dfrac{3x}{4} - 1\right| = 4$
4. $\left|\dfrac{4 - x}{3}\right| = 3$
5. $\left|\dfrac{x}{3}\right| = 4$
6. $|3x - 2| + 4 = 0$
7. $|2x - 2| = 5$
8. $\left|\dfrac{2}{3} + 4x\right| = 10$

9. $|8x - 15 + 4| = 12$

10. $\left|2 - \dfrac{5x}{3}\right| = 1$

11. $|3 - 5x| = 2$

12. $|2x - 8| = 3$

13. $|7x - 3| = 5$

14. $|1 - 2x| = 4$

15. $\left|\dfrac{2x - x}{3}\right| = 4$

16. $|-7x + 16| + 8 = 3$

17. $2|-10x - 13| = 12$

18. $3|5x - 11| - 1 = 4$

19. $|7x - 3| = 5$

20. $\left|\dfrac{x + 1}{-2}\right| = 2$

21. $\left|\dfrac{3x + 5}{9}\right| = 2$

22. $\left|\dfrac{-2x - 1}{2}\right| = 3$

23. $|2x + 5| = 4$

24. $\left|\dfrac{3x - 5}{8}\right| = \dfrac{1}{2}$

25. $\left|\dfrac{-2x - 3}{5}\right| = \dfrac{1}{3}$

26. $\left|\dfrac{3 - x}{3} - 2\right| = \dfrac{7}{2}$

27. $\left|\dfrac{-4x - 1}{3}\right| = 5$

28. $\left|\dfrac{x - 2}{3} + 1\right| = \dfrac{3}{2}$

Desigualdades con valor absoluto

Recuerde que el valor absoluto es la distancia entre un punto en la recta y cero. Para determinar los valores de x que hacen posible tener una distancia menor o mayor a un valor específico, se puede emplear una desigualdad.

Propiedades

Para todo número real x se cumple que:

Si el valor absoluto de x es menor que un número real a, la solución en la recta numérica estará representada por el intervalo $(-a < x < a)$.

"Si $|x| < a$, entonces $-a < x < a$"

Gráficamente:

Si el valor absoluto de x es mayor que un número real a, la solución en la recta numérica estará representada por la unión de los intervalos: $x > a$ y $x < -a$.

"Si $|x| > a$, entonces $x < -a$ o $x > a$"

Gráficamente:

En ninguno de los casos anteriores las soluciones incluyen el número a ni $-a$, puesto que las desigualdades no contienen la igualdad. Cuando las desigualdades contengan la igualdad, la solución incluirá los valores a y $-a$.

EJEMPLO

$|2x + 5| < 7$ Como el valor absoluto es **menor que**, aplicamos la propiedad respectiva.

$$|2x + 5| < 7 \quad \Rightarrow \quad -7 < 2x + 5 < 7$$

$$\Rightarrow \quad -12 < 2x < 2$$

$$\Rightarrow \quad -6 < x < 1$$

Restamos 5 en los tres términos y después dividimos entre 2 a dichos tres términos.

El conjunto solución resulta: $(-6, 1)$. El intervalo es abierto ya que las desigualdades no incluyen la igualdad. Esto significa que todos los valores entre -6 y 1 satisfacen la ecuación.

Gráficamente:

EJEMPLO

$$|3x + 2| \geq 1$$

Como el valor absoluto es **mayor que**, primero separamos en dos desigualdades de acuerdo con la propiedad correspondiente.

$$\begin{array}{llll} |3x+2| \geq 1 & \Rightarrow & 3x + 2 \geq 1 & 3x + 2 \leq -1 \\ & \Rightarrow & 3x \geq -1 & 3x \leq -3 \\ & \Rightarrow & x \geq -\dfrac{1}{3} & x \leq -1 \end{array}$$

Despejamos $\boldsymbol{x}$ de ambas desigualdades. El conjunto solución será la **unión** de los intervalos encontrados.

Para $x \geq -\frac{1}{3}$ tenemos $[-\frac{1}{3}, \infty)$ y para $x \leq -1$ tenemos $(-\infty, -1]$.

La unión de estos dos intervalos, $(-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{3}, \infty)$, es la respuesta a nuestro problema. Los intervalos son semiabiertos ya que las desigualdades contienen igualdad.

Gráficamente:

En algunas desigualdades con valor absoluto se presentan casos especiales, de manera que antes de resolver cualquier desigualdad con valor absoluto hay que analizar si es posible su solución.

EJEMPLO

$\left|\dfrac{6x-5}{3}\right| < 0$ **No** tiene solución porque un valor absoluto no puede ser negativo.

EJEMPLO

$\left|\dfrac{6x-5}{3}\right| < -4$ **No** hay solución porque un valor absoluto no puede ser menor a -4, que es un número negativo.

EJEMPLO

$$\left|\frac{6x-5}{3}\right| > -2$$

Este problema **sí** tiene solución pues aunque el valor absoluto no puede ser, por ejemplo, -1, sí puede asumir valores positivos o incluso el 0, puesto que tales valores son mayores que -2.

$$\left|\frac{6x-5}{3}\right| > -2$$

Eliminamos las barras de valor absoluto.

$$\frac{6x-5}{3} > -2 \quad \text{o} \quad \frac{6x-5}{3} < 2$$

$$6x - 5 > -6 \qquad 6x - 5 < 6$$

$$6x > -6 + 5 \qquad 6x < 6 + 5$$

$$x > \frac{-1}{6} \qquad x < \frac{11}{6}$$

El conjunto solución es: $\left(-\frac{1}{6}, \infty\right) \cup \left(-\infty, \frac{11}{6}\right)$.

Ejercicios 9.3

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. $\left|\frac{5-4x}{2}\right| \geq 0$
2. $\left|3 - \frac{x}{2}\right| < -6$
3. $\left|\frac{x}{5} - \frac{1}{2}\right| \geq 5$
4. $\left|1 - \frac{x}{3}\right| < 1$
5. $\left|\frac{2x-1}{-3}\right| \leq 1$
6. $\left|\frac{x+1}{2}\right| > 2$
7. $\left|\frac{3x+5}{7}\right| \geq 2$
8. $\left|\frac{3x-1}{8}\right| < 3$
9. $\left|\frac{2x-1}{9}\right| > 3$
10. $|2x + 5| \geq -1$
11. $\left|\frac{3x-5}{4}\right| \geq \frac{1}{2}$
12. $\left|\frac{3x-5}{5}\right| \geq \frac{1}{2}$
13. $\left|\frac{x-3}{5}\right| < \frac{1}{3}$
14. $|7x + 16| > 8$
15. $|-10x - 13| < 3$
16. $|5x - 11| > -4$
17. $|x + 5| > 3$
18. $|8x - 3| < 6$
19. $|3x - 7| < 1$
20. $\left|4 - \frac{1}{2}x\right| \geq 7$
21. $|3x - 4| \leq 0$
22. $|3x| \geq 8$
23. $|x - 4| \leq 9$
24. $|2x - 7| > 1$
25. $|-12 - 3x| < 6$
26. $\left|\frac{5}{2}x - 3\right| < 0$
27. $|-5x| < 4$
28. $|7x + 2| > 0$
29. $|17x - 3| \leq -3$
30. $|3x - 5| \leq 4$
31. $\left|\frac{2-5x}{3}\right| \geq 5$
32. $\left|\frac{5+4x}{3}\right| > \frac{2}{9}$
33. $\left|\frac{2-3x}{5}\right| \leq \frac{5}{2}$
34. $|3x - 7| \leq 7$
35. $|5x - 2| < 4$
36. $|x + 5| \leq 4 - 8$
37. $\left|\frac{4}{3}x + 3\right| \geq -\frac{5}{6}$

10

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES Y NO LINEALES

10.1 Sistema de ecuaciones lineales

Introducción

Antes de definir lo que es un sistema de ecuaciones lineales hay que recordar qué es una ecuación lineal. Éstas son de la forma:

$$ax + by = c$$

Donde a, b y c son elementos del conjunto de los números reales (R) y, además, a y b son diferentes de 0. Recuerde que la gráfica de una ecuación lineal es una línea recta. Si observamos la ecuación lineal $ax + by = c$ es claro que tenemos dos incógnitas (variables) para las que existe un número infinito de soluciones. Al introducir otra o varias ecuaciones de la misma forma lineal podemos encontrar una solución al sistema.

Definición: un sistema de ecuaciones lineales está conformado por dos ecuaciones lineales de la siguiente forma:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

donde los coeficientes de cada ecuación son elementos del conjunto de los números reales.

Hay que tomar en cuenta que en el sistema, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ representan lo mismo en las dos ecuaciones y son los valores que interesa encontrar.

En la solución de un sistema de ecuaciones lineales se puede presentar una de las siguientes situaciones:

a. Tener una solución única.

Cuando las pendientes de las ecuaciones son diferentes.

b. Hallar un número infinito de soluciones.

*Cuando tanto las pendientes de las ecuaciones como las intersecciones con el eje **y** son iguales.*

c. Que no exista solución.

Cuando las pendientes de las ecuaciones son iguales pero la intersección con el eje es diferente.

Existen diferentes métodos para solucionar un sistema de ecuaciones, a saber:

a. Gráfico.
b. Suma y resta (también llamado reducción).
c. Sustitución.

Método gráfico

El *método gráfico* para la solución de sistemas de ecuaciones lineales consiste en representar ambas rectas en los ejes cartesianos y probar si se cortan. Esto se logra tabulando o utilizando la pendiente y la intersección con el eje y.

Forma tabular

La forma tabular consiste en despejar primero la variable y, dar valores a x (al menos dos) y así encontrar el valor de y. Este proceso se realiza para las dos ecuaciones.

Ya que se cuenta con los valores se procede a graficar en un plano cartesiano con una escala en cada eje x y de acuerdo con los valores encontrados (es decir, que los abarque). Después de graficar se puede llegar a las siguientes conclusiones: si las dos rectas se cortan en un punto, la solución es única y los sistemas son **consistentes** en las coordenadas (x, y); si las rectas no tienen ningún punto en común (son paralelas), no hay solución porque no hay puntos que satisfagan a ninguna de las dos ecuaciones al mismo tiempo, por lo que este sistema es **inconsistente**. Por último, si las rectas coinciden en todos sus puntos y la gráfica es una sola recta, entonces todos los puntos son solución, de modo que existe un número infinito de soluciones para este sistema de ecuaciones llamado **dependiente.**

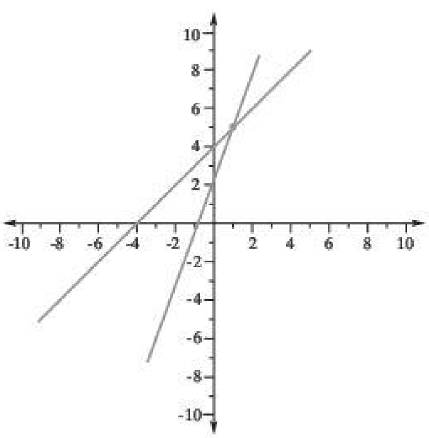


Figura 10.1 Sistema consistente solución única en (1, 5).

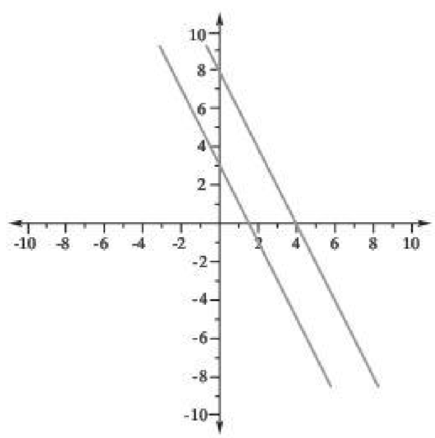


Figura 10.2 Sistema inconsistente no tiene solución.

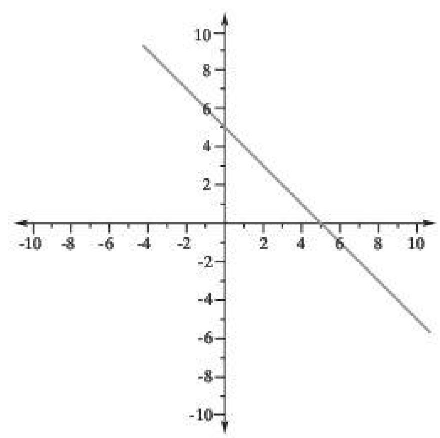


Figura 10.3 Sistema independiente número infinito de soluciones.

En el siguiente ejemplo se ilustra el método gráfico.

EJEMPLO

$$2x + y = 3$$
$$3x + 2y = 1$$

Solución: hay que graficar cada una de las ecuaciones descritas en el sistema de ecuaciones, ya sea de forma tabular o utilizando la pendiente y la intersección con el eje y.

Si se elige la forma tabular le damos valor a x para encontrar los valores de y. Para esto, primero debemos despejar y en ambas ecuaciones.

Despejando y en la primera ecuación:

$$2x + y = 3$$
$$y = 3 - 2x$$

En este caso la pendiente es -2 y la intersección con el eje y sería 3.

Despejando y en la segunda ecuación:

$$3x + 2y = 1$$

$$2y = 1 - 3x$$

$$y = \frac{1 - 3x}{2}$$

Esta ecuación se puede reescribir de la siguiente manera:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$$

Aquí la pendiente es $-\frac{3}{2}$ y la intersección con el eje y es $\frac{1}{2}$.

La pendiente e intersección de las ecuaciones es -2 para la primera y $-\frac{3}{2}$ para la segunda; las pendientes son diferentes, por lo que obtendremos una solución única.

Teniendo las dos ecuaciones despejadas: $y = 3 - 2x$, $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$, asignamos valores a x.

x	$y = 3 - 2x$
0	3
1	1
2	−1
3	−3
4	−5
5	−7

x	$y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$
0	0.5
1	−1
2	−2.5
3	−4
4	−5.5
5	−7

Graficando los puntos anteriores obtenemos:

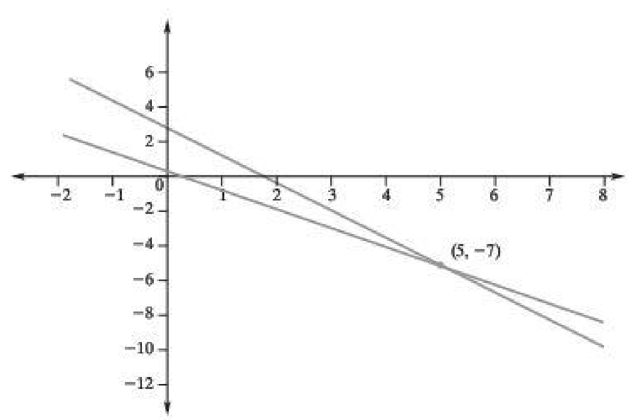


Figura 10.4

En la gráfica se aprecia que el punto de intersección de las dos rectas es $(5, -7)$. Éste es el único punto que satisface al sistema de ecuaciones.

Entonces, la solución única para el problema es $x = 5, y = -7$.

Método de suma y resta

Para aplicar este método se debe considerar que:

a. Los coeficientes de la variable que se quiere eliminar sean iguales.

b. Los signos de los números de las variables a eliminar sean diferentes.

EJEMPLO

$$5x + 2y = 8$$

$$3x + 3y = 10$$

Solución: para tratar de eliminar una de las variables o incógnitas primero hay que decidir cuál. En este caso eliminaremos y, así que observamos sus coeficientes.

Para la primera ecuación, $5x + 2y = 8$, el coeficiente de y es 2

Para la segunda ecuación, $3x + 3y = 10$, el coeficiente de y es 3

Una vez identificados estos coeficientes multiplicamos la ecuación:

$$3 \cdot (5x + 2y = 8) \quad \rightarrow \quad 15x + 6y = 24$$

$$2 \cdot (3x + 3y = 10) \quad \rightarrow \quad 6x + 6y = 20$$

Si restamos las ecuaciones resultantes reducimos el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} -\ 15x + 6y = 24 \\ 6x + 6y = 20 \\ \hline 9x + 0y = \ \ 4 \end{array}$$

Trabajando sólo con:

$$9x + 0y = 4$$

Podemos obtener el valor de x despejando:

$$9x = 4$$

$$x = \frac{4}{9}$$

Ahora este valor lo sustituimos en cualquiera de la ecuaciones originales para obtener el valor de y despejando:

$$3x + 3y = 10$$

$$3\left(\frac{4}{9}\right) + 3y = 10$$

$$\frac{12}{9} + 3y = 10$$

$$3y = 10 - \frac{12}{9}$$

$$3y = \frac{90}{9} - \frac{12}{9}$$

$$y = \frac{\frac{78}{9}}{3}$$

Para obtener la fracción multiplicamos extremos por extremos y medios por medios:

$$3y = \frac{\frac{78}{9}}{\frac{3}{1}}$$

$$y = \frac{78 \cdot 1}{9 \cdot 3}$$

$$y = \frac{78}{27}$$

La solución de nuestro problema es: $x = \frac{4}{9}, y = \frac{78}{27}$ y se trata de una solución única.

Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una variable de alguna de las ecuaciones y sustituirla en la ecuación faltante. Así se halla el valor de esa variable que, a su vez, se sustituye en la ecuación original (con la que inicia el proceso) para encontrar el valor de la variable faltante.

Analice un ejemplo que ilustra este método.

EJEMPLO

$$2x + 4y = 18$$

$$2x + 5y = 11$$

Solución: hay que despejar una variable de alguna de las ecuaciones, en este caso x de la primera ecuación.

$$2x + 4y = 18$$

$$2x = 18 - 4y$$

$$x = \frac{18 - 4y}{2}$$

Esto se simplifica así:

$$x = \frac{18}{2} - \frac{4y}{2}$$

$$x = 9 - 2y$$

Ahora podemos sustituir este valor $x = 9 - 2y$ en la ecuación que no hemos trabajado:

$$2x + 5y = 11$$

$$2(9 - 2y) + 5y = 11$$

$$18 - 4y + 5y = 11$$

Sumamos términos comunes $-4y + 5y$

$$18 + y = 11$$

Y despejamos y:

$$18 + y = 11$$

$$y = 11 - 18$$

$$y = -7$$

$$y = -7$$

Ahora sustituimos el valor $y = -7$ en $x = 9 - 2y$, que es el despeje de x, en la primera ecuación

$$x = 9 - 2y$$

$$x = 9 - 2(-7)$$

$$x = 9 + 14$$

$$x = 23$$

Entonces la solución única para el sistema de ecuaciones es $x = 23$, $y = -7$ que es una solución única.

Cómo identificar infinitas soluciones o que no existe solución

Al ejemplificar los métodos de solución trabajamos con sistemas de ecuaciones que tenían una solución única o no tenían solución. En esta sección mostraremos las distintas formas de identificar ambas situaciones.

a. Si una ecuación es múltiplo de la otra se tienen infinitas soluciones.

Esto se comprueba si, al multiplicar alguna de ellas por cierto valor, se obtiene la otra.

EJEMPLO

$$x + 3y = 5$$

$$3x + 9y = 15$$

Solución: obsérvese que al multiplicar la primera ecuación por 3 obtenemos la segunda ecuación:

$$3 \cdot (x + 3y = 5)$$

$$3 \cdot x + 3 \cdot 3y = 3 \cdot 5$$

$$3x + 9y = 15$$

Entonces, la solución al sistema de ecuaciones son todos los puntos en la recta.

$$x + 3y = 5$$

b. Dar a cada una de las ecuaciones la forma pendiente, es decir: $y = ax + b$.

*Si las pendientes (a) y las intersecciones con el eje **y** (b) son iguales, hay infinidad de soluciones.*

EJEMPLO

$$2x - 4y = 4$$

$$4x - 8y = 8$$

Solución: damos la forma pendiente a cada ecuación.

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 4 \\ -4y &= 4 - 2x \\ y &= \frac{4 - 2x}{-4} \end{aligned}$$

Simplificamos la ecuación:

$$y = \frac{4}{-4} + \frac{-2x}{-4}$$

$$y = -1 + \frac{1x}{2}$$

De la primera ecuación: $y = \dfrac{1x}{2} - 1$

$$4x - 8y = 8$$
$$-8y = 8 - 4x$$
$$y = \frac{8 - 4x}{-8}$$

simplificamos la ecuación:

$$y = \frac{8}{-8} + \frac{-4x}{-8}$$

de la segunda ecuación: $y = \dfrac{1x}{2} - 1$

Las dos ecuaciones son iguales pues sus pendientes e intersecciones son idénticas. Entonces, la solución al sistema de ecuaciones son todos los puntos en la recta: $y = \dfrac{1x}{2} - 1$.

Si las pendientes (a) y las intersecciones con el eje **y** *(b) son diferentes, no existe solución para el sistema de ecuaciones.*

EJEMPLO

$$18x - 6y = 15$$
$$24x - 8y = 21$$

Solución: damos la forma pendiente a cada ecuación.

$$18x - 6y = 15$$
$$-6y = 15 - 18x$$
$$y = \frac{15 - 18x}{-6}$$

Simplificamos la ecuación

$$y = \frac{15}{-6} + \frac{-18x}{-6}$$
$$y = -\frac{15}{6} + 3x$$

De la primera ecuación: $y = 3x - \dfrac{15}{6}$

$$24x - 8y = 21$$
$$-8y = 21 - 24x$$
$$y = \frac{21 - 24x}{-8}$$

simplificamos:

$$y = \frac{21}{-8} + \frac{-24x}{-8}$$
$$y = -\frac{21}{8} + 3x$$

de la segunda ecuación: $y = 3x - \dfrac{21}{8}$

En las dos ecuaciones las pendientes son iguales y las intersecciones diferentes, entonces el sistema no tiene solución.

Ejercicios 10.1

1. $3x - y = 2$
   $2x + 3y = 5$
2. $x + 4y = 7$
   $2x + 3y = 4$
3. $2x - 3y = 9$
   $3x + 4y = 5$
4. $3x + 2y = 0$
   $2x + 5y = 11$
5. $9x + 7y = 0$
   $5x - 9y = 0$
6. $2x - 11y = 4$
   $4x + 7y = 8$
7. $3x + y = 5$
   $6x + 2y = 7$
8. $4x - 2y = 4$
   $2x - y = 2$
9. $2x - 6y = 2$
   $x - 3y = 3$
10. $7x + 2y = 1$
    $21x + 6y = 3$
11. $4x + 8y = 10$
    $x + 3y = 27$
12. $3x - 2y = 12$
    $7x + 2y = 8$
13. $x + 5y = -10$
    $-5x + y = 24$
14. $3x + 5y = 15$
    $6x + 10y = -5$
15. $3x - 5y = 15$
    $x + \frac{5}{3}y = 5$
16. $3w + 8v = 4$
    $15w + 10v = -10$
17. $6a - 2b = 18$
    $-3a + b = -9$
18. $4m + 6n = 2$
    $6 - 9n = 15$
19. $2x + y = 6$
    $y = x + 3$
20. $b - 2c = 0$
    $-3b + 6c = 8$
21. $3A - B = -3$
    $5A + 3B = -19$
22. $2z - 3t = 9$
    $z + 2t = -13$
23. $x - 3y = -11$
    $2x + 5y = 11$
24. $5x + y = 4$
    $x - 2y = 3$
25. $11x + 2y = 1$
    $9x - 3y = 24$
26. $2x + y = 0$
    $3x + y = 2$
27. $y = 3x - 3$
    $6x = 8 + 3y$
28. $3m = 2y$
    $y = -7 - 2m$
29. $\frac{1}{2}x - y = -3$
    $-x - 2y = 6$
30. $y = 2x - 1$
    $6x - 3y = -1$
31. $2x + 3y = 2y - 2$
    $3x + 2y = 2x + 2$
32. $2u - 3v = 1 - 3u$
    $4v = 7u - 2$
33. $0.2x - 0.5y = 0.07$
    $0.8x - 0.03y = 0.79$
34. $0.5v + 0.2w = 0.54$
    $0.3v - 0.6w = 0.18$
35. $\frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = -2$
    $\frac{x}{2} - y = -2$
36. $\frac{2}{3}t - \frac{1}{2}r = 2$
    $\frac{1}{2}t + \frac{1}{3}r = 1$

10.2 Sistemas lineales con tres variables

Ahora vamos a estudiar los sistemas de la forma:

$$a_1x + b_1y + c_1y = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2y = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3y = d_3$$

El procedimiento que se sigue para resolver tal sistema es el método de suma y resta el cual se utiliza dos veces. Éstos son los pasos a seguir:

a. Tomar dos ecuaciones y eliminar una variable con el método de suma y resta.
b. Tomar otras dos ecuaciones y eliminar la misma variable que fue eliminada en el paso anterior.
c. Con las ecuaciones que resultan de los pasos *a* y *b* tenemos un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas de la forma:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

que puede ser resuelto con algunos de los métodos vistos con anterioridad.
d. Después de resolver el sistema del paso c, sustituimos los valores en una de las ecuaciones iniciales y obtenemos el valor de la variable faltante.

EJEMPLO

$$2x + y - z = 5 \quad \textbf{(1)}$$
$$x - 2y - 2z = 4 \quad \textbf{(2)}$$
$$3x + 4y + 3z = 3 \quad \textbf{(3)}$$

Solución: eliminamos con el método de suma y resta la variable x en las ecuaciones 1 y 2.

$$\begin{array}{rl} & 2x + y - z = 5 \\ - & 2(x - 2y - 2z = 4) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 2x + y - z = 5 \\ - & 2x - 4y - 4z = 8 \\ \hline & 0x + 5y + 3z = -3 \end{array}$$

Ahora ejecutamos los pasos 2 y 3, también con la misma variable x.

$$\begin{array}{rl} & 3(x - 2y - 2z = 4) \\ - & 3x + 4y + 3z = 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 3x - 6y - 6z = 12 \\ - & 3x + 4y + 3z = 3 \\ \hline & 0x - 10y - 9z = 9 \end{array}$$

Con las dos ecuaciones resultantes:

$$5y + 3z = -3$$
$$-10y - 9z = 9$$

Aplicamos otra vez el método de suma y resta para encontrar el valor de:

$$2(5y + 3z = -3)$$
$$-10x - 9z = 9$$

$$\begin{array}{rl} & 10y + 6z = -6 \\ + & -10y + 9z = 9 \\ \hline & 0y + 15z = 3 \end{array}$$

$$15z = 3$$

$$z = \frac{3}{15} \qquad z = \frac{1}{5}$$

Con esto encontramos el valor de ***y*** sustituyendo en $10y - 6z = -6$.

$$10y - 6\left(\frac{1}{5}\right) = -6$$

$$-10y - \frac{6}{5} = -6$$

$$-10y = -6 + \frac{6}{5}$$

$$-10y = \frac{-30 + 6}{5}$$

$$-10y = \frac{-24}{5}$$

$$y = \frac{\frac{-24}{5}}{-10}$$

$$y = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$$

Ahora que ya tenemos tanto el valor de $z = \frac{1}{5}$ como el de $y = \frac{12}{25}$ los sustituimos en alguna de las ecuaciones iniciales para obtener el valor que falta, ***x***.

$$2x + \frac{12}{25} - \left(\frac{1}{5}\right) = 5$$

$$2x + \frac{12 + 5}{25} = 5$$

$$2x + \frac{7}{25} = 5$$

$$2x = 5 - \frac{7}{25}$$

$$2x = \frac{125 - 7}{25}$$

$$2x = \frac{118}{25}$$

$$x = \frac{\frac{118}{25}}{2}$$

$$x = \frac{118}{50} = \frac{59}{25}$$

Entonces, la solución del problema es: $x = \frac{59}{25}, y = \frac{12}{25}, z = \frac{1}{5}$

Además del método antes mencionado podemos resolver este tipo de sistemas con tres variables:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

mediante el método de Cramer, que es una regla que emplea determinantes, mismos que explicaremos a continuación.

Existen diversos procedimientos para calcular el determinante de una matriz, pero en virtud de que se trata de un tema muy amplio esta sección sólo se enfocará en el método de lluvia. El determinante se simboliza como: $|matriz|$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Repetimos nuevamente las dos primeras columnas y las ponemos al final, justo como se ilustra:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

Marcamos líneas paralelas a la diagonal principal, que es la formada por los coeficientes a_1, b_2 y c_3, y en contra:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

Multiplicamos los coeficientes que están en cada diagonal; sumamos los que van de izquierda a derecha y restamos los que van de derecha a izquierda.

$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

Entonces, el determinante es:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

EJEMPLO

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución: repetimos las dos primeras columnas.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right.$$

Aplicando el método de lluvia el determinante quedaría:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = +2 + 80 + 9 - 30 - (-12) - (-4)$$

$$= +2 + 80 + 9 - 30 + 12 + 4$$

$$= 77$$

Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 77$$

Después de haber definido el determinante continuaremos con la definición de la regla de Cramer.

Regla de Cramer

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Para resolver este sistema necesitamos el determinante que simbolizamos de la siguiente manera:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Definido esto podemos encontrar el valor de x, y y z:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

EJEMPLO

$$x - 8y + 2z = -1$$
$$x - 3y + 2z = 1$$
$$2x - 11y + 3z = 2$$

Solución: obtenemos el determinante del sistema con el método de lluvia.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -11 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -8 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -11 & 3 & 2 & -11 \end{array} \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -11 & 3 \end{vmatrix} = +(1 \times -3 \times 3) + (-8 \times 2 \times 2) + (2 \times 1 \times -11)$$
$$- (2 \times -3 \times 2) - (1 \times 2 \times -11) - (-8 \times 1 \times 3) = -5$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -11 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

Ahora establecemos los determinantes para encontrar los valores de x, y y z:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -8 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -11 & 3 \end{vmatrix}$$

Aplicamos nuevamente el método de lluvia.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & -8 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -11 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -8 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -11 & 3 \end{vmatrix} = +(-1 \times -3 \times 2) + (-8 \times 2 \times 2) + (2 \times 1 \times 3)$$

$$- (2 \times -3 \times 2) - (1 \times 2 \times -11) - (2 \times 1 \times 3) = -31$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -8 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -11 & 3 \end{vmatrix} = -31$$

Entonces:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-31}{-5} = \frac{31}{5}$$

Ahora encontramos el valor de y:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Aplicamos nuevamente el método de lluvia.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = +(1 \times 1 \times 3) + (-1 \times 2 \times 2) + (2 \times 1 \times 2)$$

$$- (2 \times 1 \times 2) - (1 \times 2 \times 2) - (-1 \times 1 \times 3) = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

Entonces:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

Ahora encontramos el valor de z:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicamos nuevamente el método de lluvia.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -8 & -1 & 1 & -8 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -11 & 2 & 2 & -11 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -11 & 2 \end{vmatrix} = +(1 \times -3 \times 2) + (-8 \times 1 \times 2) + (-1 \times 1 \times -11)$$
$$- (-1 \times -3 \times 2) - (1 \times 2 \times -11) - (-8 \times 1 \times 2) = 11$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -11 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

Entonces:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{11}{-5}$$

La solución al sistema es: $x = \frac{31}{5}, y = \frac{2}{5}, z = \frac{11}{-5}$.

Ejercicios 10.2

I. Resuelva los ejercicios del 1 al 7 por el método de suma y resta, y del 8 al 13 por la regla de Cramer.

1.
$$\begin{aligned} -2x &= 2 \\ x - 3y &= 2 \\ -x + 2y + 3z &= -7 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 2y + z &= -4 \\ x - 3y + 2z &= 9 \\ -y &= 3 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 4y - z &= -13 \\ 3y + 2z &= 4 \\ 6x - 5y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 2x + z &= -5 \\ x - 3z &= -6 \\ 4x + 2y - z &= -9 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 4 \\ -x + 4y - 4z &= 1 \\ 2x - y + 5z &= -3 \end{aligned}$$

Entonces:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

Ahora encontramos el valor de z:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicamos nuevamente el método de lluvia.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -8 & -1 & 1 & -8 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -11 & 2 & 2 & -11 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -11 & 2 \end{vmatrix} = +(1 \times -3 \times 2) + (-8 \times 1 \times 2) + (-1 \times 1 \times -11)$$
$$- (-1 \times -3 \times 2) - (1 \times 2 \times -11) - (-8 \times 1 \times 2) = 11$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -11 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

Entonces:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{11}{-5}$$

La solución al sistema es: $x = \frac{31}{5}, y = \frac{2}{5}, z = \frac{11}{-5}$.

Ejercicios 10.2

I. Resuelva los ejercicios del 1 al 7 por el método de suma y resta, y del 8 al 13 por la regla de Cramer.

1.
$$\begin{aligned} -2x &= 2 \\ x - 3y &= 2 \\ -x + 2y + 3z &= -7 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 2y + z &= -4 \\ x - 3y + 2z &= 9 \\ -y &= 3 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 4y - z &= -13 \\ 3y + 2z &= 4 \\ 6x - 5y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 2x + z &= -5 \\ x - 3z &= -6 \\ 4x + 2y - z &= -9 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 4 \\ -x + 4y - 4z &= 1 \\ 2x - y + 5z &= -3 \end{aligned}$$

6. $2x + 4y + 3z = 6$
$x - 3y + 2z = -7$
$-x + 2y - z = 5$

7. $3x - 2y + 3z = 11$
$2x + 3y - 2z = -5$
$x + 4y - z = -5$

8. $2x - 3y + 3z = -15$
$3x + 2y - 5z = 19$
$5x - 4y - 2z = -2$

9. $3x - 2y - 4z = -8$
$4x + 3y - 5z = -5$
$6x - 5y + 2z = -17$

10. $5x - 3y + 2z = -1$
$2x + 4y - 3z = -9$
$4x - 2y + 5z = 13$

11. $4x - 2y + 3z = 0$
$3x - 5y - 2z = -12$
$2x + 4y - 3z = -4$

12. $-x + 2y - z = -4$
$4x + y - 2z = 1$
$x + y - z = -1$

10.3 Sistemas de ecuaciones no lineales

a. El sistema de ecuaciones puede contener una ecuación lineal y otra no lineal. Lo que se hace en este tipo de sistema es despejar alguna de las variables y sustituirla en la ecuación restante.

EJEMPLO

$$2x + y = 10$$
$$4x^2 + y^2 = 16$$

Solución: empezamos despejando una de las variables, la y de la primera ecuación.

$$2x + y = 10$$
$$y = 10 - 2x$$

Ahora sustituimos $y = 10 - 2x$ en la segunda ecuación:

$$4x^2 + y^2 = 16$$
$$4x^2 + (10 - 2x)^2 = 16$$

Aquí necesitamos desarrollar el binomio al cuadrado:

$$4x^2 + (10 - 2x)^2 = 16$$
$$4x^2 + 100 - 40x + 4x^2 = 16$$

Sumamos términos semejantes:

$$8x^2 + 100 - 40x = 16$$

Ponemos la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$$8x^2 - 40x + 100 - 16 = 0$$
$$8x^2 - 40x + 84 = 0$$

Obtenemos el máximo factor común,

$$8x^2 - 40x + 84 = 0$$

que es 4.

$$4(2x^2 - 10x + 21) = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática con la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro problema:

$$(2x^2 - 10x + 21) = 0$$

$$a = 2 \qquad b = -10 \qquad c = 21$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(2)(21)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 8(21)}}{4}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 168}}{4}$$

$$x = \frac{10 - \sqrt{12}}{4}$$

Simplificando la expresión:

$$= \frac{10 \pm \sqrt{12}}{4}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{4(3)}}{4}$$

$$= \frac{10 \pm 2\sqrt{(3)}}{4}$$

$$= \frac{2(5 \pm \sqrt{3})}{4}$$

$$= \frac{(5 \pm \sqrt{3})}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{3}}{2} \qquad x_2 = \frac{5 + \sqrt{3}}{2}$$

Ahora estos resultados los sustituimos en la ecuación lineal:

$$y = 10 - 2x$$

$$y_1 = 10 - 2\left(\frac{5 - \sqrt{3}}{2}\right) \qquad y_2 = 10 - 2\left(\frac{5 + \sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y_1 = 10 - (5 - \sqrt{3}) \qquad y_2 = 10 - (5 + \sqrt{3})$$

$$y_1 = 10 - 5 + \sqrt{3} \qquad y_2 = 10 - 5 - \sqrt{3}$$

$$y_1 = 5 + \sqrt{3} \qquad y_2 = 5 - \sqrt{3}$$

Las soluciones de nuestro sistema de ecuaciones son:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{3}}{2} \qquad y_1 = 5 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \qquad y_2 = 5 - \sqrt{3}$$

b. El sistema de ecuaciones puede contener dos ecuaciones no lineales. En tal caso se puede usar el método de sustitución o el de suma y resta, como se ilustra enseguida.

EJEMPLO

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$4y^2 - x^2 = 4$$

Solución: aplicamos el método de suma y resta.

$$\begin{array}{rr} + & x^2 + y^2 = 4 \\ & -x^2 + 4y^2 = 4 \\ \hline & 0x^2 + 5y^2 = 8 \end{array}$$

Despejamos y:

$$5y^2 = 8$$
$$y^2 = \frac{8}{5}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{8}{5}}$$

Entonces tenemos:

$$y_1 = +\sqrt{\frac{8}{5}} \qquad y_2 = -\sqrt{\frac{8}{5}}$$

Sustituimos en una de las ecuaciones iniciales:

$$x^2 + y^2 = 4$$

Para:

$$y_1 = +\sqrt{\frac{8}{5}}$$
$$x^2 + \left(\sqrt{\frac{8}{5}}\right)^2 = 4$$
$$x^2 + \frac{8}{5} = 4$$
$$x^2 = 4 - \frac{8}{5}$$
$$x^2 = \frac{20 - 8}{5}$$
$$x^2 = \frac{12}{5}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{12}{5}}$$

Obtenemos las primeras soluciones:

$$y_1 = +\sqrt{\frac{8}{5}} \qquad x_1 = +\sqrt{\frac{12}{5}}$$
$$y_3 = +\sqrt{\frac{8}{5}} \qquad x_3 = -\sqrt{\frac{12}{5}}$$

Sustituimos:

$$y_2 = -\sqrt{\frac{8}{5}}$$

en:

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + \left(-\sqrt{\frac{8}{5}}\right)^2 = 4$$

$$x^2 + \frac{8}{5} = 4$$

$$x^2 = 4 - \frac{8}{5}$$

$$x^2 = \frac{20 - 8}{5}$$

$$x^2 = \frac{12}{5}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{12}{5}}$$

Obtenemos las primeras soluciones:

$$y_2 = -\sqrt{\frac{8}{5}} \qquad x_2 = +\sqrt{\frac{12}{5}}$$

$$y_4 = -\sqrt{\frac{8}{5}} \qquad x_4 = -\sqrt{\frac{12}{5}}$$

Ahora tenemos todas las soluciones del sistema de ecuaciones original:

$$y_1 = +\sqrt{\frac{8}{5}} \qquad x_1 = +\sqrt{\frac{12}{5}} \qquad\qquad y_3 = +\sqrt{\frac{8}{5}} \qquad x_3 = +\sqrt{\frac{12}{5}}$$

$$y_2 = -\sqrt{\frac{8}{5}} \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{12}{5}} \qquad\qquad y_4 = -\sqrt{\frac{8}{5}} \qquad x_4 = -\sqrt{\frac{12}{5}}$$

Ejercicios 10.3

1. $2x - y = 6$
   $y^2 = x$
2. $x + y = 2$
   $x^2 + y^2 = 4$
3. $2x + y = 4$
   $y^2 + 4x = 0$
4. $3x - y - 8 = 0$
   $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$
5. $2x - 3y = 5$
   $2x^2 + 3y^2 = 5$
6. $x - y + 2 = 0$
   $y^2 - 8x = 0$
7. $x + y = 5$
   $x^2 + x^2 = 9$
8. $2x - y + 2 = 0$
   $y^2 = 4x$
9. $x^2 + y^2 = 4$
   $4y^2 - x^2 = 4$
10. $x^2 - y^2 = 5$
    $9x^2 + 16y^2 = 145$
11. $4x^2 + 9y^2 = 36$
    $9x^2 + 4y^2 = 36$
12. $x^2 + 4y^2 = 16$
    $x^2 + y^2 = 9$
13. $x^2 + y^2 = 16$
    $9x^2 + 16y^2 = 144$
14. $x^2 + y^2 = 2$
    $2y^2 - x^2 = 4$
15. $x^2 + y^2 = 1$
    $x^2 - y^2 = 4$

16. $x^2 + y^2 = 1$
$x^2 + y^2 = 4$

17. $4x^2 + y^2 = 25$
$2x + y = 7$

18. $2x^2 - y^2 = 1$
$3x + y = 2$

19. $x^2 + y^2 = 25$
$y = -4$

20. $x^2 + y^2 = 169$
$x = -12$

21. $y^2 = 2x$
$x = y - \frac{1}{2}$

22. $8x^2 - y^2 = 16$
$y = 2x$

23. $x^2 + 4y^2 = 32$
$x + 2y = 0$

24. $2x^2 - 3y^2 = 25$
$x + y = 0$

25. $x^2 = 2y + 3$
$x = y + 5$

26. $y^2 = -x$
$x - 2y = 5$

27. $x^2 - y^2 = 3$
$x^2 + y^2 = 5$

28. $2x^2 + y^2 = 24$
$x^2 - y^2 = -12$

29. $x^2 - 2y^2 = 1$
$x^2 + 4y^2 = 25$

30. $x^2 + y^2 = 10$
$16x^2 + y^2 = 25$

31. $2x^2 - 3y^2 = 10$
$x^2 + 4y^2 = -17$

32. $2x^2 + 3y^2 = -4$
$4x^2 + 2y^2 = 8$

33. $x^2 + y^2 = 20$
$x^2 = y$

34. $x^2 - y^2 = 2$
$y^2 = x$

35. $x^2 + y^2 = 16$
$y^2 = 4 - x$

11

FUNCIONES Y GRÁFICAS

Suponga que un hombre de 180 libras bebe cuatro cervezas, una tras otra. Se sabe que su concentración de alcohol en la sangre, CAS, primero se elevará y después disminuirá y regresará en forma paulatina hasta cero. Pero, ¿cuál es la mejor manera de describir qué tan rápido se eleva la CAS, en dónde alcanza su punto máximo y qué tan rápido disminuye de nuevo?

Si se obtienen los valores medidos de la CAS para este bebedor en particular, pueden mostrarse en una tabla, como sigue:

Tiempo (h)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
CAS(%)	0.0820	0.0668	0.0516	0.0364	0.0212	0.0060

Sin embargo, una tabla sólo puede mostrar un número limitado de valores y en realidad no proporciona la imagen global.

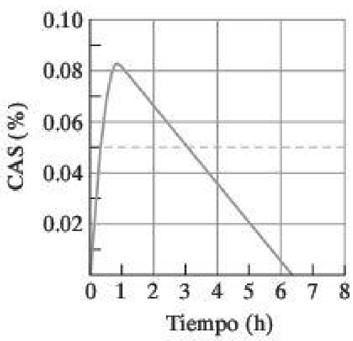
En lugar de lo anterior, podría relacionarse la CAS con el tiempo t utilizando una combinación de ecuaciones lineales y cuadráticas:

$$\text{CAS} = -0.1025t^2 + 0.1844t \qquad \text{si } t \leq 0.97$$

$$\text{CAS} = -0.0152t + 0.0972 \qquad \text{si } t \geq 0.97$$

Sin embargo, como con la tabla, después de ver las ecuaciones resulta difícil entender de inmediato lo que sucede con la CAS a lo largo del tiempo.

Quizá la mejor descripción de los cambios en la CAS a través del tiempo es una gráfica como la de la izquierda. Aquí se observa con facilidad qué es lo que sucede. La concentración de alcohol en la sangre asciende rápidamente, alcanza un máximo de 0.083% después de una hora aproximadamente, y luego desciende de manera gradual durante las siguientes cinco horas y media. Observe que por más de tres horas la CAS de este bebedor está por arriba de 0.05%, el punto en el que, por lo regular, las habilidades para conducir un vehículo empiezan a fallar. La curva variará de un bebedor a otro, pero por lo general las mujeres se ven afectadas con mayor severidad que los hombres, no sólo por la diferencia de peso, sino también a consecuencia del diferente contenido de agua en el cuerpo de ambos sexos.



La relación entre tiempo y contenido de alcohol en la sangre es un ejemplo de una función. En este capítulo se tratan a fondo las funciones y sus gráficas.

OBJETIVO

Entender lo que es una función y determinar sus dominios y valores.

11.1 Funciones

En el siglo XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz, uno de los inventores del cálculo, introdujo el término *función* en el vocabulario matemático. Se trata de uno de los conceptos más elementales de las matemáticas y es esencial para el estudio del cálculo.

Con frecuencia escuchamos en el habla cotidiana de personas educadas frases como "las tasas de interés están en función de los precios del petróleo" o "el monto de la pensión está en función de los años trabajados" o "la concentración de alcohol en la sangre después de beber cerveza es una función del tiempo". Algunas veces, tales expresiones tienen relación con las matemáticas, pero no siempre. Debemos ser más cuidadosos con el uso que hacemos de la palabra *función,* a fin de que sea útil matemáticamente; sin embargo, hay características dentro de su uso cotidiano que vale la pena destacar.

Por ejemplo, el espíritu que fundamenta las frases anteriores podría enunciarse como "las cantidades de tipo Y están en función de las cantidades de tipo X". Existen dos tipos de cantidades —aunque es posible que Y sea igual que X— y el valor de X parece *determinar* de alguna manera el valor de Y. En general, el uso no es simétrico en X y en Y. A modo de ilustración: la frase "los precios del petróleo están en función de las tasas de interés" no parece verdadera. La mayor parte de la gente no cree que ni siquiera la manipulación de las tasas de interés que lleva a cabo la Reserva Federal de Estados Unidos pueda determinar los precios del petróleo. La mayoría de los economistas recordarán aquella ocasión en que la tasa de interés federal estuvo al 6% y el precio del barril de petróleo fue de \$30; y la vez en que la tasa de interés también era de 6%, pero el precio del barril de petróleo ascendió a \$40. Una tasa de interés dada no asegura un único precio del petróleo. Por lo tanto, la cantidad de *entrada*, la tasa de interés, no *determina* la cantidad de *salida*, el precio del petróleo. Por otro lado, suponga que una persona que acaba de beber cinco cervezas se somete a una prueba de concentración de alcohol en la sangre a partir de ese momento y cada hora durante las siguientes seis. Para cada uno de los valores de tiempo $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la medición de la concentración de alcohol en la sangre producirá *exactamente un valor*.

Este último ejemplo proporciona la clave para que el uso de la palabra *función* sea preciso: *para cada valor de entrada, x (un tiempo), existe exactamente un valor de salida, y (una concentración de alcohol en la sangre).*

De hecho, con este criterio *no* es correcto decir que "las tasas de interés están en función de los precios del petróleo". Aunque podría pensarse que los altos precios del petróleo son la *causa* de las dificultades económicas, no es cierto que un valor del precio del petróleo determine una tasa de interés única. Para ver esto con mayor claridad puede visitar

```
http://www.wtrg.com/oil_graphs/oilprice1947.gif
```

y

```
http://www.goldeagle.com/editorials_00/leopold011400.html
```

A partir del primer sitio de Internet pueden determinarse dos ocasiones (bastante recientes) en las que el precio del petróleo fue el mismo. Si el segundo sitio indica que en ambas existieron diferentes tasas de interés, entonces se tiene la prueba de que un precio particular del petróleo no da lugar a una cierta tasa de interés. Tampoco es cierto que "el monto de una pensión está en función de los años trabajados". Si el valor de los "años trabajados" es 25, el valor del "monto de la pensión" aún no puede determinarse. En la mayoría de las organizaciones, el director general y el gerente de sistemas tendrán pensiones de retiro muy diferentes después de 25 años de servicio. Sin embargo, en este ejemplo podría decirse que, *de acuerdo con el perfil del puesto*, el monto de la pensión está en función de los años trabajados.

Si se invierten \$100 a una tasa de interés simple del 6%, entonces el interés ganado I es una función de la cantidad de tiempo t que el dinero permanece invertido. Estas cantidades están relacionadas por la fórmula:

$$I = 100(0.06)t \tag{1}$$

Aquí, para cada valor de t existe exactamente un valor de I dado por la ecuación (1). En una situación como ésta, con frecuencia se escribe $I(t) = 100(0.06)t$ para reforzar la idea de que el valor de I está determinado por el valor de t. Algunas veces se escribe $I = I(t)$ para expresar que I es una función de t aun si no se conoce una fórmula que lo especifique. La fórmula (1) asigna la salida 3 a la entrada $\frac{1}{2}$ y la salida 12 a la entrada 2. Puede pensarse en la fórmula (1) como la definición de una *regla*: multiplicar t por 100(0.06). La regla asigna a cada número de entrada t exactamente un número de salida I, el cual se simboliza mediante la siguiente notación con flechas:

$$t \mapsto I \quad \text{o} \quad t \mapsto 100(0.06)t$$

Una fórmula proporciona el modo de describir una regla para cubrir potencialmente un número infinito de casos, pero si existe sólo una cantidad finita de valores para la variable de entrada, como en el caso al inicio del capítulo, entonces la *regla* obtenida a partir de las observaciones registradas en la tabla puede no ser parte de ninguna *fórmula* reconocible. A continuación, se usará la palabra *regla* en lugar de *fórmula* para poder incluir esta útil generalización.

DEFINICIÓN

Una ***función*** es una regla que asigna a cada número de entrada exactamente un número de salida. Al conjunto de números de entrada para los cuales se aplica la regla se le llama ***dominio*** de la función. Al conjunto de todos los números posibles de salida se le llama ***rango*** (o ***codominio***).

Para la función del interés definida por la ecuación (1), el número de entrada t no puede ser negativo, puesto que en este ejemplo el tiempo negativo no tiene sentido. Así, el dominio consiste en todos los números no negativos (esto es, todo $t \geq 0$, donde la variable proporciona el tiempo transcurrido desde el momento en que se hizo la inversión).

Hasta aquí se ha usado el término *función* en un sentido restringido porque, en general, las entradas o salidas no tienen por qué ser números. Por ejemplo, una lista de estados y sus capitales asigna a cada estado su capital (exactamente una salida), de modo que hay una función implícita. Sin embargo, por el momento sólo se considerarán las funciones cuyos dominios y rangos consistan en números reales.

Una variable que representa los números de entrada para una función se denomina **variable independiente**. Una variable que representa los números de salida se denomina **variable dependiente**, porque su valor *depende* del valor de *la variable independiente*. Se dice que la variable dependiente es una *función de la variable independiente*. Esto es, la salida es una función de la entrada. Así, para la fórmula de interés $I = 100(0.06)t$, la variable independiente es t, la variable dependiente es I, e I es una función de t.

Como otro ejemplo, la ecuación:

$$y = x + 2 \tag{2}$$

define a y como una función de x. La ecuación proporciona la regla "sumar 2 a x". Esta regla asigna a cada entrada x exactamente una salida $x + 2$, que es y. Si $x = 1$, entonces $y = 3$; si $x = -4$, entonces $y = -2$. La variable independiente es x y la variable dependiente es y.

ADVERTENCIA

En $y^2 = x$, x y y están relacionadas, pero esta relación no es una función de x.

No todas las ecuaciones en x y y definen a y como una función de x. Por ejemplo, sea $y^2 = x$. Si x es 9, entonces $y^2 = 9$, de modo que $y = \pm 3$. Por lo tanto, para la entrada 9 se asigna no uno, sino *dos* números de salida, 3 y -3. Esto contradice el concepto de función, de modo que y **no** es una función de x.

Por otra parte, algunas ecuaciones con dos variables definen a cualquiera de las variables como una función de la otra variable. Por ejemplo, si $y = 2x$, entonces para cada entrada x existe exactamente una salida, $2x$. Así que y es una función de x. Sin embargo, al despejar x de la ecuación se obtiene $x = y/2$. Para cada entrada y existe exactamente una salida $y/2$. En consecuencia, x es una función de y.

Por lo general, las letras f, g, h, F, G, etcétera, se usan para representar reglas de funciones. Por ejemplo, la ecuación (2), $y = x + 2$, define a y como una función de x, donde la regla es "sumar 2 a la entrada". Suponga que se elige f para representar esta regla, entonces se dice que f es la función. Para indicar que f asigna a la entrada 1 la salida 3, se escribe $f(1) = 3$, que se lee "f de 1 es igual a 3". De manera similar, $f(-4) = -2$. En general, si x es cualquier entrada, se tiene la notación siguiente:

$f(x)$ es un *número de salida*.

> $f(x)$, que se lee "f de x", representa el número de salida en el rango de f que corresponde al número de entrada x en el dominio de f.
>
> entrada
> $$\downarrow$$
> $$\underbrace{f(x)}$$
> $$\uparrow$$
> salida

Así, la salida $f(x)$ es lo mismo que y. Pero como $y = x + 2$, puede escribirse $y = f(x) = x + 2$ o simplemente,

$$f(x) = x + 2$$

Por ejemplo, para encontrar $f(3)$, que es la salida correspondiente a la entrada 3, se reemplaza con 3 cada x en $f(x) = x + 2$:

$$f(3) = 3 + 2 = 5$$

Del mismo modo,

$$f(8) = 8 + 2 = 10$$

$$f(-4) = -4 + 2 = -2$$

ADVERTENCIA

$f(x)$ **no** significa f por x, $f(x)$ si no la salida que corresponde a la entrada x.

Los números de salida como $f(-4)$ se llaman **valores de la función**. Tenga en mente que dichos valores están en el rango de f.

La notación funcional es muy utilizada en cálculo.

Con mucha frecuencia, las funciones se definen por medio de la "notación de funciones". Por ejemplo, la ecuación $g(x) = x^3 + x^2$, define a la función g que asigna a cada número de entrada x el número de salida $x^3 + x^2$:

$$g: x \mapsto x^3 + x^2$$

En otras palabras, g suma el cubo y el cuadrado de un número de entrada. Algunos valores de la función son:

$$g(2) = 2^3 + 2^2 = 12$$
$$g(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$$
$$g(t) = t^3 + t^2$$
$$g(x + 1) = (x + 1)^3 + (x + 1)^2$$

La idea de *reemplazo* es muy importante en la determinación de los valores funcionales.

Observe que $g(x + 1)$ se encontró al reemplazar cada x en $x^3 + x^2$ por la entrada $x + 1$.

Cuando se haga referencia a la función g definida por $g(x) = x^3 + x^2$, se puede decir con toda libertad que la ecuación es una función. Así, se habla de "la función $g(x) = x^3 + x^2$" y, de manera análoga, "la función $y = x + 2$".

Seamos más específicos acerca del dominio de una función. A menos que se establezca otra cosa, el dominio consiste en todos los números reales para los cuales la regla de la función tenga sentido, esto es, el conjunto de todos los números reales para los cuales la regla proporciona valores de la función que también son números reales.

Por ejemplo, suponga que:

$$h(x) = \frac{1}{x - 6}$$

Aquí puede usarse cualquier número real para x excepto 6, porque el denominador es 0 cuando x es 6. Así que se entiende que el dominio de h consiste en todos los números reales excepto 6.

Igualdad de funciones

> Decir que dos funciones f y g son iguales, denotado por $f = g$, es igual a decir que:
>
> **1.** El dominio de f es igual al dominio de g.
>
> **2.** Para toda x en el dominio de f y g, $f(x) = g(x)$.

El requisito 1 dice que un número x está en el dominio de f si y sólo si está en el dominio de g. Así que si se tiene que $f(x) = x^2$, sin mención explícita del dominio, y $g(x) = x^2$ para $x \geq 0$, entonces $f \neq g$. Aquí, el dominio de f es toda la recta real $(-\infty, \infty)$ y el dominio de g es $[0, \infty)$. Por otro lado, si se tiene $f(x) = (x + 1)^2$ y $g(x) = x^2 + 2x + 1$, entonces se entiende que tanto para f como para g el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el criterio para decidir si $f = g$ consiste en saber si, para cada número real x, se tiene que $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. De hecho, los antiguos libros de texto se refieren a los enunciados del tipo $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ como "identidades", para indicar que son ciertos para cualquier valor admisible de la variable, y para distinguirlos de los enunciados del tipo $(x + 1)^2 = 0$, que son verdaderos sólo para algunos valores de x.

Dadas las funciones f y g, se tiene que $f \neq g$ *ya sea porque* el dominio de f es diferente del dominio de g *o porque* existe alguna x para la cual $f(x) \neq g(x)$.

EJEMPLO 1 Determinación de la igualdad de funciones

Determine cuáles de las siguientes funciones son iguales.

a. $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)}$

b. $g(x) = x + 2$

c. $h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

d. $k(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Solución: El dominio de f es el conjunto de todos los números reales diferentes de 1, mientras que el de g es el conjunto de todos los números reales, aquí se sigue la convención de que el dominio es el conjunto de todos los números reales para los cuales la regla tiene sentido. Se tendrá que decir más acerca de funciones como h y k, que se definen por *casos* en el ejemplo 4 de la sección 11.2. Aquí se observa que tanto el dominio de h como el de k es $(-\infty, \infty)$, puesto que para ambos existe una regla que tiene sentido para todos los números reales. Los dominios de g, h y k son iguales entre sí, pero el de f es diferente. Entonces, por el requerimiento 1 para la igualdad de funciones $f \neq g$, $f \neq h$ y $f \neq k$. Por definición, $g(x) = h(x) = k(x)$ para toda $x \neq 1$, de manera que la igualdad de g, h y k depende de sus valores en 1. Como $g(1) = 3$, $h(1) = 0$ y $k(1) = 3$, se concluye que $g = k$ y que $g \neq h$ (y que $h \neq k$). Aunque este ejemplo pudiera parecer artificial, es representativo de las situaciones que surgen frecuentemente en el cálculo.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

DETERMINACIÓN DE DOMINIOS

El área de un círculo depende de la longitud de su radio.

a. Escriba una función $a(r)$ para el área de un círculo cuando la longitud del radio es r.

b. ¿Cuál es el dominio de esta función fuera de contexto?

c. ¿Cuál es el dominio de esta función en el contexto dado?

EJEMPLO 2 Determinación de dominios

Encuentre el dominio de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$

Solución: No es posible dividir entre cero, así que deben encontrarse todos los valores de x que hacen que el denominador sea cero. Éstos *no pueden* ser números de entrada. Así que se iguala el denominador a cero y se resuelve para x:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 && \text{(ecuación cuadrática)} \\ (x-2)(x+1) &= 0 && \text{(al factorizar)} \\ x &= 2, -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el dominio de f consiste en todos los números reales *excepto* 2 y -1.

b. $g(t) = \sqrt{2t - 1}$

Solución: $\sqrt{2t-1}$ es un número real si $2t - 1$ es mayor o igual que cero. Si $2t - 1$ es negativo, entonces $\sqrt{2t-1}$ no es un número real (es un *número imaginario*).

Como los valores de la función deben ser números reales, por lo menos hasta este momento, debe suponerse que:

$$
\begin{aligned}
2t - 1 &\geq 0 \\
2t &\geq 1 && \text{(al sumar 1 en ambos lados)} \\
t &\geq \frac{1}{2} && \text{(al dividir ambos lados entre 2)}
\end{aligned}
$$

Así, el dominio es el intervalo $[\frac{1}{2}, \infty)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

DETERMINACIÓN DEL DOMINIO Y DE LOS VALORES DE LA FUNCIÓN

El tiempo necesario para recorrer una cierta distancia depende de la velocidad a la cual se haga el recorrido.

a. Escriba una función $t(r)$ para el tiempo si la distancia a recorrer es 300 millas y la velocidad es r.

b. ¿Cuál es el dominio de esta función fuera de contexto?

c. ¿Cuál es el dominio de esta función en el contexto dado?

d. Encuentre $t(x)$, $t\left(\frac{x}{2}\right)$ y $t\left(\frac{x}{4}\right)$.

e. ¿Qué le pasa al tiempo si la velocidad se reduce (divide) por una constante c? Describa esta situación con el uso de una ecuación.

EJEMPLO 3 Determinación del dominio y de los valores funcionales

Sea $g(x) = 3x^2 - x + 5$. Puede utilizarse cualquier número real como x, de modo que el dominio de g son todos los números reales.

a. *Encuentre* $g(z)$.

Solución: Al reemplazar cada x por z en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene:

$$g(z) = 3(z)^2 - z + 5 = 3z^2 - z + 5$$

b. *Encuentre* $g(r^2)$.

Solución: Al reemplazar cada x por r^2 en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene:

$$g(r^2) = 3(r^2)^2 - r^2 + 5 = 3r^4 - r^2 + 5$$

c. *Encuentre* $g(x + h)$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
g(x+h) &= 3(x+h)^2 - (x+h) + 5 \\
&= 3(x^2 + 2hx + h^2) - x - h + 5 \\
&= 3x^2 + 6hx + 3h^2 - x - h + 5
\end{aligned}
$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31(*a*)

ADVERTENCIA

No confunda la notación. En el ejemplo 3(c) se encontró $g(x + h)$ al reemplazar cada x en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ por la entrada $x + h$. Pero $g(x + h)$, $g(x) + h$ y $g(x) + g(h)$ son cantidades totalmente distintas.

EJEMPLO 4 Determinación de un cociente de diferencia

Si $f(x) = x^2$, *determine* $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Solución: La expresión $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se conoce como un **cociente de diferencia**. Aquí el numerador es una diferencia de valores de la función. Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} \\
&= \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h
\end{aligned}
$$

El cociente de diferencia de una función es un concepto importante para el cálculo.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35

En algunos casos, el dominio de una función está restringido por razones físicas o económicas. Por ejemplo, la función de interés estudiada con anterioridad, $I = 100(0.06)t$, tiene $t \geq 0$ porque t representa el tiempo. El ejemplo 5 ilustra algo similar.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

FUNCIÓN DE DEMANDA

Suponga que la demanda semanal de pizzas en un restaurante es $p = 26 - \frac{q}{40}$.

a. Si el precio actual es de $18.50 por pizza, ¿cuántas se venden cada semana?

b. Si se venden 200 pizzas semanales, ¿cuál es el precio actual?

c. Si el propietario desea duplicar el número de pizzas vendidas cada semana (a 400), ¿cuál debe ser el precio?

EJEMPLO 5 Función de demanda

Suponga que la ecuación $p = 100/q$ describe la relación entre el precio por unidad p de cierto producto, y el número de unidades q que los consumidores comprarán (demanda) por semana a ese precio. Esta ecuación se llama *ecuación de demanda* para el producto. Si q es un número de entrada, entonces para cada valor de q se asigna exactamente un número de salida p:

$$q \mapsto \frac{100}{q} = p$$

Por ejemplo,

$$20 \mapsto \frac{100}{20} = 5$$

esto es, cuando q es 20, entonces p es 5. Así, el precio p es una función de la cantidad demandada, q. Esta función se llama **función de demanda**. La variable independiente es q y la variable dependiente es p. Como q no puede ser 0 (la división entre 0 no está definida) y no puede ser negativa (q representa una cantidad), el dominio consiste en todos los valores de q tales que $q \geq 0$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 43

Se ha visto que una función es esencialmente una *correspondencia* en la que a cada número de entrada en el dominio, se asigna un único número de salida en el rango. En la figura 11.1 se muestran por medio de flechas algunos ejemplos de asignaciones para la correspondencia dada por $f(x) = x^2$. El ejemplo siguiente ilustra una correspondencia funcional que no está dada por medio de una fórmula algebraica.

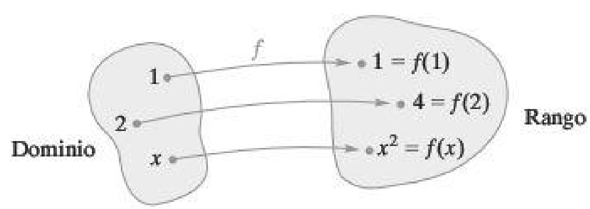


FIGURA 11.1 Correspondencia funcional para $f(x) = x^2$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

PROGRAMA DE OFERTA

p **Precio por unidad en dólares**	q **Cantidad ofrecida por semana**
500	11
600	14
700	17
800	20

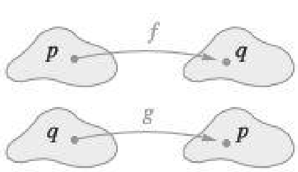


FIGURA 11.2 Programa de oferta y funciones de oferta.

EJEMPLO 6 Programa de la oferta

La tabla de la figura 11.2 es un *programa de oferta*. Indica una correspondencia entre el precio p de cierto producto y la cantidad q que los fabricantes surtirán por semana a ese precio. A cada precio le corresponde exactamente una cantidad y viceversa.

Si p es la variable independiente, entonces q es una función de p, es decir $q = f(p)$, y

$$f(500) = 11 \quad f(600) = 14 \quad f(700) = 17 \quad \text{y} \quad f(800) = 20$$

Observe que cuando el precio por unidad se incrementa, los fabricantes están dispuestos a surtir más unidades por semana.

Por otra parte, si q es la variable independiente, entonces p es una función de q, es decir $p = g(q)$, y

$$g(11) = 500 \quad g(14) = 600 \quad g(17) = 700 \quad \text{y} \quad g(20) = 800$$

Se habla de f y g como **funciones de oferta**.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 53

TECNOLOGÍA

Los valores de una función pueden calcularse fácilmente con una calculadora graficadora. Por ejemplo, suponga que:

$$f(x) = 17x^4 - 13x^3 + 7$$

y que se quiere encontrar $f(0.7), f(-2.31)$ y $f(10)$. Con una calculadora TI-83 Plus, primero se introduce la función como Y_1:

$$Y_1 = 17X^\wedge 4 - 13X^\wedge 3 + 7$$

Después se presiona la tecla "Table" y de manera sucesiva se introducen los valores de x .7, -2.31 y 10. Los resultados se muestran en la figura 11.3. Debe notarse que existen otros métodos para evaluar funciones por medio de la TI-83 Plus.

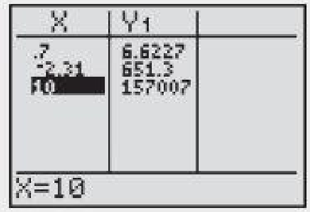


FIGURA 11.3 Tabla de valores para la función para $f(x) = 17x^4 - 13x^3 + 7$.

Ejercicios 11.1

En los problemas 1 a 4, determine si las funciones dadas son iguales.

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = x$

2. $G(x) = (\sqrt{x+1})^2$; $H(x) = x + 1$

*3. $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$; $k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$; $g(x) = x - 1$

En los problemas 5 a 16, obtenga el dominio de cada función.

5. $f(x) = \dfrac{8}{x}$

6. $g(x) = \dfrac{x}{5}$

*7. $h(x) = \sqrt{x - 3}$

8. $K(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z - 1}}$

9. $f(z) = 3z^2 + 2z - 4$

10. $H(x) = \dfrac{x}{x + 8}$

11. $f(x) = \dfrac{9x - 9}{2x + 7}$

12. $g(x) = \sqrt{4x + 3}$

13. $g(y) = \dfrac{4}{y^2 - 4y + 4}$

14. $\phi(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 + x - 6}$

15. $h(s) = \dfrac{4 - s^2}{2s^2 - 7s - 4}$

16. $G(r) = \dfrac{2}{r^2 + 1}$

Determine los valores de la función para cada una de las funciones de los problemas 17 a 28.

17. $f(x) = 2x + 1$; $f(0)$, $f(3)$, $f(-4)$

18. $H(s) = 5s^2 - 3$; $H(4)$, $H(\sqrt{2})$, $H\left(\dfrac{2}{3}\right)$

19. $G(x) = 2 - x^2$; $G(-8)$, $G(u)$, $G(u^2)$

20. $F(x) = -5x$; $F(s)$, $F(t + 1)$, $F(x + 3)$

21. $\gamma(u) = 2u^2 - u$; $\gamma(-2)$, $\gamma(2v)$, $\gamma(x + a)$

22. $h(v) = \dfrac{1}{\sqrt{v}}$; $h(16)$, $h\left(\dfrac{1}{4}\right)$, $h(1 - x)$

23. $f(x) = x^2 + 2x + 1$; $f(1)$, $f(-1)$, $f(x + h)$

24. $H(x) = (x + 4)^2$; $H(0)$, $H(2)$, $H(t - 4)$

25. $k(x) = \dfrac{x - 7}{x^2 + 2}$; $k(5)$, $k(3x)$, $k(x + h)$

26. $k(x) = \sqrt{x - 3}$; $k(4)$, $k(3)$, $k(x + 1) - k(x)$

27. $f(x) = x^{4/3}$; $f(0)$, $f(64)$, $f\left(\dfrac{1}{8}\right)$

28. $g(x) = x^{2/5}$; $g(32)$, $g(-64)$, $g(t^{10})$

En los problemas 29 a 36 encuentre (a) $f(x+h)$ y (b) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$; simplifique sus respuestas.

29. $f(x) = 4x - 5$

30. $f(x) = \dfrac{x}{2}$

*31. $f(x) = x^2 + 2x$

32. $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

33. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

34. $f(x) = x^3$

*35. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

36. $f(x) = \dfrac{x + 8}{x}$

37. Si $f(x) = 5x + 3$, encuentre $\dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h}$.

38. Si $f(x) = 2x^2 - x + 1$, encuentre $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

En los problemas 39 a 42, ¿es y *una función de* x*? ¿Es* x *una función de* y*?*

39. $9y - 3x - 4 = 0$

40. $x^2 + y = 0$

41. $y = 7x^2$

42. $x^2 + y^2 = 1$

***43.** La fórmula para el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. ¿Es el área una función del radio?

44. Suponga que $f(b) = a^2b^3 + a^3b^2$. (a) Encuentre $f(a)$. (b) Encuentre $f(ab)$.

45. Valor de un negocio Un negocio cuyo capital original es de \$25 000, tiene ingresos y gastos semanales de \$6500 y \$4800, respectivamente. Si se conservan todas las utilidades, exprese el valor V del negocio al final de t semanas, como una función de t.

46. Depreciación Si una máquina de \$30 000 se deprecia 2% de su valor original cada año, determine una función f que exprese el valor V de la máquina después que han transcurrido t años.

47. Función de utilidad Cuando se venden q unidades de cierto producto (q es no negativa), la utilidad P está dada por la ecuación $P = 1.25q$. ¿Es P una función de q? ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

48. Función de demanda Suponga que la función de demanda anual para que cierto actor protagonice una película es $p = \dfrac{1\,200\,000}{q}$, donde q es el número de películas que protagoniza durante el año. Si el artista actualmente cobra \$600 000 por película, ¿cuántas protagoniza cada año? Si quiere protagonizar cuatro cintas por año, ¿cuánto cobrará por esto?

49. Función de oferta Suponga que la función de oferta semanal por una libra de café, la mezcla propia de un expendio local, es $p = \frac{q}{48}$, donde q es el número de libras de café que se ponen en venta cada semana. ¿Cuántas libras semanales deben ofrecerse si el precio es de \$8.39 por libra? ¿Cuántas libras a la semana deben ofrecerse para su venta si el precio de cada una es de \$19.49? ¿Cómo cambia la oferta conforme el precio se incrementa?

50. Altas de un hospital Una compañía de seguros examinó los registros de un grupo de individuos hospitalizados por una enfermedad en particular. Se encontró que la proporción total de pacientes dados de alta al final de t días de hospitalización está dada por:

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300+t}\right)^3$$

Evalúe (a) $f(0)$, (b) $f(100)$ y (c) $f(900)$. (d) ¿Al cabo de cuántos días se habrá dado de alta a la mitad ($1/2 = 0.500$) del grupo?

51. Psicología Se realizó un experimento para analizar la respuesta humana a las descargas eléctricas.[1] Los sujetos recibieron una descarga de cierta intensidad se les pidió que le asignaran una magnitud de 10 y la llamaron estímulo estándar. Después se les aplicaron otras descargas (estímulos) de varias intensidades. Para cada una de éstas, la respuesta R consistía en un número que indicaba la magnitud percibida de la descarga en relación con la del estímulo estándar. Se encontró que R era una función de la intensidad I de la descarga (I en microamperes) y se estimó mediante:

$$R = f(I) = \frac{I^{4/3}}{2500} \qquad 500 \le I \le 3500$$

Evalúe (a) $f(1000)$ y (b) $f(2000)$. (c) Suponga que I_0 y $2I_0$ están en el dominio de f. Exprese $f(2I_0)$ en términos de $f(I_0)$. ¿Qué efecto sobre la respuesta tiene el hecho de duplicar la intensidad?

52. Psicología En un experimento de aprendizaje,[2] la probabilidad de una respuesta correcta como función del número n de intentos tiene la forma:

$$P(n) = 1 - \frac{1}{2}(1-c)^{n-1} \qquad n \ge 1$$

donde el valor estimado de c es 0.344. Con el uso de este valor de c, determine $P(1)$ y $P(2)$.

***53. Programa de demanda** La tabla siguiente es un *programa de demanda* y proporciona una correspondencia entre el precio p de un producto y la cantidad q que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) a ese precio. (a) Si $p = f(q)$, haga una lista con los números en el dominio de f. Encuentre $f(2900)$ y $f(3000)$. (b) Si $q = g(p)$, liste los números en el dominio de g. Encuentre $g(10)$ y $g(17)$.

Precio por unidad, p	Cantidad de demanda por semana, q
\$10	3000
12	2900
17	2300
20	2000

En los problemas 54 a 57 utilice su calculadora para determinar los valores funcionales indicados para la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

54. $f(x) = 2.03x^3 - 5.27x^2 - 13.71$; (a) $f(1.73)$, (b) $f(-5.78)$, (c) $f(\sqrt{2})$

55. $f(x) = \dfrac{14.7x^2 - 3.95x - 15.76}{24.3 - x^3}$; (a) $f(4)$, (b) $f(-17/4)$, (c) $f(\pi)$

56. $f(x) = (20.3 - 3.2x)(2.25x^2 - 7.1x - 16)^4$; (a) $f(0.3)$, (b) $f(-0.02)$, (c) $f(1.9)$

57. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}x^2 + 7.31(x+1)}{5.03}}$; (a) $f(12.35)$, (b) $f(-123)$, (c) $f(0)$

11.2 Funciones especiales

OBJETIVO

Introducir los conceptos de función constante, función polinomial, función racional, función definida por partes, función valor absoluto y notación factorial.

En esta sección se verán funciones que tienen formas y representaciones especiales. Se iniciará con la *función constante*, tal vez el tipo más sencillo que existe:

EJEMPLO 1 Función constante

Sea $h(x) = 2$. El dominio de h consiste en todos los números reales. Todos los valores funcionales son 2. Por ejemplo,

$$h(10) = 2 \quad h(-387) = 2 \quad h(x+3) = 2$$

Se llama a h una *función constante*, puesto que todos los valores de la función son iguales. En forma más general, se tiene esta definición:

> Una función de la forma $h(x) = c$, donde c es una *constante*, se llama **función constante**.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

FUNCIONES CONSTANTES

Suponga que las primas mensuales de un seguro médico para un individuo son \$125.00.

a. Escriba las primas mensuales del seguro médico como una función del número de visitas que el individuo hace al doctor.

b. ¿Cómo cambian las primas del seguro médico conforme aumentan las visitas al doctor?

c. ¿Qué tipo de función es ésta?

[1]Adaptado de H. Babkoff, "Magnitude Estimation of Short Electrocutaneous Pulses", *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), 39-49.

[2]D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York; Academic Press, 1983).

Una función constante pertenece a una clase más amplia de funciones llamadas *funciones polinomiales*. En general, una función de la forma

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde n es un entero no negativo y $c_n, c_{n-1}, \cdots, c_0$ son constantes en las que $c_n \neq 0$, se llama **función polinomial** (en x). El número n se llama **grado** del polinomio, y c_n es el **coeficiente principal**. Así,

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 9$$

Cada término de una función polinomial es, o bien una constante, o una constante por una potencia entera positiva de x.

es una función polinomial de grado 2 con coeficiente principal 3. Del mismo modo, $g(x) = 4 - 2x$ tiene grado 1 y coeficiente principal -2. Las funciones polinomiales de grado 1 o 2 son llamadas **funciones lineales** o **cuadráticas**, respectivamente. Por ejemplo, $g(x) = 4 - 2x$ es lineal y $f(x) = 3x^2 - 8x + 9$ es cuadrática. Observe que una función constante distinta de cero, como $f(x) = 5$ [la cual puede escribirse como $f(x) = 5x^0$], es una función polinomial de grado cero. La función constante $f(x) = 0$ también se considera una función polinomial, pero no tiene ningún grado asignado. El dominio de cualquier función polinomial consiste en todos los números reales.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

FUNCIONES POLINOMIALES

La función $d(t) = 3t^2$, para t ( ) 0, representa la distancia en metros que un automóvil puede recorrer en t segundos cuando tiene una aceleración constante de 6 m por segundo.

a. ¿Qué tipo de función es ésta?
b. ¿Cuál es el grado?
c. ¿Cuál es su coeficiente principal?

EJEMPLO 2 Funciones polinomiales

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$ es una función polinomial de grado 3 con coeficiente principal 1.

b. $g(x) = \dfrac{2x}{3}$ es una función lineal con coeficiente principal $\dfrac{2}{3}$.

c. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ *no* es una función polinomial. Como $f(x) = 2x^{-3}$ y el exponente para x no es un entero no negativo, esta función no tiene la forma propia de las polinomiales. En forma similar, $g(x) = \sqrt{x}$ no es función polinomial porque $g(x) = x^{1/2}$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

Una función que es un cociente de funciones polinomiales se llama **función racional**.

EJEMPLO 3 Funciones racionales

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x + 5}$ es una función racional, puesto que el numerador y el denominador son funciones polinomiales. Observe que esta función racional no está definida para $x = -5$.

Toda función polinomial es una función racional.

b. $g(x) = 2x + 3$ es una función racional porque $2x + 3 = \dfrac{2x + 3}{1}$. De hecho, toda función polinomial también es una función racional.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES

Para reducir el inventario, una tienda departamental cobra tres precios. Si un cliente compra de 0 a 5 pares de medias, el precio es de \$3.50 por par. Si compra de 6 a 10 pares, el precio es de \$3.00 por par. Si compra más de 10 pares, el precio es de \$2.75 por par. Escriba una función definida por partes para representar el costo de compra de n pares de medias.

Algunas veces es necesaria más de una expresión para definir una función, como lo muestra el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Funciones definidas por partes

Sea:

$$F(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq s < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq s \leq 2 \\ s - 3 & \text{si } 2 < s \leq 8 \end{cases}$$

Ésta se llama **función definida por partes**, puesto que su regla está dada por más de una expresión. Aquí s es la variable independiente y el dominio F es toda s tal que $-1 \leq s \leq 8$. El valor de s determina cuál expresión debe usarse.

Determine $F(0)$: como $-1 \leq 0 < 1$, se tiene $F(0) = 1$.

Determine $F(2)$: como $1 \leq 2 \leq 2$, se tiene $F(2) = 0$.

Determine $F(7)$: como $2 < 7 \leq 8$, se sustituye 7 por la s en $s - 3$.

$$F(7) = 7 - 3 = 4$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

TECNOLOGÍA

Para ilustrar cómo introducir una función definida por partes en una calculadora TI-83 Plus, la figura 11.4 muestra una secuencia de pasos para la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 10 \\ -x & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

Como $|x|$ proporciona un número real único para cada número real x, el valor absoluto, $|-|$, es una función.

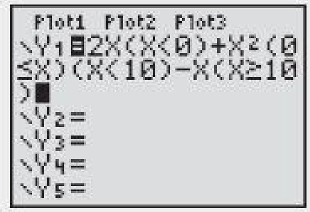


FIGURA 11.4 Introducción de una función definida por partes.

EJEMPLO 5 Función valor absoluto

La función $|-|(x) = |x|$ se denomina *función valor absoluto*. Recuerde que el **valor absoluto** de un número real x se denota por $|x|$ y se define por

La función valor absoluto puede considerarse una función definida por partes.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, el dominio de $|-|$ son todos los números reales. Algunos valores de esta función son:

$$|16| = 16$$

$$|-\tfrac{4}{3}| = -(-\tfrac{4}{3}) = \tfrac{4}{3}$$

$$|0| = 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

En los ejemplos siguientes se utiliza la *notación factorial*.

El símbolo $r!$, donde r es un entero positivo, se lee "***r* factorial**". Representa el producto de los primeros r enteros positivos:

$$r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r$$

También se define:

$$0! = 1$$

Para cada entero no negativo n, $(-)!(n) = n!$ determina un número único, de manera que puede decirse que $(-)!$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros no negativos.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

FACTORIALES

Deben colocarse siete libros diferentes en una repisa. ¿De cuántas formas pueden acomodarse? Represente la pregunta como un problema de factoriales y dé la solución.

EJEMPLO 6 Factoriales

a. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

b. $3!(6-5)! = 3! \cdot 1! = (3 \cdot 2 \cdot 1)(1) = (6)(1) = 6$

c. $\dfrac{4!}{0!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = \dfrac{24}{1} = 24$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

EJEMPLO 7 Genética

Los factoriales aparecen con frecuencia en la teoría de probabilidad.

Suponga que se reproducen dos conejillos de indias de color negro, y tienen cinco crías. Bajo ciertas condiciones puede mostrarse que la probabilidad P de que exactamente r de las crías sean de color café y las otras negras, es una función de r, por ejemplo, $P = P(r)$, donde:

$$P(r) = \frac{5!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{5-r}}{r!(5-r)!} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, 5$$

La letra P en $P = P(r)$ se usa de dos formas. En el lado derecho, P representa la regla de la función. En el izquierdo representa la variable dependiente. El dominio de P consiste en todos los enteros desde 0 hasta 5, inclusive. Determine la probabilidad de que exactamente tres conejillos de Indias sean de color café.

Solución: Para encontrar $P(3)$, se tiene:

$$P(3) = \frac{5!\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2}{3!2!} = \frac{120\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{9}{16}\right)}{6(2)} = \frac{45}{512}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35

Ejercicios 11.2

En los problemas 1 a 4 determine si la función dada es una función polinomial.

1. $f(x) = x^2 - x^4 + 4$ **2.** $f(x) = \dfrac{x^3 + 7x - 3}{3}$

*3. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$ **4.** $g(x) = 3^{-2}x^2$

En los problemas 5 a 8 determine si la función dada es una función racional.

*5. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 + 4}$ **6.** $f(x) = \dfrac{3}{2x + 1}$

7. $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 5 \\ 4 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$ **8.** $g(x) = 4x^{-4}$

Determine el dominio de cada función de los problemas 9 a 12.

9. $h(z) = 19$ **10.** $f(x) = \sqrt{\pi}$

11. $f(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } x > 1 \\ 4 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ **12.** $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 3 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x < 3 \end{cases}$

Establezca (a) el grado y (b) el coeficiente principal de la función polinomial dada en los problemas 13 a 16.

13. $F(x) = 7x^3 - 2x^2 + 6$ **14.** $g(x) = 7x$

15. $f(x) = \dfrac{1}{\pi} - 3x^5 + 2x^6 + x^7$

16. $f(x) = 9$

Evalúe las funciones para cada caso de los problemas 17 a 22.

17. $f(x) = 8$; $f(2)$, $f(t + 8)$, $f(-\sqrt{17})$

18. $g(x) = |x - 3|$; $g(10)$, $g(3)$, $g(-3)$

*19. $F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$;

$F(10)$, $F(-\sqrt{3})$, $F(0)$, $F\left(-\dfrac{18}{5}\right)$

20. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \geq 0 \\ 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$;

$f(3)$, $f(-4)$, $f(0)$

*21. $G(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 3 \\ 3 - x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$;

$G(8)$, $G(3)$, $G(-1)$, $G(1)$

22. $F(\theta) = \begin{cases} 2\theta - 5 & \text{si } \theta < 2 \\ \theta^2 - 3\theta + 1 & \text{si } \theta > 2 \end{cases}$;

$F(3)$, $F(-3)$, $F(2)$

En los problemas 23 a 28 determine el valor de cada expresión.

23. $6!$ **24.** $0!$ **25.** $(4-2)!$

26. $6!\ 2!$ *27. $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ **28.** $\dfrac{8!}{5!(8-5)!}$

29. Viaje en tren Un boleto de viaje redondo en tren a la ciudad cuesta \$4.50. Escriba su costo como función del ingreso del pasajero. ¿Qué tipo de función es?

30. Geometría Un prisma rectangular tiene una longitud tres veces mayor que su ancho, y altura una unidad menor que el doble del ancho. Escriba el volumen del prisma rectangular como una función del ancho. ¿Qué clase de función es?

31. Función de costo En la fabricación de un componente para una máquina, el costo inicial de un dado es de \$850, y todos los costos adicionales son de \$3 por unidad producida. (a) Exprese el costo total C (en dólares) como una función lineal del número q de unidades producidas. (b) ¿Cuántas unidades se producen si el costo total es de \$1600?

32. Inversión Se invierte un capital de P dólares a una tasa de interés simple anual r durante t años. Exprese la cantidad total acumulada del capital y del interés como una función de t. ¿Su resultado es una función lineal de t?

33. Ventas Para estimular las ventas a grupos grandes, un teatro cobra dos precios. Si su grupo es menor de 12, cada boleto cuesta \$9.50. Si su grupo es de 12 o más, cada boleto cuesta \$8.75. Escriba una función definida por partes para representar el costo de comprar n boletos.

34. Factoriales El grupo que cursa matemáticas financieras ha elegido a un comité integrado por cuatro personas, para quejarse con el magisterio por la inclusión de la notación factorial en el curso. Decidieron que, para ser más eficaces, los miembros se harían nombrar A, G, M y S, y que el miembro A cabildearía con los profesores cuyos apellidos iniciaran con las letras A a la F, el miembro G con los profesores cuyas iniciales fueran de la G a la L y así sucesivamente. ¿De cuántas maneras puede el comité nombrar a sus miembros con este procedimiento? ¿De cuántas formas podría nombrarse un comité integrado por cinco personas con cinco letras diferentes?

***35. Genética** Bajo ciertas condiciones, si dos adultos con ojos de color café tienen exactamente tres hijos, la probabilidad P de que tengan exactamente r hijos con ojos azules está dada por la función $P = P(r)$, donde:

$$P(r) = \frac{3!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{3-r}}{r!(3-r)!}, \qquad r = 0, 1, 2, 3$$

Determine la probabilidad de que exactamente dos de los hijos tengan los ojos azules.

36. Genética En el ejemplo 7, determine la probabilidad de que los ojos de las cinco crías sean de color café.

37. Crecimiento de bacterias Existe un cultivo en el cual se están desarrollando las bacterias. El tiempo t (en horas) para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación), es una función de la temperatura T (en °C) del cultivo. Si esta función está dada por[3]

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4} & \text{si } 30 \le T \le 36 \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4} & \text{si } 36 < T \le 39 \end{cases}$$

(a) Determine el dominio de f y **(b)** encuentre $f(30)$, $f(36)$ y $f(39)$.

En los problemas 38 a 41, use su calculadora para encontrar los valores de las funciones indicados para cada caso. Redondee las respuestas a dos decimales.

38. $f(x) = \begin{cases} 0.19x^4 - 27.99 & \text{si } x \ge 5.99 \\ 0.63x^5 - 57.42 & \text{si } x < 5.99 \end{cases}$

(a) $f(7.98)$ **(b)** $f(2.26)$ **(c)** $f(9)$

39. $f(x) = \begin{cases} 29.5x^4 + 30.4 & \text{si } x < 3 \\ 7.9x^3 - 2.1x & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

(a) $f(2.5)$ **(b)** $f(-3.6)$ **(c)** $f(3.2)$

40. $f(x) = \begin{cases} 4.07x - 2.3 & \text{si } x < -8 \\ 19.12 & \text{si } -8 \le x < -2 \\ x^2 - 4x^{-2} & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

(a) $f(-5.8)$ **(b)** $f(-14.9)$ **(c)** $f(7.6)$

41. $f(x) = \begin{cases} x/(x+3) & \text{si } x < -5 \\ x(x-4)^2 & \text{si } -5 \le x < 0 \\ \sqrt{2.1x + 3} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

(a) $f(-\sqrt{30})$ **(b)** $f(46)$ **(c)** $f(-2/3)$

OBJETIVO

Combinar funciones por medio de suma, resta, multiplicación, división, multiplicación por una constante y composición.

11.3 Combinaciones de funciones

Existen diferentes formas de combinar dos funciones para crear una nueva función. Suponga que f y g son las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 3x$$

Al sumar $f(x)$ y $g(x)$ se obtiene:

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$

Esta operación define una nueva función llamada *suma* de f y g, que se denota por $f + g$. Su valor funcional en x es $f(x) + g(x)$. Esto es,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$

Por ejemplo,

$$(f + g)(2) = 2^2 + 3(2) = 10$$

En general, para cualesquiera funciones f y g se define la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** $\frac{f}{g}$ como sigue:[4]

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{para } g(x) \ne 0 \end{aligned}$$

[3]Adaptado de F. K. E. Imrie y A. J. Vlitos, "Production of Fungal Protein from Carob", en *Single-Cell Protein II*, ed. S. R. Tannenbaum y D. I. C. Wang (Cambridge, MA: MIT Press, 1975).

[4]En cada una de las cuatro combinaciones, se supone que x se encuentra en los dominios tanto de f como de g. En el cociente tampoco se permite ningún valor de x para el cual $g(x)$ sea 0.

Un caso especial de fg merece una mención especial. Para cualquier número real c y cualquier función f, se define cf mediante

$$(cf)(x) = c \cdot f(x)$$

Este tipo restringido de producto se llama **producto escalar**. El producto escalar tiende a compartir algunas propiedades con las sumas (y las restas), a diferencia de los productos (y cocientes) en general.

Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, se tiene:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = x^2 + 3x \\
(f-g)(x) &= f(x) - g(x) = x^2 - 3x \\
(fg)(x) &= f(x) \cdot g(x) = x^2(3x) = 3x^3 \\
\frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3} \quad \text{para } x \neq 0 \\
(\sqrt{2}f)(x) &= \sqrt{2}f(x) = \sqrt{2}x^2
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Combinación de funciones

Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = x^2 + 3x$, encuentre:

a. $(f+g)(x)$
b. $(f-g)(x)$
c. $(fg)(x)$
d. $\frac{f}{g}(x)$
e. $(\frac{1}{2}f)(x)$

Solución:

a. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (3x-1) + (x^2+3x) = x^2 + 6x - 1$
b. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (3x-1) - (x^2+3x) = -1 - x^2$
c. $(fg)(x) = f(x)g(x) = (3x-1)(x^2+3x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x$
d. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x-1}{x^2+3x}$
e. $\left(\frac{1}{2}f\right)(x) = \frac{1}{2}(f(x)) = \frac{1}{2}(3x-1) = \frac{3x-1}{2}$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3(a)-(f)

Composición

También pueden combinarse dos funciones al aplicar primero una función a un número y después la otra función al resultado. Por ejemplo, suponga que $g(x) = 3x$, $f(x) = x^2$ y $x = 2$. Entonces $g(2) = 3 \cdot 2 = 6$. Así, g envía la entrada 2 a la salida 6:

$$2 \overset{g}{\mapsto} 6$$

Después, se determina que la salida 6 se convierte en la entrada para f:

$$f(6) = 6^2 = 36$$

De modo que f envía 6 al 36:

$$6 \overset{f}{\mapsto} 36$$

Al aplicar primero g y después f, se envía el 2 al 36:

$$2 \overset{g}{\mapsto} 6 \overset{f}{\mapsto} 36$$

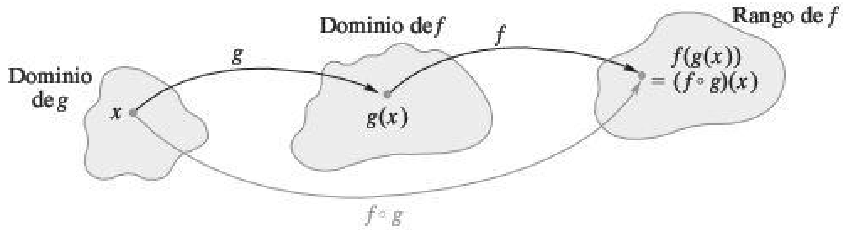


FIGURA 11.5 Composición de f con g.

De manera más general, se reemplazará el 2 por x, donde x está en el dominio de g (vea la figura 11.5). Al aplicar g a x, se obtiene el número $g(x)$, el cual se supone está en el dominio de f. Al aplicar f a $g(x)$ se obtiene $f(g(x))$, se lee "f de g de x", que está en el rango de f. Esta operación de aplicar g y después aplicar f al resultado se llama *composición*, y la función que se obtiene, denotada por $f \circ g$, se conoce como la *función compuesta* de f con g. Dicha función asigna al número de entrada x el número de salida $f(g(x))$. (Vea la flecha inferior en la figura 11.5.) De esta manera, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

DEFINICIÓN

Si f y g son funciones, la ***composición de f con g es la función $f \circ g$ definida por:***

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

donde el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g, tales que $g(x)$ esté en el dominio de f.

Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, puede obtenerse una forma sencilla para $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 = 9x^2$$

Por ejemplo, $(f \circ g)(2) = 9(2)^2 = 36$, como se vio anteriormente.

Cuando se trata con números reales y la operación de suma, 0 es un caso especial, para cualquier número real a, se tiene:

$$a + 0 = a = 0 + a$$

El número 1 tiene una propiedad similar con respecto a la multiplicación. Para cualquier número real a, se tiene:

$$a1 = a = 1a$$

A manera de referencia, en la sección 11.4 se observa que la función I definida por $I(x) = x$, satisface, para cualquier función f,

$$f \circ I = f = I \circ f$$

donde se considera la igualdad de funciones como se definió en la sección 11.1. De hecho, para cualquier x,

$$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x) = I(f(x)) = (I \circ f)(x)$$

La función I se llama función *identidad*.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

COMPOSICIÓN

Un CD cuesta x dólares al mayoreo. El precio que la tienda paga al mayorista está dado por la función $s(x) = x + 3$. El precio que el cliente paga es $c(x) = 2x$, donde x es el precio que la tienda paga. Escriba una función compuesta para determinar el precio al cliente como una función del precio al mayoreo.

EJEMPLO 2 Composición

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ *y* $g(x) = x + 1$. *Encuentre:*

a. $(f \circ g)(x)$

b. $(g \circ f)(x)$

ADVERTENCIA

Por lo general, $f \circ g$ y $g \circ f$ son muy diferentes. En el ejemplo 2,

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x+1}$$

pero se tiene:

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 1$$

Observe que $(f \circ g)(1) = \sqrt{2}$, mientras que $(g \circ f)(1) = 2$. Tampoco confunda $f(g(x))$ con $(fg)(x)$, esta última es el producto $f(x)g(x)$. Aquí

$$f(g(x)) = \sqrt{x+1}$$

pero:

$$f(x)g(x) = \sqrt{x}(x+1).$$

Solución:

a. $(f \circ g)(x)$ es $f(g(x))$. Ahora g suma 1 a x, y f obtiene la raíz cuadrada del resultado. Así que,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$$

El dominio de g consiste en todos los números reales x, y el de f en todos los números reales no negativos. De aquí que el dominio de la composición esté constituido por todas las x para las que $g(x) = x + 1$ sea no negativa. Esto es, el dominio está formado por todas las x ( ) -1, o de manera equivalente, el intervalo $[-1, \infty)$.

b. $(g \circ f)(x)$ es $g(f(x))$. Ahora f toma la raíz cuadrada de x, y g suma 1 al resultado. De esta manera g suma 1 a $\sqrt{x}$, y se tiene:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$$

El dominio de f consiste en todas las x ( ) 0, y el dominio de g en todos los números reales. Por lo que el dominio de la composición está constituido por todas las x ( ) 0, para las cuales $f(x) = \sqrt{x}$ es real, a saber, toda x ( ) 0.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

La composición es *asociativa*, lo que significa que para cualesquiera tres funciones f, g y h,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

EJEMPLO 3 Composición

Si $F(p) = p^2 + 4p - 3$, $G(p) = 2p + 1$ *y* $H(p) = |p|$, *encuentre:*

a. $F(G(p))$

b. $F(G(H(p)))$

c. $G(F(1))$

Solución:

a. $F(G(p)) = F(2p+1) = (2p+1)^2 + 4(2p+1) - 3 = 4p^2 + 12p + 2 = (F \circ G)(p)$

b. $F(G(H(p))) = (F \circ (G \circ H))(p) = ((F \circ G) \circ H)(p) = (F \circ G)(H(p)) = (F \circ G)(|p|) = 4|p|^2 + 12|p| + 2 = 4p^2 + 12|p| + 2$

c. $G(F(1)) = G(1^2 + 4 \cdot 1 - 3) = G(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

En cálculo, a veces es necesario pensar en una función en particular como una composición de dos funciones más sencillas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN COMO UNA COMPOSICIÓN

Suponga que el área de un jardín cuadrado es $g(x) = (x + 3)^2$. Exprese g como una composición de dos funciones y explique qué representa cada función.

EJEMPLO 4 Expresión de una función como una composición

Exprese $h(x) = (2x - 1)^3$ *como una composición.*

Solución: Se observa que $h(x)$ se obtiene al encontrar $2x - 1$ y elevar al cubo el resultado. Suponga que se determina $g(x) = 2x - 1$ y $f(x) = x^3$. Entonces:

$$h(x) = (2x-1)^3 = [g(x)]^3 = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

que da h como una composición de dos funciones.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

TECNOLOGÍA

Se pueden combinar dos funciones con el uso de una calculadora graficadora. Considere las funciones

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

que se introducen como Y_1 y Y_2, según se muestra en la figura 11.6. La suma de f y g está dada por $Y_3 = Y_1 + Y_2$ y la composición de $f \circ g$ por $Y_4 = Y_1(Y_2)$. Por ejemplo, $f(g(3))$ se obtiene al evaluar Y_4 en 3.

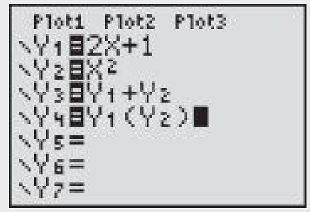


FIGURA 11.6 Y_3 y Y_4 son combinaciones de Y_1 y Y_2.

Ejercicios 11.3

1. Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x + 5$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f + g)(0)$ **(c)** $(f - g)(x)$
(d) $(fg)(x)$ **(e)** $(fg)(-2)$ **(f)** $\frac{f}{g}(x)$
(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(f \circ g)(3)$ **(i)** $(g \circ f)(x)$
(j) $(g \circ f)(3)$

2. Si $f(x) = 2x$ y $g(x) = 6 + x$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f - g)(x)$ **(c)** $(f - g)(4)$
(d) $(fg)(x)$ **(e)** $\frac{f}{g}(x)$ **(f)** $\frac{f}{g}(2)$
(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(g \circ f)(x)$ **(i)** $(g \circ f)(2)$

***3.** Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x^2 - x$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f - g)(x)$ **(c)** $(f - g)\left(-\frac{1}{2}\right)$
(d) $(fg)(x)$ **(e)** $\frac{f}{g}(x)$ **(f)** $\frac{f}{g}\left(-\frac{1}{2}\right)$
(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(g \circ f)(x)$ **(i)** $(g \circ f)(-3)$

4. Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 5$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f + g)\left(\frac{2}{3}\right)$ **(c)** $(f - g)(x)$
(d) $(fg)(x)$ **(e)** $(fg)(7)$ **(f)** $\frac{f}{g}(x)$
(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(f \circ g)(12\,003)$ **(i)** $(g \circ f)(x)$

5. Si $f(x) = 3x^2 + 6$ y $g(x) = 4 - 2x$, encuentre $f(g(2))$ y $g(f(2))$.

6. Si $f(p) = \frac{4}{p}$ y $g(p) = \frac{p-2}{3}$, encuentre $(f \circ g)(p)$ y $(g \circ f)(p)$.

***7.** Si $F(t) = t^2 + 7t + 1$ y $G(t) = \frac{2}{t-1}$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

8. Si $F(t) = \sqrt{t}$ y $G(t) = 3t^2 + 4t + 2$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

***9.** Si $f(v) = \frac{1}{v^2 + 1}$ y $g(v) = \sqrt{v + 2}$, encuentre $(f \circ g)(v)$ y $(g \circ f)(v)$.

10. Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$, encuentre $(f \circ f)(x)$.

En los problemas 11 a 16, determine las funciones f y g tales que $h(x) = f(g(x))$.

11. $h(x) = 11x - 7$

12. $h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

***13.** $h(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$

14. $h(x) = (9x^3 - 5x)^3 - (9x^3 - 5x)^2 + 11$

15. $h(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 1}{x + 3}}$

16. $h(x) = \frac{2 - (3x - 5)}{(3x - 5)^2 + 2}$

17. Utilidad Cierto expendio de café vende una libra de café por \$9.75. Los gastos mensuales son \$4500 más \$4.25 por cada libra vendida.

(a) Escriba una función $r(x)$ para el ingreso mensual total como una función del número de libras vendidas.
(b) Escriba una función $e(x)$ para los gastos mensuales totales como una función del número de libras de café vendidas.
(c) Escriba una función $(r - e)(x)$ para la utilidad mensual total como una función del número de libras vendidas.

18. Geometría Suponga que el volumen de un cubo es $v(x) = (4x - 2)^3$. Exprese v como una composición de dos funciones y explique qué representa cada función.

19. Negocios Un fabricante determina que el número total de unidades de producción por día, q, es una función del número de empleados, m, donde:

$$q = f(m) = \frac{(40m - m^2)}{4}$$

El ingreso total, r, que se recibe por la venta de q unidades, está dado por la función g, donde $r = g(q) = 40q$. Determine $(g \circ f)(m)$. ¿Qué es lo que describe esta función compuesta?

20. Sociología Se han hecho estudios concernientes a la relación estadística entre posición social, educación e ingresos.[5] Se denota con S el valor numérico de la posición social, con base en el ingreso anual I. Para cierto tipo de población suponga:

$$S = f(I) = 0.45(I - 1000)^{0.53}$$

[5] R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975).

Además, suponga que el ingreso de una persona I es una función del número de años de educación E, donde

$$I = g(E) = 7202 + 0.29E^{3.68}$$

Determine $(f \circ g)(E)$. ¿Qué es lo que describe esta función?

Determine los valores indicados para las funciones f y g dadas en los problemas 21 a 24. Redondee las respuestas a dos decimales.

21. $f(x) = (4x - 13)^2$, $g(x) = 0.2x^2 - 4x + 3$
(a) $(f + g)(4.5)$ **(b)** $(f \circ g)(-2)$

22. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$, $g(x) = 11.2x + 5.39$
(a) $\dfrac{f}{g}(-2)$ **(b)** $(g \circ f)(-10)$

23. $f(x) = x^{4/5}$, $g(x) = x^2 - 8$
(a) $(fg)(7)$ **(b)** $(g \circ f)(3.75)$

24. $f(x) = \dfrac{5}{x+3}$, $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$
(a) $(f - g)(7.3)$ **(b)** $(f \circ g)(-4.17)$

OBJETIVO

Introducir las funciones inversas, sus propiedades y usos.

11.4 Funciones inversas

Así como $-a$ es el número para el cual:

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

y, para $a \neq 0$, a^{-1} es el número para el cual:

$$aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$$

entonces, dada una función f, cabe preguntarse acerca de la existencia de una función g que satisfaga:

$$f \circ g = I = g \circ f \qquad \textbf{(1)}$$

donde I es la función identidad, que se explicó en el fragmento titulado "composición" de la sección 11.3, y dada por $I(x) = x$. Suponga que se tiene g como se indicó antes, y una función h que también satisface (1) de manera que:

$$f \circ h = I = h \circ f$$

Entonces:

$$h = h \circ I = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = I \circ g = g$$

muestra que hay, máximo, una función que satisface los requerimientos de g en (1). En la jerga matemática, g está determinada de forma única por f y, por lo tanto, se le da un nombre, $g = f^{-1}$, lo cual refleja su dependencia de f. La función f^{-1} se lee como f **inversa** y se llama la **inversa** de f.

El inverso aditivo $-a$ existe para cualquier número a; el inverso multiplicativo a^{-1} existe precisamente si $a \neq 0$. La existencia de f^{-1} impone a una función f un fuerte requisito, puede mostrarse que f^{-1} existe si y sólo si, para toda a y b, siempre que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. Es útil pensar que una f así puede *cancelarse* (*a la izquierda*).

ADVERTENCIA

No confunda f^{-1}, la inversa de f, y $\frac{1}{f}$, el recíproco multiplicativo de f. Desafortunadamente, la nomenclatura para las funciones inversas interfiere con el uso numérico de $(-)^{-1}$. Por lo general, $f^{-1}(x)$ es diferente de $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$. Por ejemplo, $I^{-1} = 1$ (puesto que $I \circ I = I$) entonces $I^{-1}(x) = x$, pero $\frac{1}{I}(x) = \frac{1}{I(x)} = \frac{1}{x}$.

> Una función f que satisface:
>
> $$\text{para toda } a \text{ y } b, \text{ si } \quad f(a) = f(b), \quad \text{entonces} \quad a = b$$
>
> se llama una función **uno a uno.**

De este modo, puede decirse que una función tiene una inversa precisamente si es uno a uno. Una forma equivalente de expresar la condición de uno a uno es:

$$\text{para toda } a \text{ y } b, \text{ si } \quad a \neq b, \quad \text{entonces} \quad f(a) \neq f(b)$$

así que entradas distintas dan lugar a salidas diferentes. Observe que esta condición no se cumple para muchas funciones simples. Por ejemplo si $f(x) = x^2$, entonces $f(-1) = (-1)^2 = 1 = (1)^2 = f(1)$ y $-1 \neq 1$ muestra que la función cuadrática no es uno a uno. De manera similar, $f(x) = |x|$ no es uno a uno.

En general, el dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de f.

Aquí debe hacerse notar que (1) es equivalente a

$$f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x)) \tag{2}$$

La primera ecuación se aplica para toda x en el dominio de f^{-1} y la segunda ecuación es aplicable para toda x en el dominio de f. En general, el dominio de f^{-1}, que es igual al rango de f, puede ser muy diferente al dominio de f.

EJEMPLO 1 Inversas de funciones lineales

De acuerdo con la sección 11.2, una función de la forma $f(x) = ax + b$, donde $a \neq 0$, es una función lineal. *Muestre que una función lineal es uno a uno. Encuentre la inversa de $f(x) = ax + b$ y muestre que también es lineal.*

Solución: Suponga que $f(u) = f(v)$, esto es

$$au + b = av + b \tag{3}$$

Para mostrar que f es uno a uno, debe comprobarse que de esta suposición se sigue que $u = v$. Al restar b de ambos lados de (3) se obtiene $au = av$, de donde se sigue que $u = v$ al dividir ambos lados entre a (se supone que $a \neq 0$). Como f se obtuvo tras multiplicar primero por a y luego sumar b, es de esperarse que el efecto de f pueda eliminarse al restar primero b y dividir después entre a. Entonces, considere $g(x) = \dfrac{x-b}{a}$. Se tiene:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a\frac{x-b}{a} + b = (x-b) + b = x$$

y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{(ax+b)-b}{a} = \frac{ax}{a} = x$$

Como g satisface los requerimientos de (1), se deduce que g es la inversa de f. Esto es $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a} = \dfrac{1}{a}x + \dfrac{-b}{a}$ y la última igualdad muestra que f^{-1} también es una función lineal.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

EJEMPLO 2 Identidades para las inversas

Muestre que:

a. *Si f y g son funciones uno a uno, la composición $f \circ g$ también es uno a uno y $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.*
b. *Si f es uno a uno $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Solución:

a. Suponga que $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(b)$, esto es $f(g(a)) = f(g(b))$. Como f es uno a uno, $g(a) = g(b)$. Dado que g es uno a uno, $a = b$ y esto muestra que $f \circ g$ es uno a uno. Las ecuaciones:

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ I \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = I$$

y

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g = g^{-1} \circ I \circ g = g^{-1} \circ g = I$$

muestran que $g^{-1} \circ f^{-1}$ es la inversa de $f \circ g$, lo cual, de manera simbólica, corresponde a la igualdad $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$.

b. En las ecuaciones (2) reemplace f por f^{-1}. Al tomar g como f se muestra que las ecuaciones (1) están resueltas, y de esto de obtiene $(f^{-1})^{-1} = f$.

EJEMPLO 3 Uso de inversas para resolver ecuaciones

Muchas ecuaciones toman la forma $f(x) = 0$, donde f es una función. Si f es una función uno a uno, entonces la ecuación tiene $x = f^{-1}(0)$ como única solución.

Solución: Si se aplica f^{-1} a ambos lados de $f(x) = 0$ se obtiene $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(f(x)) = x$ muestra que $x = f^{-1}(0)$ es la única solución posible. Como $f(f^{-1}(0)) = 0$, $f^{-1}(0)$ es realmente una solución.

EJEMPLO 4 Restricción del dominio de una función

Puede suceder que una función f cuyo dominio sea el natural, que consiste en todos los números para los cuales la regla de definición tiene sentido, no sea uno a uno, y aún así pueda obtenerse una función g uno a uno al restringir el dominio de f.

Solución: Se ha mostrado que la función $f(x) = x^2$ no es uno a uno, pero la función $g(x) = x^2$ *donde el dominio explícito dado como* $[0, \infty)$ sí lo es. Como $(\sqrt{x})^2 = x$ y $\sqrt{x^2} = x$, para $x \geq 0$, se sigue que $\sqrt{}$ es la inversa de la función cuadrática restringida g. A continuación se presenta un ejemplo más artificial. Sea $f(x) = |x|$ (con su dominio natural). Sea $g(x) = |x|$ en *donde el dominio está dado explícitamente como* $(-\infty, -1) \cup [0, 1]$. La función g es uno a uno y por ende tiene una inversa.

EJEMPLO 5 Determinación de la inversa de una función

Para determinar la inversa de una función f uno a uno, resuelva la ecuación $y = f(x)$ para x en términos de y para obtener $x = g(y)$. Entonces $f^{-1}(x) = g(x)$. Para ilustrar, *encuentre $f^{-1}(x)$ si $f(x) = (x - 1)^2$, para $x \geq 1$.*

Solución: Sea $y = (x - 1)^2$, para $x \geq 1$. Entonces $x - 1 = \sqrt{y}$ y, por lo tanto, $x = \sqrt{y} + 1$. Se sigue que $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Ejercicios 11.4

Encuentre la inversa de la función dada en los problemas 1 a 6.

*1. $f(x) = 3x + 7$

2. $g(x) = 2x + 1$

3. $F(x) = \frac{1}{2}x - 7$

4. $f(x) = (4x - 5)^2$, para $x \geq \frac{5}{4}$

*5. $A(r) = \pi r^2$, para $r \geq 0$

6. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

En los problemas 7 a 10, determine si la función es uno a uno o no.

7. $f(x) = 5x + 12$

8. $g(x) = (5x + 12)^2$

9. $h(x) = (5x + 12)^2$, para $x \geq -\frac{12}{5}$

10. $F(x) = |x - 9|$

Resuelva cada ecuación de los problemas 11 y 12, mediante la determinación de una función inversa.

11. $(4x - 5)^2 = 23$, para $x \geq \frac{5}{4}$

12. $\frac{4}{3}\pi r^3 = 100$

13. **Función de demanda** La función:

$$p = p(q) = \frac{1\,200\,000}{q} \qquad q > 0$$

expresa el sueldo p de una actriz, por película, como una función del número de películas q que protagoniza. Exprese el número de cintas en las que actúa, en términos de su sueldo por película. Muestre que la expresión es una función de p. Muestre que la función resultante es inversa a la función que especifica a p en términos de q.

14. **Función de oferta** La función de la oferta semanal de una libra de café, la mezcla de la casa en una cafetería, es:

$$p = p(q) = \frac{q}{48} \qquad q > 0$$

donde q es la oferta de café en libras por semana, y p es el precio por libra. Exprese q como una función de p y demuestre la relación entre las dos funciones.

OBJETIVO

Graficar ecuaciones y funciones en coordenadas rectangulares, determinar intersecciones, aplicar la prueba de la recta vertical y la recta horizontal, y determinar el dominio y rango de una función a partir de una gráfica.

11.5 Gráficas en coordenadas rectangulares

El **sistema de coordenadas rectangulares** permite especificar y localizar puntos en un plano. También proporciona una manera geométrica de representar ecuaciones de dos variables, así como funciones.

En un plano se trazan dos rectas de números reales, llamadas *ejes de coordenadas*, perpendiculares entre sí, de modo que sus orígenes coincidan, como en la figura 11.7. Su punto de intersección se llama *origen* del sistema de coordenadas. Por ahora se llamará a la recta horizontal *eje x* y a la vertical *eje y*. La distancia unitaria sobre el eje x no necesariamente es la misma que la del eje y.

El plano en el que se encuentran los ejes de coordenadas se llama *plano de coordenadas rectangulares* o simplemente, *plano x, y*. Todos los puntos que contiene pueden marcarse para indicar su posición. Para marcar el punto P en la figura 11.8(a), se trazan líneas perpendiculares al eje x y al eje y, que pasen por el punto P. Dichas líneas cruzan los ejes en 4 y 2, respectivamente. Por lo tanto, P determina dos números, 4 y 2, entonces se dice que las **coordenadas rectangulares** de P están dadas por el **par ordenado** $(4, 2)$. La palabra *ordenado* es importante. En la figura 11.8(b), el punto correspondiente a $(4, 2)$ no es el mismo que para $(2, 4)$:

$$(4, 2) \neq (2, 4)$$

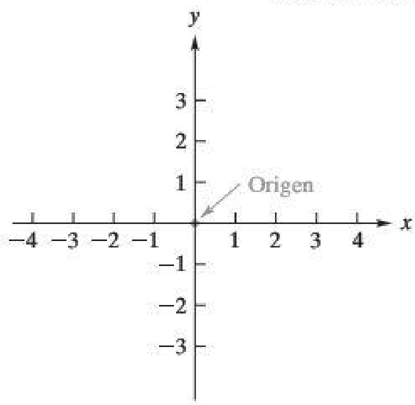


FIGURA 11.7 Ejes de coordenadas.

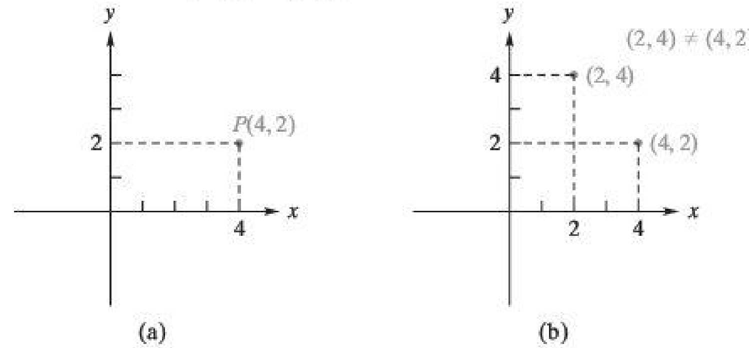


FIGURA 11.8 Coordenadas rectangulares.

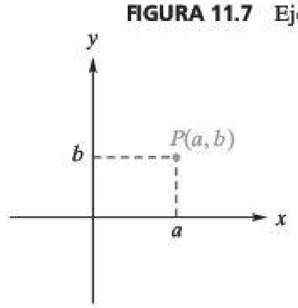


FIGURA 11.9 Coordenadas de P.

En general, si P es un punto cualquiera, entonces sus coordenadas rectangulares se determinan por un par ordenado de la forma (a, b). (Vea la figura 11.9). Se llama a a la *abscisa* o *coordenada x* de P, y a b la *ordenada* o *coordenada y* de P.

De esta manera, cada punto en un plano coordenado puede asociarse exactamente con un par ordenado (a, b) de números reales. Asimismo, es claro que cada par ordenado (a, b) de números reales puede asociarse exactamente con un punto en ese plano. Como existe una *correspondencia uno a uno* entre los puntos en el plano y todos los pares ordenados de números reales, se hace referencia al punto P con coordenada x, a, y coordenada y, b, simplemente como el punto (a, b), o como $P(a, b)$. Además, se usan las palabras *punto* y *par ordenado* en forma intercambiable.

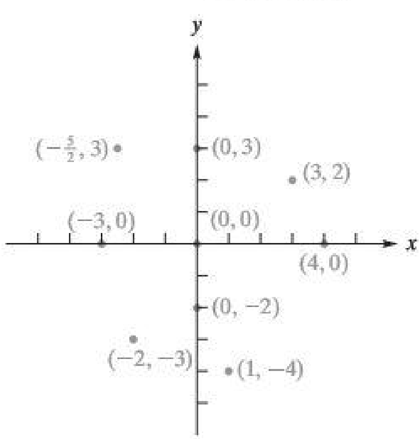


FIGURA 11.10 Coordenadas de puntos.

En la figura 11.10 están indicadas las coordenadas de varios puntos. Por ejemplo, el punto $(1, -4)$ está localizado una unidad a la derecha del eje y, y cuatro unidades por debajo del eje x. El origen es $(0, 0)$. La coordenada x de todo punto en el eje y es 0, y la coordenada y de todo punto sobre el eje x es 0.

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes* (figura 11.11). Por ejemplo, el cuadrante I consiste en todos los puntos (x_1, y_1) en donde $x_1 \geq 0$ y $y_1 \geq 0$. Los puntos sobre los ejes no están en ningún cuadrante.

Con el uso de un sistema de coordenadas rectangulares, pueden representarse geométricamente ecuaciones de dos variables. Por ejemplo, considere:

$$y = x^2 + 2x - 3 \tag{1}$$

Una solución de esta ecuación es un valor de x y uno de y que hagan verdadera a la ecuación. Por ejemplo, si $x = 1$, al sustituir en la ecuación (1) se obtiene:

$$y = 1^2 + 2(1) - 3 = 0$$

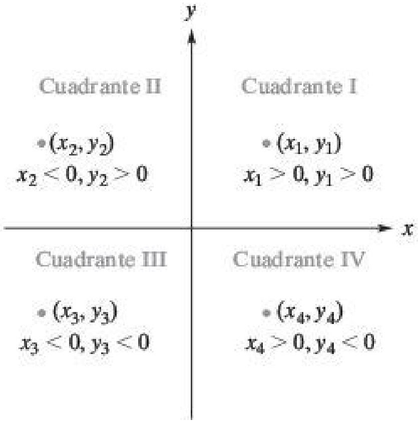


FIGURA 11.11 Cuadrantes.

x	y
−4	5
−3	0
−2	−3
−1	−4
0	−3
1	0
2	5

(a)

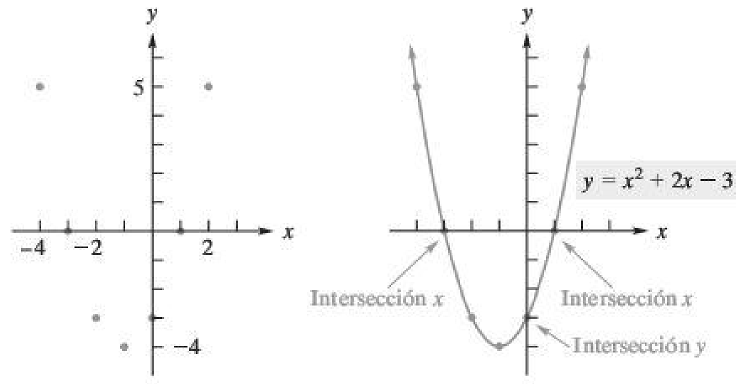


FIGURA 11.12 Graficando de $y = x^2 + 2x - 3$.

Así, una solución es $x = 1, y = 0$. De manera similar,

$$\text{si } x = -2 \quad \text{entonces} \quad y = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3$$

y entonces $x = -2, y = -3$, también es una solución. Al seleccionar otros valores para x, se obtienen más soluciones [vea la figura 11.12(a)]. Debe quedar claro que existe una cantidad infinita de soluciones para la ecuación (1).

Cada solución da origen a un punto (x, y). Por ejemplo, a $x = 1$ y $y = 0$ le corresponde $(1, 0)$. La **gráfica** de $y = x^2 + 2x - 3$ es la representación geométrica de todas sus soluciones. En la figura 11.12(b) se han graficado los puntos correspondientes a las soluciones dadas en la tabla.

Como la ecuación tiene un número infinito de soluciones, parece imposible determinar su gráfica con precisión. Sin embargo, sólo es de interés la forma general de la gráfica. Por esta razón se grafican suficientes puntos de modo que pueda inferirse su forma (las técnicas de cálculo hace que esta "inferencia" sea mucho más clara). Después se unen esos puntos por medio de una curva suave siempre que las condiciones lo permitan. Al hacer esto se obtiene la curva de la figura 11.12(c). Por supuesto, entre más puntos se marquen, mejor será la gráfica. Aquí se supone que la gráfica se extiende de manera indefinida hacia arriba, lo cual se indica con la flechas.

Con frecuencia sólo se dice que la intersección y es -3 y las intersecciones x son -3 y 1.

El punto $(0, -3)$ donde la curva interseca al eje y se llama *intersección y*. Los puntos $(-3, 0)$ y $(1, 0)$ en donde la curva interseca al eje x se llaman las *intersecciones x*. En general, se tiene la definición siguiente.

DEFINICIÓN

Una ***intersección x*** de la gráfica de una ecuación en x y y es el punto donde la gráfica interseca al eje x. Una ***intersección y*** es el punto donde la gráfica interseca al eje y.

Para encontrar las intersecciones x de la gráfica de una ecuación en x y y, primero se determina que $y = 0$ y se resuelve para x la ecuación resultante. Para encontrar las intersecciones y, primero se establece que $x = 0$ y se resuelve para y. Por ejemplo, para la gráfica de $y = x^2 + 2x - 3$, se desea determinar las intersecciones x. Sea $y = 0$, al resolver para x se obtiene:

$$0 = x^2 + 2x - 3$$
$$0 = (x + 3)(x - 1)$$
$$x = -3, 1$$

Así, las intersecciones x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$, como se vio con anterioridad. Si $x = 0$, entonces:

$$y = 0^2 + 2(0) - 3 = -3$$

De modo que $(0, -3)$ es la intersección y. Tenga en mente que para una intersección x su coordenada y es igual a 0, mientras que para una intersección y su coordenada x es igual a 0. Las intersecciones son útiles porque indican con precisión dónde interseca la gráfica a los ejes.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

INTERSECCIONES Y GRÁFICA

Rachel ha ahorrado $7 250 para su educación universitaria. Planea gastar $600 por mes de esta cuenta. Escriba una ecuación que represente la situación e identifique las intersecciones con los ejes.

EJEMPLO 1 Intersecciones y gráfica

Determine las intersecciones x y y de la gráfica de $y = 2x + 3$ y haga el bosquejo de su gráfica.

Solución: Si $y = 0$, entonces:

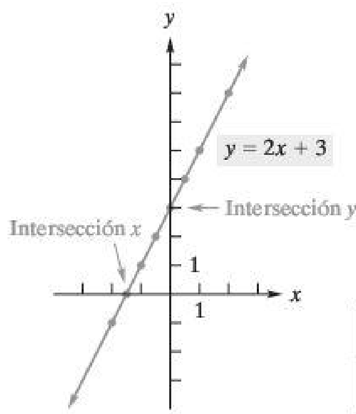
$$0 = 2x + 3 \quad \text{de modo que} \quad x = -\frac{3}{2}$$

Así, la intersección x es $(-\frac{3}{2}, 0)$. Si $x = 0$, entonces:

$$y = 2(0) + 3 = 3$$

De modo que la intersección y es $(0, 3)$. La figura 11.13 muestra una tabla de otros puntos sobre la gráfica y un bosquejo de ésta.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



x	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	2	-2
y	3	0	4	2	5	1	7	-1

FIGURA 11.13 Gráfica de $y = 2x + 3$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

INTERSECCIONES Y GRÁFICA

El precio de admisión a un parque de diversiones es de $24.95. Este pago permite al cliente utilizar todas las atracciones del parque tantas veces como quiera. Escriba una ecuación que represente la relación entre el número de juegos x que el cliente utiliza, y el costo de admisión y para ese cliente. Describa la gráfica de esta ecuación e identifique las intersecciones con los ejes. Suponga que $x > 0$.

EJEMPLO 2 Intersecciones y gráfica

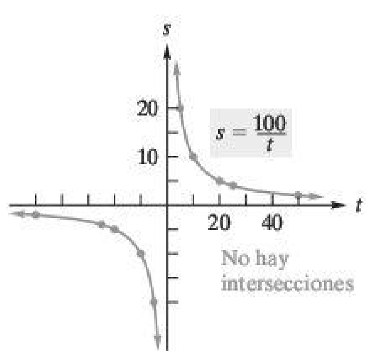
Determine las intersecciones, si las hay, de la gráfica de $s = \frac{100}{t}$, y haga un bosquejo de la gráfica.

Solución: Para trazar la gráfica se marcará el eje horizontal con t y el eje vertical con s (figura 11.14). Como t no puede ser igual a 0 (la división entre 0 no está definida), no existe intersección con el eje s. Así, la gráfica no tiene un punto correspondiente a $t = 0$. Además, no existe intersección con el eje t, puesto que si $s = 0$, entonces la ecuación

$$0 = \frac{100}{t}$$

no tiene solución. Recuerde, la única forma en que una fracción puede ser 0 es con un numerador que valga 0. En la figura 11.14 se muestra la gráfica. En general, la gráfica de $s = k/t$, donde k es una constante diferente de 0, corresponde a una *hipérbola rectangular*.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11



t	5	-5	10	-10	20	-20	25	-25	50	-50
s	20	-20	10	-10	5	-5	4	-4	2	-2

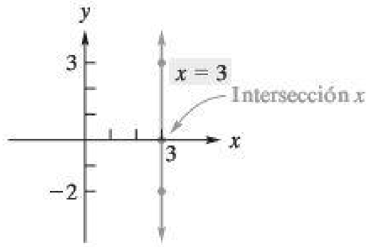
FIGURA 11.14 Gráfica de $s = \frac{100}{t}$.

EJEMPLO 3 Intersecciones y gráfica

Determine las intersecciones de la gráfica de $x = 3$, y bosqueje la gráfica.

Solución: Puede pensarse en $x = 3$ como una ecuación en las variables x y y, si se escribe como $x = 3 + 0y$. Aquí y puede tomar cualquier valor, pero x debe ser igual a 3. Porque $x = 3$ cuando $y = 0$, la intersección x es $(3, 0)$. No existe intersección y, puesto que x no puede ser 0. (Vea la figura 11.15). La gráfica es una recta vertical.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13



x	3	3	3
y	0	3	−2

FIGURA 11.15 Gráfica de $x = 3$.

Cada función f da lugar a una ecuación, a saber $y = f(x)$, la cual es un caso especial de las ecuaciones que se han estado graficando. Su gráfica consiste en todos los puntos $(x, f(x))$, donde x está en el dominio de f. Los ejes verticales pueden etiquetarse como y o $f(x)$, donde f es el nombre de la función, y se denomina **eje de los valores de la función**. *Suele etiquetarse el eje horizontal con la variable independiente, pero tome en cuenta que los economistas etiquetan el eje vertical con la variable independiente.* Observe que al graficar una función se obtienen las "soluciones" (x, y) que hacen verdadera la función $y = f(x)$. Para cada x en el dominio de f se tiene exactamente una y, que se consiguió al evaluar $f(x)$. El par resultante $(x, f(x))$ es un punto sobre la gráfica y éstos son los únicos puntos sobre la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

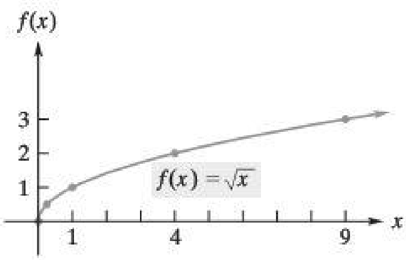
Una observación geométrica útil es que la gráfica de una función tiene cuando mucho un punto de intersección con alguna recta vertical en el plano. Recuerde que la ecuación de una recta vertical necesariamente es de la forma $x = a$, donde a es una constante. Si a no está en el dominio de la función f, entonces $x = a$ no intersecará la gráfica de $y = f(x)$. Si a está en el dominio de la función f entonces $x = a$ intersecará la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ y sólo ahí. Y viceversa, si un conjunto de puntos en el plano tiene la propiedad de que cualquier recta vertical interseca al conjunto al menos una vez, entonces el conjunto de puntos es en realidad la gráfica de una función (el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales a que presentan la propiedad de que la línea $x = a$ interseca el conjunto de puntos dado, y de que para tal a el valor funcional correspondiente es la coordenada y del único punto de intersección de la línea $x = a$ y el conjunto de puntos dado). Ésta es la base de la **prueba de la recta vertical** que se analizará después del ejemplo 7.

EJEMPLO 4 Gráfica de la función raíz cuadrada

Haga la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución: La gráfica se muestra en la figura 11.16. Se marca el eje vertical como $f(x)$. Recuerde que $\sqrt{x}$ denota la raíz cuadrada *principal* de x. Así, $f(9) = \sqrt{9} = 3$, no ± 3. Tampoco pueden elegirse valores negativos de x, puesto que no se desean números imaginarios para $\sqrt{x}$. Esto es, debe tenerse x ( ) 0. Ahora se considerarán las intersecciones. Si $f(x) = 0$, entonces $\sqrt{x} = 0$ o $x = 0$. También, si $x = 0$, entonces $f(x) = 0$. Así, las intersecciones x y y son las mismas, a saber, $(0, 0)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29



x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

FIGURA 11.16 Gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

EJEMPLO 5 Gráfica de la función valor absoluto

Grafique $p = G(q) = |q|$.

Solución: Se usa la variable independiente q para marcar el eje horizontal. El eje de los valores funcionales puede marcarse como $G(q)$ o p (vea la figura 11.17). Note que las intersecciones q y p se ubican en el mismo punto $(0, 0)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Brett rentó una bicicleta en una tienda de alquiler condujo a una velocidad constante de 12 mi/h durante 2.5 horas a lo largo de una pista y después regresó por el mismo camino. Grafique la función tipo valor absoluto para representar la distancia recorrida desde el negocio de alquiler, como una función del tiempo en el dominio apropiado.

DEFINICIÓN

Una **raíz** de una función f es cualquier valor de x para el cual $f(x) = 0$.

q	0	1	−1	3	−3	5	−5
p	0	1	1	3	3	5	5

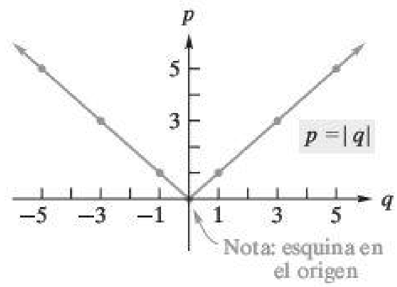


FIGURA 11.17 Gráfica de $p = |q|$.

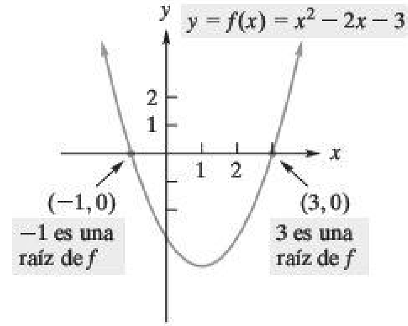


FIGURA 11.18 Raíces de una función.

Por ejemplo, una raíz de la función $f(x) = 2x - 6$ es 3 porque $f(3) = 2(3) - 6 = 0$. Aquí, 3 se llama raíz *real*, puesto que es un número real. Se observa que las raíces de f pueden encontrarse al establecer $f(x) = 0$ y resolver para x. Así, las raíces de una función son precisamente las intersecciones x de su gráfica, ya que es en estos puntos donde $f(x) = 0$.

Para ilustrarlo, en la figura 11.18 se muestra la gráfica de la función de $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$. Las intersecciones x de la gráfica son -1 y 3. Así, -1 y 3 son raíces de f, o de manera equivalente, -1 y 3 son las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$.

TECNOLOGÍA

Para resolver la ecuación $x^3 = 3x - 1$ con una calculadora graficadora, primero se expresa la ecuación en la forma $f(x) = 0$:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

Después se grafica f y luego se estiman las intersecciones x, ya sea con el uso de zoom y trace o por medio de la operación de extracción de raíces (vea la figura 11.19). Observe que se define la ventana para $-4 \leq x \leq 4$ y $-5 \leq y \leq 5$.

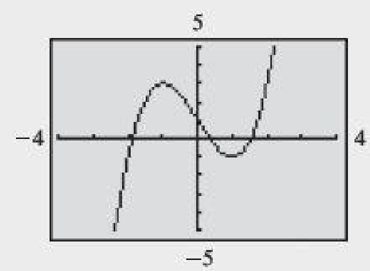


FIGURA 11.19 Las raíces de $x^3 - 3x + 1 = 0$ son aproximadamente -1.88, 0.35 y 1.53.

La figura 11.20 muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. El punto $(x, f(x))$ implica que al número de entrada x en el eje horizontal le corresponde el número de salida $f(x)$ en el eje vertical, como lo indica la flecha. Por ejemplo, a la entrada 4 le corresponde la salida 3, de modo que $f(4) = 3$.

A partir de la forma de la gráfica, parece razonable suponer que para cualquier valor de x existe un número de salida, de modo que el dominio de f consiste en todos los números reales. Observe que el conjunto de todos los puntos en la coordenada y en la gráfica se compone del conjunto de todos los números no negativos.

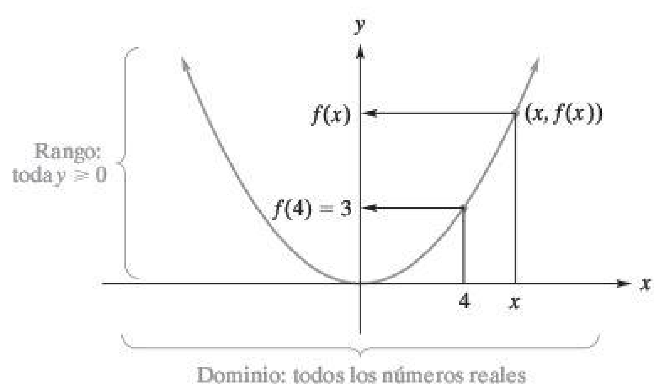


FIGURA 11.20 Dominio, rango y valores de la función.

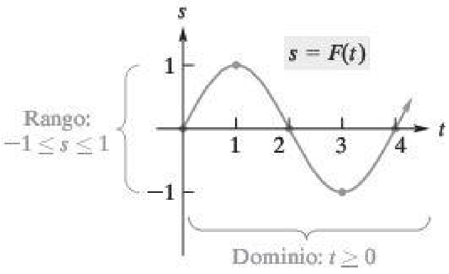


FIGURA 11.21 Dominio, rango y valores funcionales.

Así, el rango de f es toda $y \ge 0$. Esto muestra que puede hacerse una deducción acertada acerca del dominio y rango de una función al examinar su gráfica. *En general, el dominio consiste en todos los valores x que están incluidos en la gráfica, y el rango son todos los valores y en esa gráfica.* Por ejemplo, la figura 11.16 implica que el dominio y el rango de $f(x) = \sqrt{x}$ son todos los números no negativos. A partir de la figura 11.17 queda claro que el dominio de $p = G(q) = |q|$ son todos los números reales y que el rango es toda $p \ge 0$.

EJEMPLO 6 Dominio, rango y valores de la función

La figura 11.21 muestra la gráfica de una función F. Se supone que la gráfica se repite indefinidamente a la derecha de 4. Entonces el dominio de F es toda $t \ge 0$. El rango es $-1 \le s \le 1$. Algunos valores que toma la función son:

$$F(0) = 0 \quad F(1) = 1 \quad F(2) = 0 \quad F(3) = -1$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

TECNOLOGÍA

Con el uso de una calculadora graficadora puede estimarse el rango de una función. La gráfica de

$$f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$$

se muestra en la figura 11.22. El punto más bajo en la gráfica corresponde al valor mínimo de $f(x)$, y el rango está compuesto de todos los números reales mayores o iguales a este mínimo. Puede estimarse el valor mínimo para y, ya sea con el uso de trace y zoom o al seleccionar la operación "minimum".

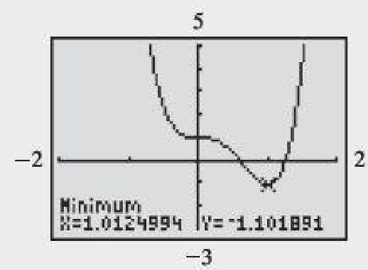


FIGURA 11.22 El rango de $f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$ es aproximadamente $[-1.10, \infty)$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES

Para alentar el ahorro, una compañía de gas cobra dos tarifas. Los clientes pagan \$0.53 por termia (1 millón de calorías) para un consumo que va de 0 a 70 termias, y \$0.74 por cada termia por encima de 70. Grafique la función definida por partes que representa el costo mensual de t termias de gas.

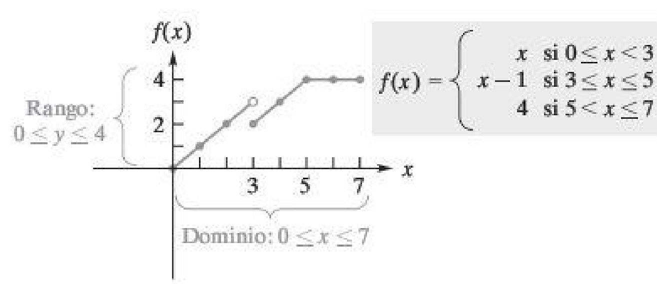
EJEMPLO 7 Gráfica de una función definida por partes

Grafique la función definida por partes.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 3 \\ x - 1 & \text{si } 3 \le x \le 5 \\ 4 & \text{si } 5 < x \le 7 \end{cases}$$

Solución: El dominio de f es $0 \le x \le 7$. Se presenta la gráfica en la figura 11.23, donde el *punto que no está relleno* significa que éste *no* se incluye en la gráfica. Observe que el rango de f se compone de todos los números reales y tales que $0 \le y \le 4$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35



x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	1	2	2	3	4	4	4

FIGURA 11.23 Gráfica de una función definida por partes.

Existe una manera fácil de determinar si una curva es o no la gráfica de una función. En la figura 11.24(a) observe que la x dada está asociada con *dos* valores de y: y_1 y y_2. Por lo tanto, la curva *no* es la gráfica de una función de x. Visto de otra manera, se tiene la siguiente regla general llamada **prueba de la recta vertical**. Si una recta *vertical* L puede dibujarse de modo que interseque a una curva en dos puntos al menos, entonces la curva *no* es la gráfica de una función de x. Cuando no puede dibujarse dicha recta vertical, la curva *sí* es la gráfica de una función de x. En consecuencia, las curvas de la figura 11.24 no representan funciones de x, pero las de la figura 11.25 sí.

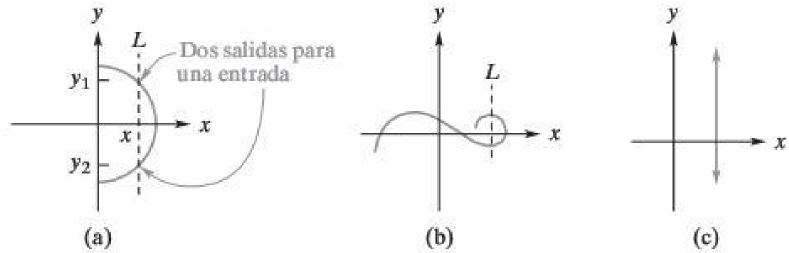


FIGURA 11.24 y no es una función de x.

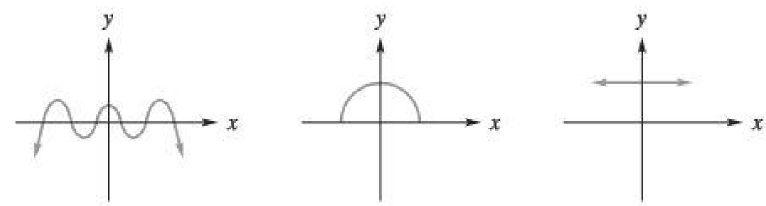


FIGURA 11.25 Funciones de x.

EJEMPLO 8 Una gráfica que no representa una función de x

Grafique $x = 2y^2$.

Solución: Aquí es más fácil seleccionar valores de y, y después encontrar los correspondientes a x. En la figura 11.26 se muestra la gráfica. Por medio de la prueba de la recta vertical, la ecuación $x = 2y^2$ no define una función de x.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39

Después de haber determinado si una curva es la gráfica de una función, quizá mediante la prueba de la recta vertical, existe una forma fácil de decir si la función en cuestión es uno a uno. En la figura 11.20 se observa que $f(4) = 3$ y, en apariencia, también $f(-4) = 3$. Como los valores de entrada diferentes -4 y 4 producen la misma salida, la función no es uno a uno. Visto de otra manera, se tiene la siguiente regla general, llamada la **prueba de la recta horizontal**. Si puede dibujarse una recta *horizontal* L que interseca la gráfica de una función en dos puntos al menos, entonces la función *no* es uno a uno. Cuando no se puede dibujar tal recta horizontal, la función es uno a uno.

x	0	2	2	8	8	18	18
y	0	1	-1	2	-2	3	-3

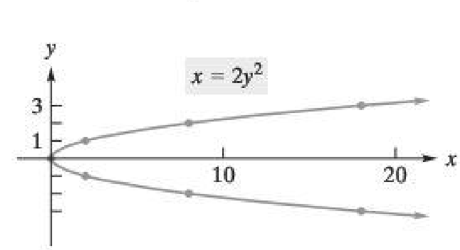


FIGURA 11.26 Gráfica de $x = 2y^2$.

Ejercicios 11.5

En los problemas 1 y 2, localice y marque cada uno de los puntos dados y, si es posible, indique el cuadrante al que pertenece cada punto.

1. $(2, 7), (8, -3), (-\frac{1}{2}, -2), (0, 0)$

2. $(-4, 5), (3, 0), (1, 1), (0, -6)$

3. En la figura 11.27(a) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
(a) Estime $f(0), f(2), f(4)$ y $f(-2)$.
(b) ¿Cuál es el dominio de f?
(c) ¿Cuál es el rango de f?
(d) ¿Cuál es una raíz real de f?

4. En la figura 11.27(b) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
(a) Estime $f(0)$ y $f(2)$.
(b) ¿Cuál es el dominio de f?
(c) ¿Cuál es el rango de f?
(d) ¿Cuál es una raíz real de f?

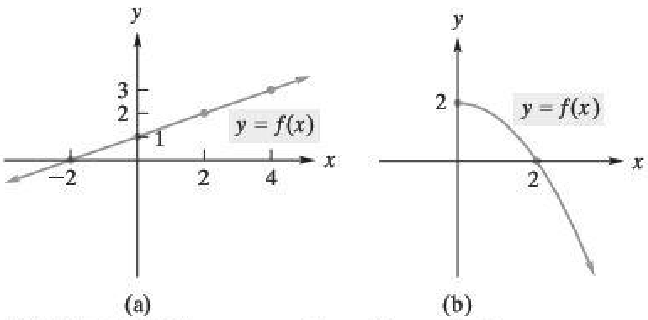


FIGURA 11.27 Diagrama para los problemas 3 y 4.

*5. En la figura 11.28(a) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
(a) Estime $f(0), f(1)$ y $f(-1)$.
(b) ¿Cuál es el dominio de f?
(c) ¿Cuál es el rango de f?
(d) ¿Cuál es una raíz real de f?

6. En la figura 11.28(b) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
(a) Estime $f(0), f(2), f(3)$ y $f(4)$.
(b) ¿Cuál es el dominio de f?
(c) ¿Cuál es el rango de f?
(d) ¿Cuál es una raíz real de f?

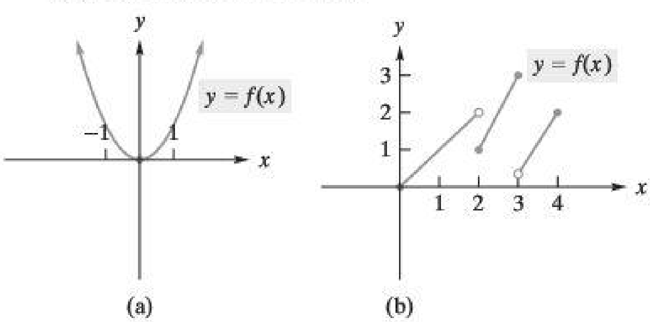


FIGURA 11.28 Diagrama para los problemas 5 y 6.

En los problemas 7 a 20, determine las intersecciones de la gráfica de cada ecuación y haga su bosquejo. Con base en la gráfica, responda: ¿es y una función de x? Si es así, ¿se trata de una función uno a uno? ¿Cuál es su dominio y cuál su rango?

7. $y = 2x$ **8.** $y = x + 1$
*9. $y = 3x - 5$ **10.** $y = 3 - 2x$
*11. $y = x^4$ **12.** $y = \frac{2}{x^2}$
*13. $x = 0$ **14.** $y = 4x^2 - 16$
15. $y = x^3$ **16.** $x = -9$
17. $x = -|y|$ **18.** $x^2 = y^2$
19. $2x + y - 2 = 0$ **20.** $x + y = 1$

En los problemas 21 a 34, grafique cada función y determine su dominio y rango. También determine las intersecciones.

21. $s = f(t) = 4 - t^2$ **22.** $f(x) = 5 - 2x^2$
23. $y = h(x) = 3$ **24.** $g(s) = -17$
25. $y = h(x) = x^2 - 4x + 1$
26. $y = f(x) = x^2 + 2x - 8$
27. $f(t) = -t^3$
28. $p = h(q) = 1 + 2q + q^2$
*29. $s = f(t) = \sqrt{t^2 - 9}$
30. $F(r) = -\frac{1}{r}$
*31. $f(x) = |2x - 1|$
32. $v = H(u) = |u - 3|$
33. $F(t) = \frac{16}{t^2}$
34. $y = f(x) = \frac{2}{x - 4}$

En los problemas 35 a 38, grafique cada función definida por partes y determine su dominio y rango.

*35. $c = g(p) = \begin{cases} p + 1 & \text{si } 0 \le p < 7 \\ 5 & \text{si } p \ge 7 \end{cases}$

36. $\phi(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ 20 - x^2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

37. $g(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x \ge 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ 4 & \text{si } 3 < x \le 5 \\ x - 1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

*39. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 11.29 representan funciones de x?

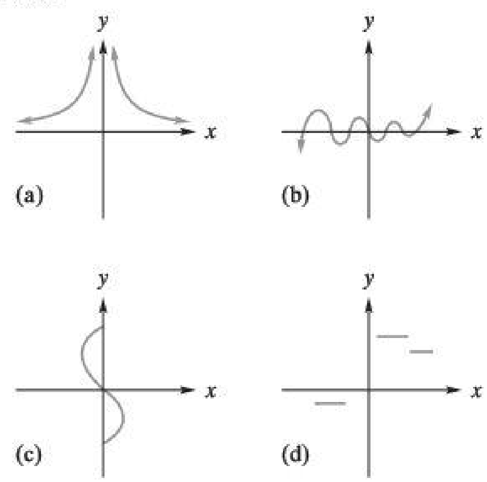


FIGURA 11.29 Diagrama para el problema 39.

40. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 11.30 representan funciones de x uno a uno?

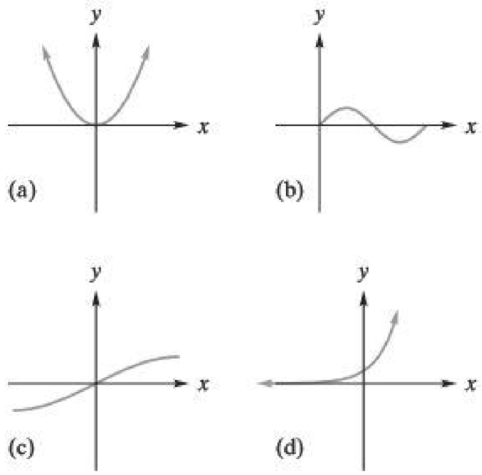


FIGURA 11.30 Diagrama para el problema 40.

41. Pagos de una deuda Tara tiene cargos por \$2400 en sus tarjetas de crédito. Planea liquidarlas por medio de pagos mensuales de \$275. Escriba una ecuación que represente el monto de su deuda, excluyendo los cargos financieros, después de haber hecho x pagos, e identifique las intersecciones con los ejes.

42. Determinación de precios Para alentar un flujo constante de clientes, un restaurante varía el precio de cierto platillo a lo largo del día. De 6:00 p.m. a 8:00 p.m. los clientes pagan el precio completo. En el almuerzo, de 10:30 a.m. hasta las 2:30 p.m., pagan la mitad del precio. De 2:30 p.m. hasta las 4:30 p.m., los clientes obtienen un dólar de ahorro del precio del almuerzo. De 4:30 p.m. hasta las 6:00 p.m. obtienen \$5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. De 8:00 p.m. hasta el cierre, a las 10:00 p.m., se concede a los clientes \$5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. Grafique la función definida por partes para representar el costo del platillo a lo largo del día para un precio de cena de \$18.

43. Programa de oferta De acuerdo con el siguiente programa de oferta (vea el ejemplo 6 de la sección 11.1), grafique cada pareja cantidad-precio; seleccione el eje horizontal para las cantidades posibles. Aproxime los puntos entre los datos por medio de una curva suave. El resultado es la *curva de oferta*. Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio y la oferta (es decir, ¿qué le pasa a la cantidad ofrecida a medida que se incrementa el precio?). ¿Es el precio por unidad una función de la cantidad ofrecida?

Cantidad ofrecida por semana, q	Precio por unidad, p
30	\$10
100	20
150	30
190	40
210	50

44. Programa de demanda La tabla siguiente se conoce como *programa de demanda*. Indica la cantidad de la marca X que los consumidores demandan (esto es, compran) cada semana a cierto precio (en dólares) por unidad. Grafique cada par precio-cantidad; seleccione el eje vertical para los precios posibles, y una los puntos con una curva suave. De esta manera, se aproximan los puntos entre los datos dados. El resultado se llama *curva de demanda*. Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio de la marca X y la cantidad que será demandada (es decir, ¿qué le pasa a la cantidad demandada a medida que el precio disminuye?). ¿Es el precio por unidad una función de la cantidad demandada?

Cantidad demandada, q	Precio por unidad, p
5	\$20
10	10
20	5
25	4

45. Inventario Haga un bosquejo de la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 1000 & \text{si } 0 \le x < 7 \\ -100x + 1700 & \text{si } 7 \le x < 14 \\ -100x + 2400 & \text{si } 14 \le x < 21 \end{cases}$$

Una función como ésta podría describir el inventario y de una compañía en el tiempo x.

46. Psicología En un experimento psicológico sobre información visual, un sujeto observó brevemente un patrón de letras y después se le pidió que recordara tantas letras como le fuese posible. El procedimiento se repitió varias veces. Suponga que y es el número promedio de letras recordadas de patrones con x letras. La gráfica de los resultados se ajusta aproximadamente a la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{si } 4 < x \le 5 \\ 4.5 & \text{si } 5 < x \le 12 \end{cases}$$

Grafique esta función.[6]

En los problemas 47 a 50, utilice una calculadora graficadora para determinar todas las raíces reales de la ecuación dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

47. $5x^3 + 7x = 3$

48. $x^2(x - 3) = 2x^4 - 1$

49. $(9x + 3.1)^2 = 7.4 - 4x^2$

50. $(x - 2)^3 = x^2 - 3$

En los problemas 51 a 54, utilice una calculadora graficadora para determinar todas las raíces reales de la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

51. $f(x) = x^3 + 5x + 7$

52. $f(x) = 2x^4 - 1.5x^3 + 2$

53. $g(x) = x^4 - 1.7x^2 + 2x$

54. $g(x) = \sqrt{3}x^5 - 4x^2 + 1$

En los problemas 55 a 57, utilice una calculadora graficadora para determinar (a) el valor máximo de $f(x)$ y (b) el valor mínimo de $f(x)$ para los valores indicados de x. Redondee las respuestas a dos decimales.

55. $f(x) = x^4 - 4.1x^3 + x^2 + 10 \quad 1 \le x \le 4$

[6]Adaptado de G. R. Loftus y E. F. Loftus. *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley & Sons, Inc., 1976).

56. $f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1 \quad -1 \le x \le 1$

57. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x - 5} \quad 3 \le x \le 5$

58. A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{2}x^3 + 1.1x^2 + 4$, encuentre (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos lugares decimales.

59. Con base en la gráfica de $f(x) = 1 - 4x^3 - x^4$, encuentre (a) el valor máximo de $f(x)$, (b) el rango de f y (c) las raíces reales de f. Redondee los valores a dos lugares decimales.

60. De la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3 + 1.1}{3.8 + x^{2/3}}$, encuentre (a) el rango de f y (b) las intersecciones. (c) ¿f tiene raíces reales? Redondee los valores a dos lugares decimales.

61. Grafique $f(x) = \dfrac{4.1x^3 + \sqrt{2}}{x^2 - 3}$ para $2 \le x \le 5$. Determine (a) el valor máximo de $f(x)$, (b) el valor mínimo de $f(x)$, (c) el rango de f y (d) todas las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

OBJETIVO

Estudiar la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen, y aplicarla en el trazado de curvas.

11.6 Simetría

Examinar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es parte fundamental de las matemáticas. En esta sección se analizarán varias ecuaciones para determinar si sus gráficas tienen *simetría*. El cálculo es de *gran* utilidad en la graficación, pues ayuda a determinar la forma de la gráfica. Proporciona técnicas muy poderosas para establecer si una curva "ondula" o no entre los puntos.

Considere la gráfica de $y = x^2$ de la figura 11.31. La parte que se ubica a la izquierda del eje y es la reflexión sobre dicho eje de la parte de la derecha del mismo eje, y viceversa. Con mayor precisión, si (a, b) es cualquier punto sobre la gráfica, entonces el punto $(-a, b)$ también debe pertenecer a la gráfica. Se dice que esta gráfica es *simétrica con respecto al eje y*.

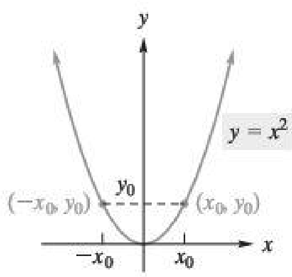


FIGURA 11.31 Simetría con respecto al eje y.

DEFINICIÓN

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje y***, si y sólo si $(-a, b)$ está en la gráfica cuando (a, b) lo está.

EJEMPLO 1 Simetría con respecto al eje y

Utilice la definición anterior para demostrar que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje y.

Solución: Suponga que (a, b) es *cualquier* punto de la gráfica de $y = x^2$. Entonces:

$$b = a^2$$

Debe mostrarse que las coordenadas de $(-a, b)$ satisfacen $y = x^2$. Pero

$$(-a)^2 = a^2 = b$$

muestra que esto es cierto. Así se ha *probado* con álgebra simple lo que la imagen de la gráfica permitía suponer: la gráfica de $y = x^2$ *es* simétrica con respecto al eje y.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

Cuando se prueba la simetría en el ejemplo 1, (a, b) pudo haberse utilizado cualquier punto sobre la gráfica. Por conveniencia, de aquí en adelante se escribirá (x, y) para hacer referencia a cualquier punto en la gráfica. Esto significa que una gráfica es simétrica con respecto al eje y, si al reemplazar x por $-x$ en su ecuación, resulta una ecuación equivalente.

Se muestra otro tipo de simetría mediante la gráfica de $x = y^2$ en la figura 11.32. Aquí la parte de la gráfica que se localiza debajo del eje x es la reflexión respecto al eje x, de la parte que se encuentra por arriba de éste, y viceversa. Si el punto (x, y) pertenece a la gráfica, entonces $(x, -y)$ también pertenece a ella. Se dice que es *simétrica con respecto al eje x*.

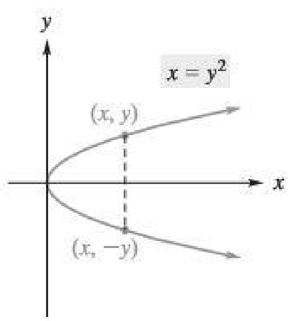


FIGURA 11.32 Simetría con respecto al eje x.

DEFINICIÓN

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje x***, si y sólo si $(x, -y)$ pertenece a la gráfica cuando (x, y) pertenece a ella.

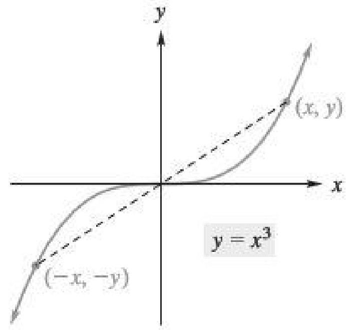


FIGURA 11.33 Simetría con respecto al origen.

Así, la gráfica de una ecuación en x y y tendrá simetría con respecto al eje x, si al reemplazar y por $-y$ resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, al aplicar esta prueba a la gráfica de $x = y^2$, se observa que $(-y)^2 = x$ si y sólo si $y^2 = x$, simplemente porque $(-y)^2 = y^2$. Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje x.

Se ilustra un tercer tipo de simetría, *simetría con respecto al origen*, mediante la gráfica de $y = x^3$ (figura 11.33). Siempre que el punto (x, y) pertenezca a la gráfica, $(-x, -y)$ también pertenecerá a ella.

DEFINICIÓN

Una gráfica es ***simétrica con respecto al origen*** si y sólo si $(-x, -y)$ pertenece a la gráfica cuando (x, y) pertenece a ella.

Así, la gráfica de una ecuación en x y y tendrá simetría con respecto al origen si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$, resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, si se aplica esta prueba a la gráfica de $y = x^3$, que se mostró en la figura 11.33, se obtiene:

$$-y = (-x)^3$$
$$-y = -x^3$$
$$y = x^3$$

donde las tres ecuaciones son equivalentes, en particular la primera y la última. De acuerdo con esto, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

En la tabla 11.1 se resumen las pruebas para la simetría. Cuando se sabe que una gráfica tiene simetría, puede hacerse su bosquejo con menos puntos de los que, de otra manera, serían necesarios.

TABLA 11.1 Pruebas para la simetría

Simetría con respecto al eje x	Reemplace y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Reemplace x por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

EJEMPLO 2 Graficación con intersecciones y simetría

Pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen de $y = \frac{1}{x}$. *Después determine las intersecciones y haga el bosquejo de la gráfica.*

Solución:

Simetría *Con respecto al eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $y = 1/x$, se obtiene:

$$-y = \frac{1}{x} \quad \text{esto es} \quad y = -\frac{1}{x}$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje x.

Con respecto al eje y: al reemplazar x por $-x$ en $y = 1/x$, se obtiene:

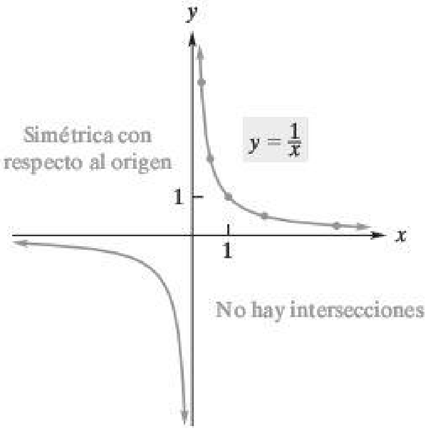
$$y = \frac{1}{-x} \quad \text{esto es} \quad y = -\frac{1}{x}$$

que no es equivalente a la ecuación dada. De este modo la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje y.

Con respecto al origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1/x$, se obtiene:

$$-y = \frac{1}{-x} \quad \text{esto es} \quad y = \frac{1}{x}$$

que es equivalente a la ecuación dada. En consecuencia, la gráfica *sí* es simétrica con respecto al origen.



x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

FIGURA 11.34 Gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

Intersecciones Como x no puede ser 0, la gráfica no tiene intersecciones con el eje y. Si y es 0, entonces $0 = 1/x$, pero esta ecuación no tiene solución. Por lo tanto, no existen intersecciones con el eje x.

Análisis Como no existen intersecciones, la gráfica no puede intersecar a ninguno de los ejes. Si $x \geq 0$, sólo se obtienen puntos en el primer cuadrante. En la figura 11.34 se muestra una parte de la gráfica en el cuadrante I. Por simetría, esa parte se refleja con respecto al origen para obtener la gráfica completa.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

EJEMPLO 3 Graficación con intersecciones y simetría

Pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen de $y = f(x) = 1 - x^4$. Después encuentre las intersecciones y haga el bosquejo de la gráfica.

Solución:

Simetría *Con el eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $y = 1 - x^4$, se obtiene:

$$-y = 1 - x^4 \quad \text{esto es} \quad y = -1 + x^4$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje x.

Con el eje y: al reemplazar x por $-x$ en $y = 1 - x^4$, se obtiene:

$$y = 1 - (-x)^4 \quad \text{esto es} \quad y = 1 - x^4$$

que es equivalente a la ecuación dada. Por ende, la gráfica *sí* es simétrica con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1 - x^4$, se obtiene:

$$-y = 1 - (-x)^4 \quad \text{esto es} \quad -y = 1 - x^4 \quad \text{esto es} \quad y = -1 + x^4$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Así, la gráfica *no* es simétrica con respecto al origen.

Intersecciones Para examinar las intersecciones con el eje x se establece que $y = 0$ en $y = 1 - x^4$. Entonces

$$1 - x^4 = 0$$
$$(1 - x^2)(1 + x^2) = 0$$
$$(1 - x)(1 + x)(1 + x^2) = 0$$
$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Por tanto, las intersecciones x son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Para examinar las intersecciones y, se determina que $x = 0$. Entonces $y = 1$, por lo que $(0, 1)$ es la única intersección y.

Análisis Si se grafican las intersecciones y algunos puntos (x, y) a la derecha del eje y, puede hacerse el bosquejo de la gráfica *completa* mediante la simetría con respecto al eje y (figura 11.35).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

x	y
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{175}{256}$
1	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{65}{16}$

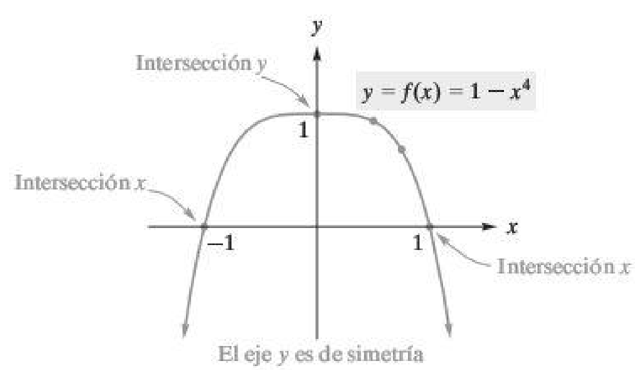
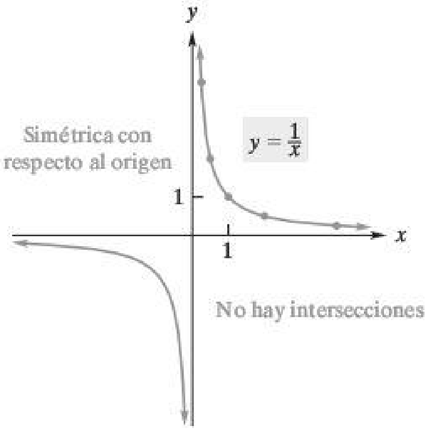


FIGURA 11.35 Gráfica de $y = 1 - x^4$.



x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

FIGURA 11.34 Gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

Intersecciones Como x no puede ser 0, la gráfica no tiene intersecciones con el eje y. Si y es 0, entonces $0 = 1/x$, pero esta ecuación no tiene solución. Por lo tanto, no existen intersecciones con el eje x.

Análisis Como no existen intersecciones, la gráfica no puede intersecar a ninguno de los ejes. Si $x \geq 0$, sólo se obtienen puntos en el primer cuadrante. En la figura 11.34 se muestra una parte de la gráfica en el cuadrante I. Por simetría, esa parte se refleja con respecto al origen para obtener la gráfica completa.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

EJEMPLO 3 Graficación con intersecciones y simetría

Pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen de $y = f(x) = 1 - x^4$. Después encuentre las intersecciones y haga el bosquejo de la gráfica.

Solución:

Simetría *Con el eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $y = 1 - x^4$, se obtiene:

$$-y = 1 - x^4 \quad \text{esto es} \quad y = -1 + x^4$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje x.

Con el eje y: al reemplazar x por $-x$ en $y = 1 - x^4$, se obtiene:

$$y = 1 - (-x)^4 \quad \text{esto es} \quad y = 1 - x^4$$

que es equivalente a la ecuación dada. Por ende, la gráfica *sí* es simétrica con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1 - x^4$, se obtiene:

$$-y = 1 - (-x)^4 \quad \text{esto es} \quad -y = 1 - x^4 \quad \text{esto es} \quad y = -1 + x^4$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Así, la gráfica *no* es simétrica con respecto al origen.

Intersecciones Para examinar las intersecciones con el eje x se establece que $y = 0$ en $y = 1 - x^4$. Entonces

$$1 - x^4 = 0$$
$$(1 - x^2)(1 + x^2) = 0$$
$$(1 - x)(1 + x)(1 + x^2) = 0$$
$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Por tanto, las intersecciones x son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Para examinar las intersecciones y, se determina que $x = 0$. Entonces $y = 1$, por lo que $(0, 1)$ es la única intersección y.

Análisis Si se grafican las intersecciones y algunos puntos (x, y) a la derecha del eje y, puede hacerse el bosquejo de la gráfica *completa* mediante la simetría con respecto al eje y (figura 11.35).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

x	y
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{175}{256}$
1	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{65}{16}$

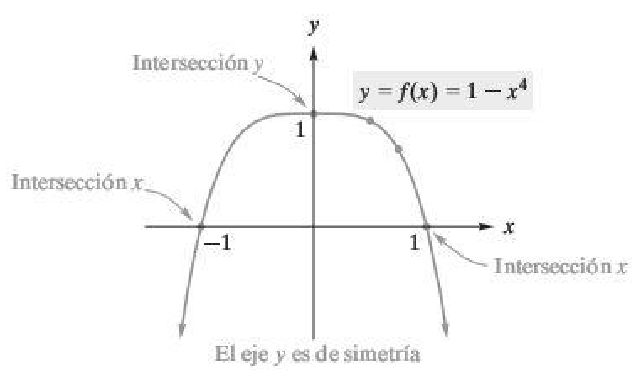


FIGURA 11.35 Gráfica de $y = 1 - x^4$.

La única *función* cuya gráfica es simétrica con respecto al eje x es la función constante 0.

La función constante $f(x) = 0$, para toda x, puede identificarse fácilmente como simétrica con respecto al eje x. En el ejemplo 3 se mostró que la gráfica de $y = f(x) = 1 - x^4$ no tiene simetría respecto al eje x. Para cualquier *función* f, suponga que la gráfica de $y = f(x)$ tiene simetría con el eje x. De acuerdo con la definición, esto significa que también se tiene que $-y = f(x)$. Lo anterior indica que para una x arbitraria en el dominio de f se tiene $f(x) = y$ y $f(x) = -y$. Puesto que para una función cada valor de x determina un solo valor de y, se debe tener que $y = -y$, y esto implica $y = 0$. Como x es arbitraria, se sigue que si la gráfica de una *función* es simétrica con respecto al eje x, entonces la función debe ser la constante 0.

EJEMPLO 4 Graficación con intersecciones y simetría

Examine la gráfica $4x^2 + 9y^2 = 36$, *para las intersecciones y simetrías. Haga el bosquejo de la gráfica.*

Solución:

Intersecciones Si $y = 0$, entonces $4x^2 = 36$, de esta manera $x = \pm 3$. Por lo tanto, las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Si $x = 0$, entonces $9y^2 = 36$ y de esta manera, $y = \pm 2$. Por lo tanto, las intersecciones con el eje y son $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Simetría *Con el eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$, se obtiene:

$$4x^2 + 9(-y)^2 = 36 \quad \text{esto es} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

como se obtiene la ecuación original, puede afirmarse que existe simetría con respecto al eje x.

Con el eje y: al reemplazar x por $-x$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$, se obtiene:

$$4(-x)^2 + 9y^2 = 36 \quad \text{esto es} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

de nuevo se obtiene la ecuación original, de modo que también existe simetría con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$, se obtiene:

$$4(-x)^2 + 9(-y)^2 = 36 \quad \text{esto es} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

como ésta es la ecuación original, la gráfica también es simétrica con respecto al origen.

Análisis En la figura 11.36 se grafican las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante. Después los puntos se unen por medio de una curva suave. Los puntos del cuarto cuadrante se obtienen por simetría con respecto al eje x. Después, por simetría con respecto al eje y, se determina toda la gráfica. Existen otras formas de graficar la ecuación mediante la simetría. Por ejemplo, después de graficar las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante, por simetría con respecto al origen puede obtenerse el tercer cuadrante. Por simetría con respecto al eje x (o al eje y) puede obtenerse la gráfica completa.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

Este hecho puede ayudar a ahorrar tiempo durante la verificación de las simetrías.

En el ejemplo 4 la gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen. Puede mostrarse que **para cualquier gráfica, si existen dos de los tres tipos de simetría, entonces el tipo restante también debe existir**.

x	y
± 3	0
0	± 2
1	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$
2	$\frac{2\sqrt{5}}{3}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$

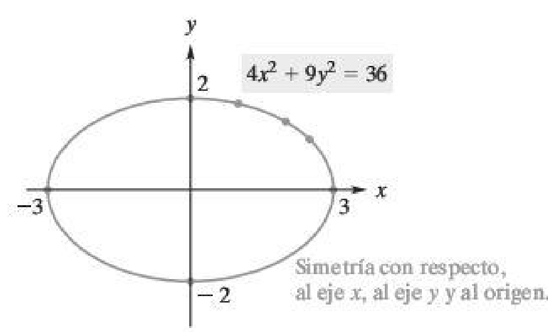


FIGURA 11.36 Gráfica de $4x^2 + 9y^2 = 36$.

EJEMPLO 5 Simetría con respecto a la recta $y = x$

DEFINICIÓN

Una gráfica es ***simétrica con respecto a la recta*** $y = x$, si y sólo si (b, a) está en la gráfica cuando (a, b) lo está.

Otra forma de establecer la definición es decir que al intercambiar los papeles de x y y en la ecuación dada se obtiene una ecuación equivalente.

Use la definición anterior para mostrar que $x^2 + y^2 = 1$ es simétrica con respecto a la línea $y = x$.

Solución: Al intercambiar los papeles de x y y se obtiene $y^2 + x^2 = 1$, lo cual es equivalente a $x^2 + y^2 = 1$. Así que $x^2 + y^2 = 1$ es simétrica con respecto a $y = x$.

El punto con coordenadas (b, a) es la reflexión sobre (imagen especular en) la línea $y = x$ del punto (a, b). Si f es una función uno a uno, $b = f(a)$ si y sólo si $a = f^{-1}(b)$. Así que la gráfica de f^{-1} es la reflexión (imagen especular) en la línea $y = x$ de la gráfica de f. Es interesante notar que para *cualquier* función f puede obtenerse la reflexión de la gráfica de f. Sin embargo, la imagen resultante puede no ser la gráfica de una función. Para que esta imagen reflejada sea la gráfica de una función, debe pasar la prueba de la recta vertical. No obstante, las rectas verticales y horizontales son reflejos, una de la otra, sobre la línea $y = x$, y se observa que para que la imagen reflejada de la gráfica de f pase la prueba de la recta vertical, la gráfica de f debe pasar la prueba de la línea horizontal. Ocurre esto último precisamente si f es uno a uno, que a su vez sucede si y sólo si f tiene una inversa.

EJEMPLO 6 Simetría y funciones inversas

Bosqueje la gráfica de $g(x) = 2x + 1$ y su inversa en el mismo plano.

Solución: La gráfica de g es la línea recta con pendiente 2 e intersección de y. Esta línea, la recta $y = x$, y el reflejo de $y = 2x + 1$ en $y = x$ se muestran en la figura 11.37.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

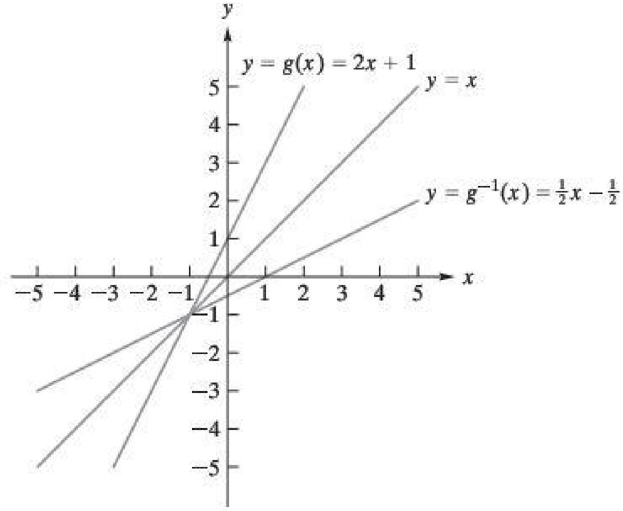


FIGURA 11.37 Gráfica de $y = g(x)$ y $y = g^{-1}(x)$.

Ejercicios 11.6

En los problemas 1 a 16, determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de las gráficas de las ecuaciones. También pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y, al origen y a la línea y = x. No haga el bosquejo de las gráficas.

1. $y = 5x$

2. $y = f(x) = x^2 - 4$

3. $2x^2 + y^2x^4 = 8 - y$

4. $x = y^3$

5. $16x^2 - 9y^2 = 25$

6. $y = 57$

*7. $x = -2$

8. $y = |2x| - 2$

*9. $x = -y^{-4}$

10. $y = \sqrt{x^2 - 25}$

11. $x - 4y - y^2 + 21 = 0$

12. $x^2 + xy + y^3 = 0$

13. $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 1}$

14. $x^2 + xy + y^2 = 0$

15. $y = \dfrac{3}{x^3 + 8}$

16. $y = \dfrac{x^4}{x + y}$

En los problemas 17 a 24, determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de las gráficas de las ecuaciones. También, pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y, al origen y a la línea y = x. Después haga el bosquejo de las gráficas.

17. $3x + y^2 = 9$

18. $x - 1 = y^4 + y^2$

*19. $y = f(x) = x^3 - 4x$

20. $3y = 5x - x^3$

21. $|x| - |y| = 0$

22. $x^2 + y^2 = 16$

*23. $9x^2 + 4y^2 = 25$

24. $x^2 - y^2 = 4$

25. Pruebe que la gráfica de $y = f(x) = 5 - 1.96x^2 - \pi x^4$ es simétrica con respecto al eje y, y después grafique la función. (a) Haga uso de la simetría en donde sea posible para encontrar todas las intersecciones. Determine (b) el valor máximo de $f(x)$, y (c) el rango de f. Redondee todos los valores a dos lugares decimales.

26. Pruebe que la gráfica de $y = f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 5$ es simétrica con respecto al eje y, y después grafique la función. Determine todas las raíces reales de f. Redondee sus respuestas a dos lugares decimales.

*27. Bosqueje la gráfica de $f(x) = -3x + 2$ y su inversa en el mismo plano.

OBJETIVO

Familiarizarse con las formas de las gráficas de seis funciones básicas y considerar la traslación, la reflexión, y el alargamiento y contracción verticales de la gráfica de una función.

11.7 Traslaciones y reflexiones

Hasta ahora, el enfoque de este texto en relación con las gráficas se ha basado en la graficación de puntos y en el uso de cualquier posible simetría. Pero esta técnica no es necesariamente la ruta predilecta. Más adelante se analizarán gráficas con otras técnicas. Sin embargo, algunas funciones y las gráficas a las que están asociadas aparecen con tanta frecuencia, que resulta útil memorizarlas. En la figura 11.38 se muestran seis de tales funciones.

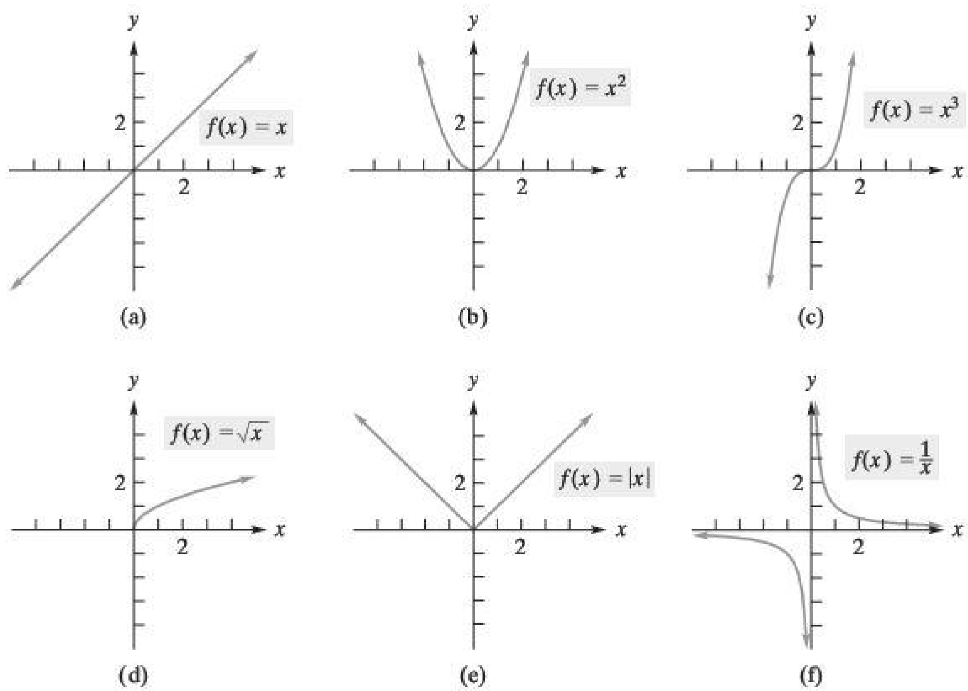


FIGURA 11.38 Funciones utilizadas con frecuencia.

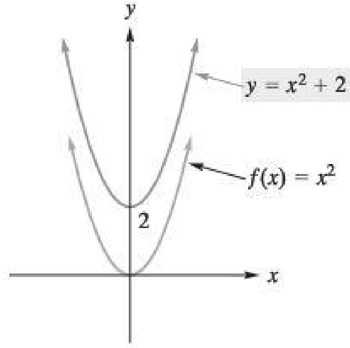


FIGURA 11.39 Gráfica de $y = x^2 + 2$.

A veces, al modificar una función mediante una manipulación *algebraica*, puede obtenerse la gráfica de la nueva función a partir de la gráfica de la función original, mediante una manipulación *geométrica*. Por ejemplo, puede utilizarse la gráfica de $f(x) = x^2$ para graficar $y = x^2 + 2$. Observe que $y = f(x) + 2$. Por lo tanto, para cada x, la ordenada correspondiente para la gráfica de $y = x^2 + 2$ es 2 unidades mayor que la ordenada para la gráfica de $f(x) = x^2$. Esto significa que la gráfica de $y = x^2 + 2$ es simplemente la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada o *trasladada* 2 unidades hacia arriba (vea la figura 11.39). Se dice que la gráfica de $y = x^2 + 2$ es una *transformación* de la gráfica de $f(x) = x^2$. La tabla 11.2 presenta una lista de los tipos básicos de transformaciones.

TABLA 11.2 Transformaciones, $c > 0$

Ecuación	**Cómo transformar la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación**
$y = f(x) + c$	Desplazar c unidades hacia arriba
$y = f(x) - c$	Desplazar c unidades hacia abajo
$y = f(x - c)$	Desplazar c unidades hacia la derecha
$y = f(x + c)$	Desplazar c unidades hacia la izquierda
$y = -f(x)$	Reflejar con respecto al eje x
$y = f(-x)$	Reflejar con respecto al eje y
$y = cf(x) \quad c > 1$	Alargar verticalmente alejándose del eje x por un factor c
$y = cf(x) \quad c \quad 1$	Contraer verticalmente hacia el eje x por un factor c

EJEMPLO 1 Traslación horizontal

Haga el bosquejo de la gráfica de $y = (x - 1)^3$.

Solución: Se observa que $(x - 1)^3$ es x^3 en donde x ha sido reemplazada por $x - 1$. Por lo tanto, si $f(x) = x^3$, entonces $y = (x - 1)^3 = f(x - 1)$, que tiene la forma $f(x - c)$, donde $c = 1$. De la tabla 11.2, la gráfica de $y = (x - 1)^3$ es la gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada una unidad a la derecha (vea la figura 11.40).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

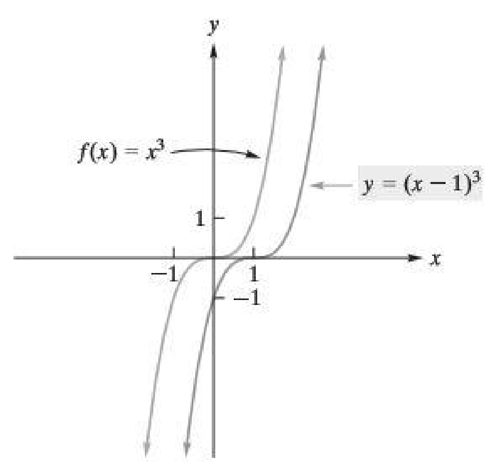


FIGURA 11.40 Gráfica de $y = (x - 1)^3$.

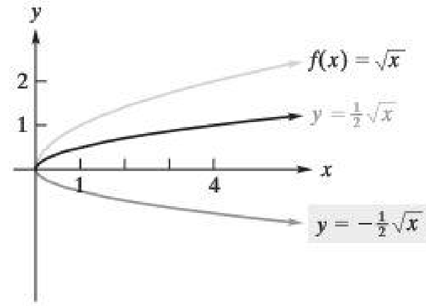


FIGURA 11.41 Para graficar $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$, comprima $y = \sqrt{x}$ y refleje el resultado con respecto al eje x.

EJEMPLO 2 Contracción y reflexión

Bosqueje la gráfica de $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Solución: Este problema puede resolverse en dos pasos. Primero, observe que $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ es $\sqrt{x}$ multiplicada por $\frac{1}{2}$. Así, si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $\frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}f(x)$, que tiene la forma $cf(x)$, donde $c = \frac{1}{2}$. De modo que la gráfica de $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ es la gráfica de f comprimida verticalmente hacia el eje x por un factor de $\frac{1}{2}$ (transformación 8, tabla 11.2; vea la figura 11.41). Segundo, el signo menos en $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ provoca una reflexión en la gráfica de $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ con respecto al eje x (transformación 5, tabla 11.2; vea la figura 11.41).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Ejercicios 11.7

En los problemas 1 a 12 utilice las gráficas de las funciones de la figura 11.38 y las técnicas de transformación para graficar las funciones dadas.

1. $y = x^3 - 1$

2. $y = -x^2$

***3.** $y = \dfrac{1}{x-2}$

4. $y = \sqrt{x+2}$

***5.** $y = \dfrac{2}{3x}$

6. $y = |x| - 2$

7. $y = |x+1| - 2$

8. $y = -\dfrac{1}{3}\sqrt{x}$

9. $y = 1 - (x-1)^2$

10. $y = (x-1)^2 + 1$

11. $y = \sqrt{-x}$

12. $y = \dfrac{5}{2-x}$

En los problemas 13 a 16, describa qué debe hacerse a la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación dada.

13. $y = -2f(x+3) + 2$

14. $y = f(x+3) - 4$

15. $y = f(-x) - 5$

16. $y = f(3x)$

17. Grafique la función $y = \sqrt[3]{x} + k$ para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Observe las traslaciones verticales comparadas con la primera gráfica.

18. Grafique la función $y = \sqrt[5]{x+k}$ para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$, para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Observe las traslaciones horizontales comparadas con la primera gráfica.

19. Grafique la función $y = k\sqrt[3]{x}$ para $k = 1, 2, \frac{1}{2}$ y 3. Observe la contracción y el alargamiento verticales comparados con la primera gráfica. Grafique la función para $k = -2$. Observe que la gráfica es la misma que la que se obtiene por medio de un alargamiento, en un factor de 2, de la reflexión de $y = \sqrt[3]{x}$ con respecto al eje x.

11.8 Repaso

Términos y símbolos importantes		Ejemplos
Sección 11.1	**Funciones**	
	función dominio rango variable independiente	Ej. 2, p. 78
	variable dependiente valor funcional, $f(x)$	Ej. 3, p. 79
	cociente de diferencia, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$	Ej. 4, p. 79
	función de demanda función de oferta	Ej. 5, Ej. 6, p. 80
Sección 11.2	**Funciones especiales**	
	función constante función polinomial (lineal y cuadrática)	Ej. 1, Ej. 2, pp. 82 y 83
	función racional función definida por partes	Ej. 3, Ej. 4, p. 83
	valor absoluto, $\lvert x\rvert$ factorial, $r!$	Ej. 5, Ej. 6, p. 84

Sección 11.3	**Combinaciones de funciones**	
	$f + g$ $f - g$ fg f/g función compuesta, $f \circ g$	Ej. 1, Ej. 2, pp. 87 y 88
Sección 11.4	**Funciones inversas**	
	función inversa, f^{-1} función uno a uno	Ej. 1, p. 92
Sección 11.5	**Gráficas en coordenadas rectangulares**	
	sistema de coordenadas rectangulares ejes de coordenadas	
	origen plano x, y par ordenado (x, y) coordenadas de un punto	
	cuadrante gráfica de una ecuación intersección x intersección y	Ej. 1, p. 96
	gráfica de una función eje de valores de la función raíces de una función	Ej. 4, p. 97
	prueba de la recta vertical prueba de la recta horizontal	Ej. 8, p. 100
Sección 11.6	**Simetría**	
	simetría con respecto al eje x simetría con respecto al eje y	Ej. 1, p. 103
	simetría con respecto al origen simetría con respecto a $y = x$	Ej. 6, p. 107
Sección 11.7	**Traslaciones y reflexiones**	
	traslaciones horizontales y verticales	Ej. 1, p. 109
	alargamiento y reflexión	Ej. 2, p. 110

Resumen

Una función f es una regla de correspondencia que asigna exactamente un número de salida $f(x)$ a cada número de entrada x. Por lo general, una función se especifica por medio de una ecuación que indica lo que debe hacerse a una entrada x para obtener $f(x)$. Para conseguir un valor particular $f(a)$ de la función, se reemplaza cada x en la ecuación por a.

El dominio de una función consiste en todos los números de entrada y el rango consiste en todos los números de salida. A menos que se especifique lo contrario, el dominio de f consiste en todos los números reales x para los cuales $f(x)$ también es un número real.

Algunos tipos especiales de funciones son las constantes, las polinomiales y las racionales. Una función que está definida por más de una expresión se denomina función definida por partes.

Una función tiene una inversa si y sólo si es uno a uno.

En economía, las funciones de oferta (o demanda) indican una correspondencia entre el precio p de un producto y el número de unidades q del producto que los productores (o consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio.

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar una suma, diferencia, producto, cociente o composición como sigue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Un sistema de coordenadas rectangulares permite representar de manera geométrica ecuaciones con dos variables, en particular aquellas que surgen de funciones. La gráfica de una ecuación en x y y consiste en todos los puntos (x, y) que corresponden a las soluciones de la ecuación. Se grafica un número suficiente de puntos y se conectan (donde sea apropiado), de modo que la forma básica de la gráfica sea evidente. Los puntos donde la gráfica interseca al eje x y al eje y se denominan intersección x e intersección y, respectivamente. Una intersección x se encuentra al determinar y igual a 0 y resolver para x; una intersección y se encuentra al determinar x igual a 0 y resolver para y.

La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ y consiste en todos los puntos $(x, f(x))$ tales que x está en el dominio de f. Las raíces de f son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. Con base en la gráfica de una función es fácil determinar su dominio y rango.

Para verificar que una gráfica representa una función se utiliza la prueba de la recta vertical. Una recta vertical no puede cortar la gráfica de una función en más de un punto.

Para verificar que una función es uno a uno, se utiliza la prueba de la recta horizontal. Una recta horizontal no puede cortar la gráfica de una función uno a uno en más de un punto. Cuando la función pasa la prueba de la recta horizontal, la gráfica de la inversa puede obtenerse al reflejar la gráfica original en la línea $y = x$.

Cuando la gráfica de una ecuación tiene simetría, el efecto de reflexión (imagen especular) permite bosquejar la gráfica con menos puntos que los que serían necesarios de otro modo. Las pruebas para simetría son las siguientes:

Simetría con respecto al eje x	Reemplace y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Reemplace x por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto a $y = x$	Intercambie x y y en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

Algunas veces la gráfica de una función puede obtenerse a partir de una función conocida, por medio de un desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo, un desplazamiento horizontal hacia la derecha o hacia la izquierda, una reflexión con respecto al eje x o al eje y, o bien un alargamiento o una contracción vertical en dirección del eje x. Tales transformaciones están indicadas en la tabla 11.2 de la sección 11.7.

Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

Proporcione el dominio de cada función de los problemas 1 a 6.

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x + 5}$

2. $g(x) = x^4 + 5|x - 1|$

3. $F(t) = 7t + 4t^2$

4. $G(x) = 18$

5. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$

6. $H(s) = \dfrac{\sqrt{s - 5}}{4}$

En los problemas 7 a 14, encuentre los valores de la función para la función dada.

7. $f(x) = 3x^2 - 4x + 7;\ f(0),\ f(-3),\ f(5),\ f(t)$

8. $h(x) = 7;\ h(4), h\left(\dfrac{1}{100}\right), h(-156), h(x + 4)$

9. $G(x) = \sqrt[4]{x - 3};\ G(3), G(19), G(t + 1), G(x^3)$

10. $F(x) = \dfrac{x - 3}{x + 4};\ F(-1), F(0), F(5), F(x + 3)$

11. $h(u) = \dfrac{\sqrt{u + 4}}{u};\ h(5), h(-4), h(x), h(u - 4)$

12. $H(s) = \dfrac{(s - 4)^2}{3};\ H(-2), H(7), H\left(\dfrac{1}{2}\right), H(x^2)$

13. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 1 \\ 4 + x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases};$

$f(4),\ f(-2),\ f(0),\ f(1)$

14. $f(q) = \begin{cases} -q + 1 & \text{si } -1 \le q < 0 \\ q^2 + 1 & \text{si } 0 \le q < 5 \\ q^3 - 99 & \text{si } 5 \le q \le 7 \end{cases};$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right),\ f(0),\ f\left(\dfrac{1}{2}\right),\ f(5),\ f(6)$

En los problemas 15 a 18 encuentre (a) $f(x + h)$ y (b) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, simplifique sus respuestas.

15. $f(x) = 3 - 7x$

16. $f(x) = 11x^2 + 4$

17. $f(x) = 4x^2 + 2x - 5$

18. $f(x) = \dfrac{7}{x + 1}$

19. Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$, encuentre lo siguiente:

(a) $(f + g)(x)$

(b) $(f + g)(4)$

(c) $(f - g)(x)$

(d) $(fg)(x)$

(e) $(fg)(1)$

(f) $\dfrac{f}{g}(x)$

(g) $(f \circ g)(x)$

(h) $(f \circ g)(5)$

(i) $(g \circ f)(x)$

20. Si $f(x) = -x^2$ y $g(x) = 3x - 2$, determine lo siguiente:

(a) $(f + g)(x)$

(b) $(f - g)(x)$

(c) $(f - g)(-3)$

(d) $(fg)(x)$

(e) $\dfrac{f}{g}(x)$

(f) $\dfrac{f}{g}(2)$

(g) $(f \circ g)(x)$

(h) $(g \circ f)(x)$

(i) $(g \circ f)(-4)$

En los problemas 21 a 24, encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

21. $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ g(x) = x + 1$

22. $f(x) = \dfrac{x + 1}{4},\ g(x) = \sqrt{x}$

23. $f(x) = \sqrt{x + 2},\ g(x) = x^3$

24. $f(x) = 2,\ g(x) = 3$

En los problemas 25 y 26, encuentre las intersecciones de la gráfica de cada ecuación y pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y, al origen y a x = y. No haga un bosquejo de las gráficas.

25. $y = 3x - x^3$

26. $\dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2 + 1} = 4$

En los problemas 27 y 28, encuentre las intersecciones con el eje x y con el eje y de la gráfica de cada ecuación. También examine la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. Después haga un bosquejo de las gráficas.

27. $y = 9 - x^2$

28. $y = 3x - 7$

En los problemas 29 a 32, trace la gráfica de cada función y proporcione su dominio y rango. También determine las intersecciones.

29. $G(u) = \sqrt{u + 4}$

30. $f(x) = |x| + 1$

31. $y = g(t) = \dfrac{2}{|t - 4|}$

32. $h(u) = \sqrt{-5u}$

33. Grafique la siguiente función definida por partes y proporcione su dominio y rango:

$$y = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 0 \\ 2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

34. Utilice la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = \sqrt{x - 2} - 1$.

35. Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$.

36. Ecuación de tendencia Las ventas anuales proyectadas (en dólares) de un producto nuevo están dadas por la ecuación $S = 150\,000 + 3000t$, donde t es el tiempo en años, contados a partir de 2001. Tal ecuación se denomina *ecuación de tendencia*. Encuentre las ventas anuales proyectadas para 2006. ¿Es S una función de t?

37. En la figura 11.42, ¿cuáles gráficas representan funciones de x?

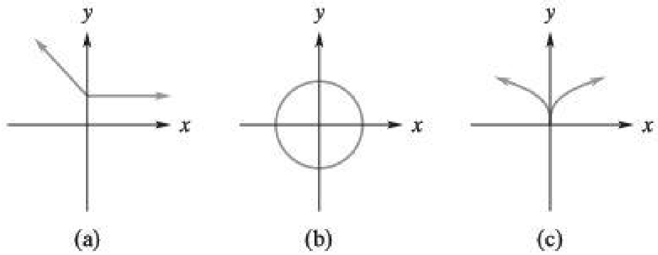


FIGURA 11.42 Diagrama para el problema 37.

38. Si $f(x) = (x^2 - x + 7)^3$, encuentre (a) $f(2)$ y (b) $f(1.1)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

39. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$5x^3 - 7x^2 = 4x - 2$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

40. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$x^4 - 4x^3 = (2x - 1)^2$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. Encuentre todas las raíces reales de:

$$f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

42. Determine el rango de:

$$f(x) = \begin{cases} -2.5x - 4 & \text{si } x < 0 \\ 6 + 4.1x - x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

43. Con base en la gráfica de $f(x) = -x^3 + 0.04x + 7$, encuentre (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

44. Con base en la gráfica de $f(x) = \sqrt{x+5}(x^2 - 4)$, encuentre (a) el valor mínimo de $f(x)$, (b) el rango de f y (c) todas las raíces reales de f. Redondee los valores a dos decimales.

45. Grafique $y = f(x) = x^2 + x^k$, donde $k = 0, 1, 2, 3$ y 4. ¿Para cuáles valores de k la gráfica tiene (a) simetría con respecto al eje y, (b) simetría con respecto al origen?

12

APLICACIONES DIVERSAS

Evaluación de fracciones simples que se utilizarán en los límites de funciones.

12.1 Definición intuitiva de límite

Decimos que el **límite** es el valor **aproximado** de una expresión cuando nos acercamos a un cierto valor (número real).

Si tenemos una expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, que existe para todo número real excepto para el valor donde $Q(x) = 0$; y si $P(x)$ y $Q(x)$, al ser evaluados en un número, quedan de la forma $\frac{0}{0}$, el resultado indica que la expresión no está definida para ese valor. Sin embargo, utilizando el concepto de **límite** podemos encontrar un valor cercano a la expresión cuando nos aproximamos a ese valor.

A continuación mencionaremos los casos con los que podemos enfrentarnos al hacer una evaluación en un número con expresiones del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$, **algunas definidas y otras no**. También veremos los procedimientos algebraicos que existen para encontrar un valor aproximado de la expresión cuando al evaluarla en un número quede de la forma: $\frac{0}{0}$.

Las formas que puede adoptar la expresión son:

a. $\left(\frac{0}{k}\right) = 0$, donde k es una constante.

b. $\left(\frac{k}{0}\right) \neq \exists$ **(no existe)**, donde k es una constante.

c. $\left(\frac{0}{0}\right) =$ **(forma indeterminada)**.

Los procedimientos algebraicos que se utilizan son:

- **Factorización** del numerador, del denominador o de ambos.
- **Racionalización** del numerador o del denominador.
- **Simple desarrollo algebraico** del numerador, del denominador o de ambos.
- **División algebraica o división sintética.**

EJEMPLO **Determinar el valor de la expresión para el valor indicado**

$$\frac{4x - 5}{5x - 1}, \text{para } x = 3$$

Solución: sustituyendo en cada x el valor indicado tenemos que el valor de la expresión es:

$$\frac{4(3)-5}{5(3)-1}=\frac{12-5}{15-1}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$$

Eso significa que cuando $x = 3$ la fracción tiene un valor igual a $\frac{1}{2}$. También puede indicar que si x **se aproxima a 3 la expresión se aproxima a** $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

EJEMPLO Encontrar el valor de la expresión dada para el valor indicado

$$\frac{x-2}{x^2-4}, \text{para } x = 2$$

Solución: sustituyendo $x = 2$ tenemos que el valor de la expresión es la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, esto es:

$$\frac{2-2}{2^2-4}=\frac{0}{4-4}=\frac{0}{0}$$

Lo anterior implica que la expresión **tiene una forma indeterminada** en $x = 2$, pero podemos factorizar el numerador y denominador de tal manera que para $x \neq 2$ o para valores muy cercanos a 2, la expresión sí esté definida:

$$\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x+2}; x \neq 2$$

Por tanto, si evaluamos la expresión en $x = 2$ tenemos que:

$$\frac{1}{x+2}; x = 2 \qquad \frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

Concluimos así que $\frac{x-2}{x^2-4}$ **se aproxima a** $\mathbf{\frac{1}{4}}$ para valores muy cercanos a 2.

EJEMPLO Encontrar el valor de la expresión dada para el valor indicado

$$\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}, \text{para } x = 9$$

Solución: si evaluamos la expresión dada nos queda de la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, esto es:

$$\frac{3-\sqrt{9}}{9-9}=\frac{3-3}{9-9}=\frac{0}{0}$$

Ello indica que en $x = 9$ la expresión **tiene una forma indeterminada**, mientras que para valores muy cercanos a 9 existen dos alternativas para obtener el valor aproximado.

Alternativa I

Factorizar el numerador y denominador:

$$\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}=\frac{3-\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}=\frac{1}{3+\sqrt{x}}; x \neq 9$$

Luego, evaluar $x = 9$ en la última expresión:

$$\frac{1}{3+\sqrt{x}}; x = 9 \qquad \frac{1}{3+\sqrt{9}}=\frac{1}{6},$$

concluyendo así que para valores muy cercanos a 9 el valor de la expresión dada es **aproximadamente** $\mathbf{\frac{1}{6}}$.

Alternativa II

Si no se aprecia si la expresión es o no factorizable, existe la posibilidad de racionalizar, es decir, de multiplicar por el conjugado:

$$\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}=\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}\cdot\frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}=\frac{9-x}{(9-x)(3+\sqrt{x})}=\frac{1}{3+\sqrt{x}};\, x\neq 9$$

Luego, evaluando $x=9$ en esta última expresión, queda $\frac{1}{6}$.

$$\frac{1}{3+\sqrt{x}};\, x=9 \qquad \frac{1}{3+\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$$

Por ambas alternativas se concluye que el valor de la expresión dada es **aproximadamente $\frac{1}{6}$**.

EJEMPLO **Encontrar el valor de la expresión dada para el valor indicado**

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}, \text{para } h=0$$

Solución: evaluando $h=0$ en la expresión nos queda de la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, esto es:

$$\frac{(x+0)^2-x^2}{0}=\frac{x^2-x^2}{0}=\frac{0}{0}$$

Por lo tanto, concluimos que la expresión **tiene una forma indeterminada** en $h=0$, pero podemos desarrollar el numerador y ver qué pasa cuando $\boldsymbol{h}$ se aproxima a cero, esto es:

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h$$

Sustituyendo $h=0$ en la última expresión:

$$2x+h; \qquad h=0$$

$$2x+0=2x$$

12.2 División sintética

La división sintética es una forma abreviada de la división larga ya que se trabaja sólo con los coeficientes de las variables.

EJEMPLO **Encontrar el valor de la expresión dada para el valor indicado**

$$\frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}; x=-2$$

Solución: evaluando la expresión en $x=-2$ tenemos que el resultado es de la forma $\frac{0}{0}$, **así que la expresión tiene una forma indeterminada** en $x=-2$, pero para valores muy cercanos a -2 podemos aproximarnos a un resultado a través de la factorización. El numerador será factorizado a través de división sintética porque es la manera más sencilla de factorizar polinomios de grado $\geq$ a dos. Para efectuar la división sintética damos por hecho que $x=-2$ es una raíz del polinomio puesto que la evaluación en este número dio como resultado cero.

Pasos para efectuar la división sintética

a. Se colocan los coeficientes numéricos del polinomio de mayor a menor con respecto a la potencia de la variable (su grado), en línea (del lado izquierdo). Si no aparece alguna potencia, en su lugar se coloca un cero.

b. Del otro lado de los coeficientes (lado derecho) se coloca la posible raíz del polinomio.
c. Se baja el primer coeficiente para empezar a formar el tercer renglón. Esta cantidad se multiplica por la posible raíz y el resultado se coloca debajo del siguiente coeficiente para empezar a formar el segundo renglón.
d. Se efectúa la suma o resta indicada en el primer y segundo renglones y se repite el paso c hasta terminar con el último coeficiente.
c. La cantidad que está a la derecha es una raíz del polinomio si y sólo si el último coeficiente del tercer renglón (llamado residuo) es cero.
d. Los números que quedan en el tercer renglón son los coeficientes del polinomio llamado cociente, acomodados en orden descendente con respecto a la potencia de la variable. Tómese en cuenta que el grado del cociente es uno menos que el orden del polinomio original.

Representación de los pasos anteriores

$$\begin{array}{ll|l} \multicolumn{2}{l}{\underbrace{a\ b\ c\ d\ \ldots\ldots\ldots}_{\text{coeficientes del polinomio}}} & \text{raíz } (r) \\ \hline & \boxed{0} \longleftarrow \textbf{Residuo} & \\ a\ \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Coeficiente}} & & \end{array}$$

La factorización del polinomio, de acuerdo con la teoría de ecuaciones, quedaría expresada por el producto de: $(x - r)$ (cociente). Esto es:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & +10 & -2 \\ & -2 & 6 & -10 & \\ \hline 1 & -3 & 5 & \boxed{0} & \end{array}$$

La factorización del polinomio es:

$$x^3 - x^2 - x + 10 = (x + 2)\,(x^2 - 3x + 5)$$

Mientras que la factorización de: $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$.

Por lo tanto:

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x + 2)(x^2 - 3x + 5)}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$$

Evaluando esta última expresión en $x = -2$, tenemos que:

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}; x = -2 \qquad \frac{(-2)^2 - 3(-2) + 5}{(-2) + 1} = \frac{4 + 6 + 5}{-1} = -15$$

Se concluye así que cuando $\boldsymbol{x}$ se aproxima a -2 la expresión toma un **valor aproximado de -15**.

Ejercicios 12.1

I. Evaluar las siguientes expresiones racionales para el valor indicado. Si la expresión queda de la forma $\frac{0}{0}$, aplicar algún método algebraico para dar una aproximación para valores muy cercanos al indicado.

1. $\dfrac{x^2 - 6x}{x^2 - 7x + 6}; x = 6$

2. $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}; x = 1$

3. $\dfrac{2x + 6}{4x^2 - 36}; x = -3$

4. $\dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}; h = 0$

5. $\dfrac{h^2 - 16}{h - 4}; h = 4$

6. $\dfrac{a^3}{a^4 + 2a^3}; a = 0$

7. $\dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}; h = 0$

8. $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}; x = 1$

9. $\dfrac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}; x = 9$

10. $\dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}; t = 9$

11. $\dfrac{x^4 - 16}{x - 2}; x = 2$

12. $\dfrac{\sqrt{2 - t} - \sqrt{2}}{t}; t = 0$

13. $\dfrac{t^3 - t^2 - t + 10}{t^2 + 3t + 2}; t = -2$

14. $\dfrac{x^3 - 3x^2 + x + 3}{x + 3}; x = -3$

15. $\dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}; x = 3$

13

EVALUACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Introducción

En algunos temas de cálculo es necesario evaluar todo tipo de expresiones en un cierto valor. En esta sección se realizarán evaluaciones que consisten en sustituir el valor dado en la variable involucrada y efectuar las operaciones indicadas.

Es indispensable conocer la notación con la que se va a trabajar, es decir, cuando una expresión depende de una variable se dice que la expresión está en función de esa variable. Por ejemplo, si la expresión depende de $\boldsymbol{x}$ entonces recibe el nombre de $\boldsymbol{f(x)}$, aunque a la función puede llamársele de muchas formas: $g(x)$, $h(x)$, $w(x)$, etcétera. Cuando la expresión dependa de otra variable su notación será $f(\ )$, $g(\ )$, $h(\ )$, etcétera, y dentro del paréntesis estará la variable involucrada. También puede ocurrir que la expresión dependa de más de una variable y, en tal caso, tendría como notación especial: $f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_k)$, donde cada $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$, representa a cada una de las variables.

EJEMPLO **Evaluar la expresión dada en los valores que se indican**

$$f(x) = 3x + 2$$

Evaluar en:

a. $x = 0$
b. $x = 1$
c. $x = \dfrac{1}{3}$
d. $x = h$
e. $x = \sqrt{2}$
f. $x = -\sqrt{2}$

Solución: lo único que tenemos que hacer es sustituir los valores indicados en cada $\boldsymbol{x}$ que encontremos en la expresión.

a. $f(0) = 3(0) + 2 = 0 + 2 = 2 \Rightarrow \quad f(0) = 2$

b. $f(1) = 3(1) + 2 = 3 + 2 = 5 \Rightarrow \quad f(1) = 5$

c. $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \quad f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3$

d. $f(h) = 3(h) + 2 = 3h + 2 \Rightarrow \quad f(h) = 3h + 2$

e. $f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2}) + 2 = 3\sqrt{2} + 2 \Rightarrow \quad f(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + 2$

f. $f(-\sqrt{2}) = 3(-\sqrt{2}) + 2 = -3\sqrt{2} + 2 \Rightarrow \quad f(-\sqrt{2}) = -3\sqrt{2} + 2$

EJEMPLO **Evaluar la expresión dada en los valores que se indican**

$$g(y) = y^2 - 3y + 1$$

Evaluar en:

a. $y = -1$

b. $y = 0$

c. $y = -\dfrac{2}{3}$

d. $y = x + h$

e. $y = h^2$

f. $y = -\sqrt{2}$

Solución:

a. $g(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 1 = 1 + 3 + 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad g(-1) = 5$

b. $g(0) = (0)^2 - 3(0) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad g(0) = 1$

c. $g\left(\dfrac{-2}{3}\right) = \left(\dfrac{-2}{3}\right)^2 - 3\left(\dfrac{-2}{3}\right) + 1 = \dfrac{4}{9} + 2 + 1$

$$= \frac{4}{9} + 3 = \frac{31}{9} \quad \Rightarrow \quad g\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{31}{9}$$

d. $g(x + h) = (x + h)^2 - 3(x + h) + 1 = x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 1$

$$\Rightarrow \quad g(x + h) = x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 1$$

e. $g(h^2) = (h^2)^2 - 3(h^2) + 1 = h^4 - 3h^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad g(h^2) = h^4 - 3h^2 + 1$

f. $g(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 - 3(-\sqrt{2}) + 1 = 2 + 3\sqrt{2} + 1 \quad \Rightarrow \quad g(-\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + 3$

EJEMPLO **Determinar** $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$; donde $h \neq 0$

a. $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$

b. $f(x) = \sqrt{x}$

Solución: para determinar lo solicitado se puede empezar por obtener $f(x + h)$; luego, como $f(x)$ se conoce, se continúa con las operaciones indicadas. Entonces:

a. $f(x + h) = 4(x + h)^2 - 5(x + h) + 7; f(x) = 4x^2 - 5x + 7$. De aquí que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 7 - (4x^2 - 5x + 7)}{h}$$

$$= \frac{4(x^2 + 2xh + h^2) - 5x - 5h + 7 - 4x^2 + 5x - 7)}{h}$$

$$= \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 - 5x - 5h + 7 - 4x^2 + 5x - 7)}{h}$$

$$= \frac{4h^2 + 8xh - 5h}{h} = \frac{h(4h + 8x - 5)}{h} = 4h + 8x - 5$$

Se concluye que si $f(x) = 4x^2 - 5x + 7 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 4h + 8x - 5$

b. Si $f(x) = \sqrt{x}$, los cálculos son semejantes, esto es:

$$f(x + h) = \sqrt{x + h} \quad \text{y} \quad f(x) = \sqrt{x},$$

por lo tanto:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Al racionalizar el numerador en la última expresión, multiplicando por el conjugado en el numerador (arriba) y en el denominador(abajo), tenemos que:

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Se concluye que si $f(x)=\sqrt{x}\quad\rightarrow\quad\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

Ejercicios 13.1

I. Evaluar las siguientes expresiones en el valor indicado.

1. Si $f(x)=x^2-1$, halle $f(0), f(1), f(\sqrt{2})$ y $f(-2)$.
2. Si $g(x)=x^2+x$, halle $g(0)$, $g(1)$, $g(\sqrt{2})$ y $g(-2)$.
3. Si $h(y)=\sqrt{y+1}$, halle $h(0)$, $h(3)$, $h(-1)$ y $h(-5)$.
4. Si $w(x)=\sqrt{2x+4}$, halle $w(0)$, $w(4)$, $w\left(\frac{1}{2}\right)$, $w\left(-\frac{1}{2}\right)$.
5. Si $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$, halle $f(0), f(1), f(\sqrt{2})$ y $f(-1)$.
6. Si $f(x)=3x^3-x$, halle $f(a), f(a+1), f(a^2), f\left(\frac{1}{a}\right)$ y $f(-a)$.
7. Si $f(x)=2x^3-x^2$, halle $f(b), f(b+1), f(b^2), f\left(\frac{1}{b}\right), f(-\mathrm{b})$.
8. Si $g(x)=x^3-1$, halle $g(-1), g(1), g(a), g\left(\frac{1}{2}\right)$.
9. Si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 4, & x=2\end{cases}$, halle $f(2)$ y $f(-7)$.
10. Si $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\geq 1\\ -x^3, & x<1\end{cases}$, halle $f(1), f(0), f(\sqrt{2x})$ y $f(-2)$.
11. Si $f(x)=\begin{cases}-10 & x<0\\ 0 & \\ 10 & x>0\end{cases}$ $x=0$, halle $f(1), f(0), f\sqrt{2x})$ y $f(-2)$.
12. Encuentre $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$; donde $\boldsymbol{h\neq 0}$ es una constante y:

    a. $f(x)=x^2$
    b. $f(x)=x^2+3x-7$
    c. $f(x)=x^3$
    d. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

13. Encuentre $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$; donde $\boldsymbol{h\neq 0}$ es una constante y:

    a. $f(x)=3x-2$
    b. $f(x)=2x^2-3x+4$
    c. $f(x)=2\sqrt{x}$

14

EL ÁLGEBRA Y SU CONEXIÓN CON EL CÁLCULO

Introducción

En cálculo, un problema se resuelve siguiendo una serie de pasos, la mayor parte de ellos sólo algebraicos. Por tal motivo, en esta sección realizaremos simplificaciones algebraicas pero con ejercicios que signifiquen una aplicación directa al cálculo.

14.1 Racionalización

En el tema de radicales aplicamos la racionalización, generalmente en el denominador. Ahora racionalizaremos el numerador o el denominador de acuerdo con la localización del radical en la expresión algebraica.

EJEMPLO

Racionalice el numerador en $\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

- Primero analice que para eliminar el radical del numerador debe multiplicar por su factor conjugado (es un binomio igual pero con signo diferente): $\sqrt{4+x}+2$.
- Se puede eliminar el radical en el numerador multiplicando el numerador y el denominador de la expresión fraccionaria dada por $\sqrt{4+x}+2$.
- Se efectúan las operaciones en el numerador mientras que en el denominador sólo se dejan indicadas.

$$\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{\left(\sqrt{4+x}\right)^2-2^2}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}$$

$$= \frac{4+x-4}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)} = \frac{x}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{4+x}+2}$$

EJEMPLO

Racionalice el denominador en $\frac{36-t}{6-\sqrt{t}}$.

- Como en el ejemplo anterior, para eliminar el radical del denominador hay que multiplicar por su factor conjugado: $6-\sqrt{t}$.
- Es posible eliminar el radical en el denominador multiplicando numerador y denominador de la expresión fraccionaria dada por $6-\sqrt{t}$.
- Se efectúan las operaciones en el denominador mientras que en el numerador sólo se dejan indicadas.

$$\frac{36-t}{6-\sqrt{t}} = \frac{36-t}{6-\sqrt{t}}\cdot\frac{6+\sqrt{t}}{6+\sqrt{t}} = \frac{(36-t)\left(6+\sqrt{t}\right)}{6^2-\left(\sqrt{t}\right)^2} = \frac{(36-t)\left(6+\sqrt{t}\right)}{36-t}\,6+\sqrt{t}.$$

Ejercicios 14.1

1. $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

2. $\dfrac{x}{\sqrt{7+x}-\sqrt{7}}$

3. $\dfrac{\sqrt{u+4}-3}{u-5}$

4. $\dfrac{25-t}{5-\sqrt{t}}$

5. $\dfrac{4y^2}{\sqrt{y^2+y+1}-\sqrt{y+1}}$

6. $\dfrac{9t^2}{t+2-2\sqrt{t+1}}$

7. $\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

8. $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

9. $\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$

10. $\dfrac{x}{2-\sqrt{4-x}}$

14.2 Simplificación de expresiones que son respuestas para problemas de cálculo

También es posible hallar expresiones algebraicas que son una respuesta para algunos problemas de cálculo, pero éstas deben estar simplificadas y para ello hay que saber aplicar la simplificación algebraica.

EJEMPLO

Simplifique completamente la siguiente expresión algebraica que constituye una respuesta para un problema de cálculo.

$$\underbrace{(3x^2+4x-1)\,(4)\,(2x-3)^3\,(2)}_{\text{Primer término}} + \underbrace{(2x-3)^4\,(6x+4)}_{\text{Segundo término}}$$

Para empezar se debe ordenar la expresión de la siguiente manera:

- En el primer término se multiplica el 4 por el 2 y el resultado se escribe al principio; en el segundo término se factoriza $6x+4$ y el total se acomoda al comienzo del segundo término.

$$8(3x^2+4x-1)\,(2x-3)^3+2(3x+2)\,(2x-3)^4$$

- Enseguida se obtiene el factor común, que es la expresión que se repite en todos los términos, y en este ejemplo es: $2(2x-3)^3$

$$=2(2x-3)^3\left[4(3x^2+4x-1)+(3x+2)\,(2x-3)\right]$$

- Finalmente se efectúan las operaciones que están dentro de los corchetes y se simplifica por completo.

$$=2(2x-3)^3\,(12x^2+16x-4+6x^2-5x-6)$$
$$=2(2x-3)^3\,(18x^2+11x-10)$$
$$=2(2x-3)^3\,(9x+10)\,(2x-1)$$

EJEMPLO

Simplifique completamente la siguiente expresión algebraica que constituye una respuesta para un problema de cálculo.

$$(12x-1)^{\frac{1}{3}}\,(2)\,(x^2-1)\,(2x)+(x^2-1)^2\left(\frac{1}{3}\right)(12x-1)^{-\frac{2}{3}}\,(12)$$

- Primero se ordena la expresión.

$$= 4x(12x - 1)^{\frac{1}{3}}(x^2 - 1) + 4(12x - 1)^{-\frac{2}{3}}(x^2 - 1)^2$$

- Luego se obtiene el factor común.

$$= 4x(12x - 1)^{-\frac{2}{3}}(x^2 - 1)\left[x(12x - 1) + (x^2 - 1)\right]$$

- Finalmente se realizan las operaciones y se simplifica.

$$= 4x(12x - 1)^{-\frac{2}{3}}(x^2 - 1)(12x^2 - x + x^2 - 1)$$

$$= 4x(12x - 1)^{-\frac{2}{3}}(x^2 - 1)(13x^2 - x - 1)$$

$$= \frac{4x(x^2 - 1)(13x^2 - x - 1)}{(12x - 1)^{\frac{2}{3}}}$$

EJEMPLO

Simplifique completamente la siguiente expresión algebraica que constituye una respuesta para un problema de cálculo.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2x - 1}{4x + 1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{4(x + 1)(2) - (2x - x)(4)}{(4x + 1)^2}\right]$$

- Se separan los exponentes del numerador y del denominador de la expresión racional que está elevada al $-\frac{1}{2}$, y se realizan las operaciones que aparecen entre corchetes.

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(2x - 1)^{-\frac{1}{2}}(8x + 2 - 8x + 4)}{(4x + 1)^{-\frac{1}{2}}(4x + 1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\overbrace{(2x - 1)^{-\frac{1}{2}}(6)}^{\text{Multiplicar los números}}}{\underbrace{(4x + 1)^{-\frac{1}{2}}(4x + 1)^2}_{\text{Sumar los exponentes}}}$$

- Se efectúan las operaciones correspondientes sin dejar exponentes negativos en el resultado.

$$= \frac{3}{(2x - 1)^{\frac{1}{2}}(4x + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Ejercicios 14.2

1. $(3x + 2)^3(4)(2x + 3)^3(2) + (2x + 3)^4(3)(3x + 2)^2(3)$
2. $(x^2 - 3)^4(5)(3x^2 - 1)^4(6x) + (3x^2 - 1)^5(4)(x^2 - 3)3^2(2x)$
3. $(5x - 1)^2(-3)(1 - 4x)^{-4}(-4) + (1 - 4x)^{-3}(2)(5x - 1)(5)$
4. $(x^2 - 1)^4(-2)(3 - 2x^2)^{-3}(-4x) + (3 - 2x^2)^{-2}(4)(x^2 - 1)^3(2x)$
5. $(3x - 2)^3\left(\frac{1}{2}\right)(4x + 1)^{-\frac{1}{2}}(4) + (4 + x)^{\frac{1}{2}}(3)(3x - 2)^2(3)$

6. $\dfrac{(4x^2-1)\left(\frac{1}{3}\right)-(3x^2-2)^{-\frac{2}{3}}(6x)-(3x^2-1)^{\frac{1}{3}}(8x)}{(4x^2-1)^2}$

7. $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}(-4x)+(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}(2x)$

8. $\dfrac{(4x+5)^{\frac{1}{2}}(-6x)-(7-3x^2)\left(\frac{1}{2}\right)(4x+5)^{-\frac{1}{2}}(4)}{\left[(4x+5)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$

9. $12(x^2-4)^5(3x+5)^3+10x(3x+5)^4(x^2-4)^4$

10. $12\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{11}\left[\dfrac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2}\right]$

11. $\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{8x^2-3}{x^2+2}\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{(x^2+2)(16x)-(8x^2-3)(2x)}{(x^2+2)^2}$

12. $6(5x^2+2)\left(\frac{1}{2}\right)(x^4+5)^{-\frac{1}{2}}(4x^3)+(x^4+5)^{\frac{1}{2}}(6)(10x)$

13. $(3x+2)^3(4)(2x+3)^3(2)+(2x+3)^4(3)(3x+2)^2(3)$

14. $(x^2-3)^4(5)(3x^2-1)^4(6x)+(3x-1)^5(4)(x^2-3)^3(2x)$

15. $(5x-1)^2(-3)(1-4x)^{-4}(-4)+(1-4x)^{-3}(2)(5x-1)(5)$

ISBN 978-607-32-0836-9

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net